УДК 517.957:517.958:532.5

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

© 2025 **О. Н. Ульянов**[a], **Л. И. Рубина**[b]

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16 г. Екатеринбург 620108, Россия

E-mails: [a]secretary@imm.uran.ru, [b]rli@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 09.01.2024 г.; после доработки 30.06.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений с частными производными, полученные ранее А.Ф. Сидоровым для пространственной естественной конвекции вязкой жидкости в приближении Буссинеска в случае течений с линейной зависимостью компонент вектора скорости от части пространственных координат. Методом, развиваемым авторами, они сведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены некоторые точные частные решения. Изучено, может ли решение уравнений Обербека — Буссинеска, которое линейно зависит от переменной z, описывать безвихревое движение вязкой несжимаемой жидкости

Ключевые слова: уравнения Обербека — Буссинеска, класс Линя — Сидорова — Аристова, редукции к системам ОДУ, точные решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.412

Памяти Учителя — Анатолия Фёдоровича Сидорова

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются системы уравнений, полученные А.Ф. Сидоровым для уравнений нестационарной пространственной естественной конвекции несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска [1]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu\Delta\mathbf{u} - \beta\mathbf{q}T, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)T = \kappa\Delta T, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости, $p(x_1, x_2, x_3, t)$ — давление, $\rho = \text{const}$ — плотность, $T(x_1, x_2, x_3, t)$ — температура, ν — коэффициент кинематической вязкости, κ — коэффициент теплопроводности, $\mathbf{q} = (0, 0, q)$ — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения жидкости

В работе [2] рассмотрены решения системы (1) с линейными относительно одной или двух пространственных переменных компонентами вектора скорости. Отметим, что в 80-ые годы А. Ф. Сидоров рассматривал такие решения для ряда моделей сплошной среды (см. [3], стр. 168–204.). Несколько ранее решения такого типа рассматривались в работах [4, 5]. В последующие годы решения с линейной зависимостью поля скоростей от части пространственных координат рассматривались неоднократно для различных моделей сжимаемой и несжимаемой сплошной среды многими исследователями. Были получены соответствующие системы уравнений, найдены и изучены некоторые классы точных решений рассматривавшихся математических моделей с линейными относительно одной или двух пространственных переменных компонентами вектора скорости (см., например, [6]). В ряде работ рассматривался случай линейной зависимости от двух пространственных переменных. Для этого случая в работе [7] выведено много новых точных решений двумерных и трёхмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса, изучены вопросы нелинейной устойчивости решений, в работе [8] осуществляется точное интегрирование уравнений термодиффузии, в работе [9] построены классы точных решений уравнений Обербека — Буссинеска с учётом диссипативной функции Рэлея. Весьма продуктивно рассмотрение решений с линейной зависимостью от части переменных для модели термокапиллярной и термоконцентрационной конвекции (см., например, [10–12]).

Интерес исследователей к поиску точных решений мотивирован как важностью демонстрации и исследования любых новых примеров таких решений для изучаемых математических моделей сплошной среды, так и потенциально возможным применением конкретных точных решений при численном моделировании процессов в сплошной среде, например, в качестве элемента математической модели или в качестве теста. Существует довольно много подходов к поиску точных решений. Мощным методом поиска является теоретико-групповой подход [13]. Также распространён подход, когда точные решения разыскиваются с использованием того или иного анзаца. При этом решения находятся или в замкнутой форме (см., например, автомодельные решения в [14]), или путём сведения тем или иным образом (в частности, иногда после введения новых неизвестных и преобразования определяющих уравнений) исходной задачи к более простым математическим задачам [15]. Плодотворны метод дифференциальных связей [16] и поиск решений после предположения о виде течения (этот метод можно считать обобщением предыдущего) и получения решения (иногда после анализа совместности получающихся переопределённых систем уравнений) в замкнутой форме или в виде решения, выписанного с помощью функций, удовлетворяющих некоторой системе ОДУ.

А. Ф. Сидоров (см. [2]) для случая естественной конвекции несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска сделал предположение о виде течения — линейность поля скоростей по части пространственных координат, но ограничился в той работе, в основном, получением описывающих их систем уравнений в частных производных. В данной работе для исследования полученных в [2] систем и поиска точных решений уравнений Обербека — Буссинеска используется метод редукции систем уравнений в частных производных (систем УЧП) к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (системам ОДУ), развиваемый авторами (см., например, [17], где, в частности, подробно описаны его общие подходы). Показано как с помощью развиваемого авторами метода можно редуцировать полученные в [2] системы УЧП к системам ОДУ.

Для удобства дальнейшего изложения вместо $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1, u_2, u_3)$ в системе (1) введём обозначение $\mathbf{U}(x, y, z, t) = (u, v, w)$ для вектора скорости.

1. ЛИНЕЙНОСТЬ ПО ОДНОЙ КООРДИНАТЕ

В этом случае А. Ф. Сидоров предполагал, что $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $w = l(x, y, t)z + r(x, y, t)$, $T = f(x, y, t)z + g(x, y, t)$, $p = h_{11}(t)z^2 + h_1(t)z + h(x, y, t)$, $\rho = \mathrm{const}$. Тогда система (1) сводится к системе семи дифференциальных уравнений в частных производных для семи неизвестных функций u, v, l, r, f, g, h с произвольными функциями h_{11}, h_1 (см. [2])

$$
\begin{gathered}
L_1 = \rho[u_t + uu_x + vu_y - \nu(u_{xx} + u_{yy})] = -h_x, \\
L_2 = \rho[v_t + uv_x + vv_y - \nu(v_{xx} + v_{yy})] = -h_y, \\
L_3 = \rho[r_t + ur_x + vr_y - \nu(r_{xx} + r_{yy})] = -h_1 - \rho\beta qg - \rho lr, \\
L_4 = \rho[l_t + ul_x + vl_y - \nu(l_{xx} + l_{yy})] = -2h_{11} - \rho\beta qf - \rho l^2, \\
L_5 = g_t + ug_x + vg_y + rf - \kappa(g_{xx} + g_{yy}) = 0, \\
L_6 = f_t + uf_x + vf_y + lf - \kappa(f_{xx} + f_{yy}) = 0, \\
u_x + v_y + l = 0.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Легко видеть, что

$$(L_3)_x = -(\rho\beta qg + \rho lr)_x, \quad (L_3)_y = -(\rho\beta qg + \rho lr)_y,$$
$$(L_4)_x = -(\rho\beta qf + \rho l^2)_x, \quad (L_4)_y = -(\rho\beta qf + \rho l^2)_y,$$
$$(L_3)_t = -(\rho\beta qg + \rho lr + h_1)_t, \quad (L_4)_t = -(\rho\beta qf + \rho l^2 + 2h_{11})_t.$$

Здесь символ за круглыми скобками обозначает независимую переменную, по которой вычисляется производная от выражения, стоящего в скобке.

