

УДК 51-76

СРАВНЕНИЕ ДВУХ СТАТИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКЕ ПАТОЛОГИЧЕСКИХ ОЧАГОВ МЕТОДОМ ГАММА-ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

© 2026 А. В. Нестерова^{1а}, Н. В. Денисова^{2б}¹*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*²*Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия*E-mails: ^аa.nesterova@alumni.nsu.ru, ^бnvdenisova2011@mail.ruПоступила в редакцию 11.02.2026 г.; после доработки 22.04.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Проведён сравнительный анализ двух статистических подходов к реконструкции изображений при обследовании пациентов методом однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (ОФЭКТ). Выполнено сравнение алгоритма Ordered Subset Expectation Maximization (OSEM), используемого в большинстве современных ОФЭКТ-систем, и алгоритма нового поколения Maximum a Posteriori с априорной информацией на основе энтропийного функционала (MAP-Ent) при количественной оценке накопления радиофармпрепарата в патологических очагах. Исследования выполнены методом имитационного компьютерного моделирования с использованием цифрового двойника стандартизированного вещественного фантома NEMA IEC, включающего шесть сфер различного размера, имитирующих очаги поражения. Точность реконструкции оценивалась с использованием максимального коэффициента восстановления RC_{\max} , определяемого как отношение реконструированной накопленной активности в максимуме к её истинному значению. Показано, что алгоритм OSEM характеризуется неустойчивостью итерационного процесса, появлением шума и краевых артефактов. Применение постфильтрации стабилизирует решение и обеспечивает сходимость, однако приводит к занижению оценки активности в очагах малого размера и возможной потере малых очагов. Алгоритм MAP-Ent обеспечивает устойчивую сходимость и высокую количественную точность без необходимости постфильтрации, сохраняя контрастность малых очагов. Вместе с тем точность реконструкции существенно зависит от выбора глобального параметра регуляризации, что ограничивает оптимальную реконструкцию очагов различного размера и указывает на необходимость применения локальной регуляризации.

Ключевые слова: однофотонная эмиссионная компьютерная томография, OSEM, MAP-Ent, регуляризация.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.104

ВВЕДЕНИЕ

Однофотонная эмиссионная компьютерная томография (ОФЭКТ) является диагностическим методом ядерной медицины. При обследовании пациенту вводят радионуклидный фармацевтический препарат (РФП), который обычно состоит из двух составляющих: несущей (таргетной) молекулы и радионуклида. Несущая молекула подбирается таким образом, чтобы РФП накапливался в патологических очагах. При этом радионуклид служит «меткой», испускающей гамма-кванты. Гамма-излучение регистрируется из разных положений вращающейся

вокруг пациента гамма-камеры. На основе измеренных данных осуществляется решение обратной задачи реконструкции пространственного распределения РФП в организме — источника испускания гамма-квантов.

Полученные ОФЭКТ-изображения существенно отличаются от изображений магнитно-резонансной томографии (МРТ) и рентгеновской компьютерной томографии (КТ), отражающих морфологические свойства различных анатомических структур пациента. ОФЭКТ визуализирует распределение РФП, которое соответствует нормальным или патологическим метаболическим процессам, протекающим в организме человека на клеточном и молекулярном уровнях. ОФЭКТ имеет относительно низкое пространственное разрешение по сравнению с МРТ и КТ изображениями, однако основным преимуществом этого метода является высокая контрастность изображений патологических очагов, что делает метод незаменимым для выявления онкологических заболеваний.

Диагностическая точность метода ОФЭКТ существенно зависит от подхода к решению задачи реконструкции пространственного распределения источников излучения по измеренным данным. Радиационный распад радионуклида описывается пуассоновским процессом, соответственно, зарегистрированные данные подчиняются пуассоновскому распределению. С математической точки зрения, проблема реконструкции ОФЭКТ-изображений относится к классу обратных и некорректных задач с пуассоновскими данными и должна решаться с применением статистической регуляризации [1, 2].

Первым статистическим подходом к реконструкции ОФЭКТ-изображений стал вариационный метод максимизации функции правдоподобия для пуассоновского распределения, реализованный в алгоритме Maximum Likelihood Expectation Maximization (MLEM) [3]. В настоящее время большинство функционирующих в мире ОФЭКТ-установок оснащены его ускоренной версией — итерационным алгоритмом реконструкции Ordered Subset Expectation Maximization (OSEM) [4]. Однако подход на основе максимизации функции правдоподобия не является регуляризованным, поэтому поведение алгоритма OSEM характеризуется неустойчивостью: с ростом числа итераций решение сильно «запумляется» и страдает от появления краевых артефактов на высококонтрастных границах очагов поражений [5]. Чтобы исключить эти неблагоприятные эффекты, применяют итерационную регуляризацию — остановку решения после определённого числа итераций, когда ожидается достижение оптимального решения. Однако критерий достижения оптимального решения не определён, поэтому номер останова итерационного процесса выбирают на основе рекомендаций производителя оборудования или практического опыта. Это приводит к тому, что в различных медицинских центрах используют изображения, полученные при разном числе итераций, что значительно снижает воспроизводимость и возможность анализа многоцентровых исследований. Кроме того, прерывание итерационного процесса не снимает полностью влияние «шума» и краевых артефактов. Дополнительным регуляризирующим фактором является постфильтрация реконструированного решения. В результате применения постфильтрации осуществляется сглаживание решения и уменьшение влияния «шума» и краевых артефактов, однако при этом значительно занижается количественное решение в очагах поражений малого размера [6].

Для уменьшения ошибок, вызванных влиянием шума, необходимо использовать регуляризованные алгоритмы. В литературе высказывалось мнение, что краевые артефакты можно смягчить с помощью применения регуляризованных алгоритмов реконструкции на основе байесовского подхода Maximum a Posteriori (MAP) с априорной информацией, способствующей сглаживанию решения [7]. В данной работе выполнены исследования алгоритма MAP с заданием априорной информации на основе функционала энтропии (MAP-Ent). Проведён сравнительный анализ алгоритмов OSEM и MAP-Ent в решении задачи получения точной количественной оценки накопленной активности в патологических очагах.

Решение проблемы получения точных количественных оценок накопленной активности в очагах поражений является чрезвычайно актуальной задачей на современном уровне разви-

тия ядерной медицины, поскольку эти оценки определяют персонализированную поглощённую дозу и эффективность радионуклидной терапии. Используемые на клинических ОФЭКТ системах алгоритмы OSEM не позволяют получать точные решения, поэтому в руководстве Европейской Ассоциации по Ядерной Медицине (EANM) [8, 9] рекомендуется использовать эмпирические поправки к полученному решению. Эти поправки называются «коэффициент восстановления (Recovery Coefficient, RC)» и определяются отношением реконструированного значения активности к истинной активности РФП в очагах. В клинической практике значения RC получают с помощью экспериментальных измерений с применением стандартизированных вещественных фантомов NEMA IEC (National Electrical Manufacturers Association International Electrotechnical Commission), включающих сферические вставки, имитирующие очаги разного диаметра [10, 11, 12]. Затем полученные величины RC используются в качестве поправки к реконструированным значениям активности в очагах. Однако проведение широких клинических исследований с подобными фантомами ограничено из-за лучевой нагрузки на исследователей и высокой стоимости радиофармпрепаратов. Современной альтернативой является математическое имитационное моделирование и численные эксперименты с использованием цифровых двойников фантомов и сканеров. В данной работе этот метод применяется для сравнительной оценки двух статистических алгоритмов OSEM и MAP-Ent в решении проблемы получения точной количественной реконструкции активности в очагах поражений.

