

УДК 539.371:519.632

**БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ ИЗГИБА КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОПОРАХ**© 2025 В. М. Садовский^{1,a}, А. А. Коянкин^{2,b}, В. В. Садовский^{2,c}¹*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия*²*Инженерно-строительный институт СФУ,
просп. Свободный, 82, г. Красноярск 660041, Россия*E-mails: ^asadov@icm.krasn.ru, ^bkoyankinaa@mail.ru,
^cvsadovskiy-sb23@stud.sfu-kras.ruПоступила в редакцию 06.03.2025 г.; после доработки 17.10.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Для расчёта прогиба круговой пластины, подпертой в конечном числе точек, под действием распределённой внешней нагрузки предлагается прямой вычислительный алгоритм, основанный на многократном применении быстрого преобразования Фурье и метода пятиточечной прогонки. При учёте ограничений на прогиб в произвольной системе точек строится фундаментальная система решений, с помощью которой решается задача о контакте пластины с подагтивными опорами. Приводятся результаты методических расчётов, демонстрирующие высокую эффективность алгоритма.

Ключевые слова: уравнение Софи Жермен, контактная задача, разностная схема, метод пятиточечной прогонки, быстрое преобразование Фурье.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.410

ВВЕДЕНИЕ

Задача изгиба пластин относится к классическим задачам теории упругости. Её решение для разных вариантов сосредоточенной и распределённой поверхностной нагрузки при различных условиях на контуре (жёсткая заделка, шарнирное опирание, свободный край) можно найти в трудах С. Жермен, Г. Кирхгофа, Р. Герца, А. Лява, С. П. Тимошенко, В. З. Власова, А. С. Вольмира, А. Л. Гольденвейзера и других известных авторов. Теория пластин широко применяется в строительной механике для анализа напряжений и деформаций в тонкостенных элементах конструкций из однородных и армированных материалов, композитов, слоистых и блочных структур.

Современные здания в строительстве достигают в высоту полкилометра и более, а пролёты сооружений могут быть порядка километра. Такие размеры стали возможными за счёт применения инновационных конструктивных систем. При этом для экстремально больших зданий и сооружений отсутствуют нормативные параметры нагрузок и воздействий, что приводит к необходимости проведения дополнительных расчётов. Усложняющими факторами являются нелинейность (физическая, конструктивная, геометрическая, генетическая) [1], многослойность несущих конструкций (сборно-монолитные конструкции, усиление и восстановление) [2], а также неравномерность осадки фундаментов. При учёте этих факторов возрастает трудоёмкость выполнения расчётов, что неизбежно приводит к увеличению времени вычислений, необходимости использования высокопроизводительной компьютерной техники и быстрых вычислительных алгоритмов. Особую роль расчётные методы играют при строительстве зданий

и сооружений в условиях вечной мерзлоты [3, 4], поскольку на стадии проектирования необходимо учитывать изменения условий эксплуатации в период потепления и таяния грунта [5, 6]. Таким образом, современное развитие строительной индустрии требует разработки математического аппарата, способного максимально быстро и с требуемой точностью решать задачи, возникающие при анализе прочности элементов строительных конструкций.

Разработанный нами быстрый алгоритм предназначен для численного исследования частной задачи изгиба, с помощью которой можно моделировать влияние осадки опор на напряжённо-деформированное состояние круговой пластины. Алгоритм основан на разложении искомой сеточной функции прогиба при решении конечно-разностного аналога уравнения изгиба по окружной переменной на сумму по собственным функциям одномерного разностного оператора Лапласа (см., например, [7]). К решению возникающей при этом серии независимых одномерных систем уравнений по радиальной переменной применяется экономичный метод прогонки (в данном случае, пятиточечной). Альтернативный подход к решению задач изгиба — метод коллокаций и наименьших квадратов, обладающий высокой эффективностью, предложен в работах [8, 9]. Экстремальные по точности алгоритмы без насыщения для численного решения задач изгиба пластин разработаны в [10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается круговая пластина радиуса R , подпёртая в $n \geq 3$ точках с полярными координатами r_k, θ_k на плоскости ($r_k < R, k = 1, 2, \dots, n$). Положения точек контакта пластины с опорными стержнями по высоте относительно её плоскости задаются смещениями δ_i . Требуется определить прогиб и основные характеристики статического напряжённо-деформированного состояния пластины (кривизны, моменты и перерезывающие усилия) под действием приложенной к ней распределённой системы сил $q(r, \theta)$.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа — Лява радиальное u_r и окружное u_θ перемещения точек при чистом изгибе выражаются через производные от прогиба $w(r, \theta)$ по радиусу r и полярному углу θ :

$$u_r = -z \frac{\partial w}{\partial r}, \quad u_\theta = -z \frac{\partial w}{r \partial \theta},$$