1.1. Безвихревое течение

Изучим возможность существования безвихревого течения в рассматриваемом случае. Если течение безвихревое, то (см., например, [18], Глава II. Теория физического поля, пункт 2. Потенциальное векторное поле) существует функция $Q(x, y, z, t)$ такая, что

$$u(x, y, t) = Q_x, \quad v(x, y, t) = Q_y, \quad w = l(x, y, t)z + r(x, y, t) = Q_z.$$

Отсюда потенциал $Q = 0.5l(x, y, t)z^2 + r(x, y, t)z + k(x, y, t)$. Но тогда $u(x, y, t) = Q_x$, $v(x, y, t) = Q_y$, если

$$l = l(t), \quad r = r(t), \quad f = f(t), \quad g = g(t),$$
$$u(x, y, t) = k_x(x, y, t), \quad v(x, y, t) = k_y(x, y, t),$$
$$w = l(t)z + r(t), \quad T = f(t)z + g(t), \quad p = h_{11}(t)z^2 + h_1(t)z + h(x, y, t).$$

При этом (см. систему (2)) получаем соотношения для шести неизвестных функций $k = k(x, y, t)$, $f = f(t)$, $l = l(t)$, $r = r(t)$, $g = g(t)$, $h = h(x, y, t)$ с произвольными функциями $h_{11}(t)$, $h_1(t)$, $\mu(t)$

$$k_{xx} + k_{yy} + l(t) = 0, \quad h(x, y, t) = \mu(t) - \rho[k_t + 0.5(k_x^2 + k_y^2) - \nu(k_{xx} + k_{yy})], \tag{3}$$
$$\rho l_t = -2h_{11} - \rho\beta qf - \rho l^2, \qquad f_t = -lf, \tag{4}$$
$$\rho r_t = -h_1 - \rho\beta qg - \rho lr, \quad g_t = -rf. \tag{5}$$

Отметим, что в ней уравнения (4)–(5) образуют систему четырёх ОДУ для четырёх неизвестных функций, не включающую функции $k = k(x, y, t)$ и $h = h(x, y, t)$. В этой системе, в свою очередь, уравнения (4) образуют систему ОДУ для определения $f = f(t)$ и $l = l(t)$. Если найдены $f = f(t)$ и $l = l(t)$, то из (5) можно найти $r = r(t)$ и $g = g(t)$. Заметим также, что первое уравнение в (3) после введения новой неизвестной функции $K(x, y, t) = k(x, y, t) + 0.25(x^2 + y^2)l(t)$ сводится к уравнению Лапласа $\Delta K = 0$ для двух независимых переменных, а второе уравнение — после нахождения $K(x, y, t)$, $l(t)$ и, следовательно, $k(x, y, t)$ даёт выражение для $h = h(x, y, t)$.

1.1.1. Частное решение.

Выпишем частное решение системы (2) для потенциального течения (3)–(5) в предположении, что $h_1 = -\rho\beta qg$, $h_{11} = -0.5\rho\beta qf$. Тогда

$$l(t) = 1/(t + t_0), \quad r(t) = r_0/(t + t_0), \quad r_0 = \text{const}, \quad t_0 = \text{const},$$
$$f(t) = f_0/(t + t_0), \quad g(t) = g_0 + r_0 f_0/(t + t_0), \quad f_0 = \text{const}, \quad g_0 = \text{const}.$$

Положим $k(x, y, t) = -l(t)m(x, y)$, тогда $m_{xx} + m_{yy} = 1$. Получили уравнение Пуассона. Для решения уравнения Пуассона применяются разные подходы (см., например, [19]). Рассмотрим следующий подход. Пусть $m = m(\psi)$, $\psi = \psi(x, y)$. Вычислив производные сложной функции $m = m(\psi(x, y))$ и, подставив эти выражения в уравнение $m_{xx} + m_{yy} = 1$, получаем

$$m''a + m'b = 1, \tag{6}$$

где $a = \psi_x^2 + \psi_y^2$, $b = \psi_{xx} + \psi_{yy}$. Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по ψ. Уравнение (6) сведётся к ОДУ, если найдутся такие функции $a = a(\psi)$, $b = b(\psi)$, при которых система двух уравнений

$$a(\psi) = \psi_x^2 + \psi_y^2, \quad b(\psi) = \psi_{xx} + \psi_{yy} \tag{7}$$

с тремя неизвестными функциями $\psi(x, y)$, $a = a(\psi)$, $b = b(\psi)$ совместна. Ограничимся случаем $a(\psi) \neq 0$. Продифференцировав первое уравнение системы (7) по x и по y, получим $a'\psi_x = 2\psi_x\psi_{xx} + 2\psi_y\psi_{xy}$ и, соответственно, $a'\psi_y = 2\psi_x\psi_{xy} + 2\psi_y\psi_{yy}$. С учётом второго уравнения системы (7) находим

$$\psi_{xx} = \frac{a'(\psi_x^2 - \psi_y^2) + 2\psi_y^2 b}{2a}, \quad \psi_{xy} = \frac{\psi_x\psi_y(a' - b)}{a}, \quad \psi_{yy} = \frac{a'(\psi_y^2 - \psi_x^2) + 2\psi_x^2 b}{2a}. \tag{8}$$

Выбираем $a(\psi) = \psi_x^2 + \psi_y^2$ в качестве базового уравнения системы (7). Напомним, что используемые методы редукции УЧП или системы УЧП к ОДУ или системе ОДУ опираются на построение характеристик некоего базового уравнения в частных производных первого порядка, которое определённым образом связано с рассматриваемой системой УЧП или УЧП (см. [17]). В данном случае оно входит в систему уравнений (7). Выписываем для базового уравнения систему уравнений характеристик (см. [20] Chapter II. General theory of partial differential equations of the first order. Section 7. General differential equation with n independent variables.)

$$\frac{dx}{ds} = 2\psi_x, \quad \frac{dy}{ds} = 2\psi_y, \quad \frac{d\psi}{ds} = 2a, \quad \frac{d\psi_x}{ds} = a'\psi_x, \quad \frac{d\psi_y}{ds} = a'\psi_y.$$

Выбирая ψ в качестве независимой переменной, изменяющейся вдоль характеристики, получаем

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{\psi_x}{a}, \quad \frac{dy}{d\psi} = \frac{\psi_y}{a}, \quad \frac{d\psi_x}{d\psi} = \frac{a'}{2a}\psi_x, \quad \frac{d\psi_y}{d\psi} = \frac{a'}{2a}\psi_y. \tag{9}$$

Дополним систему уравнений характеристик (9) уравнениями, описывающими изменение вторых производных вдоль характеристик

