

УДК 519.6

## ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОБЛАСТЕЙ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ АДАМСА МЕТОДОМ BOUNDARY LOCUS

© 2025 Д. М. Шишкин<sup>1a</sup>, И. В. Киреев<sup>2b</sup>, В. Е. Зализняк<sup>1c</sup>

<sup>1</sup>*Международный институт экономики и финансов,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Покровский бульвар, 11, г. Москва 109028, Россия,*

<sup>2</sup>*Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия,*

<sup>3</sup>*Институт математики и фундаментальной информатики,  
Сибирский федеральный университет,  
просп. Свободный, 79, г. Красноярск 660041, Россия*

E-mails: <sup>a</sup>denis\_shishkin\_2015@mail.ru, <sup>b</sup>kiv@icm.krasn.ru,  
<sup>c</sup>vzalizniak@sfu-kras.ru

Поступила в редакцию 10.04.2025 г.; после доработки 22.01.2026 г.;  
принята к публикации 22.01.2026 г.

В статье предложен и реализован базирующийся на методе boundary locus алгоритм визуализации областей абсолютной устойчивости многошаговых методов Адамса 2–15 порядков. Полученная информация необходима для выбора шага дискретизации при численном решении задачи Коши методом Адамса.

**Ключевые слова:** метод Адамса — Башфорта, метод Адамса — Мулттона, предиктор-корректор; область устойчивости; boundary locus.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.414

### ВВЕДЕНИЕ

Многие приложения приводят к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dr}{dt} = f(t, r), r(t_0) = r_0, \quad (1)$$

где  $f$  достаточно гладкая функция своих аргументов, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения задачи (1) на некотором отрезке изменения независимой переменной  $t \geq t_0$ . В ряде случаев [1, 2] значения функции  $r(t)$  необходимо вычислить с высокой точностью, для чего применяют многошаговые методы, являющиеся на сегодня стандартной вычислительной технологией решения нежёстких задач.

Общая форма многошаговых методов [3, 4] имеет следующий вид:

$$\sum_{0 \leq j \leq k} \alpha_j r_{n-j} = \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad (2)$$

здесь  $k \leq n \in \mathbb{N}$  — натуральное число;  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$  — постоянные вещественные числа, определяющие свойства точности и устойчивости схемы (2) и обязательно  $\alpha_0 \neq 0$ . Через  $r_n$  обозначено приближённое значение искомой функции  $r(t)$  в точке  $t_n = t_0 + n\tau$ , где  $\tau > 0$  — шаг интегрирования, постоянный на некоторых интервалах изменения аргумента  $t$ .

Глобальная ошибка решения задачи Коши (1) многошаговым численным методом (2), как правило, будет меньше, если расчёты осуществлять с переменным шагом. Однако для гибкого управления величиной шага интегрирования при проведении расчётов необходимо знать характеристики её области устойчивости. Для решения последней задачи, в силу её двумерности, естественно использовать методы вычислительной геометрии. Модификациям одного из них — визуализации областей абсолютной устойчивости многошаговых схем методом boundary locus [5, 6] и посвящена данная работа.

## 1. ОБЛАСТИ ДАЛКВИСТА ДЛЯ МЕТОДОВ АДАМСА

Общий вид представления многошаговых методов Адамса  $k$ -го порядка совпадает по форме с соотношением (2), в котором

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_j = 0, \quad j > 1.$$

При этом на точном решении задачи (1) равенство (2) выполняется с  $k$ -м порядком точности при  $\tau \rightarrow 0+$ . Разностные схемы такого типа были предложены во второй половине XIX века астрономом Адамсом (John C. Adams). Вычисления, в основе которых лежат эти методы, позволили обнаружить в 1846 году неизвестную тогда планету Нептун, которая стала первой планетой, открытой благодаря математическим расчётам. Методы Адамса оказались настолько успешными, что они остаются стандартной вычислительной технологией решения нежёстких задач и по сей день [1, 3].

Если  $\beta_0 = 0$ , то из соотношения (2) непосредственно выражается  $r_n$  через ранее вычисленные узловые значения  $r_{n-1}, \dots, r_{n-k}$ . Таковы, например, общеизвестные явные методы Адамса — Башфорта, общий вид которых можно представить следующим образом:

$$r_{n+1} - r_n = \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k. \quad (3)$$

Эта вычислительная схема была разработана Адамсом в 1855 г. по просьбе известного английского специалиста по внешней баллистике Башфорта [7].

В случае  $\beta_0 \neq 0$  для вычисления  $r_n$  из (2) необходимо решить уравнение, как правило нелинейное, и мы приходим к неявным схемам решения задачи Коши (1), известные как методы Адамса — Мулттона:

$$r_n - r_{n-1} = \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k. \quad (4)$$

Коэффициенты разностных схем (3, 4) являются рациональными числами, числители и знаменатели которых представлены в [2] в виде таблиц для  $k = 2, \dots, 16$ . Заметим, что формулу (3) часто приписывают Адамсу и Башфорту, а (4) — Адамсу и Мултону (1926 г.). Однако в [3] утверждается, что в действительности обе формулы принадлежат Адамсу.

