

УДК 517.958

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ВРЕМЕНИ

© 2026 В. Г. Романов^{1a}, Т. В. Бугуева^{1,2b}

¹*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*

²*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 05.01.2025 г.; после доработки 11.02.2026 г.;
принята к публикации 25.02.2026 г.

Рассматривается обратная задача определения коэффициента $q(x, t)$ волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} + q(x, t)u = 0$, когда $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T]$. Изучены свойства решения прямой задачи. Доказана теорема существования и единственности решения прямой задачи. Для обратной задачи доказана теорема о локальном существовании её решения и получена глобальная оценка устойчивости её решения.

Ключевые слова: обратная задача, локальное существование, глобальная устойчивость, потенциал, зависящий от времени.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.106

ВВЕДЕНИЕ

Обратные задачи для дифференциальных уравнений об определении коэффициентов зависящих от временной и пространственных переменных мало изучены и рассматривались ранее в сравнительно небольшом количестве публикаций.

В работе [1] доказывается теорема единственности решения обратной задачи для волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u + q(t, \mathbf{x})u = 0$, где $t \in R$, $\mathbf{x} \in R^n$, n — нечётное, $n \geq 3$. В работах [2], [3] рассматриваются различные постановки обратных задач определения коэффициента $q(t, x)$, входящего в волновое уравнение $u_{tt} - \Delta u + q(t, \mathbf{x})u = 0$ при $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega$, где Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $T > 0$. Доказаны теоремы единственности. В работе [3] получена оценка устойчивости при $n = 2$. В работах [4] и [5] изучались вопросы единственности решения обратных задач в предположении, что задано отображение, переводящее данные Дирихле краевой задачи в данные Неймана. Подобные обратные задачи естественным образом возникают для движущихся сред. В работах [6] и [7] изучаются вопросы визуализации движущихся объектов в случайных средах. Близкими к этому направлению являются также работы [8], [9] для движущихся турбулентных сред. В работе [10] в трёхмерном случае рассматривается обратная задача определения коэффициента $a(\mathbf{x}, t)$, входящего в волновое уравнение $u_{tt} = \Delta u + a(\mathbf{x}, t)u + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, для неё построен глобально сходящийся численный метод Клибанова, под названием «convexification» и приведены результаты численных экспериментов.

В настоящей работе изучается новая постановка обратной задачи, в которой данные обратной задачи зависят от переменного параметра s , определяющего момент приложения точечного источника. В разд. 2 изучается прямая задача, свойства гладкости её решения. Затем, в разд. 3 рассматривается обратная задача, устанавливается её однозначная локальная разрешимость и находится глобальная оценка устойчивости решения.

Нам не известны другие работы по определению потенциала, зависящего от времени, когда пространственная переменная является одномерной.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть T — фиксированное положительное число.

Прямая задача. При фиксированном $s \in [0, T]$ найти функцию $u(x, t, s)$, удовлетворяющую соотношениям

$$u_{tt} - u_{xx} - q(x, t)u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T], \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = \delta(t - s), \quad (3)$$

где $q(x, t)$ — непрерывная функция аргументов x и t ; $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Замечание. При $s = 0$ в граничном условии (2) следует положить $s = +0$.

Обратная задача. Пусть $f(t, s)$ — заданная функция для $(t, s) \in D(T)$, $D(T) = \{(t, s) \mid 0 \leq s \leq t \leq T\}$. Требуется найти функцию $q(x, t)$ в области $G(T) = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$ по заданной информации о решении задачи (1)–(3)

$$u_x(0, t, s) = f(t, s), \quad (t, s) \in D(T). \quad (4)$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Очевидно, что $u(x, t, s) = 0$ в области $\{(x, t) \mid x \geq 0, t < s + x\}$. Решение прямой задачи эквивалентно решению уравнения

$$u(x, t, s) = \delta(t - s - x) + \frac{1}{2} \iint_{D(x, t, s)} q(\xi, \tau) u(\xi, \tau, s) d\xi d\tau, \quad (5)$$

где $D(x, t, s)$ —прямоугольник, ограниченный прямыми:

$$\tau + \xi = x + t, \quad \tau + \xi = t - x, \quad \tau - \xi = t - x, \quad \tau - \xi = s.$$

