

УДК 539.3:517.9

О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ВКЛЮЧЕНИЕМ И ЖЁСТКИМИ ПЕРЕМЫЧКАМИ: НЕКОЭРЦИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ© 2025 А. М. Хлуднев^{1,2a}, Н. П. Лазарев^{3b}¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия,*²*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*³*Научно-исследовательский институт математики
Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова,
ул. Беллинского, 58, г. Якутск 677000, Россия*E-mails: ^akhlud@hydro.nsc.ru, ^bnyurgunlazarev@yandex.ruПоступила в редакцию 14.05.2025 г.; после доработки 06.01.2026 г.;
принята к публикации 20.01.2026 г.

В работе исследуются краевые задачи о равновесии упругой пластины, содержащей объёмное упругое включение и тонкие жёсткие перемычки. Включение отслаивается от пластины, образуя межфазную трещину. Рассматриваемые в работе краевые условия на внешней границе пластины и на границе упругого включения соответствуют некоэрцитивным краевым задачам. Найдены необходимые и достаточные условия существования решения рассматриваемых задач и доказано существование решений. Дано обоснование возможности предельного перехода по параметру жёсткости включения при стремлении параметра к бесконечности и к нулю. Проведён анализ предельных задач, описывающих равновесие пластины с объёмным жёстким включением и с полостью. Анализируются как вариационные, так и дифференциальные постановки рассматриваемых задач.

Ключевые слова: упругая пластина, объёмное включение, жёсткая перемычка, некоэрцитивная краевая задача, существование решений, асимптотика решений.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.413

ВВЕДЕНИЕ

Упругие и неупругие конструкции сложной структуры находят широкое применение в практической деятельности. В частности, конструкции могут включать объекты, которые необходимо описывать в терминах математических моделей для тел разных размерностей. Математическая модель, анализируемая в статье, соответствует упругой конструкции, части которой описываются уравнениями для одномерных и двумерных объектов. Последние десятилетия характеризуются высокой активностью анализа краевых задач для деформируемых конструкций сложной структуры. Это касается и упругих тел с тонкими включениями различной природы, в том числе, при наличии отслоений, т. е. когда между тонкими включениями и окружающим упругим телом имеются трещины. Следует отметить работы [1–13], где исследовались асимптотические свойства решений подобных задач; анализ зависимости решений от формы области, в частности, нахождение производной функционала энергии по длине трещины можно найти в [14–17]; вопросы оптимального управления рассматривались в [18–20]. Анализ напряжённого состояния в упругом теле и приближённые подходы имеются в [21, 22]. Термин «тонкое включение» означает, что размерность включения меньше размерности окру-

жающего упругого тела. Что касается общих подходов к моделированию неоднородных упругих тел, (см. [23, 24]).

В данной работе рассматриваются задачи равновесия упругой пластины при наличии упругого объёмного включения при условии, что тонкие жёсткие перемычки соединяют пластину и включение. Объёмное включение также соответствует упругой пластине; при этом на общей границе для пластины и включения задаются условия свободного края (условия типа Неймана). Основная трудность в задаче связана с тем, что на внешней границе упругой пластины также рассматриваются граничные условия свободного края. Как следствие, для доказательства существования решения рассматриваемых краевых задач подходящее пространство Соболева представляется в виде прямой суммы ортогональных подпространств. При этом решение задач находится в одном из подпространств. Действующие на упругую пластину и включение заданные внешние силы должны удовлетворять подходящим необходимым и достаточным условиям.

Работа структурирована следующим образом. В разд. 1 формулируется краевая задача о равновесии упругой пластины Кирхгофа — Лява с объёмным упругим включением и тонкими жёсткими перемычками, соединяющими пластину и включение. Доказывается разрешимость краевой задачи, найдены необходимые и достаточные условия на заданные внешние нагрузки для разрешимости задачи. Устанавливается эквивалентность дифференциальной и вариационной постановок задачи. Разд. 2 посвящён анализу асимптотики решений при стремлении параметра жёсткости упругого включения к бесконечности. Доказана возможность предельного перехода и проведён анализ предельной задачи. В разд. 3 исследуется разрешимость краевой задачи для рассматриваемой конструкции в случае, когда пластина закреплена в трёх заданных точках. Установлена разрешимость краевой задачи и дано обоснование возможности предельного перехода при стремлении параметра жёсткости упругого включения к нулю.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ , $\omega \subset \Omega$ — подобласть с гладкой границей G , $G \cap \Gamma = \emptyset$; $\gamma_1 = (-1, 1) \times \{0\}$, $\gamma_2 = \{-3/2\} \times (0, 2)$ — кривые, пересекающие G в точках x^0, x^1 , соответственно, $x^0 = (0, 0)$; $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$; $\Omega_0 = \Omega \setminus G$, $\Omega_\gamma = \Omega_0 \setminus \bar{\gamma}$, (см. рис. 1).

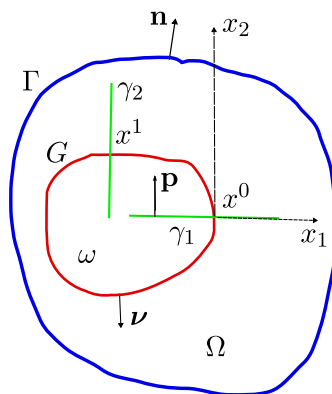


Рис. 1. Упругая пластина с включением ω и жёсткими перемычками γ_i

Обозначим через $n = (n_1, n_2)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $p = (p_1, p_2)$ — единичные нормальные векторы к Γ , G и γ соответственно. Обозначим также $w_n = \frac{\partial w}{\partial n}$. Если $M = \{M_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, то $\nabla \nabla M = M_{ij,ij}$. По повторяющимся индексам производится суммирование. Все величины с двумя нижними индексами в дальнейшем считаются симметричными по этим индексам. Для скалярной функции w положим $\nabla \nabla w = \{w_{,ij}\}$, $i, j = 1, 2$. Области $\Omega \setminus (\bar{\omega} \cup \bar{\gamma})$, ω соответствуют упругой пластине и упругому включению, а γ_i — тонким жёстким перемычкам.

