

УДК 537.52:519.63

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ГЕЛИЕВОМ ПУЗЫРЬКЕ В ЖИДКОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

© 2026 Р. А. Савенко^{1,2a}, Д. И. Карпов^{1,2b}, А. В. Ридель^{2c},
С. М. Коробейников^{2d}

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия,*

²*Новосибирский государственный технический университет,
просп. К. Маркса, 20, г. Новосибирск 630073, Россия*

E-mails: ^asavenko@hydro.nsc.ru, ^bkarpov@hydro.nsc.ru, ^cridel@corp.nstu.ru,
^dkorobeynikov@corp.nstu.ru

Поступила в редакцию 30.10.2025 г.; после доработки 14.04.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Модель, разработанная ранее для трёхмерного моделирования частичного разряда в пузырьке гелия, погружённом в диэлектрическую жидкость, была исследована на численную устойчивость. Отдельно обсуждается влияние коэффициента рекомбинации на устойчивость счёта. Было выполнено моделирование разряда от начала процесса до заключительной стадии постепенной релаксации заряда. Были смоделированы два разных случая. В первом случае начальная небольшая область ионизированного газа (затравка) располагалась на оси пузырька вблизи его полюса. Во втором случае затравка располагалась вдали от оси системы вблизи стенки пузырька. Была рассчитана эволюция трёхмерных плотностей ионов гелия и электронов в пузырьке. Наблюдались сложные формы фронта положительных зарядов. Получены трёхмерные распределения электрического поля в межэлектродном промежутке для различных моментов времени.

Ключевые слова: частичный разряд, газовый разряд, «истинный» заряд, 3D моделирование, рекомбинация.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.107

ВВЕДЕНИЕ

Электрическая прочность жидких диэлектриков существенно влияет на срок службы и надёжность современного высоковольтного оборудования. В свою очередь, она сильно зависит от наличия твёрдых и жидких примесей и пузырьков газа в жидкости. Известно, что наличие газовых пузырьков приводит к резкому снижению электрической прочности. В газовом пузырьке в диэлектрической жидкости при низком напряжении может возникать электрический разряд, который называется частичным разрядом (ЧР). Частичный разряд поляризует пузырёк, часто создавая благоприятные условия для дальнейшего электрического пробоя всей изоляции.

На текущем этапе развития экспериментальных методик регистрации электрических разрядов можно регистрировать интегральные характеристики ЧР: ток во внешней цепи, суммарный электрический заряд, протекающий в цепи, слабое свечение плазмы в пузырьке во время ЧР, напряжение, при котором происходит ЧР, и деформацию пузырька после ЧР [1]. Регистрация характеристик плазмы разряда в пузырьке чрезвычайно сложна, прежде всего потому, что процесс протекает быстро (типичное время от начала до конца разряда составляет 30–50 нс),

наблюдение возможно только на расстоянии (через толщу жидкости, в которой происходит преломление, поглощение и рассеяние света, что сильно снижает возможности регистрации), а наиболее интересная стадия разряда, включающая начальные процессы ионизации, сопровождается очень слабым свечением. Поэтому теоретическое изучение этого явления, в частности, компьютерное моделирование процессов развития электрического разряда в пузырьке, приобретает самостоятельное значение.

Компьютерное моделирование газовых разрядов выполняется давно и на эту тему существует огромное количество публикаций. Например, в работах [2]–[5] авторы выполняли расчёты развития стримеров в воздухе и диэлектрических газах и их смесях с учётом целого ряда процессов, таких как химические реакции между электронами и молекулами газа, фотоионизация, возбуждения атомных уровней и других. В перечисленных работах, как и во многих других, расчёт ограничивается двумерной или квазитрёхмерной цилиндрически-симметричной постановкой.

В работе [6] выполнено сравнение результатов моделирования развития стримерного разряда в газах методами частиц и методами, основанными на решении уравнений механики сплошных сред, в двумерных, квазитрёхмерных и трёхмерных постановках. Авторы пришли к выводу, что при правильной постановке задачи и корректном выборе численного метода физические результаты расчётов практически идентичны. В нашей работе мы сделали выбор в пользу конечно-разностных методов на неподвижных сетках, чтобы сэкономить аппаратные ресурсы, что, на наш взгляд, позволит увеличить размеры сеток, на которых выполняются расчёты. Кроме того, в перечисленных работах использовались готовые программные пакеты, такие как COMSOL и *afivo-streamer* [7]. Заметим, что, несмотря на наличие готовых пакетов, расчётов в трёхмерном случае довольно мало.

Также прямой перенос результатов расчётов, выполненных в этих работах, на случай пузырька гелия в трансформаторном масле невозможен в силу разной физической постановки задач. Наиболее близкой по физической постановке является работа [8], в которой выполнено моделирование развития разряда в цепочках воздушных пузырьков в трансформаторном масле. Недостатком этих расчётов, на наш взгляд, является использование двумерной модели.

В нашей работе мы ставили перед собой задачу создать собственное программное обеспечение для моделирования электрических разрядов в газовых пузырьках, которое бы не только давало возможность выполнять параллельные вычисления на графических ускорителях, но и в дальнейшем позволило бы гибко модифицировать код, например, с целью применения разностных схем повышенной точности и монотонных схем.

В предыдущей работе [9] мы выполнили трёхмерные расчёты начальной стадии развития разряда в пузырьке гелия в диэлектрической жидкости (предполагалось, что это трансформаторное масло) до момента, когда волна электронов достигнет границы пузырька. Расчёты были выполнены в диффузионно-дрейфовом приближении. В этом случае процессы ионизации, рекомбинации, диффузии и дрейфа описывались следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla(\mu_e n_e \mathbf{E}) &= \nabla(D_e \nabla n_e) + \alpha |\mu_e n_e \mathbf{E} + D_e \nabla n_e| - \beta_r n_+ n_e - \beta_3 n_+ n_e^2, \\ \frac{\partial n_+}{\partial t} + \nabla(\mu_+ n_+ \mathbf{E}) &= \nabla(D_+ \nabla n_+) + \alpha |\mu_e n_e \mathbf{E} + D_e \nabla n_e| - \beta_r n_+ n_e - \beta_3 n_+ n_e^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где n_+ — концентрация положительно заряженных ионов, n_e — концентрация электронов, μ_+ — подвижность положительных ионов, μ_e — подвижность электронов, \mathbf{E} — локальное электрическое поле, D_+ — коэффициент диффузии положительных ионов, D_e — коэффициент диффузии электронов, α — коэффициент ударной ионизации электронами, β_r — коэффициент двухчастичной рекомбинации (подразумевается радиационная рекомбинация), β_3 — коэффициент трехчастичной рекомбинации. Три коэффициента модели, а именно α , μ_e и D_e , считаются нелинейными функциями локального электрического поля \mathbf{E} . Значение коэффициента ионизации было взято из [10].