Определим новую функцию

$$v(x, t, s) = u(x, t, s) - \delta(t - s - x). \quad (6)$$

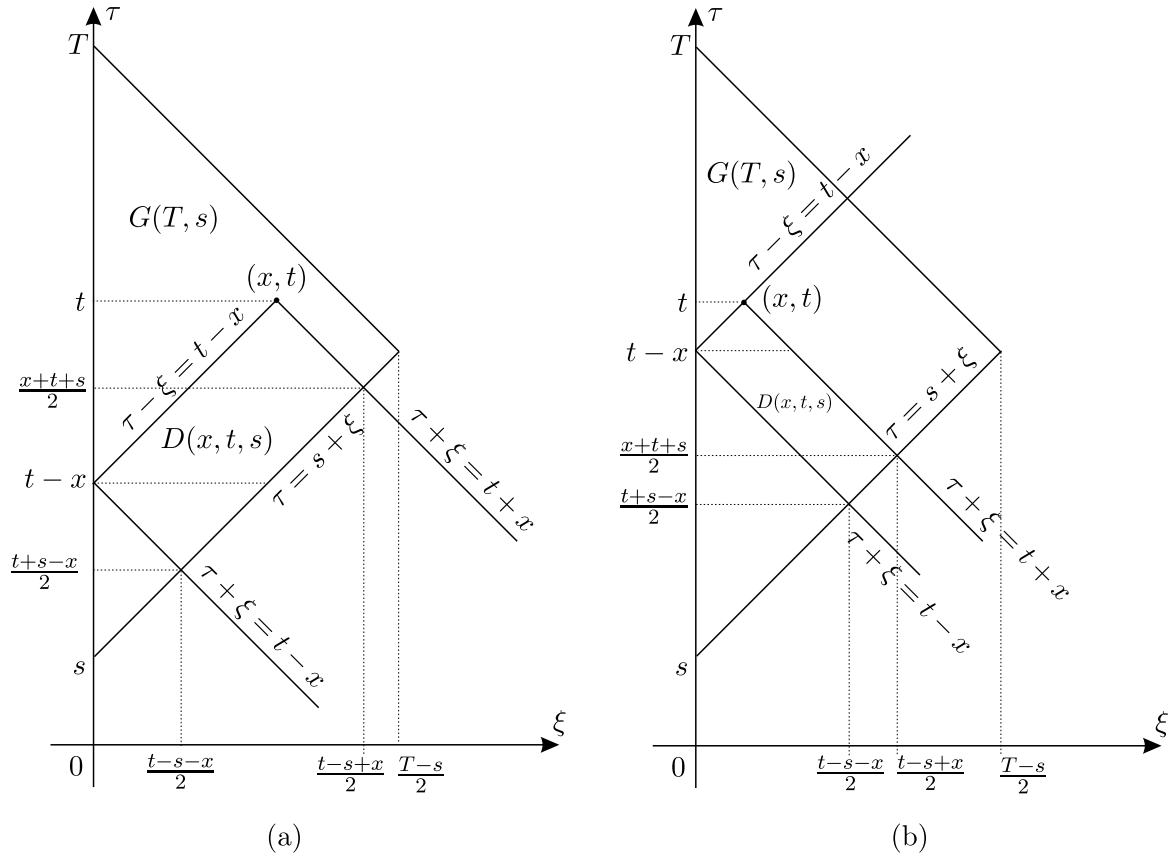
В силу (6) уравнение (5) примет вид

$$\begin{aligned} v(x, t, s) &= \frac{1}{2} \iint_{D(x, t, s)} q(\xi, \tau) [v(\xi, \tau, s) + \delta(\tau - s - \xi)] d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \iint_{D(x, t, s)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим область $G(T, s) = \{(x, t) \mid s + x \leq t \leq T - x\}$. Пусть $(x, t) \in G(T, s)$. Обозначим $S(\tau, x, t) = \{\xi \mid (\xi, \tau) \in D(x, t, s), \tau = \text{const}\}$ — сечение области $G(T, s)$ прямой $\tau = \text{const}$, $(t + s - x)/2 \leq \tau \leq t$; $\text{meas}_\xi S(\tau, x, t)$ — длины отрезков, пересекающих область $D(x, t, s)$ при фиксированных τ . Тогда следующая оценка:

$$\max \left\{ \text{meas}_\xi S(\tau, x, t) \right\} = \frac{t - s + x}{2} \leq \frac{T - s}{2} \leq \frac{T}{2} \quad (8)$$

справедлива для обоих случаев $t - x \leq (t + x + s)/2$ и $(t + x + s)/2 \leq t - x$ (см. рис. 1).

Рис. 1. Область $D(x, t, s)$:(a) — случай: $t - x \leq (t + x + s)/2$; (b) — случай: $(t + x + s)/2 \leq t - x$

Запишем уравнение (7) следующим образом:

$$v(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\tau + \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\xi. \quad (9)$$

Определим последовательность функций $v_n(x, t, s)$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$v_0(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi, \quad (10)$$

а функции $v_n(x, t, s)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$v_n(x, t, s) = v_0(x, t, s) + \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) v_{n-1}(\xi, \tau, s) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Лемма 1. Последовательность $\{v_n(x, t, s)\}$ равномерно сходится в области $G(T, s)$ и определяет в этой области непрерывную предельную функцию $v(x, t, s)$, которая является решением уравнения (9).

