СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2025. Т. 28, № 4. С. 81–95

УДК 531.36

ОБ ОСОБЫХ РЕШЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ ШАРА С МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2025 В. Д. Иртегов[a], Т. Н. Титоренко[b]

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, г. Иркутск 664033, Россия

E-mails: [a]irteg@icc.ru, [b]titor@icc.ru

Поступила в редакцию 30.07.2024 г.; после доработки 04.11.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Исследуются дифференциальные уравнения, описывающие качение без скольжения уравновешенного динамически несимметричного шара по неподвижной горизонтальной плоскости в поле тяжести. Шар содержит многосвязную полость, целиком заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей безвихревое движение. Методом Рауса — Ляпунова с использованием символьных вычислений находятся особые решения уравнений движения, даётся их механическая интерпретация и исследуется устойчивость. Рассматривается случай, когда механическая система находится под воздействием произвольного линейного потенциального силового поля.

Ключевые слова: неголономная система, особые решения, устойчивость, символьные вычисления

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.406

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задаче о вращении твёрдого тела с неподвижной точкой, содержащего полости, заполненные однородной идеальной жидкостью, посвящено немало работ, начиная с исследований Жуковского [1], Пуанкаре [2], Стеклова [3] и др. Исследования были обусловлены изучением движения Земли, для которой твёрдое тело с жидким наполнением служило моделью. Интерес к этой задаче в различных постановках сохраняется до сих пор [4]–[6]. Твёрдое тело с полостями, наполненными жидкостью, используется как модель для исследования геофизических процессов [7], движения космических аппаратов [8].

В настоящей работе рассматривается некоторое обобщение данной задачи: качение без скольжения шара по неподвижной горизонтальной плоскости в поле тяжести. Шар содержит многосвязную полость, целиком заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей безвихревое движение. Предполагается, что центр масс системы совпадает с геометрическим центром шара. В различных постановках эта задача исследовалась в работах [9], [10]. Для описания движения тела (шар+жидкость) вводится подвижная система координат $Oxyz$, начало которой совпадает с центром масс тела, а её оси Ox, Oy и Oz направлены вдоль его главных осей инерции для точки O. В этой системе координат уравнения движения тела имеют вид [11]:

$$
\begin{gathered}
A_{*1}\dot{\omega}_1 + (A_{*3} - A_{*2})\omega_2\omega_3 + A_{*3}\Omega_3\omega_2 - A_{*2}\Omega_2\omega_3 = \gamma_1\omega_n, \\
A_{*2}\dot{\omega}_2 + (A_{*1} - A_{*3})\omega_1\omega_3 + A_{*1}\Omega_1\omega_3 - A_{*3}\Omega_3\omega_1 = \gamma_2\omega_n, \\
A_{*3}\dot{\omega}_3 + (A_{*2} - A_{*1})\omega_1\omega_2 + A_{*2}\Omega_2\omega_1 - A_{*1}\Omega_1\omega_2 = \gamma_3\omega_n, \\
\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3,\ \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1,\ \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2, \\
\omega_n = \dot{\omega}_1\gamma_1 + \dot{\omega}_2\gamma_2 + \dot{\omega}_3\gamma_3.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь $A_{*i} = A_i/(mr^2) + 1$, $\Omega_i = k_i/(A_i + mr^2)$, $i = 1, 2, 3$, m — сумма масс твёрдого тела и жидкости, r — радиус шара, A_i, $i = 1, 2, 3$, — момент инерции тела, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости шара, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор, направленный по вертикали вверх, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ — вектор момента количества циклического движения жидкости.

Система (1) допускает следующие первые интегралы:

$$
\begin{gathered}
V_0 = A_{*1}\omega_1^2 + A_{*2}\omega_2^2 + A_{*3}\omega_3^2 - \tilde{\omega}_n^2 = \mathrm{const}, \quad \tilde{\omega}_n = \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + \omega_3\gamma_3, \\
V_1 = [A_{*1}(\omega_1 + \Omega_1) - \tilde{\omega}_n\gamma_1]^2 + [A_{*2}(\omega_2 + \Omega_2) - \tilde{\omega}_n\gamma_2]^2 + [A_{*3}(\omega_3 + \Omega_3) - \tilde{\omega}_n\gamma_3]^2 = \mathrm{const}, \\
V_2 = A_{*1}(\omega_1 + \Omega_1)\gamma_1 + A_{*2}(\omega_2 + \Omega_2)\gamma_2 + A_{*3}(\omega_3 + \Omega_3)\gamma_3 - \tilde{\omega}_n = \mathrm{const}, \\
V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1
\end{gathered} \tag{2}
$$

и является вполне интегрируемой.

Рассматривается также случай, когда механическая система находится под воздействием силового поля с потенциалом $U = b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3$, $b_i = \mathrm{const}$, где $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ — направляющий вектор этого поля. Это может быть, например, постоянное магнитное или электрическое поле [12]. Исследуется частный случай задачи, когда векторы $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\delta}$ параллельны или противоположно направлены. Уравнения движения записываются в виде

$$
\begin{gathered}
A_{*1}\dot{\omega}_1 + (A_{*3} - A_{*2})\omega_2\omega_3 + A_{*3}\Omega_3\omega_2 - A_{*2}\Omega_2\omega_3 = \gamma_1\omega_n + M_{Q_1}, \\
A_{*2}\dot{\omega}_2 + (A_{*1} - A_{*3})\omega_1\omega_3 + A_{*1}\Omega_1\omega_3 - A_{*3}\Omega_3\omega_1 = \gamma_2\omega_n + M_{Q_2}, \\
A_{*3}\dot{\omega}_3 + (A_{*2} - A_{*1})\omega_1\omega_2 + A_{*2}\Omega_2\omega_1 - A_{*1}\Omega_1\omega_2 = \gamma_3\omega_n + M_{Q_3}, \\
\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2,
\end{gathered} \tag{3}
$$

где $\mathbf{M_Q} = \boldsymbol{\gamma} \times \partial U/\partial\boldsymbol{\gamma}$ — вектор момента сил.

Первые интегралы уравнений (3):

$$
\begin{gathered}
2\tilde{V}_0 = A_{*1}\omega_1^2 + A_{*2}\omega_2^2 + A_{*3}\omega_3^2 - \tilde{\omega}_n^2 + 2U = \mathrm{const}, \\
\tilde{V}_1 = A_{*1}(\omega_1 + \Omega_1)\gamma_1 + A_{*2}(\omega_2 + \Omega_2)\gamma_2 + A_{*3}(\omega_3 + \Omega_3)\gamma_3 - \tilde{\omega}_n = \mathrm{const}, \\
\tilde{V}_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.
\end{gathered}
$$

В общем случае система (3) неинтегрируема. Интегрируемость задачи о качении шара в различных постановках обсуждается в [13].