где z — вертикальная координата точки пластины относительно нейтральной (срединной) плоскости. Отличные от нуля компоненты тензора деформаций находятся по формулам

$$\varepsilon_r = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right).$$

Кривизны координатных линий и кручение вычисляются следующим образом:

$$\varkappa_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varkappa_\theta = \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r}, \quad \varkappa_{r\theta} = \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta}.$$

Компоненты тензора напряжений связаны с деформациями уравнениями закона Гука:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{r\theta}.$$

Изгибающие и скручивающий моменты связаны с кривизнами и кручением уравнениями, которые также следуют из закона Гука:

$$M_r = -D(\varkappa_r + \nu \varkappa_\theta), \quad M_\theta = -D(\varkappa_\theta + \nu \varkappa_r), \quad M_{r\theta} = (1 - \nu) D \varkappa_{r\theta}.$$

Здесь $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ — изгибная (цилиндрическая) жёсткость, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластины. Перерезывающие усилия равны

$$Q_r = \frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial r}, \quad Q_\theta = -\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} = -D \frac{\partial \Delta w}{r \partial \theta},$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа: $\Delta w = \frac{\partial}{r \partial r} \left(\frac{r \partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2}$.

В вариационной формулировке задача сводится к минимизации квадратичного функционала упругой энергии

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (M_r \varkappa_r + M_\theta \varkappa_\theta + M_{r\theta} \varkappa_{r\theta} - 2qw) r \, d\theta dr$$

на множестве функций $w(r, \theta)$ из пространства Соболева W_2^2 в круге радиуса R , удовлетворяющих ограничениям

$$w(r_k, \theta_k) = \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

В задачах теории пластин произвольного очертания с контактными граничными условиями — ограничениями более общего вида, в том числе с условиями одностороннего контакта в терминах вариационных неравенств, доказаны теоремы существования и единственности решений [11], которые естественным образом распространяются на рассматриваемый случай. Очень важно отметить, что постановка задачи с точечными ограничениями в рамках уравнений пространственной теории упругости, например, для пластины как кругового диска малой толщины, математически некорректна. В этом случае функции, описывающие поле перемещений, принадлежат пространству обобщенных функций W_2^1 , для которых значения в точках, вообще говоря, не определены. Таким образом, строго говоря, невозможно выполнить расчёты напряжённо-деформированного состояния пространственных элементов конструкций при наличии точечных опор с помощью метода конечных элементов. Для корректности постановки требуется учитывать площадь поперечного сечения опорных стержней (свай).

При наличии дискретных ограничений (1) в точках контакта на пластину действуют сосредоточенные силы q_1, q_2, \dots, q_n . Если эти силы уже определены, то вариационная задача преобразуется в задачу безусловной минимизации лагранжиана

$$L(w) = J(w) - \sum_{k=1}^n q_k w(r_k, \theta_k),$$

решение которой неединственно — оно определяется с точностью до перемещения пластины (параллельного переноса и поворота) как абсолютно жёсткого целого

$$w_{\text{abs}}(r, \theta) = ar \cos \theta + br \sin \theta + c$$

с произвольными коэффициентами a , b и c .

Подставляя выражения для моментов и кривизн в $L(w)$ после вычисления и приравнявая к нулю вариации функционала, получим уравнение Софи Жермен, учитывающее систему сосредоточенных сил:

$$D\Delta^2 w = q + \sum_{k=1}^n q_k \delta(r - r_k) \delta(\theta - \theta_k), \quad (2)$$

где $\delta(r)$ и $\delta(\theta)$ — дельта-функции Дирака, и граничные условия свободного края при $r = R$:

$$M_r = 0, \quad Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = 0,$$

которые в терминах прогиба принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial r} + (1 - \nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (3)$$

Если требуется учесть мембранные усилия в плоскости пластины, возникающие за счёт отклонения опорных стержней от вертикального положения, то к функционалу упругой энергии необходимо добавить квадратичное слагаемое, которое зависит от первых производных радиального и окружного перемещений точек срединной плоскости и характеризует потенциальную энергию плоского напряжённого состояния. Это приводит к вариационной задаче с тремя варьируемыми функциями. Однако такая задача выходит за рамки данной статьи.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Численное решение строится на основе разностной схемы, аппроксимирующей уравнение (2) и граничные условия (3) со вторым порядком точности. Вводится равномерная полярная сетка, согласованная с ограничивающей пластину окружностью, с двумя законтурными узлами, которые необходимы для корректной аппроксимации граничных условий:

$$\rho_j = (j - 1/2)h_r, \quad \vartheta_l = lh_\theta, \quad 1 \leq j \leq n_r + 2, \quad 1 \leq l \leq n_\theta,$$