Настоящая работа является логическим продолжением предыдущего исследования [6], в котором была продемонстрирована ограниченность стандартного алгоритма OSEM в достижении точной количественной оценки патологических очагов. Основным выводом работы [6] заключался в необходимости разработки и анализа новых методов реконструкции на основе байесовского подхода MAP с применением статистической регуляризации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В работе проведено компьютерное имитационное моделирование клинической процедуры ОФЭКТ/КТ исследования вещественного стандартизированного фантома NEMA IEC для оценки точности реконструированных изображений патологических очагов и определения поправочных коэффициентов (Recovery Coefficient, RC). Целью работы является сравнительный анализ двух алгоритмов: OSEM и MAP-Ent – в точности количественной оценки накопленной активности в очагах поражений. Моделирование проводилось в приближении к реальным клиническим условиям: учитывались параметры сканирования, физические процессы регистрации гамма-квантов и влияние алгоритмов реконструкции на количественные характеристики изображений. В качестве моделируемого радионуклида использовался технеций-99m (^{99m}Tc), наиболее широко применяемый в клинической практике изотоп с энергией излучения 140 кэВ.

1.1. Физико-математическая модель

Физические основы модели.

— Радиоактивный распад описывается законом:

$$n(t) = n(0) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $n(t) = \{n_j(t) : j = 1, \dots, J\}$ — распределение концентрации РФП в трёхмерном объекте в момент времени t , J — общее число вокселей, на которое разбит объект; $n(0)$ — начальное распределение РФП; τ — среднее время жизни радиоактивного изотопа. Для ^{99m}Tc среднее время жизни составляет около 6 часов, тогда как продолжительность стандартного сбора проекционных данных методом ОФЭКТ Δt обычно составляет около 20–30 минут.

— Поскольку испускание гамма-квантов носит случайный характер и концентрация РФП низкая, число испущенных гамма-квантов во всех направлениях в единицу времени описывается случайным полем $f = \{f_j \mid j = 1, \dots, J\}$. При условии $\Delta t \ll \tau$ среднее значение гамма-квантов, испускаемых из единичного объёма, считается постоянным за время наблюдения и пропорциональным локальной активности РФП: $\bar{f} \approx n(0)$.

— При прохождении в средах различной плотности гамма-квант может пройти до детектора без взаимодействия либо быть рассеянным или поглощённым. Основными видами взаимодействия являются комптоновское рассеяние и фотоэффект.

— Для реконструкции 3D-распределения активности по проекционным данным необходимо знать направление прилетевших на детектор гамма-квантов. В модели ОФЭКТ для этого используется коллиматор. Теоретический идеальный коллиматор обеспечивает точное изображение точечного источника, однако реальные коллиматоры формируют размытое изображение: размер получаемого пятна возрастает с удалением источника от поверхности коллиматора. Этот эффект описывается функцией рассеяния точечного источника (ФРТ).

При численном моделировании дискретное представление исследуемого объекта задаётся на трёхмерной сетке вокселей. Поток гамма-квантов, проходящий через ткани пациента и фиксируемый детекторами, формирует двумерные проекционные данные для каждого угла обзора $g = \{g_i \mid i = 1, \dots, I\}$, где I — общее число пикселей (пиксели детектора \times ракурсы съёма).

Связь между распределением активности РФП и проекционными данными задаётся уравнением:

$$\sum_j a_{ij} f_j = g_i \quad \text{или} \quad Af = g,$$

где a_{ij} — это случайный оператор, который описывает, какая часть гамма-квантов, испускаемых из j -го вокселя, обнаруживается i -м пикселем детектора. Здесь f_j — это ненаблюдаемые пуассоновские случайные величины с неизвестными средними значениями \bar{f}_j , а g_i — наблюдаемые данные, пуассоновские случайные величины с неизвестными средними значениями \bar{g}_i . Эти средние значения связаны системой линейных уравнений

$$\sum_j \bar{a}_{ij} \bar{f}_j = \bar{g}_i,$$

где \bar{a}_{ij} — это вероятность того, что гамма-квант, испущенный j -м вокселем, будет зарегистрирован i -м пикселем детектора. Вероятности \bar{a}_{ij} образуют системную матрицу, которая считается известной и учитывает эффекты ослабления излучения P_{jk}^{att} и прохождения через систему коллиматор-детектор $P_{ki}^{\text{col-det}}$:

$$\bar{a}_{ij} = P_{jk}^{\text{att}} \cdot P_{ki}^{\text{col-det}}.$$

Таким образом, задача ОФЭКТ-реконструкции состоит в восстановлении неизвестных интенсивностей \bar{f}_j по измеренным проекционным данным \bar{g}_i и известной матрице \bar{a}_{ij} . Данная задача является обратной некорректной задачей с пуассоновскими данными.

1.2. Методы моделирования

Моделирование выполнялось с использованием программного комплекса «Виртуальная платформа для имитационных испытаний метода ОФЭКТ/КТ» [13, 14], включающего последовательные этапы: задание распределения активности РФП в математическом фантоме, генерацию проекционных данных, реконструкцию изображений и оценку качества реконструкции.

Распределение активности РФП моделировалось с использованием цифрового двойника фантома NEMA IES. Фотография реального фантома приведена на рис. 1(а). Он содержит шесть сфер различного диаметра (37, 28, 22, 17, 13, 10 мм), имитирующих патологические очаги с повышенным накоплением РФП, а также цилиндрическую лёгочную вставку диаметром 51 мм, расположенную в центре. Для удобства анализа изображений все центры сфер расположены в одной плоскости.

При клинических измерениях фантом заполнялся водным раствором РФП с разной концентрацией в сферах и основной ёмкости. Цифровой двойник фантома задавался в декартовой системе координат $\{x, y, z\}$ в области, разделённой на $128 \times 128 \times 92$ воксела. Трёхмерная модель распределения активности ^{99m}Tc по вокселям фантома, называемая картой активности, представлена на рис. 1(b). Поперечное сечение этой карты, проходящее через центр всех сфер, показано на рис. 1(c).

Отношение активности сфера/фон (контраст) было установлено равным 10:1. В клинических исследованиях это отношение может быть варьируемым. В нашей предыдущей работе [6] показано, что значения коэффициента восстановления РС изменяются лишь незначительно при отношениях 5:1, 10:1, 20:1, 30:1. Случаи низкой накопленной активности в очагах, например, при отношении 2:1, требуют отдельного исследования.

Активность задавалась в относительных единицах: фон — 10, лёгочная вставка — 0, очаги — 100. По смоделированным проекциям рассчитывалось общее число зарегистрированных квантов. Затем все значения масштабировались с использованием коэффициента, связывающего общее число насчитанных квантов в модельных исследованиях с измеренными клиническими данными (общее число импульсов). Это позволяло переводить активности \bar{f}_j , заданные в относительных единицах, в единицы «импульс/воксель», используемые при реконструкции. В данной работе изображения представлены именно в этих единицах.

Кроме карты активности, для цифрового фантома NEMA IEC была создана карта ослабления, описывающая коэффициенты ослабления воды и воздуха для гамма-квантов с энергией 140 кэВ, испускаемых радионуклидом ^{99m}Tc .

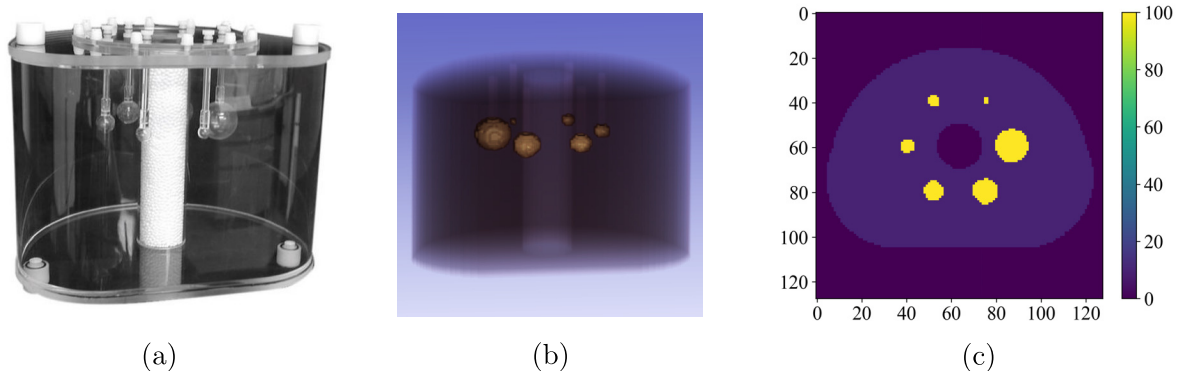


Рис. 1. Сравнение физического фантома NEMA IEC и его цифровой модели:
(a) фотография физического фантома; (b) трёхмерное изображение цифрового двойника фантома; (c) его поперечное сечение, проходящее через центр всех сфер

Генерация проекционных данных выполнялась с учётом основных физических эффектов, включая ослабление гамма-излучения, а также влияние пространственного разрешения коллиматора. Расчёты проводились для 120 позиций гамма-камеры для круговой орбиты в 360° с шагом 3° и общим числом регистрируемых импульсов ~ 5 млн.