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi_{xx}}{d\psi} &= -\psi_{xx}\left(\frac{\psi_x}{a}\right)_x - \psi_{xy}\left(\frac{\psi_y}{a}\right)_x + \left(\frac{a'}{2a}\psi_x\right)_x,\\
\frac{d\psi_{xy}}{d\psi} &= -\psi_{xx}\left(\frac{\psi_x}{a}\right)_y - \psi_{xy}\left(\frac{\psi_y}{a}\right)_y + \left(\frac{a'}{2a}\psi_x\right)_y,\\
\frac{d\psi_{yy}}{d\psi} &= -\psi_{xy}\left(\frac{\psi_x}{a}\right)_y - \psi_{yy}\left(\frac{\psi_y}{a}\right)_y + \left(\frac{a'}{2a}\psi_y\right)_y.
\end{aligned}$$

Получили базовую систему уравнений характеристик (см. [17]). Здесь нижние индексы за скобками обозначают независимые переменные, по которым вычисляются производные от выражений в скобках. Добавляем соотношение, которое должно быть первым интегралом расширенной системы уравнений характеристик

$$\begin{aligned}
b' = \frac{d\psi_{xx}}{d\psi} + \frac{d\psi_{yy}}{d\psi} &= -\psi_{xx}\left(\frac{\psi_x}{a}\right)_x - \psi_{xy}\left(\frac{\psi_y}{a}\right)_x + \left(\frac{a'}{2a}\psi_x\right)_x - \psi_{xy}\left(\frac{\psi_x}{a}\right)_y - \psi_{yy}\left(\frac{\psi_y}{a}\right)_y + \left(\frac{a'}{2a}\psi_y\right)_y\\
= -\frac{\psi_{xx}^2 + 2\psi_{xy}^2 + \psi_{yy}^2}{a} &+ \frac{a'}{a^2}(\psi_x^2\psi_{xx} + 2\psi_x\psi_y\psi_{xy} + \psi_y^2\psi_{yy}) + \left(\frac{a'}{2a}\right)'(\psi_x^2 + \psi_y^2) + \frac{a'}{2a}(\psi_{xx} + \psi_{yy}).
\end{aligned}$$

Откуда, учитывая (7) и (8), получаем достаточное условие сведения уравнения (6) к ОДУ

$$b' = b\frac{3a'}{2a} - \frac{1}{a}b^2 + \frac{a''}{2} - \frac{(a')^2}{2a}. \tag{10}$$

Рассмотрим случай $a = \mathrm{const}$. Тогда $b = a/\psi$, $m''a + (a/\psi)m' = 1$, $m' = c_1/\psi + 0.5\psi/a$, $m = c_1 \ln \psi + 0.25\psi^2/a + a_0$, $a_0 = \mathrm{const}$. Изучим некоторые возможности.

(а) Если $\psi = a\sqrt{x^2+y^2}$, то

$$\psi_x = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \psi_y = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \psi_{xx} = \frac{ay^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$
$$\psi_{yy} = \frac{ax^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \text{откуда} \quad b = \frac{a}{\psi}.$$

В этом случае

$$k(x,y,t) = -l(t)m(x,y) = -l(t)[c_1 \ln a\sqrt{x^2+y^2} + 0.25(x^2+y^2) + a_0].$$

(б) Если (см. (9)) $\psi_x = c_0 = \mathrm{const}$, $\psi_y = \sqrt{a - c_0^2}$, то $\psi = c_0 x + y\sqrt{a-c_0^2} + c_3$. Но если $\psi = c_0 x + y\sqrt{a-c_0^2} + c_3$, то $\psi_{xx} = 0$, $\psi_{yy} = 0$, $b = 0$,

$$m'' = \frac{1}{a}, \quad m = \frac{1}{a}(0.5\psi^2 + c_4\psi + c_5), \quad c_j = \mathrm{const}, \quad j = 0,1,2,3,4,5.$$

Тогда

$$k = -l(t)m(x,y) = -l(t)[(1/a)[0.5(c_0x + y\sqrt{a-c_0^2} + c_3)^2 + c_4(c_0x + y\sqrt{a-c_0^2} + c_3) + c_5].$$

И для (а), и для (б) имеем частное решение вида

$$u = -m_x/(t+t_0), \quad v = -m_y/(t+t_0), \quad w = (z+r_0)/(t+t_0), \quad T = g_0 + f_0(z+r_0)/(t+t_0),$$
$$p = -\frac{\rho\beta q f_0 z^2}{2(t+t_0)} - \rho\beta q\left[g_0 + \frac{r_0 f_0}{t+t_0}\right]z + \mu(t) - \rho\left[\frac{m}{(t+t_0)^2} + \frac{m_x^2+m_y^2}{2(t+t_0)^2} + \frac{\nu}{t+t_0}\right].$$

1.2. О сведении системы (2) к системе ОДУ

А. Ф. Сидоров в [2] для случая линейности по одной координате получил, в частности, систему шести ОДУ с независимой переменой x для шести неизвестных функций, описывающую при $h_1 = \mathrm{const}$, $h_{11} = \mathrm{const}$ плоскопараллельные стационарные течения. Найдём другую редукцию системы (2) к системе ОДУ.

Систему (2) можно рассматривать как недоопределенную систему (в смысле [16], стр. 22.) семи уравнений для девяти неизвестных функций $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, $l(x,y,t)$, $r(x,y,t)$, $f(x,y,t)$, $g(x,y,t)$, $h(x,y,t)$, $h_{11}(t)$, $h_1(t)$. Для редукции к системе ОДУ обратимся к следствию этой системы, продифференцировав по x третье и четвёртое уравнения системы, содержащие в качестве слагаемых функции от переменной t. Получим определённую ([16], стр.22) систему семи УЧП для семи неизвестных функций

$$\begin{gathered}
\rho[u_t + uu_x + vu_y - \nu(u_{xx}+u_{yy})] = -h_x,\\
\rho[v_t + uv_x + vv_y - \nu(v_{xx}+v_{yy})] = -h_y,\\
r_{tx} + u_x r_x + ur_{xx} + vr_{yx} + v_x r_y - \nu(r_{xxx}+r_{yyx}) = -\beta q g_x - (l_x r + l r_x),\\
l_{tx} + ul_{xx} + u_x l_x + vl_{yx} + v_x l_y - \nu(l_{xxx}+l_{yyx}) = -\beta q f_x - 2ll_x,\\
g_t + ug_x + vg_y + rf - \kappa(g_{xx}+g_{yy}) = 0,\\
f_t + uf_x + vf_y + lf - \kappa(f_{xx}+f_{yy}) = 0,\\
u_x + v_y + l = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Пусть в системе (11) $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, $r = r(\psi)$, $l = l(\psi)$, $h = h(\psi)$, $g = g(\psi)$, $f = f(\psi)$. Отметим, что уравнение $\psi(x, y, t) = \text{const}$ задаёт при $t = \text{const}$ линию уровня перечисленных функций. Вычислив производные сложных функций и подставив в (11), получим равенства [3]

$$\rho\big\{[u'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_y - \nu(\psi_{xx} + \psi_{yy})] - \nu u''(\psi_x^2 + \psi_y^2)\big\} = -h'\psi_x,$$
$$\rho\big\{[v'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_y - \nu(\psi_{xx} + \psi_{yy})] - \nu v''(\psi_x^2 + \psi_y^2)\big\} = -h'\psi_y,$$

