

УДК 519.633.6

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ПРИРОДНОГО ГАЗА В КОЛЛЕКТОРЕ В РАЗНЫХ ПОСТАНОВКАХ

© 2026 А. В. Аммосов<sup>1а</sup>

<sup>1</sup> Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,  
ул. Беллинского, 58, г. Якутск, 677000, Россия

E-mail: Albertdobun@gmail.com

Поступила в редакцию 03.06.2025 г.; после доработки 19.03.2026 г.;  
принята к публикации 13.05.2026 г.

Рассматривается одномерная математическая модель неизотермической плоскорадиальной фильтрации природного газа в коллекторе постоянной мощности  $H$ . Проведено численное исследование математических моделей, учитывающих конвективный и кондуктивный теплообмены, адиабатическое расширение и эффект Джоуля – Томсона в разных постановках. Проведён анализ результатов численного решения системы уравнений теплопереноса. Даны оценки и проведено сравнение численных результатов для слагаемых уравнения теплопроводности по отдельности и в сочетании. Дискретизация выполнена с помощью неявной разностной схемы.

**Ключевые слова:** уравнение фильтрации газа, уравнение энергии, конвективный теплообмен, кондуктивный теплообмен, адиабатическое расширение газа, эффект дросселирования, коэффициент сверхсжимаемости природного газа, неявно-разностная схема, метод расщепления по физическим процессам.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.101

### ВВЕДЕНИЕ

Газовые и газоконденсатные месторождения России являются ключевой составляющей топливно-энергетического комплекса страны, обеспечивая добычу природного газа и газового конденсата для внутреннего потребления и экспорта. Экстремальные климатические условия северной части России, а также непростые геологические условия месторождений, расположенных в регионах Западной Сибири и в трудноизвлекаемых запасах Арктического шельфа и Восточной Сибири, требуют применения современных технологий разработки и эксплуатации. Эффективное проектирование и управление такими скважинами требует глубокого понимания гидродинамических закономерностей, термодинамических свойств газоконденсатных систем и влияния геолого-технических факторов на добычу.

Дифференциальные уравнения фильтрации газа в пористой среде, используемые для решения прикладных задач подземной гидрогазодинамики, базируются на фундаментальных результатах, полученных в работах [1, 2, 3]. Технологические режимы эксплуатации газовых и газоконденсатных месторождений описаны в работах [4, 5]. Вычислительные исследования методов конечных объёмов, конечных элементов и конечных разностей были представлены в работах [6, 7]. Численная реализация построенной математической модели проводится с использованием метода конечных разностей, изложенного в работе [8].

Уравнение фильтрации газа выводится из уравнения неразрывности газа, закона Дарси и закона сохранения энергии для учёта тепловых процессов внутри месторождения. Система

уравнений неизоэтермической фильтрации газа приводится в работах [9, 10], где учтены фильтрация реального газа, коэффициент сверхсжимаемости  $z$ , вычисляемый по формуле Латонова — Гуревича [11], массовый расход газа на забое скважины. Большой интерес представляет уравнение энергии, учитывающее закон сохранения энергии при добыче газа через одиночную скважину, расположенную в центре залежи месторождения, который представляет собой совокупность таких процессов как конвекция, кондукция, адиабатическое расширение и эффект дросселирования.

Уравнение энергии описывает несколько физических процессов первого и второго порядка. Поэтому для построения более эффективных разностных методов используют метод расщепления по физическим процессам, рассмотренных в работах [12, 13]. Согласно методу расщепления по физическим процессам, исходная задача сводится к чередующейся временной последовательности задач, описывающих более простые процессы. Следует заметить, что конвективный теплоперенос (уравнение первого порядка) превышает кондуктивный теплоперенос (уравнение второго порядка). Так в работах [14, 15] делается упор на явном учёте конвективного теплопереноса. В трудах [16, 17, 18] также говорится про значительное преобладание конвективного теплопереноса над кондуктивным теплопереносом.

В работе [9] рассмотрен стационарный приток газа к скважине, в которой на внутренней границе пласта возможны граничные условия с постоянным массовым расходом у забоя и постоянное давление на внешней границе. В работе [19] показано, что процесс изменения давления и температуры происходит на забое скважины. В работе [20] рассматривается один из методов учёта скважин при численном исследовании процессов фильтрации несжимаемой жидкости. Важным фактором северной части России являются климатические и природные условия. Так, в работах [21, 22, 23] из задачи неизоэтермической фильтрации реального газа по полю давления и температуры проведена оценка возможного развития гидратообразования в призабойной зоне скважины. В монографии [24] на основе гидродинамических исследований скважин рассмотрены режимы притока природного газа к забою, в том числе одномерные плоскорадиальные потоки при установившемся движении.

В рамках рассматриваемой системы уравнений фильтрации особое внимание уделено уравнению энергии. В работе исследованы четыре различные постановки этого уравнения, выполнено их численное сравнение, а также проведён отдельный анализ влияния кондуктивного теплообмена и эффекта адиабатического расширения на общую часть уравнения по отдельности.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерную задачу неизоэтермической плоскорадиальной фильтрации природного газа в коллекторе постоянной мощности  $H$ . Область фильтрации представляет собой интервал  $\Omega = (r_c, R_k)$  по радиусу  $r$ . Уравнение энергии содержит такие слагаемые, как кондуктивный-конвективный теплообмен, адиабатическое расширение и эффект дросселирования [9, 10]:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + m \left( 1 + \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (1)$$

Уравнение неразрывности потока газа с учётом закона Дарси имеет вид [10]:

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (2)$$

где  $k$  — коэффициент проницаемости пористой среды,  $\mu_g$  — динамическая вязкость газа,  $m$  — пористость,  $r$  — радиус,  $p$  — давление и  $T$  — температура природного газа,  $z$  — коэффициент сверхсжимаемости газа, вычисляемый по формуле Латонова — Гуревича [11]:

$$z(p, T) = \left[ 0.17376 \ln \left( \frac{T}{T_c} \right) + 0.73 \right]^{p/p_c} + 0.1 \frac{p}{p_c}, \quad (3)$$

где  $p_c = 45.8 \cdot 10^5$  Па — критическое значение давления метана,  $T_c = 190.5$  К — критическое значение температуры метана.

