

УДК 531.36

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛИУВИЛЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ В СЛУЧАЕ ГЕССА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЁЛОГО ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

© 2025 А. С. Кулешов^{a,b}, А. Д. Скрипкин^c

¹Механико – математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, главное здание МГУ, Москва 119234, Россия

E-mails: ^akuleshov@mech.math.msu.su, ^balexander.kuleshov@math.msu.ru,
^cantohaskripkin@gmail.com

Поступила в редакцию 20.03.2025 г.; после доработки 02.10.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Рассматривается задача о движении гиростата с неподвижной точкой при одновременном действии силы тяжести и гироскопических сил в случае, аналогичном случаю Гесса в задаче о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Показано, что решение задачи описания движения гиростата в этом случае сводится к нахождению общего решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. При помощи алгоритма Ковачича получены условия на параметры задачи, при выполнении которых соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает явное решение, выражающееся в лиувиллевых функциях. Показано, что при выполнении полученных условий уравнения движения гиростата могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Ключевые слова: тяжёлый гиростат, гироскопические силы, случай Гесса, линейное дифференциальное уравнение второго порядка, алгоритм Ковачича, лиувиллевы решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.409

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] указан новый частный случай интегрируемости уравнений Эйлера — Пуассона движения тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Вскоре после открытия этого интегрируемого случая появились первые работы, в которых проводилось качественное описание движения тяжёлого твёрдого тела в случае Гесса. Детальное аналитическое исследование случая Гесса было выполнено в работах [2, 3], где задача приведена к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с двоякопериодическими комплексными коэффициентами и показано, что решения в случае Гесса являются, вообще говоря, неоднозначными. Исследованы аналитические свойства полученного линейного дифференциального уравнения и выявлены основные свойства траекторий на сфере Пуассона. Также в работах [2, 3] было показано, что при выполнении условий Гесса и при дополнительном условии ортогональности кинетического момента тела и вектора восходящей вертикали уравнения Эйлера — Пуассона интегрируются в эллиптических функциях.

В работе [4] показано, что частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса, будет существовать и в задаче о движении гиростата — твёрдого тела с неподвижной точкой, в котором расположен вращающийся однородный маховик. В работе [5] было показано, что задача о движении тяжёлого гиростата при условиях Гесса — Сретенского приводит к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка

с переменными коэффициентами. В дальнейшем были предложены многочисленные аналоги случая Гесса, имеющие место в различных задачах. В работах [6]–[8] были указаны аналоги случая Гесса в задаче о качении тяжёлого твёрдого тела по абсолютно гладкой плоскости [6], в задаче о движении тела на струне [7] и в задаче о движении тела в потоке частиц [8]. В работах [9, 10] были указаны аналоги случая Гесса в задаче о движении гироскопа в кардановом подвесе и в задаче о падении твёрдого тела в жидкости. В работах [11, 12] при помощи алгоритма Ковачича был исследован вопрос об условиях интегрируемости в квадратурах задачи о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Гесса. В работе [13] было показано, что исследование задачи о качении неоднородного шара по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости при условиях Гесса приводится к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, причём если кинетический момент шара относительно его центра масс ортогонален вектору восходящей вертикали, то задача интегрируется в квадратурах. Наиболее общие условия, при выполнении которых в задаче о движении гиростата под действием потенциальных, гироскопических и циркулярно — гироскопических сил существует частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса, были указаны в работе [14].

В данной работе рассматривается задача о движении гиростата, находящегося под действием силы тяжести и гироскопических сил. Показано, что при выполнении условий Гесса — Сретенского, а также дополнительных условий на гироскопические силы, указанных в работе [14], решение задачи о движении тяжёлого гиростата под действием гироскопических сил приводится к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Причём коэффициенты полученного уравнения являются рациональными функциями независимой переменной. При помощи алгоритма Ковачича [15, 16] в работе решается вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка. Получены условия на параметры задачи, при выполнении которых общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка записывается в явном виде. Показано, как используя явный вид общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, получить решение уравнений движения гиростата в квадратурах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА И ИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим движение в однородном поле тяжести механической системы S , состоящей из двух твёрдых тел, соединённых между собой. Первое тело S_0 (носитель) представляет собой тяжёлое твёрдое тело с неподвижной точкой O . Допустим, что с этим телом связана некоторая ось, вокруг которой может вращаться маховик S_1 — геометрически и динамически симметричное твёрдое тело, осью симметрии которого является указанная ось. Центр масс O_1 маховика также расположен на оси динамической симметрии. Обозначим через e единичный вектор, определяющий положение оси вращения маховика относительно тела-носителя S_0 . Поскольку маховик S_1 является динамически симметричным твёрдым телом, то его вращение не изменяет положения центра масс механической системы S , состоящей из тела-носителя S_0 и маховика S_1 . Также вращение маховика не изменяет распределения масс в системе S . Такую систему (тело — носитель с маховиком) принято называть гиростатом.