$$\begin{aligned} r'[\psi_{tx} + u'\psi_x^2 + u\psi_{xx} + v\psi_{yx} + v'\psi_x\psi_y - \nu(\psi_{xxx} + \psi_{yyx})] \\ + r''[\psi_x\psi_t + u\psi_x^2 + v\psi_x\psi_y - \nu(3\psi_x\psi_{xx} + 2\psi_y\psi_{yx} + \psi_x\psi_{yy})] \\ - \nu r'''(\psi_x^3 + \psi_y^2\psi_x) = -\beta q g'\psi_x - (l'r + lr')\psi_x, \end{aligned} \quad (12)$$

$$l'[\psi_{tx} + u'\psi_x^2 + u\psi_{xx} + v\psi_{yx} + v'\psi_x\psi_y - \nu(\psi_{xxx} + \psi_{yyx})]$$
$$+ l''[\psi_x\psi_t + u\psi_x^2 + v\psi_x\psi_y - \nu(3\psi_x\psi_{xx} + 2\psi_y\psi_{yx} + \psi_x\psi_{yy})] - \nu l'''(\psi_x^3 + \psi_y^2\psi_x) = -\beta q f'\psi_x - 2l'l\psi_x,$$

$$g'[\psi_t + u\psi_x + v\psi_y - \kappa(\psi_{xx} + \psi_{yy})] - \kappa g''(\psi_x^2 + \psi_y^2) = -rf,$$
$$f'[\psi_t + u\psi_x + v\psi_y - \kappa(\psi_{xx} + \psi_{yy})] - \kappa f''(\psi_x^2 + \psi_y^2) = -lf,$$
$$u'\psi_x + v'\psi_y = -l.$$

Равенства (12) сведутся к системе ОДУ, если все производные от функции $\psi(x, y, t)$ в них являются дифференциальными следствиями некоторого базового [17] соотношения $\psi = a(\psi)(t + \alpha x + \mu y)$.

Утверждение 1. *Пусть $\psi = a(\psi)(t + \alpha x + \mu y)$, где $\alpha = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $a(\psi) \neq \eta\psi$, $\eta = \text{const}$, $\alpha \neq 0$, $\mu \neq 0$. Тогда равенства* (12) *сводятся к системе ОДУ.*

Доказательство. Так как $t + \alpha x + \mu y = \psi/a(\psi)$, то

$$\psi_t = a/[1 - a'(t + \alpha x + \mu y)] = a^2/(a - \psi a') = k(\psi).$$

Выбираем полученное уравнение $\psi_t = k(\psi)$ в качестве базового.

Аналогично вычисляя другие производные от ψ, получаем

$$\psi_x = a\alpha/[1 - a'(t + \alpha x + \mu y)] = \alpha a^2/(a - \psi a') = k(\psi)\alpha, \quad \psi_y = k(\psi)\mu,$$
$$\psi_{xx} = k(\psi)k'(\psi)\alpha^2, \quad \psi_{yy} = k(\psi)k'(\psi)\mu^2, \quad \psi_{xy} = k(\psi)k'(\psi)\alpha\mu, \quad \psi_{tx} = k(\psi)k'(\psi)\alpha,$$
$$\psi_{xxx} = \alpha^3 k(\psi)[(k'(\psi))^2 + k(\psi)k''(\psi)], \quad \psi_{yyx} = \alpha\mu^2 k(\psi)[(k'(\psi))^2 + k(\psi)k''(\psi)].$$

Таким образом, все производные от функции $\psi(x, y, t)$ из равенства (12) выражаются через функцию $k(\psi)$ и её производные по ψ: k', k''. Получаем недоопределенную (см. [16, стр. 22]) систему семи ОДУ для восьми функций

$$\rho\big\{u'[(1 + u\alpha + v\mu) - \nu k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu u'' k(\alpha^2 + \mu^2)\big\} = -h'\alpha,$$
$$\rho\big\{v'[(1 + u\alpha + v\mu) - \nu k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu v'' k(\alpha^2 + \mu^2)\big\} = -h'\mu,$$

$$\begin{aligned} r'[k' + u'k\alpha + uk'\alpha + vk'\mu + v'k\mu - \nu\alpha(\alpha^2 + \mu^2)(k'^2 + kk'')] \\ + r''k[1 + u\alpha + v\mu - 3\nu k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu r''' k^2(\alpha^2 + \mu^2) = [-\beta q g' - (l'r + lr')], \end{aligned}$$

$$l'[k' + u'k\alpha + uk'\alpha + vk'\mu + v'k\mu - \nu\alpha(\alpha^2 + \mu^2)(k'^2 + kk'')]$$

$$+ l''k[1 + u\alpha + v\mu - 3\nu k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu l'''k^2(\alpha^2 + \mu^2) = -\beta q f' - 2l'l, \quad (13)$$

$$g'k[1 + u\alpha + v\mu - \kappa k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \kappa g''k^2(\alpha^2 + \mu^2) = -rf,$$
$$f'k[1 + u\alpha + v\mu - \kappa k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \kappa f''k^2(\alpha^2 + \mu^2) = -lf,$$
$$k(u'\alpha + v'\mu) = -l.$$

□

1.2.1. Частное решение системы (13).

Выпишем частное решение системы (13), положив $k(\psi) = l(\psi) \neq 0$, $r = 0$, $g = g_0 = \text{const}$. Система (13) в этом случае сведётся к виду

$$\rho\big\{u'[(1 + u\alpha + v\mu) - \nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu u''l(\alpha^2 + \mu^2)\big\} = -h'\alpha,$$
$$\rho\big\{v'[(1 + u\alpha + v\mu) - \nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu v''l(\alpha^2 + \mu^2)\big\} = -h'\mu,$$

$$l'[l' + u'l\alpha + ul'\alpha + vl'\mu + v'l\mu - \nu\alpha(\alpha^2 + \mu^2)(l'^2 + ll'')]$$
$$+ l''l[1 + u\alpha + v\mu - 3\nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu l'''l^2(\alpha^2 + \mu^2) = -\beta q f' - 2l'l, \quad (14)$$

$$f'[1 + u\alpha + v\mu - \kappa l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \kappa f''l(\alpha^2 + \mu^2) = -f,$$
$$u'\alpha + v'\mu = -1.$$

Из последнего уравнения системы (14) следует, что $u\alpha + v\mu = -\psi + \psi_0$, $\psi_0 = \text{const}$, $u''\alpha + v''\mu = 0$. Умножив первое уравнение (14) на α, а второе на μ и сложив их, получим

$$\frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2}[(1 - \psi + \psi_0) - \nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] = h',$$
$$h = h_0 + \frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2}(\psi - 0.5\psi^2 + \psi_0\psi) - \nu\rho l,$$
$$h_0 = \text{const}\,.$$