с шагами $h_r = R/n_r$ и $h_\theta = 2\pi/n_\theta$. Оператор Лапласа во внутренних узлах сетки аппроксимируется разностным отношением

$$\frac{j(w_{j+1,l} - w_{j,l}) - (j-1)(w_{j,l} - w_{j-1,l})}{\rho_j h_r} + \frac{w_{j,l+1} - 2w_{j,l} + w_{j,l-1}}{\rho_j^2 h_\theta^2}.$$

При реализации вычислительного алгоритма существенно используются дискретное преобразование Фурье и соответствующее обратное преобразование:

$$w_{j,l} = \sum_{s=1}^{n_\theta} W_{j,s} e^{-islh_\theta}, \quad W_{j,s} = \frac{1}{n_\theta} \sum_{l=1}^{n_\theta} w_{j,l} e^{islh_\theta} \quad (i - \text{мнимая единица}). \quad (4)$$

В терминах коэффициентов дискретного преобразования $W_{j,s}$ разностный аналог оператора Лапласа приводится к виду:

$$\sum_{l=1}^{n_\theta} \Delta_{j,s}^{(1)} e^{-islh_\theta}, \quad \Delta_{j,s}^{(1)} = \frac{j(W_{j+1,s} - W_{j,s}) - (j-1)(W_{j,s} - W_{j-1,s})}{\rho_j h_r} + \lambda_s \frac{W_{j,s}}{\rho_j^2}.$$

Здесь λ_s — собственные значения оператора разностного дифференцирования второго порядка:

$$\lambda_s = -\frac{4}{h_\theta^2} \sin^2 \left(\frac{sh_\theta}{2} \right).$$

Коэффициенты дискретного преобразования Фурье для бигармонического оператора выражаются через коэффициенты оператора Лапласа

$$\Delta_{j,s}^{(1)} = a_{j,s} W_{j+1,s} + c_{j,s} W_{j,s} + b_{j,s} W_{j-1,s}$$

по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Delta_{j,s}^{(2)} = & a_{j,s} a_{j+1,s} W_{j+2,s} + a_{j,s} (c_{j,s} + c_{j+1,s}) W_{j+1,s} + (a_{j,s} b_{j+1,s} + c_{j,s}^2 + b_{j,s} a_{j-1,s}) W_{j,s} \\ & + b_{j,s} (c_{j,s} + c_{j-1,s}) W_{j-1,s} + b_{j,s} b_{j-1,s} W_{j-2,s}. \end{aligned}$$

С помощью этих формул разностная схема приводится к серии из n_θ не связанных между собой систем линейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье с пятидиагональными матрицами размерности $(n_r + 2) \times (n_r + 2)$ и со столбцами свободных членов,

составленными из коэффициентов обратного преобразования правой части (2). Последние два уравнения в системах аппроксимируют граничные условия (3):

$$\frac{\Delta_{n_r+1,s}^{(1)} - \Delta_{n_r,s}^{(1)}}{h_r} + (1 - \nu)\lambda_s \left(\frac{W_{n_r+1,s} - W_{n_r,s}}{R^2 h_r} - \frac{W_{n_r+1,s} + W_{n_r,s}}{2R^3} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\Omega_{n_r+1,s} + \Omega_{n_r,s} = 0,$$

где для краткости введено обозначение

$$\Omega_{j,s} = \frac{W_{j+1,s} - 2W_{j,s} + W_{j-1,s}}{h_r^2} + \nu \left(\frac{W_{j+1,s} - W_{j-1,s}}{2\rho_j h_r} + \lambda_s \frac{W_{j,s}}{\rho_j^2} \right).$$

Система уравнений, соответствующая $s = n_\theta$, оказывается вырожденной, так как $\lambda_{n_\theta} = 0$. Это следствие неединственности решения задачи изгиба, когда граничные условия на всём контуре пластины формулируются в терминах самоуравновешенных изгибающих моментов и перерезывающих усилий. Для исключения произвола вместо (5) в этой системе ставятся граничные условия

$$\Delta_{n_r+1,n_\theta}^{(1)} + \Delta_{n_r,n_\theta}^{(1)} = 0 \quad \text{и} \quad W_{n_r+1,n_\theta} + W_{n_r,n_\theta} = 0.$$

Используемая здесь аппроксимация граничных условий обеспечивает второй порядок точности схемы на гладких решениях, но при этом в последних строках матриц для $s < m$ появляется «лишний» элемент, нарушающий пятидиагональную структуру. Тем не менее метод пятиточечной прогонки, с помощью которого решаются полученные системы, легко приспособить к этой ситуации за счёт эквивалентных преобразований со строками. По окончании решения систем сеточные значения прогиба пластины вычисляются по формулам (4).