Введём подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела S_0 для точки O . Обозначим через e_1, e_2, e_3 единичные базисные векторы системы координат $Ox_1x_2x_3$. Пусть $\mathbb{J}_O = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — матрица тензора инерции тела S_0 относительно главных осей $Ox_1x_2x_3$. Обозначим через $\omega = \omega_1e_1 + \omega_2e_2 + \omega_3e_3$ угловую скорость твёрдого тела, $\gamma = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3$ — единичный вектор восходящей вертикали и $r_0 = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ радиус-вектор центра масс системы S относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$. Пусть \mathbb{I} — матрица тензора инерции маховика относительно системы координат

$O_1x_1y_1z_1$, жёстко связанной с маховиком. Ось O_1z_1 данной системы направлена вдоль оси динамической симметрии маховика. Предположим, что вращение маховика происходит с постоянной угловой скоростью Ω . Тогда кинетический момент рассматриваемой системы может быть записан следующим образом (см. [17]):

$$\mathbf{K} = \mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \Omega\mathbb{I}\mathbf{e}. \quad (1)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (1) называется гиростатическим моментом. Обозначим его через \mathbf{s} . Гиростатический момент \mathbf{s} — это кинетический момент маховика S_1 относительно тела — носителя S_0 . Следовательно, мы можем переписать выражение (1) в виде

$$\mathbf{K} = \mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}.$$

Выведем теперь уравнения движения рассматриваемой системы. Пусть M — масса системы, g — величина ускорения свободного падения. Тогда $\mathbf{P} = -Mg\boldsymbol{\gamma}$ — сила тяжести, направленная вертикально вниз и приложенная к центру масс системы. Будем считать, что система S движется под действием момента силы тяжести $Mg[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0]$ и момента гироскопических сил $[\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}]$. Здесь $\mathbb{G} = \mathbb{G}^T$ — некоторая симметричная матрица с постоянными коэффициентами. Отметим, что момент подобного вида возникает вследствие действия силы Лоренца при вращении заряженного твёрдого тела, помещённое в однородное магнитное поле с неизменным вектором напряжённости [14]. Тогда закон изменения кинетического момента системы S , записанный в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, даёт векторное уравнение

$$\dot{\mathbf{K}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}] = Mg[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0] + [\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}].$$

Поскольку гиростатический момент является постоянным в процессе движения, $\dot{\mathbf{s}} = 0$, то данное уравнение может быть представлено в виде

$$\mathbb{J}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \mathbf{s})] = Mg[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0] + [\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (2)$$

Векторное уравнение (2), рассматриваемое совместно с уравнением Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (3)$$

образует замкнутую систему шести дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих движение гиростата. При произвольных значениях параметров задачи система уравнений (2), (3) имеет три первых интеграла

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega}) + Mg(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}_0) = E, \quad K = ((\mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = k, \quad (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 1.$$

В работе [14] были получены условия, при выполнении которых у системы уравнений (2), (3) существует частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для системы уравнений (2), (3) выполняются следующие условия:

$$A_2(A_3 - A_1)x_2^2 = A_1(A_2 - A_3)x_1^2, \quad x_3 = 0, \quad s_3 = 0, \quad A_2 > A_3 > A_1, \quad (4)$$

а матрица \mathbb{G} имеет вид:

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причём для компонент g_{11} , g_{12} , g_{22} справедливы условия

$$g_{11}x_2 - g_{12}x_1 = 0, \quad g_{12}x_2 - g_{22}x_1 = 0. \quad (5)$$

Тогда система уравнений (2), (3) обладает частным интегралом Гесса — Сретенского, который имеет вид

$$A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 + \frac{A_1x_1(s_2x_1 - s_1x_2)}{(A_3 - A_1)x_2} = 0. \quad (6)$$

Проанализируем условия (5). На три компоненты матрицы \mathbb{G} мы имеем два условия. Следовательно, вводя вспомогательный параметр λ , мы без ограничения общности можем написать, что

$$g_{11} = \lambda x_1^2, \quad g_{12} = \lambda x_1x_2, \quad g_{22} = \lambda x_2^2.$$

Таким образом, при выполнении условий (4), (5) система уравнений (2), (3) в скалярной форме записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 - s_2\omega_3 &= -Mg x_2\gamma_3 + \lambda x_2\omega_3(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2), \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 + s_1\omega_3 &= Mg x_1\gamma_3 - \lambda x_1\omega_3(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 + s_2\omega_1 - s_1\omega_2 = Mg(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2) + \lambda(x_1\omega_2 - x_2\omega_1)(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2),$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \quad (8)$$

Первые интегралы системы уравнений (7), (8) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + Mg(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2) &= E, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ (A_1\omega_1 + s_1)\gamma_1 + (A_2\omega_2 + s_2)\gamma_2 + A_3\omega_3\gamma_3 + \frac{\lambda}{2}(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2)^2 &= k. \end{aligned}$$

Покажем, что при выполнении условий (4), (5) система уравнений (7), (8) допускает четвёртый частный интеграл (6). Для этого умножим первое уравнение системы (7) на x_1 , а второе — на x_2 , и складывая их, получим

$$\frac{d}{dt}(A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2) = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3x_2 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3x_1 + \omega_3(s_2x_1 - s_1x_2). \quad (9)$$

Правая часть соотношения (9) с учётом условий (4) может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3x_2 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3x_1 + \omega_3(s_2x_1 - s_1x_2) \\ = \frac{\omega_3(A_2 - A_3)x_1}{A_2x_2} \left(A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 + \frac{A_1x_1(s_2x_1 - s_1x_2)}{(A_3 - A_1)x_2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому с учётом соотношения (10) из уравнения (9) следует вывод, что если в начальный момент времени выполняется условие (6), то это условие справедливо во все время движения гиростата. Следовательно, при выполнении условий (4), (5) система уравнений (7), (8) допускает первый интеграл (6).