Оценка границ области устойчивости разностного метода решения задачи Коши связана с тестовым уравнением Далквиста [8]

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r, \quad (5)$$

здесь  $\lambda \in \mathbb{C}$  — поле комплексных чисел. Для уравнения (5) соотношение (2) принимает вид

$$\sum_{0 \leq j \leq k} \alpha_j r_{n-j} = \zeta \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j r_{n-j}, \quad \zeta = \tau \lambda \in \mathbb{C}, \quad n = k, k+1, k+2, \dots \quad (6)$$

Общее решение последнего разностного уравнения выражается [4, 9] через корни характеристического полинома

$$p_k(z) = \sum_{0 \leq j \leq k} \alpha_j z^{k-j} - \zeta \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j z^{k-j}, \quad (7)$$

коэффициенты которого зависят от комплексного параметра  $\zeta$  из (6). Напомним [3], что область абсолютной устойчивости схемы (2) это множество значений  $\zeta \in \mathbb{C}$ , для которых все корни характеристического многочлена (7) лежат внутри единичного круга.

Из теории многошаговых методов [10] следует, что граница такой области содержит комплексное число ноль. Поэтому особый интерес для методов Адамса вызывают связанные открытые подмножества  $\mathfrak{D}_k$  области абсолютной устойчивости, граничащие с точкой 0 комплексной плоскости переменной  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Отдавая должное автору работы [8] далее множество  $\mathfrak{D}_k$  будем называть областью Далквиста [3, 11] схемы (2). Для визуализации  $\mathfrak{D}_k$  воспользуемся методом *boundary locus* [5, 6].

А именно, пусть

$$z_j = \rho_j e^{i\varphi_j} \in \mathbb{C}, \quad \rho_j = |z_j|, \quad i^2 = -1, \quad (8)$$

какой-либо корень полинома  $p_k(z)$ , определённого в (7). Тогда если  $\zeta \in \mathfrak{D}_k$ , то обязательно  $|z_j(\zeta)| = \rho_j < 1$ . Введём многочлены

$$a_k(z) = \sum_{0 \leq j \leq k} \alpha_j z^{k-j}, \quad b_k(z) = \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j z^{k-j}, \quad p_k(z) = a_k(z) - \zeta b_k(z), \quad (9)$$

откуда  $p_k(z_j(\zeta)) = 0$  только тогда, когда  $\zeta = a_k(z_j)/b_k(z_j)$ .

Рассмотрим множество кривых  $\{\mathcal{L}_k(\rho)\}$  комплексной  $\zeta$ -плоскости, зависящее от положительного параметра  $\rho$  (модуль комплексного числа  $z$ ):

$$\mathcal{L}_k(\rho) = \left\{ \zeta = \frac{a_k(\rho e^{i\varphi})}{b_k(\rho e^{i\varphi})} \mid \rho > 0, \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \subset \mathbb{C}. \quad (10)$$

Очевидно, что связная область  $\mathfrak{D}_k$  является подмножеством множества  $\mathfrak{D}_k^{\mathcal{L}}$ , ограниченного замкнутой линией

$$\mathcal{L}_k(1) = \left\{ \zeta = \frac{a_k(e^{i\varphi})}{b_k(e^{i\varphi})}, \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \subset \mathbb{C}.$$

Так как область  $\mathfrak{D}_k$  не должна иметь общих точек с любой из кривых  $\mathcal{L}_k(\rho)$  при  $\rho > 1$ , то

$$\mathfrak{D}_k = \mathfrak{D}_k^{\mathcal{L}} \setminus \bigcup_{\rho > 1} \{\mathfrak{D}_k^{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_k(\rho)\}, \quad (11)$$

и мы приходим к следующему алгоритму визуализации области Далквиста для схемы (2):

- отрисовываем на некотором фоне линию  $\mathcal{L}_k(1)$  каким-либо, отличным от фона, цветом;
- на том же поле с некоторым шагом по параметру  $\rho > 1$  цветом фона прорисовываем линии  $\mathcal{L}_k(\rho)$ , тем самым удаляя «лишнюю» часть области  $\mathfrak{D}_k^{\mathcal{L}}$ .

