

УДК 517.938:517.984

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ
ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭТИХ ОПЕРАТОРОВ
В БОЛЕЕ ШИРОКИЕ ПРОСТРАНСТВА**

© 2026 В. С. Белоносов^a, А. Г. Швец^b

*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^abelonosov@academ.org, ^ba.shvets1@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 07.05.2026 г.; после доработки 07.05.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Изучаются фундаментальные свойства широкого класса неограниченных замкнутых линейных операторов в банаховых пространствах, заданных на не всюду плотных множествах. В частности, к этому классу относятся дифференциальные операторы Штурма — Лиувилля с однородными граничными условиями Дирихле, действующие в пространствах непрерывных функций на ограниченных промежутках. С использованием теории обобщённых производных С. Л. Соболева такие операторы могут быть распространены на всюду плотные множества в гильбертовых пространствах. Возникает вопрос о связи значений аналитических функций исходного и распространённого операторов. В работе установлены достаточные условия, при которых аналитические функции распространённых операторов являются соответствующими расширениями тех же функций исходных операторов. Полученный результат уточняет условия согласования резольвентных конструкций при таком переходе между пространствами.

Ключевые слова: аналитические функции линейных операторов в банаховых пространствах, резольвента, распространение операторнозначных функций в более широкие пространства.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.102

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением опубликованной работы [1], мотивированной проблемами параметрического резонанса для абстрактных уравнений Матъё — Хилла:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Bu(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t)). \quad (1)$$

Здесь $u(t)$ — функция вещественного аргумента t со значениями в банаховом пространстве E ; B — замкнутый линейный оператор в E , который может быть ограниченным или неограниченным; ε — малый скалярный параметр; $F(\tau, u)$ — отображение со значениями в E , непрерывное по совокупности аргументов и почти периодическое по переменной τ ; ω — частота возмущения $\varepsilon F(\omega t, u)$.

Классический способ решения проблем параметрического резонанса связан с асимптотическим методом усреднения Крылова — Боголюбова (см. [2]–[10]). Применение этого метода требует предварительного преобразования исходного уравнения к системе первого порядка в так называемой стандартной форме Боголюбова: $v'(t) = \varepsilon f(t, \omega, v)$. Такое преобразование можно осуществить при дополнительных предположениях о свойствах оператора B . Допустим,

что существует квадратный корень \sqrt{B} , который порождает сильно непрерывную операторную экспоненту $\exp(\pm it\sqrt{B})$. Тогда переход к стандартной форме осуществляется обобщённым преобразованием Ван-дер-Поля:

$$v_1(t) = e^{-it\sqrt{B}}[\sqrt{B}u(t) - iu'(t)]/2, \quad v_2(t) = e^{+it\sqrt{B}}[\sqrt{B}u(t) + iu'(t)]/2.$$

При этом для вектора $v = (v_1, v_2)$ получается система:

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= \frac{-i\varepsilon}{2} e^{-it\sqrt{B}} F(\omega t, (\sqrt{B})^{-1}[e^{+it\sqrt{B}}v_1 + e^{-it\sqrt{B}}v_2]), \\ v_2'(t) &= \frac{+i\varepsilon}{2} e^{+it\sqrt{B}} F(\omega t, (\sqrt{B})^{-1}[e^{+it\sqrt{B}}v_1 + e^{-it\sqrt{B}}v_2]). \end{aligned}$$

В настоящее время данный подход реализован для уравнений (1) в гильбертовых пространствах. Например, в работе [4] развита теория параметрического резонанса для широкого класса уравнений Матьё — Хилла с самосопряжёнными и положительными операторами B , имеющими компактные резольвенты. Однако для уравнений в банаховых пространствах с операторами B , не имеющими плотной области определения, соответствующая теория пока не разработана. В частности, таким является дифференциальный оператор Штурма — Лиувилля в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$:

$$w(x) \mapsto -\frac{d^2w(x)}{dx^2} + q(x)w(x), \quad q(x) \in C[a, b], \quad q(x) \geq 0, \quad (2)$$

определённый на дважды гладких функциях $w(x)$, равных нулю на концах промежутка $[a, b]$. В фундаментальной научной литературе эти операторы часто называют «плохими» (например, в книге [8]), и переходят к их распространению в гильбертово пространство L_2 .

Возникает естественный вопрос: почему научное сообщество отказалось изучать свойства «плохих» операторов? В литературе нет утверждений, что такие операторы не имеют квадратных корней, порождающих сильно непрерывные экспоненты $\exp(\pm it\sqrt{B})$. Темой наших исследований является выяснение этого вопроса. В работе [1] установлено существование дробных степеней для широкого класса «плохих» операторов. Настоящая статья дополняет эти результаты и приводит новые свойства соответствующих операторов, определяющие взаимосвязь аналитических функций от исходных операторов и их распространений на более широкие пространства. В дальнейшем эти свойства могут быть использованы при решении проблем существования операторных экспонент $\exp(\pm it\sqrt{B})$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сформулируем итоги работы [1], которые применяются далее для достижения предполагаемых результатов настоящей статьи. При этом используются традиционные обозначения: \mathbb{R} и \mathbb{C} — множества вещественных и комплексных чисел; $\|\cdot\|_X$ — норма элементов банахова пространства X ; $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$ — норма ограниченных линейных отображений из X в Y .

