

УДК 519.61

О ВЛИЯНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ КРЫЛОВОГО ТИПА НА ТОЧНОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И ФОРМИРОВАНИЕ КРИТЕРИЯ ОСТАНОВА

© 2026 В. П. Ильин^{1a}, В. Н. Бабенко^{2b}

¹*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,*
²*Кубанский государственный технологический университет,
ул. Московская, 2, г. Краснодар 350072, Россия*

E-mails: ^ailin@sscc.ru, ^brnibvd@mail.ru

Поступила в редакцию 08.12.2025 г.; после доработки 13.02.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

При осуществлении вычислений на ЭВМ неизбежно возникают погрешности округления. В настоящей работе исследуется вопрос о влиянии указанных погрешностей на точность вычисления очередного приближения в проекционном методе решения СЛАУ с применением проектирования на подпространства Крылова. Получена оценка точности вычисленного приближения, выраженная через возмущения исходных данных. Предложен критерий останова итераций, гарантированно обеспечивающий выбранную приемлемую точность искомого решения.

Ключевые слова: ортопроектор, подпространство Крылова, проекционный метод, СЛАУ большой размерности, погрешности округлений.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.103

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу решения СЛАУ

$$Ax = f. \quad (1)$$

где A — невырожденная матрица порядка N .

Пусть v — произвольный вектор. Векторы $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ образуют последовательность Крылова, при этом $K_m(A, v) = \text{span}(v | Av | \dots | A^{m-1}v)$ — подпространство Крылова, порождаемое матрицей A и вектором v .

Суть рассматриваемого метода состоит в следующем (см. [1–3]). Пусть произвольный вектор x^0 — начальное приближение точного решения \bar{x} системы (1), соответственно $r^0 = f - Ax^0$ порождаемая им невязка. Последовательность $\{x^n\}$, $n = 1, 2, \dots$, определяется соотношениями

$$x^n = x^{n-1} + y^{n-1}, \quad (2)$$

где

$$y^{n-1} = V_{n-1} H_{n-1}^{-1} V_{n-1}^* r^{n-1}, \quad (3)$$

$$r^n = f - Ax^n, \quad (4)$$

V_{n-1} — матрица, столбцы которой $v_1^{n-1}, v_2^{n-1}, \dots, v_{m_{n-1}}^{n-1}$ определяются ортогонализацией Грама — Шмидта системы векторов $r^{n-1}, Ar^{n-1}, \dots, A^{m_{n-1}-1}r^{n-1}$ и образуют ортонормированный базис в $K_{m_{n-1}} = \text{span}\{r^{n-1}, Ar^{n-1}, \dots, A^{m_{n-1}-1}r^{n-1}\}$ (другими словами V_{n-1}^* является обратной слева к V_{n-1}), матрица H_{n-1} определяется соотношением

$$AV_{n-1} = V_{n-1}H_{n-1}. \quad (5)$$

При этом последовательность $\{x^n\}$ сходится к точному решению \bar{x} системы (1) (см. [4, 5], а также более современные источники [6, 7]). Здесь m_{n-1} — размерность подпространства Крылова на n -ой итерации.

В связи с тем, что $V_{n-1}^* = V_{n-1}^+$, где матрица V_{n-1}^+ — псевдообратная к V_{n-1} , произведение $V_{n-1}V_{n-1}^*$ представляет собой ортопроектор, поэтому рассматриваемый нами итерационный процесс относят к проекционным методам, интерес к которым не ослабевает уже долгие годы, что подтверждается неуменьшающимся потоком публикаций. Среди них, отметим недавние [8, 9].

Вследствие погрешностей округлений при машинной реализации формул (2)–(5) вместо определяемой ими последовательности $\{x^n\}$ мы получим возмущённую последовательность $\{\tilde{x}^n\}$. Содержанием нашей работы является исследование влияния погрешностей округлений на точность вычисления элементов последовательности $\{\tilde{x}^n\}$. В результате проведённых исследований мы намерены дать рекомендации о повышении точности вычисления финального приближения x^n , а также выработать критерий останова итераций, обеспечивающий оценку гарантированной точности вычисленного решения СЛАУ (1).

Нашей работе предшествовали подобные исследования в [10–12]. Следует также сказать, что исследования, посвящённые определению оценки возмущений матриц V и H , проводились ранее в работах [13–15].

Здесь также мы должны сказать, что представляемое исследование теснейшим образом связано с работой [16] и, по существу, является её продолжением.

Наша работа построена следующим образом. Во втором разделе проводится исследование влияния погрешностей округлений на точность вычисления очередного приближения. Третий раздел посвящён выработке критерия останова итерационного процесса, обеспечивающего приемлемую точность вычисленного результата. Тестовые испытания составляют содержание четвёртого раздела. Наконец, в пятом разделе проводится обсуждения полученных результатов.

1. ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОКРУГЛЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЧЕРЕДНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Обращаясь к формулам (2), (4) и (3), мы обнаружим, что проведение очередной итерации сводится к вычислению шести векторов:

$$\begin{aligned} s^{n-1} &= Ax^{n-1}, & r^{n-1} &= f - s^{n-1}, & \hat{w}^{n-1} &= V_{n-1}^* r^{n-1}, & z^{n-1} &= H_{n-1}^{-1} \hat{w}^{n-1}, \\ \hat{y}^{n-1} &= V_{n-1} z^{n-1}, & x^n &= x^{n-1} + \hat{y}^{n-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вследствие погрешностей округлений при машинной реализации вычислений вместо векторов $s^{n-1}, r^{n-1}, \hat{w}^{n-1}, z^{n-1}, \hat{y}^{n-1}, x^n$ мы получим их возмущённые аналоги.

Замечание 1.1. Каждое последующее приближение x^n строится по предшествующей невязке r^{n-1} , поэтому погрешности, допущенные на предыдущей итерации (при вычислении x^{n-1}) корректируются на последующей, то есть при вычислении x^n .