Доказательство. Введём в рассмотрение разности

$$w_n(x, t, s) = v_n(x, t, s) - v_{n-1}(x, t, s), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из формулы (9) следуют равенства

$$\begin{aligned} w_1(x, t, s) &= v_1(x, t, s) - v_0(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) v_0(\xi, \tau, s) d\xi, \\ w_n(x, t, s) &= v_n(x, t, s) - v_{n-1}(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) w_{n-1}(\xi, \tau, s) d\xi, \\ n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим $Q = \|q\|_{C(G(T, s))}$, тогда для $(x, t) \in G(T, s)$, в силу (10), имеем

$$|v_0(x, t, s)| \leq \frac{T}{4} Q, \quad (13)$$

а, в силу (12), можем написать

$$\begin{aligned} |w_1(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) v_0(\xi, \tau, s)| d\xi \leq \frac{TQ}{4} \frac{Q}{2} \int_s^t \frac{T}{2} d\tau = \left(\frac{TQ}{4}\right)^2 \frac{(t-s)}{1!}. \\ |w_2(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) w_1(\xi, \tau, s)| d\xi \\ &\leq \left(\frac{TQ}{4}\right)^2 \frac{Q}{2} \int_s^t \frac{T}{2} \frac{(\tau-s)}{1!} d\tau = \left(\frac{TQ}{4}\right)^3 \frac{(t-s)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$|w_k(x, t, s)| \leq \left(\frac{TQ}{4}\right)^{k+1} \frac{(t-s)^k}{k!}.$$

тогда в силу формул (12) получим

$$\begin{aligned} |w_{k+1}(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) w_k(\xi, \tau, s)| d\xi \\ &\leq \left(\frac{TQ}{4}\right)^{k+1} \frac{Q}{2} \int_s^t \frac{T}{2} \frac{(\tau-s)^k}{k!} d\tau = \left(\frac{TQ}{4}\right)^{k+2} \frac{(t-s)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу метода математической индукции, следует справедливость оценки

$$|w_n(x, t, s)| \leq \left(\frac{TQ}{4}\right)^{n+1} \frac{(t-s)^n}{n!}, \quad (x, t) \in G(T, s), \quad (14)$$

при любом целом n .

Из оценки (14) следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t, s)$ в области $G(T, s)$, что доказывает равномерную сходимость последовательности $v_n(x, t, s)$ в этой же области. Так как очевидно, что все $v_n(x, t, s)$ непрерывны в этой области, то и предел этой последовательности определяет непрерывную в области $G(T, s)$ функцию, которая является решением уравнения (9). \square

Лемма 2. В области $G(T, s)$ уравнение (9) имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство. Предположим, что в области $G(T, s)$ существуют два решения $v_k(x, t, s)$, $k = 1, 2$, уравнения (9), которые являются непрерывными функциями, ограниченными некоторой постоянной A . Обозначим $\tilde{v}(x, t, s) = v_1(x, t, s) - v_2(x, t, s)$, тогда имеет место оценка

$$|\tilde{v}(x, t, s)| \leq |v_1(x, t, s)| + |v_2(x, t, s)| \leq 2A \quad (15)$$

и справедливо равенство

$$\tilde{v}(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) \tilde{v}(\xi, \tau, s) d\xi. \quad (16)$$

Отсюда в силу (15) получим оценку

$$|\tilde{v}(x, t, s)| \leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau)| |\tilde{v}(\xi, \tau, s)| d\xi \leq \frac{1}{2} \int_s^t \frac{T}{2} 2AQ d\tau = A \frac{TQ}{2} \frac{(t-s)}{1!}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в неравенство (16), получим оценку

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau)| |\tilde{v}(\xi, \tau, s)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} \int_s^t \frac{T}{2} QA \frac{TQ}{2} \frac{(\tau-s)}{1!} d\tau = \frac{A}{2} \left(\frac{TQ}{2} \right)^2 \frac{(t-s)^2}{2!} < A \left(\frac{TQ}{2} \right)^2 \frac{(t-s)^2}{2!}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в неравенство (16), получим новую оценку

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau)| |\tilde{v}(\xi, \tau, s)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} \int_s^t A \frac{T}{2} Q \left(\frac{TQ}{2} \right)^2 \frac{(\tau-s)^2}{2!} d\tau = \frac{A}{2} \left(\frac{TQ}{2} \right)^3 \frac{(t-s)^3}{3!} < A \left(\frac{TQ}{2} \right)^3 \frac{(t-s)^3}{3!}. \end{aligned} \quad (19)$$

Повторяя это процесс итераций n раз, приходим к оценке

$$|\tilde{v}(x, t, s)| \leq A \left(\frac{TQ}{2} \right)^n \frac{(t-s)^n}{n!}. \quad (20)$$

Так как правая часть неравенства (20) равномерно стремится к нулю в области $G(T, s)$ при $n \rightarrow \infty$, то $\tilde{v}(x, t, s) = 0$ в области $G(T, s)$, т. е. $v_1(x, t, s) = v_2(x, t, s)$ для всех $(x, t) \in G(T, s)$. \square

Лемма 3. *Решение уравнения (7) является функцией класса $C^1(G(T, s))$.*

Доказательство. Пусть $(x, t) \in G(T, s)$. Запишем уравнение (7) в виде суммы повторных интегралов.