Начальные и граничные условия:

$$p(r, 0) = p_0, \quad r \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \quad (4)$$

$$T(r, 0) = T_0, \quad r \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad r = R_k, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = R_k, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (7)$$

На забое скважины задаётся условие массового притока газа:

$$2\pi r_c \frac{k}{\mu_g} H \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} = M, \quad r = r_c, \quad t \in (0, \bar{t}] \quad (8)$$

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В РАЗНЫХ ПОСТАНОВКАХ

Наличие конвективного и кондуктивного теплообменов, эффекта дросселирования и адиабатического расширения природного газа вызывает интерес к изучению влияния каждого из этих процессов на систему уравнений. В работе [18] показано, что при высоких скоростях потока флюида, конвективная составляющая уравнения становится доминирующей. Эффект дросселирования приводит к увеличению скорости движения флюида в коллекторе, что, в свою очередь, влияет на соотношение конвективных и кондуктивных процессов. Преобладание конвективного члена в системе уравнений над кондуктивным приводит к снижению влияния диффузии на общую картину процессов. В связи с этим, представляет интерес разработка и сравнение численных методов в различных постановках.

Численное исследование будет проводиться для непрерывного процесса добычи газа, без остановочных интервалов. Наша задача состоит в сравнении численных результатов для различных комбинаторных постановок задачи.

Расчёты проведены в 4 вариантах системы уравнений.

**Модель 1. Полная постановка, уравнение (1).**

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (9)$$

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + m \left( 1 + \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (10)$$

**Модель 2. Без кондуктивного теплообмена.**

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (11)$$

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = m \left( 1 + \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (12)$$

**Модель 3. Без адиабатического расширения.**

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (13)$$

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (14)$$

**Модель 4. Без кондуктивного теплообмена и адиабатического расширения.**

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (15)$$

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (16)$$

Во всех четырёх моделях уравнение энергии включает конвективный теплообмен и эффект дросселирования, которые являются его значительными составляющими. Наибольший интерес представляет влияние кондуктивного теплообмена и адиабатического расширения на общую часть уравнения.

### 3. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ

В область  $\Omega$  вводится квазиравномерная пространственно — временная сетка  $\omega_{h\tau}$ :

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \{h_i = q_1 h_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n\}, \quad h_0 = (R_k - r_c)(q_1 - 1)/(q_1^n - 1), \\ \bar{\omega}_\tau &= \{\tau^j = q_2 \tau^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m\}, \quad \tau_0 = t(q_2 - 1)/(q_2^m - 1). \end{aligned}$$

Численное решение модели 1 для нелинейной системы дифференциальных уравнений с граничными и начальными условиями (1)–(8) методом конечных разностей было проведено в работе [19]. Для моделей 2–4 численное исследование проводим методом конечных разностей. Для линеаризации разностной схемы все нелинейные коэффициенты разностных уравнений берём с нижнего временного слоя.

Дискретный аналог разностной схемы уравнения неразрывности природного газа (2) одинаков для всех моделей и имеет вид

$$\frac{mr_i \bar{h}_i}{\tau \bar{T}_i \bar{z}_i} (p_i - \check{p}_i) = \left( r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\bar{T} \bar{z}} \right)_{i+0.5} \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} - \left( r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\bar{T} \bar{z}} \right)_{i-0.5} \frac{p_i - p_{i-1}}{h_i}, \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

где

$$\bar{h}_i = \begin{cases} h_0/2, & i = 0, \\ (h_{i-1} + h_i)/2, & i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ h_n/2, & i = n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{i-0.5} &= \frac{\left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{i-1} + \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{i+0.5} &= \frac{\left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_i + \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Проведём дискретизацию граничного условия (6) на забое скважины

$$\frac{mr_c \check{h}_0}{\tau \check{T}_0 \check{z}_0} (p_0 - \check{p}_0) = \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{0.5} \frac{p_1 - p_0}{h_1} - \frac{MR}{2\pi H}. \quad (18)$$

Дополним дискретизацию граничного условия (7), а также начальное условие (4) к системе уравнений (9)–(10)

$$\frac{mr_n \check{h}_n}{\tau \check{T}_n \check{z}_n} (p_n - \check{p}_n) = - \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{n-0.5} \frac{p_n - p_{n-1}}{h_n}, \quad (19)$$

$$p(r, 0) = p_0(r), \quad r \in \omega_h. \quad (20)$$

1) Для вычисления дискретного аналога уравнения модели 1 применяется метод расщепления по физическим процессам [9, 10] на вспомогательном слое и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C\rho_i \frac{\bar{T}_i - \check{T}_i}{\tau} &= m \left( 1 + \left( \frac{\bar{T}}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \right) \frac{p_i - \check{p}_i}{\tau} + C_p \left( \frac{kp}{\mu R \bar{T} z} \right)_i \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \frac{\bar{T}_{i+1} - \bar{T}_i}{h_{i+1}} \\ &\quad - \left( \frac{k \bar{T}}{\mu z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \right)^2, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0. \quad (21) \end{aligned}$$

$$C\rho_i r_i \check{h}_i \frac{T_i - \bar{T}_i}{\tau} = (r\lambda)_{i+1/2} \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - (r\lambda)_{i-1/2} \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (22)$$