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Перепишем систему уравнений (7), (8) в других переменных. Для этого введём обозначения

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_2 &= \frac{A_2\omega_2x_1 - A_1\omega_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_3 &= A_3\omega_3, \\ \nu_1 &= \frac{\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_2 &= \frac{\gamma_2x_1 - \gamma_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_3 &= \gamma_3, & k_1 &= \frac{s_1x_1 + s_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ k_2 &= \frac{s_2x_1 - s_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \Gamma &= Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & \Lambda &= \lambda(x_1^2 + x_2^2), \\ a &= \frac{A_2x_1^2 + A_1x_2^2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & b &= \frac{(A_1 - A_2)x_1x_2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & c &= \frac{1}{A_3}. \end{aligned}$$

Тогда в переменных $L_1, L_2, L_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ система уравнений (7), (8) переписывается следующим образом:

$$\dot{L}_1 = -bL_3\left(L_1 - \frac{ck_2}{b}\right), \quad \dot{L}_2 = (a - c)L_1L_3 + bL_2L_3 - ck_1L_3 - \Lambda c\nu_1L_3 + \Gamma\nu_3,$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 &= -(a - c)L_1L_2 + bL_1^2 - bL_2^2 + (k_1b - k_2a)L_1 + (k_1c - k_2b)L_2 \\ &\quad + \Lambda(bL_1 + cL_2)\nu_1 - \Gamma\nu_2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - (cL_2 + bL_1)\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= (aL_1 + bL_2)\nu_3 - cL_3\nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= -(aL_1 + bL_2)\nu_2 + (cL_2 + bL_1)\nu_1. \end{aligned}$$

Из первого уравнения системы уравнений (11) следует частный интеграл Гесса — Сретенского (6), который имеет вид

$$L_1 \equiv \frac{ck_2}{b}. \quad (12)$$

Инвариантное многообразие (12) (или, в других обозначениях, (6)) вместе с условиями (4), (5) и определяет интегрируемый случай Гесса — Сретенского в задаче о движении тяжёлого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических сил. При выполнении условий (4), (5) на уровне частного интеграла Гесса — Сретенского (12) уравнения (11) заметно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{L}}_2 &= b\bar{L}_2L_3 + (F - Gc)L_3 - \Lambda c\nu_1L_3 + \Gamma\nu_3, & \dot{\bar{L}}_3 &= -b\bar{L}_2^2 - (F - Gc)\bar{L}_2 + \Lambda c\bar{L}_2\nu_1 - \Gamma\nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - c\bar{L}_2\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= -cL_3\nu_1 + b\bar{L}_2\nu_3 + F\nu_3, & \dot{\nu}_3 &= c\bar{L}_2\nu_1 - b\bar{L}_2\nu_2 - F\nu_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{L}_2 = L_2 + k_2, \quad F = \frac{(ac - b^2)k_2}{b}, \quad G = \frac{ck_2}{b} + k_1.$$

Система уравнений (13) допускает следующие первые интегралы:

$$\frac{c}{2}(\bar{L}_2^2 + L_3^2) + \Gamma\nu_1 = E; \quad \bar{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 + G\nu_1 + \frac{\Lambda}{2}\nu_1^2 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (14)$$

3. ОБЕЗРАЗМЕРИВАНИЕ УРАВНЕНИЙ. ПРИВЕДЕНИЕ К ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Обезразмерим теперь систему уравнений (13) и первые интегралы (14). Для этого введём безразмерные переменные y и z по формулам

$$y = \bar{L}_2 \sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad z = L_3 \sqrt{\frac{c}{\Gamma}},$$

а также безразмерное время $\tau = t\sqrt{\Gamma c}$ и безразмерные параметры

$$d_1 = \frac{b}{c}, \quad Q = \Lambda \sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad A = \frac{F}{\sqrt{\Gamma c}}, \quad B = G \sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

Введём также безразмерные постоянные первых интегралов

$$h = \frac{E}{\Gamma}, \quad p_1 = k \sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

Тогда в безразмерной форме уравнения движения гиростата запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1 y z + (A - B)z - Q \nu_1 z + \nu_3, & \frac{dz}{d\tau} &= -d_1 y^2 - (A - B)y + Q \nu_1 y - \nu_2, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z \nu_2 - y \nu_3, & \frac{d\nu_2}{d\tau} &= d_1 y \nu_3 - z \nu_1 + A \nu_3, & \frac{d\nu_3}{d\tau} &= -d_1 y \nu_2 + y \nu_1 - A \nu_2, \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений движения гиростата (15) обладает первыми интегралами

$$\frac{y^2 + z^2}{2} + \nu_1 = h, \quad y \nu_2 + z \nu_3 + B \nu_1 + \frac{Q}{2} \nu_1^2 = p_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (16)$$