Уравнения (1) по форме совпадают с дифференциальными уравнениями, описывающими качение уравновешенного динамически несимметричного шара с ротором по неподвижной горизонтальной плоскости [14]. Эквивалентность уравнений движения в этих задачах отмечена ещё Жуковским. Задачи о качении шара с ротором возникают, например, в робототехнике [15]. Аналогия уравнений позволяет переносить результаты исследования одних механических систем на другие при соответствующей их интерпретации. В [11] доказана интегрируемость уравнений (1). Данный результат использован в [14] для анализа уравнений движения шара с ротором на основе подхода, изложенного в [16], [17].

В настоящей работе для анализа уравнений (1), (3) применяется метод Рауса — Ляпунова и его обобщения [18]–[20], а также система аналитических вычислений. Находятся особые решения указанных уравнений, в качестве которых рассматриваются инвариантные множества, удовлетворяющие необходимым условиям экстремума первых интегралов задачи. Такие множества называются стационарными. Обладающие указанным свойством нульмерные множества традиционно называют стационарными решениями, множества положительной размерности — стационарными инвариантными многообразиями (ИМ). Найденные решения исследуются на устойчивость по Ляпунову. Даётся их механическая интерпретация.

1. СТАЦИОНАРНЫЕ МНОЖЕСТВА ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛЯ ТЯЖЕСТИ

Перманентные вращения. Под перманентными вращениями в данной задаче будем понимать движения тела вида [21]. Найдём стационарные множества, соответствующие таким движениям. Для этого в дифференциальных уравнениях (1) положим $\dot\omega_1 = \dot\omega_2 = \dot\omega_3 = 0$ и построим для получившейся системы лексикографический базис Грёбнера [22] относительно $\omega_2 > \omega_3 > \gamma_2 > \gamma_3$:

$$\begin{aligned} &((A_1-A_3)\omega_1+k_1)\gamma_3-k_3\gamma_1=0, \quad ((A_1-A_2)\omega_1+k_1)\gamma_2-k_2\gamma_1=0,\\ &((A_1-A_3)\omega_1+k_1)\omega_3-k_3\omega_1=0, \quad ((A_2-A_1)\omega_1-k_1)\omega_2+k_2\omega_1=0. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (4) совместно с интегралом $V_3 = 1$ определяют одномерное ИМ уравнений движения (1), что можно проверить прямым вычислением по определению ИМ: производная, вычисленная от указанных выражений в силу уравнений (1), обращается тождественно в нуль на данных выражениях. Дифференциальное уравнение $\dot\omega_1 = 0$ на этом ИМ имеет семейство решений

$$\omega_1 = \omega_1^0 = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

В исходном фазовом пространстве решениям (5) соответствуют два однопараметрических семейства решений дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{gathered} \omega_1=\omega_1^0, \omega_2=\frac{k_2\omega_1^0}{k_1+(A_1-A_2)\omega_1^0}, \quad \omega_3=\frac{k_3\omega_1^0}{k_1+(A_1-A_3)\omega_1^0},\\ \gamma_1=\pm(k_1+(A_1-A_2)\omega_1^0)(k_1+(A_1-A_3)\omega_1^0)\rho_1^{-1/2},\\ \gamma_2=\pm k_2(k_1+(A_1-A_3)\omega_1^0)\rho_1^{-1/2}, \quad \gamma_3=\pm k_3(k_1+(A_1-A_2)\omega_1^0)\rho_1^{-1/2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Чтобы их получить, нужно подставить (5) в уравнения ИМ. Здесь

$$\rho_1 = k_3^2 z_1^2 + k_2^2 z_2^2 + z_1^2 z_2^2, \quad z_1 = k_1 + (A_1 - A_2)\omega_1^0, \quad z_2 = k_1 + (A_1 - A_3)\omega_1^0,$$

ω_1^0 — параметр семейств.

С механической точки зрения, элементам семейств решений (6) соответствуют перманентные вращения тела исследуемой системы. Вращение происходит вокруг оси, расположенной в теле, с угловой скоростью $\omega^2 = (k_2^2 z_1^{-2} + k_3^2 z_2^{-2} + 1)\omega_1^{0^2}$. Ось вращения проходит через точку касания шара с плоскостью и перпендикулярна этой плоскости.

При $k_2 = k_3 = 0$ решения (6) принимают вид

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \pm 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0$$

и описывают вращение тела относительно одной из главных его осей инерции (оси Ox) с угловой скоростью ω_1^0.

Получим семейства интегралов, которые принимают стационарное значение на найденных решениях. Для этого образуем из первых интегралов задачи (2) их полную линейную комбинацию

$$2K = 2\lambda_0 V_0 - \lambda_1 V_1 - 2\lambda_2 V_2 - \lambda_3 V_3, \tag{7}$$

где $\lambda_j = \text{const}$, $j = 0, \ldots, 3$, — параметры семейства интегралов K, и запишем необходимые условия экстремума K по фазовым переменным

$$\frac{\partial K}{\partial \omega_i} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Из уравнений (8) найдём ограничения на λ_j, при которых решения (6) удовлетворяют этим уравнениям. Подставив полученные выражения в (7), будем иметь

$$\begin{aligned} 2K_{1,2} = 2\Bigg(V_0 \mp \frac{2z_4\omega_1^0}{z_1 z_2}\,V_2 + \frac{\omega_1^0(k_1 + (A_1 + mr^2)\,\omega_1^0)\,z_3}{mr^2 z_1^2 z_2^2}\,V_3\Bigg)\lambda_0 \\ + \Bigg(-V_1 \pm \frac{2z_4(k_1 + A_1\omega_1^0)}{mr^2 z_1 z_2}\,V_2 - \frac{(k_1 + A_1\omega_1^0)(k_1 + (A_1 + 2mr^2)\,\omega_1^0)\,z_3}{m^2 r^4 z_1^2 z_2^2}\,V_3\Bigg)\lambda_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned} z_3 = \big(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\big)\big[k_1^2 + 2k_1(2A_1 - A_2 - A_3)\omega_1^0\big] - 2k_1\big[(A_1 - A_2)k_2^2 + (A_1 - A_3)k_3^2\big]\omega_1^0 \\ + \big\{\big[6A_1^2 + A_2^2 + 4A_2A_3 + A_3^2 - 6A_1(A_2 + A_3)\big](k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \\ - (A_1 - A_2)(5A_1 - A_2 - 4A_3)k_2^2 - (A_1 - A_3)(5A_1 - 4A_2 - A_3)k_3^2\omega_1^{0^2} \\ + 2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(2A_1 - A_2 - A_3)k_1\omega_{1^0}^3 + (A_1 - A_2)^2(A_1 - A_3)^2\big\}\omega_1^{0^4}, \end{aligned}$$

$$z_4 = (k_3^2 z_1^2 + k_2^2 z_2^2 + z_1^2 z_2^2)^{1/2}.$$

Семейство интегралов $K_{1,2}$ распадается на два подсемейства (коэффициенты при λ_0, λ_1). Как само семейство, так и каждое из его подсемейств, принимает стационарное значение на элементах семейств решений (6).