Введём обозначение для изгибающего момента M^n и поперечной силы $T^n = T^n(M)$ на Γ ,

$$M^n = -M_{ij}n_jn_i, \quad T^n = -M_{ij,j}n_i - M_{ij,k}\tau_k\tau_jn_i, \quad (\tau_1, \tau_2) = (-n_2, n_1). \quad (1)$$

Тогда для гладких функций w , $M = \{M_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, справедлива следующая формула Грина [11]

$$-\int_{\Omega} M \cdot \nabla \nabla w = -\int_{\Omega} w \nabla \nabla M + \int_{\Gamma} M^n w_n - \int_{\Gamma} T^n w \mp \int_{G^{\pm}} M^{\nu} w_{\nu} \pm \int_{G^{\pm}} T^{\nu} w. \quad (2)$$

Аналогичная формула может быть выписана и для множества Ω_{γ} с разрезами G и γ ,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_{\gamma}} M \cdot \nabla \nabla w = & -\int_{\Omega_{\gamma}} w \nabla \nabla M - \int_{\gamma} [M^p w_p] + \int_{\gamma} [T^p w] \\ & + \int_{\Gamma} M^n w_n - \int_{\Gamma} T^n w \mp \int_{G^{\pm}} M^{\nu} w_{\nu} \pm \int_{G^{\pm}} T^{\nu} w, \end{aligned}$$

где $[h] = h^+ - h^-$ — скачок функции h на γ ; при этом в (2) и (1) нужно одновременно брать верхние или нижние знаки. Знаки \pm соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормалей p, ν . Величины $M^p, T^p, M^{\nu}, T^{\nu}$ с нормальями p, ν определяются аналогично (1).

Для произвольного множества $S \subset \mathbb{R}^2$ введём пространство инфинитезимальных жёстких перемещений

$$R(S) = \{l \mid l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in S\}.$$

При определении пространства $R(S)$ постоянные a_i произвольны.

Обозначим через $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$ пространство Соболева,

$$H^{2,\gamma}(\Omega_0) = \{v \in H^2(\Omega_0) \mid v|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2\}.$$

Введём тензор модулей упругости $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, удовлетворяющий условиям симметрии и положительной определённости

$$\begin{aligned} A\xi \cdot \xi & \geq c_0|\xi|^2 \quad \text{для всех } \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const} > 0, \\ a_{ijkl} & = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L^{\infty}(\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2. \end{aligned}$$

Обозначим $M(w) = -A\nabla\nabla w$, или $M_{ij}(w) = -a_{ijkl}w_{,kl}$, $i, j = 1, 2$, и определим билинейную форму $B : H^2(\Omega_0) \times H^2(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$B(w, v) = -\int_{\Omega_0} M_{ij}(w)v_{,ij} = \int_{\Omega_0} a_{ijkl}w_{,kl}v_{,ij}.$$

Введём далее скалярное произведение в пространстве $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$,

$$\langle w, v \rangle = \int_{\Omega_0} w \int_{\Omega_0} v + \int_{\Omega_0} \nabla w \nabla v + B(w, v). \quad (3)$$

Ясно, что скалярное произведение (3) индуцирует норму в пространстве $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$, эквивалентную стандартной.

Пусть

$$R^{\perp}(\Omega_0) = \{v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0) \mid \int_{\Omega_0} v = 0, \quad \int_{\Omega_0} v_{,i} = 0, \quad i = 1, 2\}.$$

Предложение 1. Пространство $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств по отношению к скалярному произведению (3):

$$H^{2,\gamma}(\Omega_0) = R(\Omega_0) \oplus R^\perp(\Omega_0).$$

Доказательство. Возьмём произвольные элементы $l \in R(\Omega_0)$, $v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0)$. Пусть $l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. Имеем

$$\langle v, l \rangle = a_i \int_{\Omega_0} v_{,i} + \int_{\Omega_0} v \int_{\Omega_0} (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2). \quad (4)$$

Из (4) следует, что необходимое и достаточное условие для справедливости тождества

$$\langle v, l \rangle = 0 \text{ для всех } l \in R(\Omega_0)$$

имеет вид

$$\int_{\Omega_0} v = 0, \quad \int_{\Omega_0} v_{,i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

т. е. $v \in R^\perp(\Omega_0)$. Предложение 1 доказано. \square

Рассмотрим функционал энергии $\Pi : H^{2,\gamma}(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - \int_{\Omega_0} fv - \int_{\gamma} gv,$$

где $f \in L^2(\Omega_0)$ — заданная внешняя сила, действующая на пластину и включение, а $g \in L^2(\gamma)$ — заданная внешняя сила, действующая на тонкие перемычки. Считаем, что внешние нагрузки f, g удовлетворяют условию

$$\int_{\Omega_0} fl + \int_{\gamma} gl = 0 \text{ для всех } l \in R(\Omega_0). \quad (5)$$

В этом случае задача минимизации

$$\inf_{v \in R^\perp(\Omega_0)} \Pi(v) \quad (6)$$

имеет единственное решение. Для доказательства разрешимости задачи (6) достаточно проверить коэрцитивность функционала Π на $R^\perp(\Omega_0)$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Существует постоянная $c_1 > 0$, такая что

$$B(v, v) \geq c_1 \|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)}^2 \text{ для всех } v \in R^\perp(\Omega_0). \quad (7)$$