В рамках программного комплекса «Виртуальная платформа для имитационных испытаний метода ОФЭКТ/КТ» расчёт проекционных данных может осуществляться двумя способами: методом Монте-Карло и расчётом дискретизированных уравнений переноса гамма-излучения. Второй подход даёт «точные проекции», в которые затем добавляется «пуассоновский шум» с помощью метода исключения Неймана. Оба подхода были верифицированы в предыдущих исследованиях путём сравнения с клиническими данными и тестовыми измерениями [15, 16].

В данной работе использовался второй подход, поскольку большое число углов сбора данных (120), высокая статистика (~ 5 млн импульсов) и большое число различных вариантов

расчётов потребовали бы огромных компьютерных ресурсов и времени при использовании метода Монте-Карло.

1.3. Алгоритмы реконструкции

Исследовались два статистических алгоритма реконструкции изображений OSEM и MAP-Ent. Математической основой для этих алгоритмов является предположение о пуассоновском распределении проекционных данных. В рамках метода максимального правдоподобия (MLEM) решение находится путём максимизации функции правдоподобия, которая для пуассоновской модели имеет вид:

$$P(g|\bar{f}) = \prod_i \exp\left(-\sum_j \bar{a}_{ij}\bar{f}_j\right) \frac{\left(\sum_j \bar{a}_{ij}\bar{f}_j\right)^{g_i}}{g_i!}.$$

На практике максимизируют её логарифм, что приводит к итерационной формуле алгоритма MLEM:

$$\bar{f}_j^{(n+1)} = \frac{\bar{f}_j^{(n)}}{\sum_i \bar{a}_{ij}} \sum_i \frac{g_i \bar{a}_{ij}}{\sum_k \bar{a}_{ik} \bar{f}_k^{(n)}}.$$

Алгоритм OSEM является стандартизированным алгоритмом реконструкции ОФЭКТ и ПЭТ изображений и представляет собой модификацию метода MLEM, ускоряющую сходимость за счёт обновления решения по подмножествам проекционных данных (subsets) S_b :

$$\bar{f}_j^{(n+1)} = \frac{\bar{f}_j^{(n)}}{\sum_{i \in S_b} \bar{a}_{ij}} \sum_{i \in S_b} \frac{g_i \bar{a}_{ij}}{\sum_k \bar{a}_{ik} \bar{f}_k^{(n)}}.$$

Для характеристики вычислительной работы алгоритма OSEM и сравнения различных протоколов реконструкции руководство EANM [8] рекомендует использовать универсальный параметр: «число обновлений» (number of updates), определяемый как произведение количества подмножеств на количество итераций. В данной работе реконструкция проводилась с 10 подмножествами, а число итераций для алгоритма OSEM варьировалось в пределах от 1 до 4-х. Соответственно, число обновлений составляло от 10 до 40.

Байесовский подход (MAP) состоит в максимизации апостериорной вероятности $P(\bar{f}|g)$, которая, согласно теореме Байеса, пропорциональна произведению функции правдоподобия и априорной вероятности:

$$P(\bar{f}|g) \sim P(g|\bar{f}) \cdot P(\bar{f}).$$

Максимизация логарифма апостериорной вероятности приводит к уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{f}_j} [\ln P(g|\bar{f}) + \ln P(\bar{f})] = 0.$$

Развитие байесовского подхода на основе принципа энтропии для решения обратных и некорректных задач со стохастическими данными было выполнено в работах [17, 18, 19]. В работе [19] функционал энтропии, который используется для задания плотности априорной вероятности, был получен в логарифмическом виде:

$$\ln P(\bar{f}) = \ln P(m) = -\beta \sum_j \left(\bar{f}_j \ln \frac{\bar{f}_j}{m_j} - \bar{f}_j + m_j \right),$$

где коэффициент β является параметром регуляризации, m_j описывает априорную информацию до проведения измерений. Разработка и применение этого подхода для реконструкции

ОФЭКТ изображений представлены в работе [20]. Подстановка данного априорного распределения и функции правдоподобия для пуассоновского распределения $P(g|\bar{f})$ в уравнение максимизации и его решение приводит к выводу итерационной формулы MAP-Ent алгоритма. В качестве априорной информации m на каждом шаге использовалось решение предыдущей итерации $\bar{f}^{(n-1)}$:

$$\bar{f}_j^{(n+1)} = \bar{f}_j^{(n)} \exp \left[\gamma \sum_i \left(g_i \frac{\bar{a}_{ij}}{\sum_k \bar{a}_{ik} \bar{f}_k^{(n)}} - \bar{a}_{ij} \right) \right],$$

где параметр $\gamma = \frac{1}{\beta} > 0$ контролирует соотношение между вкладом априорной вероятности (функционал энтропии) и измеренными пуассоновскими данными (функционал правдоподобия).

1.4. Поправочный коэффициент к количественной оценке реконструкции активности в очагах поражений

Для количественной оценки ОФЭКТ изображений очагов рассчитывался коэффициент восстановления (Recovery Coefficient, RC):

$$RC_{\max} = \frac{\max_{j \in \text{ROI}} \bar{f}_j^{(n)}}{\max_{j \in \text{ROI}} \bar{f}_j},$$

где $\max_{j \in \text{ROI}} \bar{f}_j^{(n)}$ — максимальное значение активности в реконструированном очаге, а $\max_{j \in \text{ROI}} \bar{f}_j$ — истинное значение активности в очаге. В качестве ROI использовались области, соответствующие очагам в цифровом фантоме. Каждая ROI определялась как множество вокселей, принадлежащих соответствующей сфере с заданным радиусом и центром. Для реконструированных изображений использовались те же ROI, что и для истинного распределения активности.

Значения RC_{\max} , близкие к 1, соответствуют точному восстановлению активности в максимуме. RC_{\max} меньше 1 означает недооценку, а RC_{\max} больше 1 — переоценку активности. Следует заметить, что оценка качества реконструкции по одному вокселю (с максимальной интенсивностью) вызывает немало вопросов, однако она используется в клинических исследованиях, поскольку для расчёта среднего значения по очагу RC_{mean} требуется определить контур очага, что существенно усложняет оценку и может приводить к ошибкам.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Количественный анализ алгоритма OSEM

Вычислительные эксперименты проводились с применением алгоритма реконструкции OSEM как без постфильтрации, так и с постфильтрацией фильтром Баттерворта с параметрами, используемыми в клинической практике. На рис. 2 представлены соответствующие реконструированные поперечные сечения, проходящие через центры сфер, полученные с 1-ой по 4-ю итерацию. Ниже представлены профили активности для сфер 13 и 10 мм (верхний ряд), 17 и 37 мм (средний ряд) и 22 и 28 мм (нижний ряд). Результаты без постфильтрации характеризуются выраженным шумовым искажением и краевыми артефактами. Это связано с отсутствием регуляризации в алгоритме OSEM, что при увеличении числа итераций усиливает шумовую составляющую [6]. Краевые артефакты проявляются в виде ложных пиков активности.

Применение постфильтрации стабилизирует решение, однако контрастность изображений малых очагов (13, 17 мм) значительно снижается, что может приводить к неопределённости в диагностике либо полной потере этих очагов на изображениях.