Свой подход к явлению, описанному в замечании 1.1 мы выразим следующим образом.

Входные данные: A, f — матрица и правая часть системы (1), \tilde{x}^0 — произвольный начальный вектор.

Процесс итераций: $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x^{n-1} \text{ arrow } \tilde{x}^{n-1}, \\ \tilde{s}^{n-1} = s^{n-1} + \delta s^{n-1}, \quad \tilde{r}^{n-1} = r^{n-1} + \delta r^{n-1}, \quad \tilde{w}^{n-1} = \widehat{w}^{n-1} + \delta \widehat{w}^{n-1}, \\ \tilde{z}^{n-1} = z^{n-1} + \delta z^{n-1}, \quad \tilde{y}^{n-1} = \widehat{y}^{n-1} + \delta \widehat{y}^{n-1}, \quad \tilde{x}^n = x^n + \delta x^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь arrow — операция присваивания. Во втором, третьем и четвёртом соотношениях из последнего списка возмущения δr^{n-1} , $\delta \widehat{w}^{n-1}$ и δz^{n-1} нам удобно представить в виде суммы двух слагаемых: наследственного возмущения и возмущения, моделирующего погрешности округлений, возникающих непосредственно при выполнении машинного вычисления векторов \widehat{w}^{n-1} , z^{n-1} , \widehat{y}^{n-1} . Согласно сказанному, запишем

$$\delta r^{n-1} = \delta r_r^{n-1} + \delta r_{r\widehat{w}}^{n-1}, \quad \delta \widehat{w}^{n-1} = \delta \widehat{w}_w^{n-1} + \delta w_{wz}^{n-1}, \quad \delta z^{n-1} = \delta z_z^{n-1} + \delta z_{zy}^{n-1}. \quad (8)$$

Для описания связей векторов в первом, втором, и шестом равенствах из списка (6) с их возмущёнными аналогами с учётом (8) мы обратимся к следующим моделям:

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{n-1} &= (A + \delta A^{n-1})x^{n-1}, \quad \text{где } \|\delta A^{n-1}\| \leq \alpha_A^{n-1}\|A\|, \quad \alpha_A^{n-1} \leq \alpha_A, \\ r^{n-1} + \delta r_r^{n-1} &= (I + \Delta_{fs}^{n-1})(f - \tilde{s}^{n-1}), \quad \text{где } \Delta_{fs}^{n-1} = \text{diag}\{\delta_{fs,1}^{n-1}, \dots, \delta_{fs,N}^{n-1}\}, \quad |\delta_{fs,i}^{n-1}| < \varepsilon, \\ \tilde{x}^n &= \{I + \Delta_{xy}^{n-1}\}(x^{n-1} + \tilde{y}^{n-1}), \quad \text{где } \Delta_{xy}^{n-1} = \text{diag}\{\delta_{xy,1}^{n-1}, \dots, \delta_{xy,N}^{n-1}\}, \quad |\delta_{xy,i}^{n-1}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку исследование погрешностей проводится в рамках одной итерации, мы, введя обозначения

$$u = x^n, \quad \tilde{u} = \tilde{x}^n,$$

в используемых ниже соотношения индекс, указывающий на номер итерации, можем опустить. При этом получим более компактные обозначения, в частности последние соотношения примут вид

$$\tilde{s} = (A + \delta A)x, \quad \text{где } \|\delta A\| \leq \alpha_A\|A\|, \quad (9)$$

$$r + \delta r_r = (I + \Delta_{fs})(f - \tilde{s}), \quad \text{где } \Delta_{fs} = \text{diag}\{\delta_{fs,1}, \dots, \delta_{fs,N}\}, \quad |\delta_{fs,i}| < \varepsilon, \quad (10)$$

$$\tilde{u} = \{I + \Delta_{xy}\}(x + \tilde{y}), \quad \text{где } \Delta_{xy} = \text{diag}\{\delta_{xy,1}, \dots, \delta_{xy,N}\}, \quad |\delta_{xy,i}| < \varepsilon. \quad (11)$$

Лемма 1.1. Пусть равенства $s = Ax$ и $\tilde{s} = (A + \delta A)x$ связаны соотношением $\|\delta A\| \leq \alpha_A\|A\|$, тогда выполняется неравенство

$$\|\tilde{s} - s\|/\|s\| \leq c(A)\alpha_A, \quad (12)$$

где $c(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы A .

Доказательство. Рассмотрим разность $\tilde{s} - s$. В соответствии с определением векторов s и \tilde{s} (см. (9)) запишем цепочку равенств

$$\tilde{s} - s = (A + \delta A)x - Ax = \delta Ax = \delta AA^{-1}s.$$

Отсюда благодаря выполнению неравенства, входящего в состав условий леммы, следует:

$$\|\tilde{s} - s\| \leq \|\delta A\|\|A^{-1}\|\|s\| \leq \alpha_A\|A\|\|A^{-1}\|\|s\|.$$

Из последней цепочки отношений вытекает неравенство (12). \square

Неравенство (12) представим в эквивалентном виде

$$\tilde{s} = (I + \Delta_s)s, \text{ где } \|\Delta_s\| \leq c(A)\alpha_A. \quad (13)$$

Ниже следуют сведения из [16], которые мы приведём в виде справки, включая леммы 1.2–1.4 и теорему 1.1.