Третье и четвёртое уравнения примут вид

$$l'[l' + l + l'(-\psi + \psi_0) - \nu\alpha(\alpha^2 + \mu^2)(l'^2 + ll'')]$$
$$+ l''l[1 + (-\psi + \psi_0) - 3\nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu l'''l^2(\alpha^2 + \mu^2) = -\beta q f', \quad (15)$$

$$f'[1 + (-\psi + \psi_0)] - \kappa(f'l)'(\alpha^2 + \mu^2) = -f.$$

Таким образом, приходим (см. (14), (15)) к частному решению системы (13)

$$l = \psi + B, \quad B = -\beta q c_0 - 1 - \psi_0 + \nu(\alpha^2 + \mu^2), \quad f = c^0[\psi - 1 - \psi_0 + \kappa(\alpha^2 + \mu^2)],$$
$$u = u_0 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2}\psi, \quad v = -\frac{\psi + \psi_0}{\mu} - \frac{\alpha}{\mu}\left(u_0 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2}\psi\right), \quad u_0 = \text{const},$$
$$\psi = \exp(t + \alpha x + \mu y) - B, \quad c_0 = \text{const}, \quad c^0 = \text{const},$$
$$h = h_0 + \frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2}(\psi - 0.5\psi^2 + \psi_0\psi) - \nu\rho l, \quad h_0 = \text{const}\,.$$

После подстановки этого частного решения в (2) получаем, что

$$
\begin{gathered}
u = u_0 - \frac{\alpha}{\alpha^2+\mu^2}\psi, \quad v = v_0 - \frac{\mu}{\alpha^2+\mu^2}\psi, \quad w = (\psi + B)z, \\
T = c^0 z[\psi - 1 - \psi_0 + \kappa(\alpha^2+\mu^2)] + g_0, \\
p = h_{11}z^2 + h_1 z + h(\psi), \\
h = h_0 + \frac{\rho}{\alpha^2+\mu^2}(\psi - 0.5\psi^2 + \psi_0\psi) - \nu\rho l, \quad h_0 = \text{const}, \\
\psi = \exp(t + \alpha x + \mu y) - B, \\
B = -\beta q c_0 - 1 - \psi_0 + \nu(\alpha^2+\mu^2), \\
\rho = \text{const}, \quad h_1 = \text{const}, \quad h_{11} = \text{const}, \quad c_0 = \text{const}, \quad c^0 = \text{const}, \\
u_0 = \text{const} \quad v_0 = \frac{\alpha u_0 - \psi_0}{\mu}, \quad \psi_0 = \text{const}, \quad \mu \neq 0.
\end{gathered} \tag{16}
$$

является решением системы (2).

1.3. Об одном классе решений уравнений Обербека — Буссинеска

Форма полученного в предыдущем пункте решения приводит к мысли рассмотреть для системы (1) анзац следующего вида:

$$
\begin{gathered}
u = A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1, \quad v = B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1, \\
w = z \exp(t + \alpha x + \mu y), \quad T = C_0 z[\exp(t + \alpha x + \mu y) + C_1] + C_2, \\
p = k_0[\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 + k_1 \exp(t + \alpha x + \mu y) + k_2 z^2 + k_3 z + k_4(t), \\
k_i = \text{const}, \quad i = 0,1,2,3, \quad A_0 = \text{const}, \quad A_1 = \text{const}, \\
B_0 = \text{const}, \quad B_1 = \text{const}, \quad C_i = \text{const}, \quad i = 0,1,2.
\end{gathered}
$$

Подставляем эти выражения в систему (1). Получаем

$$
\begin{aligned}
&\rho\{A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + [A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1]\alpha A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\qquad + [B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1]\mu A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad - \nu(\alpha^2+\mu^2)A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y)\} = -\{\alpha k_0[\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 + \alpha k_1 \exp(t + \alpha x + \mu y)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho\{B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + [A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1]\alpha B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\qquad + [B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1]\mu B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad - \nu(\alpha^2+\mu^2)B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y)\} = -\{\mu k_0[\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 + \mu k_1 \exp(t + \alpha x + \mu y)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho\{z \exp(t + \alpha x + \mu y) + [A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1]\alpha z \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\qquad + [B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1]\mu z \exp(t + \alpha x + \mu y) + z[\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 \\
&- \nu(\alpha^2+\mu^2)z \exp(t + \alpha x + \mu y)\} = -[2k_2 z + k_3] - \rho\beta q\{C_0 z[\exp(t + \alpha x + \mu y) + C_1] + C_2\},
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_0 z \exp(t + \alpha x + \mu y) + [A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1]\alpha C_0 z \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\qquad + [B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1]\mu C_0 z \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad + z \exp(t + \alpha x + \mu y) C_0[\exp(t + \alpha x + \mu y) + C_1] - \kappa C_0(\alpha^2+\mu^2) z \exp(t + \alpha x + \mu y) = 0,
\end{aligned}
$$

$$(A_0\alpha + B_0\mu + 1)\exp(t + \alpha x + \mu y) = 0.$$

Из (17) следует

$$\begin{gathered}
A_0\alpha + B_0\mu + 1 = 0,\\
C_0 + A_1\alpha C_0 + B_1\mu C_0 + C_0C_1 - \kappa C_0(\alpha^2 + \mu^2),\\
A_0\alpha + B_0\mu + 1 = 0,\\
\rho[1 + A_1\alpha + B_1\mu - \nu(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0] = 0,\\
k_3 = -\rho\beta q C_2, \quad 2k_2 + \rho\beta q C_0 C_1 = 0, \quad k_3 + \rho\beta q C_2 = 0,\\
\rho\{A_0 + A1\alpha A_0 + B_1\mu A_0 - \nu(\alpha^2 + \mu^2)A_0\} + \alpha k_1 = 0,\\
\rho\{\alpha A_0^2 + \mu A_0 B_0\} + \alpha k_0 = 0,\\
\rho\{B_0 + A_1\alpha B_0 + B_1\mu B_0 - \nu(\alpha^2 + \mu^2)B_0\} + \mu k_1 = 0,\\
\rho\{A_0\alpha B_0 + \mu B_0^2\} + \mu k_0 = 0.
\end{gathered}$$

Откуда

$$\begin{gathered}
A_0 = -\frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2}, \quad B_0 = -\frac{\mu}{\alpha^2 + \mu^2}, \quad k_0 = -\frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2},\\
B_1 = -\frac{1 + A_1\alpha - \nu(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0}{\mu}, \quad C_1 = (\kappa - \nu)(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0, \quad C_0 \neq 0.
\end{gathered}$$

Далее $k_1 = -\rho\beta q C_0/(\alpha^2 + \mu^2)$, $k_2 = -0.5\rho\beta q C_0[(\kappa - \nu)(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0]$.