Поскольку параметры уравнения (17) выводятся из граничного условия при  $r_n = R_k$ , уравнение (18) дополним дискретным аналогом начального условия (5):

$$\bar{T}_n = T_0. \quad (23)$$

Дискретные аналоги граничных условий, условия сопряжения и начального условия имеют следующий вид:

$$T_0 = \bar{T}_0, \quad (24)$$

$$T_n = \bar{T}_n, \quad (25)$$

$$T(r, t) = \bar{T}(r, t), \quad (26)$$

$$T(r, 0) = T_0(r). \quad (27)$$

2) Дискретный аналог модели 2 проводим неявно-разностной схемой с учётом отсутствия кондуктивного теплообмена, тем самым исключая из уравнения дифференциал второго порядка:

$$\begin{aligned} C\rho_i \frac{T_i - \check{T}_i}{\tau} &= m \left( 1 + \left( \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \right) \frac{p_i - \check{p}_i}{\tau} + C_p \left( \frac{kp}{\mu R T z} \right)_i \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} \\ &\quad - \left( \frac{k T}{\mu z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \right)^2, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0. \quad (28) \end{aligned}$$

3) В модели 3 так же применяется метод расщепления по физическим процессам [9, 10] на вспомогательном слое, с использованием разностной схемы без учёта адиабатического расширения и имеют вид следующей системы уравнений:

$$C\rho_i \frac{\bar{T}_i - \check{T}_i}{\tau} = C_p \left( \frac{kp}{\mu R \check{T} \check{z}} \right)_i \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \frac{\bar{T}_{i+1} - \bar{T}_i}{h_{i+1}} - \left( \frac{k}{\mu} \frac{\check{T}}{\check{z}} \frac{\partial \check{z}}{\partial \bar{T}} \right)_i \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \right)^2, \quad (29)$$

$$i = n - 1, n - 2, \dots, 0.$$

$$C\rho_i r_i \check{h}_i \frac{T_i - \bar{T}_i}{\tau} = (r\lambda)_{i+1/2} \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - (r\lambda)_{i-1/2} \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (30)$$

Поскольку параметры уравнения (17) исходят из границы  $r_n = R_k$ , дополним дискретизацию начального условия (5) в уравнение (18):

$$\bar{T}_n = T_0. \quad (31)$$

Дискретный аналог граничного условия, условия сопряжения и начальные условия задаются уравнениями (24)–(27).

4) Для модели 4 дискретизацию проводим неявно-разностной схемой с учётом отсутствия кондуктивного теплообмена и адиабатического расширения:

$$C\rho_i \frac{T_i - \check{T}_i}{\tau} = C_p \left( \frac{kp}{\mu R T z} \right)_i \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - \left( \frac{k}{\mu} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \right)^2, \quad (32)$$

$$i = n - 1, n - 2, \dots, 0.$$

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе представлены численные результаты в четырёх разных постановках задач для задачи неизотермической фильтрации природного газа. Входные данные задаются в международной системе СИ:

$$\begin{aligned} M &= 4 \text{ кг/с}, \quad p_0 = 2.7 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad T_0 = 332 \text{ К}, \\ r_c &= 0.08 \text{ м}, \quad R_k = 4000 \text{ м}, \quad H = 10 \text{ м}, \\ C_p &= 2000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad C\rho = 2.7 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{К)}, \quad \lambda_n = 1.163 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \\ k &= 10^{-14} \text{ м}^2, \quad \mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad m = 0.2, \quad R = 520 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \\ q_1 &= 1.005, \quad q_2 = 1.064, \quad t = 5 \text{ лет}. \end{aligned}$$

здесь  $q_1, q_2$  — знаменатели геометрической прогрессии для квазиравномерных сеток по пространству и времени,  $t$  — промежуток времени, взятый для всех моделей одинаковым.

#### Сравнения результатов расчёта по моделям 1 и 2

На рис. 1 представлены численные результаты распределения температуры, полученные для моделей 1 и 2. Как и ожидалось на призабойной зоне скважины происходит интенсивное охлаждение, за счёт эффекта дросселирования. Так же показана разность температур между моделями 1 и 2, в котором исследовано влияние кондуктивного теплообмена и представлена разность температур, максимальное значение которого равно 0.0347 К, что в процентном соотношении составило 0.0105%.