В рассматриваемой общей задаче с n опорами описанный алгоритм применяется $n-2$ раза. Таким образом строится фундаментальная система решений, линейная комбинация которых даёт искомое решение.

Сначала из n опор выбираются три базовые опоры, образующие треугольник. Такой выбор, вообще говоря, неоднозначен. Эти три опоры не должны лежать на одной прямой и по возможности должны располагаться на максимальном расстоянии друг от друга. Затем все опоры заменяются соответствующими их действию на пластину сосредоточенными силами q_1, q_2, \dots, q_n . При построении частных решений $w_0(r, \theta), w_1(r, \theta), \dots, w_{n-3}(r, \theta)$, образующих фундаментальную систему, величины q_k выбираются построчно по таблице, которая составлена так, чтобы обеспечить линейную независимость строк.

Т а б л и ц а

Сосредоточенные силы для частных решений

$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	0,	0,	0,	...	0,	0
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	$q_0,$	0,	0,	0,	...	0,	0
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	$q_0,$	0,	0,	...	0,	0
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	0,	$q_0,$	0,	...	0,	0
...
...
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	0,	0,	0,	...	$q_0,$	0
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	0,	0,	0,	...	0,	q_0

В этой таблице первые три столбца относятся к базовым опорам, а столбцы, начиная с четвёртого, к оставшимся $(n-3)$ -м. Величины q_1, q_2 и q_3 для каждого частного решения по

строкам таблицы определяются из системы уравнений равновесия сил и моментов сил относительно декартовых координатных осей в плоскости пластины:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n q_k &= \int_0^R \int_0^{2\pi} q(r, \theta) r \, d\theta dr, & \sum_{k=1}^n q_k r_k \cos \theta_k &= \int_0^R \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \cos \theta r^2 \, d\theta dr, \\ \sum_{k=1}^n q_k r_k \sin \theta_k &= \int_0^R \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \sin \theta r^2 \, d\theta dr. \end{aligned} \quad (6)$$

Величина $q_0 \neq 0$ при реализации алгоритма задаётся. Она может быть взята произвольной, однако, во избежание потери точности арифметических операций при счёте, её значение по порядку величин должно соответствовать максимальному по модулю значению действующей нагрузки $q(r, \theta)$, умноженному на площадь пластины.

В технической механике имеется прямой метод решения систем типа (6), исходя из уравнений равновесия для моментов сил. При таком способе оси, относительно которых записываются уравнения равновесия моментов, выбираются так, чтобы они проходили попеременно через точки контакта пластины с двумя из трёх базовых опор. В результате система уравнений равновесия преобразуется к трём независимым уравнениям для q_1 , q_2 и q_3 , соответственно.

Искомое решение задачи с n опорами принимает вид

$$w = w_{\text{abs}}(r, \theta) + \sum_{k=0}^{n-3} \mu_k w_k(r, \theta).$$

Неопределённые множители μ_k , в том числе входящие в w_{abs} коэффициенты a , b и c , находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n-3} \mu_k = 1, \quad ar_i \cos \theta_i + br_i \sin \theta_i + c + \sum_{k=0}^{n-3} \mu_k w_k(r_i, \theta_i) = \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Эта система включает в себя $n + 1$ уравнение и $n + 1$ неизвестную величину. Первое уравнение в (7) гарантирует выполнение разностного аналога уравнения (2) с требуемой правой частью, а остальные уравнения служат для удовлетворения контактными граничными условиям. Является ли система (7) невырожденной, легко проверяется апостериорно с помощью процедуры вычисления определителя матрицы. Теоретическое обоснование этого вопроса оставим пока открытым.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МЕТОДИЧЕСКИХ РАСЧЁТОВ

Численные расчёты задач на основе разработанного алгоритма проводились с помощью авторской программы, составленной на алгоритмическом языке Python с применением библиотечных процедур для решения систем линейных алгебраических уравнений и вычисления быстрого преобразования Фурье. Следует отметить высокую эффективность алгоритма – для расчёта задачи с 10-ю опорами на сетке из 120×720 узлов требуется менее двух секунд процессорного времени.

Для иллюстрации работоспособности алгоритма и программы на рис. 1 приведены поля линий уровня прогиба пластины диаметром 25 м на опорах (число опор варьируется) под действием давления $q = 27.5$ кПа. Опоры находятся на одном уровне и расположены равномерно вдоль окружности радиуса $R_1 = 10$ м. Материал – бетон класса В25. Параметры упругости материала: модуль Юнга $E = 30$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$.