Для многошаговых схем Адамса соотношения, определяющие область Далквиста, упрощаются, поскольку  $a_k(z) = z^n - z^{n-1}$  и потому для методов Адамса — Башфорта имеем

$$\mathcal{L}_k(\rho) = \left\{ \zeta = \frac{\rho e^{i\varphi} - 1}{\beta_0 + \beta_1(\rho e^{i\varphi})^{-1} + \dots + \beta_{k-1}(\rho e^{i\varphi})^{-(k-1)} + \beta_k(\rho e^{i\varphi})^{-k}} \mid \rho > 0, \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \subset \mathbb{C},$$

$$r_{n+1} - r_n = \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k.$$

Для методов Адамса — Мултона аналогично получаем:

$$\mathcal{L}_k(\rho) = \left\{ \zeta = \frac{1 - (\rho e^{i\varphi})^{-1}}{\beta_0 + \beta_1(\rho e^{i\varphi})^{-1} + \dots + \beta_{k-1}(\rho e^{i\varphi})^{-(k-1)} + \beta_k(\rho e^{i\varphi})^{-k}} \mid \rho > 0, \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \subset \mathbb{C},$$

$$r_n - r_{n-1} = \tau \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k.$$

Рассмотрим теперь алгоритм предиктор-корректор численного решения задачи Коши (1), базирующийся на методах Адамса — Башфорта (предиктор)

$$r_{n+1}^p = r_n + \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k, \quad (12)$$

и Адамса — Мултона (корректор)

$$r_{n+1} = r_n + \tau \left[ \beta_0^c f(t_{n+1}, r_{n+1}^p) + \sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j^c f(t_{n+1-j}, r_{n+1-j}) \right] \approx r(t_{n+1}), \quad \beta_0^c \neq 0; \quad (13)$$

порядков  $k$  и  $m$  соответственно. Применяя схему (12)–(13) к тестовому уравнению Далквиста, для  $n \geq \max(k, m-1)$  получаем

$$r_{n+1}^p = r_n + \tau \lambda \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p r_{n-j}, \quad r_{n+1} = r_n + \tau \lambda \left( \beta_0^c r_{n+1}^p + \sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j^c r_{n+1-j} \right).$$

Вводя, как и ранее в (6),  $\zeta = \tau \lambda \in \mathbb{C}$  приходим к разностному соотношению

$$r_{n+1} = \left( \beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p r_{n-j} \right) \zeta^2 + \left( \beta_0^c r_n + \sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j^c r_{n+1-j} \right) \zeta + r_n;$$

характеристический полином которого равен

$$p_{k,m}(z) = z^{\max(k,m-1)} \left\{ \left[ \beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p \left( \frac{1}{z} \right)^j \right] \zeta^2 + \left[ \beta_0^c + \beta_1^c + z \sum_{2 \leq j \leq m} \beta_j^c \left( \frac{1}{z} \right)^j \right] \zeta + 1 - z \right\}$$

или

$$p_{k,m}(z) = z^{\max(k,m-1)} [b_{k,m}(z)\zeta^2 - c_{k,m}(z)\zeta - a_{k,m}(z)]; \quad (14)$$

где

$$a_{k,m}(z) = z - 1, \quad b_{k,m}(z) = \beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p z^{-j}, \quad c_{k,m}(z) = (z-1)\beta_0^c - z \sum_{0 \leq j \leq m} \beta_j^c \left( \frac{1}{z} \right)^j,$$

$$a_{k,m}(1) = 0, \quad b_{k,m}(1) = \beta_0^c, \quad c_{k,m}(1) = -1.$$

Пусть  $z_j(\zeta) = \rho_j e^{i\varphi_j}$  — какой-либо корень характеристического полинома (14),  $0 < j \leq \max(k, m-1)$ . Тогда если  $\zeta \in \mathfrak{D}_{k,m}$  — область Далквиста схемы (12)–(13), то обязательно  $|z_j(\zeta)| = \rho_j < 1$  для всех  $j$ . Аналогично вышеизложенному, рассмотрим множество кривых  $\{\mathcal{L}_{k,m}(\rho)\}$  комплексной  $\zeta$ -плоскости, зависящих от положительного параметра  $\rho$ :

$$\mathcal{L}_{k,m}(\rho) = \{ \zeta(\varphi) \mid b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})\zeta^2 - c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})\zeta - a_{k,m}(\rho e^{i\varphi}) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], \rho > 0 \} \subset \mathbb{C}.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{L}_{k,m}(\rho) = \mathcal{L}_{k,m}^+(\rho) \cup \mathcal{L}_{k,m}^-(\rho), \quad \rho > 0; \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,m}^+(\rho) &= \left\{ \zeta(\varphi) = \frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi}) + d_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{2b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}; \\ \mathcal{L}_{k,m}^-(\rho) &= \left\{ \zeta(\varphi) = \frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi}) - d_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{2b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}; \\ a_{k,m}(z) &= z - 1, \quad b_{k,m}(z) = \beta_0^c \sum_{j=0}^k \beta_j^p \left(\frac{1}{z}\right)^j, \quad c_{k,m}(z) = (z - 1)\beta_0^c - z \sum_{j=0}^m \beta_j^c \left(\frac{1}{z}\right)^j, \\ d_{k,m}(\rho e^{i\varphi}) &= \sqrt{c_{k,m}^2(\rho e^{i\varphi}) + 4b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}, \\ \frac{d_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{2b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} &= \sqrt{\left[\frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{2b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}\right]^2 + \frac{a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}} = \frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} \sqrt{0.25 + \frac{a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{c_{k,m}^2(\rho e^{i\varphi})}}, \end{aligned}$$