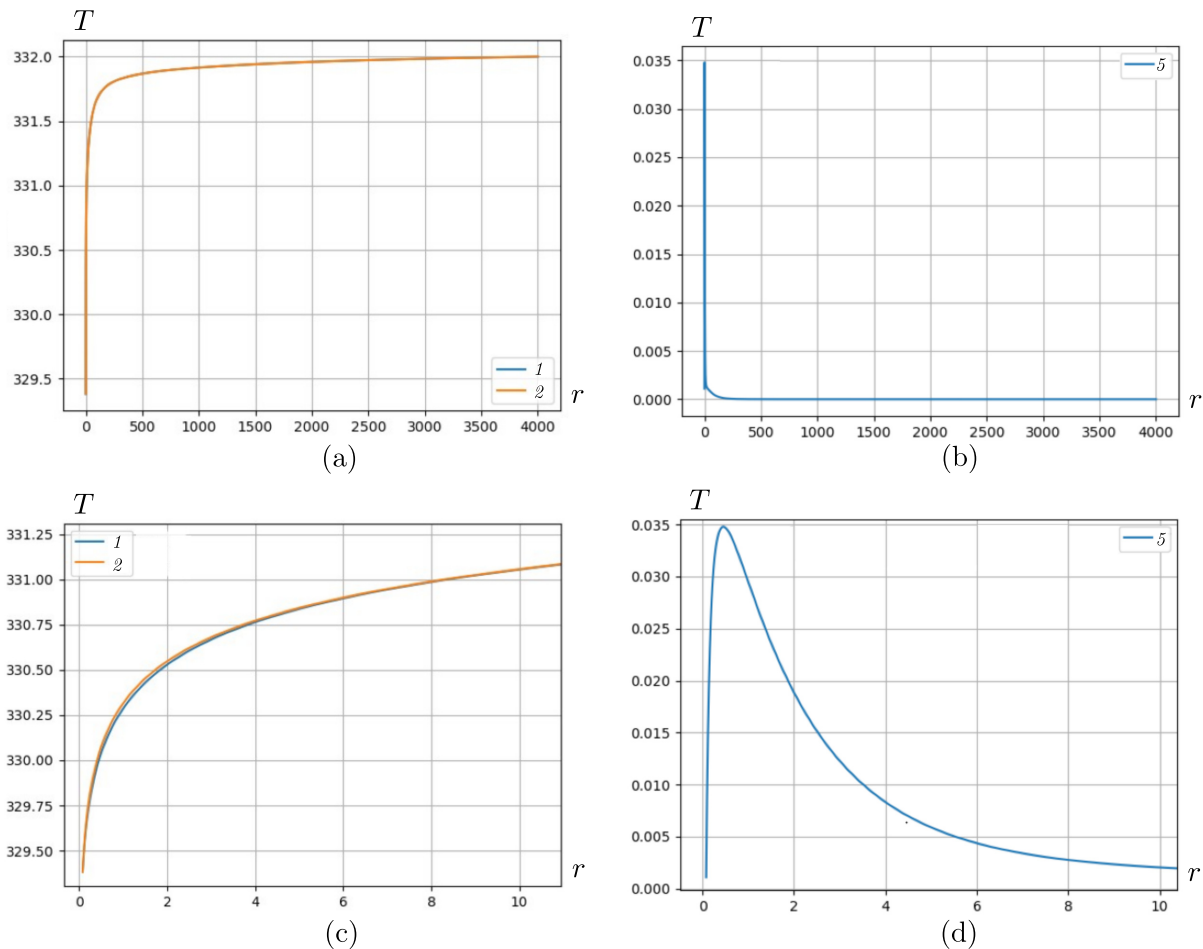


Рис. 1. Кривые 1 и 2 – распределения температур моделей 1 и 2 (а), (с); кривая 5 – разность температур между моделями 1 и 2 (б), (д) в масштабе пласта и до 10 м по радиальной координате через 5 лет после запуска скважины

Следует отметить, что (д) демонстрирует проявление эффекта дросселирования в характерной форме. В левой части расчётной области, согласно (а) и (с), зафиксировано вертикальное преобладание распределения давления, обусловленное наличием в уравнении эффекта дросселирования, которая является уравнением с производной давления второго порядка и имеет вид

$$-\frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right)^2,$$

Также при отдалении от призабойной зоны скважины наблюдается плавный переход к горизонтальному преобладанию.

### Сравнения результатов расчёта по моделям 1 и 3

Результаты численных исследований распределения температур для моделей 1 и 3 представлены на рис. 2.

Согласно полученных результатов, при отсутствии адиабатического расширения (модель 3) в призабойной зоне скважины, наблюдается резкий спад температуры, разность температур которой составила 0.2142 К. Так же имеет иной характер распределения температуры на всей протяжённости пласта, что иллюстрирует график (б), показывая разность температур между моделями тянущуюся до границы пласта, что может иметь влияние на окружающие грунты.

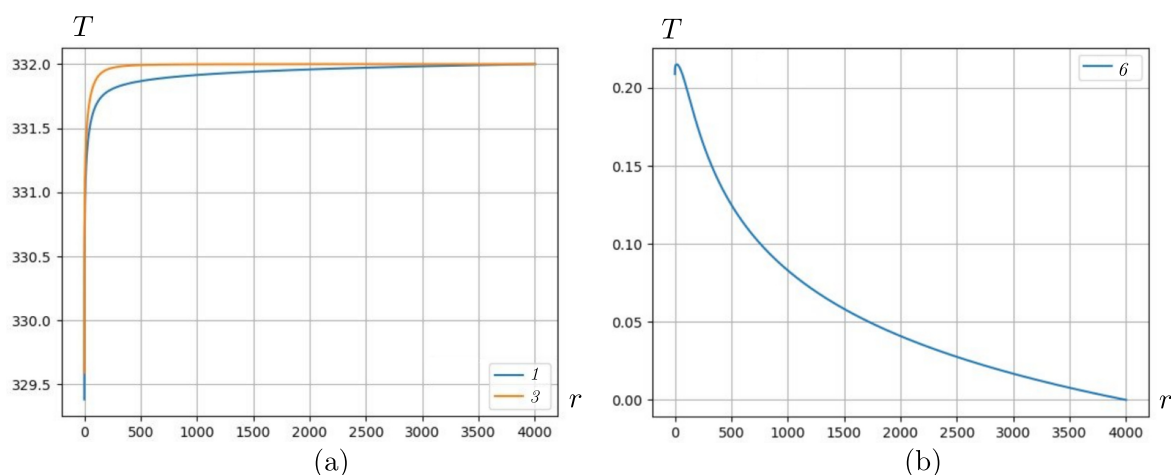


Рис. 2. Кривые 1 и 2 — распределения температур моделей 1 и 3 (а), кривая 6 — разность температур между моделями 1 и 3 (б) по радиальной координате на момент времени через 5 лет

### Сравнения результатов расчёта по моделям 1 и 4

Численное сравнение моделей 1 и 4, также подтвердило влияние адиабатического расширения в полную постановка уравнения энергии в совокупности с кондуктивным теплообменом и представило немалую разность температур между моделями 1 и 4 (см. рис. 3).

