

УДК 517.9

## ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА УРАВНЕНИЯ ПАУЛИ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2026 М. В. Нецадим<sup>1а</sup>, Н. С. Часовских<sup>2б</sup>

<sup>1</sup>*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
просп. Академика Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*

<sup>2</sup>*Горно-алтайский государственный университет,  
ул. Ленкина, 1, г. Горно-Алтайск 659700, Россия*

E-mails: <sup>a</sup>neshch@math.nsc.ru, <sup>b</sup>nikolayaltay@rambler.ru

Поступила в редакцию 30.05.2024 г.; после доработки 30.05.2024 г.;  
принята к публикации 10.12.2025 г.

Исследуется система уравнений, которая получена на основе уравнения Паули и связывает функции скалярного и векторного потенциалов, амплитуды, фазы. Методами теории совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных находятся вполне интегрируемые системы, связывающие только три функции из указанных четырёх. Найденные системы связаны преобразованиями Бэклунда.

**Ключевые слова:** уравнение Паули, преобразования Бэклунда, условия совместности.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.105

### ВВЕДЕНИЕ

Для построения точных решений дифференциальных уравнений, исследования их симметричных свойств, поисков законов сохранения используются методы группового анализа дифференциальных уравнений [1, 2, 3, 4, 5], метод дифференциальных подстановок [6] и, более общим образом, метод преобразований Ли-Бэклунда [7, 8] в пространстве джетов продленного уравнения [9, 10]. На практике, как правило, встречаются более частные случаи преобразований Ли — Бэклунда — дифференциальные соответствия между двумя системами дифференциальных уравнений, получившие название преобразований Бэклунда [11, 12, 13]. Такие соответствия представляют собой дифференциальную связь между двумя системами дифференциальных уравнений, позволяющую по известному решению одной системы конструктивно находить решение второй системы. Преобразования Бэклунда для определённых уравнений имеют как правило именное название: каскадный метод Лапласа, преобразование Эйлера — Дарбу, преобразование Бианки, преобразование Мутара, метод билинейных уравнений Хироты и др. [3, 4, 5, 14, 15]. Так, например, преобразование Коула — Хопфа связывает уравнение теплопроводности и уравнение Бюргерса [16]. Преобразование Миуры связывает мКдФ и КдФ [17]. Отметим, что прямое и обратное преобразования Бэклунда, как правило, имеют разные качественные свойства. Так, например, дифференциальная подстановка Коула — Хопфа  $u = 2v_x/v$  переводит уравнение теплопроводности  $v_t = v_{xx}$  в уравнение Бюргерса  $u_t = uu_x + u_{xx}$ , а обратный переход связан с нелокальным разрешением  $v = \exp(-\frac{1}{2} \int u dx)$ . На преобразовании Коула — Хопфа основан метод прогонки [18]. С помощью этой замены были найдены общие решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений второго порядка для горизонтально-слоистых сред [19, 20, 21, 22]. Преобразования Бэклунда используются при построении солитонных решений нелинейных уравнений, изучении симметрий и законов сохранения, а также являются важнейшим инструментом при изу-

чении уравнений в частных производных и представляют собой отображения, связывающие разные решения этих уравнений [14]. Ранние исследования таких отображений для нелинейного уравнения Шредингера можно найти в [23, 24, 25, 33]. Интерес к преобразованиям Бэклунда обусловлен также обнаруженными связями с квантовыми интегрируемыми системами и феноменом разделения переменных [26, 27]. Нахождение соответствий Бэклунда для актуальных уравнений математической физики есть трудоёмкая самостоятельная задача. Примеры преобразований Бэклунда и их применение можно найти в [14, 15, 28].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается уравнением Паули

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \frac{1}{2\mu} \left( \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - eV + U + \frac{e\hbar}{2\mu c} (\vec{\sigma} \vec{H}) \right) \Psi,$$

которое описывает динамику движения электрона в электромагнитном поле с учётом спина электрона (см. [1], с. 240).

Находятся одномерные варианты уравнением Паули, в предположении, что векторный потенциал  $\vec{A}$  имеет одну ненулевую компоненту и уравнение зависит от одной пространственной координаты. Итогом этих вычислений являются девять вариантов одномерного уравнения Паули.

Далее, для одномерного уравнения Паули

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left( U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \Psi,$$

которое получается в предположении, что векторный потенциал  $\vec{A}$  имеет вид  $\vec{A} = (A, 0, 0)$  и все функции зависят от одной пространственной переменной  $x$  рассматривается задача исключения из уравнения Паули одной из функций  $w = U - eV$ ,  $A$ ,  $R$ ,  $S$ . Такие преобразования являются частью общей теории переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных. Отметим, что аналогичная задача была рассмотрена в работе [29] для классического уравнения Шредингера и в работе [30] для релятивистского уравнения Шредингера (уравнения Клейна-Гордона).

Получены дифференциальные соотношения  $[A, R, S]$ ,  $[w, R, S]$ ,  $[w, A, S]$ ,  $[w, A, R]$ , в которых отсутствует одна из функций  $w$ ,  $A$ ,  $R$ ,  $S$  и которые фактически являются условиями совместности для определения отсутствующей функции. Основная цель данной работы найти эти условия совместности. В качестве следствия получаются вполне интегрируемые системы, решение которых даёт точное решение уравнения Паули. При этом мы пользуемся алгоритмом теории совместности [31, 32] приведения в инволюцию переопределённой системы. Переходы между системами соотношений  $[A, R, S]$ ,  $[w, R, S]$ ,  $[w, A, S]$ ,  $[w, A, R]$  осуществляется введением дифференциальных соотношений для отсутствующей функции и представляет собой преобразования Бэклунда [11].

Все рассматриваемые функции предполагаются аналитическими.

## 2. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ И ЕГО ОДНОМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ

Динамика движения электрона в электромагнитном поле с учётом спина электрона описывается уравнением Паули, которое имеет вид ([1], с. 240)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( \frac{1}{2\mu} \left( \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - eV + U + \frac{e\hbar}{2\mu c} (\vec{\sigma} \vec{H}) \right) \Psi, \quad (1)$$

где  $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$  — двухкомпонентная волновая функция электрона ( $T$  — значок транспонирования);  $\hbar$  — постоянная Планка;  $-e$  — заряд электрона;  $c$  — скорость света;  $\mu$  — масса электрона;  $\vec{P} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  — вектор импульса;  $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$  — векторный потенциал электромагнитного поля;  $V$  — скалярный потенциал электромагнитного поля;  $U$  — силовой потенциал;  $\vec{\sigma} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$  — матрицы Паули;  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$ .

В общем случае предполагается, что все функции зависят от переменных  $(x, y, z, t)$ .