На каждом временном шаге электрическое поле пересчитывалось в соответствии с теоремой Гаусса

$$\nabla(\varepsilon_0\varepsilon\nabla\varphi) = -|e|(n_+ - n_e), \quad \nabla\varphi = -\mathbf{E}, \quad (2)$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость вещества ($\varepsilon = 1$ в газе), ε_0 — электрическая постоянная, φ — потенциал электрического поля, e — элементарный заряд.

Начальным условием для решения системы (1)-(2) было распределение электрического поля в зазоре между плоскими параллельными электродами, заполненном диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2.2$ (соответствует трансформаторному маслу), в центре которого находится сферический пузырёк с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$. Экспериментальные данные, взятые из [11]–[15], были использованы для определения коэффициентов диффузии, подвижности электронов и ионов, а также как коэффициенты ионизации и рекомбинации.

Расчёты, приведённые в [9], были выполнены вплоть до времени около 0.4 нс с момента начала ионизации в пузырьке. К этому моменту электронная волна достигла стенки пузырька, обращённой к аноду. В то же время в объёме пузырька образовалась медленная волна положительных ионов. Перед и за фронтом этой волны образовались области градиентов поля, увеличивающихся со временем, что привело к нарушению устойчивости конечно-разностной схемы. Для обеспечения стабильности схемы был реализован алгоритм масштабирования временного шага в зависимости от градиента поля. Однако при градиентах поля, равных $\partial E_x/\partial x \sim 8.4 \text{ МВ/см}^2$, временной шаг уменьшился с начального значения $\sim 2 \cdot 10^{-13}$ с до значений $4 \cdot 10^{-16}$ с, в результате чего оценка времени одного полного расчёта стала неприемлемо большой (месяцы).

Настоящая работа в основном посвящена исследованию использования численного алгоритма, описанного в [9], для моделирования процесса развития разряда в пузырьке с момента появления начальной небольшой области ионизации (затравки) до окончания первичной зарядки стенок пузырька волнами положительного и отрицательного заряда, после чего наблюдается медленная релаксация заряда в пузырьке за счёт проводимости образующейся плазмы (время разряда 2.5 нс и более). По существу, трёхмерная постановка позволила смоделировать развитие волны ионизации при различных положениях затравки в пузырьке. Моделирование проводилось, когда затравка располагалась на оси пузырька вблизи его стенки, обращённой к катоду, и на значительном расстоянии от оси пузырька вблизи боковой стенки.

1. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА И ТЕСТОВЫЕ РАСЧЁТЫ

Модель была реализована в виде параллельного компьютерного кода для расчётов на графических ускорителях. Распараллеливание диффузионной части и части, связанной с переносом зарядов, технически гораздо более громоздко для неявных методов, чем для явных, а выигрыш в производительности при этом ожидается заметно меньше. В связи с этим при разработке алгоритма расчёта динамики концентраций (1) выбор был сделан в пользу явных методов.

Краткое описание численного метода и его применение для решения системы (1)-(15) были даны в [9]. Здесь приведём более подробное описание конечно-разностных уравнений.

Правая часть первого уравнения (1) для электронов включает в себя слагаемое с переносом электронов в электрическом поле за счёт подвижности и диффузионный перенос. Рассмотрим их численную реализацию отдельно. Для переноса под действием электрического поля использовались уравнения

$$\text{div}(\mu_e n_e \mathbf{E}) \approx \frac{FMe_{x,i+1/2,j,k} - FMe_{x,i-1/2,j,k}}{h} + \frac{FMe_{y,i,j+1/2,k} - FMe_{y,i,j-1/2,k}}{h} + \frac{FMe_{z,i,j,k+1/2} - FMe_{z,i,j,k-1/2}}{h}, \quad (3)$$

при этом поток вдоль оси x вычисляется по формуле

$$F_{x,i+1/2,j,k}^{Me} = \begin{cases} n_{e,i+1,j,k} \cdot E_{x,i+1/2,j,k} \cdot \mu_{e,i+1/2,j,k}, & E_{x,i+1/2,j,k} > 0, \\ n_{e,i,j,k} \cdot E_{x,i+1/2,j,k} \cdot \mu_{e,i+1/2,j,k}, & E_{x,i+1/2,j,k} < 0. \end{cases} \quad (4)$$

аналогичным образом вычисляются потоки в части переноса $F_{y,i,j+1/2,k}^{Me}$ и $F_{z,i,j,k+1/2}^{Me}$ вдоль осей y и z , соответственно.

Перенос электронов вследствие диффузии вычислялся согласно

$$\nabla(D_e \nabla n_e) \approx \frac{F_{x,i+1/2,j,k}^{De} - F_{x,i-1/2,j,k}^{De}}{h} + \frac{F_{y,i,j+1/2,k}^{De} - F_{y,i,j-1/2,k}^{De}}{h} + \frac{F_{z,i,j,k+1/2}^{De} - F_{z,i,j,k-1/2}^{De}}{h}. \quad (5)$$

Здесь поток вдоль оси x равен

$$F_{x,i+1/2,j,k}^{De} = D_{e,i+1/2,j,k} \cdot \frac{n_{e,i+1,j,k} - n_{e,i,j,k}}{h}. \quad (6)$$

Аналогичные формулы использовались для потоков диффузии вдоль осей y и z .

Поскольку коэффициенты подвижности и диффузии положительных ионов считались постоянными, разностные формулы, описывающие перенос и диффузию ионов, были проще, чем в случае электронов, а именно

$$\operatorname{div}(\mu_+ n_+ \mathbf{E}_+) \approx \mu_+ \cdot \left(\frac{F_{x,i+1/2,j,k}^{M+} - F_{x,i-1/2,j,k}^{M+}}{h} + \frac{F_{x,i,j+1/2,k}^{M+} - F_{x,i,j-1/2,k}^{M+}}{h} + \frac{F_{x,i,j,k+1/2}^{M+} - F_{x,i,j,k-1/2}^{M+}}{h} \right). \quad (7)$$

Здесь поток, описывающий перенос положительных ионов в электрическом поле, равен

$$F_{x,i+1/2,j,k}^{M+} = \begin{cases} n_{+,i,j,k} \cdot E_{x,i+1/2,j,k}, & E_{x,i+1/2,j,k} > 0, \\ n_{+,i+1,j,k} \cdot E_{x,i+1/2,j,k}, & E_{x,i+1/2,j,k} < 0. \end{cases} \quad (8)$$

вдоль оси x и аналогичные вычисления делаются вдоль y и z .