В итоге находим класс решений уравнений Обербека — Буссинеска, в котором $(A_1, \alpha, \mu, C_0, C_2)$ — произвольные постоянные, $k_4(t)$ — произвольная функция:

$$\begin{gathered}
u = A_1 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2}\exp(t + \alpha x + \mu y),\\
v = -\frac{1 + A_1\alpha - \nu(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0}{\mu} - \frac{\mu}{\alpha^2 + \mu^2}\exp(t + \alpha x + \mu y),\\
w = z\exp(t + \alpha x + \mu y),\\
T = C_0 z[\exp(t + \alpha x + \mu y) + (\kappa - \nu)(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0] + C_2,
\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
p = -\frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2}[\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 - \frac{\rho\beta q C_0}{\alpha^2 + \mu^2}\exp(t + \alpha x + \mu y)&\\
- 0.5\rho\beta q C_0 z^2[(\kappa - \nu)(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0] - \rho\beta q C_2 z + k_4(t).&
\end{aligned}$$

Класс решений (18) несколько шире, чем решение (16).

2. ЛИНЕЙНОСТЬ ПО ДВУМ КООРДИНАТАМ

Для течений с линейностью по двум пространственным координатам А. Ф. Сидоров полагал (см. [2]), что

$$\begin{gathered}
u = g_1(x,t), \quad v = l_2(x,t)y + f_2(x,t)z + g_2(x,t),\\
w = l_3(x,t)y + f_3(x,t)z + g_3(x,t), \quad T = l(x,t)y + f(x,t)z + g(x,t),\\
p = p_{33}(t)z^2 + p_{23}(t)zy + p_{22}(t)y^2 + p_3(t)z + p_2(t)y + p_0(x,t).
\end{gathered}$$

Тогда система (1) сводится к системе одиннадцати уравнений для одиннадцати неизвестных функций, где пять функций $p_{33}(t)$, $p_{23}(t)$, $p_{22}(t)$, $p_3(t)$, $p_2(t)$ остаются произвольными

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial l_k}{\partial t}+g_1\frac{\partial l_k}{\partial x}+l_2l_k+l_3f_k+(1+\delta_{2k})\frac{p_{2k}}{\rho}-\nu\frac{\partial^2 l_k}{\partial x^2}+\beta q l\delta_{3k}=0, \quad (k=2,3),\\
\frac{\partial f_k}{\partial t}+g_1\frac{\partial f_k}{\partial x}+f_2l_k+f_3f_k+(1+\delta_{3k})\frac{p_{k3}}{\rho}-\nu\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}+\beta q f\delta_{3k}=0, \quad (k=2,3),\\
\frac{\partial g_k}{\partial t}+g_1\frac{\partial g_k}{\partial x}+g_2l_k+g_3f_k+\frac{p_k}{\rho}-\nu\frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2}+\beta q g\delta_{3k}=0, \quad k=(2,3),\\
\frac{\partial l}{\partial t}+g_1\frac{\partial l}{\partial x}+ll_2+l_3f-\kappa\frac{\partial^2 l}{\partial x^2}=0,\\
\frac{\partial f}{\partial t}+g_1\frac{\partial f}{\partial x}+lf_2+f_3f-\kappa\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\\
\frac{\partial g}{\partial t}+g_1\frac{\partial g}{\partial x}+lg_2+g_3f-\kappa\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=0,\\
\frac{\partial g_1}{\partial t}+g_1\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}=0,\\
\frac{\partial g_1}{\partial x}+l_2+f_3=0.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Здесь δ_{3k} — символ Кронекера.

2.1. О сведении системы (19) к системе ОДУ

А. Ф. Сидоров в [2] для случая линейности по двум координатам получил, в частности, систему одиннадцати ОДУ с независимой переменой x для одиннадцати неизвестных функций, описывающую стационарные пространственные течения. Рассмотрим, применяя развиваемый авторами метод [17], нестационарный случай. Продифференцировав по x первые три уравнения системы (19), обратимся к следствию системы (19) не содержащему членов, зависящих только от времени [4]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 l_k}{\partial t\partial x}+\frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{\partial l_k}{\partial x}+g_1\frac{\partial^2 l_k}{\partial x^2}+l_2\frac{\partial l_k}{\partial x}+l_k\frac{\partial l_2}{\partial x}+l_3\frac{\partial f_k}{\partial x}+f_k\frac{\partial l_3}{\partial x}\\
-\nu\frac{\partial^3 l_k}{\partial x^3}+\beta q\frac{\partial l}{\partial x}\delta_{3k}=0, \quad (k=2,3),\\
\frac{\partial^2 f_k}{\partial t\partial x}+\frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{\partial f_k}{\partial x}+g_1\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2}+f_2\frac{\partial l_k}{\partial x}+l_k\frac{\partial f_2}{\partial x}+f_3\frac{\partial f_k}{\partial x}+f_k\frac{\partial f_3}{\partial x}\\
-\nu\frac{\partial^3 f_k}{\partial x^3}+\beta q\frac{\partial f}{\partial x}\delta_{3k}=0, \quad (k=2,3),\\
\frac{\partial^2 g_k}{\partial t\partial x}+\frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{\partial g_k}{\partial x}+g_1\frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2}+g_2\frac{\partial l_k}{\partial x}+l_k\frac{\partial g_2}{\partial x}+g_3\frac{\partial f_k}{\partial x}+f_k\frac{\partial g_3}{\partial x}\\
-\nu\frac{\partial^3 g_k}{\partial x^3}+\beta q\frac{\partial g}{\partial x}\delta_{3k}=0, \quad (k=2,3), \qquad (20)\\
\frac{\partial g_1}{\partial t}+g_1\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_0}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2}=0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial l}{\partial t}+g_1\frac{\partial l}{\partial x}+ll_2+l_3f-\kappa\frac{\partial^2 l}{\partial x^2}=0,\\
\frac{\partial f}{\partial t}+g_1\frac{\partial f}{\partial x}+lf_2+f_3f-\kappa\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\\
\frac{\partial g}{\partial t}+g_1\frac{\partial g}{\partial x}+lg_2+g_3f-\kappa\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=0,\\
\frac{\partial g_1}{\partial x}+l_2+f_3=0.
\end{gathered}
$$