Вначале рассмотрим случай $t - x \leq (t + x + s)/2$, в этом случае уравнение (7) примет вид (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} v(x, t, s) = & \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} d\tau \int_{t-x-\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{(t+x+s)/2} d\tau \int_{x-t+\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

А теперь рассмотрим случай $(t + x + s)/2 \leq t - x$, в этом случае уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} v(x, t, s) = & \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{(t+x+s)/2} d\tau \int_{t-x-\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^{t-x} d\tau \int_{t-x-\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

При дифференцировании каждого из уравнений (21) и (22) по переменным x и t получим один и тот же результат:

$$\begin{aligned} v_t(x, t, s) = & \frac{1}{4}q\left(\frac{t-s+x}{2}, \frac{t+s+x}{2}\right) - \frac{1}{4}q\left(\frac{t-s-x}{2}, \frac{t+s-x}{2}\right) \\ & - \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} q(t-x-\tau, \tau)v(t-x-\tau, \tau, s) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(x-t+\tau, \tau)v(x-t+\tau, \tau, s) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t q(t+x-\tau, \tau)v(t+x-\tau, \tau, s) d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} v_x(x, t, s) = & \frac{1}{4}q\left(\frac{t-s+x}{2}, \frac{t+s+x}{2}\right) + \frac{1}{4}q\left(\frac{t-s-x}{2}, \frac{t+s-x}{2}\right) \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} q(t-x-\tau, \tau)v(t-x-\tau, \tau, s) d\tau - \frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(x-t+\tau, \tau)v(x-t+\tau, \tau, s) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t q(t+x-\tau, \tau)v(t+x-\tau, \tau, s) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

Равенства (23) и (24) определяют непрерывные в $G(T, s)$ функции $v_t(x, t, s)$ и $v_x(x, t, s)$. \square

3. Исследование обратной задачи

Вернёмся к уравнению (7) и запишем его в виде суммы повторных интегралов, изменив порядок интегрирования (см. рис. 2).

В случае $t - x \leq (t + x + s)/2$ уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} v(x, t, s) = & \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x-s)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t-x-s)/2}^x d\xi \int_{s+\xi}^{t-x+\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau + \frac{1}{2} \int_x^{(t+x-s)/2} d\xi \int_{s+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau, \end{aligned} \quad (25)$$

а в случае $(t + x + s)/2 \leq t - x$ имеем

$$\begin{aligned} v(x, t, s) = & \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(t-x-s)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau + \frac{1}{2} \int_{(t-x-s)/2}^{(t+x-s)/2} d\xi \int_{s+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Так же как в разд. 2 при дифференцировании каждого из уравнений (25) и (26) по переменной x получим один и тот же результат:

$$\begin{aligned} v_x(x, t, s) = & \frac{1}{4} q\left(\frac{t-s+x}{2}, \frac{t+s+x}{2}\right) + \frac{1}{4} q\left(\frac{t-s-x}{2}, \frac{t+s-x}{2}\right) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x-s)/2} q(\xi, t-x-\xi) v(\xi, t-x-\xi, s) d\xi + \frac{1}{2} \int_x^{(t-s+x)/2} q(\xi, t+x-\xi) v(\xi, t+x-\xi, s) d\xi \\ & - \frac{1}{2} \int_0^x q(\xi, t-x+\xi) v(\xi, t-x+\xi, s) d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$G_0(T) = \{(x, t, s) \mid (x, t) \in G(T, s), 0 \leq s \leq T\}.$$

Положим в (27) $x = 0$ и воспользуемся равенством (4), в результате получим уравнение для функции q :

$$f(t, s) = \frac{1}{2} q\left(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2}\right) + \int_0^{(t-s)/2} q(\xi, t-\xi) v(\xi, t-\xi, s) d\xi, \quad (t, s) \in D(T). \quad (28)$$

Заметим, что точка $((t-s)/2, (t+s)/2)$ при изменении t и s в $D(T)$ пробегает все точки области $G(T) = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$.

Положим $\frac{t-s}{2} = x$, $\frac{t+s}{2} = t'$, тогда $t = x + t'$, $s = t' - x$ и уравнение (28) примет вид

$$f(x + t', t' - x) = \frac{1}{2} q(x, t') + \int_0^x q(\xi, x + t' - \xi) v(\xi, x + t' - \xi, t' - x) d\xi.$$