Доказательство. Предположим, что (7) не верно. Тогда существует последовательность $v^k \in R^\perp(\Omega_0)$, такая, что при $k \rightarrow \infty$

$$\|v^k\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)} = 1, \quad B(v^k, v^k) \rightarrow 0. \quad (8)$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно считать, что при $k \rightarrow \infty$

$$v^k \rightarrow v \text{ слабо в } H^{2,\gamma}(\Omega_0), \quad \text{сильно в } H^{1,\gamma}(\Omega_0). \quad (9)$$

Далее имеем

$$0 = \liminf B(v^k, v^k) \geq B(v, v) \geq 0,$$

т. е.

$$B(v, v) = 0. \quad (10)$$

Множество Ω_0 не связное, поэтому отсюда следует ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$):

$$v(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad x \in \omega; \quad v(x) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad x \in \Omega \setminus \bar{\omega}.$$

Однако $v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0)$, следовательно,

$$l_i = v|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом на кривой γ_1 имеем $[l_1(x^0)] = l_1^+(x^0) - l_1^-(x^0) = 0$, $[l_{1,1}(x^0)] = 0$, где знаки \pm соответствуют значениям функции со стороны $\Omega \setminus \bar{\omega}$ и ω соответственно. Эти равенства дают $a_i = b_i$, $i = 0, 1$. Поскольку $[l_2(x^1)] = 0$, то $a_2 = b_2$. Итак, для предельной функции v имеем

$$v(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_0.$$

Сказанное означает, что $v \in R(\Omega_0) \cap R^\perp(\Omega_0)$, и мы получаем $v \equiv 0$ в Ω_0 . Кроме этого, в силу (8), (9), (10) имеем

$$\|v^k\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)}^2 = \|v^k\|_{H^{1,\gamma}(\Omega_0)}^2 + B(v^k, v^k) \rightarrow \|v\|_{H^{1,\gamma}(\Omega_0)}^2 + B(v, v) = \|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)}^2.$$

Следовательно, $\|v^k\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)} \rightarrow \|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)}$, и в силу (9) заключаем

$$v^k \rightarrow v \text{ сильно в } H^{2,\gamma}(\Omega_0).$$

Тогда из (8) следует, что $\|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)} = 1$, что является противоречием, т. к. $v \equiv 0$ в Ω_0 . Предложение 2 таким образом доказано. \square

В силу Предложения 2 функционал Π коэрцитивен на $R^\perp(\Omega_0)$. Это означает, что задача (6) имеет решение, удовлетворяющее тождеству

$$w \in R^\perp(\Omega_0), \quad (11)$$

$$B(w, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in R^\perp(\Omega_0). \quad (12)$$

В силу (5) задачу (11)–(12) можно переписать в виде

$$w \in R^\perp(\Omega_0),$$

$$B(w, v + l) - \int_{\Omega_0} f(v + l) - \int_{\gamma} g(v + l) = 0 \text{ для всех } v \in R^\perp(\Omega_0), \quad l \in R(\Omega_0),$$

или, учитывая Предложение 1, в таком виде

$$w \in R^\perp(\Omega_0), \quad (13)$$

$$B(w, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0). \quad (14)$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. При выполнении условия (5) существует решение задачи (13)–(14).

Следует отметить, что условие (5) не только достаточно, но и необходимо для разрешимости задачи (13)–(14). Действительно, пусть задача (13)–(14) имеет решение. В качестве тестовой функции в (14) выберем l , где $l \in R(\Omega_0)$. В этом случае из (14) следует (5), что и требовалось.

Приведём теперь дифференциальную формулировку задачи (13)–(14). Требуется найти функции w , $M = \{M_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_0 и Ω_γ соответственно, а также функции $l^i \in R(\gamma_i)$, такие что

$$\nabla\nabla M + f = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (15)$$

$$M + A\nabla\nabla w = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (16)$$

$$w = l^i, \quad [w_p] = [M^p] = 0 \text{ на } \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$M^n = T^n = 0 \text{ на } \Gamma; \quad M^\nu = T^\nu = 0 \text{ на } G^\pm \setminus (x^0 \cup x^1), \quad (18)$$

$$\int_\gamma gv - \int_\gamma [T^p]v = 0 \text{ для всех } v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0), \quad (19)$$

$$\int_{\Omega_0} w = 0, \quad \int_{\Omega_0} w_{,i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Здесь (15) является уравнением равновесия, а (16) - уравнением состояния. Краевые условия (18) приводят к некоэрцитивности краевой задачи (15)–(19). Условия (20) обеспечивают единственность решения.

Следует отметить, что (19) можно переписать в эквивалентном виде

$$\int_{\gamma_k} g - \int_{\gamma_k} [T^p] = 0, \quad \int_{\gamma_k} gx_i - \int_{\gamma_k} [T^p]x_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

Согласно (21) главный вектор сил и главный момент, действующие на жёсткие перемычки γ_k , равны нулю.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. На классе гладких решений формулировки (13)–(14) и (15)–(20) эквивалентны.

Доказательство. Пусть задача (15)–(20) имеет гладкое решение. Тогда из (15) следует

$$\int_{\Omega_\gamma} (\nabla\nabla M + f)v = 0 \text{ для всех } v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0).$$

Применяя формулу Грина (1), с учётом того что $[v] = [v_p] = 0$ на γ , имеем отсюда

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\gamma} M\nabla\nabla v - \int_{\Omega_\gamma} fv \pm \int_\gamma gv + \int_\gamma [M^p]v_p - \int_\gamma [T^p]v - \int_\Gamma M^n v_n + \int_\Gamma T^n v \\ + \int_{G^+} M^\nu v_\nu - \int_{G^+} T^\nu v - \int_{G^-} M^\nu v_\nu + \int_{G^-} T^\nu v = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь можно поменять область интегрирования Ω_γ на Ω_0 в интегралах для $M\nabla\nabla v$ и для fv . Учитывая краевые условия (17)–(19), из (22) получим (14). Итак, из (15)–(20) вытекает (13)–(14).