Замечание. Если построить лексикографический базис относительно $\omega_1 > \omega_3 > \gamma_1 > \gamma_3$ или $\omega_1 > \omega_2 > \gamma_1 > \gamma_2$, то, следуя описанному выше способу, получим ещё четыре однопараметрических семейства решений уравнений движения (1):

$$\begin{gathered} \omega_1 = \frac{k_1\omega_2^0}{k_2 + (A_2 - A_1)\omega_2^0}, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_3 = \frac{k_3\omega_2^0}{k_2 + (A_2 - A_3)\omega_2^0}, \\ \gamma_1 = \pm k_1(k_2 + (A_2 - A_3)\omega_2^0)\rho_2^{-1/2}, \\ \gamma_2 = \pm(k_2 + (A_2 - A_1)\omega_2^0)(k_2 + (A_2 - A_3)\omega_2^0)\rho_2^{-1/2}, \\ \gamma_3 = \pm k_3(k_2 + (A_2 - A_1)\omega_2^0)\rho_2^{-1/2} \end{gathered} \tag{10}$$

и

$$\begin{gathered} \omega_1 = \frac{k_1\omega_3^0}{k_3 + (A_3 - A_1)\omega_3^0}, \quad \omega_2 = \frac{k_2\omega_3^0}{k_3 + (A_3 - A_2)\omega_3^0}, \ \omega_3 = \omega_3^0, \\ \gamma_1 = \pm k_1(k_3 + (A_3 - A_2)\omega_3^0)\rho_3^{-1/2}, \quad \gamma_2 = \pm k_2(k_3 + (A_3 - A_1)\omega_3^0)\rho_3^{-1/2}, \\ \gamma_3 = \pm(k_3 + (A_3 - A_1)\omega_3^0)(k_3 + (A_3 - A_2)\omega_3^0)\rho_3^{-1/2}. \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь

$$\rho_2 = k_1^2\tilde{z}_1^2 + k_3^2\tilde{z}_2^2 + \tilde{z}_1^2\tilde{z}_2^2, \quad \rho_3 = k_1^2\hat{z}_1^2 + k_2^2\hat{z}_2^2 + \hat{z}_1^2\hat{z}_2^2, \quad \tilde{z}_1 = k_2 + (A_2 - A_3)\omega_2^0,$$

$$\tilde{z}_2 = k_2 + (A_2 - A_1)\omega_2^0, \quad \hat{z}_1 = k_3 + (A_3 - A_2)\omega_3^0, \quad \hat{z}_2 = k_3 + (A_3 - A_1)\omega_3^0,$$
$$\omega_2^0, \quad \omega_3^0 - \text{параметры семейств.}$$

При $k_1 = k_3 = 0$ решения (10) и $k_1 = k_2 = 0$ решения (11) соответственно принимают вид

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm 1, \quad \gamma_3 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_3^0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1$$

и описывают вращение тела относительно его главных осей инерции.

Положения равновесия. Найдём стационарные множества, соответствующие положениям равновесия тела.

Очевидно, уравнения (1) имеют решение $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$. Последние соотношения совместно с интегралом $V_3 = 1$ определяют ИМ коразмерности 4 этих уравнений. Уравнения ИМ:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{12}$$

Дифференциальные уравнения $\dot{\gamma}_2 = 0$, $\dot{\gamma}_3 = 0$ на ИМ (12) имеют семейство решений:

$$\gamma_2 = \gamma_2^0 = \mathrm{const}, \quad \gamma_3 = \gamma_3^0 = \mathrm{const}\,. \tag{13}$$

Решениям (13) в исходном фазовом пространстве соответствуют два двухпараметрических семейства решений дифференциальных уравнений (1):

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \pm(1 - \gamma_2^{0^2} - \gamma_3^{0^2})^{1/2}, \quad \gamma_2 = \gamma_2^0, \quad \gamma_3 = \gamma_3^0, \tag{14}$$

здесь γ_2^0, γ_3^0 — параметры семейств.

С механической точки зрения, элементы семейств решений (14) представляют собой положения равновесия исследуемой механической системы.

Как и в предыдущем случае, используя уравнения стационарности (8), найдём, что интеграл V_0 принимает стационарное значение на ИМ (12) и элементах семейств решений (14).

2. СТАЦИОНАРНЫЕ МНОЖЕСТВА В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Положения равновесия. В рассматриваемом случае существует только два положения равновесия тела. Для их нахождения можно использовать уравнения стационарности интеграла $2W = 2(\lambda_0 \tilde{V}_0 - \lambda_1 \tilde{V}_1) - \lambda_2 \tilde{V}_2$:

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_i} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Полагая в (15) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ и разрешая получившиеся уравнения относительно $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda_1, \lambda_2$, будем иметь

$$\begin{gathered}\gamma_3 = \pm b_3 \rho^{-1}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \pm \rho \lambda_0, \\ \rho = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{1/2}.\end{gathered} \tag{16}$$

Первые три соотношения (16) совместно с $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ определяют два решения дифференциальных уравнений (3):

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \pm b_1 \rho^{-1}, \quad \gamma_2 = \pm b_2 \rho^{-1}, \quad \gamma_3 = \pm b_3 \rho^{-1}. \tag{17}$$

С механической точки зрения, эти решения соответствуют положениям равновесия тела.

Подставив значения λ_1, λ_2 (16) в выражения для W, получим интегралы, принимающие стационарное значение на решениях (17):

$$W_{1,2} = (2\tilde{V}_0 \mp \rho\tilde{V}_2)\lambda_0. \tag{18}$$

Маятниковые движения. При следующих ограничениях на параметры задачи $k_1 = k_3 = b_2 = 0$ соотношения $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$, $\gamma_2 = 0$ определяют ИМ коразмерности 3 уравнений движения (3), что можно проверить, продифференцировав данные соотношения в силу указанных уравнений.

Дифференциальные уравнения на этом ИМ имеют вид

$$\dot{\omega}_2 = \frac{mr^2(b_1\gamma_3 - b_3\gamma_1)}{A_2 + mr^2}, \quad \dot{\gamma}_1 = -\gamma_3\omega_2, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2$$

и описывают маятникоподобные колебания тела относительно его неподвижной оси Oy. Такие движения возможны, в частности, когда ось параллельна плоскости.

Ещё два ИМ подобного вида существуют при $k_2 = k_3 = b_1 = 0$ и $k_1 = k_2 = b_3 = 0$. Дифференциальные уравнения на этих ИМ описывают маятниковые движения тела соответственно относительно его неподвижной оси Ox и Oz. Интеграл $W_3 = \tilde{V}_1^2$ принимает стационарное значение на этих ИМ.

3. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ И ИМ

3.1. При наличии поля тяжести

Перманентные вращения. Исследуем устойчивость элементов семейств решений (6). Для уменьшения объёма вычислений ограничимся случаем $\lambda_1 = 0, k_1 = 0, A_1 = 2A_3, A_2 = 3/2A_3$. Семейство интегралов $K_{1,2}$ (9) будем использовать для получения достаточных условий. При указанных ограничениях на параметры семейства решений и интегралы примут вид

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \frac{2k_2}{A_3}, \quad \omega_3 = \frac{k_3}{A_3}, \quad \gamma_1 = \pm A_3\omega_1^0\varrho_1^{-1}, \quad \gamma_2 = \pm 2k_2\varrho_1^{-1}, \quad \gamma_3 = \pm k_3\varrho_1^{-1}, \tag{19}$$

$$\tilde{K}_{1,2} = V_0 \mp \frac{\varrho_1}{A_3}V_2 + \frac{(2A_3 + mr^2)\varrho_1^2}{mr^2A_3^2}V_3,$$

здесь $\varrho_1 = (4k_2^2 + k_3^2 + A_3^2\omega_1^{0^2})^{1/2}$.

Введём отклонения от невозмущённого решения:

$$y_1 = \gamma_1 \mp A_3\omega_1^0\varrho_1^{-1}, \quad y_2 = \gamma_2 \mp 2k_2\varrho_1^{-1}, \quad y_3 = \gamma_3 = \pm k_3\varrho_1^{-1},$$
$$y_4 = \omega_1 - \omega_1^0, \quad y_5 = \omega_2 - \frac{2k_2}{A_3}, \quad y_6 = \omega_3 - \frac{k_3}{A_3}.$$

Вторая вариация $\tilde{K}_{1,2}$ в отклонениях на множестве, определяемом первыми вариациями условных интегралов

$$\delta V_2 = \frac{1}{mr^2}\Big(2\big(A_3\omega_1^0y_1 + 2k_2y_2 + k_3y_3\big) \pm A_3\big(2A_3\omega_1^0y_4 + 3k_2y_5 + k_3y_6\big)\varrho_1^{-1}\Big) = 0,$$
$$\delta V_3 = \pm 2(A_3\omega_1^0y_1 + 2k_2y_2 + k_3y_3)\,\varrho_1^{-1} = 0,$$

записывается следующим образом:

$$\delta^2\tilde{K}_{1,2} = \frac{\varrho_1^2\varrho_2}{A_3^2k_3^2mr^2}\Big(\big(k_3^2 + A_3^2\omega_1^{0^2}\big)y_1^2 + 4k_2A_3\omega_1^0y_1y_2 + \big(4k_2^2 + k_3^2\big)y_2^2\Big)$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{6A_3}{mr^2}+\frac{9k_2^2\varrho_2}{A_3^2mr^2\omega_1^{0^2}}-\frac{k_2^2}{\varrho_1^2}+4\right)y_5^2+\frac{1}{2}k_2k_3\left(\frac{3\varrho_2}{A_3^2mr^2\omega_1^{0^2}}-\frac{1}{\varrho_1^2}\right)y_5y_6$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{4A_3}{mr^2}+\frac{k_3^2\varrho_2}{A_3^2mr^2\omega_1^{0^2}}-\frac{k_3^2}{\varrho_1^2}+4\right)y_6^2\pm\frac{\varrho_1}{A_3mr^2}\left(\frac{3k_2\varrho_2}{A_3\omega_1^0}y_1y_5-(3A_3+2mr^2)y_2y_5\right.$$
$$\left.+\frac{4k_2(A_3+mr^2)}{k_3}y_2y_6+\frac{k_3^2\varrho_2+2A_3^2(A_3+mr^2)\omega_1^{0^2}}{A_3k_3\omega_1^0}y_1y_6\right),$$

где $\varrho_2=2A_3+mr^2$.

Условия положительной определённости квадратичных форм $\delta^2\tilde{K}_{1,2}$ будут достаточными для устойчивости решений (19). В форме неравенств Сильвестра они имеют вид:

$$\Delta_1=\frac{\varrho_1^2\varrho_2(k_3^2+A_3^2\omega_1^{0^2})}{A_3^2k_3^2mr^2}>0,\quad \Delta_2=\frac{\varrho_1^6\varrho_2^2}{A_3^4k_3^2m^2r^4}>0,$$
$$\Delta_3=\frac{\varrho_1^4\varrho_2\big(3\varrho_1^2\varrho_2+mr^2\big(k_3^2+A_3^2\omega_1^{0^2}\big)\big)}{A_3^3k_3^2m^3r^6}>0, \tag{20}$$
$$\Delta_4=\frac{\varrho_1^4}{A_3^2k_3^2m^4r^8}\Big((3A_3+2mr^2)\varrho_1^2\varrho_2+mr^2\big[4k_2^2\varrho_2+A_3^2(3A_3+2mr^2)\omega_1^{0^2}\big]\Big)>0.$$

Неравенства (20) выполняются в силу положительности A_3, m, r и $k_3\neq 0$. Последнее условие имеет простую механическую интерпретацию. При устойчивом вращении вектор $\mathbf{k}$ не лежит в плоскости Oxy эллипсоида инерции тела.

Сопоставим достаточные условия с необходимыми. Запишем уравнения первого приближения:

$$\dot y_1=\frac{1}{A_3}(k_3y_2-2k_2y_3)\mp\frac{k_3}{\varrho_1}(k_3y_5-2k_2y_6),\ \ \dot y_2=-\frac{k_3}{A_3}y_1+\omega_1^0y_3\pm\frac{1}{\varrho_1}\big(k_3y_4-A_3\omega_1^0y_6\big),$$
$$\dot y_3=\frac{2k_2}{A_3}y_1-\omega_1^0y_2\mp\frac{1}{\varrho_1}\big(2k_2y_4-A_3\omega_1^0y_5\big),$$
$$2\dot y_4=\frac{1}{\varrho_3}\Big(4k_2(3(A_3+mr^2)\varrho_1^2-k_3^2mr^2)y_6-k_3\big[3(A_3+mr^2)\varrho_1^2-mr^2\big(k_3^2+A_3^2\omega_1^{0^2}\big)\big]y_5\Big), \tag{21}$$
$$\dot y_5=\frac{2A_3\omega_1^0}{\varrho_3}\Big(\big[k_3^2mr^2-2(A_3+mr^2)\varrho_1^2\big]y_6+k_2k_3mr^2y_5\Big),$$
$$\dot 2y_6=\frac{A_3\omega_1^0}{\varrho_3}\Big(\big[3\varrho_1^2\varrho_2+mr^2\big(k_3^2+A_3^2\omega_1^{0^2}\big)\big]y_5-4k_2k_3mr^2y_6\Big),$$

где

$$\varrho_3=\big[3A_3\big(4k_2^2+k_3^2\big)+2\big(6k_2^2+k_3^2\big)mr^2\big]\varrho_2+2A_3^2(A_3+mr^2)(3A_3+2mr^2)\omega_1^{0^2}.$$

Характеристическое уравнение системы (21) имеет вид

$$\frac{\lambda^2}{A_3^2\varrho_3}\big(A_3^2\lambda^2+4k_2^2+k_3^2+A_3^2\omega_1^{0^2}\big)\big\{\big[(2A_3+mr^2)\big(3A_3\big(4k_2^2+k_3^2\big)+2\big(6k_2^2+k_3^2\big)mr^2\big)$$
$$+2A_3^2(A_3+mr^2)(3A_3+2mr^2)\omega_1^{0^2}\big]\lambda^2+2A_3^2\omega_1^{0^2}\big(4k_2^2+k_3^2+A_3^2\omega_1^{0^2}\big)\big\}=0. \tag{22}$$

Очевидно, уравнение (22) имеет только нулевые и чисто мнимые корни с простыми элементарными делителями в силу положительности A_3, m, r и условия задачи $k_2\neq 0\,(k_3\neq 0)$. Таким образом, достаточные условия близки к необходимым.