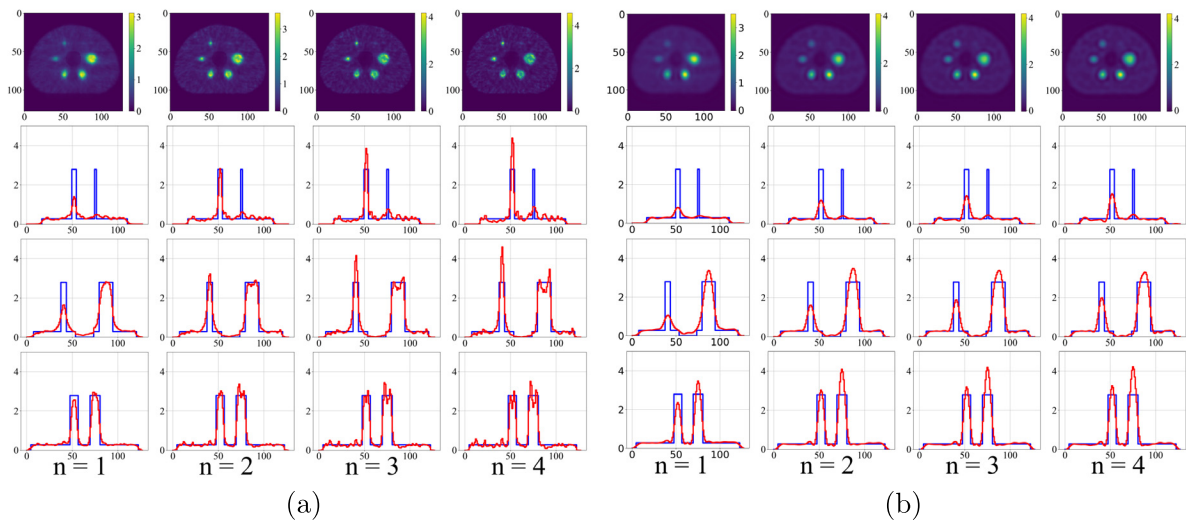


Рис. 2. Поперечные сечения (верхний ряд) и соответствующие горизонтальные профили активности (нижние ряды), реконструированные алгоритмом OSEM.

Сравнение проведено при числе итераций $n = 1-4$ без постфильтрации (а) и с ней (б).

Красная кривая — профиль, полученный после реконструкции;
синяя — исходный профиль цифровой модели.

Профили построены по линиям, проходящим через центры верхних (10 и 13 мм),
средних (17 и 37 мм) и нижних (22 и 28 мм) сфер.

По осям графиков профилей: горизонтальная ось — индекс вокселя;
вертикальная ось — значение активности в условных единицах

Для изображений, реконструированных алгоритмом OSEM с постфильтрацией и без неё, был рассчитан коэффициент восстановления RC_{\max} . На рис. 3 представлены кривые RC_{\max} в зависимости от диаметра сфер для различных значений числа итераций.

Анализ кривых RC_{\max} , полученных для изображений без фильтрации, показывает, что при увеличении числа итераций разброс между кривыми сохраняется или усиливается. Это свидетельствует о высокой чувствительности решения OSEM без постфильтрации к числу итераций и делает невозможным формирование надёжной оценки поправочного коэффициента RC_{\max} для очагов разных диаметров.

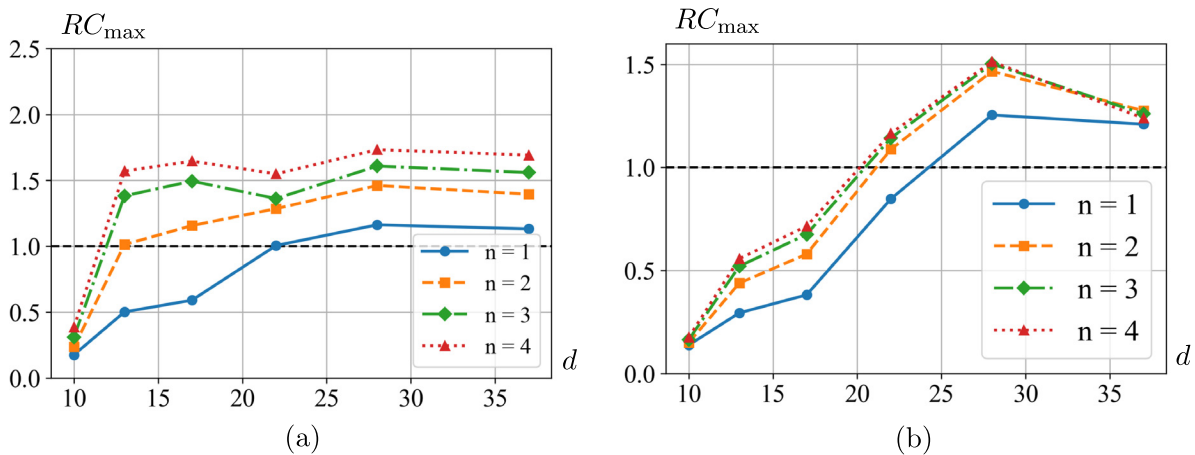


Рис. 3. Значения коэффициента восстановления RC_{\max} реконструированной активности алгоритмом OSEM в зависимости от диаметра d сфер.

Показаны данные для итераций $n = 1-4$

Введение постфильтрации, напротив, приводит решение к сходимости, что позволяет останавливать алгоритм после определённого фиксированного числа итераций. Однако, как было указано выше, корректнее использовать не просто число итераций, а число обновлений. Следует отметить, что применение постфильтрации сопровождается снижением точности реконструкции малых очагов (13 и 17 мм): их профили сильно занижены, а $RC_{\max} < 1$, что указывает на недооценку интенсивности в очаге поражения.

Было исследовано влияние соседства больших очагов на оценку RC_{\max} для малых очагов. В численных экспериментах рассматривались фантомы с тремя очагами диаметром 10, 13 и 17 мм. Полученные значения RC_{\max} , рассчитанные для изображений с постфильтрацией, практически совпали с аналогичными значениями для фантома с шестью очагами. Таким образом, наличие крупных очагов не оказывает заметного влияния на оценку RC_{\max} для малых очагов при установленных расстояниях между сферами в фантоме NEMA IEC.

Следует отметить, что количественные оценки накопленной активности в очагах на изображениях без фильтрации ненадёжны, поскольку изображения и, соответственно, поправочные коэффициенты RC_{\max} подвержены влиянию шума и краевых артефактов. Для практической количественной оценки очаговых поражений необходимо использовать поправочные коэффициенты RC_{\max} , рассчитанные для изображений, полученных с применением постфильтрации. Однако на реконструированных изображениях с постфильтрацией малые очаги могут вызывать неуверенность или полностью исчезать.

Таким образом, несмотря на то что применение постфильтрации позволяет получать более устойчивые количественные оценки, данный подход сопровождается риском потери информации о малых очагах. В связи с этим остаётся актуальным поиск альтернативных методов, которые обеспечивали бы надёжность количественной оценки без существенного ухудшения визуализации. В литературе одним из перспективных направлений является использование теоретически рассчитанных поправок, независимых от алгоритма реконструкции. К таким подходам относятся разработка универсальных уравнений для прогнозирования RC [21] и фундаментальных моделей коррекции эффекта частичного объёма (краевых артефактов), учитывающих форму патологического очага и разрешение системы [22].

2.2. Количественный анализ алгоритма MAP-Ent

В алгоритме MAP-Ent используется параметр γ . Он умножает слагаемое, соответствующее функции правдоподобия. Таким образом, при больших значениях γ метод приближается к алгоритму OSEM, что приводит к усилению шума и краевых артефактов. В настоящем исследовании использовались фиксированные значения $\gamma = 0.01$ и $\gamma = 0.1$.

На рис. 4 представлены результаты реконструкции для $\gamma = 0.01$ и $\gamma = 0.1$ при различных значениях числа итераций n . Параметр γ можно интерпретировать как аналог «шага по времени» в итерационном процессе: при одинаковых значениях $\gamma \cdot n$ получаем одинаковые решения.