Обратно. Пусть задача (13)–(14) имеет гладкое решение. Подставляя в (14) в качестве тестовых функций $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$, получим уравнение равновесия (15), где $M = -A\nabla\nabla w$. Интегрируя затем по частям в (14) с помощью формулы (1), будем иметь

$$0 = B(w, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = - \int_{\gamma} [M^p] v_p + \int_{\gamma} [T^p] v + \int_{\Gamma} M^n v_n - \int_{\Gamma} T^n v - \int_{G^+} M^\nu v_\nu + \int_{G^+} T^\nu v + \int_{G^-} M^\nu v_\nu - \int_{G^-} T^\nu v - \int_{\gamma} g v.$$

Отсюда следуют все соотношения (17)–(19). Теорема 2 доказана. \square

2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПО ПАРАМЕТРУ ЖЁСТКОСТИ ВКЛЮЧЕНИЯ

В этом разделе будем считать, что тензор модулей упругости в области ω зависит от положительного параметра δ . Пусть

$$A_\delta = \begin{cases} A & \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega} \\ \delta^{-1} A & \text{в } \omega. \end{cases}$$

При каждом $\delta > 0$ можно найти решение задачи вида (15)–(20) с тензором модулей упругости A_δ . Нашей целью будет исследование асимптотики решений, а именно, обоснование возможности предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$. Решение задачи вида (13)–(14) с тензором модулей упругости A_δ удовлетворяет тождеству (см. (13)–(14))

$$w^\delta \in R^\perp(\Omega_0), \tag{23}$$

$$B_\delta(w^\delta, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0), \tag{24}$$

где

$$B_\delta(w, v) = \delta^{-1} \int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij} + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij}.$$

Цель нижеследующих рассуждений — доказать возможность предельного перехода в (23)–(24) при $\delta \rightarrow 0$. На первом этапе получим априорные оценки решения. Из (23)–(24) имеем

$$B_\delta(w^\delta, w^\delta) - \int_{\Omega_0} f w^\delta - \int_{\gamma} g w^\delta = 0. \tag{25}$$

Принимая во внимание неравенство (7), из (25) можно получить оценку, равномерную по $0 < \delta \leq \delta_0$

$$\|w^\delta\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq c. \tag{26}$$

Выбирая на основе (26) подпоследовательность, считаем, что при $\delta \rightarrow 0$

$$w^\delta \rightarrow w \text{ слабо в } H^{2,\gamma}(\Omega_0). \tag{27}$$

Кроме того, из (25) получим

$$\int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl}^{\delta} w_{,ij}^{\delta} \leq c\delta.$$

Отсюда и из (27) следует, что для предельной функции w имеем

$$w(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \omega. \quad (28)$$

Введём пространство функций

$$H^{2,\omega}(\Omega_0) = \{v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0) \mid v|_{\omega \cup \gamma} \in R(\omega \cup \gamma)\}.$$

Пусть $v \in H^{2,\omega}(\Omega_0)$ — тестовая функция в (24). Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в (24), получим

$$w \in R^{\perp}(\Omega_0) \cap H^{2,\omega}(\Omega_0), \quad (29)$$

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,ij} v_{,ij} - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \quad \text{для всех } v \in H^{2,\omega}(\Omega_0). \quad (30)$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. При выполнении условия (5) решения задач (24) сходятся в смысле (27)–(28) к решению задачи (29)–(30) при $\delta \rightarrow 0$.

Приведём дифференциальную формулировку задачи (29)–(30). Требуется найти функции $w, M = \{M_{ij}\}$ определённые в Ω_0 и $\Omega_{\gamma} \setminus \bar{\omega}$ соответственно, а также функцию $l^{\infty} \in R(\omega \cup \gamma)$, такие что

$$\nabla \nabla M + f = 0 \quad \text{в } \Omega_{\gamma} \setminus \bar{\omega}, \quad (31)$$

$$M + A \nabla \nabla w = 0 \quad \text{в } \Omega_{\gamma} \setminus \bar{\omega}, \quad (32)$$

$$w = l^{\infty} \quad \text{на } \omega \cup \gamma; \quad [w_p] = [M^p] = 0 \quad \text{на } \gamma \cap (\Omega \setminus \bar{\omega}), \quad (33)$$

$$M^n = T^n = 0 \quad \text{на } \Gamma; \quad M^{\nu} = T^{\nu} = 0 \quad \text{на } G^+ \setminus (x^0 \cup x^1), \quad (34)$$

$$\int_{\omega} f v + \int_{\gamma} g v - \int_{\gamma \cap (\Omega \setminus \bar{\omega})} [T^p] v = 0 \quad \text{для всех } v \in H^{2,\omega}(\Omega_0), \quad (35)$$

$$\int_{\Omega_0} w = 0, \quad \int_{\Omega_0} w_{,i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (36)$$

Задача (31)–(36) описывает равновесие упругой пластины $\Omega_{\gamma} \setminus \bar{\omega}$ с жёстким включением $\omega \cup \gamma$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. Формулировки (29)–(30) и (31)–(36) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.

Доказательство этой теоремы опустим, так как оно аналогично доказательству теоремы 2.