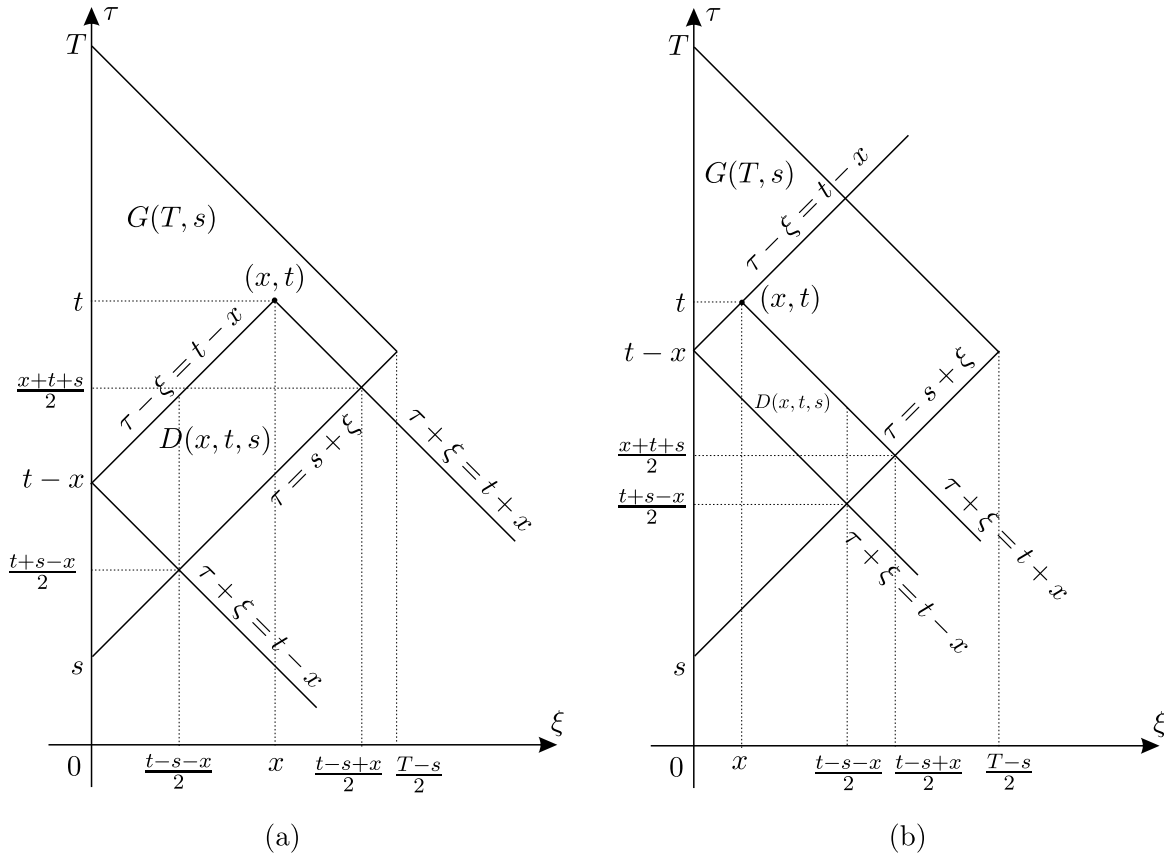


Рис. 2. Область $D(x, t, s)$:

(a) — случай: $t - x \leq (t + x + s)/2$; (b) — случай: $(t + x + s)/2 \leq t - x$

Обозначая

$$q_0(x, t') = 2f(x + t', t' - x), \quad (29)$$

верхнее равенство можем записать следующим образом:

$$q(x, t') = q_0(x, t') - 2 \int_0^x q(\xi, x + t' - \xi) v(\xi, x + t' - \xi, t' - x) d\xi, \quad (x, t') \in G(T), \quad (30)$$

Для дальнейшего удобно заменить t' на t . Тогда уравнение (30) примет вид

$$q(x, t) = q_0(x, t) + 2 \int_0^x q(\xi, x + t - \xi) v(\xi, x + t - \xi, t - x) d\xi, \quad (x, t) \in G(T). \quad (31)$$

Вводя новые функции

$$\tau_1(\xi, x, t) = \frac{t - x + s}{2} + \left| \xi - \frac{t - x - s}{2} \right|, \quad \tau_2(\xi, x, t) = t - |\xi - x|, \quad (32)$$

уравнения (25), (26) можем записать в виде одного уравнения (преобразованного уравнения (7)):

$$v(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s+\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} d\xi \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau, \quad (x, t, s) \in G_0(T). \quad (33)$$

Запишем уравнение (33) в виде

$$v(x, t, s) = v_0(x, t, s) + \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} [q(\xi, s + \xi) - q_0(\xi, s + \xi)] d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} d\xi \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau, \quad (x, t, s) \in G_0(T), \quad (34)$$

в котором

$$v_0(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q_0(\xi, s + \xi) d\xi. \quad (35)$$

Уравнения (31) и (34) образуют замкнутую систему интегральных уравнений обратной задачи. Для анализа её используем метод сжатых отображений.

Рассмотрим класс функций $f(t, s)$:

$$\mathcal{F} = \{f \in C(D(T)) \mid |f(t, s)| \leq F\}.$$

Тогда, в силу (29), (35), находим, что

$$|q_0(x, t)| \leq 2F, \quad |v_0(x, t, s)| \leq Fx \leq \frac{FT}{2}, \quad (36)$$

$$|q_0(x, t)| \leq M(F, T), \quad |v_0(x, t, s)| \leq M(F, T), \quad M(F, T) := F \max\{2, T/2\}.$$

Из (32) имеем

$$\tau_2(\xi, x, t) - \tau_1(\xi, x, t) \leq \frac{T}{2}. \quad (37)$$

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда существует положительное число $T_0 \leq T$ и единственная функция $q(x, t) \in C(G(T))$, такие, что решение задачи (1)–(3) удовлетворяет условию (4) при $(t, s) \in D(T_0)$.