Диффузионное слагаемое в (1) вычислялось так

$$\nabla(D_+ \nabla n_+) \approx D_+ \left(\frac{n_{+,i+1,j,k} + n_{+,i-1,j,k} - 2n_{+,i,j,k}}{h^2} + \frac{n_{+,i,j+1,k} + n_{+,i,j-1,k} - 2n_{+,i,j,k}}{h^2} + \frac{n_{+,i,j,k+1} + n_{+,i,j,k-1} - 2n_{+,i,j,k}}{h^2} \right). \quad (9)$$

В формулах (1) коэффициент ударной ионизации умножается на модуль полного потока $|\mathbf{F}|$, который вычисляется через потоки, приходящие в узел (i, j, k) . Так, поток вдоль оси x , обеспечивающий рост концентрации частиц за счёт ионизации, вычислялся по формуле

$$F_x^e = \theta(-\operatorname{sgn}(F_{x,i+1/2,j,k}^{Me})) F_{x,i+1/2,j,k}^{Me} + \theta(\operatorname{sgn}(F_{x,i-1/2,j,k}^{Me})) F_{x,i-1/2,j,k}^{Me} + \theta(-\operatorname{sgn}(F_{x,i+1/2,j,k}^{De})) F_{x,i+1/2,j,k}^{De} + \theta(\operatorname{sgn}(F_{x,i-1/2,j,k}^{De})) F_{x,i-1/2,j,k}^{De}. \quad (10)$$

Здесь $\operatorname{sgn}(x)$ означает знак x и $\theta(x)$ — функция Хэвисайда. Таким образом, считалось, что ионизацию в данном объёме вокруг узла (i, j, k) создаёт только входящий поток электронов,

что согласуется с физическим представлением о характере процесса. С использованием (10) расчёт вклада ионизации в (1) выполнялся по формуле

$$\alpha|\mu_e n_e \mathbf{E} + D_e \nabla n_e| = \alpha_{i,j,k} \sqrt{(F_x^e)^2 + (F_y^e)^2 + (F_z^e)^2}, \quad (11)$$

где коэффициент ионизации вычисляется для значения напряжённости электрического поля в узле (i, j, k)

$$E_{i,j,k} = \sqrt{\left(\frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j-1,k}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k-1}}{2h}\right)^2}. \quad (12)$$

Уравнение для потенциала (2) решалось явно методом простых итераций с начальными условиями в виде значений потенциала с предыдущего шага по времени. Вычисление поля как правило занимало от 97% до 99.5% от общего времени моделирования.

Параллельные алгоритмы для решения уравнений задачи были реализованы в виде компьютерных программ на языке C++ с применением технологии CUDA. Алгоритмы были протестированы на нескольких видеокартах, поддерживающих эту технологию. Для систематических расчётов использовалась видеокарта с 2880 вычислительными ядрами CUDA с максимальной частотой 980 МГц и 6 гигабайтами памяти. В тестовых расчётах один расчёт на сетке $256 \times 256 \times 256$ узлов, в котором выполнялось 1000–1200 шагов по времени, занимал ~ 1 минуты или менее. Точное время не измерялось, так как ясно, что полное время вычислений будет определяться временем расчёта электрического потенциала.

Описанная выше разностная схема тестировалась по частям. Для тестирования диффузионной части схемы на одномерной, двумерной квадратной и трёхмерной кубической сетках решалась тестовая задача об эволюции концентраций нейтральных частиц с начальным гауссовым распределением по каждой оси координат. Электрическое поле в этих тестах отсутствовало. Коэффициент диффузии ионов гелия на 4 порядка меньше коэффициента диффузии электронов, поэтому наиболее критичным с точки зрения устойчивости является диффузия электронов. Максимальное значение D_+ в наших расчётах частичного разряда в пузырьке не превышало $4.8 \text{ м}^2/\text{с}$, а тестовые расчёты выполнялись для коэффициентов от $2.7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ до $100 \text{ м}^2/\text{с}$. В каждом расчёте коэффициент диффузии был постоянным. В наших физических расчётах при шаге по времени 10^{-13} с и менее условие устойчивости схемы выполняется с запасом. В тестах исследовалось «расплывание» гауссовского распределения при численном решении уравнения диффузии по сравнению с точным решением для разных начальных амплитуд. При расчётах на трёхмерных кубических сетках в течение 1200 шагов по времени и более было зарегистрировано максимальное отклонение в 7% максимума численного решения от максимума точного решения, которое становилось все меньше при росте количества шагов по времени. В дальнейшем считалось, что влияние схемной диффузии такого типа мало влияет на результат физических расчётов.

Отдельно выполнялись тесты для проверки устойчивости части схемы, моделирующей перенос электронов в электрическом поле. Тесты проводились в одномерной, двумерной и трёхмерной постановке. В трёхмерной постановке расчёты выполнялись на сетках с шагом $h = 0.01, 0.001, 0.00001 \text{ м}$ при значениях коэффициента переноса в диапазоне от $0.1 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ до $1 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. При этом в наших физических расчётах максимальное значение коэффициента подвижности не превышало $0.8 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ для электронов (для ионов – почти на 3 порядка меньше). В тестах в каждом расчёте коэффициент подвижности был постоянным. В постоянном электрическом поле задавалось распределение концентраций частиц в виде ступеньки или трапеции по каждому направлению в кубической области с гранями, параллельными граням области моделирования. Направление электрического поля на кубической сетке устанавливалось как вдоль одного из рёбер, так и по коротким диагоналям, что позволило оценить

изотропность схемы. Вычисления выполнялись при значениях напряжённости электрического поля 40 и 80 кВ/см, при этом влияние собственного электрического поля частиц не учитывалось. Шаг по времени выбирался так, чтобы выполнялось условие $\mu|\mathbf{E}|\delta t/h < 0.5$. Так, в тестах при $|\mathbf{E}| = 40$ кВ/см, шаге сетки $h = 0.001$ м и $\mu = 1$ м²/В·с шаг по времени был равен 0.1 нс и расчёт выполнялся вплоть до времён 120 нс.