Обращаясь к списку формул (6), мы можем сказать, что 3-5 формулы эквивалентны решению систем

$$Vw \cong r, \quad Hz \cong w, \quad V^*y \cong z.$$

Вследствие округлений вместо последних трёх систем в соответствии со вторым, третьим и четвёртым соотношениями в (7) и списком формул (8) мы решим возмущённые системы

$$\begin{aligned} (V + X_{Vw})\tilde{w} &\cong r + \delta r_r + \delta r_{r\widehat{w}}, & (H + X_{Hz})\tilde{z} &\cong \widehat{w} + \delta\widehat{w}_{\widehat{w}} + \delta\widehat{w}_{\widehat{w}z}, \\ (V + X_{Vy})^*\tilde{y} &\cong z + \delta z_z + \delta z_{zy}, \end{aligned} \quad (14)$$

при этом X_{Vw} , X_{Hz} , X_{Vy} удовлетворяют равенствам

$$X_{Vw} = X_V + X_w, \quad X_{Hz} = X_H + X_z, \quad X_{Vy} = X_V + X_y, \quad (15)$$

где возмущения X_V и X_H моделируют погрешности, обусловленные неточностью предварительно вычисленных матриц V и H . Соответственно возмущения X_w , X_z и X_y моделируют погрешности, возникающие при непосредственном машинном решении систем уравнений.

Лемма 1.2. Пусть в соотношениях (14) и (15) возмущения X_V , X_w , δr_r и $\delta r_{r\widehat{w}}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_{\widehat{w}}\| \leq \alpha_{\widehat{w}}, \quad \|\delta r_r\| \leq \beta_r\|r\|, \quad \|\delta r_{r\widehat{w}}\| \leq \beta_{r\widehat{w}}\|r\|$$

причём

$$1 - \alpha_V - \alpha_w > 0, \quad \|\tilde{r}\| \leq \gamma\|\widehat{r}\|,$$

где

$$\widehat{r} + \tilde{r} = r, \quad \widehat{r} = VV^+r, \quad \tilde{r} = (I - VV^+)r.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\tilde{w} - \widehat{w}\|/\|\widehat{w}\| \leq \frac{(\alpha_V + \alpha_w)\gamma + (\alpha_V + \alpha_w + (\beta_r + \beta_{r\widehat{w}})\sqrt{1 + \gamma^2})}{1 - \alpha_V - \alpha_w}.$$

Лемма 1.3. Пусть в соотношениях (14) и (15) возмущения X_H , X_z , $\delta\widehat{w}_{\widehat{w}}$ и $\delta\widehat{w}_{\widehat{w}z}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_H\| \leq \alpha_H\|H\|, \quad \|X_z\| \leq \alpha_z\|H\|, \quad \|\delta\widehat{w}_{\widehat{w}}\| \leq \beta_{\widehat{w}}\|\widehat{w}\|, \quad \|\delta\widehat{w}_{\widehat{w}z}\| \leq \beta_{\widehat{w}z}\|\widehat{w}\|,$$

причём

$$1 - c(H)(\alpha_H + \alpha_z) > 0,$$

где $c(H)$ — число обусловленности матрицы H . Тогда справедлива оценка

$$\|\tilde{z} - z\|/\|z\| \leq \frac{c(H)(\alpha_H + \alpha_z + \beta_{\widehat{w}} + \beta_{\widehat{w}z})}{1 - c(H)(\alpha_H + \alpha_z)}.$$

Лемма 1.4. Пусть в соотношениях (14) и (15) возмущения X_V , X_y , δz_z и δz_{zy} удовлетворяют неравенствам

$$\|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_y\| \leq \alpha_y, \quad \|\delta z_z\| \leq \beta_z \|z\|, \quad \|\delta z_{zy}\| \leq \beta_{zy} \|z\|,$$

причём $1 - \alpha_V - \alpha_y > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{y} - \widehat{y}\|}{\|\widehat{y}\|} &\leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_z &= \frac{c(H)(\alpha_H + \alpha_z + \eta_{\widehat{w}} + \beta_{\widehat{w}z})}{1 - c(H)(\alpha_H + \alpha_z)}, \\ \eta_{\widehat{w}} &= \frac{(\alpha_V + \alpha_w)\gamma + (\alpha_V + \alpha_w + (\beta_r + \beta_{r\widehat{w}})\sqrt{1 + \gamma^2})}{1 - \alpha_V - \alpha_w}. \end{aligned}$$

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия лемм 1.2–1.4, тогда справедлива оценка точности вычисления поправки \widehat{y}^n

$$\frac{\|\tilde{y} - \widehat{y}\|}{\|\widehat{y}\|} \leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2},$$

где

$$\eta_z = \frac{c(H)(\alpha_H + \alpha_z + \eta_{\widehat{w}} + \beta_{\widehat{w}z})}{1 - c(H)(\alpha_H + \alpha_z)}, \quad (16)$$

$$\eta_{\widehat{w}} = \frac{(\alpha_V + \alpha_w)\gamma + (\alpha_V + \alpha_w + (\beta_r + \beta_{r\widehat{w}})\sqrt{1 + \gamma^2})}{1 - \alpha_V - \alpha_w}. \quad (17)$$

Замечание 1.2. Последнее неравенство перепишем в эквивалентном виде

$$\tilde{y} = (I + X_y)\widehat{y},$$

где

$$\|X_y\| \leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2}.$$

На основании изложенных сведений справедлива

Теорема 1.2. Пусть выполнены: условия теоремы 1.1 и соотношения (11), тогда справедлива оценка

$$\|\tilde{u} - u\| \leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2} \|\widehat{y}\| + \varepsilon \|u\|. \quad (18)$$

Доказательство. Раскрывая скобки в (11), мы получим

$$\tilde{u} = x + \tilde{y} + \Delta_{xy}(x + \tilde{y}).$$

Обращаясь к теореме 1.1 и первому соотношению в замечании 1.2 к ней, мы можем записать

$$\tilde{u} = x + (I + X_y)\widehat{y} + \Delta_{xy}(x + \tilde{y}) = x + \widehat{y} + X_y\widehat{y} + \Delta_{xy}(x + \tilde{y}).$$

Последнее выражение в соответствии с принятыми обозначениями перепишем в виде

$$\tilde{u} = u + \Delta_{xy}(x + \tilde{y}) + X_y \hat{y}.$$

Отсюда следует

$$\|\tilde{u} - u\| \leq \|\Delta_{xy}(x + \tilde{y})\| + \|X_y \hat{y}\|. \quad (19)$$

В последнем соотношении рассмотрим каждый из его членов, стоящих в правой части неравенства.