Доказательство. Запишем уравнения (31), (34) в операторном виде

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}(\mathbf{g}), \quad (38)$$

где

$$\mathbf{g}(x, t, s) = (q(x, t), v(x, t, s)), \quad \mathbf{g}_0 = (q_0(x, t), v_0(x, t, s)).$$

Операторы $A_1(\mathbf{g})$, $A_2(\mathbf{g})$ определяются следующим образом:

$$A_1(\mathbf{g}) = q_0(x, t) + 2 \int_0^x q(\xi, x + t - \xi) v(\xi, x + t - \xi, t - x) d\xi, \quad (x, t) \in G(T). \quad (39)$$

$$A_2(\mathbf{g}) = v_0(x, t, s) + \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} [q(\xi, s + \xi) - q_0(\xi, s + \xi)] d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T). \quad (40)$$

Обозначим $\mathbf{C}(G_0(T))$ — пространство непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_0(T))} = \max \{ \|q\|_{C(G(T))}, \|v\|_{C(G_0(T))} \}.$$

В силу (36), можем написать

$$\|\mathbf{g}_0\|_{\mathbf{C}(G_0(T))} \leq M(F, T). \quad (41)$$

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathbf{C}(G_0(T))$ замкнутое множество

$$\mathcal{M}(T, F) := \{ \mathbf{g} \in \mathbf{C}(G_0(T)) \mid \|q - q_0\|_{C(G(T))} \leq M(F, T), \|v - v_0\|_{C(G_0(T))} \leq M(F, T) \}. \quad (42)$$

На этом множестве справедливы оценки

$$\|q\|_{C(G(T))} \leq 2M(F, T), \quad \|v\|_{C(G_0(T))} \leq 2M(F, T). \quad (43)$$

Из равенств (39), (40) имеем

$$A_1(\mathbf{g}) - q_0(x, t) = 2 \int_0^x q(\xi, x + t - \xi) v(\xi, x + t - \xi, t - x) d\xi, \quad (x, t) \in G_0(T), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} A_2(\mathbf{g}) - v_0(x, t, s) &= \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} [q(\xi, s + \xi) - q_0(\xi, s + \xi)] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \quad (x, t) \in G_0(T). \end{aligned} \quad (45)$$

Учитывая (43), можем написать

$$\begin{aligned} |A_1(\mathbf{g}) - q_0(x, t)| &\leq 2 \int_0^x |q(\xi, x + t - \xi) v(\xi, x + t - \xi, t - x)| d\xi \\ &\leq 8M^2(F, T)x \leq 4TM^2(F, T), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} |A_2(\mathbf{g}) - v_0(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} |q(\xi, s + \xi) - q_0(\xi, s + \xi)| d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} |q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s)| d\tau d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} M(F, T)x + TM^2(F, T) \frac{t-s+x}{2} \leq \frac{M(F, T)T + 2T^2M^2(F, T)}{4}. \end{aligned} \quad (47)$$

Выберем число T_1 как наименьший из положительных корней уравнений

$$4TM(F, T) = 1, \quad T + 2T^2M(F, T) = 4.$$

Тогда при $T \leq T_1$ оператор \mathbf{A} , определённый равенствами (39), (40) переводит множество $\mathcal{M}(T, F)$ в себя.

В дальнейшем будем полагать, что $T \leq T_1$.

Пусть $\mathbf{g}_k \in \mathbf{C}(G_0(T))$, $k = 1, 2$, где

$$\mathbf{g}_k(x, t, s) = (q_k(x, t), v_k(x, t, s)).$$

Обозначим

$$\bar{q}(x, t) = q_1(x, t) - q_2(x, t), \quad \bar{v}(x, t, s) = v_1(x, t, s) - v_2(x, t, s).$$

Воспользуемся равенствами (39), (40) и рассмотрим разности

$$|A_1(\mathbf{g}_1) - A_1(\mathbf{g}_2)| \leq 2 \int_0^x [\bar{q}(\xi, x + t - \xi)v_1(\xi, x + t - \xi, t - x) + q_2(\xi, x + t - \xi)\bar{v}(\xi, x + t - \xi, t - x)] d\xi, \quad (48)$$

$$|A_2(\mathbf{g}_1) - A_2(\mathbf{g}_2)| \leq \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} \bar{q}(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} [\bar{q}(\xi, \tau)v_1(\xi, \tau, s) + q_2(\xi, \tau)\bar{v}(\xi, \tau, s)] d\tau d\xi. \quad (49)$$

Используя неравенства (43), получим оценки для (48), (49). Для краткости записи обозначим $\|\mathbf{g}\| := \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_0(T))}$. Выполняя вычисления, находим, что

$$|A_1(\mathbf{g}_1) - A_1(\mathbf{g}_2)| \leq 2x4M(F, T)\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\| \leq 4M(F, T)T\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|, \quad (50)$$

$$|A_2(\mathbf{g}_1) - A_2(\mathbf{g}_2)| \leq M(F, T)x\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\| + T\frac{t-s+x}{2}M(F, T)\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\| \leq \frac{1}{2}T(1+T)M(F, T)\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|. \quad (51)$$