Если в правой части уравнения (1) в слагаемом  $\left(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$  раскрыть скобки, то уравнение (1) переписется в виде

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\mu}\vec{P}^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c}\text{div}\vec{A} + \frac{e}{\mu c}(\vec{A}\vec{P}) + \frac{e^2}{2\mu c^2}\vec{A}^2 - eV + U + \frac{e\hbar}{2\mu c}(\vec{\sigma}\vec{H})\right)\Psi, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{P}^2 &= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \\ (\vec{A}\vec{P}) &= -i\hbar\left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \text{div}\vec{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}, \\ \vec{A}^2 &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \end{aligned}$$

Отметим также, что скалярное произведение  $(\vec{\sigma}\vec{H})$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right).$$

Далее рассмотрим частные случаи уравнения Паули, когда векторный потенциал  $\vec{A}$  имеет одну ненулевую компоненту и все функции, входящие в уравнение Паули, зависят от одной пространственной координаты.

### 2.1. Векторный потенциал имеет вид $(A, 0, 0)$

Пусть векторный потенциал  $\vec{A}$  имеет вид  $\vec{A} = (A, 0, 0)$ . Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) \\ &+ \frac{i\hbar e}{2\mu c}\frac{\partial A}{\partial x}\Psi - \frac{i\hbar e}{\mu c}A\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{e^2}{2\mu c^2}A^2\Psi - eV\Psi + U\Psi \\ &+ \frac{e\hbar}{2\mu c}\left\{\frac{\partial A}{\partial z}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial A}{\partial y}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}\Psi. \quad (3) \end{aligned}$$

#### 2.1.1. Функция $A$ зависит только от переменных $(x, t)$ .

Тогда (3) принимает вид

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) - \frac{i\hbar e}{\mu c}A\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \left(U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2}A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c}\frac{\partial A}{\partial x}\right)\Psi. \quad (4)$$

То есть полностью исчезает слагаемое, отвечающее за спинорную часть уравнения, и (4) представляет собой систему двух одинаковых уравнений на компоненты вектор-функции  $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ .

Если дополнительно, предположить, что функция  $\Psi$  зависит только от переменных  $(x, t)$ , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left( U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \Psi, \quad (5)$$

которое слагаемым  $-\frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x}$  отличается от одномерного уравнения Шредингера, рассмотренного в работе [29].

### 2.1.2. Функция $A$ зависит только от переменных $(y, t)$ .

Тогда (3) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi$$

распадается на два независимых уравнения на функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , которые отличаются только знаком последнего слагаемого.

Если дополнительно, предположить, что функция  $\Psi$  зависит только от переменных  $(y, t)$ , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi,$$

которое запишем его как систему

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \psi_1 - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_1, \quad (6)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \psi_2 + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_2. \quad (7)$$

Каждое из этих уравнений является стандартным уравнением Шредингера.

Нетрудно проверить, что имеют место формулы

$$\psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = (\psi_1 \psi_2) \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{\psi_1}{\psi_2} \right), \quad \psi_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \psi_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( (\psi_1 \psi_2) \frac{\partial}{\partial y} \ln \left( \frac{\psi_1}{\psi_2} \right) \right).$$

Поэтому, домножая уравнение (6) на  $\psi_2$ , уравнение (7) на  $\psi_1$  и вычитая их, получим соотношение

$$i\hbar (\psi_1 \psi_2) \frac{\partial}{\partial t} \ln \left( \frac{\psi_1}{\psi_2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left( (\psi_1 \psi_2) \frac{\partial}{\partial y} \ln \left( \frac{\psi_1}{\psi_2} \right) \right) - \frac{e\hbar}{\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} (\psi_1 \psi_2). \quad (8)$$

Из соотношения (8) очевидно получаем следующее следствие.

**Следствие 1. 1)** Если решения  $\psi_1$  и  $\psi_2$  системы (6), (7) удовлетворяют соотношению  $\psi_1 \psi_2 = C = \text{const}$ , то функция  $w = \ln \left( \frac{\psi_1}{\psi_2} \right)$  является решением уравнения

$$i\hbar \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C \frac{e\hbar}{\mu c} \frac{\partial A}{\partial y}.$$

2) Если решения  $\psi_1$  и  $\psi_2$  системы (6), (7) удовлетворяют соотношению  $\psi_1/\psi_2 = \text{const}$ , то  $\frac{\partial A}{\partial y} = 0$ .

### 2.1.3. Функция $A$ зависит только от переменных $(z, t)$ .

Тогда (3) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Psi$$

и представляет собой систему уравнений на функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , которые «сплетены» за счёт последнего слагаемого.

Если дополнительно, предположить, что функция  $\Psi$  зависит только от переменных  $(z, t)$ , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Psi,$$

или, в развёрнутом виде,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \psi_1 - \frac{i e \hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \psi_2, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \psi_2 + \frac{i e \hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \psi_1. \end{aligned}$$

Домножив первое уравнение на  $\psi_1$ , второе на  $\psi_2$  и сложив, получим соотношение

$$\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1^2 + \psi_2^2) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \psi_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) (\psi_1^2 + \psi_2^2).$$

Так как

$$2 \left( \psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \psi_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\psi_1^2 + \psi_2^2) - \left( \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)^2 \right),$$

то это уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1^2 + \psi_2^2) &= -\frac{\hbar^2}{4\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{4\mu} \left( \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)^2 \right) + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) (\psi_1^2 + \psi_2^2). \end{aligned} \quad (9)$$

**Замечание 1.** Если

$$\left( \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad (10)$$

то уравнение (9) принимает вид

$$\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{4\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) w$$

— уравнение Шредингера для функции  $w = \psi_1^2 + \psi_2^2$ .

Очевидно, что соотношение (10) равносильно условиям

$$\frac{\partial}{\partial z} (\psi_1 + i\psi_2) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial z} (\psi_1 - i\psi_2) = 0.$$

**Замечание 2.** Если

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = q\psi_1, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = q\psi_2,$$

где  $q$  — некоторая константа, то

$$\psi_1 = \tau_1(t) \exp(qz), \quad \psi_2 = \tau_2(t) \exp(qz)$$

где  $\tau_1(t)$ ,  $\tau_2(t)$  — некоторые функции переменной  $t$  и

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right)^2 = q^2(\psi_1^2 + \psi_2^2).$$

Следовательно,

$$w = \psi_1^2 + \psi_2^2 = \exp(2qz)(\tau_1^2(t) + \tau_2^2(t)) = \exp(2qz)T(t)$$

и уравнение (9) принимает вид

$$\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial T}{\partial t} = \left( -\frac{3\hbar^2}{2\mu} q^2 + 2\left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U\right) \right) T.$$

Отсюда, в частности, следует, что выражение  $\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U$  является функцией только переменной  $t$ .