Сначала обратимся ко второму слагаемому последнего неравенства. Первый пункт условий теоремы апеллирует к условиям теоремы 1.1, поэтому согласно утвердительной части последней и второму соотношению в замечании 1.2, мы можем записать

$$\|X_y \hat{y}\| \leq \|X_y\| \|\hat{y}\| \leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2} \|\hat{y}\|, \quad (20)$$

где η_z определён в (16), соответственно $\eta_{\tilde{w}}$ — в (17).

Обращаясь теперь к первому слагаемому, мы можем сказать, что для него справедлива следующая цепочка отношений

$$\begin{aligned} \|\Delta_{xy}(x + \tilde{y})\| &= \|\Delta_{xy}(x + (I + X_y)\hat{y})\| = \|\Delta_{xy}(x + \hat{y}) + \Delta_{xy}X_y\hat{y}\| \\ &\leq \|\Delta_{xy}u\| + \|\Delta_{xy}X_y\hat{y}\| \leq \|\Delta_{xy}\| \|u\| + \|\Delta_{xy}X_y\| \|\hat{y}\|. \end{aligned}$$

Пренебрегая множителем $\|\Delta_{xy}X_y\|$ как величиной второго порядка малости, будем считать выполненным неравенство

$$\|\Delta_{xy}(x + \tilde{y})\| \leq \|\Delta_{xy}\| \|u\|.$$

Отсюда благодаря (11) следует

$$\|\Delta_{xy}(x + \tilde{y})\| \leq \varepsilon \|u\|.$$

Наконец, используя последнее соотношение и также (20) в неравенстве (19) получим (18). \square

2. КРИТЕРИЙ ОСТАНОВА ИТЕРАЦИЙ

Приступая к исследованию поставленного вопроса, вынесенного в заголовок настоящего параграфа, мы должны высказать некоторые потребующиеся в дальнейшем положения (соображения). Пусть

- 1) \bar{x} — точное решение системы (1),
- 2) x — приближённое решение системы (1) ($x = x^n$), полученное на n -ой итерации,
- 3) δr_r^n — погрешность, вносимая в результат вычисления невязки r^n .

Согласно сказанному мы можем записать следующие соотношения:

$$A\bar{x} = f, \quad Ax^n = f - r^n, \quad A\tilde{x}^n = f - r^n + \delta r_r^n. \quad (21)$$

Для принятия решения об останове итерационного процесса в условиях безошибочных вычислений невязки можно воспользоваться известным неравенством.

$$\|x^n - \bar{x}\| / \|\bar{x}\| \leq c(A) \|r^n\| / \|f\|, \quad (22)$$

Действительно, получив x^n такое, что $r^n = f - Ax^n$ при некотором достаточно малом κ удовлетворяет неравенству

$$c(A) \|r^n\| / \|f\| \leq \kappa,$$

мы в силу (22) можем записать цепочку неравенств

$$\|x^n - \bar{x}\|/\|\bar{x}\| \leq c(A)\|r^n\|/\|f\| \leq \kappa,$$

из которой следует, что если κ — приемлемая точность приближённого решения системы (1), то, остановив итерационный процесс (2)–(4), x^n можно принять в качестве приближённого решения заданной системы. При этом гарантированно будет обеспечена точность вычисленного решения:

$$\|x^n - \bar{x}\|/\|\bar{x}\| \leq \kappa.$$

Рассмотрим вопрос принятия решения об останове итераций в условиях, когда невязка вычисляется приближённо. Следуя замечанию 1.1 и связанному с ним подходу, высказанному вслед, мы будем иметь: $x^n = \tilde{x}^n$.

Следуя лемме 1.1 (см. (13)), мы можем записать

$$\tilde{s}^n = (A + \delta A^n)x^n, \quad \text{где} \quad \|\delta A^n\| \leq \alpha_A^n \|A\|, \quad \alpha_A^n < \alpha_A,$$

Ниже нам также придётся пользоваться соотношением:

$$\tilde{r}^n = r^n + \delta r_r^n = (I + \Delta_{f_s}^n)(f - \tilde{s}^n), \quad \text{где} \quad \Delta_{f_s}^n = \text{diag}\{\delta_{f_s,1}^n, \dots, \delta_{f_s,N}^n\}, \quad |\delta_{f_s,i}^n| < \varepsilon.$$

Далее нам в изложении удобно опустить индексы, как это делалось нами ранее.

$$\tilde{s} = (A + \delta A)x, \quad \text{где} \quad \|\delta A\| \leq \alpha_A \|A\|, \quad \alpha_A < \alpha, \quad (23)$$

$$\tilde{r} = r + \delta r_r = (I + \Delta_{f_s})(f - \tilde{s}), \quad \text{где} \quad \Delta_{f_s} = \text{diag}\{\delta_{f_s,1}, \dots, \delta_{f_s,N}\}, \quad |\delta_{f_s,i}^n| < \varepsilon, \quad (24)$$

Из первого равенства в цепочке (24) следует равенство

$$r = \tilde{r} - \delta r_r. \quad (25)$$

Обращаясь к (25) а затем ко второму равенству в цепочке (24), мы можем записать

$$r = \tilde{r} - \delta r_r = (I + \Delta_{f_s})(f - \tilde{s}) - \delta r_r = (f - \tilde{s}) + \Delta_{f_s}(f - \tilde{s}) - \delta r_r.$$