Пусть r и φ — вещественные числа, причём $r > 0$, $0 < \varphi < \pi/2$. Символом $S(r, \varphi)$ обозначим множество комплексных λ , удовлетворяющих неравенствам $|\lambda| \geq r$, $|\arg \lambda| \leq \varphi$, а символом $\Delta(r, \varphi)$ — дополнение к $S(r, \varphi)$ до полного набора комплексных чисел \mathbb{C} .

Рассмотрим произвольный замкнутый линейный оператор B в банаховом пространстве E , определённый на множестве $D(B)$, которое может не быть всюду плотным в E . Именно таким является оператор Штурма — Лиувилля (2) в пространстве непрерывных функций. Введём необходимый далее класс операторов $K_E(r, \varphi)$.

Определение. Будем говорить, что оператор B принадлежит классу $K_E(r, \varphi)$, если множество $\Delta(r, \varphi)$ состоит из регулярных точек, для которых определена резольвента $R_B(\lambda) = (B - \lambda I)^{-1}$ и выполнено неравенство:

$$\|R_B(\lambda)\|_{E \rightarrow E} \leq M_{r, \varphi} (1 + |\lambda|)^{-1},$$

где $M_{r, \varphi}$ — фиксированная константа для всех $\lambda \in \Delta(r, \varphi)$.

Основным результатом работы [1] является распространение понятия аналитических операторнозначных функций на элементы $B \in K_E(r, \varphi)$. Пусть $f(\lambda)$ — комплекснозначная функция, определённая и аналитическая в области Ω_f , содержащей сектор $S(r_f, \varphi_f)$ с параметрами

$$0 < r_f < r, \quad \varphi < \varphi_f < \pi/2.$$

При этом справедливы включения $\Omega_f \supset S(r_f, \varphi_f) \supset S(r, \varphi)$. Дополнительно предполагается, что $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda^\gamma f(\lambda) = 0$ при каком-нибудь $\gamma > 0$. Тогда

$$f(B) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_B(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где Γ — граница множества $S(\rho, \psi)$ с показателями

$$r_f \leq \rho < r, \quad \varphi < \psi \leq \varphi_f,$$

ориентированная так, чтобы при её обходе множество $S(\rho, \psi)$ оставалось слева. Ввиду аналитичности функций $f(\lambda)$ и $R_B(\lambda)$ на множестве $\Omega_f \cap \Delta(r, \varphi)$, указанный выбор показателей ρ и ψ не влияет на значение интеграла (3).

Теперь перейдём к изучению изменения функций $f(B)$ при замене оператора $B : E \rightarrow E$ его распространениями на более широкие пространства. Необходимое понятие распространения неоднозначно рассматривается в научной литературе, поэтому предварительно сформулируем применяемое далее определение.

Предположим, что H — банахово пространство, содержащее все элементы E , образующие в H векторное подпространство, и при всех $x \in E$ выполнено неравенство $\|x\|_H \leq c \|x\|_E$ (например, $H = L_2[a, b]$, $E = C[a, b]$). Замкнутый линейный оператор $A : H \rightarrow H$ с областью определения $D(A) \subset H$ назовём распространением $B : E \rightarrow E$, если $D(B) \subset D(A)$ в пространстве H , причём $Ax = Bx$ для всех $x \in D(B)$.

Теорема. Пусть B — замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве E , а оператор A — распространение B в более широкое пространство H . Кроме того, $B \in K_E(r, \varphi)$ и $A \in K_H(r, \varphi)$ при общих значениях r и φ . Если аналитическая функция $f(\lambda)$ удовлетворяет приведённым выше условиям в области Ω_f , содержащей множества $S(r_f, \varphi_f) \supset S(r, \varphi)$, то определённая на H операторная функция $f(A)$ будет распространением определённой на E операторной функции $f(B)$.

Доказательство. Функция $f(B)$ определена интегралом (3), абсолютно сходящимся по норме $\|\cdot\|_{E \rightarrow E}$, а функция $f(A)$ — таким же интегралом для оператора A , абсолютно сходящимся по норме $\|\cdot\|_{H \rightarrow H}$. Необходимо установить, что значения этих операторных интегралов на любом элементе $x \in E$ совпадают в пространстве H .

Предварительно отметим, что если оператор B имеет обратный B^{-1} в пространстве E , а оператор A имеет обратный A^{-1} в пространстве H , то A^{-1} будет распространением B^{-1} . Действительно, пусть элемент y принадлежит области определения B^{-1} , тогда $x = B^{-1}y \in D(B)$ и $y = Bx = Ax$ в пространстве H . Следовательно, $B^{-1}y = A^{-1}y$ и A^{-1} является распространением B^{-1} .