Докажем, что решение предельной задачи (29)–(30) единственно. Предположим, что имеется два различных решения w^1, w^2 . Выбирая в тождестве (30) в качестве тестовой функции $v = w^1 - w^2$ для первого и второго решений, получим следующее соотношение для разности $w = w^1 - w^2$

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl} w_{,ij} = 0.$$

Следовательно,

$$w(x) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \bar{\omega}; \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Поскольку $w \in R^\perp(\Omega_0) \cap H^{2,\omega}(\Omega_0)$, то

$$w(x) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad x \in \omega.$$

Однако для предельной функции w справедливы соотношения

$$\int_{\Omega_0} w = 0, \quad \int_{\Omega_0} w_{,i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

поэтому $w \equiv 0$ в Ω_0 . Противоречие. Утверждение о единственности решения задачи(29)–(30) доказано.

3. ПЛАСТИНА, ЗАКРЕПЛЁННАЯ В ТРЁХ ТОЧКАХ

В этом разделе рассматривается случай пластины, закреплённой в трёх точках $y^0, y^1, y^2 \in \Omega \setminus \bar{\omega}$, образующих невырожденный треугольник. Например, можно взять

$$y^0 = (0, 1), \quad y^1 = (0, -1), \quad y^2 = (1, 1),$$

(см. рис. 2).

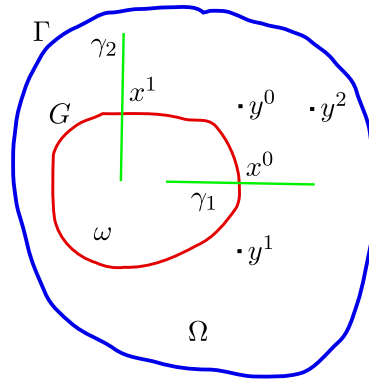


Рис. 2. Пластина, закреплённая в трёх точках

Справедливость условия (5) при этом не предполагается. Обозначим $\Omega_\gamma^0 = \Omega_\gamma \setminus \{y^0 \cup y^1 \cup y^2\}$ и введём пространство функций

$$\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0) = \{v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0) \mid v(y^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2\}.$$

Рассмотрим далее функционал энергии $\pi_\delta : \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\pi_\delta(v) = \frac{1}{2} B^\delta(v, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_\gamma g v, \quad \delta > 0,$$

где

$$B^\delta(w, v) = \delta \int_\omega a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij} + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij}.$$

При каждом фиксированном $\delta > 0$ задача минимизации

$$\inf_{v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)} \pi_\delta(v) \tag{37}$$

будет иметь единственное решение. Для доказательства этого утверждения достаточно проверить коэрцитивность функционала π_δ на пространстве $\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 3. Существует постоянная $c_2 > 0$, такая что

$$B(v, v) \geq c_2 \|v\|_{\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)}^2 \text{ для всех } v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0). \quad (38)$$

Доказательство. Доказательство проведём от противного. Предположим, что неравенство (38) не верно. В этом случае существует последовательность $v^k \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)$, такая, что при $k \rightarrow \infty$

$$\|v^k\|_{\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)} = 1, \quad B(v^k, v^k) \rightarrow 0. \quad (39)$$

Выбирая подпоследовательность, будем считать, что при $k \rightarrow \infty$

$$v^k \rightarrow v \text{ слабо в } \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0), \text{ сильно в } H^{1,\gamma}(\Omega_0).$$

Кроме того

$$0 = \liminf B(v^k, v^k) \geq B(v, v) \geq 0.$$

Следовательно,

$$B(v, v) = 0.$$

Повторяя рассуждения из доказательства Предложения 2, для предельной функции v имеем

$$v(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_0; \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Однако $v(y^i) = 0, i = 0, 1, 2$, значит $v \equiv 0$ в Ω_0 . Как и при доказательстве Предложения 2, можно доказать, что

$$v^k \rightarrow v \text{ сильно в } \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0).$$

Тогда из (39) следует, что $\|v\|_{\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)} = 1$, и мы получаем противоречие, т.к. $v \equiv 0$ в Ω_0 . Предложение 3 доказано. \square

Согласно Предложению 3 при каждом фиксированном $\delta > 0$ функционал π_δ будет коэрцитивным. Таким образом, решение задачи (37) существует и удовлетворяет тождеству

$$w^\delta \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0), \quad (40)$$

$$B^\delta(w^\delta, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0). \quad (41)$$

Дифференциальная формулировка задачи (40)-(41) имеет следующий вид: найти функции $w^\delta, M = \{M_{ij}\}$ определённые в Ω_0 и Ω_γ^0 соответственно, а также функции $l_i^\delta \in R(\gamma_i)$, такие что

$$\nabla \nabla M + f = 0 \text{ в } \Omega_\gamma^0, \quad (42)$$

$$M + A^\delta \nabla \nabla w^\delta = 0 \text{ в } \Omega_\gamma^0, \quad (43)$$

$$w^\delta = l_i^\delta, \quad [w_p^\delta] = [M^p] = 0 \text{ на } \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (44)$$

$$M^n = T^n = 0 \text{ на } \Gamma; \quad M^\nu = T^\nu = 0 \text{ на } G^\pm \setminus (x^0 \cup x^1), \quad (45)$$

$$\int_{\gamma} g v - \int_{\gamma} [T^p] v = 0 \text{ для всех } v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0), \quad (46)$$

$$w^\delta(y^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (47)$$

Здесь тензор модулей упругости A^δ имеет вид

$$A^\delta = \begin{cases} A & \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega} \\ \delta A & \text{в } \omega. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Формулировки (40)–(41) и (42)–(47) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство этого утверждения приводить не будем, так как соответствующие рассуждения близки к тем, которые использовались при доказательстве Теоремы 2.