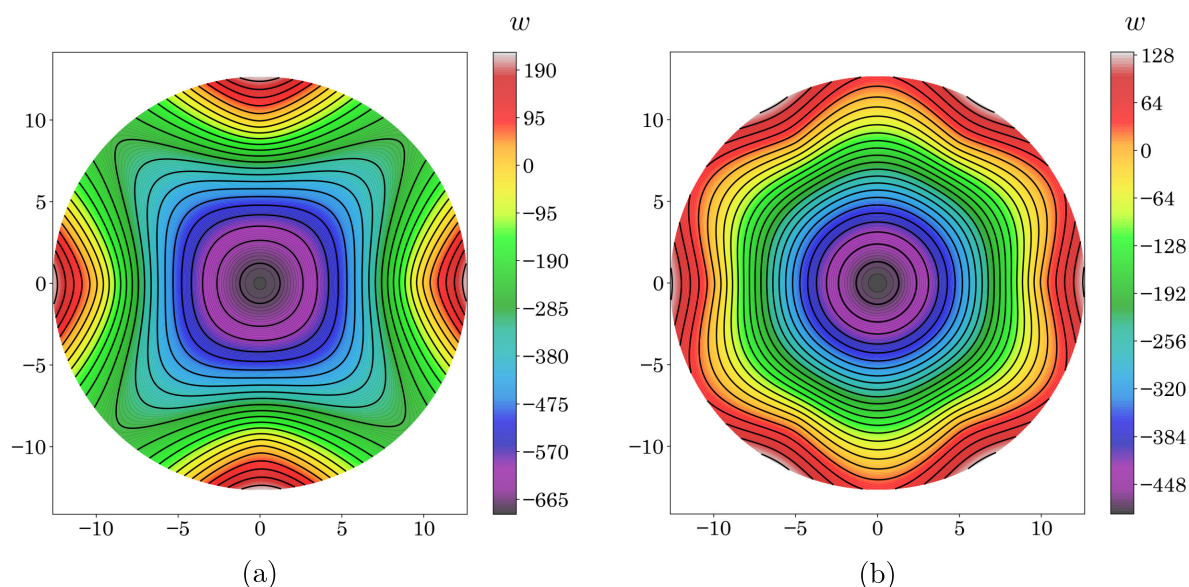


Рис. 1. Поля линий уровня прогиба пластины (w , мм) диаметром 25 м с четырьмя опорами (а) и шестью опорами (б) по внешнему периметру ($R_1 = 10$ м)

На рис. 2 представлены результаты расчётов аналогичной задачи при равномерном расположении опор под пластиной вдоль двух окружностей с радиусами $R_1 = 10$ м и $R_2 = 5$ м. Число опор по внутреннему периметру равно 4, число опор по внешнему периметру — 8 и 10, соответственно. Расчёты показывают, что при увеличении числа внешних опор прогиб пластины в центре возрастает, а по краям — уменьшается.