Пусть в системе (20) $g_1=g_1(\psi)$, $g_k=g_k(\psi)$, $l_k=l_k(\psi)$, $f_k=f_k(\psi)$, $(k=2,3)$, $l=l(\psi)$, $f=f(\psi)$, $g=g(\psi)$, $p_0=p_0(\psi)$. Вычислив производные сложных функций и подставив их в систему (20), получим соотношения

$$
\begin{aligned}
&l_k'(\psi_{xt}+g_1'\psi_x^2+g_1\psi_{xx}+l_2\psi_x-\nu\psi_{xxx})+l_k''(\psi_x\psi_t+g_1\psi_x^2-3\nu\psi_x\psi_{xx})\\
&\qquad\qquad -l_k'''\nu\psi_x^3+(l_kl_2'+l_3f_k'+f_kl_3'+\beta q\delta_{3k}l')\psi_x=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_k'(\psi_{xt}+g_1'\psi_x^2+g_1\psi_{xx}+f_3\psi_x-\nu\psi_{xxx})+f_k''(\psi_x\psi_t+g_1\psi_x^2-3\nu\psi_x\psi_{xx})\\
&\qquad\qquad -f_k'''\nu\psi_x^3+(l_kf_2'+f_2l_k'+f_kf_3'+\beta q\delta_{3k}f')\psi_x=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&g_k'(\psi_{xt}+g_1'\psi_x^2+g_1\psi_{xx}-\nu\psi_{xxx})+g_k''(\psi_x\psi_t+g_1\psi_x^2-3\nu\psi_x\psi_{xx})\\
&\qquad -g_k'''\nu\psi_x^3+(l_kg_2'+g_2l_k'+f_kg_3'+g_3f_k'+\beta q\delta_{3k}g')\psi_x=0,\quad (k=2,3),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$
\begin{gathered}
g_1'(\psi_t+g_1\psi_x)-\nu(g_1''\psi_x^2+g_1'\psi_{xx})+(1/\rho)p_0'\psi_x=0,\\
g_1'\psi_x+l_2+f_3=0,\\
l'(\psi_t+g_1\psi_x)-\kappa(l''\psi_x^2+l'\psi_{xx})+ll_2+l_3f=0,\\
f'(\psi_t+g_1\psi_x)-\kappa(f''\psi_x^2+f'\psi_{xx})+lf_2+f_3f=0,\\
g'(\psi_t+g_1\psi_x)-\kappa(g''\psi_x^2+g'\psi_{xx})+lg_2+g_3f=0.
\end{gathered}
$$

Из соотношения $g_1'\psi_x+l_2+f_3=0$ находим $\psi_x=-(l_2+f_3)/g_1'=\eta(\psi)$, если $g_1'\neq 0$.

Утверждение 2. *Пусть $\psi_x=\eta(\psi)$ — базовое уравнение и $\psi_t=\alpha\eta(\psi)$, $\alpha=\mathrm{const}$. Тогда соотношения* (21) *сводятся к системе ОДУ.*

Доказательство. Если $\psi_x=\eta(\psi)$, $\psi_t=\alpha\eta(\psi)$, то ψ_t, ψ_x — производные одной и той же функции $\psi(x,t)$, ибо $\psi_{xt}=\psi_{tx}=\alpha\eta\eta'$. При этом $\psi_{xx}=\eta\eta'$, $\psi_{xxx}=\eta'^2\eta+\eta^2\eta''$ и (21) сводится к системе одиннадцати ОДУ для одиннадцати неизвестных функций l_k, f_k, g_k, g_1, p_0, l, f, g с произвольной функцией $\eta(\psi)$

$$
\begin{aligned}
&l_k'[\alpha\eta'+g_1'\eta+g_1\eta'+l_2-\nu(\eta'^2+\eta\eta'')]+l_k''\eta(\alpha+g_1-3\nu\eta')\\
&\qquad\qquad -l_k'''\nu\eta^2+(l_kl_2'+l_3f_k'+f_kl_3'+\beta q\delta_{3k}l')=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_k'[\alpha\eta'+g_1'\eta+g_1\eta'+f_3-\nu(\eta'^2+\eta\eta'')]+f_k''\eta(\alpha+g_1-3\nu\eta')\\
&\qquad\qquad -f_k'''\nu\eta^2+(l_kf_2'+f_2l_k'+f_kf_3'+\beta q\delta_{3k}f')=0,
\end{aligned}
$$

$$g_k'[\alpha\eta' + g_1'\eta + g_1\eta' - \nu(\eta'^2 + \eta\eta'')] + g_k''\eta(\alpha + g_1 - 3\nu\eta')$$
$$- g_k'''\nu\eta^2 + (l_k g_2' + g_2 l_k' + f_k g_3' + g_3 f_k' + \beta q\delta_{3k} g') = 0, \quad (k = 2, 3), \quad (22)$$

$$g_1'(\alpha + g_1) - \nu(g_1''\eta + g_1'\eta') + (1/\rho)p_0' = 0,$$

$$g_1'\eta + l_2 + f_3 = 0,$$

$$l'\eta(\alpha + g_1) - \kappa\eta(l''\eta + l'\eta') + ll_2 + l_3 f = 0,$$

$$f'\eta(\alpha + g_1) - \kappa\eta(f''\eta + f'\eta') + lf_2 + f_3 f = 0,$$

$$g'\eta(\alpha + g_1) - \kappa\eta(g''\eta + g'\eta') + lg_2 + g_3 f = 0.$$

Отметим, что условия утверждения немедленно приводят к выводу, что $\psi = \psi(x + \alpha t)$. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для систем уравнений, полученных ранее А. Ф. Сидоровым для случая естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска в предположении линейной зависимости решений от части независимых переменных [2], применены подходы, развиваемые авторами для сведения систем УЧП к системам ОДУ (см., например, [17]). Поиск редукций основан на выделении решений рассматриваемых уравнений, зависящих от одной независимой переменной ψ, и опирается на выбор некоторого базового уравнения в частных производных первого порядка определённым образом связанного с исходной системой УЧП или некоторого базового соотношения. Следует отметить, что в работе не рассмотрены все возможные варианты выбора базового уравнения и, следовательно, не исчерпаны все редукции изучаемых систем уравнений, возможные в рамках применяемого метода. Кроме того, в работе приведены лишь некоторые найденные частные точные решения соответствующих систем.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (код научной темы FUMF-2022-0007). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика. Том VI. М.: Наука, 1986.
2. *Сидоров А.Ф.* Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Числ. и аналит. решения задач механики сплош. среды. Сб. статей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 101–117.
3. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
4. *Lin C.C.* Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. V. 1. P. 391-–395; https://doi.org/10.1007/BF00298016