## 2.2. Векторный потенциал имеет вид $(0, A, 0)$

Пусть векторный потенциал  $\vec{A}$  имеет вид  $\vec{A} = (0, A, 0)$ . Тогда уравнение (2) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \Psi - eV \Psi + U \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Psi. \quad (11)$$

### 2.2.1. Функция $A$ зависит только от переменных $(x, t)$ .

Тогда (11) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi$$

и распадается на два независимых уравнения на функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , которые отличаются только знаком последнего слагаемого.

Если  $\Psi = \Psi(x, t)$ , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi.$$

### 2.2.2. Функция $A$ зависит только от переменных $(y, t)$ .

Тогда (11) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left( U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \Psi$$

и представляет собой систему двух одинаковых уравнений на компоненты вектор-функции  $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ .

Если  $\Psi = \Psi(y, t)$ , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left( U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \Psi.$$

### 2.2.3. Функция $A$ зависит только от переменных $(z, t)$ .

Тогда (11) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi$$

и представляет собой систему уравнений на функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , которые «сплетены» за счёт последнего слагаемого.

Если  $\Psi = \Psi(z, t)$ , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

### 2.3. Векторный потенциал имеет вид $(0, 0, A)$

Пусть векторный потенциал  $\vec{A}$  имеет вид  $\vec{A} = (0, 0, A)$ . Тогда уравнение (2) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \Psi - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \Psi - eV \Psi + U \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \left\{ \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \Psi. \quad (12)$$

#### 2.3.1. Функция $A$ зависит только от переменных $(x, t)$ .

Тогда (12) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

Если  $\Psi = \Psi(x, t)$ , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

#### 2.3.2. Функция $A$ зависит только от переменных $(y, t)$ .

Тогда (12) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

Если  $\Psi = \Psi(y, t)$ , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

#### 2.3.3. Функция $A$ зависит только от переменных $(z, t)$ .

Тогда (12) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \Psi - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi.$$

Если  $\Psi = \Psi(z, t)$ , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left( \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \Psi.$$

### 3. ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ И ЕГО УПРОЩЕНИЕ

Рассмотрим уравнение (5):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left( U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \psi. \quad (5)$$

Сделаем замену переменных  $t = \hbar\tau$ ,  $x = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\xi$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, & \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}, & \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \frac{\partial A}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

После подстановки в уравнение (5) получаем

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{i2e}{c\sqrt{2\mu}} A \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left( U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{ie}{c\sqrt{2\mu}} \frac{\partial A}{\partial \xi} \right) \psi.$$

Введём обозначение  $\tilde{A} = \frac{e}{c\sqrt{2\mu}} A$ . Тогда уравнение примет вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2i\tilde{A} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left( U - eV + \tilde{A}^2 + i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \xi} \right) \psi.$$

Переобозначим  $\tau = t$ ,  $\xi = x$ ,  $\tilde{A} = A$ ,  $w = U - eV$ . Окончательно, уравнение принимает вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2iA \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left( w + A^2 + i \frac{\partial A}{\partial x} \right) \psi. \quad (13)$$

Напомним, что функции  $A$ ,  $w$  вещественнозначные, а функция  $\psi$  комплекснозначная. Представим её в виде

$$\psi = Re^{iS},$$

где  $R = R(t, x)$ ,  $S = S(t, x)$  — вещественнозначные функции (амплитуда и фаза, соответственно). Далее перейдём от комплексного уравнения (13) к системе вещественных уравнений. Для этого найдём производные функции  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial t} e^{iS} + iR \frac{\partial S}{\partial t} e^{iS}, & \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial x} e^{iS} + iR \frac{\partial S}{\partial x} e^{iS}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} e^{iS} + 2i \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} e^{iS} + iR \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} e^{iS} - R \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 e^{iS}. \end{aligned}$$

Подставим найденные производные в уравнение (13) и сократим на экспоненту  $e^{iS}$ . Далее для сокращения записи частные производные будем обозначать соответствующим индексом внизу, например,  $\frac{\partial S}{\partial x} = S_x$ . Имеем

$$i \left( R_t + iRS_t \right) = - \left( R_{xx} + 2iR_x S_x + iRS_{xx} - RS_x^2 \right) - 2iA \left( R_x + iRS_x \right) + \left( w + A^2 + iA_x \right) R.$$

Выделяем вещественную и мнимую части:

$$-RS_t = -R_{xx} + RS_x^2 + 2ARS_x + \left(w + A^2\right)R, \quad (14)$$

$$R_t = -2R_xS_x - RS_{xx} - 2AR_x + A_xR. \quad (15)$$

Далее работаем с этой системой.

#### 4. ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $A$

Перепишем уравнения (14), (15) в виде

$$\frac{R_{xx}}{R} - (S_t + S_x^2) - w = A^2 + 2AS_x, \quad \frac{R_t}{R} + 2\frac{R_x}{R}S_x + S_{xx} = A_x - 2A\frac{R_x}{R}.$$

Введём обозначение

$$\rho = \ln R. \quad (16)$$

Тогда

$$\rho_t = \frac{R_t}{R}, \quad \rho_x = \frac{R_x}{R}, \quad \rho_{xx} = \frac{R_{xx}}{R} - \left(\frac{R_x}{R}\right)^2,$$

и

$$\frac{R_{xx}}{R} = \rho_{xx} + \rho_x^2.$$

Поэтому система уравнений принимает вид

$$A^2 + 2AS_x = \rho_{xx} + \rho_x^2 - (S_t + S_x^2) - w, \quad A_x - 2A\rho_x = \rho_t + 2\rho_xS_x + S_{xx}.$$

Введём обозначения

$$B = \rho_{xx} + \rho_x^2 - (S_t + S_x^2) - w, \quad C = \rho_t + 2\rho_xS_x + S_{xx}. \quad (17)$$

Тогда система уравнений принимает вид

$$A^2 + 2AS_x = B, \quad A_x = C + 2A\rho_x. \quad (18)$$

Далее из системы (18) найдём функцию  $A$ .

Дифференцируем первое уравнение системы (18) по переменной  $x$ :

$$2AA_x + 2A_xS_x + 2AS_{xx} = B_x.$$

В силу второго соотношения (18) оно принимает вид

$$2A(C + 2A\rho_x) + 2S_x(C + 2A\rho_x) + 2AS_{xx} = B_x$$

или

$$4A^2\rho_x + 2A(C + S_{xx} + 2\rho_xS_x) = B_x - 2CS_x.$$

Итак, на функцию  $A$  имеем систему двух квадратных уравнений

$$A^2 + 2AS_x = B, \quad 4A^2\rho_x + 2A(C + S_{xx} + 2\rho_xS_x) = B_x - 2CS_x. \quad (19)$$

Отсюда находим функцию  $A$  (исключая квадратичное слагаемое):

$$\begin{aligned} 4\rho_x(B - 2AS_x) + 2A(C + S_{xx} + 2\rho_xS_x) &= B_x - 2CS_x, \\ 2A(C + S_{xx} + 2\rho_xS_x - 4\rho_xS_x) &= B_x - 2CS_x - 4B\rho_x, \\ A &= \frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(C + S_{xx} - 2\rho_xS_x)}. \end{aligned}$$