Для оценки влияния схемной диффузии через заданное количество шагов по времени сравнивались текущие профили концентраций с начальным прямоугольным распределением при переносе в электрическом поле, направленном вдоль ребра куба. Сравнение проводилось по значению интеграла по объёму от концентрации частиц, оставшихся внутри первоначального куба, отнесённому к начальному числу частиц. Получено, что через 1000 шагов по времени число частиц в первоначальном объёме составляет не менее 65% от начального. При этом наблюдается «расплывание» переднего и заднего фронта примерно в равной мере. В тестах на изотропность схемы также рассматривалась начальная область, занятая частицами, в форме куба с гранями, параллельными граням всей области моделирования. Таким образом, перенос происходил вдоль диагонали грани куба, параллельной линиям электрического поля. Наблюдалось некоторое вытягивание куба вдоль этой диагонали (менее чем на 10%) с сохранением поперечных к направлению поля размеров.

При моделировании физической задачи о развитии разряда в газовом пузырьке шаг по времени выбирался с учётом проведённых тестов, то есть использовался универсальный критерий, включающий в себя условия устойчивости с учётом диффузии и дрейфа. На каждом шаге по времени выполнялся расчёт максимального электрического поля и коэффициентов переноса по всех узлах сетки и проверялось выполнение критериев устойчивости схемы. Однако, в отличие от тестовых расчётов, поскольку значение электрического поля могло меняться достаточно быстро, шаг по времени для следующего шага брался с коэффициентом 0.3 на начальных этапах вычислений (когда концентрации зарядов не превышали значений 10^{18} м⁻³) и с коэффициентом 0.05 при более высоких концентрациях (см. следующий раздел).

2. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Моделирование задачи о развитии разряда в пузырьке проводилось в кубической области размером $3 \times 3 \times 3$ мм ($298 \times 298 \times 298$ узлов сетки). В центр области была помещена сферическая полость, имитирующая пузырёк, размером 1.8 мм. Процесс начинается из небольшого объёма внутри этой полости, содержащего 7 узлов (один центральный узел и шесть ближайших к нему узлов-соседей), в которых были заданы исходные идентичные значения концентраций ионов и электронов. Начальные значения концентраций в этих узлах были установлены в диапазоне от 10^8 до 10^{12} м⁻³ в различных запусках расчёта при одних и тех же начальных и граничных условиях. Граничные условия для системы (1) на стенке пузырька были следующими:

$$J_{+n} = ((\mu_+ n_+ \mathbf{E} - D_+ \nabla n_+), \mathbf{n}) = 0, \quad J_{en} = ((-\mu_e n_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e), \mathbf{n}) = 0. \quad (13)$$

Здесь \mathbf{n} – внешний вектор нормали к поверхности пузырька, \mathbf{J}_+ – общий поток положительных ионов и \mathbf{J}_e – общий поток электронов. Для простоты предполагалось, что заряды оседают на стенках пузырька без каких-либо взаимодействий (химических реакций, ионизации и т. д.) с молекулами диэлектрической жидкости.

Граничные условия для уравнения (2) были следующими:

$$\varepsilon(\nabla\varphi)_{n2} - (\nabla\varphi)_{n1} = -|e|(n_{s+} - n_{se})/\varepsilon_0, \quad (\nabla\varphi)_{\tau2} = (\nabla\varphi)_{\tau1}, \quad (14)$$

$$\varphi = V_0 \text{ (анод)}, \quad \varphi = 0 \text{ (катод)}. \quad (15)$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся к газовому пузырьку и диэлектрической жидкости соответственно, n_{s+} и n_{se} – это поверхностные плотности положительных ионов и электронов на

стенке пузырька. Индекс n обозначает составляющую электрического поля вдоль вектора \mathbf{n} , представляющего собой нормаль к границе, а τ обозначает проекцию вектора электрического поля на касательную плоскость к границе между различными веществами. V_0 — приложенное напряжение. На боковых стенках области моделирования во время расчёта поддерживалось линейное изменение электрического потенциала от 0 до V_0 .

Начальные условия были описаны выше во введении.

В течение временного интервала примерно 0.3 нс после начала процесса ионизации происходило взрывное увеличение концентраций электронов и ионов. За этот промежуток времени концентрация увеличилась до значений 10^{18} м^{-3} . За время от 0.3 нс до 0.4 нс (для случая, когда затравка расположена в центральной части пузырька) фронт электронной волны достигает поверхности пузырька. Когда затравка была расположена на оси пузырька, мы наблюдали образование волны положительных ионов на расстоянии 0.3–0.35 мм от первоначального расположения затравки по направлению к аноду (см. рис. 1).

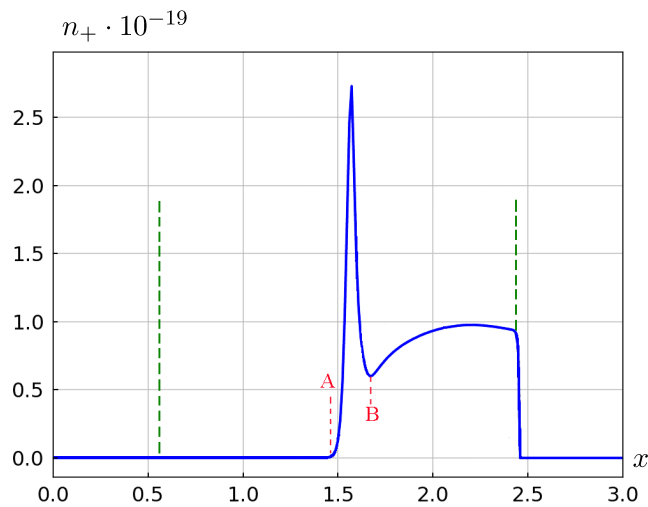


Рис. 1. Пик концентрации положительных ионов, возле которого наблюдаются высокие градиенты электрического поля (область АВ) непосредственно перед развитием численной неустойчивости. Вертикальные пунктирные линии показывают границу пузырька

Максимальная концентрация ионов гелия в пике этой волны превышает максимальную концентрацию электронов в волне в 2–3 раза в один и тот же момент времени. Распределение компоненты электрического поля вдоль оси пузырька соответствует распределению суммарного заряда. Следовательно, максимальный пик поля наблюдается в области волны положительных зарядов. Эта область очень медленно (со скоростью примерно в 20 раз меньшей, чем скорость электронной волны) приближалась к стенке пузырька в сторону катода.