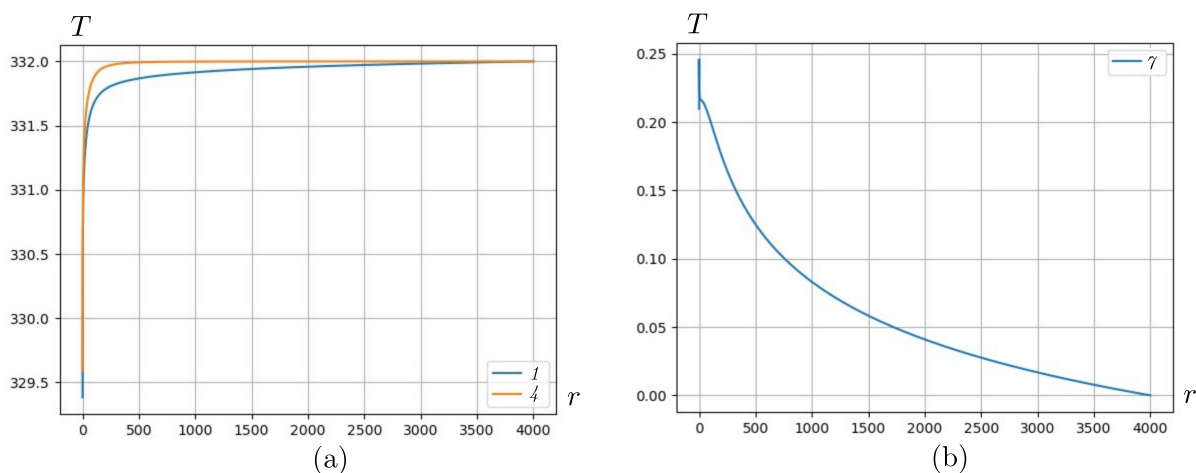


Рис. 3. Кривые 1 и 4 — распределения температур моделей 1 и 4 (а), кривая 7 — разность температур между моделями 1 и 4 (б) по радиальной координате на момент времени через 5 лет

Максимальное значение которого составило 0.247 К, что больше разности температур между моделями 1 и 3.

### Сравнения результатов расчёта по моделям 2 и 4

На рис. 4 представлен ещё один вычислительный эксперимент, в котором проверялось отсутствие кондуктивного теплообмена в обоих моделях 2 и 4, а так же отсутствием в модели 4 адиабатического расширения.

Численные исследования показали схожий результат с рис. 2, разность температур между моделями 2 и 4 составило 0.2145 К. Таким образом представив, что адиабатическое расширение имеет значительное влияние на полную постановку уравнения энергии.

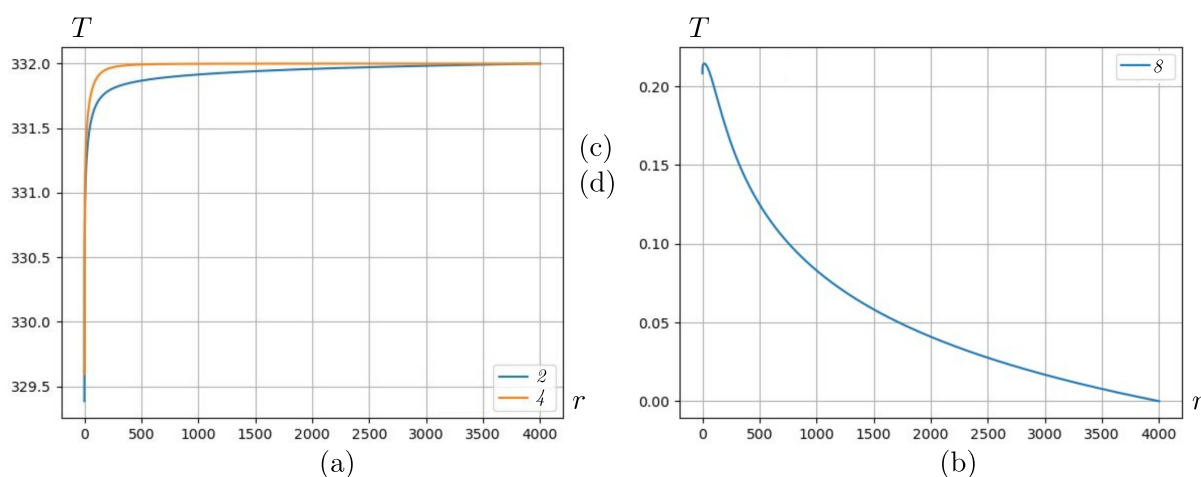


Рис. 4. Кривые 2 и 4 — распределения температур моделей 2 и 4 (а), кривая 8 — разность температур между моделями 2 и 4 (б) по радиальной координате на момент времени через 5 лет

#### 4.1. Сравнение результатов давления всех моделей

Численные результаты, показанные на рис. 5, иллюстрируют поведение уравнения неразрывности в различных системах уравнений, при этом полученные данные свидетельствуют о том, что распределение давления практически не зависит от выбранной системы. Но стоит отметить, что наименьшую разность давлений демонстрирует модель 2.

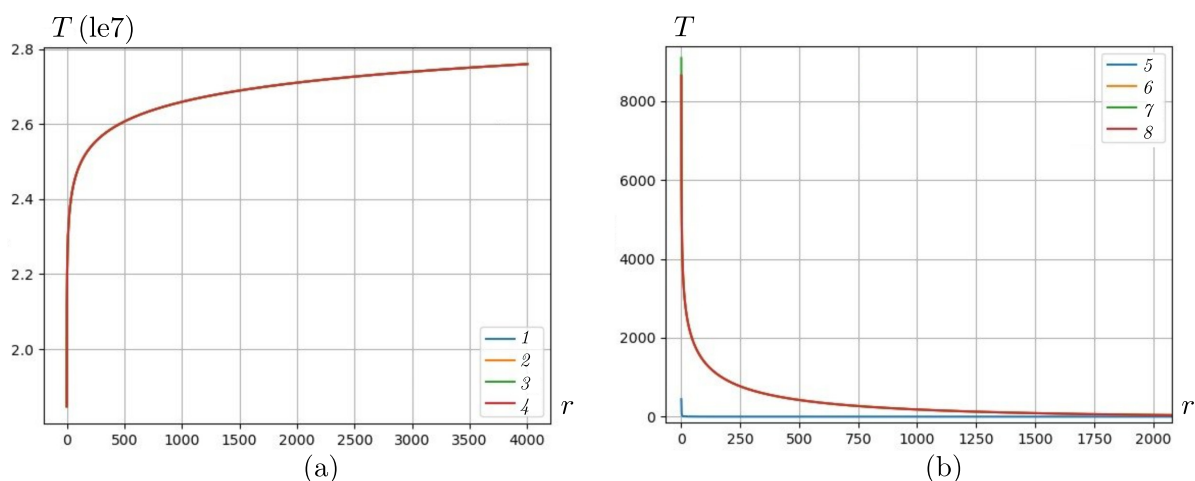


Рис. 5. Кривые 1–4 — распределения температур моделей 1–4 (а), кривые 5–8 — разности температур между моделями 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 2 и 4 соответственно по радиальной координате на момент времени через 5 лет