В силу второго соотношения системы (17):

$$C + S_{xx} - 2\rho_x S_x = \rho_t + 2\rho_x S_x + S_{xx} + S_{xx} - 2\rho_x S_x = \rho_t + 2S_{xx}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(\rho_t + 2S_{xx})}. \quad (20)$$

Остаётся подставить (20) в одно из соотношений (19) для того, чтобы получить условия совместности этой системы. (Отметим, что (19) — система двух квадратичных уравнений и её условие совместности заключается в том, что её дискриминант обращается в нуль.) Подставим (20) в первое соотношение (19)

$$\left( \frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(\rho_t + 2S_{xx})} \right)^2 + 2S_x \frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(\rho_t + 2S_{xx})} = B$$

или

$$\left( B_x - 2CS_x - 4B\rho_x \right)^2 - 4B(\rho_t + 2S_{xx})^2 + 4S_x(\rho_t + 2S_{xx}) \left( B_x - 2CS_x - 4B\rho_x \right) = 0. \quad (21)$$

Соотношение (21) и есть условие совместности системы (19).

**Теорема 1.** *Если*

1) *функции*  $R = R(t, x)$ ,  $S = S(t, x)$ ,  $w = w(t, x)$  *удовлетворяют соотношению* (21)

$$\left( B_x - 2CS_x - 4B\rho_x \right)^2 - 4B(\rho_t + 2S_{xx})^2 + 4S_x(\rho_t + 2S_{xx}) \left( B_x - 2CS_x - 4B\rho_x \right) = 0,$$

где

$$B = \rho_{xx} + \rho_x^2 - (S_t + S_x^2) - w, \quad C = \rho_t + 2\rho_x S_x + S_{xx}, \quad \rho = \ln R,$$

2) *функция*  $A = A(t, x)$  *определена формулой* (20)

$$A = \frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(\rho_t + 2S_{xx})},$$

то функции  $A$ ,  $w$ ,  $R$ ,  $S$  удовлетворяют системе уравнений (14), (15) и, соответственно, функция  $\psi = Re^{iS}$  — решение уравнения Паули (13).

## 5. ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $R$

Перепишем систему (14), (15) в виде

$$R_{xx} = R(w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x), \quad R_t = -2R_x(A + S_x) + R(A_x - S_{xx}).$$

Введём обозначения

$$B = w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x, \quad C = -2(A + S_x), \quad D = A_x - S_{xx}. \quad (22)$$

Тогда система принимает вид

$$R_{xx} = BR, \quad R_t = CR_x + DR. \quad (23)$$

Составляем условия совместности  $(R_{xx})_t = (R_t)_{xx}$ .

Имеем

$$(R_{xx})_t = B_t R + B R_t = \text{в силу (23)} = B_t R + B(CR_x + DR) = BCR_x + R(B_t + BD), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (R_t)_x &= C_x R_x + C R_{xx} + D_x R + D R_x = \text{в силу (23)} \\ &= C_x R_x + CBR + D_x R + D R_x = R_x(D + C_x) + R(BC + D_x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R_t)_{xx} &= R_{xx}(D + C_x) + R_x(D_x + C_{xx}) + R_x(BC + D_x) + R(B_x C + BC_x + D_{xx}) = \text{в силу (23)} \\ &= BR(D + C_x) + R_x(BC + 2D_x + C_{xx}) + R(B_x C + BC_x + D_{xx}) \\ &= R_x(BC + 2D_x + C_{xx}) + R(BD + B_x C + 2BC_x + D_{xx}). \quad (25) \end{aligned}$$

Приравнивая (24) и (25) получаем

$$R_x(2D_x + C_{xx}) = -R(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t).$$

В силу (22)

$$2D_x + C_{xx} = 2(A_{xx} - S_{xxx}) - 2(A_{xx} + S_{xxx}) = -4S_{xxx}.$$

Итак, условие совместности  $(R_{xx})_t = (R_t)_{xx}$  принимает вид

$$4S_{xxx}R_x = R(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t).$$

Отметим, что если  $S_{xxx} = 0$ , то

$$B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t = 0$$

и система (23) совместна (находится в инволюции).

Если  $S_{xxx} \neq 0$ , то

$$R_x = R \frac{(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t)}{4S_{xxx}}.$$

Введём обозначение

$$E = \frac{(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t)}{4S_{xxx}}. \quad (26)$$

Тогда

$$R_x = ER$$

и на функцию  $R$  имеем систему соотношений

$$R_x = ER, \quad R_t = R(D + CE). \quad (27)$$

Кроме того, имеем соотношение

$$(ER)_x = BR,$$

которое в силу (27) принимает вид

$$E_x R + E^2 R = BR,$$

т. е.

$$E_x = B - E^2. \quad (28)$$

Составляем условие совместности  $(R_x)_t = (R_t)_x$ :

$$R_x(D + CE) + R(D + CE)_x = E_t R + ER_t.$$

В силу (27)

$$\begin{aligned} ER(D + CE) + R(D + CE)_x &= E_t R + ER(D + CE), \\ R(E_t - (D + CE)_x) &= 0. \end{aligned}$$

Итак, условие совместности  $(R_x)_t = (R_t)_x$  принимает вид

$$E_t = (D + CE)_x.$$

или в силу (28)

$$E_t = D_x + BC + EC_x - E^2 C. \quad (29)$$

Далее напишем условие совместности  $(E_x)_t = (E_t)_x$  системы (28), (29). Имеем

$$E_{xt} = B_t - 2EE_t =$$

в силу (29)

$$\begin{aligned} &= B_t - 2E(D_x + BC + EC_x - E^2 C) = B_t - 2E(D_x + BC) - 2E^2 C_x + 2E^3 C, \\ E_{tx} &= D_{xx} + B_x C + BC_x + E_x C_x + EC_{xx} - 2EE_x C - E^2 C_x = \end{aligned}$$

в силу (28)

$$\begin{aligned} &= D_{xx} + B_x C + BC_x + (B - E^2)C_x + EC_{xx} - 2EC(B - E^2) - E^2 C_x = \\ &= (D_{xx} + B_x C + 2BC_x) + E(C_{xx} - 2BC) - 2E^2 C_x + 2E^3 C. \end{aligned}$$

Итак, условие совместности  $(E_x)_t = (E_t)_x$  системы (28), (29) принимает вид

$$B_t - 2E(D_x + BC) = (D_{xx} + B_x C + 2BC_x) + E(C_{xx} - 2BC)$$

или

$$E(2D_x + C_{xx}) = B_t - D_{xx} - B_x C - 2BC_x.$$

Так как  $2D_x + C_{xx} = -4S_{xxx}$ , то

$$E = \frac{(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t)}{4S_{xxx}},$$

что совпадает с (26). Следовательно, система (28), (29) совместна.