здесь  $\sqrt{\phantom{x}}$  – арифметическая ветвь квадратного корня. Аналог равенства (11) имеет место и в рассматриваемом случае, а потому для визуализации области  $\mathfrak{D}_{k,m}$  схемы предиктор-корректор (12)–(13) можно воспользоваться описанным ранее алгоритмом:

$$\mathfrak{D}_{k,m} = \mathfrak{D}_{k,m}^{\mathcal{L}} \setminus \bigcup_{\rho > 1} \{ \mathfrak{D}_{k,m}^{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_{k,m}(\rho) \}.$$

Соотношения, альтернативные формулам (15), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k,m}(\rho) &= \mathcal{L}_{k,m}^+(\rho) \cup \mathcal{L}_{k,m}^-(\rho), \quad \rho > 0; \\ \mathcal{L}_{k,m}^{\pm}(\rho) &= \left\{ \zeta(\varphi) = \frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} [0.5 \pm \sqrt{f_{k,m}}], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}, \\ a_{k,m}(z) &= z - 1, \quad b_{k,m}(z) = \beta_0^c \sum_{j=0}^k \beta_j^p z^{-j}, \\ c_{k,m}(z) &= -\beta_0^c - \sum_{j=1}^m \beta_j^c \left(\frac{1}{z}\right)^{j-1}, \\ f_{k,m} &= 0.25 + \frac{a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{c_{k,m}^2(\rho e^{i\varphi})} = 0.25 + \frac{a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} \left[ \frac{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} \right]^2 \end{aligned}$$

удобном для численной реализации.

Однако корректно выделить стандартными программными средствами языка C++ арифметическую ветвь квадратного корня  $\sqrt{f_{k,m}}$  не удаётся. Поэтому вернёмся к общему уравнению (15) кривых  $\mathcal{L}_{k,m}(\rho)$ , которое представим в виде квадратного относительно  $\zeta$  уравнения

$$b_\rho(\varphi)\zeta^2 - c_\rho(\varphi)\zeta - a_\rho(\varphi) = 0,$$

где

$$a_\rho(\varphi) = \rho e^{i\varphi} - 1, \quad b_\rho(\varphi) = \beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p (\rho e^{i\varphi})^{-j}, \quad c_\rho(\varphi) = (\rho e^{i\varphi} - 1)\beta_0^c - \rho e^{i\varphi} \sum_{0 \leq j \leq m} \beta_j^c (\rho e^{i\varphi})^{-j}.$$

Решение  $\zeta = \zeta_\rho(\varphi)$  последнего уравнения является дифференцируемой функцией  $\varphi$ , производная которой имеет вид

$$\zeta'(\varphi) = \frac{d\zeta}{d\varphi} = \frac{b'_\rho(\varphi)\zeta^2 - c'_\rho(\varphi)\zeta - a'_\rho(\varphi)}{c_\rho(\varphi) - 2b_\rho(\varphi)\zeta},$$

здесь

$$\begin{aligned} a'_\rho(\varphi) &= i\rho e^{i\varphi}, & b'_\rho(\varphi) &= -i\beta_0^c \sum_{1 \leq j \leq k} j\beta_j^p (\rho e^{i\varphi})^{-j}, \\ c'_\rho(\varphi) &= i\rho e^{i\varphi} \beta_0^c - i\rho e^{i\varphi} \sum_{0 \leq j \leq m} \beta_j^c (\rho e^{i\varphi})^{-j} + i\rho e^{i\varphi} \sum_{1 \leq j \leq m} j\beta_j^c (\rho e^{i\varphi})^{-j}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к комплексной переменной  $z = \rho e^{i\varphi}$ , получаем

$$\begin{aligned} a'_\rho(\varphi) &= iz, & b'_\rho(\varphi) &= -\frac{i\beta_0^c}{z} \sum_{1 \leq j \leq k} j\beta_j^p \left(\frac{1}{z}\right)^{j-1}, \\ c'_\rho(\varphi) &= \frac{i}{z} \sum_{2 \leq j \leq m} (j-1)\beta_j^c \left(\frac{1}{z}\right)^{j-2}. \end{aligned}$$

Теперь, начиная со значения  $\varphi = 0$ , при котором

$$\begin{aligned} b_\rho(0)\zeta^2 - c_\rho(0)\zeta - a_\rho(0) &= 0, \\ \zeta_\rho^\pm(0) &= \frac{c_\rho(0)}{b_\rho(0)} \left[ 0.5 \pm \sqrt{f_\rho(0)} \right], & a_\rho(0) &= \rho - 1, & b_\rho(0) &= \beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p \frac{1}{\rho^j}, \\ c_\rho(0) &= (\rho - 1)\beta_0^c - \rho e^{i\varphi} \sum_{0 \leq j \leq m} \beta_j^c \frac{1}{\rho^j}, & f_\rho(0) &= 0.25 + \frac{a_\rho(0)}{b_\rho(0)} \left[ \frac{b_\rho(0)}{c_\rho(0)} \right]^2 \end{aligned}$$