Поскольку коэффициенты модели (1)–(2) нелинейно зависят от локального электрического поля, очень проблематично сформулировать единый критерий устойчивости для всей сетки. Основываясь на классических критериях устойчивости для схем с постоянными коэффициентами, мы провели множество численных экспериментов, чтобы определить диапазон стабильности вычислений. Устойчивость решения определялась стабильностью той части конечно-разностной схемы, которая описывает перенос заряда. Поэтому временной шаг был выбран из условия

$$\tau = \frac{q \cdot h}{\mu_{e \max} \cdot E_{\max}},$$

где h — шаг сетки, E_{\max} — модуль максимального значения электрического поля в области присутствия заряда, а q — коэффициент. В рассматриваемом здесь случае $h = 10^{-5}$ м и подвижность электронов $\mu_{e \max} \sim 1 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$. Коэффициент q был добавлен, чтобы обеспечить

максимальную скорость моделирования, а оптимальное значение $q = 0.05$ было выбрано эмпирически для приведённого выше моделирования. Оказалось невозможным выбрать постоянный временной шаг для всего интервала времени расчёта. Итак, для начальных значений поля в пузырьке $E_{\max 0} \sim 5 \cdot 10^5$ В/м шаг по времени должен составлять $\tau_0 = 8 \cdot 10^{-12}$ с. Однако уже на начальных этапах моделирования (времена от 0.2 до 0.3 нс) вблизи пика поля в области волны положительных зарядов (рис. 1) градиенты поля становятся неприемлемо большими для сохранения устойчивости схемы. В результате при временном шаге $\tau > 3 \cdot 10^{-16}$ с наблюдалась нестабильность в этой области. При выборе меньшего временного шага вычисления сильно замедляются, и время, необходимое для одного полного расчёта, оценивалось в несколько месяцев, как отмечалось во введении.

Поэтому было протестировано несколько эмпирических критериев с переменными шагами. Было установлено, что наиболее эффективным критерием является тот, при котором временной шаг масштабируется в соответствии с соотношением

$$\tau = \tau_0 \cdot (E_{\max 0}/E_{\max})^{1.1}.$$

Схема, отвечающая этому критерию, была устойчивой с решением, которое плавно изменялось в пространстве и во времени, сохраняя монотонность и без колебаний, характерных для неустойчивости. Однако по мере увеличения концентрации положительных ионов и появления пика поля в области волны ионов гелия временной шаг продолжал уменьшаться с начальных значений $\tau = 8 \cdot 10^{-12}$ с до $\tau \sim 10^{-16}$ с, и время расчёта снова стало неприемлемым.

Было рассмотрено несколько способов стабилизации схемы с шагом по времени $\tau \sim 10^{-13} - 10^{-14}$ с при развитии неустойчивости в области больших градиентов поля. Поскольку коэффициент диффузии ионов считался постоянным и, согласно [15], был выбран равным $D_{+0} = 2.4 \cdot 10^{-5}$ м²/с, была предпринята попытка стабилизировать схему, увеличив коэффициент диффузии ионов гелия. Расчёты проводились с коэффициентом диффузии ионов D_+ , увеличенным в 2, 5 и 10 раз по сравнению с D_{+0} . Увеличение D_+ привело к незначительному дополнительному расплыванию волны положительных зарядов, однако возможное снижение пиковой концентрации было компенсировано ионизацией, и устойчивость была потеряна примерно в то же время ($t \approx 0.37$ нс).

Также подвергался варьированию коэффициент подвижности ионов. Моделирование проводилось с коэффициентом μ_+ , увеличенным в 2, 5, 10 раз. С увеличением коэффициента подвижности ионов время расчёта до момента развития неустойчивости увеличилось с 0.375 нс до 0.384 нс. При двукратном увеличении μ_+ область в пространстве, в которой возникает нестабильность, смещается в сторону стенки пузырька, обращённой к катоду. При увеличении μ_+ на 5 и 10 % неустойчивость начиналась вблизи стенки пузырька, которой достигала электронная волна, а затем в области положительной волны. Таким образом, расчёт в целом оставался стабильным ещё некоторое время (на 0.01 нс), но затем он терял устойчивость по тому же сценарию. Заметим, что изменение коэффициентов подвижности и диффузии на порядок не только не привело к стабилизации расчёта, но и выглядит физически мало оправданным.

Оказалось, что расчётная схема наиболее чувствительна с точки зрения устойчивости к значению коэффициента рекомбинации. Физически корректный учёт процессов рекомбинации требует особого рассмотрения, поэтому мы остановимся на нем более подробно.

3. ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТА РЕКОМБИНАЦИИ

В условиях развития разряда в газовом пузырьке возможно несколько типов рекомбинации: радиационная рекомбинация, при которой столкновение иона гелия и электрона приводит к образованию нейтрального атома и кванта электромагнитного излучения, трехчастичная рекомбинация электрон-ион-нейтральный атом, при которой избыточная энергия столкновения иона гелия и электрона уносится атомом гелия, участвующим в столкновении, трехчастичная

электрон-ион-электронная рекомбинация, при которой избыточная энергия уносится вторым электроном [16], [17], [18], [19].

Уменьшение количества электронов (и ионов) в плазме вследствие рекомбинации излучения описывается соотношением

$$\frac{dn_e}{dt} = -\beta_r n_e n_+.$$

Коэффициент β_r зависит от температуры электронного газа и, согласно [16], [17], изменяется в диапазоне от $\beta_r \approx 4.8 \cdot 10^{-18} \text{ м}^3/\text{с}$ (250 К) до $\beta_r \approx 4.17 \cdot 10^{-19} \text{ м}^3/\text{с}$ (10000 К). Можно считать, что в широком диапазоне температур (по крайней мере, от 500 до 64 000 К) и при низких концентрациях электронов (до 10^{14} м^{-3}) коэффициент рекомбинации излучения изменяется незначительно или даже остаётся приблизительно постоянным [16]. Однако с увеличением концентрации электронов коэффициент рекомбинации излучения заметно возрастает и при $n_e \sim 10^{19} \text{ м}^3$ достигает значений $\beta_r \sim 10^{-13} \text{ м}^3/\text{с}$ ($T = 500 \text{ К}$).

Коэффициенты рекомбинации с участием третьей частицы (электрона или атома) β_3 определяются соотношением

$$\frac{dn_e}{dt} = -\beta_3 n_e n_+ n_0,$$

где n_0 — концентрация третьих частиц в виде нейтральных атомов n_a или электронов. Расчёты коэффициента трехчастичной рекомбинации в гелии для плотной низкотемпературной неизотермической плазмы были выполнены в [19] для соотношений концентраций электронов и атомов $(n_e/n_a) = 10^{-6}$ и $(n_e/n_a) = 10^{-5}$. Для температуры $T = 300 \text{ К}$ были получены оценки $\beta_3 = (3 - 6) \cdot 10^{-31} \text{ м}^6/\text{с}$.

