

УДК 517.9:541.121:541.126

**ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ И ЯВНОЕ ЗАДАНИЯ МЕДЛЕННЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ДВУХ ЗАДАЧАХ
ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ**

© 2025 Л. И. Кононенко

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: larak@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 09.01.2024 г.; после доработки 30.06.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

При использовании метода интегральных многообразий для решения конкретных задач центральным становится вопрос о вычислении функции, описывающей интегральное многообразие. Одним из способов приближённого вычисления функции является использование асимптотического разложения её по степеням малого параметра. При этом функцию можно задать или явно, или параметрически, или неявным образом. В работе приведены примеры двух моделей, взятых из химической кинетики, в сингулярно возмущённых системах которых интегральные многообразия задаются явно и параметрически.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, сингулярно возмущённые системы, интегральные многообразия, листы медленной поверхности, малый параметр, химическая кинетика.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.407

ВВЕДЕНИЕ

Теория сингулярно возмущённых систем дифференциальных уравнений традиционно связывалась с проблемами нелинейной механики. Системы с малым параметром естественным образом возникают при моделировании и исследовании объектов, характерной особенностью которых является наличие процессов, имеющих существенно различающиеся скорости, например, в задачах химической кинетики. Для качественного анализа динамических характеристик моделей химической кинетики целесообразно использовать метод интегральных многообразий, который позволяет свести качественный анализ полной системы к исследованию интегрального многообразия медленных движений и качественному анализу системы меньшей размерности на интегральном многообразии (см. [1]–[6]). Заметим также, что очень полезна книга [7], состоящая из двух частей, в которых рассматриваются методы качественной теории в нелинейной динамике. Эта книга посвящена качественной теории многомерных систем дифференциальных уравнений (необязательно с малым параметром) как с простой, так и со сложной динамикой. Подобные вопросы также рассматривались в [8]–[12]. Качественный анализ системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром сводится к исследованию системы по схеме, которую мы вкратце опишем далее в разд. 1 работы (см. [3]).

При использовании метода интегральных многообразий для решения конкретных задач центральным становится вопрос о вычислении функции, описывающей интегральное многообразие. Одним из способов приближённого вычисления функции является использование асимптотического разложения её по степеням малого параметра.

Напомним способы задания функции (см. [13]): явное задание $y = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$; параметрическое $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$; неявное $F(x, y) = 0$.

Например, окружность можно задать тремя способами:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = R^2 & \text{ — неявное задание; } x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi \text{ — параметрическое;} \\ y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y = -\sqrt{R^2 - x^2} & \text{ — явное.} \end{aligned}$$

В данной работе разд. 1 и 2 посвящены явному заданию интегрального многообразия; разд. 3, 4 — параметрическому заданию.

1. ЯВНОЕ ЗАДАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Рассматривается сингулярно возмущённая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t, \varepsilon) \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$ — медленные, $y \in \mathbb{R}^n$ — быстрые переменные, f, g — достаточно гладкие функции, $t \in \mathbb{R}$, ε — положительный малый параметр.

Под интегральным многообразием системы (1) понимается некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, состоящее из интегральных кривых этой системы.

Если в системе (1) положить $\varepsilon = 0$, то получим порождающую или вырожденную систему

$$\dot{x} = f(x, y, t, 0), \quad 0 = g(x, y, t, 0). \quad (2)$$

Уравнение $g(x, y, t, 0) = 0$ задаёт медленную поверхность. Это уравнение медленной поверхности может иметь одно или несколько решений, каждое из которых задаёт лист медленной поверхности.

Далее выполняем следующие шаги.

Шаг I. Описание листов интегрального многообразия. Интегральное многообразие в нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) задаётся уравнением $g(x(t), y(t), t, 0) = 0$, называемым уравнением медленной поверхности. Оно может иметь несколько решений $y = \varphi_i(x, t)$, $i = 1, \dots, l$, задающих листы медленной поверхности.

Шаг II. Нахождение границ листов медленной поверхности. Граница листа находится как пересечение медленной поверхности $g(x(t), y(t), t, 0) = 0$ с поверхностью, заданной уравнением

$$\det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), t, 0) \right) = 0.$$

Шаг III. Выяснение характера устойчивости листов медленной поверхности. Для листа $y = \varphi_i(x, t)$ характер устойчивости зависит от знака собственных чисел матрицы

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x(t), \varphi_i(x, t), t, 0), \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Лист устойчив, если действительные числа всех собственных чисел отрицательны. Лист неустойчив, если действительные части всех собственных чисел положительны. Лист условно устойчив, если среди действительных чисел имеются и положительные, и отрицательные (но нет нулевых). В случае нулевых действительных частей собственных чисел необходимо рассматривать первое приближение по ε медленной поверхности.