Подставив (23) в последнее выражение, будем иметь

$$\begin{aligned} r &= (f - (A + \delta A)x) + \Delta_{f_s}(f - (A + \delta A)x) - \delta r_r \\ &= (f - Ax - \delta Ax) + \Delta_{f_s}(f - x - \delta Ax) - \delta r_r = r - \delta Ax + \Delta_{f_s}(r - \delta Ax) - \delta r_r. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta r_r = -\delta Ax + \Delta_{f_s}(r - \delta Ax).$$

Наконец, осуществив подстановку (25) в последнее равенство, получим

$$\delta r_r = -\delta Ax + \Delta_{f_s}((\tilde{r} - \delta r_r) - \delta Ax).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} (I + \Delta_{f_s})\delta r_r &= -\delta Ax + \Delta_{f_s}(\tilde{r} - \delta Ax), \\ \delta r_r &= (I + \Delta_{f_s})^{-1}(-\delta Ax + \Delta_{f_s}(\tilde{r} - \delta Ax)). \end{aligned} \quad (26)$$

Обращаясь к матрице $(I + \Delta_{f_s})^{-1}$, взятой из последнего соотношения, и учитывая при этом (24), запишем легко устанавливаемую цепочку неравенств

$$\|(I + \Delta_{f_s})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\Delta_{f_s}\|} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon\|A\|}.$$

С учётом последнего неравенства, а также неравенств (23) и (24) из (26) последует

$$\begin{aligned} \|\delta r_r\| &\leq \|(I + \Delta_{f_s})^{-1}\|(\|\delta Ax\| + \|\Delta_{f_s}\|(\|\tilde{r}\| + \|\delta Ax\|)) \\ &\leq \frac{1}{1 - \varepsilon\|A\|}(\alpha_A\|A\|\|x\| + \varepsilon\|A\|(\|\tilde{r}\| + \alpha_A\|A\|\|x\|)). \end{aligned} \quad (27)$$

Наконец, приступим к оценке близости решений системы (1): точного \bar{x} и приближённо вычисленного x . Следуя первым двум соотношениям из (21) и затем равенству (25), получим

$$Ax - A\bar{x} = f + r - f = r = \tilde{r} - \delta r_r.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} x - \bar{x} &= A^{-1}(\tilde{r} - \delta r_r), \\ \|x - \bar{x}\| &\leq \|A^{-1}\|(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|). \end{aligned} \quad (28)$$

Соответственно из третьего соотношения в списке (21), согласно первому равенству в цепочке (24), будем иметь $A\tilde{x} = f + \tilde{r}$. Отсюда последует

$$\|\tilde{x}\| \geq \min_{z, \|z\|=1} \|A^{-1}z\|(\|f\| - \|\tilde{r}\|) = \frac{1}{\|A\|}(\|f\| - \|\tilde{r}\|).$$

Разделив обе части неравенства (28) на $\|\tilde{x}\|$, с учётом последнего неравенства будем иметь

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{\|\tilde{x}\|}(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|) \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|)}{(\|f\| - \|\tilde{r}\|)} = c(A) \frac{(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|)}{(\|f\| - \|\tilde{r}\|)}. \quad (29)$$

Таким образом, завершением проведённого доказательства справедливости последней цепочки отношений может служить

Теорема 2.1. Пусть $\{x^n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, – последовательность векторов, образованная некоторым итерационным процессом решения системы (1) и

$$\begin{aligned} \tilde{s}^n &= (A + \delta A^n)x^n, \quad \text{где } \|\delta A^n\| \leq \alpha_A^n\|A\|, \quad \alpha_A^n < \alpha_A, \\ \tilde{r}^n &= r^n + \delta r_r^n = (I + \Delta_{f_s}^n)(f - \tilde{s}^n), \quad \text{где } \Delta_{f_s}^n = \text{diag}\{\delta_{f_s,1}^n, \dots, \delta_{f_s,N}^n\}, \quad |\delta_{f_s,i}^n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

и пусть для некоторого $\kappa > 0$ число \bar{n} такое, что

$$(A) \frac{(\|\tilde{r}^n\| + \|\delta r_r^n\|)}{(\|f\| - \|\tilde{r}^n\|)} \leq \kappa, \quad (30)$$

где

$$\|\delta r_r^n\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon\|A\|}(\alpha_A\|A\|\|x\| + \varepsilon\|A\|(\|\tilde{r}^n\| + \alpha_A\|A\|\|x\|)),$$

тогда справедлива оценка

$$\frac{\|x^n - \bar{x}\|}{\|\tilde{x}^n\|} \leq \kappa, \quad (31)$$

Таким образом, следуя доказанной теореме, при выполнении неравенства (30) мы можем остановить процесс итераций. При этом для вычисленного приближения x^n гарантированно будет выполнено неравенство (31).

В заключение, мы должны сказать, что при выводе оценок (18), (27) и (29) были использованы известные сведения, которые мы брали из [17, 18]

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Прежде чем приступить к проведению экспериментов выскажем некоторые их обоснования.

В полученных оценках используются два числа обусловленности $c(A)$, и $c(H_{n-1})$. Очевидно, оценкой числа обусловленности матрицы H_{n-1} может служить неравенство $c(H_{n-1}) \leq c(A)$. Нетрудно обнаружить, что равенства выполняются: $c(H_{n-1}(1)) = 1$ при $m = 1$, соответственно $c(H_{n-1}(N)) = c(A)$ при $m = N$. Естественно предположить, что с ростом m величина $c(H_{n-1}(m))$ будет возрастать и достигнет своего наибольшего значения при $m = N$. Встаёт вопрос: как быстро будет возрастать рассматриваемая величина, какое влияние при этом на этот рост будет оказывать вектор $x^{n-1}(r^{n-1})$ и может ли при этом очевидное неравенство $c(H_{n-1}(m)) \leq c(A)$ служить практически значимой оценкой числа обусловленности матрицы $H_{n-1}(m)$.