На рис. 5 представлена зависимость коэффициента восстановления RC_{\max} для $\gamma = 0.01$ и $\gamma = 0.1$ при разных значениях числа итераций. Видно, что при $\gamma = 0.1$ значения $RC_{\max} \approx 1$ достигаются практически для всех сфер, кроме самой маленькой, но при разном числе итераций. В клинической практике количество метастатических очагов разных размеров у одного пациента может достигать нескольких десятков и получение точных количественных оценок накопленной активности в каждом очаге, используя изображения после разного числа итераций, является проблематичным.

Более эффективным является подход с использованием разных значений γ , что соответствует идее локальной регуляризации. Сравнение реконструкций при $\gamma = 0.01$ и $\gamma = 0.1$ (рис. 4 и 5) показывает, что при одинаковых значениях произведения ($\gamma \cdot n$) решения практически совпадают. Это означает, что подбор значений γ для очагов разного размера позволяет

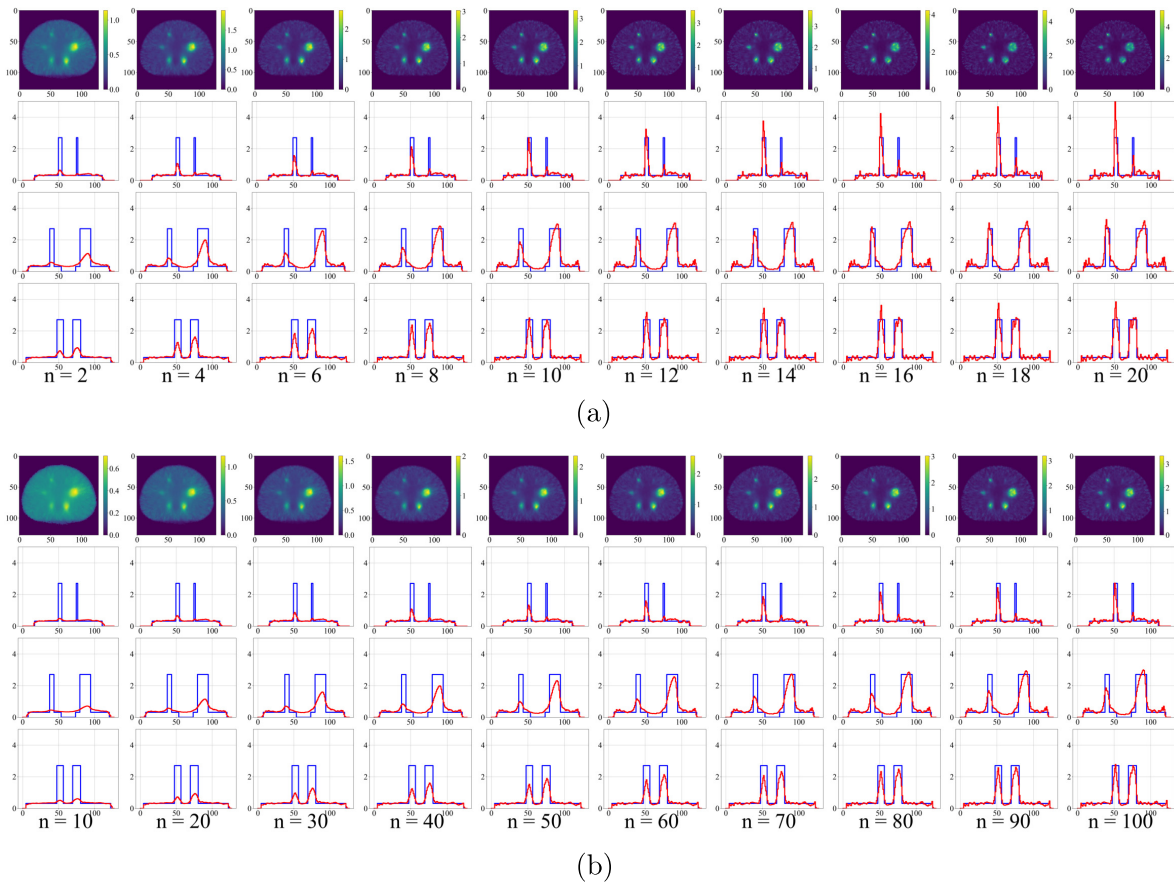


Рис. 4. Реконструированные алгоритмом MAP-Ent поперечные сечения (верхний ряд) и соответствующие горизонтальные профили активности (нижние ряды).

Сравнение проведено для $\gamma = 0.1$ (а) и $\gamma = 0.01$ (б) при числе итераций $n = 1-10$ и $n = 1-100$.

Красная кривая — профиль, полученный после реконструкции, синяя — исходный профиль из цифровой модели.

Профили построены по линиям, проходящим через центр верхних (10 и 13 мм), средних (17 и 37 мм) и нижних (22 и 28 мм) сфер.

По осям графиков профилей: горизонтальная ось — индекс вокселя; вертикальная ось — значение активности в условных единицах

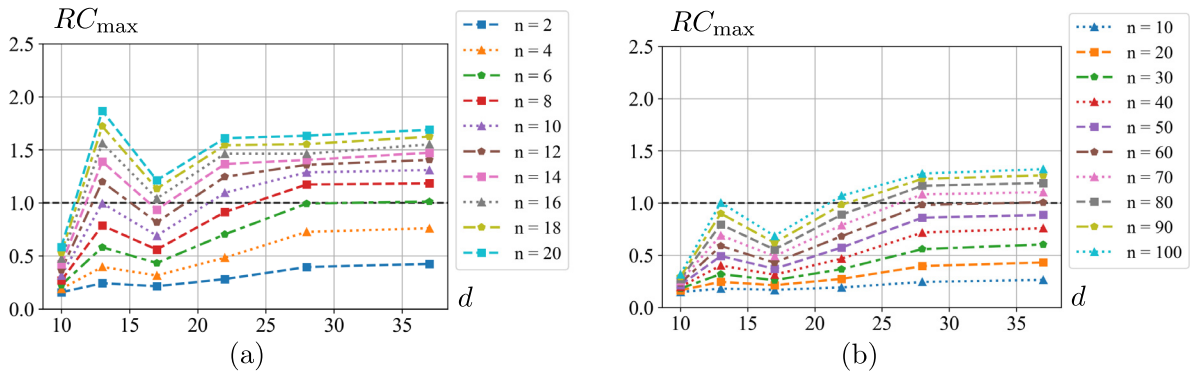


Рис. 5. Значения коэффициента восстановления (RC_{\max}) реконструированной активности алгоритмом MAP-Ent для значений параметра $\gamma = 0.1$ (а) и $\gamma = 0.01$ (б) в зависимости от диаметра d сфер. Показаны данные для итераций $n = 1-100$ и $1-20$

получать оптимальное решение и коэффициенты восстановления $RC_{\max} \approx 1$ на одной и той же итерации.

В качестве примера рассчитаем локальные значения γ такие, чтобы RC_{\max} достигала значения, близкого к 1 на одной и той же итерации для всех очагов. Из рис. 5 видно, что при $\gamma = 0.1$ значение $RC_{\max} \approx 1$ достигается для очагов 37 и 28 мм на 6-й итерации, для сферы 22 — на 9-й, для сферы 17 мм — 15-й итерации. Следовательно, если для сферы 22 мм использовать $\gamma = \left(\frac{9}{6}\right) \cdot 0.1 = 0.15$ и для сферы 17 мм использовать $\gamma = \left(\frac{15}{6}\right) \cdot 0.1 = 0.25$, то следует ожидать достижения $RC_{\max} \approx 1$ одновременно для всех сфер уже на 6-й итерации. На рис. 6 представлены результаты реконструкции.