Итак, при условии  $S_{xxx} \neq 0$  доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть функции  $B(t, x)$ ,  $C(t, x)$ ,  $D(t, x)$ ,  $E(t, x)$  определяются через функции  $w(t, x)$ ,  $A(t, x)$ ,  $S(t, x)$ , где  $S_{xxx} \neq 0$ , формулами:

$$\begin{aligned} B &= w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x, \quad C = -2(A + S_x), \quad D = A_x - S_{xx}, \\ E &= \frac{(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t)}{4S_{xxx}}. \end{aligned}$$

Тогда

1) система

$$E_x = B - E^2, \quad E_t = D_x + BC + EC_x - E^2 C$$

находится в инволюции,

2) система

$$R_{xx} = R(w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x), \quad R_t = -2R_x(A + S_x) + R(A_x - S_{xx})$$

эквивалентна системе (27)

$$R_x = ER, \quad R_t = R(D + CE),$$

условия совместности, которой имеют вид 1).

Так определённые функции  $w$ ,  $A$ ,  $S$ ,  $R$  удовлетворяют системе (14), (15) и, следовательно, функция  $\psi = Re^{iS}$  является решением уравнения Паули (13).

**Замечание 3.** Функции  $R, S, w$  в условиях теоремы 1 определяются функциями  $A$  и  $E$ . Действительно, пусть  $A$  и  $E$  — заданные функции. Тогда

1) Функция  $B$  определяется из равенства (28):

$$B = E_x + E^2.$$

2) Запишем (29) в виде

$$D_x = E_t - (B - E^2)C - EC_x = E_t - (EC)_x.$$

Подставим  $D = A_x - S_{xx}$ :

$$A_{xx} - S_{xxx} = E_t - (EC)_x,$$

$$S_{xxx} = A_{xx} - E_t + (EC)_x.$$

Подставим  $C = -2(A + S_x)$ :

$$S_{xxx} = A_{xx} - E_t - 2(E(A + S_x))_x.$$

Итак, функция  $S$  определяется функциями  $A$  и  $E$ .

3) Потенциал  $w$  находится по формуле

$$w = B - (A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x).$$

4) Функция  $R$  находится из вполне интегрируемой системы

$$R_x = ER, \quad R_t = R(D + CE).$$

**Рассмотрим случай  $S_{xxx} = 0$ .** Имеем

$$S = x^2a(t) + xb(t) + c(t)$$

для некоторых функций  $a, b, c$  переменной  $t$ . Тогда

$$C = -2(A + S_x) = -2A - 4xa(t) - 2b(t),$$

$$D = A_x - S_{xx} = A_x - 2a(t),$$

$$B = w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x =$$

$$= w + A^2 + x^2a'(t) + xb'(t) + c'(t) + (2xa(t) + b(t))^2 + 2A(2xa(t) + b(t)).$$

Следовательно, справедливо предложение.

**Предложение 1.** Пусть функции  $B(t, x), C(t, x), D(t, x)$  определяются через функции  $w(t, x), A(t, x), S(t, x)$  формулами:

$$B = w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x, \quad C = -2(A + S_x), \quad D = A_x - S_{xx}.$$

Если  $S_{xxx} = 0$  и  $B_xC + 2BC_x + D_{xx} - B_t = 0$ , то функция  $R(t, x)$  определяется из совместной системы

$$R_{xx} = BR, \quad R_t = CR_x + DR.$$

Так определённые функции  $w, A, S, R$  удовлетворяют системе (14), (15) и, следовательно, функция  $\psi = Re^{iS}$  является решением уравнения Паули (13).

## 6. ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $S$

Перепишем систему (14), (15) в виде

$$S_t = \frac{R_{xx}}{R} - S_x^2 - 2AS_x - w - A^2, \quad (30)$$

$$S_{xx} = -\frac{R_t}{R} - 2\frac{R_x}{R}S_x - 2A\frac{R_x}{R} + A_x. \quad (31)$$

Введём обозначения

$$B = \frac{R_{xx}}{R} - w - A^2, \quad C = A_x - \frac{R_t}{R} - 2A\frac{R_x}{R}, \quad D = 2\frac{R_x}{R}. \quad (32)$$

Тогда система (30), (31) принимает вид

$$S_t = B - S_x^2 - 2AS_x, \quad (33)$$

$$S_{xx} = C - DS_x. \quad (34)$$

Составим условие совместности  $(S_t)_{xx} = (S_{xx})_t$  системы (33), (34).

Из соотношения (33) находим

$$S_{tx} = B_x - 2S_x S_{xx} - 2A_x S_x - 2AS_{xx}.$$

В силу (34)

$$S_{tx} = B_x - 2S_x(C - DS_x) - 2A_x S_x - 2A(C - DS_x) = (B_x - 2AC) + 2DS_x^2 + 2(AD - C - A_x)S_x.$$

Итак,

$$S_{tx} = E_1 + 2DS_x^2 + E_2 S_x, \quad (35)$$

где

$$E_1 = B_x - 2AC, \quad E_2 = 2(AD - C - A_x). \quad (36)$$

Далее из (35) находим

$$S_{txx} = E_{1x} + 2D_x S_x^2 + 4DS_x S_{xx} + E_{2x} S_x + E_2 S_{xx}.$$

В силу (34)

$$\begin{aligned} S_{txx} &= E_{1x} + 2D_x S_x^2 + 4DS_x(C - DS_x) + E_{2x} S_x + E_2(C - DS_x) \\ &= (E_{1x} + CE_2) + 2(D_x - 2D^2)S_x^2 + (4DC + E_{2x} - DE_2)S_x. \end{aligned}$$

Итак,

$$S_{txx} = F_1 + F_2 S_x^2 + F_3 S_x, \quad (37)$$

где

$$F_1 = E_{1x} + CE_2, \quad F_2 = 2(D_x - 2D^2), \quad F_3 = 4DC + E_{2x} - DE_2. \quad (38)$$

Из соотношения (34) находим

$$S_{xxt} = C_t - D_t S_x - DS_{xt}.$$

В силу (35)

$$S_{xxt} = C_t - D_t S_x - D(E_1 + 2DS_x^2 + E_2 S_x) = (C_t - DE_1) - 2D^2 S_x^2 - (D_t + DE_2)S_x.$$

Итак,

$$S_{xxt} = H_1 - 2D^2S_x^2 - H_2S_x, \quad (39)$$

где

$$H_1 = C_t - DE_1, \quad H_2 = D_t + DE_2. \quad (40)$$

Следовательно, условие совместности  $(S_t)_{xx} = (S_{xx})_t$  системы (33), (34) в силу (37) и (39) имеют вид:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2S_x^2 + F_3S_x &= H_1 - 2D^2S_x^2 - H_2S_x, \\ (F_2 + 2D^2)S_x^2 + (F_3 + H_2)S_x + F_1 - H_1 &= 0. \end{aligned}$$

Так как

$$F_2 + 2D^2 = 2(D_x - D^2), \quad F_3 + H_2 = 4DC + E_{2x} + D_t,$$

то

$$2(D_x - D^2)S_x^2 + (4DC + E_{2x} + D_t)S_x + F_1 - H_1 = 0.$$

Итак,

$$P_0S_x^2 + P_1S_x + P_2 = 0, \quad (41)$$

где

$$P_0 = 2(D_x - D^2), \quad P_1 = 4DC + E_{2x} + D_t, \quad P_2 = F_1 - H_1. \quad (42)$$

Далее рассмотрим условия совместности системы (33), (41).