можем «предсказать» следующую точку выбранной ветви квадратного корня, основываясь на разложении Тейлора для функции  $\zeta(\varphi)$  в последней вычисленной точке. Отправляясь от равномерного по  $\varphi \in [0, 2\pi]$  шага  $\Delta_\varphi$ , с целью исключить «перескакивание» с одной ветви  $\sqrt{\phantom{x}}$  на другую, для каждого нового узла  $\varphi \rightarrow \varphi + \Delta_\varphi$  при вычислении  $\zeta(\varphi + \Delta_\varphi)$  будем выбирать тот знак « $\pm$ » у  $\sqrt{f_{k,m}}$ , для которого разность

$$\Delta_\zeta = \zeta(\varphi + h_\varphi) - [\zeta(\varphi) + \zeta'(\varphi)\Delta_\varphi]$$

минимальна по модулю. Такой подход позволил визуализировать границы областей Далквиста и для схем предиктор-корректор в обсуждаемом ниже случае  $k = m = 2, \dots, 15$ . Подобные схемы часто применяются на практике и детально описаны в монографии [2].

## 2. АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ ДАЛКВИСТА ДЛЯ МЕТОДОВ АДАМСА

Рассмотренные выше алгоритмы визуализации были реализованы на языке C++ с использованием класса «complex» и скомпилированы с помощью GCC 4.2.2, x64. Все вычисления проводились с точностью «double», а в режиме накопления — «long double». Ниже, для краткости, области абсолютной устойчивости для методов Адамса — Башфорта, Адамса — Мулттона и Адамса — Башфорта — Мулттона порядка  $k = 2, \dots, 15$  обозначены через  $\mathfrak{D}_k^B$ ,  $\mathfrak{D}_k^M$  и  $\mathfrak{D}_k^{BM}$  соответственно. В силу симметрии множеств  $\mathfrak{D}_k$  относительно оси абсцисс, достаточно отрисовывать только «верхнюю» часть областей Далквиста рассмотренных многошаговых методов.

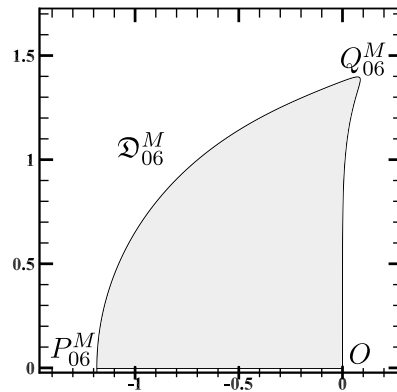


Рис. 1. «Верхняя» часть области  $\mathfrak{D}_{06}^M$

Границы всех  $\mathfrak{D}_k$  были построены в интерактивном режиме с помощью линейной интерполяции на последовательности точек  $\zeta(\varphi)$  комплексной плоскости с одинаковыми шагами  $\Delta_\varphi = \pi/1024$  по параметру  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , введённому в (8). Некоторые из областей  $\mathfrak{D}_k$  изображены на рис. 1 и 2, где горизонтальная ось соответствует действительной, а вертикальная — мнимой частям комплексного числа  $\zeta = \tau\lambda$ , ассоциируемого с тестовым уравнением (5).

Ограниченность объёма данной статьи не позволяет привести здесь изображения всех полученных авторами областей абсолютной устойчивости для методов Адамса. Но вычисления показали, что при заданном  $k > 2$  множество  $\mathfrak{D}_k$  качественно неплохо характеризуются тремя узловыми точками  $O, P_k$  и  $Q_k$ ;  $O$  — начало комплексной плоскости  $\zeta$ ;  $P_k$  — самая «левая», а  $Q_k$  — «наивысшая правая» точки «верхней» части  $\mathfrak{D}_k$ . Этот факт иллюстрирует рис. 1, на котором изображена «верхняя» половина множества  $\mathfrak{D}_{06}^M$ . Поскольку координаты  $O$  и мнимая часть комплексного числа  $P_k$  — нулевые, то три вещественных числа  $\text{Re}(P_k), \text{Re}(Q_k)$  и  $\text{Im}(Q_k)$  удовлетворительно описывают  $\mathfrak{D}_k$ .

В табл. 1 и 2 приведены «снятые» с графических образов границ областей  $\mathfrak{D}_k$  значения комплексных чисел  $P_k^B, Q_k^B, P_k^M, Q_k^M, P_k^{BM}, Q_k^{BM}$ , относительная погрешность каждой из приведённых величин по абсолютной величине не превосходит 0.001.