Положения равновесия. Доказана неустойчивость в линейном приближении семейств решений (14), принадлежащих ИМ (12).

Введём отклонения от невозмущённого движения:

$$y_1 = \omega_1, y_2 = \omega_2, y_3 = \omega_3, y_4 = \gamma_1 \mp \chi_1, y_5 = \gamma_2 - \gamma_2^0, y_6 = \gamma_3 - \gamma_3^0,$$

где $\chi_1 = (1 - \gamma_2^{0^2} - \gamma_3^{0^2})^{1/2}$, и запишем уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \frac{1}{\chi_2}\Big(&\pm mr^2\chi_1\big[k_3(A_3+mr^2)\gamma_2^0 - k_2(A_2+mr^2)\gamma_3^0\big]y_1 \\ &+ \big[mr^2\gamma_3^0(A_2+mr^2)\big(k_3\gamma_3^0 \pm k_1\chi_1\big) + k_3(A_3+mr^2)\big(\gamma_2^{0^2}mr^2 - (A_2+mr^2)\big)\big]y_2 \\ &+ (k_2(A_2+mr^2)((A_3+mr^2) - \gamma_3^{0^2}mr^2) \mp mr^2(A_3+mr^2)(k_1\chi_1\gamma_2^0 \pm k_2\gamma_2^{0^2}))y_3\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = \frac{1}{\chi_2}\Big(&\big\{\gamma_3^0 mr^2\big[(A_3-A_1)k_3\gamma_3^0 - k_2(A_1+mr^2)\gamma_2^0\big] + k_3(A_3+mr^2)(A_1+\gamma_2^{0^2}mr^2)\big\}y_1 \\ &\mp \gamma_2^0 mr^2\big[k_3\chi_1(A_3+mr^2) \mp k_1(A_1+mr^2)\gamma_3^0\big]y_2 + \big\{\pm mr^2(A_3+mr^2)\gamma_2^0\big(k_2\chi_1 \mp k_1\gamma_2^0\big) \\ &+ k_1\big[(A_1-A_3)\gamma_3^{0^2}mr^2 - A_1(A_3+mr^2)\big]\big\}y_3\Big), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 = \frac{1}{\chi_2}\Big(&\big\{\gamma_2^0 mr^2\big[(A_1-A_2)k_2\gamma_2^0 + k_3(A_1+mr^2)\gamma_3^0\big] - k_2(A_2+mr^2)\big(A_1+\gamma_3^{0^2}mr^2\big)\big\}y_1 \\ &+ \big\{k_1\big[(A_2-A_1)\gamma_2^{0^2}mr^2 + A_1(A_2+mr^2)\big] + (A_2+mr^2)\gamma_3^0 mr^2(k_1\gamma_3^0 \mp k_3\chi_1)\big\}y_2 \\ &- \gamma_3^0 mr^2\big[(A_1+mr^2)\gamma_2^0 k_1 \mp \chi_1(A_2+mr^2)k_2\big]y_3\Big), \end{aligned}$$

$$\dot{y}_4 = -\gamma_3^0 y_2 + \gamma_2^0 y_3, \quad \dot{y}_5 = \gamma_3^0 y_1 \mp \chi_1 y_3, \quad \dot{y}_6 = -\gamma_2^0 y_1 \pm \chi_1 y_2.$$

Здесь

$$\chi_2 = A_1(A_2+mr^2)(A_3+mr^2) - \big[(A_1-A_2)(A_3+mr^2)\gamma_2^{0^2} + (A_1-A_3)(A_2+mr^2)\gamma_3^{0^2}\big]mr^2.$$

Характеристическое уравнение системы (23) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^4}{\chi_2}\Big(&\big\{A_1A_2A_3 + \big[A_2A_3\big(\gamma_2^{0^2}+\gamma_3^{0^2}\big) + A_1\big(A_2+A_3-A_3\gamma_2^{0^2}-A_2\gamma_3^{0^2}\big)\big]mr^2 \\ &+ \big(A_1\chi_1^2 + A_2\gamma_2^{0^2} + A_3\gamma_3^{0^2}\big)m^2r^4\big\}\lambda^2 + A_1k_1^2 + A_2k_2^2 + A_3k_3^2 \\ &+ \big\{k_2^2 + k_3^2 + \gamma_2^{0^2}\big(k_1^2-k_2^2\big) + \gamma_3^{0^2}\big(k_1^2-k_3^2\big) \mp 2\big[k_1\chi_1\big(k_2\gamma_2^0 + k_3\gamma_3^0\big) \pm k_2k_3\gamma_2^0\gamma_3^0\big]\big\}mr^2\Big) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Неустойчивость в линейном приближении элементов семейств решений (14) была установлена, исходя из анализа нулевых корней характеристического уравнения (24).

Корень $\lambda = 0$ имеет кратность 4. Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих этому корню, равно 3 (ранг матрицы $A - \lambda E$, вычисленный при $\lambda = 0$, равен 3, A — матрица системы (23)). Таким образом, жорданова форма матрицы системы (23) недиагональная. Откуда следует неустойчивость элементов исследуемых семейств решений в линейном приближении.

Для ИМ (12) доказана устойчивость по части переменных. Исследование проводилось в картах

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \pm\kappa$$

на данном ИМ. Здесь $\kappa = (1 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2)^{1/2}$.