Фактически, в модели используется некоторый интегральный коэффициент рекомбинации

$$\beta = \beta_r/n_e + \beta_{ea+} + \beta_{ee+},$$

который учитывает трехчастичную рекомбинацию электрон-ион-нейтральный атом с коэффициентом β_{ea+} и электрон-ион-электрон с коэффициентом β_{ee+} . В первом приближении предполагается, что этот интегральный коэффициент остаётся постоянным на протяжении всего расчёта. Было обнаружено, что при значениях $\beta \sim 10^{-31} \text{ м}^6/\text{с}$ и менее схема становится неустойчивой в области пика положительного заряда. Когда коэффициент рекомбинации увеличивается до значений $\beta \sim 10^{-30} \text{ м}^6/\text{с}$, можно вести расчёт задачи до тех пор, пока волна положительных ионов не достигнет границы (время $\sim 1.5 - 2 \text{ нс}$, в зависимости от положения затравки) и далее. В то же время максимальная концентрация положительных ионов в области максимальной концентрации положительного заряда снижается очень умеренно (с $n_+^{max} = 4.59 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ при $\beta \sim 10^{-34} \text{ м}^6/\text{с}$ до $n_+^{max} = 3.42 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ при $\beta \sim 10^{-30} \text{ м}^6/\text{с}$). После того, как положительные ионы достигли границы пузырька, проблем с устойчивостью дальнейших расчётов не возникало вплоть до времени $\sim 5 \text{ нс}$, когда моделирование прекратилось. В течение более длительных периодов времени схема, по-видимому, также остаётся устойчивой, поскольку к этому моменту основные распределения частиц почти достигли своих стационарных профилей, и затем происходит только медленная релаксация зарядов в пузырьке.

Заметим, что расчёт при $\beta \sim 10^{-30} \text{ м}^6/\text{с}$ балансирует на грани устойчивости. Значения x -компоненты (вдоль оси симметрии пузырька) электрического поля в области вблизи волны положительных ионов меняют знак в течение определённого интервала времени в небольшой области вблизи стенки пузырька, достигая 10% по модулю от среднего значения поля в промежутке, что, по-видимому, физически неверно. Однако значения концентрации остаются положительными по всей области, и упомянутые ошибки расчётов электрического поля со временем исчезают.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Были выполнены расчёты для случая развития волны ионизации в сферическом пузырьке, заполненном гелием, в конденсированном диэлектрике при приложенном напряжении $V_0 = 12.2$ кВ до момента времени 3 нс и далее для двух начальных положений.

На рис. 2 и 3 представлены результаты моделирования развития разряда при положении затравки на оси пузырька на расстоянии 0.07 мм от полюса пузырька, ближайшего к катоду (левая граница пузырька на рисунке).

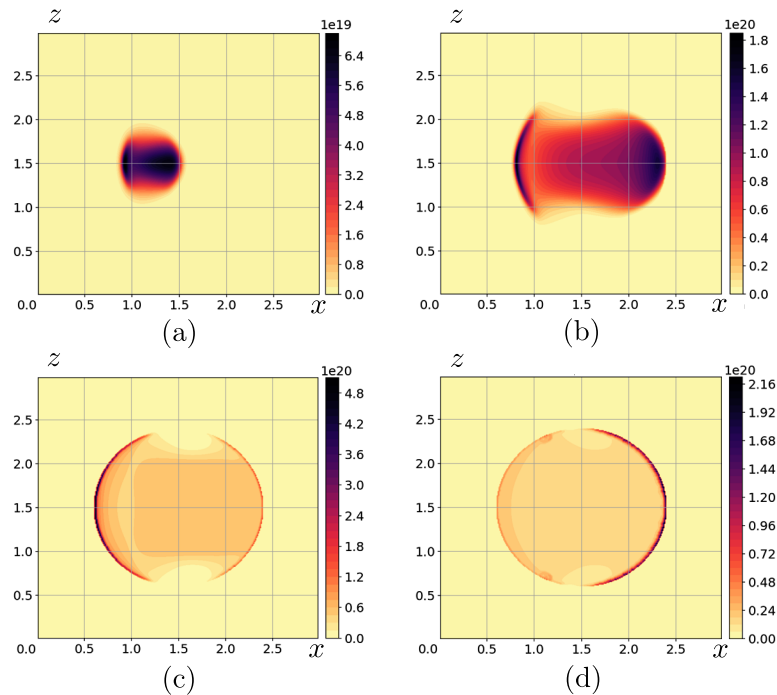


Рис. 2. Распределение электронной плотности в центральном сечении пузырька при положении затравки на оси пузырька слева (вблизи стенки пузырька, обращённой к катоду).
Время с момента появления затравки: 0.3 нс (а), 0.4 нс (б), 0.6 нс (с), 2.0 нс (д)

На рис. 2 показано распределение концентрации электронов в центральном сечении разрядного промежутка в разные моменты времени. В течение 0.3 нс концентрация зарядов увеличивается на 6–7 порядков, и образуется волна электронов, движущихся к аноду (справа), и волна положительных ионов. Волна положительных ионов формируется, как правило, на расстоянии ~ 0.35 мм справа от позиции затравки. На фронте электронной волны можно различить «ядро», которое имеет диаметр 0.8 мм, когда достигает стенки пузырька (тёмная область справа на рис. 2(б)). Максимальная концентрация электронов в «ядре» достигает значений $n_e \sim 10^{20} \text{ м}^{-3}$. Волна положительного заряда по форме напоминает линзу – тонкую и широкую по фронту — с концентрацией выше, чем в волне электронов. На рис. 2(а), 2(б) наблюдаются два максимума плотности электронов. Максимум слева возникает из-за того, что значительная часть электронов «задерживается» в волне положительных ионов. Между двумя максимумами образуется осесимметричная область квазинейтральной плазмы с плотностью заряженных частиц $(5 - 8) \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$. На рис. 2(с), 2(д) показаны плотности электронов сразу после того, как волна положительных зарядов достигла левой границы пузырька, и через 1.4 нс после этого момента соответственно. Можно видеть, что плотность электронов на левой границе изначально выше, чем плотность на правой границе, но затем, из-за рекомбинации, боковой диффузии и переноса заряда, она становится ниже плотности на правой границе. Заметим,

что общий заряд того же знака на поверхности пузырька составляет 200 пКл, что согласуется с нашим предыдущим расчётом с использованием модели постоянной проводимости пузырька [20], [21].