Таблица 1

Узловые точки областей  $\mathfrak{D}_k^B$  и  $\mathfrak{D}_k^M, k = 2, \dots, 15$

$k$	$P_k^B$	$Q_k^B$	$k$	$P_k^M$	$Q_k^M$
02	-1.0	$-0.34 + i \cdot 0.805$	02	$-\infty$	$i \cdot \infty$
03	-0.545	$0.0974 + i \cdot 0.756$	03	-6.0	$-2.83 + i \cdot 3.19$
04	-0.3	$3.08 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.432$	04	-3.0	$-1.16 + i \cdot 1.88$
05	-0.163	$-3.7 \cdot 10^{-5} + i \cdot 0.224$	05	-1.0	$-1.16 + i \cdot 1.87$
06	$-8.77 \cdot 10^{-2}$	$-2.4 \cdot 10^{-8} + i \cdot 0.114$	06	-1.18	$8.5 \cdot 10^{-2} + i \cdot 1.39$
07	$-4.68 \cdot 10^{-2}$	$6.52 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.0596$	07	-0.769	$9.65 \cdot 10^{-3} + i \cdot 1.07$
08	$-2.44 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 2.93 \cdot 10^{-2}$	08	-0.493	$-3.2 \cdot 10^{-4} + i \cdot 0.697$
09	$-1.27 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 1.5 \cdot 10^{-2}$	09	-0.31	$3.3 \cdot 10^{-7} + i \cdot 0.427$
10	$-6.57 \cdot 10^{-3}$	$i \cdot 7.59 \cdot 10^{-3}$	10	-0.191	$1.35 \cdot 10^{-9} + i \cdot 0.252$
11	$-3.38 \cdot 10^{-3}$	$i \cdot 3.84 \cdot 10^{-3}$	11	-0.115	$i \cdot 0.146$
12	$-1.73 \cdot 10^{-3}$	$i \cdot 1.95 \cdot 10^{-3}$	12	$-6.76 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 8.3 \cdot 10^{-2}$
13	$-8.87 \cdot 10^{-4}$	$i \cdot 9.85 \cdot 10^{-4}$	13	$-3.92 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 4.68 \cdot 10^{-2}$
14	$-4.52 \cdot 10^{-4}$	$i \cdot 4.98 \cdot 10^{-4}$	14	$-2.24 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 2.61 \cdot 10^{-2}$
15	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$i \cdot 2.52 \cdot 10^{-4}$	15	$-1.26 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 1.45 \cdot 10^{-2}$