Из системы уравнений (15) с использованием первых интегралов (16) получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к нахождению общего решения которого сводится решение данной задачи. Умножая первое уравнение системы (15) на y , а второе — на z и складывая, получим

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) = y \nu_3 - z \nu_2. \quad (17)$$

Из первого из интегралов (16) находим, что

$$\nu_1 = h - \frac{y^2 + z^2}{2},$$

откуда следуют соотношения

$$\begin{aligned} \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1 - \nu_1^2 = 1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2, \\ y \nu_2 + z \nu_3 &= p_1 + B \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right) - \frac{Q}{2} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2. \end{aligned}$$

Используя очевидное тождество

$$(y^2 + z^2)(\nu_2^2 + \nu_3^2) = (y \nu_2 + z \nu_3)^2 + (y \nu_3 - z \nu_2)^2, \quad (18)$$

получаем

$$(y\nu_3 - z\nu_2)^2 = (y^2 + z^2) \left(1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2 \right) - \left(p_1 + B \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right) - \frac{Q}{2} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2 \right)^2 = \frac{P_4(y^2 + z^2)}{64},$$

где $P_4(y^2 + z^2)$ — многочлен четвёртой степени относительно $y^2 + z^2$ с постоянными коэффициентами. В явном виде многочлен $P_4(y^2 + z^2)$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} P_4(y^2 + z^2) = & -Q^2(y^2 + z^2)^4 + 8(BQ + Q^2h - 2)(y^2 + z^2)^3 \\ & + 8(8h - 2B^2 - 6BQh - 3Q^2h^2 + 2p_1Q)(y^2 + z^2)^2 - 16(Qh^2 + 2Bh - 2p_1)^2 \\ & + 32(2 - 2h^2 - 2p_1B - 2p_1Qh + 2B^2h + 3QBh^2 + Q^2h^3)(y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Будем считать, что

$$y\nu_3 - z\nu_2 = -\frac{\sqrt{P_4(y^2 + z^2)}}{8}, \quad (19)$$

(знак перед корнем выражения, стоящего в правой части равенства (19), может быть выбран любым). С учётом равенства (19) уравнение (17) принимает вид:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) = -\frac{\sqrt{P_4(y^2 + z^2)}}{8}.$$

Умножим теперь первое уравнение системы (8) на z , а второе — на y и вычтем из второго уравнения первое. Получим:

$$\begin{aligned} y \frac{dz}{d\tau} - z \frac{dy}{d\tau} = & -d_1y(y^2 + z^2) - (A - B)(y^2 + z^2) + Q\nu_1(y^2 + z^2) - (y\nu_2 + z\nu_3) \\ = & -d_1y(y^2 + z^2) - \frac{3Q}{8}(y^2 + z^2)^2 + \frac{1}{2}(Qh + B - 2A)(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(Qh^2 + 2Bh - 2p_1). \end{aligned}$$

Введём теперь новые переменные x и φ («полярные координаты») по формулам

$$y = x \cos \varphi, \quad z = x \sin \varphi. \quad (20)$$

Тогда для определения переменных x и φ мы получаем следующую систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{d\tau} = & -\frac{\sqrt{P_8(x)}}{8}, \\ x^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = & -d_1x^3 \cos \varphi - \frac{3Q}{8}x^4 + \frac{1}{2}(Qh + B - 2A)x^2 - \frac{1}{2}(Qh^2 + 2Bh - 2p_1), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P_8(x) = & -Q^2x^8 + 8(BQ + Q^2h - 2)x^6 + 8(8h - 2B^2 - 6BQh - 3Q^2h^2 + 2p_1Q)x^4 \\ & + 32(2 - 2h^2 - 2p_1B - 2p_1Qh + 2B^2h + 3QBh^2 + Q^2h^3)x^2 - 16(Qh^2 + 2Bh - 2p_1)^2. \end{aligned}$$

Из системы уравнений (21), разделив одно уравнение на другое, получаем зависимость $\varphi = \varphi(x)$, которая определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{8d_1x^2}{\sqrt{P_8(x)}} \cos \varphi + \frac{3Qx^4 - 4(Qh + B - 2A)x^2 + 4(2p_1 - Qh^2 - 2Bh)}{x\sqrt{P_8(x)}}. \quad (22)$$

Уравнение (22) имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dx} = a_0 \cos \varphi + b_0,$$

тогда замена переменной по формуле

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

приводит данное уравнение к уравнению Риккати:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{b_0 - a_0}{2} w^2 + \frac{b_0 + a_0}{2} = f_2 w^2 + f_0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{3Qx^4 - 8d_1x^3 + 4(2A - B - Qh)x^2 + 4(2p_1 - Qh^2 - 2Bh)}{2x\sqrt{P_8(x)}}, \\ f_0 &= \frac{3Qx^4 + 8d_1x^3 + 4(2A - B - Qh)x^2 + 4(2p_1 - Qh^2 - 2Bh)}{2x\sqrt{P_8(x)}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из общей теории дифференциальных уравнений известно (см. [18]), что если общее уравнение Риккати имеет вид (23), то замена переменных

$$u(x) = \exp \left(- \int f_2(x)w(x) dx \right) \quad (25)$$

приводит общее уравнение Риккати к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx} + b(x)u = 0, \quad a(x) = -\frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dx}, \quad b(x) = f_0 f_2. \quad (26)$$