Теперь предположим, что внешние нагрузки удовлетворяют условию

$$f \equiv 0 \text{ в } \omega. \quad (48)$$

Цель нижеследующих рассуждений — дать обоснование возможности предельного перехода в задаче (40)–(41) при $\delta \rightarrow 0$. Предельная задача при этом будет описывать равновесие уругой пластины, закреплённой в трёх точках и содержащей полость $\omega \setminus \bar{\gamma}$. Для этого на первом этапе получим априорные оценки решения. Из (40)–(41) следует

$$\delta \int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl}^{\delta} w_{,ij}^{\delta} + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl}^{\delta} w_{,ij}^{\delta} - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f w^{\delta} - \int_{\gamma} g w^{\delta} = 0. \quad (49)$$

Определим для дальнейшего пространство функций W , заданных на $(\Omega \setminus \bar{\omega}) \cup \gamma$,

$$W = \{v \mid v|_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \in H^2(\Omega \setminus \bar{\omega}), v|_{\gamma_k} \in R(\gamma_k), v(y^i) = 0, i = 0, 1, 2; k = 1, 2\}$$

с нормой

$$\|v\|_W^2 = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (v^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla \nabla v|^2).$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. *Существует постоянная $c > 0$, такая что*

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} v_{,kl} v_{,ij} \geq c \|v\|_W^2 \text{ для всех } v \in W.$$

Доказательство этого утверждения приводить здесь не будем, так как оно проще, чем доказательство Предложения 2.

Для получения априорных оценок в задаче (40)–(41) нам понадобится ещё одно утверждение.

Предложение 5. *Существует постоянная $c_1 > 0$, такая что*

$$|a_i| \leq c_1 \|v\|_W \text{ для всех } v \in W, \quad i = 0, 1, \quad (50)$$

где $v|_{\gamma_1}(x) = a_0 + a_1 x_1$, $x = (x_1, x_2)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1$.

Доказательство. В силу теорем вложения для $v \in W$ имеем

$$v|_{\tilde{\gamma}_1} \in H^1(\tilde{\gamma}_1), \quad \tilde{\gamma}_1 = (0, 1) \times \{0\},$$

причём

$$\|v|_{\tilde{\gamma}_1}\|_{H^1(\tilde{\gamma}_1)}^2 \leq c_2 \|v\|_W^2. \quad (51)$$

Поскольку $v(x) = a_0 + a_1 x_1$, $x = (x_1, x_2) \in \tilde{\gamma}_1$, то неравенство (51) можно переписать в виде

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} (a_0 + a_1 x_1)^2 + \int_{\tilde{\gamma}_1} a_1^2 \leq c_2 \|v\|_W^2. \quad (52)$$

Из (52) легко получаем оценки (50). Предложение 5 доказано. \square

Аналогично доказывается, что существует постоянная $c_2 > 0$, такая что

$$|b_i| \leq c_2 \|v\|_W \text{ для всех } v \in W, \quad i = 0, 1, \quad (53)$$

где $v|_{\gamma_2}(x) = b_0 + b_1 x_2$, $x = (x_1, x_2)$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1$.

Из неравенств (50), (53) в частности, вытекает существование постоянной $c > 0$, такой что

$$\|l\|_{L^2(\gamma)} \leq c \|v\|_W \text{ для всех } v \in W, \quad (54)$$

где $l = v|_{\gamma}$. Действительно, пусть

$$l_1(x) = a_0 + a_1 x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \gamma_1.$$

Тогда

$$\|l_1\|_{L^2(\gamma_1)}^2 = \int_{\gamma_1} (a_0 + a_1 x_1)^2 \leq 2 \int_{\gamma_1} (a_0^2 + a_1^2 x_1^2) \leq c \|v\|_W^2.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для $l_2 = v|_{\gamma_2}$. Таким образом, оценка (54) справедлива.

Пользуясь Предложением 4 и неравенством (54), из (49) получим равномерную по δ оценку

$$\|w^\delta\|_W \leq c. \quad (55)$$

Далее, из (49), (54) равномерно для малых δ имеем

$$\delta \int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl}^\delta w_{,ij}^\delta + \delta \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl}^\delta w_{,ij}^\delta \leq c. \quad (56)$$

Учитывая неравенство вида (38), из (56) следует, что равномерно по $0 < \delta \leq \delta_0$ справедлива оценка

$$\|\sqrt{\delta} w^\delta\|_{\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq c. \quad (57)$$

В силу (55), (57) можно считать, что при $\delta \rightarrow 0$

$$w^\delta \rightarrow w \text{ слабо в } W, \quad (58)$$

$$\sqrt{\delta} w^\delta \rightarrow \tilde{w} \text{ слабо в } \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0). \quad (59)$$

Сходимость (58), (59) позволяет перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в тождестве (см. (40), (41), (48))

$$w^\delta \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0),$$

$$\delta \int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl}^\delta v_{,ij} + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl}^\delta v_{,ij} - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0).$$

В пределе получим

$$w \in W, \quad (60)$$

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij} - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in W. \quad (61)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 6. При выполнении условия (48) решения задач (40)–(41) сходятся в смысле (58)–(59) к решению задачи (60)–(61) при $\delta \rightarrow 0$.