Точно так же можно проверить, что если комплексное число λ – регулярное значение для операторов A и B , то $(A - \lambda I)^{-1} = R_A(\lambda)$ будет распространением $(B - \lambda I)^{-1} = R_B(\lambda)$ в пространство H .

Возьмём произвольный элемент $x \in E$ и представим $f(B)x$ в виде интеграла в пространстве E :

$$f(B)x = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_B(\lambda) x d\lambda,$$

Уже отмечалось, что этот интеграл абсолютно сходится не только в E , но и в H . Интерпретируя эту формулу, как интеграл в H , и применяя утверждение о взаимосвязи операторов $R_B(\lambda)$ и $R_A(\lambda)$, получим равенство:

$$f(B)x = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_B(\lambda) x d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_A(\lambda) x d\lambda = f(A)x.$$

Таким образом, для любого $x \in E$ выполнено соотношение $f(B)x = f(A)x$. Следовательно, $f(A)$ является распространением $f(B)$, и теорема доказана. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результат этой теоремы может быть использован при изучении свойств сложных операторнозначных аналитических функций с помощью их распространений в более широкие пространства.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках подготовки кандидатской диссертации в аспирантуре Новосибирского национального исследовательского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоносов В. С., Швец А. Г. Фундаментальные свойства дробных степеней неограниченных операторов в банаховых пространствах // Математические труды. 2024. Т. 27, № 3. С. 20–29. DOI: 10.25205/1560-750X-2024-27-3-20-29.
2. Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределённых системах. Л.: Издательство Ленинградского государственного университета, 1982.
3. Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
4. Белоносов В. С. Асимптотический анализ параметрической неустойчивости нелинейных гиперболических уравнений // Математический сборник. 2017. Т. 208, № 8. С. 4–30. DOI: 10.4213/sm8883.
5. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев: Издательство Академии наук Украинской ССР, 1937.
6. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974.
8. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
9. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
10. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

UDC 517.938:517.984

**TRANSFORMATION OF ANALYTIC FUNCTIONS OF LINEAR
OPERATORS IN BANACH SPACES WHEN THESE OPERATORS
ARE EXTENDED TO LARGER SPACES**

© 2026 V. S. Belonosov^a, A. G. Shvets^b

*Novosibirsk State University,
Pirogov st., 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: ^abelonosov@academ.org, ^ba.shvets1@g.nsu.ru

Received 07.05.2026, revised 07.05.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. This paper studies the fundamental properties of a broad class of unbounded closed linear operators in Banach spaces with non-dense domains. In particular, this class includes Sturm–Liouville differential operators with homogeneous Dirichlet boundary conditions acting in spaces of continuous functions on bounded intervals. Using S. L. Sobolev’s theory of generalized derivatives, such operators can be extended to densely defined operators in Hilbert spaces. The question then arises of the relationship between analytic functions of the original and extended operators. In this paper, we establish sufficient conditions under which the analytic functions of the extended operators are extensions of the corresponding analytic functions of the original operators. The result obtained refines the conditions for the compatibility of resolvent constructions during such a transition between spaces.

Keywords: spectral properties, resolvents and analytic functions of linear operators in Banach spaces.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.102

REFERENCES

1. Belonosov V.S., Shvets A.G. Fundamental’nye svoystva drobnykh stepenej neogranichennykh operatorov v banahovykh prostranstvakh [Fundamental properties of fractional powers of unbounded operators in Banach spaces], *Matematicheskie Trudy*, 2024, Vol. 27, No. 3, pp. 20–29 (in Russian); DOI: 10.25205/1560-750X-2024-27-3-20-29.
2. Fomin V.N. Matematicheskaya teoriya parametricheskogo rezonansa v lineinykh raspredelennykh sistemakh [Mathematical theory of parametric resonance in linear distributed systems]. Leningrad: Leningrad State University Press, 1982 (in Russian).
3. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. Parametricheskii rezonans v lineinykh sistemakh [Parametric resonance in linear systems]. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
4. Belonosov V.S. Asymptotic analysis of the parametric instability of nonlinear hyperbolic equations. *Sbornik: Mathematics*, 2017, Vol. 208, No. 8, pp. 1088–1112; DOI: 10.1070/SM8883.
5. Krylov N.M., Bogolyubov N.N. Vvedenie v nelineinuyu mekhaniku [Introduction to nonlinear mechanics]. Kiev: Publ. House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1937 (in Russian).
6. Mitropol’skii Yu.A. Metod usredneniya v nelineinoy mekhanike [The averaging method in nonlinear mechanics]. Kiev: Naukova Dumka, 1971 (in Russian).
7. Bogolyubov N.N., Mitropol’skii Yu.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).

8. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii [Integral operators in spaces of summable functions]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
9. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin; N. Y.: Springer-Verl., 1966.
10. Krein S.G. Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve [Linear differential equations in Banach spaces]. Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).