Учитывая, что функции f_2 и f_0 имеют вид (24), можно сделать вывод, что коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка (26) являются рациональными функциями независимой переменной x . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Решение задачи о движении тяжёлого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических сил сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка (25) с рациональными коэффициентами.*

Действительно, если удаётся записать в явном виде общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (25)

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x),$$

то, используя это решение, можно получить зависимость $\varphi = \varphi(x)$, используя которую по формулам (20) получим явные выражения $y = y(x)$ и $z = z(x)$. Теперь из системы уравнений

$$\begin{aligned} y(x)\nu_2 + z(x)\nu_3 &= k_1 + B \left(\frac{x^2}{2} - h \right) - \frac{Q}{2} \left(\frac{x^2}{2} - h \right)^2, \\ y(x)\nu_3 - z(x)\nu_2 &= -\frac{\sqrt{P_8(x)}}{8}, \end{aligned}$$

определяем зависимости $\nu_2 = \nu_2(x)$ и $\nu_3 = \nu_3(x)$. Зависимость $\nu_1 = \nu_1(x)$ определяется из первого интеграла (16)

$$\nu_1 = h - \frac{x^2}{2},$$

а зависимость $x = x(\tau)$ определяется из первого уравнения системы (21).

Таким образом, решение задачи о движении тяжёлого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических сил в случае Гесса — Сретенского сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (26), коэффициенты которого имеют вид рациональных функций. Следовательно, в этом случае представляет интерес вопрос о том, при каких значениях параметров задачи общее решение уравнения (26) выражается через лиувиллевы функции. Лиувиллевы функции — это функции, которые строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределённого интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения [15, 16]. Необходимые и достаточные условия существования решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, выражающегося через лиувиллевы функции, даёт так называемый алгоритм Ковачича [15, 16]. Применение алгоритма Ковачича к линейному дифференциальному уравнению второго порядка (26) приводит к следующему результату.

Теорема 3. Пусть $Q \neq 0$ (гироскопические силы присутствуют) и $d_1 \neq 0$ (распределение масс в твёрдом теле не соответствует случаю Лагранжа). Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (26) допускает общее решение, выражающееся через лиувиллевы функции при выполнении условия

$$A = \frac{(d_1^2 + 1)}{Q}. \quad (27)$$

Действительно, при выполнении условия (27) общее решение линейного дифференциального уравнения (26) принимает вид:

$$u(x) = \sqrt{\frac{\Pi_4(x)}{x}} (C_1 \cos \Phi(x) + C_2 \sin \Phi(x)), \quad \Phi(x) = 8\sqrt{D} \int \frac{x f_2^* dx}{\Pi_4(x)},$$

$$\begin{aligned} \Pi_4(x) = & d_1 Q^3 x^4 - 4d_1^2 Q^2 x^3 - 4d_1 Q(Q^2 h + BQ - 2 - 2d_1^2)x^2 \\ & + 8(d_1^2 Q^2 h + (d_1^2 + 1)BQ - (d_1^2 + 1)^2)x + 4d_1 Q^2(Q^2 h + 2Bg - 2p_1), \end{aligned}$$

$$D = (d_1^2 + 1)^2 (BQ - d_1^2 - 1)^2 + 2d_1^2 Q^2 (d_1^2 + 1)(p_1 Q - d_1^2 h - h) - Q^4 d_1^2, \quad f_2^* = f_2|_{(27)}.$$

Следствие. Если параметры задачи удовлетворяют условиям

$$A = \frac{d_1^2 + 1}{Q}, \quad B = \frac{1}{Q}, \quad h = \frac{Q^4 + (d_1^2 + 1)^2}{2Q^2(d_1^2 + 1)}, \quad p_1 = \frac{Q^4 + (d_1^2 + 1)^2}{2Q^3(d_1^2 + 1)} + \frac{Q}{2},$$

то общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка упрощается и записывается в виде

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_1(x) \int \frac{f_2 dx}{u_1^2(x)}, \quad u_1(x) = \frac{Q^4 - (d_1^2 + 1)((Qx - d_1)^2 + 1)}{\sqrt{x}}.$$

Таким образом, условие, при котором удаётся найти в явном виде общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (26) имеет вид (27).

4. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЛЬКО ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Вернёмся к системе уравнений (13) и рассмотрим частный случай, когда на гиростат действуют только гироскопические силы ($\Gamma = 0$). В этом случае система уравнений (13) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{L}}_2 &= b\bar{L}_2L_3 + (F - Gc)L_3 - \Lambda c\nu_1L_3, & \dot{L}_3 &= -b\bar{L}_2^2 - (F - Gc)\bar{L}_2 + \Lambda c\bar{L}_2\nu_1, \\ \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - c\bar{L}_2\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= -cL_3\nu_1 + b\bar{L}_2\nu_3 + F\nu_3, & \dot{\nu}_3 &= c\bar{L}_2\nu_1 - b\bar{L}_2\nu_2 - F\nu_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Система уравнений (28) допускает первые интегралы

$$\bar{L}_2^2 + L_3^2 = E; \quad \bar{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 + G\nu_1 + \frac{\Lambda}{2}\nu_1^2 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (29)$$

Запишем систему уравнений (28) и первые интегралы (29) в безразмерной форме. В отсутствие силы тяжести произведём обезразмеривание иначе, чем в системе уравнений (13). А именно, введём безразмерные компоненты y и z кинетического момента по формулам

$$\bar{L}_2 = y\Lambda, \quad L_3 = z\Lambda.$$

Введём также безразмерное время τ по формуле $\tau = \Lambda ct$, а также безразмерные параметры и безразмерные постоянные интегралов

$$A = \frac{F}{c\Lambda}, \quad B = \frac{G}{\Lambda}, \quad h^2 = \frac{E}{\Lambda^2}, \quad p_1 = \frac{k}{\Lambda}.$$

Тогда система уравнений (28) перепишется в безразмерном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1yz + (A - B)z - \nu_1z, & \frac{dz}{d\tau} &= -d_1y^2 - (A - B)y + \nu_1y, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z\nu_2 - y\nu_3, & \frac{d\nu_2}{d\tau} &= d_1y\nu_3 - z\nu_1 + A\nu_3, & \frac{d\nu_3}{d\tau} &= -d_1y\nu_2 + y\nu_1 - A\nu_2, \end{aligned} \quad (30)$$

Система уравнений (30) допускает первые интегралы

$$y^2 + z^2 = h^2, \quad y\nu_2 + z\nu_3 + B\nu_1 + \frac{\nu_1^2}{2} = p_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (31)$$

Из системы уравнений (30) с использованием первых интегралов (31) получим линейное уравнение второго порядка, к нахождению общего решения которого сводится решение данной задачи. Воспользуемся тождеством (18). Перепишем данное тождество следующим образом:

$$h^2(1 - \nu_1^2) = \left(p_1 - B\nu_1 - \frac{\nu_1^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{d\nu_1}{d\tau}\right)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{d\nu_1}{d\tau}\right)^2 = \frac{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}{4}.$$

Извлекая корень из обеих частей данного уравнения, получим:

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \pm \frac{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}{2}. \quad (32)$$

Таким образом, зависимость $\nu_1 = \nu_1(\tau)$ определяется из уравнения (32) при помощи квадратур.

Из уравнения (32) следует, что

$$z\nu_2 - y\nu_3 = \pm \frac{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}{2}. \quad (33)$$

Выберем для определённости знак « $-$ » перед корнем в правой части соотношения (33) (выбор этого знака не влияет на окончательный вид линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого приводится решение задачи). Введём новую переменную φ по формуле

$$y = h \cos \varphi, \quad z = h \sin \varphi$$

и будем считать, что $\varphi = \varphi(\nu_1)$. Тогда

$$\frac{dz}{d\tau} = h \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} = h \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\nu_1} \frac{d\nu_1}{d\tau}.$$

В результате из системы уравнений (30) мы получаем для φ следующее дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\nu_1} = & \frac{2d_1 h \cos \varphi}{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}} \\ & + \frac{2(A - B - \nu_1)}{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}. \end{aligned} \quad (34)$$

В дальнейшем для сокращения выкладок будем обозначать ν_1 через x . При помощи замены переменной

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

уравнение (34) приводится к уравнению Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= f_2 w^2 + f_0, \quad (35) \\ f_2 &= \frac{A - d_1 h - B - x}{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1 x + 4(p_1 - h^2 - B^2)x^2 - 4Bx^3 - x^4}}, \\ f_0 &= \frac{A + d_1 h - B - x}{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1 x + 4(p_1 - h^2 - B^2)x^2 - 4Bx^3 - x^4}}. \end{aligned}$$

Уравнение Риккати (35) при помощи замены (25) приводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x)u = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{P_4(x)}{(x + d_1 h + B - A)(x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p_1)x^2 - 8Bp_1 x + 4(p_1^2 - h^2))}, \\ b(x) &= -\frac{(A + d_1 h - B - x)(A - d_1 h - B - x)}{(x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p_1)x^2 - 8Bp_1 x + 4(p_1^2 - h^2))}, \end{aligned}$$

$$P_4(x) = x^4 + 2(2B - A + d_1h)x^3 + 6B(B - A + d_1h)x^2 + 4[(B - A + d_1h)(B^2 + h^2) + p_1(A - d_1h)]x + 4(h^2 - p_1^2 - Bp_1(B - A + d_1h)).$$

Применение алгоритма Ковачича к линейному дифференциальному уравнению (36) приводит к следующему результату.