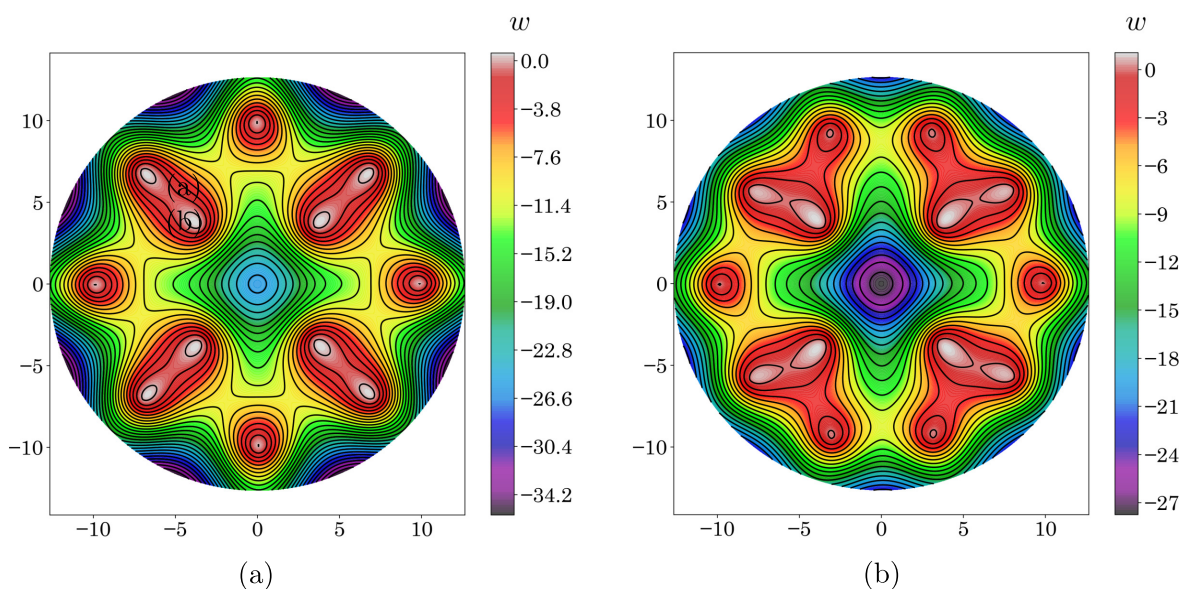


Рис. 2. Поля линий уровня прогиба пластины (w , мм) с четырьмя опорами по внутреннему периметру (радиус их расположения — 5 м) и различным числом опор: (а) восемь и (б) десять — по внешнему периметру (радиус их расположения — 10 м)

На рис. 3 число опор по внутреннему периметру равно пяти, по внешнему периметру — десяти, а радиус их расположения варьируется: $R_1 = 10$ м и $R_1 = 12$ м. Судя по расчётам, удаление внешних опор от центра приводит к провисанию пластины между внутренним

и внешним периметрами.

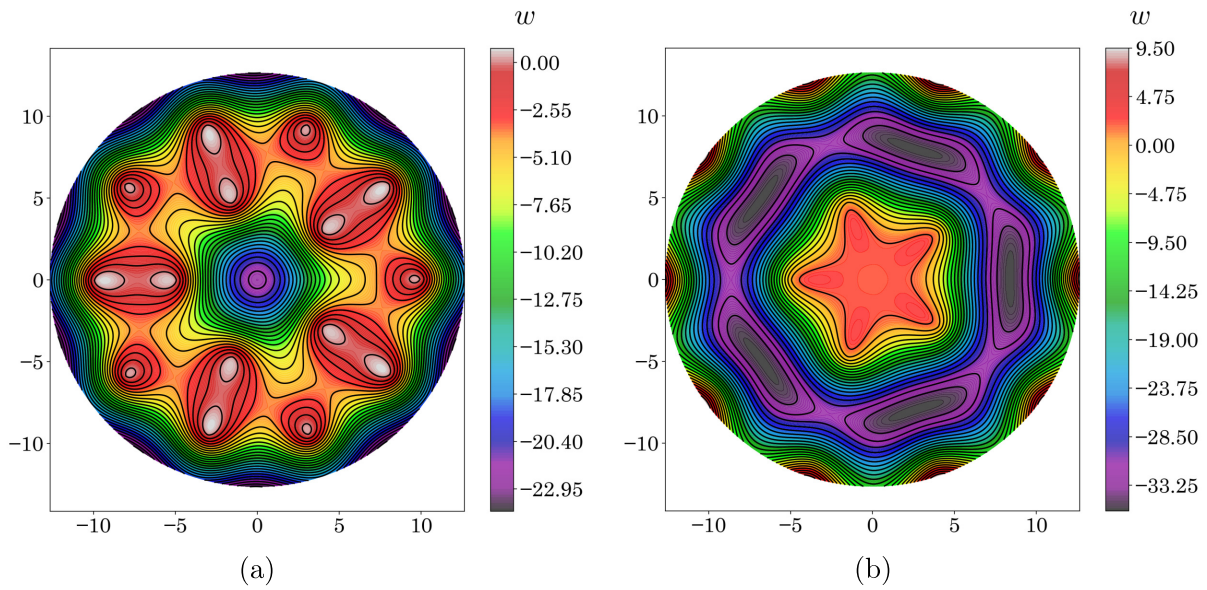


Рис. 3. Поля линий уровня прогиба пластины (w , мм) с десятью опорами по внешнему периметру и пятью опорами по внутреннему периметру;
 $R_1 = 10$ м (а) и $R_1 = 12$ м (б); $R_2 = 5$ м

Результаты на рис. 4 получены при разных значениях внутреннего радиуса: $R_2 = 4$ м и $R_2 = 6$ м. По внешнему периметру расположено 8 опор, по внутреннему — 4 опоры. Сравнение показывает, что если опоры перемещаются дальше от центра, то пластина в центре прогибается вниз.