Шаг IV. Качественный анализ динамики медленной подсистемы на каждом из листов медленной поверхности с выяснением следующих основных особенностей динамики: нахождение стационарных состояний, их типа, условий множественности, колебаний разных видов, в том числе, релаксационных, решений-уток. Если траектория содержит постоянно чередующиеся медленные и быстрые участки, она описывает релаксационные колебания. Решения-утки —

это траектории, переходящие с притягивающего участка медленной кривой на отталкивающий участок. Подробно решения-утки и релаксационные колебания описываются в [14]–[18].

Шаг V. Качественный анализ системы в целом. Учитываем тот факт, что близость решений полной и вырожденной систем может быть только на конечном промежутке $[0, T]$.

Во многих задачах невозможно найти корень уравнения $0 = g(x, y, t, 0)$ в явном виде $y = h_0(x, t)$, поскольку это уравнение оказывается либо трансцендентным, либо полиномом высокой степени относительно y . Неявная форма задания обладает очевидными недостатками по сравнению с явной. Зачастую решение уравнения удаётся записать в параметрической форме.

Листы интегрального многообразия медленных движений (или медленного интегрального многообразия системы (1)) являются уточнением при учёте малого параметра ε листов медленной поверхности и получаются из них с помощью асимптотического разложения по степеням ε ([3]):

$$h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \dots + \varepsilon^k h_k(x, t) + \dots, \quad (3)$$

где коэффициенты разложения $h_k(x, t)$ вычисляются по следующей рекуррентной формуле

$$h_k = -B^{-1} \left[g^{(k)} - \frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\partial h_p}{\partial x} f^{(k-1-p)} \right], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

здесь $B = \det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0) \right) \neq 0$.

Рассмотрим систему (1) при выполнении следующих условий.

I. Уравнение $g(x, y, t, 0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(x, t)$ при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m$.

II. В области

$$\Omega_0 = \{(x, y, t, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^m, \|y - h_0(x, t)\| < \rho, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$$

функции f, g и h_0 равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по переменным до $(k+2)$ -го порядка включительно ($k \geq 0$).

III. Собственные значения $\lambda_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, n$) матрицы $\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0)$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re} \lambda_i(x, t) \leq -2\gamma < 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1 [3]. Пусть выполняются условия I–III. Тогда существует такое ε_1 ($0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$), что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ система (1) имеет интегральное многообразие медленных движений $y = h(x, t, \varepsilon)$, представленное формулой (3) с коэффициентами (4), движение по которому описывается уравнением $\dot{x} = f(x, h(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon)$.

2. ПРИМЕР 1

2.1. Описание модели

Рассматривается детальный механизм с бимолекулярной реакцией на поверхности катализатора [3]. Учитываются два возможных механизма реакции: реакция на поверхности катализатора между адсорбированными веществами (адсорбционный механизм) и реакция между адсорбированным веществом и веществом, находящимся в газовой фазе (ударный механизм). Предполагается, что реакция идёт при постоянном давлении.

Кинетической схеме модели соответствует система дифференциальных уравнений с безразмерными переменными

$$\dot{x}_1 = a - x_1 - \alpha[\omega_1 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_1], \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = b - x_2 - \alpha[\omega_2 + \omega_4 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_2], \quad (6)$$

$$\dot{y}_1 = \beta(2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4), \quad (7)$$

$$\dot{y}_2 = \beta(\omega_2 - \omega_3). \quad (8)$$

Переменными

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \kappa_1 x_1 (1 - y_1 - \kappa_1 y_2)^2 - \kappa_{-1} y_1^2, \\ \omega_2 &= \kappa_2 x_2 (1 - y_1 - y_2) - \kappa_{-2} y_2, \quad \omega_3 = y_1 y_2, \quad \omega_4 = \kappa_4 x_2 y_1 \end{aligned}$$

обозначены обезразмеренные скорости четырёх стадий.