Пусть $\rho \in (0, 1)$. Выберем $T_0 \in (0, T_1]$ из условий

$$4M(F, T_0)T_0 \leq \rho, \quad \frac{1}{2}T_0(1+T_0)M(F, T_0) \leq \rho.$$

Тогда

$$|\mathbf{A}(\mathbf{g}_1) - \mathbf{A}(\mathbf{g}_2)| \leq \rho\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|.$$

Таким образом, отображение \mathbf{A} является сжимающим на множестве $\mathcal{M}(T_0, F)$. В силу принципа сжимающих отображений, на $\mathcal{M}(T_0, F)$ существует единственное решение операторного уравнения (38). Теорема 1 доказана. \square

Теорема 2. Пусть функции $q^k(x, t) \in C(G(T))$, $k = 1, 2$, являются решениями обратной задачи (1)–(4) с данным $f_k \in C(D(T))$, $k = 1, 2$. Тогда существует положительное число $C = C(T)$ такое, что справедлива оценка

$$\|q^1 - q^2\|_{C(G(T))} \leq C\|f_1 - f_2\|_{C(D(T))}. \quad (52)$$

Доказательство. Решение обратной задачи (1)–(4) с данными $f_k(t, s)$, $k = 1, 2$, обозначим $q^k(x, t)$, $v^k(x, t, s)$, $k = 1, 2$.

Запишем соответствующие им уравнения. Уравнения для функций $q^k(x, t)$, согласно (31) имеют вид

$$q^k(x, t) = q_0^k(x, t) + 2 \int_0^x q^k(\xi, x+t-\xi) v^k(\xi, x+t-\xi, t-x) d\xi, \quad (x, t) \in G(T), \quad k = 1, 2, \quad (53)$$

в котором

$$q_0^k(x, t) = 2f_k(x+t, t-x), \quad k = 1, 2.$$

Вместо уравнения (34) для функций $v^k(x, t, s)$ удобно использовать другую форму уравнений, а именно, воспользоваться данными Коши при $x = 0$:

$$v^k|_{x=0} = 0, \quad v_x^k|_{x=0} = f_k(t, s), \quad s \leq t \leq T-s,$$

и формулой Даламбера. Тогда мы получим уравнения

$$v^k(x, t, s) = v_0^k(x, t, s) - \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q^k(\xi, \tau) v^k(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T), \quad (54)$$

в которых

$$v_0^k(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} f_k(\tau, s) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Пусть

$$|q^k(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in G(T); \quad |v^k(x, t, s)| \leq M, \quad (x, t, s) \in G_0(T).$$

Рассмотрим разности

$$\tilde{q}(x, t) = q^1(x, t) - q^2(x, t), \quad \tilde{v}(x, t, s) = v^1(x, t, s) - v^2(x, t, s), \quad \tilde{f}(t, s) = f_1(t, s) - f_2(t, s).$$

Для разностей справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, t) = 2\tilde{f}(x+t, t-x) + 2 \int_0^x [\tilde{q}(\xi, x+t-\xi) v^1(\xi, x+t-\xi, t-x) \\ + q^2(\xi, x+t-\xi) \tilde{v}(\xi, x+t-\xi, t-x)] d\xi, \quad (x, t) \in G(T), \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} \tilde{f}(\tau, s) d\tau \\ - \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} [q^1(\xi, \tau) \tilde{v}(\xi, \tau, s) + \tilde{q}(\xi, \tau) v^2(\xi, \tau, s)] d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T). \quad (56) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{z}(x) = \max \left\{ \max_{t \in [x, T-x]} |\tilde{q}(x, t)|, \max_{0 < s \leq t \leq T} |\tilde{v}(x, t, s)| \right\}, \quad x \in [0, T/2].$$

Тогда из равенств (55), (56) получаем оценки

$$|\tilde{q}(x, t)| \leq 2\|\tilde{f}\|_{C(D(T))} + 4M \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in G(T), \quad (57)$$

$$|\tilde{v}(x, t, s)| = T\|\tilde{f}\|_{C(D(T))} + TM \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T). \quad (58)$$

Обозначая

$$C_0 = \max\{2, T\}, \quad C_1 = \max\{4M, TM\},$$

из (57), (58) получим неравенство

$$\tilde{z}(x) \leq C_0\|\tilde{f}\|_{C(D(T))} + C_1 \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2].$$

Используя неравенство Гронуолла — Беллмана [11], получаем оценку (52) с постоянной

$$C = C_0 \exp\{C_1 T/2\}.$$

Теорема 2 доказана. □

Следствие. Если решение обратной задачи существует для $q \in G(T)$, то оно единственно и устойчиво по данным обратной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучена новая постановка обратной задачи определения потенциала $q(x, t)$ в волновом уравнении, когда $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T]$, а данные обратной задачи зависят от переменного параметра s , определяющего момент приложения точечного источника. Исследованы свойства решения прямой задачи. Доказана теорема существования и единственности решения прямой задачи. Для обратной задачи доказана теорема о локальном существовании её решения и получена глобальная оценка устойчивости её решения. Все полученные результаты являются новыми.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН (проект FWNF-2026-0029). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stefanov P.D.* Uniqueness of the inverse scattering problem for the wave equation with a potential depending on time // *Inverse Problems*. 1988. V. 4. P. 913–920.
2. *Hu G., Kian Ya.* Determination of singular time-dependent coefficients for wave equations from full and partial data // *Inverse Problems and Imaging*. 2018. V. 12, N 3. P. 745–772; DOI: 10.3934/ipi.2018032