В результате полученных численных данных можно отметить, что пренебрежение адиабатическим расширением в моделях 3 и 4 влияет на уравнение энергии. Важно подчеркнуть, что при отсутствии адиабатического расширения наблюдается резкий спад температуры в прибойной зоне скважины. В то же время, модель 2, которая показывает наименьшую разницу температур и рассматривается без учёта кондуктивного теплообмена, демонстрирует неплохие численные результаты. Следует отметить, что эта модель упрощает вычислительный процесс, поскольку не требует использования метода расщепления по физическим процессам и поиска прогонных коэффициентов, что положительно сказывается на затратах вычислительного времени.

В таблице представлено время счёта для различных моделей при различных пространственно-временных сетках.

Таблица

Сравнение расчётного времени  $t_{сч}$  моделей

модель	N	M	$t_{сч}$ , сек	$\Delta P$ , %	$\Delta T$ , %	N	M	$t_{сч}$ , сек	$\Delta P$ , %	$\Delta T$ , %
модель 1	50	200	0.544	-	-	200	200	0.8398	-	-
модель 2	50	200	0.124	0,00237	0.0104	200	200	0.3978	0.00239	0.0105
модель 3	50	200	0.1082	0.04685	0.0654	200	200	0.3642	0.04688	0.0647
модель 4	50	200	0.137	0.04929	0.0748	200	200	0.4377	0.04934	0.0742
модель 1	500	200	1.5153	-	-	1700	200	4.388	-	-
модель 2	500	200	1.0699	0.00239	0.0105	1700	200	3.445	0.00239	0.0105
модель 3	500	200	0.9093	0.04680	0.0646	1700	200	3.601	0,04674	0.0645
модель 4	500	200	1.0392	0.04926	0.074	1700	200	3.123	0,04912	0.0739

где  $N$ ,  $M$  — количество узлов в пространственной и временной сетках соответственно,  $t_{сч}$  — время счёта персонального компьютера, модель 1 считается эталонным решением,  $\Delta P$  — разность давлений с моделью 1 в процентах,  $\Delta T$  — разность температур с моделью 1 в процентах.

Из таблицы видно, что разность давлений и температур для модели 2 показали минимальные значения и составили  $\Delta P = 0,00237\%$  и  $\Delta T = 0,0104\%$  при  $N = 50$ . Также при увеличении количества узлов до  $N = 200$  в пространственно временной сетки наблюдается небольшое изменение до  $\Delta P = 0,00239\%$  и  $\Delta T = 0,0105\%$  и далее при увеличении до  $N = 500, 1700$  остаётся неизменной, что также можно наблюдать на рис. 6. Похожее изменение разности давлений и температур можно наблюдать для моделей 3 и 4, с небольшим изменением при  $N = 200, 500, 1700$ .

Вычислительные расчёты проводились на персональном компьютере с процессором intel core i7 11800H, ОЗУ 16 GB.

На рис. 6 представлены численные результаты распределения давления и температуры для значений  $N = 50, 200, 500, 1700$  в масштабе до 10 метров.

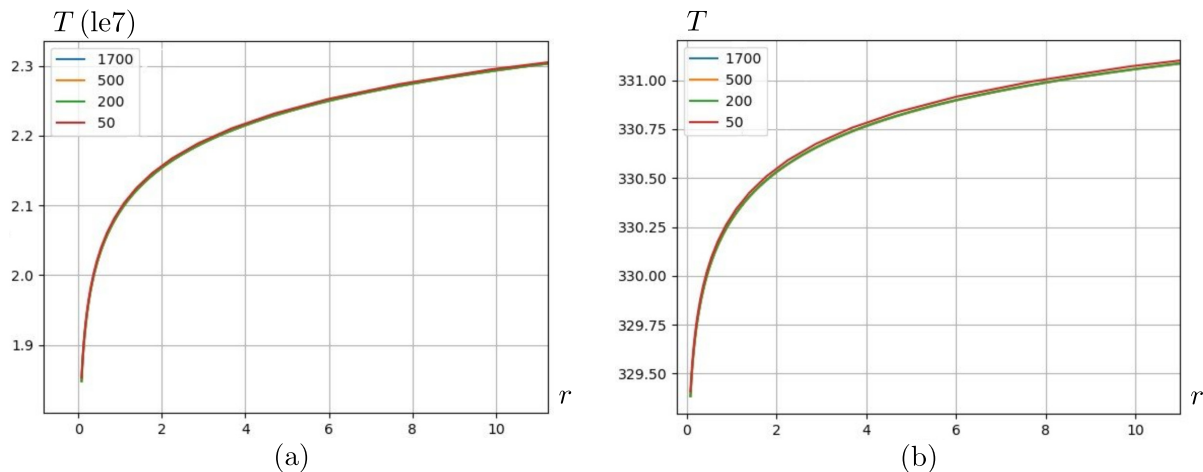


Рис. 6. Распределения давления (а) и температуры (б) по радиальной координате для модели 1 при разных размерах пространственной сетки  $N = (1700, 500, 200, 50)$  на момент времени через 5 лет

Разница давлений  $\Delta P_N$  при  $N = 50$  и  $N = 200, 500, 1700$  составила соответственно