Введём отклонения от невозмущённого решения

$$y_1 = \omega_1, \quad y_2 = \omega_2, \quad y_3 = \omega_3, \quad y_4 = \gamma_1 \mp \kappa$$

и запишем вариацию интеграла V_0 в окрестности исследуемого решения:

$$\Delta V_0 = \left(1 + \frac{A_1}{mr^2} - 3(y_4 \pm \kappa)^2\right) y_1^2 + \left(1 + \frac{A_2}{mr^2} - 3\gamma_2^2\right) y_2^2 + \left(1 + \frac{A_3}{mr^2} - 3\gamma_3^2\right) y_3^2 \\ + (\gamma_2 y_2 - \gamma_3 y_3)^2 + (\gamma_2 y_2 - y_1(y_4 \pm \kappa))^2 + (\gamma_3 y_3 - y_1(y_4 \pm \kappa))^2.$$

Исходя из решений (13) дифференциальных уравнений на исследуемом ИМ, его можно рассматривать как семейство ИМ, где γ_2^0, γ_3^0 — параметры семейства. В новых переменных

$$\phi_1 = (1 + \frac{A_1}{mr^2} - 3(y_4 \pm \hat{\kappa})^2\Big)^{1/2} y_1, \quad \phi_2 = \left(1 + \frac{A_2}{mr^2} - 3\gamma_2^{0^2}\right)^{1/2} y_2,$$
$$\phi_3 = \left(1 + \frac{A_3}{mr^2} - 3\gamma_3^{0^2}\right)^{1/2} y_3, \quad \phi_4 = -\gamma_2^0 y_2 + y_1(y_4 \pm \hat{\kappa}),$$
$$\hat{\kappa} = (1 - \gamma_2^{0^2} - \gamma_3^{0^2})^{1/2},$$

ΔV_0 можно записать следующим образом:

$$\Delta V_0 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 + \left(\gamma_2^0 \left(1 + \frac{A_2}{mr^2} - 3\gamma_2^{0^2}\right)^{-1/2} \phi_2 - \gamma_3^0 \left(1 + \frac{A_3}{mr^2} - 3\gamma_3^{0^2}\right)^{-1/2} \phi_3\right)^2 \\ + \left(\gamma_2^0 \left(1 + \frac{A_2}{mr^2} - 3\gamma_2^{0^2}\right)^{-1/2} \phi_2 - \gamma_3^0 \left(1 + \frac{A_3}{mr^2} - 3\gamma_3^{0^2}\right)^{-1/2} \phi_3 + \phi_4\right)^2.$$

Поскольку квадратичная форма ΔV_0 знакоопределена по переменным $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ при ограничениях на параметры

$$\Big(\big(A_2 \leqslant 2mr^2 \wedge -\sigma_1 < \gamma_2^0 < \sigma_1\big) \vee \big(A_2 > 2mr^2 \wedge -1 \leqslant \gamma_2^0 \leqslant 1\big)\Big) \\ \wedge \Big(\big(A_3 \leqslant 2mr^2 \wedge -\sigma_2 < \gamma_3^0 < \sigma_2\big) \vee \big(A_3 > 2mr^2 \wedge -1 \leqslant \gamma_3^0 \leqslant 1\big)\Big),$$

то исследуемое семейство ИМ устойчиво по переменным

$$\big(3\big(\gamma_2^{0^2} + \gamma_3^{0^2}\big) + A_1/(mr^2) - 2)^{1/2}\omega_1, \quad (1 + A_2/(mr^2) - 3\gamma_2^{0^2})^{1/2}\omega_2,$$
$$\big(1 + A_3/(mr^2) - 3\gamma_3^{0^2}\big)^{1/2}\omega_3, \quad V(1 - \gamma_2^{0^2} - \gamma_3^{0^2} V)^{1/2}\omega_1 - \gamma_2^0\omega_2$$

при указанных условиях. Здесь $\sigma_1 = ((A_2 + mr^2)/(3mr^2))^{1/2}$, $\sigma_2 = ((A_3 + mr^2)(3mr^2))^{1/2}$.

3.2. Случай произвольного линейного силового поля

Положения равновесия. Для решения

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = -b_1\rho^{-1}, \quad \gamma_2 = -b_2\rho^{-1}, \quad \gamma_3 = -b_3\rho^{-1},$$
$$\rho = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{1/2}$$

с использованием интеграла $W_2 = 2\tilde{V}_0 + \rho\tilde{V}_2$ получены достаточные условия устойчивости. Исследование проведено для случая $A_1 = 2A_3, A_2 = 3/2A_3, k_2 = k_3 = 0$.

Введём отклонения от невозмущённого движения:

$$y_1 = \omega_1, \quad y_2 = \omega_2, \quad y_3 = \omega_3, \quad y_4 = \gamma_1 + b_1\rho^{-1}, \quad y_5 = \gamma_2 + b_2\rho^{-1}, \quad y_6 = \gamma_3 + b_3\rho^{-1}.$$

Вторая вариация интеграла W_2 в отклонениях на множестве

$$\delta V_2 = -2(b_1y_4 + b_2y_5 + b_3y_6) \quad \rho^{-1} = 0$$

при указанных ограничениях на параметры имеет вид $\delta^2 W_2 = Q_1 + Q_2$, где

$$2Q_1 = \frac{A_3}{mr^2}\left(y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2\right) + \frac{1}{2\rho^2}\left[(b_2y_1 - b_1y_2)^2 + (b_3y_1 - b_1y_3)^2 + (b_3y_2 - b_2y_3)^2\right],$$
$$2Q_2 = \rho\left((y_4^2 + y_5^2) + \frac{(b_1y_4 + b_2y_5)^2}{b_3^2}\right).$$

Условия знакоопределенности квадратичной формы $\delta^2 W_2$ являются достаточными для устойчивости исследуемого решения. Очевидно, квадратичные формы Q_1, Q_2 положительно определены: Q_1 — в силу положительности параметров A_3, m, r; Q_2 — при $b_3 \neq 0$. Таким образом, устойчивому положению равновесия соответствует потенциал внешних сил $U = b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3$ $(b_3 \neq 0)$.

Сопоставим достаточные условия с необходимыми. Для этого запишем уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 = \frac{mr^2}{A_3D}\Big(& b_1k_1[b_3D_1y_2 - 2b_2(A_3 + mr^2)y_3] \\
&+ A_3\big\{b_3\big(D_1\rho^2 + b_2^2mr^2\big)y_5 + b_2\big[b_1b_3mr^2y_4 - (D_1\rho^2 + (b_1^2 + b_2^2)mr^2)y_6\big]\big\}\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_2 = \frac{1}{A_3D}\Big(& b_2b_3[2k_1D_2y_2 - 2A_3b_1mr^2y_5]mr^2 - 2k_1\big\{A_3\big[\big(b_1^2 + 2b_2^2\big)mr^2 + D_2\rho^2\big] + b_2^2m^2r^4\big\}y_3 \\
&- 2A_3b_3mr^2\big(D_2\rho^2 + b_1^2mr^2\big)y_4 + 2A_3b_1mr^2\big[D_2\rho^2 + \big(b_1^2 + b_2^2\big)mr^2\big]y_6\Big),
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_3 = \frac{1}{A_3D}\Big(& k_1mr^2\big[A_3\big(b_1^2 + 4b_3^2\big) + 2b_3^2mr^2\big]y_2 + k_1D_2(3A_3\rho^2y_2 - 2b_2b_3mr^2y_3) \\
&+ A_3mr^2\big\{b_2\big(3D_2\rho^2 + b_1^2mr^2\big)y_4 - b_1\big[3D_2\rho^2 + \big(b_1^2 + b_3^2\big)mr^2\big]y_5 + b_1b_2b_3mr^2y_6\big\}\Big),
\end{aligned}$$

$$\dot{y}_4 = (b_3y_2 - b_2y_3) \quad \rho^{-1}, \quad \dot{y}_5 = (b_1y_3 - b_3y_1) \quad \rho^{-1}, \quad \dot{y}_6 = (b_2y_1 - b_1y_2) \quad \rho^{-1}.$$