Приведём дифференциальную формулировку задачи (60)–(61): требуется найти функции $w, M = \{M_{ij}\}$ определённые на $(\Omega \setminus \bar{\omega}) \cup \gamma$ и $\Omega_\gamma^0 \setminus \bar{\omega}$ соответственно, а также функции $l_i^0 \in R(\gamma_i)$, такие что

$$\nabla \nabla M + f = 0 \text{ в } \Omega_\gamma^0 \setminus \bar{\omega}, \quad (62)$$

$$M + A \nabla \nabla w = 0 \text{ в } \Omega_\gamma^0 \setminus \bar{\omega}, \quad (63)$$

$$w = l_i^0 \text{ на } \gamma_i, \quad i = 1, 2; \quad [w_p] = [M^p] = 0 \text{ на } \gamma \cap (\Omega \setminus \bar{\omega}), \quad (64)$$

$$M^n = T^n = 0 \text{ на } \Gamma; \quad M^\nu = T^\nu = 0 \text{ на } G^+ \setminus (x^0 \cup x^1), \quad (65)$$

$$\int_{\gamma_i} gl - \int_{\gamma_i \cap (\Omega \setminus \bar{\omega})} [T^p]l = 0 \text{ для всех } l \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad (66)$$

$$w(y^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (67)$$

Задача (62)–(67) описывает равновесие упругой пластины $\Omega_\gamma^0 \setminus \bar{\omega}$ с тонкими жёсткими включениями γ_i и полостью $\omega \setminus \bar{\gamma}$.

Формулировки (60)–(61) и (62)–(67) эквивалентны на классе достаточно гладких решений. Доказательство этого утверждения приводить здесь не будем, так как оно аналогично доказательству Теоремы 2.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования РФ (разд. 1 и 2) и при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 11.03.2025 № 075-02-2025-1792 (разд. 3). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellieud M., Bouchitte G. Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers // Asymptotic Anal. 2002. V. 32. P. 153–183; DOI: 10.3233/ASY-2002-531
2. El Jarroudi M. Homogenization of an elastic material reinforced with thin rigid von Karman ribbons // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24, N 7. P. 1965–1991; DOI: 10.1177/1081286518810757
3. Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G. Multi-materials with strong interface: Variational modelings // Asymptotic Analysis. 2009. V. 61, N 1. P. 1–19; DOI: 10.3233/ASY-2008-0903
4. Rudoy E. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions // Technologies. 2020. V. 8, N 4. Article number 59; DOI: 10.3390/technologies8040059
5. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion // Sib. Electron. Math. Reports. 2022. V. 19, N 2. P. 935–948; DOI: 0.33048/semi.2022.19.078
6. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material // Phil. Trans. R. Soc. A. 2022. V. 380. 20210354; DOI: 10.1098/rsta.2021.0354
7. Gaudiello A, Sili A. Limit models for thin heterogeneous structures with high contrast // J. Diff. Equat. 2021. V. 302. P. 37–63; DOI: 10.1016/j.jde.2021.08.032

8. *De Maio U., Gaudiello A., Sili A.* An uncoupled limit model for a high-contrast problem in a thin multi-structure // *Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni*. 2022. V. 33, N 1. P. 39–64; DOI: 10.4171/RLM/963
9. *Caillerie D., Nedelec J.C.* The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1980. V. 2. P.251–270; DOI: 10.1002/mma.1670020302
10. *Itou H., Kovtunenکو V.A., Rajagopal K.R.* Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress // *Internat. J. Engrg. Sci.* 2019. V. 136. 17-25; DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.12.005
11. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
12. *Khludnev A.M.* Asymptotics of solutions for two elastic plates with thin junction // *Sib. Electron. Math. Reports*. 2022. V. 19, N 2. P. 484–501; DOI: 10.33048/semi.2022.19.041
13. *Khludnev A.M.* On the crossing bridge between two Kirchhoff–Love plates// *Axioms*. 2023. V. 12, N 2. 120; DOI: 10.3390/axioms12020120
14. *Shcherbakov V.V.* Shape derivatives of energy and regularity of minimizers for shallow elastic shells with cohesive cracks // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2022. V. 65, 103505; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2021.103505
15. *Shcherbakov V.V.* The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // *Z. Angew. Math. Mech.* 2016. V. 96. P. 1306–1317; DOI: 10.1002/zamm.201500145
16. *Shcherbakov V.V.* Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions // *Z. Angew. Math. Phys.* 2017. 68:26; DOI: 10.1007/s00033-017-0769-9
17. *Kovtunenکو V.A., Kunisch K.* Shape derivative for penalty-constrained nonsmooth-nonconvex optimization: cohesive crack problem // *J. Opt. Theory Appl.* 2022. V. 194. P. 597–635; DOI: 10.1007/s10957-022-02041-y
18. *Pyatkina E.V.* Optimal control problem for two-layer elastic body with crack // *J. Math. Sci.* 2018. V. 230, N 1. P. 159–166; DOI: 10.1007/s10958-018-3735-y
19. *Lazarev N., Itou H.* Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff-Love plates with a crack // *Math. Mech. Solids*. 2019. V. 24. P. 3743–3752; DOI: 10.1177/1081286519850608
20. *Kovtunenکو V.A., Leugering G.* A shape-topological control problem for nonlinear crack – defect interaction: the anti-plane variational model // *SIAM J. Control Optim.* 2016. V. 54. P. 1329–1351; DOI: 10.1137/151003209
21. *Saccomandi G., Beatty M.F.* Universal relations for fiber-reinforced elastic materials // *Math. Mech. Solids*. 2002. V. 7. P. 99–110; DOI: 10.1177/108128650200700
22. *Rudoy E.M.* On numerical solving a rigid inclusions in 2D elasticity // *Z. Angew. Math. Phys.* 2017. V. 68, N 1. 19; DOI:10.1007/s00033-016-0764-6
23. *Kozlov V.A., Mazya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic analysis of fields in a multi-structure. Oxford Math. Monogr. N.-Y.: Oxford University Press, 1999.
24. *Panasenko G.* Multi-Scale Modelling for Structures and Composites. N.-Y.: Springer, 2005.