0.1836%, 0.1824% и 0.1745%. В то время разница давлений при  $N = 200$  и  $N = 500, 1700$  была равна 0.009% и 0.007%. Разница температур  $\Delta T_N$  при  $N = 50$  и  $N = 200, 500, 1700$  достигла значений 0.0077%, 0.0075% и 0.0069%. Аналогично, разницы температур при  $N = 200$  и  $N = 500, 1700$  составили соответственно 0.0007% и 0.0005%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена полная математическая модель неизотермической фильтрации природного газа к скважине расположенной в центре круговой залежи с радиусом  $r_c$ , а также упрощённые модели, касающиеся уравнения энергии. Расчёты проведены в четырёх вариациях: при полной постановке задачи (модель 1), без учёта кондуктивного теплопереноса газа (модель 2), без учёта адиабатического расширения газа (модель 3) и без учёта кондуктивного теплопереноса и адиабатического расширения газа (модель 4). Сравнение численных результатов, показало пренебрежимо малое влияние кондуктивной теплопередачи и адиабатического расширения на уравнения энергии. Численные результаты моделей 1 и 2 показали наименьшую максимальную разность температур в 0.0105%, а численные результаты моделей 3 и 4 показали разность температур с моделью 1 в 0,0645% и 0,0739% соответственно. Следует отметить, что адиабатическое расширение оказывает влияние на забое скважины, в то время как отсутствие только кондуктивного теплообмена имеет минимальное влияние. В процессе численного исследования выявили, что выбор количества узлов пространственной сетки имеет прямое влияние на время счёта. Таким образом, при моделировании одномерной неизотермической плоскорадиальной фильтрации природного газа в коллекторе постоянной мощности  $H$  в условиях непрерывной добычи, наиболее целесообразной с точки зрения минимизации погрешности является модель 2 с числом узлов по радиусу  $N = 200$  и по времени  $M = 200$ . Следует отметить, что при изменении геометрических размеров пласта или расчётного времени количество узлов сетки может корректироваться.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор искренне благодарен Васильеву Василию Ивановичу за конструктивные замечания, полезные обсуждения и экспериментальные вычисления.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение от 11.03.2025 № 075-02-2025-1792). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л.С.* Подземная гидрогазодинамика. Собр. трудов. Т.2. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
2. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. М.: Госгортехиздат, 1963.
3. *Beaer J.* Dynamics of Fluids in Porous Media. N. Y.: Elsevier, 1972.
4. *Закиров С.Н., Лапук Б.Б.* Проектирование и разработка газовых месторождений. М.: Недрра, 1974.
5. *Лапук Б.Б.* Теоретические основы разработки месторождений природных газов. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
6. *Aziz K., Settari A.* Petroleum Reservoir Simulation. Society of Petroleum Engineers, 1979.

7. *Abou-Kassem J.H., Islam M.R., Farouq Ali S.M.* Petroleum Reservoir Simulation: The Engineering Approach. Second Edition. Cambridge, MA–Kidlington: Gulf Professional Publishing (Elsevier), 2020.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
9. Бондарев Е.А., Васильев В.И., Воеводин А.Ф. и др. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1988.
10. Васильев В.И., Попов В.В., Тимофеева Т.С. Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
11. Латонов В.В., Гуревич Г.Р. Расчёт коэффициента сжимаемости природных газов // Газовая промышленность. 1969. Т.2. С. 7–9.
12. Коновалов А.Н. Задача фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1988.
13. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
14. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M. Explicit-implicit schemes for non-isothermal filtration problem: single-temperature model // J. Compu. Appl. Math. 2024. V. 440. Article number 115639; DOI: 10.1016/j.cam.2023.115639.
15. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M. Non-isothermal filtration problem: Two-temperature computational model // J. Comput. Phys. 2025. V. 531. Article number 113941; DOI: 10.1016/j.jcp.2025.113941.
16. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
17. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
18. Зверев В.Г., Гольдин В.Д. Разностная схема для решения конвективно-диффузионных задач теплообмена // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, № 6. С. 24–37.
19. Васильев В.И., Аммосов А.В. Numerical Modeling of Non-Isothermal Filtration of Natural Gas // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2025; DOI: 10.33048/semi.2025.22.A12
20. Иванов М.И., Кремер И.А., Лаевский Ю.М. О моделировании скважин в задачах фильтрации // Сиб. электрон. матем. известия. 2019. Т. 16. С. 1868–1884; DOI: 10.33048/semi.2019.16.133
21. Рожин И.И., Калачева Л.П., Иванова И.К. Исследование гидратообразования для повышения надёжности добычи и транспорта природного газа в условиях криолитозоны // Природные ресурсы арктики и субарктики. 2021. Т. 26, № 1. С. 49–59; DOI: 10.31242/2618-9712-2021-26-1-5
22. Sivtsev A.I., Rozhin I.I. Search for technogenic deposits under the permafrost-hydrate seal within the Vilyui syncline // SOCAR Proceedings, 2022. Special Iss. 1. P. 90–98; DOI: 10.5510/OGP2022SI100666.
23. Borisova N.N., Rozhin I.I., Ivanov G.I. Algorithm for determining the gas flow rate by the half-division method for pressure measurements in hydrate formation in a well // E3S Web of Conference, 2024. V. 592. Internat. Sci. Conf. Energy Management of Municipal Facilities and Environmental Technologies (EMMFT-2024); DOI:10.1051/e3sconf/202459204007.
24. Мангазеев П.В., Панков М.В., Кулагина Т.Е., Камардинов М.Р., Деева Т.А. Гидродинамические исследования скважин // Томск: Изд-во ТПУ, 2004.

UDC 519.633.6

**NUMERICAL SIMULATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF  
NATURAL GAS FLOW IN A RESERVOIR IN DIFFERENT VARIOUS**© 2026 A. V. Ammosov<sup>1a</sup>

<sup>1</sup>*M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,  
Belinsky st., 58, Yakutsk, 677000, Russia*

E-mail: Albertdobun@gmail.com

Received 03.06.2025, revised 19.03.2026, accepted 13.05.2026

**Abstract.** The article considers a one-dimensional mathematical model of non-isothermal plane-radial filtration of natural gas in a formation of constant thickness  $H$ . A numerical simulation of mathematical models includes convective and conductive heat exchange, adiabatic expansion and the Joule-Thompson effect in different various are carried out. The analysis of the numerical solution results of the system of heat and mass transfer equations has been carried out. Estimates are given and numerical results are compared for the terms of the heat conduction equation separately and in combination. Discretization is performed using an implicit difference scheme.