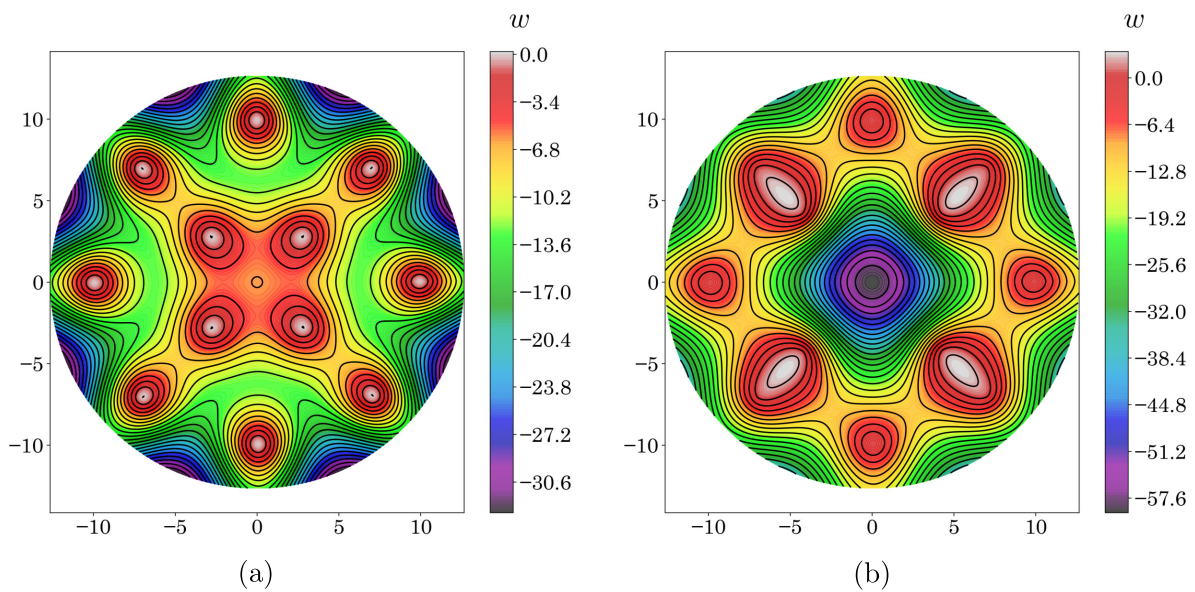


Рис. 4. Поля линий уровня прогиба пластины (w , мм) с восемью опорами по внешнему периметру ($R_1 = 10$ м) и четырьмя опорами по внутреннему периметру;
 $R_2 = 4$ м (а) и $R_2 = 6$ м (б)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный алгоритм обладает исключительно высокой эффективностью, поэтому его можно использовать в качестве базового алгоритма при решении итерационными методами прикладных задач изгиба армированных круговых плит, плит переменной толщины и оболочечных конструкций (куполов). Используемая в процессе его построения методика решения задач изгиба на основе разложения функции прогиба по собственным функциям одномерного разностного оператора второй производной допускает обобщение на задачи изгиба пластин прямоугольного очертания, а также на задачи статической теории упругости плоского напряжённого и плоского деформированного состояний для бигармонического уравнения, записанного относительно функции напряжений Эри.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института вычислительного моделирования СО РАН (проект FWES-2024-0025) и при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (Соглашение 075-02-2025-1606). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перельмутер А.В.* Беседы о строительной механике. М.: Изд-во SCAD Soft, Изд-во АСВ, 2014.
2. *Коянкин А.А., Митасов В.М.* Напряжённо-деформированное состояние сборно-монолитного элемента с учётом загрузки сборной части // Вестн. Томск. гос. арх.-строит. ун-та. 2021. Т. 23, № 3. С. 129–142; DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-3-129-142
3. *Streletskiy D.A., Suter L.J., Shiklomanov N.I., Porfiriev B.N., Eliseev D.O.* Assessment of climate change impacts on buildings, structures and infrastructure in the Russian regions on permafrost // Environ. Res. Lett. 2019. V. 14, N 2. Article number 025003; DOI: 10.1088/1748-9326/aaf5e6
4. *Faki A., Sushama L., Doré G.* Regional-scale investigation of pile bearing capacity for Canadian permafrost regions in a warmer climate // Cold Reg. Sci. Technol. 2022. V. 201. Article number 103624; DOI: 10.1016/j.coldregions.2022.103624
5. *Filimonov M.Yu., Kamnev Ya.K., Shein A.N., Vaganova N.A.* Modeling the temperature field in frozen soil under buildings in the city of Salekhard taking into account temperature monitoring // Land. 2022. V. 11, N 7. Article number 1102; DOI: 10.3390/land11071102
6. *Filimonov M.Yu., Vaganova N.A.* Computer modelling of thermal interaction in the pile foundation system of a railway bridge support structure in permafrost // Appl. Math., Model. Comput. Simulation. Ser. ATDE. 2023. P. 1057–1062; DOI: 10.3233/ATDE231047
7. *Ильин В.П.* Математическое моделирование. Часть I. Непрерывные и дискретные модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017.
8. *Шапеев В.П., Беляев В.А.* Решение с повышенной точностью бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов // Вычисл. методы и программирование. 2018. Т. 19, вып. 4. С. 340–355; DOI: 10.26089/NumMet.v19r431
9. *Golushko S.K., Shapeev V.P., Belyaev V.A., Bryndin L.S., Boltaev A.I., and Gorynin A.G.* The least-squares collocation method in the mechanics of deformable solids // J. Phys.: Conf. Ser. IOP Publ. 2021. V. 1715. Article number 012029; DOI: 10.1088/1742-6596/1715/1/012029
10. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Изд-во URSS, 2019.
11. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