5. *Аристов С.Н.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Владивосток: ИАПУ, 1990.
6. *Ульянов О.Н.* Два класса решений нелинейных уравнений механики сплошных сред: дис. ... канд-та физ.-мат. наук. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1991.
7. *Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
8. *Ershkov S.V., Prosviryakov E.Y., Burmasheva N.V., Christianto V.* Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review // Symmetry. 2023. V. 15, N 1825; https://doi.org/10.3390/sym15101825
9. *Просвиряков Е.Ю., Горулева Л.С., Альес М.Ю.* Класс точных решений уравнений Обербека — Буссинеска с учётом диссипативной функции Рэлея // Химическая физика и мезоскопия. 2024. Т. 26, № 2. С. 164–178; https://doi.org/10.62669/17270227.2024.2.15
10. *Pukhnachev V.V.* Model of viscous layer deformation by thermocapillary forces // Europ. J. Appl. Math. 2002. V. 13, N 2. P. 205–224; https://doi.org/10.1017/S0956792501004776
11. *Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Shefer I.A.* Solution of a two-layer flow problem with inhomogeneous evaporation at the thermocapillary interface // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. V. 14, N 4. P. 404–413; https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-4-404-413
12. *Andreev V.K.* Thermocapillary convection of immiscible liquid in a threedimensional layer at low Marangoni numbers // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2024. V. 17, N 2. P. 195–206.
13. *Pukhnachev V.V.* Group-theoretical methods in convection theory // AIP Conf. Proc. 2011. V. 1404. P.27–38; https://doi.org/10.1063/1.3659901
14. *Barna I.F., Matyas L.* Analytic self-similar solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2015. V. 78. P. 249–255; https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.08.002
15. *Koptev A.V.* Method for solving the Navier — Stokes and Euler equations of motion for incompressible media // J. of Mathematical Sciences. 2020. V. 250, N 1. P. 10–21; https://doi.org/10.1007/s10958-020-04992-x
16. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П, Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
17. *Ульянов О.Н., Рубина Л.И.* О некоторых классах свободноконвективных движений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 189–206; https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-2-189-206
18. *Эйхенвальд А.А.* Теоретическая физика: Теория поля. М.: URSS, 2023.
19. *Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б.* О выборе методов решения уравнения Пуассона в общем случае распределения объёмной плотности заряда и постановке краевых условий в электрокинетических задачах (обзор) // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 1. С. 65–75.
20. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. Vol. Partial differential equations. N. Y.: Interscience, 1962.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.957:517.958:532.5

ABOUT ONE APPROACH TO STUDING MATHEMATICAL MODELS OF NATURAL CONVECTION

O. N. Ul'yanov[a], **L. I. Rubina**[b]

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, S. Kovalevskaya st., 16, Ekaterinburg 620108, Russia

E-mails: [a]secretary@imm.uran.ru, [b]rli@imm.uran.ru

Received 09.01.2024, revised 30.06.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. Systems of partial differential equations obtained earlier by A.F. Sidorov for spatial natural convection of a viscous liquid in the Boussinesq approximation are considered in the case of flows with a linear dependence of the components of the velocity vector on a part of the spatial coordinates. To study these systems the methods of reduction of systems of partial differential equations developed by the authors are used. The systems under consideration are reduced to systems of ordinary differential equations. Some exact partial solutions have been found. It is studied whether the solution of the Oberbeck–Boussinesq equations, which linearly depends on the variable z, can describe the vortex-free motion of a viscous incompressible fluid.

Keywords: Oberbeck–Boussinesq equations, class Lin – Sidorov – Aristov, reductions to ODE systems, exact solutions.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.412

In Memory of Our Teacher — Anatoly Fyodorovich Sidorov

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics. Fluid Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987.
2. Sidorov A.F. Ob odnom klasse resheniy uravneniy gazovoy dinamiki i yestestvennoy konvektsii [On a class of solutions of the gas dynamics and natural convection equations]. *Chislen. analitich. resheniya zadach mekhaniki sploshnoy sredy* [Numerical and Analytical Methods for Solving Problems in Continuum Mechanics]. Sverdlovsk: Akad. Nauk SSSR, Ural. Nauchn. Tsentr. 1981, pp. 101–117. (in Russian).
3. Sidorov A.F. Izbrannyye trudy: Matematika. Mekhanika [Selected Works. Mathematics. Mechanics]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2001 (in Russian).
4. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1957. Vol. 1, pp. 391–395.; https://doi.org/10.1007/BF00298016
5. Aristov S.N Vikhrevyye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti [Eddy currents in thin liquid layers]: Dr. Sci. Diss. Vladivostok: IAPU, 1990 (in Russian).
6. Ulianov O.N Dva klassa resheniy nelineynykh uravneniy mekhaniki sploshnykh sred [Two Classes of Solutions of Nonlinear Equations of Continuum Mechanics]: Ph.D. thesis. Ekaterinburg: Institute of Mathematics and Mechanics, 1992 (in Russian).
7. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier—Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theor. Found. Chemical Engrg.*, 2009, Vol. 43, No. 5, pp. 642–662; https://doi.org/10.1134/S0040579509050066

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2025, Vol. 19, No. 4.

8. Ershkov S.V., Prosviryakov E.Y., Burmasheva N.V., Christianto V. Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review. *Symmetry*, 2023, Vol. 15, Artical number 1825; https://doi.org/10.3390/sym15101825

9. Prosviryakov E.Yu., Goruleva L.S., Alies M.Yu. Klass tochnykh resheniy uravneniy Oberbeka-Bussineska s uchetom dissipativnoy funktsii Releya [A class of exact solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations with the Rayleigh dissipative function]. *Chemical Phys. Mesoscopy*, 2024, Vol. 26, No. 2, pp. 164–178 (in Russian); https://doi.org/10.62669/17270227.2024.2.15

10. Pukhnachev V.V. Model of viscous layer deformation by thermocapillary forces. *Europ. J. Appl. Math.*, 2002, Vol. 13, No. 2, pp. 205–224; DOI: 10.1017/S0956792501004776

11. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Shefer I.A. Solution of a two-layer flow problem with inhomogeneous evaporation at the thermocapillary interface. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021, Vol. 14, No. 4, pp. 404–413; https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-4-404-413

12. Andreev V.K. Thermocapillary convection of immiscible liquid in a threedimensional layer at low Marangoni numbers. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2024, Vol. 17, No. 2, pp. 195–206

13. Pukhnachev V.V. Group-theoretical methods in convection theory. *AIP Conf. Proc.*, 2011, Vol. 1404, pp. 27–38; https://doi.org/10.1063/1.3659901

14. Barna I.F., Matyas L. Analytic self-similar solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations. it Chaos, Solitons and Fractals, 2015, Vol. 78, pp. 249–255; https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.08.002

15. Koptev A.V. Method for solving the Navier—Stokes and Euler equations of motion for incompressible media. *J. Math. Sci.*, 2020, Vol. 250, No. 1, pp. 10–21; https://doi.org/10.1007/s10958-020-04992-x

16. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. Metod differentsial'nykh svyazey i yego prilozheniya k gazovoy dinamike [Method of differential relations and its application in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1984 (in Russian).

17. Ul'yanov O.N., Rubina L.I. On some classes of free convection motions. *Proc. Steklov Institute of Mathematics*, 2023, Vol. 321, Suppl. 1. pp. S239–S256; https://doi.org/10.1134/S0081543823030203

18. Ejkhenvald A.A. Teoreticheskaya fizika [Theoretical Physics], Moscow: URSS, 2023 (in Russian).

19. Sharfarets B.P., Sharfarets E.B. O vybore metodov resheniya uravneniya Puassona v obshchem sluchaye raspredeleniya ob"yemnoy plotnosti zaryada i o postanovke krayevykh usloviy v elektrokineticheskikh zadachakh (obzor) [About the choice of methods for solving Poisson's equation in the general case of the distribution of the volume charge density and about the formulation of boundary conditions in electrokinetic problems (review)]. *Nauchnoe priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, Vol. 25, No. 1, pp. 65–75 (in Russian).

20. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Partial differential equations. N. Y.: Interscience, 1962, Vol. 2.