На рис. 3 показаны распределения горизонтальной составляющей электрического поля в центральном сечении разрядного промежутка в разные моменты времени. Вдоль оси наблюдается формирование цилиндрической симметричной области со слабым электрическим полем, соответствующей области плазмы. Со временем область низкого поля распространяется на весь пузырёк.

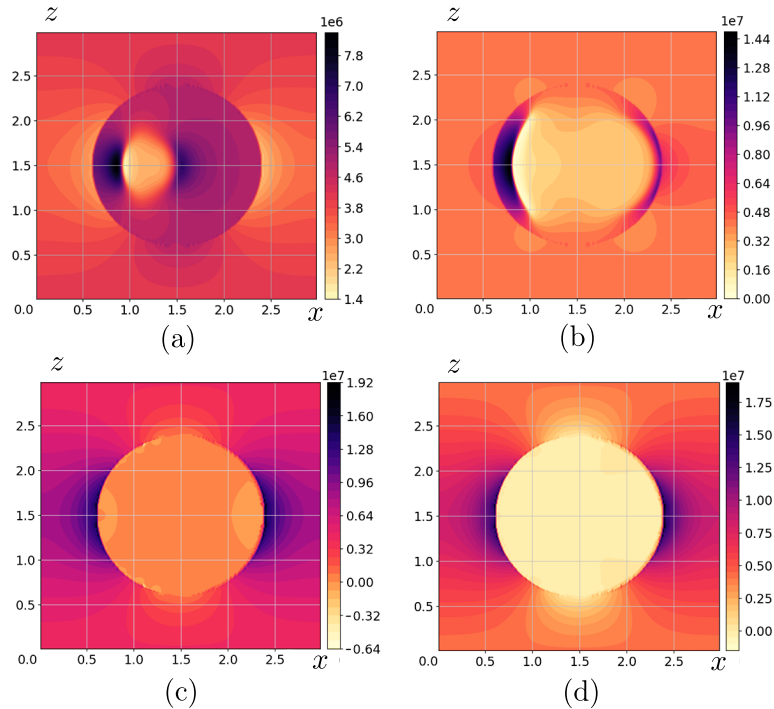


Рис. 3. Распределение горизонтальной составляющей вектора электрического поля в центральном сечении пузырька.
Время с момента появления затравки: 0.3 нс (а), 0.4 нс (b), 0.9 нс (c), 2.0 нс (d)

На рис. 4 показаны результаты моделирования развития разряда с асимметричным расположением затравки. Затравка располагалась в стороне от оси пузырька на расстоянии 0.2 мм от его боковой стенки. Видно, что фронт волны положительного заряда имел сложную пространственную структуру. В частности, после того, как волна достигла стенки, на фронте волны положительных зарядов образовались два максимума плотности заряда (рис. 4(c)). Даже при длительности более 1.7 нс все ещё наблюдались различия в распределении заряда по объёму пузырька (см. рис. 4(d)).

На рис. 5 показано распределение горизонтальной составляющей электрического поля в случае появления затравки вдали от оси пузырька. В отличие от случая с симметрично расположенной затравкой, здесь мы наблюдаем, что область слабого поля будет распространяться по объёму пузырька более широким фронтом, а не вдоль выбранного направления.

Для количественного сравнения параметров разряда в разные моменты времени на рис. 6 приведены графики концентрации электронов и горизонтальной составляющей поля вдоль оси симметрии пузырька для случая расположения затравки на оси. Видно, что начиная с момента 0.3 нс после начала процесса ионизации и до момента, когда электроны достигают стенки пузырька, эти распределения имеют сходную форму. В этом случае электрическое поле на фронте волны превышает среднее поле в 1.4–2 раза, а за фронтом волны электронов оно падает до значений, меньших среднего поля примерно в 2 раза.

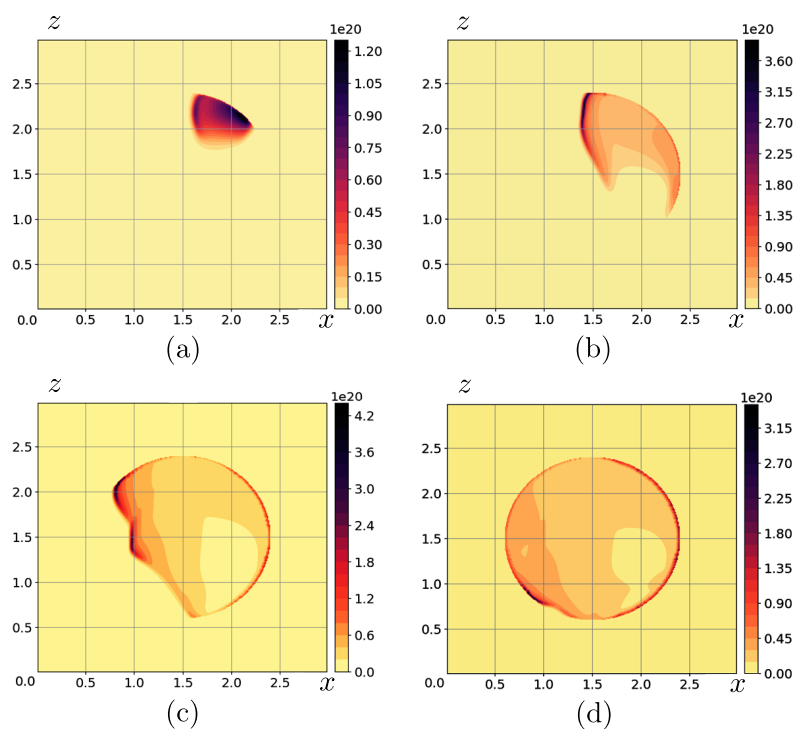


Рис. 4. Распределение плотности электронов в центральном сечении пузырька при положении затравки вдали от оси пузырька (вблизи его боковой стенки).
 Время с момента появления затравки: 0.3 нс (а), 0.6 нс (b), 1.2 нс (c), 1.7 нс (d)