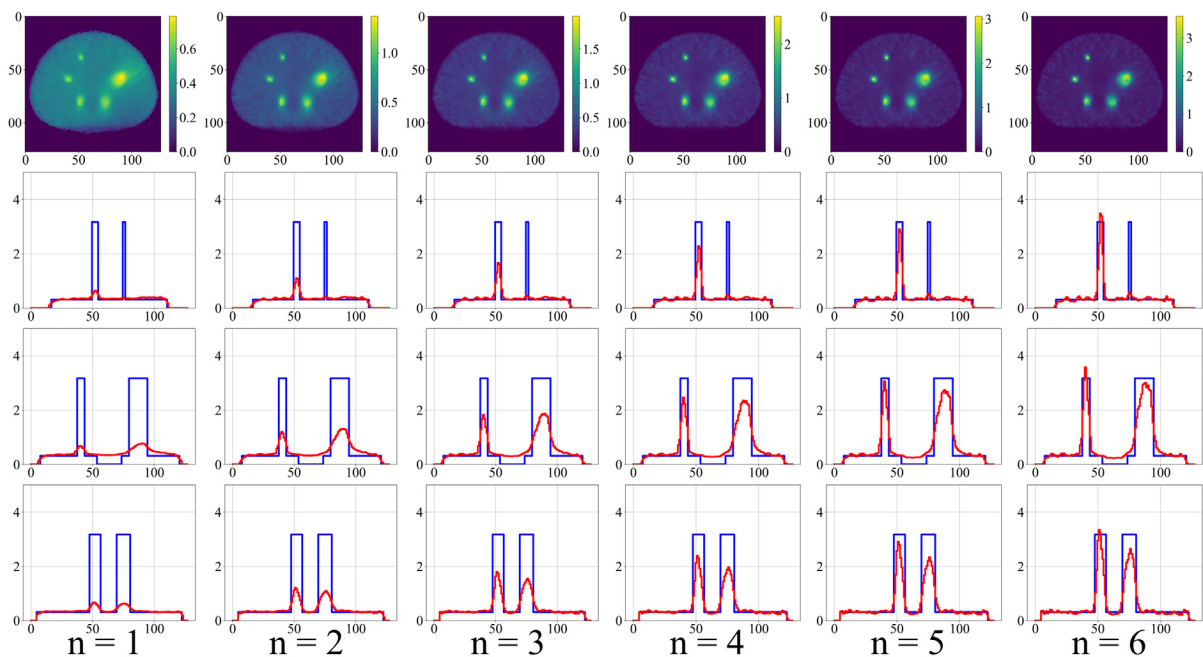


Рис. 6. Реконструированные алгоритмом MAP-Ent поперечные сечения (верхний ряд) и соответствующие горизонтальные профили активности (нижние ряды).

Сравнение выполнено для различных значений итераций $n = 1-10$ и $n = 1-100$.

Красная кривая — профиль, полученный после реконструкции,
синяя — исходный профиль из цифровой модели.

Профили построены по линиям, проходящим через центр верхних (10 и 13 мм),
средних (17 и 37 мм) и нижних (22 и 28 мм) сфер.

По осям графиков профилей: горизонтальная ось — индекс вокселя;
вертикальная ось — значение активности в условных единицах

На рис. 7 представлены результаты расчёта параметра RC_{\max} при использовании локальных значений параметра γ .

Такой подход обеспечивает точную количественную оценку накопленной активности в очагах и потенциально может поднять процедуру ОФЭКТ на более высокий уровень достоверности, поэтому идея применения локальной регуляризации требует дальнейшего развития.

2.3. Сравнительная оценка и перспективы развития

Сравнение показывает, что алгоритм MAP-Ent превосходит OSEM по устойчивости к шуму и количественной точности без необходимости в постфильтрации. Использование MAP-Ent позволяет более точно реконструировать распределение активности в очагах без этапа постобработки, обеспечивая количественную достоверность, необходимую для планирования радионуклидной терапии. Алгоритм OSEM, в свою очередь, может эффективно применяться

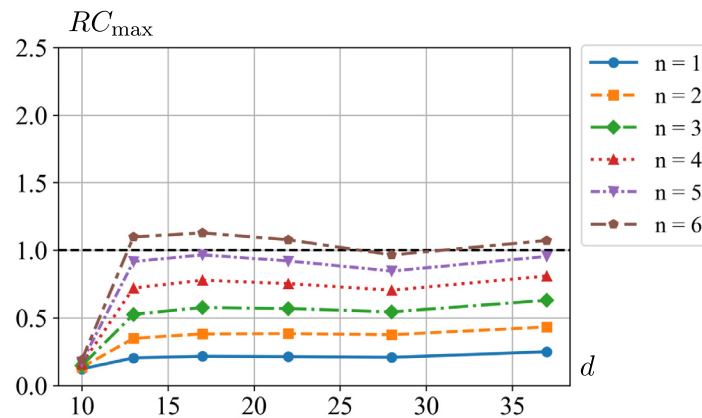


Рис. 7. Значения коэффициента восстановления (RC_{\max}) реконструированной активности алгоритмом MAP-Ent в зависимости от диаметра d сфер. Показаны данные для итераций $n = 1-6$

для рутинной диагностики, но требует аккуратной настройки параметров и использования постфильтрации для достижения приемлемого качества изображений.

Следует отметить, что для регуляризированных алгоритмов на основе байесовского подхода Maximum a Posteriori в литературе отсутствует критерий выбора параметра регуляризации (в нашем случае параметр γ), и его подбор осуществляется эмпирически. В предыдущей работе одного из авторов [20] был продемонстрирован эффект от использования локальной регуляризации для точной реконструкции очагов поражений с разной интенсивностью накопленной активности. Результаты настоящих исследований продемонстрировали необходимость локальной регуляризации при одинаковой активности, но разных размеров очагов. Такой подход потребует сегментации изображения, что может быть реализовано на основе предварительной реконструкции с использованием OSEM. Необходимы дальнейшие исследования этой проблемы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получение достоверных количественных оценок накопленной активности в очагах поражений является одной из самых актуальных задач современной диагностической ядерной медицины. Для обеспечения точности таких оценок при исследованиях методом ОФЭКТ в алгоритмах реконструкции необходимо учитывать эффекты, влияющие на формирование изображений.

Одним из важных эффектов является размытие изображения точечного источника, что требует учёта ФРТ. Это позволяет улучшить визуализацию и повысить возможность обнаружения небольших патологических очагов. Однако на практике учёт ФРТ сопровождается появлением краевых артефактов, что приводит к переоценке активности в очагах поражений малого размера. Исследователи-клиницисты пришли к выводу о необходимости постсглаживания изображений для уменьшения таких ошибок реконструкции [23]. В своём комментарии к работе [23] известный специалист в области разработки алгоритмов реконструкции ОФЭКТ и ПЭТ изображений Йохан Нуйтс отметил: «Этот вывод несколько противоречит здравому смыслу, поскольку постсглаживание ухудшает разрешение, в то время как изначально модель учёта ФРТ была направлена именно на его улучшение» [7]. Чтобы «смягчить» влияние краевых артефактов в работе [7] было предложено развивать регуляризированные алгоритмы реконструкции на основе байесовского подхода MAP с априорными распределениями, сглаживающими решения.

Результаты моделирования, проведённого в настоящей работе, позволили уточнить выводы клиницистов о необходимости постсглаживания (постфильтрации). Действительно, при

использовании алгоритма OSEM количественные оценки активности без фильтрации оказываются ненадёжными, поскольку изображения и, соответственно, поправочные коэффициенты RC_{\max} подвержены влиянию краевых артефактов. Для практического использования необходимо рассчитывать поправочные коэффициенты RC_{\max} именно по изображениям с постфильтрацией. С другой стороны, в численных экспериментах получены результаты, показывающие противоречивость применения фильтрации, на что указывал Нуйтс: небольшой очаг диаметром 13 мм, отчётливо различимый на изображении без фильтрации, практически исчез после применения фильтра (см. рис. 2).

Вторая часть данной работы посвящена исследованию регуляризованного метода MAP-Ent. Проведённое исследование показало, что алгоритм MAP-Ent обеспечивает устойчивую сходимость и точные количественные оценки активности для очагов различного диаметра. В отличие от стандартного алгоритма OSEM, MAP-Ent не требует постфильтрации и сохраняет точность даже при высоком контрасте отношения очаг/фон.