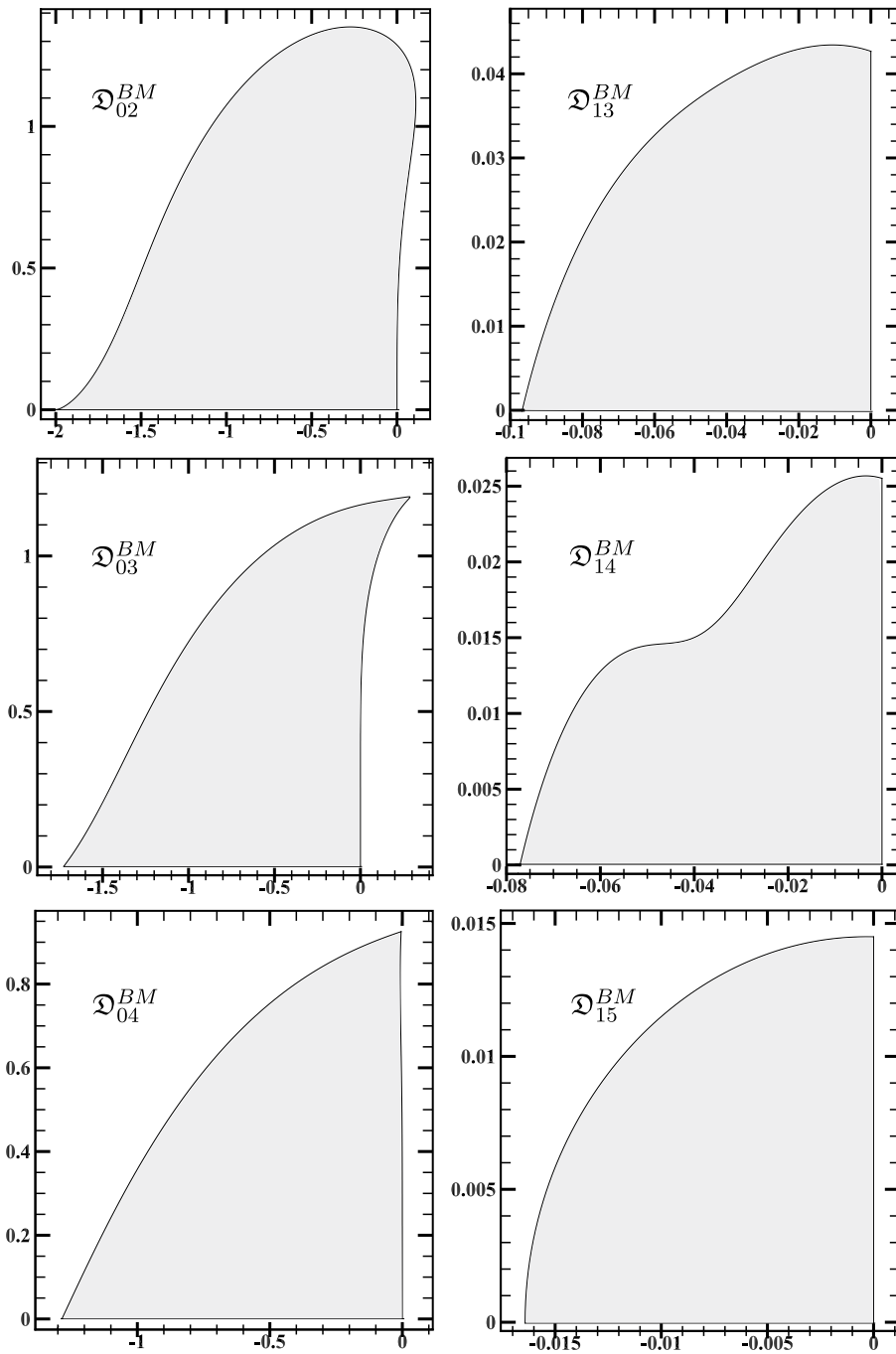


Рис. 2. Характерные типы областей  $\mathcal{D}_k^{BM}$

На практике наиболее часто применяются схемы предиктор-корректор [2] в частном случае  $k = m$ . Некоторые характерные области абсолютной устойчивости таких численных методов изображены на рис. 2. Отметим, что отсутствующие на последнем рисунке изображения множеств  $\mathcal{D}_{05}^{BM}$  и  $\mathcal{D}_{06}^{BM}$  визуально схожи с  $\mathcal{D}_{04}^{BM}$ , тогда как границы  $\mathcal{D}_{07}^{BM}$  и  $\mathcal{D}_{03}^{BM}$  внешне мало отличаются друг от друга. Очертание каждой из областей  $\mathcal{D}_{10}^{BM}$ ,  $\mathcal{D}_{11}^{BM}$  и  $\mathcal{D}_{12}^{BM}$  качественно близко к  $\mathcal{D}_{13}^{BM}$ , а  $\mathcal{D}_{15}^{BM}$  имеет много общего как с  $\mathcal{D}_{08}^{BM}$  так и с  $\mathcal{D}_{09}^{BM}$ . Числовые характеристики всех упомянутых областей приведены в табл. 2.

Таблица 2

Узловые точки областей  $\mathfrak{D}_k^{BM}$ ,  $k = 2, \dots, 15$ 

$k$	$P_k^{BM}$	$Q_k^{BM}$	$k$	$P_k^{BM}$	$Q_k^{BM}$
02	-2.0	$-0.11 + i \cdot 1.08$	09	-0.284	$i \cdot 0.203$
03	-1.73	$0.288 + i \cdot 1.19$	10	-0.213	$i \cdot 0.144$
04	-1.28	$-4.61 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.925$	11	-0.162	$i \cdot 0.0999$
05	-0.947	$-7.98 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.704$	12	-0.124	$i \cdot 0.067$
06	-0.698	$1.69 \cdot 10^{-4} + i \cdot 0.527$	13	-0.0967	$i \cdot 0.0427$
07	-0.512	$1.2 \cdot 10^{-2} + i \cdot 0.389$	14	-0.0771	$i \cdot 0.0255$
08	-0.382	$i \cdot 0.282$	15	-0.0164	$i \cdot 0.0145$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Со времени своего возникновения метод «boundary locus» для построения областей абсолютной устойчивости [5] практически не претерпел серьёзных изменений. По крайней мере авторам настоящей работы не известны публикации, содержащие информацию такого сорта. В статье предложена модификация этого ставшего классическим метода, позволяющая визуализировать области Далквиста для сложных высокоточных многошаговых алгоритмов численного решения задачи Коши как явных так и неявных, а также для основанных на них вычислительных схемах предиктор-корректор.

Из анализа полученных в результате вычислений данных следует, что при одинаковых порядках точности  $k > 2$  линейные характеристики области Далквиста  $\mathfrak{D}_k^B$  на порядок меньше размеров  $\mathfrak{D}_k^M$ . Но рассмотренный выше частный случай явной схемы Адамса — Башфорта — Мултона (предиктор-корректор) при том же  $k$  имеет область устойчивости  $\mathfrak{D}_k^{BM}$ , сопоставимую по размерам с  $\mathfrak{D}_k^M$ . Это объясняет широкое применение в инженерии схем предиктор-корректор, числовые характеристики областей устойчивости которых для  $k = 2, \dots, 15$  приведены в табл. 2, а некоторых из них изображены на рис. 2.