Для осуществления первоначального знакомства с поведением чисел обусловленности мы провели некоторые вычислительные эксперименты в вычислительной среде приложения Mathcad. Первый эксперимент состоял в следующем. Для СЛАУ (1) с матрицей Гилберта порядка $N = 7$ ($c(A) = 4.754 \cdot 10^8$) и правой частью f , компоненты которой рассчитывались по формуле $f_i = \sum_{k=i}^{N+i-1} 2^{-k+1}$, $i = 1, N$, рассматривался вопрос о поведении чисел обусловленности $c(H_0(m))$ при увеличении m — размерности подпространства Крылова. В качестве приближённого решения были рассмотрены два вектора:

$$1) x^0 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1]^*, \quad 2) x^0 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^*.$$

Результаты представлены в ниже следующей табл. 1 значений чисел обусловленности $c(H_0(m))$.

Таблица 1

Значения чисел обусловленности $c(H_0(m))$ для первого эксперимента

m	2	3	4	5	6
$c(H_0(m))$	6.113	78.171	$1.656 \cdot 10^3$	$7.625 \cdot 10^4$	$4.786 \cdot 10^{19}$
$c(H_0(m))$	6.247	78.026	$1.669 \cdot 10^3$	$2.369 \cdot 10^{10}$	$1.014 \cdot 10^{19}$

Из табл. 1 видно, что для первого x^0 с ростом размерности подпространства Крылова до $m = 5$ наблюдается устойчивый умеренный рост числа обусловленности $c(H_0)$. При $m = 6$ наблюдается так называемый срыв. Для второго вектора наблюдаем ту же тенденцию, однако срыв произошёл уже раньше при $m = 5$.

Обнаруженный срыв обусловлен следующими обстоятельствами. По условиям эксперимента матрица A системы (1) положительно определена. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ — упорядоченный по возрастанию её спектр и p_1, p_2, \dots, p_N — отвечающие указанным собственным значениям собственные векторы. Обратимся к подпространству Крылова, $K_{m_{n-1}}$. Приняв $n = 1$ и введя при этом обозначения $w^1 = r^0, w^2 = Aw^1, \dots, w^m = Aw^{m-1}$, мы обнаружим, что представленная последовательность Крылова совпадает с последовательностью степенного метода, которая сходится по направлению к p_N , соответственно отношение $\frac{(w^m)^* Aw^m}{(w^m)^* w^m}$ — к λ_N . В нашем эксперименте для первого начального приближения x^0 векторы w^5 и w^6 (для второго начального приближения x^0 векторы w^4 и w^5) получились почти коллинеарными с вектором p_N и соответственно почти коллинеарными друг к другу. В условиях машинных вычислений

невозможно вычислить векторы

$$u^6 = w^6 - \frac{(w^5)^* w^6}{(w^5)^* w^5} w^5, \quad u^5 = w^5 - \frac{(w^4)^* w^5}{(w^4)^* w^4} w^4$$

с высокой степенью точности, не прибегая при этом к специализированным алгоритмам и программам, что и показали результаты рассматриваемого эксперимента. Простейший выход из сложившейся ситуации — ограничиться числом $m = 5$ ($m = 4$).

Ту же картину мы наблюдаем в следующей строке до $m = 4$, причём имеются незначительные отличия рассматриваемых последовательностей, полученных для двух разных начальных приближений.

Отметим, что показатель $r = \lambda_{N-1}/\lambda_N$, характеризующий скорость сходимости, в нашем примере равен 0.164. В том случае, когда нет априорной информации о спектре матрицы A , во избежание возникновения рассмотренной ситуации мы рекомендуем воспользоваться методом построения двумерного ортонормированного базиса с гарантированной точностью, изложенным в [19].

Второй эксперимент. Для СЛАУ (1) с матрицей Гилберта порядка $N = 5$, $c(A) = 4.766 \cdot 10^5$ и правой частью $f = [5 \quad -2 \quad 9 \quad -8 \quad 3]^*$ в качестве приближённого решения были рассмотрены три вектора:

$$1) x^0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^*, \quad 2) x^0 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1]^*, \quad 3) x^0 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^*.$$

Для каждого из этих векторов вычислялась последовательность приближений $\{x^n\}$, $n = \overline{1, 5}$. Размерность пространства Крылова m была принята равной четырём. При этом рассматривался вопрос о поведении чисел обусловленности $c(H_{n-1})$. Результаты экспериментов представлены в ниже следующей табл. 2 значений чисел обусловленности $c(H_{n-1})$.

Таблица 2

Значения чисел обусловленности $c(H_{n-1})$ для второго эксперимента

n	1	2	3	4	5
$c(H_{n-1})$	$5.13 \cdot 10^3$	$4.762 \cdot 10^5$	$5.13 \cdot 10^3$	$4.698 \cdot 10^5$	$5.13 \cdot 10^3$
$c(H_{n-1})$	$5.129 \cdot 10^3$	$4.763 \cdot 10^5$	$5.129 \cdot 10^3$	$4.756 \cdot 10^5$	$5.129 \cdot 10^3$
$c(H_{n-1})$	$5.131 \cdot 10^3$	$4.764 \cdot 10^5$	$5.131 \cdot 10^3$	$4.744 \cdot 10^5$	$5.131 \cdot 10^3$

Из сведений, представленных в табл. 2 видно, что при решении одной и той же задачи различными начальными приближениями наблюдается незначительное различие последовательностей чисел обусловленности $c(H_{n-1})$. Однако в каждой последовательности наблюдается существенный разброс значений элементов: $(5.13 \cdot 10^3, 4.762 \cdot 10^5)$, $(5.129 \cdot 10^3, 4.763 \cdot 10^5)$, $(5.13 \cdot 10^3, 4.764 \cdot 10^5)$. Ещё раз обращаясь к последней таблице, мы отметим, что представленные в них значения величин $c(H_2)$ и $c(H_4)$ очень близки к $c(A) = 4.766 \cdot 10^5$.