Теорема 4. *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (36) допускает общее решение, выражающееся через лиувиллевы функции, при выполнении условия $A = 0$, то есть в случае, когда кинетический момент маховика коллинеарен радиусу – вектору из неподвижной точки в центр масс гиростата.*

Действительно, при $A = 0$ общее решение линейного дифференциального уравнения (36) принимает вид

$$u(x) = \sqrt{\Pi_2(x)} (C_1 \cos \Phi(x) + C_2 \sin \Phi(x)), \quad \Phi(x) = 2h\sqrt{D} \int \frac{f_2^* dx}{\Pi_2(x)},$$

$$\Pi_2(x) = d_1(x + B + d_1h)^2 + 2hB + d_1(h^2d_1^2 + 2h^2 - B^2 - 2p_1),$$

$$D = (B^2 - d_1^2h^2)(d_1^2 + 1)^2 + 2d_1^2(d_1^2 + 1)k_1 - d_1^2, \quad f_2^* = f_2|_{A=0}.$$

Следствие. При выполнении условий

$$A = 0, \quad h = \pm \frac{1}{\sqrt{d_1^2 + 1}} - \frac{B}{d_1}, \quad p_1 = \frac{1}{2}(d_1^2h^2 - B^2) + h^2 + \frac{Bh}{d_1}, \quad (37)$$

общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка упрощается и записывается в виде:

$$u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) \int \frac{f_2^* dx}{u_1^2(x)}, \quad u_1(x) = x\sqrt{d_1^2 + 1} + d_1, \quad f_2^* = f_2|_{(37)}.$$

Таким образом, уравнения движения гиростата под действием только гироскопических сил в случае Гесса — Сретенского интегрируются в квадратурах при условии $A = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена задача о движении гиростата с неподвижной точкой под действием силы тяжести и гироскопических сил в случае Гесса — Сретенского. Показано, что задача описания движения гиростата приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. При помощи алгоритма Ковачича получены условия на параметры задачи, при выполнении которых общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка выражается через лиувиллевы функции. В этом случае уравнения движения гиростата могут быть проинтегрированы в квадратурах. В частности, показано, что если гиростат движется только под действием гироскопических сил, его уравнения движения могут быть проинтегрированы в квадратурах если кинетический момент маховика коллинеарен радиусу – вектору из неподвижной точки в центр масс гиростата.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hess W. Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // *Mathematische Annalen*. 1890. V. 37, N 2. P. 153–181; DOI: 10.1007/BF01200234
2. Некрасов П.А. К задаче о движении тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки // *Математический сборник*. 1892. Т. 16, № 3. С. 508–517.
3. Некрасов П.А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки // *Мат. сб.* 1896. Т. 18, № 2. С. 161–274.
4. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // *Доклады АН СССР*. 1963. Т. 149, № 2. С. 292–294.
5. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях движения тяжёлого твёрдого тела с гироскопом // *Вестн. Московского ун-та. Математика, механика*. 1963. № 3. С. 60–71.
6. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения твёрдого тела по гладкой горизонтальной плоскости // *Известия АН СССР. Механика твёрдого тела*. 1986. № 5. С. 72–73.
7. Буров А.А. О частных интегралах в задаче о движении тела на струне // *Известия АН СССР. Механика твёрдого тела*. 1987. № 2. С. 84.
8. Буров А.А., Карапетян А.В. О движении твёрдого тела в потоке частиц // *Прикл. математика и механика*. 1993. Т. 57, № 2. С. 77–81.
9. Борисов А.В., Мамаев И.И. *Динамика твёрдого тела*. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
10. Борисов А. В., Мамаев И. С. Случай Гесса в динамике твёрдого тела // *Прикладная математика и механика*. 2003. Т. 67, № 2. С. 256–265.
11. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой // *Динамические системы*. 2020. Т. 10, № 2. С. 197–204.
12. Bardin B.S., Kuleshov A.S. Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case // *ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2022. V. 102, N 11; DOI: 10.1002/ZAMM.202100036
13. Кулешов А.С., Лобанова Е.В. Анализ интегрируемого случая Гесса в задаче о движении шара по гладкой горизонтальной плоскости // *Труды МАИ*. 2024. № 135; <https://trudymai.ru/published.php?ID=179675>
14. Косов А.А. Об аналогах случая Гесса для гиростата при действии момента гироскопических и циркулярных сил // *Прикл. математика и механика*. 2022. Т. 86, № 6. С. 839–856.
15. Kovacic J.J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // *J. Symbolic Computation*. 1986. V. 2, N 1. P. 3–43; DOI: 10.1016/S0747-7171(86)80010-4
16. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. М.: Издательство МАИ, 2020.
17. Yehia H.M. *Rigid Body Dynamics: A Lagrangian Approach*. Basel: Birkhauser, 2022.
18. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Физматлит, 2001.

UDC 531.36

**EXISTENCE OF LIOUVILLIAN SOLUTIONS IN THE PROBLEM OF
MOTION OF A HEAVY GYROSTAT UNDER THE ACTION OF
GYROSCOPIC FORCES IN THE HESS CASE**

© 2025 A. S. Kuleshov^{a,b}, A. D. Skripkin^c

*Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory, Main building of MSU, Moscow 119234, Russia*

E-mails: ^akuleshov@mech.math.msu.su, ^balexander.kuleshov@math.msu.ru,
^cantohaskripkin@gmail.com

Received 20.03.2025, revised 02.10.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. The problem of the motion of a gyrost at with a fixed point under the simultaneous action of gravity and gyroscopic forces is considered in the case similar to the Hess case in the problem of the motion of a heavy rigid body with a fixed point. It is shown that the solution of the problem is reduced to solving the second order linear differential equation with rational coefficients. Using the Kovacic algorithm, conditions on the problem parameters are obtained for which the corresponding second – order linear differential equation admits an explicit solution expressed in Liouvillian functions. It is shown that, when the obtained conditions are satisfied, the equations of motion of the gyrost at can be integrated by quadratures.