Область изменения переменных имеет вид

$$W = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b, 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, y_1 + y_2 \leq 1\}.$$

Скорость реакции на поверхности катализатора существенно выше, чем скорости адсорбции. Предполагается, что основным механизмом реакции является адсорбционный, а ударный механизм учитывается как дополнительный. Поэтому мы используем при анализе модели следующую иерархию параметров:

$$\kappa_{-2}, \kappa_{-1}, \kappa_4 \ll \kappa_1, \kappa_2 \ll 1.$$

Константы десорбции предполагаются малыми сравнительно с константами адсорбции. Кроме того, $\alpha \ll \beta$. Нас будет интересовать ситуация, в которой $\varepsilon = 1/\beta \ll \kappa_{-2}, \kappa_{-1}, \kappa_4$.

Эти предположения о параметрах системы позволяют считать, что

$$\kappa_{-1} = \mu \kappa_{-1}^0, \quad \kappa_{-2} = \mu \kappa_{-2}^0, \quad \kappa_4 = \mu \kappa_4^0,$$

где μ – малый параметр, а $\kappa_{-1}^0, \kappa_{-2}^0, \kappa_4^0$ – величины порядка $o(1)$.

2.2. Медленная поверхность

Систему (5)–(8) перепишем в следующей форме

$$\dot{x} = f(x, y, \nu, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y, \nu, \mu),$$

где

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2), \quad \nu = (a, b, \alpha, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{-1}^0, \kappa_{-2}^0, \kappa_4^0), \quad f = (f_1, f_2), \quad g = (g_1, g_2),$$

а ε, μ – независимые малые параметры (заметим, что в системе может быть несколько малых параметров [19]). Функции f_1, f_2, g_1, g_2 имеют вид

$$\begin{aligned} f_1 &= a - x_1 - \alpha(\omega_1 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_1), \\ f_2 &= b - x_2 - \alpha(\omega_2 + \omega_4 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_2), \\ g_1 &= 2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4, \quad g_2 = \omega_2 - \omega_3. \end{aligned}$$

Интегральное многообразие в нулевом приближении $\varepsilon = 0$, или медленная поверхность, задаётся уравнением $g(x, y, \nu, \mu) = 0$. Как было показано выше, оно может иметь одно или несколько

решений, каждое из которых задаёт лист медленной поверхности. Во всех внутренних точках листа медленной поверхности выполняется условие

$$\det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, \nu, \mu) \right) \neq 0.$$

Уравнения медленной поверхности для системы (5)–(8) имеют вид $2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4 = 0$, $\omega_2 - \omega_3 = 0$ или, более подробно

$$\begin{aligned} 2[\kappa_1 x_1(1 - y_1 - y_2)^2 - \mu \kappa_{-1}^0 y_1^2] - y_1 y_2 - \mu \kappa_4^0 x_2 y_1 &= 0, \\ \kappa_1 x_2(1 - y_1 - y_2)^2 - \mu \kappa_{-2}^0 y_2 - y_1 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$z_1 = 1 - y_1 - y_2, \quad z_2 = y_1 y_2, \quad \omega_1 = \kappa_1 x_1, \quad \omega_2 = \kappa_2 x_2.$$

В этих обозначениях уравнения медленной поверхности при $\mu = 0$ имеют вид

$$2\omega_1 z_1^2 - z_2 = 0, \quad \omega_2 z_1 - z_2 = 0.$$

Эта система уравнений имеет два решения

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0; \tag{9}$$

$$z_1 = \frac{\omega_2}{2\omega_1}, \quad z_2 = \frac{\omega_2^2}{2\omega_1}. \tag{10}$$

Первое решение задаёт две поверхности

$$\begin{aligned} y_1 = 0, \quad y_2 = 1; \\ y_1 = 1, \quad y_2 = 0. \end{aligned}$$

Второе решение также определяет две поверхности. Они задаются системой уравнений

$$z_1 = 1 - y_1 - y_2 = \frac{\omega_2}{2\omega_1}, \quad z_2 = y_1 y_2 = \frac{\omega_2^2}{2\omega_1}, \tag{11}$$

т. е.

$$\omega_1 = \frac{y_1 y_2}{2(1 - y_1 - y_2)^2}, \quad \omega_2 = \frac{y_1 y_2}{1 - y_1 - y_2}.$$

В [4] было показано, что медленная поверхность системы (5)–(8), задаваемая уравнениями (9)–(10) и (11), состоит из 10 листов; при $\kappa_{-1} \neq 0$, $\kappa_4 \neq 0$ в физической области W лежат только три листа медленной поверхности, а при $\kappa_{-1} = \kappa_4 = 0$ только четыре листа (в этом случае лист $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ лежит на границе области W), причём мы видим, что все они задаются явным образом.

3. ПАРАМЕТРИЗОВАННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Рассмотрим дифференциальные уравнения из [2]:

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, t, \varepsilon), \tag{12}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n+m}$, $t \in \mathbb{R}$ — переменная, имеющая смысл времени, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, \dot{x} — производная по времени, вектор-функция f является $(m+n)$ -мерной достаточно гладкой в интересующей области изменения переменных.

Под интегральным многообразием системы (12) понимается некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}$, состоящее из интегральных кривых этой системы.

В [4] приведён алгоритм построения асимптотического разложения интегрального многообразия в параметрическом виде. Медленное интегральное многообразие и уравнение движения по нему ищем в параметрическом виде

$$x = P(s, t, \varepsilon), \quad \dot{s} = S(s, t, \varepsilon).$$

Функции P и S находим в виде асимптотических рядов по степеням ε :

$$\begin{aligned} x = P(s, t, \varepsilon) &= \varphi(s, t) + \varepsilon P_1(s, t) + \dots + \varepsilon^k P_k(s, t) + \dots, \\ \dot{s} = S(s, t, \varepsilon) &= S_0(s, t) + \varepsilon S_1(s, t) + \dots + \varepsilon^k S_k(s, t) + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\varphi(s, t)$ является решением уравнения $f(x, t, 0) = 0$.

Мы не будем подробно описывать этот алгоритм, а лишь перечислим шаги. Дифференцируя x по t и подставляя в равенство (12), раскладывая правую часть в ряд Тейлора с центром разложения в точке $(\varphi(s, t), t, 0)$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , найдём сначала коэффициент $P_1(s, t)$ асимптотики порядка ε для интегрального многообразия $x = P(s, t, \varepsilon)$ и член $S_0(s, t)$ асимптотики нулевого порядка для $\dot{s} = S(s, t, \varepsilon)$, а затем и следующие члены разложения $P_2, S_1, P_3, S_2, \dots$, которые вычисляются аналогичным образом. Поскольку вычисление коэффициентов $P_{i+1}, S_i, i = 1, 2, \dots$, достаточно громоздко, а для конкретных систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы химической кинетики, достаточно знать лишь главные члены разложений, мы не будем выписывать их выражения.

Условия, при которых будет построена асимптотика решения системы (12), следующие.

I. Пусть функция $f(x, t, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируема в области $\mathcal{D}(x, t, \varepsilon) = \mathcal{D}(x, t) \times (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0)$, где $\mathcal{D}(x, t)$ – некоторая область в пространстве переменных (x, t) , ε_0 – некоторая постоянная.

II. Пусть вырожденное уравнение $f(x, t, 0) = 0$ имеет для всех $t \in \mathbb{R}$ решение, которое может быть записано в параметрическом виде $x = \varphi(s, t)$, где $s \in \mathbb{R}^m$ – параметр, а для функции $\varphi(s, t)$ в некоторой области пространства переменных $\mathcal{D}(s, t) = \mathcal{D}(s) \times (-\infty < t < \infty)$, где $\mathcal{D}(s)$ – некоторая область пространства параметров, должны быть выполнены следующие условия:

1) функция $\varphi(s, t)$ достаточно гладкая,

2) ранг матрицы $\varphi_s(s, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t)$ равен m , т. е. числу параметров.

III. Пусть кратность собственного значения $\lambda = 0$ равна m , а остальные n собственных значений $\lambda_i(s, t)$ матрицы $A(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, t), t, 0)$ удовлетворяют в $\mathcal{D}(s, t)$ условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i(s, t) < 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$\operatorname{rank} A(s, t) = n$, и m -кратному нулевому собственному значению соответствует m линейно независимых собственных векторов.

Теорема 2 [20]. Пусть в области $\Omega = \{(s, t, \varepsilon) \mid s \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ выполняются условия I, II, III. Тогда существует такое ε_1 , что $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ и для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ уравнение (12) имеет интегральное многообразие медленных движений $x = P(s, t, \varepsilon)$, представленное в параметрическом виде с параметром $s \in \mathbb{R}^m$, оно единственно, и движение по нему описывается уравнением $\dot{s} = S(s, t, \varepsilon)$.