Замечание 3.1. Организованные вычислительные процессы во всех трёх случаях сошлись уже на четвёртой итерации, при этом величины элементов пар $(\frac{\|x^4 - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}, c(A) \frac{\|\hat{r}^4\|}{\|f\|})$ приняли значения: $(3.987 \cdot 10^{-4}, 1.212 \cdot 10^{-3})$, $(9.663 \cdot 10^{-7}, 0.015)$, $(4.297 \cdot 10^{-4}, 0.019)$ в первом, во втором и третьем случаях соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Следует сказать, что если $m = 1$, то обычно итерационный процесс, описываемый формулами (2)–(5) сходится очень медленно [20], а при $m_0 = N$ потребуется всего лишь один шаг. Действительно,

$$x^1 = x^0 + V_0 H_0^{-1} V_0^* r^0 = x^0 + V_0 V_0^* A^{-1} V_0 V_0^* r^0 = x^0 + A^{-1}(f - Ax^0) = x^0 + A^{-1}f - x^0 = \bar{x}.$$

Отсюда мы можем заключить, что с ростом размерности подпространства Крылова будет повышаться скорость сходимости итерационного процесса.

Препятствием к наращиванию размерности подпространства Крылова является ограниченность оперативной памяти, требующейся для хранения векторов $v_1^{n-1}, v_2^{n-1}, \dots, v_{m_{n-1}}^{n-1}$ (см. [7]).

Благодаря проведённым экспериментам обнаружено второе препятствие для наращивания m_{n-1} — это так называемый срыв построения ортонормированного базиса. Этот срыв может произойти уже при $m_0 = 2$. Действительно, если вектор r^0 почти коллинеарен вектору p_N , где p_N — собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению $\lambda_N(A)$, то вектор $w^2 = Aw^1$ ($w^1 = r^0$) также будет почти коллинеарным вектору w^1 . В этом случае может произойти упомянутый выше срыв. Следует сказать, что поскольку вектор r^0 (x^0) выбирается случайным образом, вероятность указанного события (срыва) ничтожно мала [21]. Тем не менее, обнаруженное явление («сплющивание» базиса подпространства $K_{m_{n-1}} = \text{span}(r^{n-1}|Ar^{n-1}|\dots|A^{m_{n-1}-1}r^{n-1})$ при увеличении m_{n-1}) также является фактором, сдерживающим наращивание размерности подпространства Крылова.

Практическое применение полученной оценки гарантированной точности очередного вычисленного приближения для осуществления останова итераций станет возможным после того, как будут установлены связи величин, моделирующих погрешности округлений с техническими характеристиками используемых ЭВМ: относительной и абсолютной погрешностями выполнения арифметических операций, а также размерами ячеек, используемых для хранения промежуточных результатов вычислений. Установление указанных связей — это следующий этап нашей работы, в котором, частности, будет разрешён вопрос о том является ли полученная оценка завышенной. Однако уже сейчас можно сказать следующее. На заключительной итерации с целью снижения влияния погрешностей на точность полученного x^n при вычислении векторов s^{n-1} , \widehat{w}^{n-1} и z^{n-1} необходимо обращаться к режиму вычислений с повышенной точностью. Причиной этому согласно леммам 1.1, 1.3 и 1.4 является усиление ошибок, допущенных при реализации формул $s^{n-1} = Ax^{n-1}$, $\widehat{w}^{n-1} = V_{n-1}^* r^{n-1}$, $z^{n-1} = H_{n-1}^{-1} \widehat{w}^{n-1}$ (см. (6)), числами обусловленности $c(A)$ и $c(H_{n-1})$. С той же целью при определении вектора r^n для проверки критерия останова итераций $c(A) \frac{(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|)}{(\|f\| - \|\tilde{r}\|)} \leq \kappa$ по аналогичной причине при вычислении вектора s^n следует обращаться к режиму вычислений с повышенной точностью.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследования выполнены в рамках государственного задания Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (проект FWNM-2025-0001). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.
2. Greenbaum A. Iterative Metuloids of Solving Linear Systems // *Frontiers in Applied Mathematics*, 1997; DOI:10.1137/1.9781611970937.
3. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2002.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.

5. Saad J. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Boston: EPS, 1996.
6. Olshanskii M.A., Tyrtshnikov E.E. Iterative methods for linear systems: theory and applications, SIAM (Philadelphia, PA, United States), 2014.
7. Ильин В.П. Итерационные предобусловленные методы в подпространствах Крылова: тенденции XXI века // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2021. Т. 61, № 11. С. 1786–1813; DOI: 10.31857/S0044466921110090
8. Ильин В.П. О проекционных методах в подпространствах Крылова // Записки научных семинаров ПОМИ. 2018. Т. 472. С. 103–119; //ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/zns/v472/p103.pdf
9. Киреев И.В. Ортогональные проекторы и системы линейных алгебраических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики. 2020. Т. 23, № 3. С. 315–324.
10. Arioli M., Fassino C. Truncation error analysis of algorithms based on Krylov subspace methods // BIT. 1996. V. 36, N 2. P. 189–206.
11. Arioli M., Fassino C. Generalized Golub-Kahan Bidiagonalization and Stopping Criteria // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2013. V. 34, N 2. P. 57–592.
12. Greenbaum A. Estimating the Attainable Accuracy of Recursively Computed Residual Methods // SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1997.
13. Capraux J.-F., Godunov S.K., Kuznetsov S.V. Condition number of the Krylov bases and subspaces // Linear Algebra Appl. 1996. V. 248, N 1–3. P. 136–160.
14. Kuznetsov S.V. Perturbation of the Krylov bases and associated Hessenberg Forms // Linear Algebra Appl. 1997. V. 265, N 1–3. P. 1–28.
15. Мальшев А.Н., Sadkane M. Теория возмущений по первому приближению для симметричного алгоритма Ланцоша // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2005. Т. 45, № 3. С. 391–399.
16. Ильин В.П., Бабенко В.Н. О влиянии возмущений на точность вычисления поправки в подпространстве Крылова // Сиб. журн. индустр. математики. 2025. Т. 28, № 1. С. 5–14; DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.101
17. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.
18. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1988.
19. Бабенко В.Н., Ивановский О.Я. Аспекты машинного решения систем линейных уравнений. Краснодар: Экоинвест, 2020.
20. Баладин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000.
21. Икрамов Х.Д. Несимметричная проблема собственных значений. – Москва: Наука, 1991.