UDC 539.3:517.9

**ON THE EQUILIBRIUM OF AN ELASTIC PLATE WITH INCLUSION
AND RIGID BRIDGES: NON-COERCIVE PROBLEMS**© 2025 A. M. Khludnev^{1,2a}, N. P. Lazarev^{3b}¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Acad. Lavrentyev prosp., 15, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Novosibirsk State University,**Pirogov st. 1, Novosibirsk 630090, Russia,*³*Ammosov North-Eastern Federal University,
Belinsky St., 58, Yakutsk 677000, Russia*E-mails: ^akhlud@hydro.nsc.ru, ^bnyurgunlazarev@yandex.ru

Received 14.05.2025, revised 06.01.2026, accepted 20.01.2026

Abstract. The paper investigates boundary value problems on the equilibrium of an elastic plate containing a volume elastic inclusion and thin rigid bridges. The inclusion peels off the plate, forming an interfacial crack. The boundary conditions considered in this paper on the outer boundary of the plate and on the boundary of the elastic inclusion correspond to non-coercive boundary value problems. Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to the problems under consideration are found and the existence of solutions is proved. A justification is given for the possibility of a passage to limit in terms of the inclusion stiffness parameter when the parameter tends to infinity and to zero. The analysis of limit problems describing the equilibrium of the plate with a volume rigid inclusion and with a cavity is carried out. Both variational and differential formulations of the problems under consideration are analyzed.

Keywords: elastic plate, volume inclusion, rigid bridge, non-coercive boundary value problem, existence of solutions, asymptotics of solutions.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.413

REFERENCES

1. Bellieud M., Bouchitte G. Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers. *Asymptotic Anal.*, 2002, Vol. 32, pp. 153–183; DOI: 10.3233/ASY-2002-531
2. El Jarroudi M. Homogenization of an elastic material reinforced with thin rigid von Karman ribbons. *Math. Mech. Solids*, 2018, Vol. 24, No. 7, pp. 1965–1991; DOI: 10.1177/1081286518810757
3. Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G. Multi-materials with strong interface: Variational modelings. *Asymptotic Analysis*, 2009, Vol. 61, No. 1, pp. 1–19; DOI: 10.3233/ASY-2008-0903
4. Rudoy E. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions. *Technologies*, 2020, Vol. 8, No. 4, Article number 59; DOI: 10.3390/technologies8040059
5. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2022, Vol. 19, No. 2, pp. 935–948; DOI: 10.33048/semi.2022.19.078
6. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 2022, Vol. 380, 20210354; DOI: 10.1098/rsta.2021.0354

7. Gaudiello A, Sili A. Limit models for thin heterogeneous structures with high contrast. *J. Diff. Equat.*, 2021, Vol. 302, pp. 37–63; DOI: 10.1016/j.jde.2021.08.032
8. De Maio U., Gaudiello A., Sili A. An uncoupled limit model for a high-contrast problem in a thin multi-structure. *Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni*, 2022, Vol. 33, No. 1, pp. 39–64; DOI: 10.4171/RLM/963
9. Caillerie D., Nedelec J.C. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1980, Vol. 2, pp.251–270; DOI: 10.1002/mma.1670020302
10. Itou H., Kovtunen V.A., Rajagopal K.R. Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 2019, Vol. 136, 17-25; DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.12.005
11. Khludnev A.M. Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastyakh [Problems of Elasticity Theory in Non-Smooth Domains]. Moscow: Fizmatlit, 2010.
12. Khludnev A.M. Asymptotics of solutions for two elastic plates with thin junction. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2022, Vol. 19, No. 2, pp. 484–501; DOI: 10.33048/semi.2022.19.041
13. Khludnev A.M. On the crossing bridge between two Kirchhoff–Love plates. *Axioms*, 2023, Vol. 12, No. 2, 120; DOI: 10.3390/axioms12020120
14. Shcherbakov V.V. Shape derivatives of energy and regularity of minimizers for shallow elastic shells with cohesive cracks. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2022, Vol. 65, 103505; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2021.103505
15. Shcherbakov V.V. The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2016, Vol. 96, pp. 1306–1317; DOI: 10.1002/zamm.201500145
16. Shcherbakov V.V. Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017, 68:26; DOI: 10.1007/s00033-017-0769-9
17. Kovtunen V.A., Kunisch K. Shape derivative for penalty-constrained nonsmooth-nonconvex optimization: cohesive crack problem. *J. Opt. Theory Appl.*, 2022, Vol. 194, pp. 597–635; DOI: 10.1007/s10957-022-02041-y
18. Pyatkina E.V. Optimal control problem for two-layer elastic body with crack. *J. Math. Sci.*, 2018, Vol. 230, No. 1, pp. 159–166; DOI: 10.1007/s10958-018-3735-y
19. Lazarev N., Itou H. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff-Love plates with a crack. *Math. Mech. Solids*, 2019, Vol. 24, pp. 3743–3752; DOI: 10.1177/1081286519850608
20. Kovtunen V.A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack – defect interaction: the anti-plane variational model. *SIAM J. Control Optim.*, 2016, Vol. 54, pp. 1329–1351; DOI: 10.1137/151003209
21. Saccomandi G., Beatty M.F. Universal relations for fiber-reinforced elastic materials. *Math. Mech. Solids*, 2002, Vol. 7, pp. 99–110; DOI: 10.1177/108128650200700
22. Rudoy E.M. On numerical solving a rigid inclusions in 2D elasticity. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017, Vol. 68, No. 1, 19; DOI:10.1007/s00033-016-0764-6
23. Kozlov V.A., Mazya V.G., Movchan A.B. Asymptotic Analysis of Fields in a Multi-Structure. Oxford Math. Monogr. N.-Y.: Oxford University Press, 1999.
24. Panasenko G. Multi-Scale Modelling for Structures and Composites. N.-Y.: Springer, 2005.