Здесь

$$D = 6A_3^2\rho^2 + \big[A_3\big(b_1^2 + b_2^2 + 5\rho^2\big) + (A_3 + mr^2)\big(2b_1^2 + b_2^2 + 2\rho^2\big)\big]mr^2,$$

$$D_1 = 3A_3 + 2mr^2, \quad D_2 = (2A_3 + mr^2).$$

Характеристическое уравнение системы (25)

$$\lambda^2(a_0\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_2) = 0 \tag{26}$$

имеет только нулевые и чисто мнимые корни с простыми элементарными делителями при выполнении условий

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0,$$

$$\begin{aligned} a_1^2 - 4a_0a_2 = A_3^3 mr^2\rho^2\big\{A_3 mr^2\big[4b_1^2\big(b_1^2 + 3b_2^2 - b_3^2\big) + \big(3b_2^2 + b_3^2\big)^2\big] + 8k_1^2\rho\big(10b_1^2 + 3b_2^2 + b_3^2\big)\big\} \\ + 4k_1^2\big\{k_1^2 mr^2\,\big(b_2^2 + b_3^2\big)\big[\big(b_2^2 + b_3^2\big)mr^2 + 4A_3\rho^2\big] \\ + A_3^2\big[\big(2b_1^2\big(b_1^2 + 2b_2^2 + 7\rho^2\big) + \big(b_2^2 + b_3^2\big)\big(3b_2^2 + b_3^2\big)\big)m^2r^4\rho + 4k_1^2\rho^4\big]\big\} > 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Здесь

$$a_0 = A_3\big\{\big[A_3\big(b_1^2 + b_2^2 + 5\rho^2\big) + \big(2b_1^2 + b_2^2 + 2\rho^2\big)\big(A_3 + mr^2\big)\big]mr^2 + 6A_3^2\rho^2\big\},$$

$$a_1 = \big[2\big(b_2^2 + b_3^2\big)\,mr^2 + 4A_3\rho^2\big]k_1^2 + \big[A_3\big(2b_1^2 + b_2^2 + 2\rho^2\big)\big(A_3 + 2mr^2\big) + A_3^2\big(b_1^2 + b_2^2 + 5\rho^2\big)\big]mr^2\rho,$$

$$a_2 = mr^2\big[2\big(b_2^2 + b_3^2\big)k_1^2\rho + A_3\big(2b_1^2 + b_2^2 + 2\rho^2\big)mr^2\rho^2\big].$$

Очевидно, выражения (27) содержат только положительные слагаемые, в частности, при $0 < |b_3| \leqslant \sqrt{b_1^2 + 3b_2^2}$. Сопоставляя последний результат с полученными достаточными условиями, можно заключить, что достаточные условия близки к необходимым.

Для второго положения равновесия (14) доказана неустойчивость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом Рауса — Ляпунова проведён анализ особых решений уравнений движения уравновешенного динамически несимметричного шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью. Шар катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости при наличии поля тяжести. В качестве особых рассматривались решения, на которых первые интегралы задачи (или их комбинации) принимают стационарное значение. Найдены решения, обладающие указанным свойством, среди них перманентные вращения и положения равновесия тела. Проведён анализ их устойчивости по Ляпунову. Интегралы, принимающие стационарное значение на найденных решениях, использовались для получения достаточных условий их устойчивости. Для перманентных вращений достаточные условия получены в виде ограничений на компоненты вектора момента количества циклического движения жидкости. Для положений равновесия доказана неустойчивость в линейном приближении. Доказана устойчивость по части переменных ИМ, которому эти положения равновесия принадлежат. Рассмотрен также случай, когда механическая система находится под воздействием произвольного линейного потенциального силового поля. Здесь найдены положения равновесия и маятниковые ИМ. Для положений равновесия получены необходимые и достаточные условия устойчивости в виде ограничений на коэффициенты потенциала силового поля.

Как отмечалось во Введении, в [14] проведён анализ уравнений движения шара Чаплыгина с ротором, эквивалентных рассматриваемым в настоящей работе в интегрируемом случае. Дано описание особых решений уравнений в зависимости от значений констант первых интегралов задачи, исследована их устойчивость топологическими методами. В настоящей работе все найденные решения представлены в ‘ виде выражений от параметров, характеризующих исследуемую механическую систему (масса, радиус, моменты инерции, компоненты вектора момента количества циклического движения жидкости), что позволяет проводить дальнейший анализ решений в пространстве указанных параметров, давать более детальную механическую интерпретацию этим решениям.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института динамики систем и теории управления СО РАН (код научной темы № 121041300056-7). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н.К.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017.
2. *Пуанкаре А.* Последние работы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. С. 74–111.
3. *Стеклов В.А.* О движении твёрдого тела, имеющего полость эллипсоидальной формы, заполненную несжимаемой жидкостью, и об изменении широт // Работы по механике 1902–1909гг: Переводы с французского. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. С. 283–408.
4. *Пивоваров М.Л., Черноусько Ф.Л.* Колебания твёрдого тела с тороидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью // Прикл. матем. мех. 1990. Т. 54, № 2. С. 201–206.
5. *Ольшанский В.Ю.* Полурегулярная прецессия несимметричного твёрдого тела с жидким наполнением // Прикл. матем. мех. 2021. Т. 85, № 5. С. 547–564; DOI: 10.31857/S0032823521040111
6. *Темнов А.Н., Ян Наинг У.* Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей криогенную жидкость // Электронный журнал «Труды МАИ». Механика. 2023. № 133; https://trudymai.ru/
7. *Stewartson K., Roberts P.H.* On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body // J. Fluid Mech. 1963. V. 17, N 1. P. 1–20.
8. *Алексеев А.В.* Движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости // Известия Самарского научного центра РАН. Механика и машиностроение. 2007. Т. 9, № 3. С. 671–676.
9. *Карапетян А.В., Проконина О.В.* Об устойчивости равномерных вращений волчка с полостью, заполненной жидкостью, на плоскости с трением // Прикл. матем. мех. 2000. Т. 64, № 1. С. 85–91.
10. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика шара Чаплыгина с полостью, заполненной жидкостью // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 1. С. 103–111.
11. *Маркеев А.П.* Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1986. Т. 21, № 1. С. 64–65.
12. *Богоявленский О.И.* Два интегрируемых случая динамики твёрдого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 1359–1363.
13. *Борисов А.В. , Мамаев И.С.* Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
14. *Москвин А.Ю.* Шар Чаплыгина с ротором: особые решения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 3. С. 345–356.
15. *Karavaev Y.L.* Spherical Robots: An Up-to-Date Overview of Designs and Features // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2022. V. 18, N 4. P. 709–750; DOI: 10.20537/nd221207
16. *Болсинов А.В. , Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
17. *Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Топология и устойчивость интегрируемых систем // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, № 2(392). С.71–132; DOI: 10.4213/rm9346
18. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. 6 Edition. London: MacMillan and Co., 1905.

19. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твёрдого тела в жидкости. Соб. соч. М.: АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319.

20. *Сальвадори Л.* Об устойчивости движения // Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1970. Т. 124, № 6. С. 3–19.

21. *Bizyaev I.A., Mamaev I.S.* Permanent Rotations in Nonholonomic Mechanics. Omnirotational Ellipsoid // Regul. Chaot. Dyn. 2022. V. 27, N 6. P. 587–612; DOI: 10.1134/S1560354722060016

22. *Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 531.36

ON SINGULAR SOLUTIONS IN THE PROBLEM OF ROLLING OF A BALL WITH A MULTIPLY CONNECTED CAVITY FILLED WITH AN IDEAL FLUID

V. D. Irtegov,[a] **T. N. Titorenko**[b]

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Lermontov st., 134, Irkutsk 664033, Russia

E-mails: [a]irteg@icc.ru, [b]titor@icc.ru

Received 30.07.2024, revised 04.11.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. The differential equations describing the rolling without slipping of a balanced, dynamically asymmetric ball on an unmoving horizontal plane in a gravitational field are studied. The ball contains a multiply connected cavity completely filled with a homogeneous incompressible ideal fluid moving vortex free. Using the Routh-Lyapunov method and symbolic computations, singular solutions of the equations of motion are found, their mechanical interpretation is given, and their stability is analyzed. The case is considered when the mechanical system is acted by a linear potential force field.

Keywords: nonholonomic system, singular solutions, stability, symbolic computations.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.406

REFERENCES

1. Zhukovskij N.K. O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoj kapel'noj zhidkost'yu [On the motion of a rigid body having cavities filled with a homogeneous droplet liquid]. Moscow: MGTU im. N. E. Baumana Press, 2017 (in Russian).
2. Poincaré H. Sur la précession des corps déformables. *Bull. Astr.*, 1910, Vol. 27, pp. 321–356.
3. Stekloff V. A. Sur le movement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoidale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 1909, Vol. 1, No. 3, pp. 145–256.
4. Pivovarov M. L., Chernousko F. L. Kolebaniya tverdogo tela s toroidal'noj polost'yu, zapolnennoj vyazkoj zhidkost'yu [The oscillations of a rigid body having a toroidal cavity filled with viscous liquid]. *Prikl. Matem. Mekh.*, 1990, Vol. 54, No. 2, pp. 201–206 (in Russian).
5. Ol'shanskii V. Yu. Semi-regular precession of an asymmetrical rigid solid body filled with a liquid. *Mech. Solids*, 2021, Vol. 56, No. 8, pp. 1500–1513; DOI: 10.3103/S0025654421080148]
6. Temnov A. N., Yan Naing U. Ob ustojchivosti statsionarnogo vrashcheniya tverdogo tela s polost'yu, soderzhashchej kriogennuyu zhidkost' [On the stability of steady rotation of a rigid body having a cavity with a cryogenic liquid]. *Elektronnyj zhurn. "Trudy MAI". Mekhanika*, 2023, No. 133 (in Russian); https://trudymai.ru/
7. Stewartson K., Roberts P.H. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. *J. Fluid Mech.*, 1963, Vol. 17, No. 1, pp. 1–20.
8. Alekseev A.V. Dvizhenie sputnika-girostata, soderzhashchego polost' s zhidkost'yu bol'shoj vyazkosti [The motion of a satellite-gyrostat containing a cavity with a high-viscosity liquid] *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. Mekhanika i Mashinostroenie*, 2007, Vol. 9, No 3, pp. 671–676 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2025, Vol. 19, No. 4.

9. Karapetyan A.V., Prokonina O.V. The stability of permanent rotations of a top with a cavity filled with liquid on a plane with friction. *J. Appl. Math. Mech.*, 2000, Vol. 64, No. 1, pp. 81–86; DOI: 10.1016/S0021-8928(00)00028-9
10. Borisov A.V., Mamaev I.S. Dinamika shara Chaplygina s polost'yu, zapolnennoj zhidkost'yu [The dynamics of the Chaplygin ball with a fluid-filled cavity]. *Nelinejnaya dinamika*, 2012, Vol. 8, No. 1, pp. 103–111 (in Russian).
11. Markeev A.P. Ob integriruemosti zadachi o kachenii shara s mnogosvyaznoj polost'yu, zapolnennoj ideal'noj zhidkost'yu [Integrability of the problem of rolling of a ball with a multiply connected cavity filled with an ideal fluid] *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1986, Vol. 21, No. 1, pp. 64–65 (in Russian).
12. Bogoyavlenskij O.I. Dva integriruemykh sluchaya dinamiki tverdogo tela v silovom pole [Two integrable cases of rigid body dynamics in a force field]. *Dokl. AN SSSR*, 1984, Vol. 275, No. 6, pp. 1359–1363 (in Russian).
13. Borisov A.V., Mamaev I.S. Negolonomnye dinamicheskie sistemy. Integriruemost', haos, strannye attraktory / Sbornik statej [Nonholonomic dynamical systems. Integrability, chaos, strange attractors / Collect. papers]. Moscow–Izhevsk: Inst. Komp'Yuter. Issled., 2002 (in Russian).
14. Moskvin A.Yu. Shar Chaplygina s girostatom: osobye resheniya [Chaplygin's ball with a gyrostat: singular solutions]. *Nelinejnaya dinamika*, 2009, Vol. 5, No. 3, pp. 345–356 (in Russian).
15. Karavaev Y. L. Spherical Robots: An Up-to-Date Overview of Designs and Features. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2022, Vol. 18, No. 4, pp. 709–750; DOI: 10.20537/nd221207
16. Bolsinov A.V., Fomenko A.T. Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification. Chapman & Hall/CRC, 2004.
17. Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Topology and stability of integrable systems. *Russian Math. Surveys*, 2010, Vol. 65, No. 2, pp. 259–318; DOI: 10.1070/RM2010v065n02ABEH004672
18. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. 6 Edition. London: MacMillan and Co., 1905.
19. Lyapunov A.M. O postoyannykh vintovykh dvizheniyakh tverdogo tela v zhidkosti. Sobr. soch. [On permanent helical motions of a rigid body in fluid. Collected Works] Moscow: AN SSSR, 1954, Vol. 1, pp. 276–319 (in Russian).
20. Salvadori L. Sulla stabilitá del movimento. *Matematiche*, 1969, No 24, pp. 218-238.
21. Bizyaev I.A., Mamaev I.S. Permanent Rotations in Nonholonomic Mechanics. Omnirotational Ellipsoid. *Regul. Chaot. Dyn.*, 2022, Vol. 27, No. 6, pp. 587-612; DOI: 10.1134/S1560354722060016
22. Cox D., Little J., O'Shea D. Ideals, Varieties, and Algorithms. N. Y.: Springer, 1998