Из (33) и (41) находим

$$S_t = T, \quad S_x = X, \quad (43)$$

где

$$X = \frac{1}{2P_0} \left( \sqrt{P_1^2 - 4P_0P_2} - P_1 \right), \quad T = B + \left( \frac{P_1}{P_0} - 2A \right) X + \frac{P_2}{P_0}. \quad (44)$$

Тогда соотношение

$$T_x = X_t$$

и есть искомое соотношение на функции  $R, A, w$ .

Итак, доказана следующая

**Теорема 3.** Пусть функции  $w(t, x), A(t, x), R(t, x)$  связаны единственным соотношением

$$T_x = X_t,$$

где функции  $T = T(t, x), X = X(t, x)$  определяются через  $w, A, R$  следующей последовательностью равенств:

$$\begin{aligned} B &= \frac{R_{xx}}{R} - w - A^2, \quad C = A_x - \frac{R_t}{R} - 2A \frac{R_x}{R}, \quad D = 2 \frac{R_x}{R}, \\ E_1 &= B_x - 2AC, \quad E_2 = 2(AD - C - A_x), \\ F_1 &= E_{1x} + CE_2, \quad F_2 = 2(D_x - 2D^2), \quad F_3 = 4DC + E_{2x} - DE_2, \\ H_1 &= C_t - DE_1, \quad H_2 = D_t + DE_2, \\ P_0 &= 2(D_x - D^2), \quad P_1 = 4DC + E_{2x} + D_t, \quad P_2 = F_1 - H_1, \\ X &= \frac{1}{2P_0} \left( \sqrt{P_1^2 - 4P_0P_2} - P_1 \right), \quad T = B + \left( \frac{P_1}{P_0} - 2A \right) X + \frac{P_2}{P_0}. \end{aligned}$$

Тогда система

$$S_t = \frac{R_{xx}}{R} - S_x^2 - 2AS_x - w - A^2, \quad S_{xx} = -\frac{R_t}{R} - 2 \frac{R_x}{R} S_x - 2A \frac{R_x}{R} + A_x$$

равносильна системе

$$S_t = T, \quad S_x = X,$$

которая находится в инволюции и, следовательно, функция  $\psi = Re^{iS}$  является решением уравнения Паули (13).

## 7. ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ $w$

Из соотношения (14) находим функцию  $w$ :

$$w = -S_t + \frac{R_{xx}}{R} - S_x^2 - 2AS_x - A^2.$$

Соотношение (15) остаётся свободным. Положим

$$A = S_x.$$

Тогда (15) примет вид

$$R_t = -4R_x S_x,$$

а для функции  $w$  имеем представление

$$w = -S_t + \frac{R_{xx}}{R} - 4S_x^2.$$

Итак, при  $A = S_x$  имеем систему

$$R_t = -4R_x S_x, \quad w = -S_t + \frac{R_{xx}}{R} - 4S_x^2.$$

Исключим из этой системы функцию  $S$ . Из первого соотношения находим

$$S_x = -\frac{R_t}{4R_x}$$

и подставляем во второе соотношение

$$S_t = -w + \frac{R_{xx}}{R} - \frac{R_t^2}{4R_x^2}.$$

Составляем условие совместности  $S_{xt} = S_{tx}$ :

$$-\frac{R_{tt}R_x - R_{tx}R_t}{4R_x^2} = -w_x + \frac{R_{xxx}R - R_x R_{xx}}{R^2} - \frac{R_t R_{tx} R_x^2 - R_x R_{xx} R_t^2}{2R_x^4}$$

Итак, справедливо следующее предложение.

**Предложение 2.** Пусть

1) функции  $w(t, x)$ ,  $R(t, x)$  связаны соотношением

$$-\frac{R_{tt}R_x - R_{tx}R_t}{4R_x^2} = -w_x + \frac{R_{xxx}R - R_x R_{xx}}{R^2} - \frac{R_t R_{tx} R_x^2 - R_x R_{xx} R_t^2}{2R_x^4},$$

2) функция  $S(t, x)$  определяется из системы

$$S_x = -\frac{R_t}{4R_x}, \quad S_t = -w + \frac{R_{xx}}{R} - \frac{R_t^2}{4R_x^2},$$

совместной в силу 1),

3) функция  $A(t, x)$  определяется формулой  $A = -\frac{R_t}{4R_x}$ .

Тогда функция  $\psi = Re^{iS}$  является решением уравнения Паули (13).

Далее рассмотрим некоторые частные случаи представления функции  $w$ .

Пусть

$$w = \frac{R_{xx}}{R} - \frac{R_t^2}{4R_x^2},$$

то есть  $S_t = 0$ . Тогда

$$S_x = -\frac{R_t}{4R_x}$$

— функция переменной  $x$ , то есть  $S_x = f(x)$ ,  $S = \int f(x) dx$  и

$$R_t + 4R_x f(x) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$R = r \left( 4t - \int \frac{dx}{f(x)} \right),$$

где  $r(p)$  — произвольная функция одной переменной. Далее  $A = S_x = f(x)$ . Остаётся найти функцию  $w$ . Имеем

$$w = \frac{R_{xx}}{R} - \frac{R_t^2}{4R_x^2} = \frac{r'' + r'f''}{rf^2} - 4f^2.$$

Итак, справедливо

**Предложение 3.** Функции

$$A = f(x), \quad S = \int f(x) dx, \quad R = r \left( 4t - \int \frac{dx}{f(x)} \right), \quad w = \frac{r'' + r'f''}{rf^2} - 4f^2,$$

где  $f(x)$ ,  $r(p)$  — произвольные функции одного аргумента и  $p = 4t - \int \frac{dx}{f(x)}$  являются решением системы (14), (15) и, следовательно, функция  $\psi = Re^{iS}$  является решением уравнения Паули (13).