4. ПРИМЕР 2

Рассмотрим пример системы обыкновенных дифференциальных уравнений, взятой из конкретной задачи химической кинетики, который показывает, что постановка задачи, рассмотренной в пункте 3, не надуманная.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_7^2 - b_2x_6x_1 - b_8x_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= b_4x_7 - b_5x_2 - b_8x_1x_2 - b_9x_2x_3 - b_{12}x_2x_4, \\ \dot{x}_3 &= b_2x_6x_1 - 2b_3x_3^2 - b_6x_3 + b_2x_5 - b_9x_2x_3 + 2b_{10}x_4x_5 + b_{12}x_2x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_3^2 - b_{10}x_4x_5 - b_{12}x_2x_4, \\ \dot{x}_5 &= b_6x_3 - b_7x_5 - b_{10}x_4x_5 - b_{11}x_5, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$x_6 = 1 - x_3 - x_4 - x_5, \quad x_7 = 1 - \sum_{i=1}^5 x_i.$$

Область изменения переменных имеет вид

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_5) \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 5, \sum_{i=1}^5 x_i \leq 1 \right\}.$$

Эта система соответствует некоторой модели реакции каталитического окисления. Подробный её анализ дан в [4]. При анализе модели использована следующая иерархия параметров:

$$b_{10} > b_8 \gg b_7 > b_1, b_2, b_3, b_4, b_6, b_{11}, b_{12} \gg b_5, b_9,$$

где коэффициенты b_{10}, b_8 на несколько порядков больше остальных. Обозначая $\varepsilon = \frac{1}{b_{10}}, \mu = \frac{1}{b_8}$, перепишем систему (14) в виде $\varepsilon \dot{x} = f(x, \varepsilon)$. Функция f является полиномом, следовательно, условие I выполнено. Полагая $\varepsilon = 0, \mu = 0$, имеем систему

$$\begin{cases} 0 = -x_1x_2, \\ 0 = -x_1x_2, \\ 0 = 2x_4x_5, \\ 0 = -x_4x_5, \\ 0 = -x_4x_5. \end{cases}$$

Матрица Якоби для правых частей вырожденной системы есть

$$A_0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_5 & 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A_0 равен 2. Для того чтобы выполнялось условие II, необходимо ввести параметр $s \in \mathbb{R}^3$.

Запараметризуем решение уравнения $f(x, 0) = 0$ следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -s_1, \\ x_3 = s_1 + s_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = -s_3. \end{cases}$$

В терминах постановки задачи это означает, что

$$\varphi_1(s) = 0, \quad \varphi_2(s) = -s_1, \quad \varphi_3(s) = s_2 + s_3, \quad \varphi_4(s) = 0, \quad \varphi_5(s) = -s_3,$$

где $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ ($m = 3$). Матрица Якоби для правых частей системы есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\text{rank} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 3$. Таким образом, выполнены условия I и II.

Осталось проверить условие III. Будем искать собственные числа матрицы $A(s)$, полученной из матрицы $A_0(x)$ посредством линейной замены

$$A(s) = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\text{rank} A(s) = 2$ и кратность собственного числа $\lambda = 0$ равна 3 (т.е. числу параметров, $m = 3$), а остальные 2 собственных числа удовлетворяют условию:

$$\text{Re} \lambda_1 = s_1 < 0, \quad \text{Re} \lambda_2 = s_3 < 0, \quad \text{т. к. } x_i > 0, \quad i = 1, \dots, 5,$$

(рассматриваем x_i , не принадлежащие границе множества).

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за время, потраченное на прочтение работы, за очень полезные замечания, которые подталкивают к изучению более трудных вопросов качественной теории дифференциальных уравнений. Автор также выражает особую благодарность Я. А. Копылову и А. Б. Кутбаеву за помощь в работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были подробно рассмотрены два способа задания интегральных многообразий для сингулярно возмущённых систем, возникающих в задачах химической кинетики: явный и параметрический.