Информация об областях абсолютной устойчивости требуется для выбора шага интегрирования при численном решении задачи Коши. Но важна и «инженерная» точка зрения [5] на область  $\mathfrak{D}_k$ : это связное множество точек комплексной плоскости  $\zeta = \tau\lambda$ , для которых убывающее по модулю решение уравнения Далквиста аппроксимируется невозрастающим решением разностного уравнения (6). Но с «инженерной» точки зрения необходимо, чтобы схема (6) обладала свойством аналогичным абсолютной устойчивости и для возрастающих по модулю решений модельного уравнения (5). Иными словами у вычислительной схемы желательно существование связного множества точек  $\zeta = \tau\lambda$  в правой комплексной полуплоскости, для которых аналитическое решение изначальной задачи Коши, возрастающее по абсолютной величине, аппроксимировалось бы неубывающим по модулю решением разностного уравнения (6). Однако ни в одном из рассмотренных авторами случаев обнаружить подобные множества не удалось.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2025-1606). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдюшев В.А.* Численное моделирование орбит небесных тел. Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2015.
2. *Заусаев А.Ф., Романюк М.А.* Численные методы в задачах математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе. Самара: СамГТУ, 2017.
3. *Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
4. *LeVeque R.J.* Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Steady State and Time Dependent Problems. SIAM, 2007; DOI: 10.1137/1.9780898717839
5. *Lambert J.D.* Computational Methods in Ordinary Differential Equations (Introductory mathematics for scientists & engineers): John Wiley & Sons Ltd. 1973.
6. *Barwell V.K.* Special stability problems for functional differential equations // ВІТ (ВВІТ), Iss. 2Jun 1975. V. 15. P. 130–135.
7. *Толпегин О.А.* Экспериментальная баллистика. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2015.
8. *Dahlquist G.* A special stability problem for linear multistep methods // ВІТ Numerical Mathematics, 1963. V. 3. P. 27–43.
9. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: ЛИБРОКОМ, 2012.
10. *Butcher J.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations: John Wiley & Sons Ltd. 2016.
11. *Киреев И. В., Новиков А. Е., Новиков Е. А.* Построение областей абсолютной устойчивости методом Бернулли // Сиб. журн. вычисл. математики. 2022. № 4. С. 417–428.

UDC 519.6

**VISUALIZATION OF ABSOLUTE STABILITY REGIONS OF THE  
ADAMS NUMERICAL SCHEMES BY THE BOUNDARY LOCUS  
METHOD**© 2025 D. M. Shishkin<sup>1a</sup>, I. V. Kireev<sup>2,3b</sup>, V. E. Zalizniak<sup>1c</sup>

<sup>1</sup>*HSE Institute of Financial Studies,  
Pokrovsky Boulevard, 11, Moscow 109028, Russia,*  
<sup>2</sup>*Institute of computational modelling SB RAS,  
Akademgorodok, 50/44, Krasnoyarsk 660036, Russia,*  
<sup>3</sup>*School of Mathematics and Computer Science,  
Siberian Federal University,  
Svobodny prosp., 79, Krasnoyarsk 660041, Russia*

E-mails: <sup>a</sup>denis\_shishkin\_2015@mail.ru, <sup>b</sup>kiv@icm.krasn.ru,  
<sup>c</sup>vzalizniak@sfu-kras.ru

Received 10.04.2025, revised 22.01.2026, accepted 22.01.2026

**Abstract.** An algorithm for visualization of absolute stability regions of multi-step Adams methods of orders 2–15 is proposed in the paper. It is based on the boundary locus method. The obtained results can be used for choosing the discretization step in the numerical solution of the Cauchy problem by the Adams method.

**Keywords:** Adams — Bashforth method, Adams-Multon method, predictor-corrector; stability region; boundary locus.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.414

## REFERENCES

1. Avdyushev V.A. Chislennoe modelirovanie orbit nebesnykh tel [Numerical Modeling of Orbits of Celestial Bodies], Tomsk: TSU Press, 2015 (in Russian).
2. Zausaev A.F., Romanyuk M.A. Chislennyye metody v zadachah matematicheskogo modelirovaniya dvizheniya nebesny'x tel v Solnechnoj sisteme [Numerical methods for mathematical modeling of the motion of celestial bodies in the Solar system]. Samara: SamGTU Press, 2017 (in Russian).
3. Hairer E., Wanner G., Norsett S.P. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Springer Ser. Comput. Math., Vol. 8, Berlin: Springer, 2008.
4. LeVeque R.J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Steady State and Time Dependent Problems. SIAM, 2007.
5. Lambert J.D. Computational Methods in Ordinary Differential Equations (Introductory mathematics for scientists & engineers): John Wiley & Sons Ltd. 1973.
6. Barwell V.K. Special stability problems for functional differential equations. *BIT (BBIT)*, 1975, Vol. 15, Iss. 2Jun 1975, pp. 130–135.
7. Tolpegin O.A. E'ksperimental'naya ballistika [Experimental Ballistics]. St. Petersburg: Baltic State Techn. University Press, 2015 (in Russian).
8. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods. *BIT Numer. Math.*, 1963, Vol. 3, pp. 27–43.

9. Gelfond A.O. *Ischislenie konechnykh raznostei* [Calculus of Finite Differences], Moscow: LIBROCOM, 2012 (in Russian).
10. Butcher J. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*: John Wiley & Sons Ltd. 2016.
11. Kireev I.V., Novikov A.E. and Novikov E.A. Stability domains of explicit multistep methods. *Numer. Anal. Appl.*, 2022, Vol. 15, No. 4, pp. 343–352.