UDC 519.61

ON THE INFLUENCE OF ROUND-OFF ERRORS ON THE ACCURACY OF CALCULATING THE CORRECTION IN THE KRYLOV SUBSPACE© 2026 V. P. Ilyin^{1a}, V. N. Babenko^{2b}¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
Akad. Lavrentyev pr., 6, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Kuban State Technological University,
Moskovskaya st., 2, Krasnodar 350072, Russia*E-mails: ^ailin@sscc.ru, ^brnibvd@mail.ru

Received 08.12.2025, revised 13.02.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. Roundoff errors inevitably arise when performing computer calculations. This paper examines the impact of these errors on the accuracy of calculating the next approximation in a projection method for solving linear equations using projection onto Krylov subspaces. An estimate of the accuracy of the calculated approximation is obtained, expressed in terms of perturbations of the initial data. A termination criterion is proposed that guarantees the chosen acceptable accuracy of the desired solution.

Keywords: orthoprojector, Krylov subspace, projection method, large-dimensional SLAE, rounding errors.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.103

REFERENCES

1. S. Pissanetsky, *Sparse Matrix Technology*. N. Y.: Academic Press, 1984.
2. Greenbaum A. Iterative Metuloids of Solving Linear Systems. *Frontiers Appl. Math.*, 1997; DOI:10.1137/1.9781611970937.
3. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. *Vychislitel'nye metody linejnoy algebrы* [Computational methods of linear Algebra]. St. Petersburg: Lan', 2002 (in Russian).
4. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations* Baltimore: J. Hopkins Univ. Publ., 1996
5. Saad J. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Boston: EPS, 1996.
6. Olshanskii M.A., Tyrtyshnikov E.E. *Iterative methods for linear systems: theory and applications*, SIAM (Philadelphia, PA, United States), 2014.
7. Il'in V.P. Iterative preconditioned methods in Krylov spaces: Trends of the 21st century. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, Vol. 61, No. 1), pp. 1750–1775; <https://doi.org/10.1134/S0965542521110099>
8. Il'in V.P. O proekcionnyh metodah v podprostranstvah Krylova [On projection methods in Krylov subspaces]. *Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI* [Notes of Scientific Seminars in Moscow], 2018, Vol. 472, pp. 103–119 (in Russian); [//ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/zns/v472/p103.pdf](http://ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/zns/v472/p103.pdf)
9. Kireev I.V. Orthogonal projectors and systems of linear algebraic equations,. *Numer. Anal. Appl.*, 2020, Vol. 13, No. 3, pp. 262–270.
10. Arioli M., Fassino C. Troundoff error analysis of algorithms based on Krylov subspace methods. *BIT*, 1996, Vol. 36, No. 2, pp. 189–206.
11. Arioli M., Fassino C. Generalized Golub-Kahan Bidiagonalization and Stopping Criteria. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2013, Vol. 34, No. 2, pp. 57–592.

12. Greenbaum A. Estimating the Attainable Accuracy of Recursively Computed Residual Methods. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1997.
13. Capraux J.-F., Godunov S.K., Kuznetsov S.V. Condition number of the Krylov bases and subspaces. *Linear Algebra Appl.*, 1996, Vol. 248, No. 1–3, pp. 136–160.
14. Kuznetsov S.V. Perturbation of the Krylov bases and associated Hessenberg Forms. *Linear Algebra Appl.*, 1997, Vol. 265, No. 1–3, pp. 1–28.
15. Malyshev A.N., Sadkane M. Teoriya vozmushchenij po pervomu priblizheniyu dlya simmetrichnogo algoritma Lancosha [First approximation perturbation theory for the symmetric Lanczos algorithm]. *Zhurn. Vychisl. Mat. Mat. Fiziki*[J. Calcul. Math. Math. Phys.], 2005, Vol. 45, No 3, pp. 391–399 (in Russian).
16. Ilyin V.P., Babenko V.N. On the Influence of Disturbances on the Accuracy of Computing Corrections in the Krylov Subspace. *JAIM*, 2025, Vol. 19, No. 1, pp. 51–58; DOI: 10.1134/S1990478925010053
17. Godunov S.K. Reshenie sistem linejnyh uravnenij [Solving systems of linear equations]. Novosibirsk: Nauka, 1980 (in Russian).
18. Godunov S.K., Antonov A.G., Kirilyuk O.P., Kostin V.I. Garantirovannaya tochnost' resheniya sistem linejnyh uravnenij v evklidovyh prostranstvah [Guaranteed accuracy of solving systems of linear equations in Euclidean spaces]. Novosibirsk: Nauka, 1988 (in Russian).
19. Babenko V.N., Ivanovskij O.Ya. Aspekty mashinnogo resheniya sistem linejnyh uravnenij [Aspects of solving systems of linear equations by machine]. Krasnodar: Ehkoinvest, 2020 (in Russian).
20. Balandin M.Yu., Shurina E.P. Metody resheniya SLAU bol'shoj razmernosti [Methods for solving large-dimensional SLAUs]. Novosibirsk: NSTU Pub., 2000 (in Russian).
21. Ikramov H.D. Nesimmetrichnaya problema sobstvennyh znachenij [The Asymmetric Eigenvalue Problem]. Moscow: Nauka, 1991 (in Russian).