Исследования также показали, что поведение решения MAP-Ent в итерационном процессе определяется величиной, равной произведению числа итераций и параметра γ . Это позволяет сделать вывод о возможности использования локального параметра γ для достижения точного решения одновременно для всех очагов. Такой подход соответствует методу локальной регуляризации. Применение локальной регуляризации с адаптивным выбором параметра γ для опухолевых очагов представляется перспективным направлением, однако критерии оптимального подбора γ в настоящее время не существуют, что определяет направление дальнейших исследований.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа А.В. Нестеровой выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002 «Обратные некорректные задачи и машинное обучение в биологических, социально-экономических и экологических процессах».

Работа Н.В. Денисовой выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН (номер гос. регистрации: 124021400036-7). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малькевич М.С. Применение методов математической статистики при решении некорректно поставленных задач // Успехи физических наук. 1971. Т. 13. С. 681–703.
2. Bertero M., Boccacci P., Ruggiero V. Inverse Imaging with Poisson Data: From Cells to Galaxies. Bristol: IOP Publishing, 2018; DOI: 978-0-7503-1437-4
3. Shepp L. A., Vardi Y. Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography // IEEE Transactions on Medical Imaging. 1983. V. 1. P. 113–122.
4. Hudson H.M., Larkin R.S. Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data // IEEE Transactions on Medical Imaging. 1994. V. 13, № 4. P. 601–609.
5. Нестерова А.В., Денисова Н.В. «Подводные камни» на пути количественной оценки тяжести онкологических поражений в диагностической ядерной медицине // Журн. техн. физики. 2022. Т. 92, № 7. С. 1018–1027; DOI: 10.21883/JTF.2022.07.52659.331-21
6. Нестерова А.В., Денисова Н.В., Минин С.М., Анашбаев Ж.Ж., Усов В.Ю. Определение поправочных коэффициентов при количественной оценке костных патологических очагов методом гамма-эмиссионной томографии // Компьютерные исследования и моделирование. 2025. Т. 17, № 4. С. 677–696; DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-4-677-696

7. Nuyts J. Unconstrained image reconstruction with resolution modelling does not have a unique solution // *EJNMMI Physics*. 2014. V. 1. Article number 98; DOI: 10.1186/s40658-014-0098-4
8. Dickson J.C., Armstrong I.S., Gabina P.M., Denis-Bacelar A.M., Krizsan A.K., Gear J.M., Van den Wyngaert T., de Geus-Oei L.F., Herrmann K. EANM practice guideline for quantitative SPECT-CT // *European J. Nuclear Medicine and Molecular Imaging*. 2023. V. 50. P. 980–995; DOI: 10.1007/s00259-022-06028-9
9. Van den Wyngaert T., Strobel K., Kampen W.U., Kuwert T., van der Bruggen W., Mohan H.K., Gnanasegaran G., Delgado-Bolton R., Weber W.A., Beheshti M., Langsteger W., Giammarile F., Mottaghy F.M., Paycha F.; EANM Bone & Joint Committee and the Oncology Committee The EANM practice guidelines for bone scintigraphy // *European J. Nuclear Medicine and Molecular Imaging*. 2016. V. 43. P. 1723–1738; DOI: 10.1007/s00259-016-3415-4
10. Gnesin S., Leite Ferreira P., Malterre J., Laub P., Prior J.O., Verdun F.R. Phantom Validation of Tc-99m Absolute Quantification in a SPECT/CT Commercial Device // *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2016. Article number 4360371; DOI: 10.1155/2016/4360371
11. Peters S. M. B., van der Werf N. R., Segbers M., van Velden F. H. P., Wierds R., Blokland K. J. A. K., Konijnenberg M. W., Lazarenko S. V., Visser E. P., Gotthardt M. Towards standardization of absolute SPECT/CT quantification: a multi-center and multi-vendor phantom study // *EJNMMI Physics*. 2019. V. 6, № 1. Article number 29; DOI: 10.1186/s40658-019-0268-5
12. Piwowarska-Bilska H., Supinska A., Birkenfeld B. What validation tests can be done by the clinical medical physicist while waiting for the standardization of quantitative SPECT/CT imaging? // *EJNMMI Physics*. 2022. V. 9, N 1. Article number 8; DOI: 10.1186/s40658-022-00434-6
13. Денисова Н.В., Гурко М.А., Колинко И.П., Аншелес А.А., Сергиенко В.Б. Виртуальная платформа для имитационного компьютерного моделирования радионуклидной визуализации в ядерной кардиологии. Сравнение с клиническими данными // *Digital Diagnostics*. 2023. Т. 4, № 3. С. 492–508; DOI: 10.17816/DD595696
14. Денисова Н.В. Математическое имитационное моделирование в ядерной медицине для оптимизации диагностической точности метода ОФЭКТ/КТ // *Медицинская физика*. 2023. № 3. С. 45–62; DOI: 10.52775/1810-200X-2023-99-3-45-62
15. Денисова Н.В., Терехов И.Н. Математическое моделирование процедуры обследования пациентов методом ОФЭКТ в кардиологии: расчёт планарных изображений // *Медицинская физика*. 2015. № 3. С. 32–39.
16. Гурко М.А., Денисова Н.В. Моделирование сбора «сырых» проекционных данных в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии // *Журнал технической физики*. 2022. Т. 92, № 5. С. 747–757; DOI: 10.21883/JTF.2022.05.52381.264-21
17. Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // *Physical Review*. 1957. V. 106. N 4. P. 620–630.
18. Jaynes E.T. Prior Probabilities // *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*. 1968. V. 4, N 3. P. 227–241.
19. Skilling J. The Axioms of Maximum Entropy // In: *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Science and Engineering*. Dordrecht: Springer, 1988. P. 173–187.
20. Denisova N. Bayesian Maximum-A-Posteriori Approach with Global and Local Regularization to Image Reconstruction Problem in Medical Emission Tomography // *Entropy*. 2019. V. 21. Article number 1108; DOI: 10.3390/e21111108
21. de Nijs R. A novel model-based equation for size dependent mean recovery coefficients for spheres and other shapes // *Physica Medica*. 2025. V. 116. Article number 103174; DOI: 10.1016/j.ejmp.2023.103174
22. Marquis H., Schmidtlein C. R., de Nijs R., Minguez Gabina G., Gustafsson J., Kayal G., Ocampo Ramos J.C., Carter L.M., Bailey D.L., Kesner A.L. MIRD Pamphlet N 32: A MIRD Recovery Coefficient Model for Resolution Characterization and Shape-Specific Partial-Volume Correction // *J. Nuclear Medicine*. 2025. V. 66, N 3. P. 457–465; DOI: 10.2967/jnumed.124.268520
23. Armstrong I.S., Kelly M.D., Williams H.A., Matthews J.C. Impact of point spread function modelling and time-of-flight on FDG uptake measurements in lung lesions using alternative filtering strategies // *EJNMMI Physics*. 2014. V. 1, N 1. Article number 16.

UDC 51-76

COMPARISON OF TWO STATISTICAL IMAGE RECONSTRUCTION ALGORITHMS FOR QUANTITATIVE ASSESSMENT OF PATHOLOGICAL LESIONS IN GAMMA EMISSION TOMOGRAPHY© 2026 A. V. Nesterova^{1a}, N. V. Denisova^{2b}¹*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Acad. Koptug pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS,
Institutskaya st., 4/1, Novosibirsk, Russia*E-mails: ^aa.nesterova@alumni.nsu.ru, ^bnvdenisova2011@mail.ru

Received 11.02.2026, revised 22.04.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. A comparative analysis of two statistical approaches to image reconstruction in single-photon emission computed tomography (SPECT) was performed. The widely used Ordered Subset Expectation Maximization (OSEM) algorithm, implemented in most modern SPECT systems, was compared with a next-generation Maximum a Posteriori algorithm incorporating entropy-based prior information (MAP-Ent) for the quantitative assessment of radiopharmaceutical uptake in pathological lesions. The study was conducted using computer-based simulation with a digital twin of the standardized physical NEMA IEC phantom, comprising six spheres of different sizes simulating lesions. Reconstruction accuracy was evaluated using the maximum recovery coefficient, RC_{\max} , defined as the ratio of the reconstructed activity concentration at the voxel maximum to its true value. It was shown that the OSEM algorithm exhibits instability of the iterative process, as well as increased noise and edge artifacts. Post-filtering stabilizes the solution and ensures convergence; however, it leads to underestimation of activity in small lesions and may result in the loss of small lesions. In contrast, the MAP-Ent algorithm provides stable convergence and high quantitative accuracy without the need for post-filtering, while preserving the contrast of small lesions. At the same time, reconstruction accuracy strongly depends on the choice of the global regularization parameter, which limits optimal reconstruction across lesions of different sizes and indicates the need for local regularization.