На основе проведённого анализа можно сделать следующие выводы:

а) явное задание интегральных многообразий является удобным и интуитивно понятным методом, однако не всегда применимо из-за сложности или невозможности нахождения аналитических решений;

б) параметрическое задание многообразий представляет более гибкий и универсальный подход, особенно в случаях, когда уравнения имеют сложную структуру;

в) асимптотический метод разложения функций по малым параметрам доказал свою эффективность для приближённого описания медленных поверхностей и их уточнений. Приведённые примеры из химической кинетики демонстрируют практическую применимость рассмотренных методов. Работа вносит вклад в развитие подходов к решению задач, связанных с многоуровневой динамикой, и может быть полезна при исследовании математических моделей процессов с разномасштабными переменными.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0026). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. Москва: Наука, 1963.
2. Васильева А.В., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущённые уравнения в критических случаях. Москва: Изд-во МГУ, 1978.
3. Гольдштейн В.М., Соболев В.А. Качественный анализ сингулярно возмущённых систем. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988.
4. Кононенко Л.И. О гладкости медленных поверхностей сингулярно возмущённых систем // Сиб. журн. индустр. матем. 2002. Т. 5, № 2. С. 109–125.
5. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущённых систем. Москва: Физматлит, 2009.
6. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сборник. 1948. Т. 22, № 2. С. 193–204.
7. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, Ч. 1, 2004. Ч. 2, 2009.
8. Elboughdiri N., Sultan F., Ishaq M. S., Elmasry Y., Iqbal A. Novel reduction schemes for a dissipative dynamical system: A study on slow invariant manifolds in chemical kinetics // Ain Shams Engrg. J. 2024. V. 15, N 6. Article number 102751.
9. Bykov V., Cherkinsky Y., Gol'dshtein V., Krapivnik N., Maas U. Fast–slow vector fields of reaction–diffusion systems // IMA J. Appl. Math. 2020. V. 85, N 1. P. 67–86.
10. Chumakov G. A., Chumakova N. A., Lashina E. A. Modeling the complex dynamics of heterogeneous catalytic reactions with fast, intermediate, and slow variables // Chem. Engrg. J. 2015. V. 282, P. 11–19.
11. Bykov V., Goldshtein V. Fast and slow invariant manifolds in chemical kinetics // Comput. Math. Appl. 2013. V. 65, N 10. P. 1502–1515.
12. Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications. In: Lect. Notes in Math., Vol. 2114. Cham–Berlin–Heidelberg–London: Springer. 2014.
13. Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Института Математики, Ч. 1, Кн. 2. 1999. Ч. 2, Кн. 1. 2000.
14. Звонкин А.К., Шубин М.А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН, 1984. Т. 39, № 2(236). С. 77–127.
15. Арнольд В.И. и др. Теория бифуркаций. В кн.: Современные Проблемы Математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1986.
16. Chumakov G.A., Chumakova N.A. Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards // Chem. Engrg. J. 2003. V. 91, N 2–3. P. 151–158
17. Соболев В.А., Щепакина Е.А. Траектории-утки в одной задаче теории горения // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1175–1184.
18. Кононенко Л.И., Волокитин Е.П. Качественный анализ одной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Математические заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 3, С. 15–27.

19. *Воропаева Н.В.* Понижение размерности моделей многотемповых динамических систем // Известия РАН, Сер. МММИУ. 1999. Т. 3, № 2. С. 70-102.
20. *Кононенко Л.И.* Параметризованные интегральные многообразия сингулярно возмущённых систем в критическом случае для задач химической кинетики // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1640–1653; <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.115>

UDC 517.9:541.121:541.126

**PARAMETRIC AND EXPLICIT REPRESENTATIONS
OF SLOW INTEGRAL MANIFOLDS IN TWO PROBLEMS
OF CHEMICAL KINETICS**

© 2025 L. I. Kononenko

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Acad. Koptyug pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: larak@math.nsc.ru

Received 09.01.2024, revised 30.06.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. When using the method of integral manifolds to solve specific problems, the central issue becomes the computation of the function describing the integral manifold. One approach to approximate the function is by employing its asymptotic expansion in terms of powers of a small parameter. The function can then be defined explicitly, parametrically, or implicitly. This paper presents examples of two models from chemical kinetics in singularly perturbed systems where integral manifolds are defined explicitly and parametrically.