UDC 539.371:519.632

FAST ALGORITHM FOR NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF BENDING OF A CIRCULAR PLATE ON SUPPORTS© 2025 V. M. Sadovskii^{1,a}, A. A. Koyankin^{2,b}, V. V. Sadovskii^{2,c}

¹*Institute of Computational Modelling SB RAS,
Akademgorodok, 50/44, Krasnoyarsk 660036, Russia,*
²*Civil Engineering Institute, Siberian Federal University,
Svobodnyi pr., 82, Krasnoyarsk 660041, Russia*

E-mails: ^asadov@icm.krasn.ru, ^bkoyankinaa@mail.ru,
^cvsadovskiy-sb23@stud.sfu-kras.ru

Received 06.03.2025, revised 17.10.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. To calculate the deflection of a circular plate supported at a finite number of points under the action of a distributed external load, a direct computational algorithm is proposed based on the repeated application of the fast Fourier transform and the five-point sweep method. Taking into account the constraints on the deflection in an arbitrary system of points, a fundamental system of solutions is constructed, with the help of which the problem of contact of the plate with pliable supports is solved. The results of methodological computations, demonstrating the high efficiency of the algorithm, are presented.

Keywords: Sophie Germain equation, contact problem, difference scheme, five-point sweep method, fast Fourier transform.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.410

REFERENCES

1. Perelmuter A.V. Besedy o stroitel'noj mekhanike [Conversations about building mechanics]. Moscow: SCAD Soft Publ., ASV Publ., 2014 (in Russian).
2. Koyankin A.A., Mitasov V.M. Stress-strain state of cast-in-place and precast structure with loaded cast-in-place element. *J. Construct. Architect.*, 2021, Vol. 23, No. 3, pp. 129–142; <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2021-23-3-129-142>
3. Streletskiy D.A., Suter L.J., Shiklomanov N.I., Porfiriev B.N., Eliseev D.O. Assessment of climate change impacts on buildings, structures and infrastructure in the Russian regions on permafrost. *Environ. Res. Lett.*, 2019, Vol. 14, No. 2, Artical number 025003; <https://doi.org/10.1088/1748-9326/aaf5e6>
4. Faki A., Sushama L., Doré G. Regional-scale investigation of pile bearing capacity for Canadian permafrost regions in a warmer climate. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 2022, Vol. 201, Artical number 103624; <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2022.103624>
5. Filimonov M.Yu., Kamnev Ya.K., Shein A.N., Vaganova N.A. Modeling the temperature field in frozen soil under buildings in the city of Salekhard taking into account temperature monitoring. *Land*, 2022, Vol. 11, No. 7, Artical number 1102; <https://doi.org/10.3390/land11071102>
6. Filimonov M.Yu., Vaganova N.A. Computer modelling of thermal interaction in the pile foundation system of a railway bridge support structure in permafrost. *Appl. Math., Model. Comput. Simulation.*, Ser. ATDE, 2023, Vol. 42, pp. 1057–1062; <https://doi.org/10.3233/ATDE231047>
7. Il'in V.P. Matematicheskoe modelirovanie. Ch. I. Nepreryvnye i diskretnye modeli [Mathematical modeling. Part 1: Continuous and discrete models]. Novosibirsk: SB RAS Publ., 2017 (in Russian).

8. Shapeev V.P., Belyaev V.A. Solving the biharmonic equation with high order accuracy in irregular domains by the least squares collocation method. *Vychisl. Metody Programm.* [Numer. Meth. Programm.], 2018, Vol. 19, No. 4, P. 340–355; <https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r431>
9. Golushko S.K., Shapeev V.P., Belyaev V.A., Bryndin L.S., Boltaev A.I., Gorynin A.G. The least-squares collocation method in the mechanics of deformable solids. *J. Phys. Conf. Ser. IOP Publ.*, 2021, Vol. 1715, Artical number 012029; <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1715/1/012029>
10. Algazin S.D. Chislennye algoritmy bez nasyshcheniya v klassicheskikh zadachakh matematicheskoi fiziki [Numerical algorithms without saturation in classical tasks mathematical physics]. Moscow: URSS Publ., 2019 (in Russian).
11. Khludnev A.M. Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastiakh [Elasticity problems in non-smooth domains]. Moscow: Fizmatlit, 2010 (in Russian).