Пусть

$$w = \frac{R_{xx}}{R} + \frac{1}{4}H \left( \frac{R_t}{R_x} \right),$$

где  $H(\cdot)$  — некоторая функция одной переменной. Тогда

$$S_x = -\frac{R_t}{4R_x}, \quad S_t = -\frac{R_t^2}{4R_x^2} - \frac{1}{4}H \left( \frac{R_t}{R_x} \right).$$

Введём обозначение

$$B = \frac{R_t}{R_x}.$$

Тогда

$$S_x = -\frac{1}{4}B, \quad S_t = -\frac{1}{4}(B^2 + H(B)).$$

Условие совместности  $S_{xt} = S_{tx}$  примет вид

$$B_t = (2B + H'(B))B_x.$$

Отсюда находим

$$(2B + H'(B))t + x = h(B),$$

где  $h(\cdot)$  — произвольная функция одной переменной.

Функция  $R$  находится из уравнения

$$R_t - BR_x = 0,$$

а функция  $A = S_x = -\frac{1}{4}B$ .

Итак, справедливо следующее предложение.

**Предложение 4.** Пусть

1) функция  $B = B(t, x)$  — решение неявного уравнения

$$(2B + H'(B))t + x = h(B),$$

где  $h(\cdot)$ ,  $H(\cdot)$  — произвольные функции одной переменной,

2) функция  $R = R(t, x)$  — решение уравнения

$$R_t - BR_x = 0,$$

3) функция  $S = S(t, x)$  — решение системы

$$S_x = -\frac{1}{4}B, \quad S_t = -\frac{1}{4}(B^2 + H(B)),$$

совместной в силу выбора функции  $B$ .

Тогда функции

$$A = -\frac{1}{4}B, \quad w = \frac{R_{xx}}{R} + \frac{1}{4}H\left(\frac{R_t}{R_x}\right), \quad \psi = Re^{iS}$$

являются решением уравнения Паули (13).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представляется интересным провести аналогичный анализ уравнений, связывающих функции амплитуды, фазы, потенциала и векторного потенциала для многомерного уравнения Паули, а также применить полученные результаты к нелинейным уравнениям Паули, когда потенциал является функцией от амплитуды. (Например, как для кубического уравнения Шредингера [14, 33].) Отметим также, что некоторые результаты, связанные с конструктивным подходом исследования уравнений математической физики и применением их к поиску коэффициентов и решений можно найти в работах [16, 17, 33, 34, 35, 36, 37].

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2026-0029). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976 г., 664 с.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
5. *Виноградов А.М.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. М.: Факториал, 1997.
6. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
7. *Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли-Бэклунда. Функцион. анализ и его прилож. 1980, Т. 14, вып. 1, с. 25–36.
8. *Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* О бесконечных алгебрах Ли — Бэклунда // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14, вып. 4. С. 79–80.
9. *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
10. *Виноградов А.М.* Когомологический анализ уравнений с частными производными и вторичное исчисление. М.: МЦНМО, 2021.
11. *Miura R.M.* Backlund transformations // Lect. Notes Math. 1976. V. 515.
12. *Жаринов В.В.* О соответствии Бэклунда // Мат. сб. 1988. Т. 136, № 2. С. 274–291.
13. *Жаринов В.В.* О соответствии Бэклунда для эволюционных уравнений в многомерном пространстве // Теор. и мат. физика. 2006. Т. 147, № 1. С. 3–13.
14. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987 г.
15. *Капцов О.В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
16. *Аниконов Ю.Е., Нецадим М.В.* Обобщённое преобразование Коула — Хопфа // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 3(75). С. 18–25; DOI 10.17377/sibjim.2018.21.302
17. *Аниконов Ю.Е., Нецадим М.В.* Метод дифференциальных связей и нелинейные обратные задачи // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 36–47.
18. *Гельфанд И.М., Локуцкий О.В.* Метод «прогонки» для решения разностных уравнений. В книге: Годунов С.К., Рябенький В.С., Введение в теорию разностных схем. М.: Физ.-мат. лит., 1962.
19. *Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И.* Метод расчёта поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1984. Т. 24, № 2. С. 272–286.
20. *Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г.* Метод расчёта нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Доклады РАН. 1988. Т. 301, № 4. С. 834–839.
21. *Карчевский А.Л.* Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и Геофизика. 2007. Т. 48, № 8. С. 889–898.
22. *Карчевский А.Л.* Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 48–68.
23. *Konopelchenko B.G.* The group structure of Backlund transformations // Phys. Lett. A. 1979. V. 74. P. 189–192.
24. *Sasaki R.* Canonical structure of Backlund transformations // Phys. Lett. A. 1980. V. 78. P. 7–10.
25. *Konopelchenko B.G.* Elementary Backlund transformations, nonlinear superposition principle and solution of the integrable equations // Phys. Lett. A. 1982. V. 87. P. 445–448.
26. *Kuznetsov V.B., Sklyanin E.K.* On Backlund transformations for many-body systems // J. Physics A. 1998. V. 31. P. 2241–2251.

27. Белоусов Н.М. Преобразование Бэклунда для нелинейного уравнения Шредингера // Записки научных семинаров ПОМИ. 2020. Т. 494. С. 6–22.
28. Мива Т., Джимбо М., Датэ Э. Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры. М.: МЦНМО, 2005.
29. Нешадим М.В. Преобразования Бэклунда для одномерного уравнения Шредингера // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 2. С. 116–125; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.209
30. Нешадим М.В., Симонов А.А. Преобразования Бэклунда релятивистского уравнения Шредингера. Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26, № 4. С. 109–124; DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.408
31. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана, М.–Л.: ГИИТЛ, 1948.
32. Поммаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983 г.
33. Нешадим М.В., Чупахин А.П. Частично-инвариантные решения кубического уравнения Шредингера // Вестн. Удмурт. ун-та. 2009. Вып. 3. С. 35–41.
34. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Algebraic-Analytic Methods for Constructing Solutions to Differential Equations and Inverse Problems // J. Math. Sci. 2016. June 14, 2016. V. 215, Iss. 4. P. 444–459.
35. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Representations for the solutions and coefficients of second-order differential equations // J. Appl. Indust. Math. 2013. V. 7, N 1. P. 1–7.
36. Аниконов Ю.Е., Нешадим М.В. Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 40–49.
37. Нешадим М.В. Обратная задача теории совместности и функционально-инвариантные решения волнового уравнения в двумерном пространстве // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2012. V. 40, вып. 14. С. 87–95.

UDC 517.9

## BACKLUND TRANSFORMATIONS OF THE PAULI EQUATION FOR THE MOTION OF AN ELECTRON IN AN ELECTROMAGNETIC FIELD

© 2026 M. V. Neshchadim<sup>1a</sup>, N. S. Chasovskikh<sup>2b</sup>

<sup>1</sup>*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,  
Acad. Koptuyug pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia,*

<sup>2</sup>*Gorno-Altaysk State University,  
Lenin st., 1, Gorno-Altaysk 659700, Russia*

E-mails: <sup>a</sup>neshch@math.nsc.ru, <sup>b</sup>nikolayaltay@rambler.ru

Received 30.05.2024, revised 30.05.2024, accepted 10.12.2025

**Abstract.** We study the system of equations that is obtained based on the Pauli equation and connects the functions of scalar and vector potentials, amplitude, phase. Methods of the theory of compatibility systems of partial differential equations are found completely integrable systems that connect only three of the four functions. The found systems are related by Backlund transformations.