**Keywords:** filtration gas equation, heat conductivity equation, convective heat exchange, conductive heat exchange, adiabatic expansion, Joule-Thomson effect, compressibility coefficient, implicit difference scheme.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.101

## REFERENCES

1. Leibenzon L.S., Podzemnaya gidrogazodinamika. Sobr. Trudov. [Underground hydrogas dynamics. Collected Works]. Moscow: Izd-vo AN SSSR, V. 2, 1953 (in Russian).
2. Charny I.A., Podzemnaya gidrogazodinamika [Underground hydrogas dynamics]. Moscow: Gostoptekhizdat, 1963 (in Russian).
3. Bear J., Dynamics of Fluids in Porous Media. N. Y.: Elsevier, 1972.
4. Zakirov S.N., Lapuk B.B., Proektirovanie i razrabotka gazovykh mestorozhdeniy [Design and development of gas fields]. Moscow: Nedra, 1974 (in Russian).
5. Lapuk B.B., Teoreticheskie osnovy razrabotki mestorozhdeniy prirodnykh gazov [Theoretical foundations of the development of natural gas deposits]. Moscow–Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2002 (in Russian).
6. Aziz K., Settari A., Petroleum Reservoir Simulation. Society of Petroleum Engineers, 1979.
7. Abou-Kassem J.H., Islam M.R., Farouq Ali S.M., Petroleum Reservoir Simulation: The Engineering Approach. Second Edition. Cambridge, MA–Kidlington: Gulf Professional Publishing (Elsevier), 2020.
8. Samarskiy A.A., Teoriya raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka Publ., 1989 (in Russian).
9. Bondarev E.A., Vasil'ev V.I., Voevodin A.F. i dr., Termogidrodinamika sistem dobychi i transporta gaza [Thermohydrodynamics of gas production and transportation systems]. Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch, 1988 (in Russian).
10. Vasil'ev V.I., Popov V.V., Timofeeva T.S., Vychislitel'nye metody v razrabotke mestorozhdeniy nefi i gaza [Computational methods in the development of oil and gas fields]. Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch, 2000 (in Russian).

11. Latonov V.V., Gurevich G.R., Raschet koeffitsienta szhimaemosti prirodnykh gazov [Calculation of the compressibility coefficient of natural gases]. *Gazovaya Promyshlennost'* [The gas industry], 1969, Vol.2, pp. 7–9 (in Russian).
12. Konovalov A.N., Zadacha fil'tratsii mnogofaznoy neszhimaemoy zhidkosti [The problem of filtration of a multiphase incompressible fluid]. Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch, 1988 (in Russian).
13. Yanenko N.N., Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki [Fractional step method for solving multidimensional problems of mathematical physics]. Novosibirsk: Nauka, 1967 (in Russian).
14. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M., Explicit-implicit schemes for non-isothermal filtration problem: single-temperature model. *J. Comput. Appl. Math.*, 2024, Vol. 440, Article number 115639; DOI: 10.1016/j.cam.2023.115639.
15. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M., Non-isothermal filtration problem: Two-temperature computational model. *J. Comput. Phys.*, 2025, Vol. 531, Article number 113941; DOI: 10.1016/j.jcp.2025.113941.
16. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N., Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat transfer]. Moscow: LIBROKOM, 2009 (in Russian).
17. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N., Chislennyye metody resheniya zadach konveksii-diffuzii [Numerical methods for solving convection-diffusion problems]. Moscow: Editorial URSS, 1999 (in Russian).
18. Zverev V.G., Gol'din V.D., Raznostnaya skhema dlya resheniya konvektivno-diffuzionnykh zadach teplomassoobmena [Difference scheme for solving convective-diffusion problems of heat and mass transfer]. *Vychislitel'nye Tekhnologii* [Comput. Technol.], 2002, Vol. 7, No. 6, pp. 24–37 (in Russian).
19. Vasil'ev V.I., Ammosov A.V., Numerical Modeling of Non-Isothermal Filtration of Natural Gas. *Siberian Electronic Math. Reports*, 2025; DOI: 10.33048/semi.2025.22.A12
20. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M., O modelirovanii skvazhin v zadachakh fil'tratsii [On well modeling in filtration problems]. *Sib. Elektron. Matem. Izvestiya* [Siberian Electronic Math. Reports], 2019, Vol. 16, pp. 1868–1884 (in Russian); DOI: 10.33048/semi.2019.16.133
21. Rozhin I.I., Kalacheva L.P., Ivanova I.K., Issledovanie gidratoobrazovaniya dlya povysheniya nadezhnosti dobychi i transporta prirodnogo gaza v usloviyakh kriolitozony [Investigation of hydrate formation to improve the reliability of natural gas production and transportation in cryolithozone conditions]. *Prirodnye resursy Arktiki i Subarktiki* [Natural resources of the Arctic and Subarctic. ], 2021, Vol. 26, No. 1, pp. 49–59 (in Russian); DOI: 10.31242/2618-9712-2021-26-1-5
22. Sivtsev A.I., Rozhin I.I., Search for technogenic deposits under the permafrost-hydrate seal within the Vilyui syncline. *SOCAR Proc.*, 2022. Special Iss. 1, pp. 90–98; DOI: 10.5510/OGP2022SI100666.
23. Borisova N.N., Rozhin I.I., Ivanov G.I., Algorithm for determining the gas flow rate by the half-division method for pressure measurements in hydrate formation in a well. *Internat. Sci. Conf. Energy Management of Municipal Facilities and Environmental Technol. (EMMFT-2024). E3S Web of Conference*, 2024, Vol. 592; DOI:10.1051/e3sconf/202459204007.
24. Mangazeev P.V., Pankov M.V., Kulagina T.E., Kamardinov M.R., Deeva T.A. Hidrodinamicheskie issledovaniya skvazhin [Hydrodynamic studies of wells]. Tomsk: TPU Publ., 2004 (in Russian).