3. *Ben Aicha I.* Stability estimate for hyperbolic inverse problem with time-dependent coefficient // *Inverse Problems*, 2015. V. 31. Article number 125010; arXiv:1506.01935v1 [math.AP] 5 Jun 2015
4. *Feizmohammad A., Kian Y.* Recovery of nonsmooth coefficients appearing in anisotropic wave equations // *SIAM J. Mathematical Analysis*. 2019. V. 51, Iss. 6. P. 4953–4976; <https://doi.org/10.1137/19M1251394>
5. *Feizmohammad A.* An inverse boundary value problem for isotropic nonautonomous heat flows // *Mathematische Annalen*. 2024. V. 388. P. 1569–1607; DOI: 10.1007/s00208-022-02559-6
6. *Borcea L., Garnier J., Solna K.* Sound propagation in a weakly turbulent flow waveguide // *SIAM J. Applied Mathematics*. 2019. V. 79, N 6. P. 2663–2687.
7. *Borcea L., Garnier J., Solna K.* Wave propagation and imaging in moving random media, *Multiscale // Modeling and Simulations*. 2019. V. 17. P. 31–67.
8. *Borcea L., Callaghan T., Papanicolaou G.* Motion estimation and imaging of complex scenes with synthetic aperture radar // *Inverse Problems*. 2013. V. 29. Article number 054011.
9. *Martorella M., Gelli S., Bacci A.* Ground moving target imaging via SDAP-ISAR processing: review and new trends // *Sensors*. 2021. V. 21. Article number 2391; <https://doi.org/10.3390/s21072391>
10. *Klibanov M.V., Li J., Romanov V.G., Yang Z.* Carleman Numerical Method for Imaging of Moving Targets // arXiv: 2512.18361, 2025.
11. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.

UDC 517.958

**THE INVERSE PROBLEM FOR A WAVE EQUATION
WITH A POTENTIAL
DEPENDING ON SPATIAL VARIABLE AND TIME**

© 2026 V. G. Romanov^{1a}, T. V. Bugueva^{1,2b}

¹*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Acad. Lavrentyev pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Novosibirsk State University,
Pirogov st., 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ru

Received 05.01.2025, revised 11.02.2026, accepted 25.02.2026

Abstract. The inverse problem of determining the coefficient $q(x, t)$ of the wave equation $u_{tt} - u_{xx} + q(x, t)u = 0$ is considered when $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T]$. The properties of a solution of a direct problem are studied and an existence and uniqueness theorem is proved. For the inverse problem a local existence theorem is stated and a global stability estimate is found.

Keywords: inverse problem, local existence, global stability, time-dependent potential.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.106

REFERENCES

1. Stefanov P.D. Uniqueness of the inverse scattering problem for the wave equation with a potential depending on time. *Inverse Problems*, 1988, Vol. 4, pp. 913–920.
2. Hu G., Kian Ya. Determination of singular time-dependent coefficients for wave equations from full and partial data. *Inverse Problems and Imaging*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 745–772; DOI: 10.3934/ipi.2018032
3. Ben Aicha I. Stability estimate for hyperbolic inverse problem with time-dependent coefficient. *Inverse Problems*, 2015, Vol. 31, Article number 125010; arXiv:1506.01935v1 [math.AP] 5 Jun 2015
4. Feizmohammad A., Kian Y. Recovery of nonsmooth coefficients appearing in anisotropic wave equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 2019, Vol. 51, Iss. 6, pp. 4953–4976; <https://doi.org/10.1137/19M1251394>
5. Feizmohammad A. An inverse boundary value problem for isotropic nonautonomous heat flows. *Mathematische Annalen*, 2024, Vol. 388, pp. 1569–1607; DOI: 10.1007/s00208-022-02559-6
6. Borcea L., Garnier J., Solna K. Sound propagation in a weakly turbulent flow waveguide // *SIAM J. Applied Mathematics*. 2019. V. 79, N 6. P. 2663–2687.
7. Borcea L., Garnier J., Solna K. Wave propagation and imaging in moving random media, *Multiscale. Modeling and Simulations*, 2019, Vol. 17, pp. 31–67.
8. Borcea L., Callaghan T., Papanicolaou G. Motion estimation and imaging of complex scenes with synthetic aperture radar. *Inverse Problems*, 2013, Vol. 29. Article number 054011.
9. Martorella M., Gelli S., Bacci A. Ground moving target imaging via SDAP-ISAR processing: review and new trends. *Sensors*, 2021, Vol. 21. Article number 2391; <https://doi.org/10.3390/s21072391>
10. Klivanov M.V., Li J., Romanov V.G., Yang Z. Carleman Numerical Method for Imaging of Moving Targets. arXiv: 2512.18361, 2025.
11. Bellman R. *Stability Theory of Differential Equations*. N. Y., McGraw-Hill Book Company, 1953.