**Keywords:** Pauli equation, Backlund transformations, compatibility conditions.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.105

### REFERENCES

1. Blokhintsev D.I. *Osnovy kvantovoi mekhaniki [Fundamentals of Quantum Mechanics]*. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
2. Ovsyannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. N. Y.: Academic Press, 1982
3. Ibragimov N.Kh. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*. Dordrecht-Boston-Lancaster: Reidel Publishing Company, 1985.
4. Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. N. Y.: Springer-Verl., 1986.
5. Krasilshchik I.S., Vinogradov A.M. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*. Providence: AMS, 1999.
6. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsial'nykh svyazei i ego prilozhenie v gazovoi dinamike [Method of Differential Constraints and Its Applications in Gas Dynamics]*. Novosibirsk: Nauka, 1984 (in Russian).
7. Ibragimov N.Kh., Shabat A.B. Evolutionary Equations with a Nontrivial Lie-Bäcklund Group. *Function. Anal. and Its Appl.*, 1980, Vol. 14, No. 1, pp. 25–36.
8. Ibragimov N.Kh., Shabat A.B. Infinite Lie–Bäcklund Algebras. *Function. Anal. and Its Appl.*, 1980, Vol. 14, No. 1, pp. 313.
9. Vinogradov A.M., Krasilshchik I.S., Lychagin V.V. *Vvedenie v geometriyu nelineinykh differentsial'nykh uravnenii [Introduction to the Geometry of Nonlinear Differential Equations]*. Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
10. Vinogradov A.M. *Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus*. Providence: AMS, 2001.
11. Miura R.M. Backlund transformations. *Lect. Notes Math.*, 1976, Vol. 515.

12. Zharinov V.V. On Bäcklund correspondences. *Math. USSR-Sb.*, 1989, Vol. 64, No. 1, pp. 277–293.
13. Zharinov V.V. Bäcklund Correspondences for Evolution Equations in a Multidimensional Space. *Theoret. Math. Phys.*, 2006, Vol. 147, No. 1, pp. 449–459.
14. Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
15. Kaptsov O.V. Metody integrirvaniya uravnenii s chastnymi proizvodnymi [Integration Methods for Partial Differential Equations]. Moscow: Fizmatlit, 2009 (in Russian).
16. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Generalized Cole-Hopf Transformation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 409–416; DOI: 10.1134/S199047891803002X
17. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Metod differentsial'nykh svyazei i nelineinye obratnye zadachi [The method of differential relations and nonlinear inverse problems]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2015, Vol. 18, No. 2, pp. 36–47 (in Russian).
18. Gel'fand I.M., Lokutsievskii O.V. Metod «progonki» dlya resheniya raznostnykh uravnenii. V kniige: Godunov S.K., Ryaben'kii V.S., Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem. [The «sweep» method for solving difference equations, in Introduction to the Theory of Difference Schemes]. Moscow: Fizmatlit, 1962, pp. 283–309 (in Russian).
19. Akkuratov G.V., Dmitriev V.I. Method for calculating the field of steady elastic vibrations in a layered medium. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1984, Vol. 24, No. 1, pp. 166–176.
20. Fat'yanov A.G., Mikhailenko B.G. Metod rascheta nestatsionarnykh volnovykh polei v neuprugikh sloisto-neodnorodnykh sredakh [Method for calculating unsteady wave fields in inelastic layered inhomogeneous media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1988, Vol. 301, No. 4, pp. 834–839 (in Russian).
21. Karchevsky A.L. Analytical solution of Maxwell's equations in the frequency domain for horizontally layered anisotropic media. *Geol. Geophys.*, 2007, Vol. 48, No. 8, pp. 889–898.
22. Karchevsky A.L. Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types. *J. Appl. Industrial. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 648–665.
23. Konopelchenko B.G. The group structure of Backlund transformations. *Phys. Lett. A*, 1979, Vol. 74, pp. 189–192.
24. Sasaki R. Canonical structure of Backlund transformations. *Phys. Lett. A*, 1980, Vol. 78, pp. 7–10.
25. Konopelchenko B.G. Elementary Backlund transformations, nonlinear superposition principle and solution of the integrable equations. *Phys. Lett. A*, 1982, Vol. 87, pp. 445–448.
26. Kuznetsov V.B., Sklyanin E.K. On Backlund transformations for many-body systems. *J. Physics A*, 1998, Vol. 31, pp. 2241–2251.
27. Belousov N.M. Preobrazovanie Beklunda dlya nelineinogo uravneniya Schrödinger [Bäcklund transformation for the nonlinear Schrödinger equation]. *Zap. Nauchn. Semin. POMI*, 2020, Vol. 494, pp. 6–22 (in Russian).
28. Miwa T., Jimbo M., Date E. Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras. Cambridge Univ. Press, 2000.
29. Neshchadim M.V. Bäcklund transformations for the one-dimensional Schrödinger Equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2021, Vol. 15, No. 2, pp. 307–314; DOI: 10.1134/S1990478921020125
30. Neshchadim M.V., Simonov A.A. Bäcklund Transformations of the Relativistic Schrödinger Equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 828–841; DOI: 10.1134/S1990478923040129
31. Finikov S.P. Metod vneshnikh form Kartana [Cartan's Method of Exterior Forms]. Moscow: Gostekhizdat, 1948 (in Russian).
32. Pommaret J. Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups. Routledge, 1978.
33. Neshchadim M.V., Chupakhin A.P. Partially invariant solutions to the cubic Schrödinger equation. *Vestnik Udmurt. Univ.*, 2009, No. 3, pp. 35–41.
34. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Algebraic-Analytic Methods for Constructing Solutions to Differential Equations and Inverse Problems. *J. Math. Sci.*, 2016, June 14, 2016, Vol. 215, Iss. 4, pp. 444–459.

35. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Representations for the solutions and coefficients of second-order differential equations. *J. Appl. Indust. Math.*, 2013, Vol. 7, No. 1, pp. 1–7.
36. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Representations for the solutions and coefficients of evolution equations. *J. Appl. Ind. Math.*, 2013, Vol. 7, Vo. 3, pp. 326–334.
37. Neshchadim M.V. Obratnaya zadacha teorii sovместnosti i funktsional'no-invariantnye resheniya volnovogo uravneniya v dvumernom prostranstve [Inverse problem of consistency theory and functionally invariant solutions of the wave equation in two-dimensional space]. *Vestn. Yuzhno-Ural'skogo gos. un-ta. Ser. Mat. Model. Program.*, 2012, Vol. 40, Iss. 14, pp. 87–95 (in Russian).