Keywords: heavy gyrost at, Gyroscopic forces, Hess case, Linear second order differential equation, Kovacic algorithm, Liouvillian solutions.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.409

REFERENCES

1. Hess W. Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punk. *Mathematische Annalen*, 1890, V. 37, No. 2, pp. 153–181; DOI: 10.1007/BF01200234
2. Nekrasov P. A. K zadache o dvizhenii tyazhelogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoi tochki [On the problem of motion of a heavy rigid body about a fixed point]. *Mat. Sbornik*, 1892, Vol. 16, No. 3, pp. 508–517 (in Russian).
3. Nekrasov P. A. Analiticheskoe issledovanie odnogo sluchaya dvizheniya tyazhelogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoi tochki [Analytical investigation of the case of the motion of a heavy rigid body about a fixed point]. *Mat. Sbornik*, 1896, Vol. 18, No. 2, pp. 161–274 (in Russian).
4. Sretenskii L. N. O nekotorykh sluchayakh integriruемости uravnenii dvizheniya girostata [Some Integrability Cases for the Equations of Gyrost at Motion]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, Vol. 149, No. 2, pp. 292–294 (in Russian).
5. Sretenskii L. N. O nekotorykh sluchayakh dvizheniya tyazhelogo tverdogo tela s giroskopom [On Some Cases of Motion of a Heavy Rigid Body with a Gyroscope]. *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat., Mekh.*, 1963, No. 3, pp. 60–71 (in Russian).
6. Burov A. A. O chastnykh integralakh uravnenii dvizheniya tverdogo tela po gladkoi gorizontāl'noi ploskosti [Particular Integrals of the Equations of Motion of a Rigid Body over a Smooth Horizontal Plane]. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1986, No. 5, pp. 72–73 (in Russian).

7. Burov A. A. O chastnykh integralakh v zadache o dvizhenii tela na strune [Partial Integrals in the Problem of the Motion of a Body Suspended from a String]. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1987, No. 2, pp. 84 (in Russian).
8. Burov A. A., Karapetyan A. V. On the Motion of a Rigid Body in a Particle Flow. *J. Appl. Math. Mech.*, 1993, Vol. 57, No. 2, pp. 295–299; DOI: 10.1016/0021-8928(93)90057-5
9. Borisov A. V., Mamaev I. S. Rigid Body Dynamics. de Gruyter Studies in Mathematical Physics. Vol. 52. Walter de Gruyter GmbH, 2019; DOI: 10.1515/9783110544442
10. Borisov A. V., Mamaev I. S. The Hess case in Rigid – Body Dynamics. *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, Vol. 67, No. 2, pp. 227–235; DOI: 10.1016/S0021-8928(03)90009-8
11. Bardin B. S., Kuleshov A. S. Primenenie algoritma Kovachicha dlya issledovaniya sluchaya Gessa v zadache o dvizhenii tyazhelogo tverdogo tela s nepodvizhnoi tochkoj [Application of the Kovacic algorithm for the Investigation of Motion of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point in the Hess Case]. *Dinam. Syst.*, 2020, Vol. 10, No. 2, pp. 197–204 (in Russian).
12. Bardin B. S., Kuleshov A. S. Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case. *ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2022, Vol. 102, No. 11; DOI: 10.1002/ZAMM.202100036
13. Kuleshov A. S., Lobanova E. V. Analiz integriruemogo sluchaya Gessa v zadache o dvizhenii shara po gladkoi gorizontāl'noi ploskosti [Analysis of the Hess integrable case in the Problem of Motion of a Ball on a Smooth Plane], *Trudy MAI*, 2024, No. 135 (in Russian); <https://trudymai.ru/published.php?ID=179675>
14. Kosov A. A. On Analogues of the Hess Case for a Gyrostat under the action of the Moment of Gyroscopic and Circular Forces. *Mech. Solids*, Vol. 57, No. 6, pp. 1848–1861; DOI: 10.3103/S0025654422080192
15. Kovacic J. J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symb. Comput.*, 1986, Vol. 2, No. 1, pp. 3–43; DOI: 10.1016/S0747-7171(86)80010-4
16. Bardin B. S., Kuleshov A. S. Algoritm Kovachicha i ego primenenie v zadachakh klassicheskoi mekhaniki [The Kovacic algorithm and its application to the problems of classical mechanics]. Moscow: MAI Publishing, 2020 (in Russian).
17. Yehia H. M. Rigid Body Dynamics: A Lagrangian Approach. Basel: Birkhauser, 2022; DOI: 10.1007/978-3-030-96336-1
18. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. Boca-Raton – New York: CRC Press, 2003; DOI: 10.1201/9781420035339