Keywords: single-photon emission computed tomography, OSEM, MAP-Ent, regularization.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.104

REFERENCES

1. Turchin V.F., Kozlov V.P., Malkevich M.S. *Primenenie metodov matematicheskoy statistiki pri reshenii nekorrektno postavlennykh zadach* [Application of mathematical statistics methods in solving ill-posed problems]. *Uspehi Fizicheskikh Nauk* [Adv. Phys. Sci.], 1971. Vol. 13, pp. 681–703 (in Russian).
2. Bertero M., Boccacci P., Ruggiero V. *Inverse Imaging with Poisson Data: From Cells to Galaxies*. Bristol: IOP Publishing, 2018; DOI: 978-0-7503-1437-4
3. Shepp L. A., Vardi Y. Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1983, Vol. 1, pp. 113–122.
4. Hudson H. M., Larkin R. S. Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1994, Vol. 13, No. 4, pp. 601–609.

5. Nesterova A.V., Denisova N.V. Pitfalls in the Path of Quantitative Assessment of the Severity of Oncological Lesions in Diagnostic Nuclear Medicine. *Techn. Phys.*, 2022, Vol. 67, No. 6, pp. 401–410; DOI: 10.1134/S1063784222060056
6. Nesterova A. V., Denisova N. V., Minin S. M., Anashbaev Zh. Zh., Usov V. Yu. Opredelenie popravochnyh koeficientov pri kolichestvennoj ocenke kostnyh patologicheskikh ochagov metodom gamma-ehmissionnoj tomografii [Determination of correction factors in the quantitative assessment of bone pathological foci by gamma-emission tomography]. *Komp'yuternye Issledovaniya i Modelirovaniye*[Comput. Research and Modeling], 2025, Vol. 17, No. 4, pp. 677–696 (in Russian); DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-4-677-696
7. Nuyts J. Unconstrained image reconstruction with resolution modelling does not have a unique solution. *EJNMMI Physics* 2014, Vol. 1. Article number 98; DOI: 10.1186/s40658-014-0098-4
8. Dickson J.C., Armstrong I.S., Gabina P.M., Denis-Bacelar A.M., Krizsan A.K., Gear J.M., Van den Wyngaert T., de Geus-Oei L.F., Herrmann K. EANM practice guideline for quantitative SPECT-CT. *European J. Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, 2023, Vol. 50, pp. 980–995; DOI: 10.1007/s00259-022-06028-9
9. Van den Wyngaert T., Strobel K., Kampen W.U., Kuwert T., van der Bruggen W., Mohan H.K., Gnanasegaran G., Delgado-Bolton R., Weber W.A., Beheshti M., Langsteger W., Giammarile F., Mottaghy F.M., Paycha F.; EANM Bone & Joint Committee and the Oncology Committee The EANM practice guidelines for bone scintigraphy. *European J. Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, 2016, Vol. 43, pp. 1723–1738; DOI: 10.1007/s00259-016-3415-4
10. Gnesin S., Leite Ferreira P., Malterre J., Laub P., Prior J.O., Verdun F.R. Phantom Validation of Tc-99m Absolute Quantification in a SPECT/CT Commercial Device. *Comput. Math. Methods in Medicine*, 2016, Article number 4360371; DOI: 10.1155/2016/4360371
11. Peters S.M.B., van der Werf N.R., Segbers M., van Velden F.H.P., Wierds R., Blokland K.J.A.K., Konijnenberg M.W., Lazarenko S.V., Visser E. P., Gotthardt M. Towards standardization of absolute SPECT/CT quantification: a multi-center and multi-vendor phantom study. *EJNMMI Physics*, 2019, Vol. 6, No. 1, Article number 29; DOI: 10.1186/s40658-019-0268-5
12. Piwowarska-Bilska H., Supinska A., Birkenfeld B. What validation tests can be done by the clinical medical physicist while waiting for the standardization of quantitative SPECT/CT imaging? *EJNMMI Physics*, 2022, Vol. 9, No. 1, Article number 8; DOI: 10.1186/s40658-022-00434-6
13. Denisova N.V., Gurko M.A., Kolinko I.P., Ansheles A.A., Sergienko V.B. Virtual'naya platforma dlya imitacionnogo komp'yuternogo modelirovaniya radionuklidnoj vizualizacii v yadernoj kardiologii. Sravnenie s klinicheskimi dannymi [Virtual platform for simulation computer modeling of radionuclide imaging in nuclear cardiology. Comparison with clinical data]. *Digital Diagnostics*, 2023, Vol. 4, No. 3, pp. 492–508 (in Russian); DOI: 10.17816/DD595696
14. Denisova N. V. Matematicheskoe imitacionnoe modelirovanie v yadernoj medicine dlya optimizacii diagnosticheskoy tochnosti metoda OFEHKT/KT [Mathematical simulation modeling in nuclear medicine for optimizing the diagnostic accuracy of the SPECT/CT method]. *Medicinskaya Fizika* [Medical Physics], 2023, No. 3, pp. 45–62 (in Russian); DOI: 10.52775/1810-200X-2023-99-3-45-62
15. Denisova N. V., Terekhov I. N. Matematicheskoe modelirovanie procedury obsledovaniya pacientov metodom OFEHKT v kardiologii: raschyot planarnyh izobrazhenij [Mathematical modeling of the procedure for examining patients using SPECT in cardiology: calculation of planar images]. *Medicinskaya Fizika* [Medical Physics], 2015, No. 3, pp. 32–39 (in Russian).
16. Gurko M.A., Denisova N.V. The modelling of the acquiring of «raw» projection data in single-photon emission computed tomography. *Techn. Phys.*, 2022, Vol. 92, No. 5, pp. 634; DOI: 10.21883/TP.2022.05.53682.264-21
17. Jaynes E. T. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 1957, Vol. 106, No. 4, pp. 620–630.
18. Jaynes E. T. Prior probabilities. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 1968, Vol. 4, No. 3, pp. 227–241.
19. Skilling J. The axioms of maximum entropy. In: *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Science and Engineering*. Dordrecht: Springer, 1988, pp. 173–187.

20. Denisova N. Bayesian maximum-a-posteriori approach with global and local regularization to image reconstruction problem in medical emission tomography. *Entropy*, 2019, Vol. 21, Article number 1108; DOI: 10.3390/e21111108
21. de Nijs R. A novel model-based equation for size dependent mean recovery coefficients for spheres and other shapes. *Physica Medica*, 2025, Vol. 116, Article number 103174; DOI: 10.1016/j.ejmp.2023.103174
22. Marquis H., Schmidlein C. R., de Nijs R., Minguez Gabina G., Gustafsson J., Kayal G., Ocampo Ramos J. C., Carter L. M., Bailey D. L., Kesner A. L. MIRDPamphlet No. 32: A MIRDP Recovery Coefficient Model for Resolution Characterization and Shape-Specific Partial-Volume Correction. *J. Nuclear Medicine*, 2025, Vol. 66, No. 3, pp. 457–465; DOI: 10.2967/jnumed.124.268520
23. Armstrong I.S., Kelly M.D., Williams H.A., Matthews J.C. Impact of point spread function modelling and time-of-flight on FDG uptake measurements in lung lesions using alternative filtering strategies. *EJNMMI Physics*, 2014, Vol. 1, No. 1, Article number 16.