Keywords: ordinary differential equations, singularly perturbed systems, integral manifolds, sheets of the slow surface, small parameter, chemical kinetics.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.407

REFERENCES

1. Mitropol'skii Yu.A., Lykova O.B. Integral'nye mnogoobraziya v nelineinoy mekhanike [Integral manifolds in nonlinear mechanics]. Moscow: Nauka, 1963 (in Russian).
2. Vasil'eva A.V., Butuzov V.F. Singuliarno vozmushchennyye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh [Singularly perturbed equations in critical cases]. Moscow: MSU, 1978 (in Russian).
3. Gol'dshtein V.M., Sobolev V.A. Kachestvennyi analiz singuliarno-vozmushchennykh sistem [A qualitative analysis of singularly perturbed systems]. Novosibirsk: IM Academy Sciences SSSR, 1988 (in Russian).
4. Kononenko L.I. O gladkosti medlennykh poverkhnostei singuliarno vozmushchennykh sistem [On the smoothness of slow surfaces of singularly perturbed systems] *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2002, Vol. 5, No. 2, pp. 109–125 (in Russian).
5. Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Geometricheskaya dekompozitsiya singuliarno vozmushchennykh sistem [Geometric decomposition of singularly perturbed systems]. Moscow: Fizmatlit, 2009 (in Russian).
6. Tikhonov A.N. O zavisimosti reshenii differentsial'nykh uravnenii ot malogo parametra [On the dependence of the solutions of differential equations on a small parameter]. *Mat. Sbornik N. S.*, 1948, Vol. 22, No. 2, pp. 193–204 (in Russian).
7. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Singapore: World Scientific. Part I, 1998. Part II, 2001.
8. Elboughdiri N., Sultan F., Ishaq M. S., Elmasry Y., Iqbal A. Novel reduction schemes for a dissipative dynamical system: A study on slow invariant manifolds in chemical kinetics. *Ain Shams Engrg. J.*, 2024, Vol. 15, No. 6, 102751.
9. Bykov V., Cherkinsky Y., Gol'dshtein V., Krapivnik N., Maas U. Fast–slow vector fields of reaction–diffusion systems. *IMA J. Appl. Math.*, 2020, Vol. 85, No. 1, pp. 67–86.

10. Chumakov G.A., Chumakova N.A., Lashina E.A. Modeling the complex dynamics of heterogeneous catalytic reactions with fast, intermediate, and slow variables. *Chem. Engrg. J. V.*, 2015, Vol. 282, pp. 11–19.
11. Bykov V., Goldshtein V. Fast and slow invariant manifolds in chemical kinetics. *Comput. Math. Appl.*, 2013, Vol. 65(10), pp. 1502–1515.
12. Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications. In: *Lect. Notes in Math.*, Vol. 2114. Cham–Berlin–Heidelberg–London: Springer, 2014.
13. Reshetnyak Yu.G. Kus matematicheskogo analiza [A course in mathematical analysis]. Novosibirsk: IM SO RAN Press. Part 1, Book 2, 1999. Part 2, Book 1, 2000.
14. Zvonkin A.K., Shubin M.A. Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Russ. Math. Surv.*, 1984, Vol. 39, No. 2, pp. 69–131.
15. Arnold V.I. et al. Teoriya bifurkatsii [Bifurcation theory]. In: *Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya*. Moscow: VINITI, 1986 (in Russian).
16. Chumakov G.A., Chumakova N.A. Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards. *Chem. Engrg. J.*, 2003, Vol. 91, No. 2–3, pp. 151–158.
17. Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Duck trajectories in a problem of combustion theory *Differ. Equations*. 1996, Vol. 32, No. 9, pp. 1177–1186.
18. Kononenko L.I., Volokitin E.P. Kachestvennyi analiz odnoi singuliarno vozmushchennoi systemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom [Qualitative analysis of one singularly perturbed system of differential equations with a small parameter]. *Mat. Zamet. SVFU*, 2024, Vol. 31, No. 3, pp. 15–27 (in Russian).
19. Voropaeva N.V. Ponizhenie razmernosti modelei mnogotempovykh dinamicheskikh sistem [Reduction of dimension in the models of multitempo dynamical systems]. *Izv., Ross. Akad. Estestv. Nauk, Mat. Mat. Model. Inform. Upr.*, 1999, Vol. 3, No. 2, pp. 70–103 (in Russian).
20. Kononenko L.I. Parametrized integral manifolds of singularly perturbed systems in the critical case for problems of chemical kinetics. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Vol. 16, pp. 1640–1653.