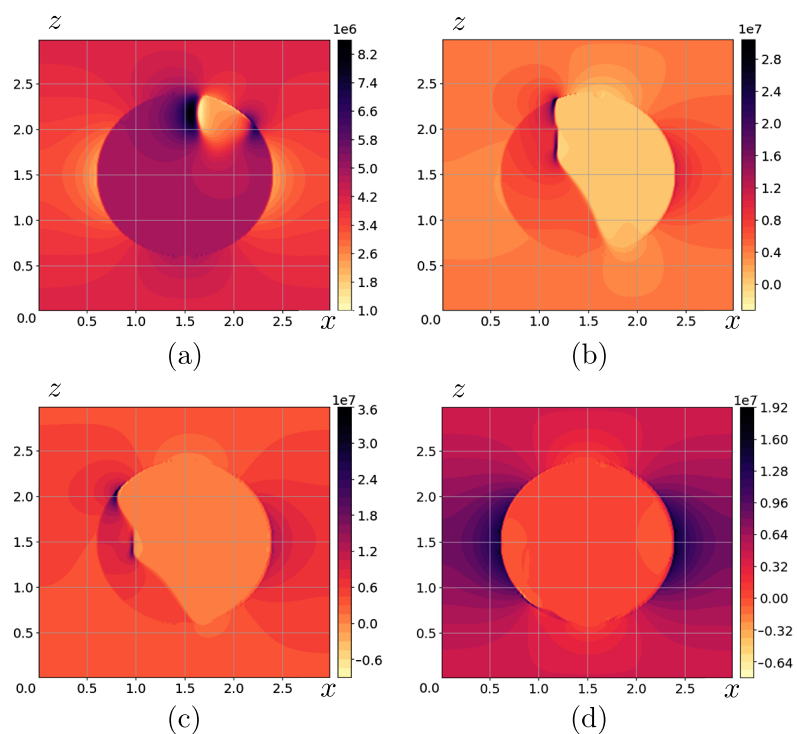


Рис. 5. Распределение горизонтальной составляющей вектора электрического поля в центральном сечении пузырька.
 Время с момента появления затравки: 0.3 нс (а), 0.9 нс (b), 1.2 нс (c), 1.7 нс (d)

В течение времени 10^{-14} с наблюдались выбросы значений напряжённости электрического поля в область отрицательных значений, что физически неверно (см. рис. 6(b) кривая 5).

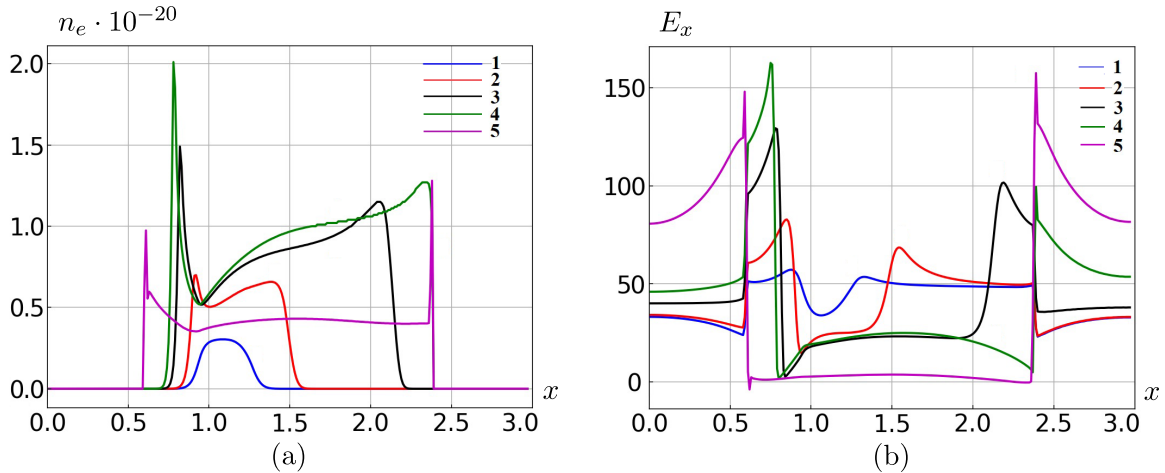


Рис. 6. Динамика концентрации электронов (а) и компоненты электрического поля вдоль оси пузырька (b).
Расположение затравки на оси. Моменты времени: 0.26 нс (1), 0.3 нс (2), 0.38 нс (3), 0.42 нс (4), 0.7 нс (5)

При этом сами концентрации остаются положительными. Это явление наблюдалось в приграничных узлах пузырька в области излома границы и не приводило к развитию численной неустойчивости. Высота выбросов по модулю величины могла составлять до 15% от максимального поля в промежутке, которое наблюдалось в соседних ячейках. По-нашему мнению, эти эффекты связаны как с дискретностью задания границы пузырька, так и с немонотонностью использованной нами схемы переноса для носителей заряда. Эти эффекты имели место в моменты выхода волн положительных и отрицательных зарядов на границу «пузырёк — конденсированный диэлектрик» и релаксировали практически до значений поля, близких к нулю, за время $\sim 5 \cdot 10^{-14}$ с по мере дальнейшей зарядки границы. Таким образом, мы считаем, что эти эффекты не оказывают в целом существенного влияния на результаты моделирования.

Сравнение кривых 4 и 5 на рис. 6 показывает, что поле в разрядном промежутке достигало своих максимальных значений на полюсах пузырька сразу после того, как волны заряда достигли стенки пузырька. Позже максимальные значения поля могут уменьшаться, что объясняется совокупным эффектом рекомбинации зарядов и бокового переноса за счёт диффузии и подвижности.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для ранее разработанной конечно-разностной схемы исследованы условия, при которых схема может быть устойчивой. В приближении постоянства коэффициента трехчастичной рекомбинации получено пороговое значение коэффициента, при котором схема все ещё позволяет проводить трёхмерные расчёты развития газового разряда без развития неустойчивости. Возникающие в результате ошибки при расчёте электрического поля носят локальный характер и со временем быстро исчезают, практически не влияя на результаты моделирования. Были проведены расчёты развития разряда в пузырьке гелия в конденсированном диэлектрике до того момента, когда пузырь становится в основном проводящим, стенки пузырька в основном заряжаются, а затем следует стадия медленной релаксации заряда. Были получены распределения зарядов и полей в пузырьке в разные моменты времени. Моделирование проводилось для двух случаев: для случая, когда затравка находится на оси

пузырька, и для случая, когда затравка находится сбоку. Трёхмерное моделирование показало, что фронт волны заряда в пузырьке может иметь очень сложную форму. Показано, что величина максимального поля на поверхности пузырька может быть наибольшей в тот момент, когда волна заряда достигает стенки пузырька, а затем она может уменьшаться. Суммарное значение заряда того же знака на поверхности пузырька (так называемый «истинный» заряд) согласуется с оценками, полученными в результате предыдущих расчётов в рамках более простой модели и экспериментальными данными [1], [20], [21].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-10198-П). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Korobeynikov S., Ovsyannikov A., Ridel A., Karpov D., Lyutikova M., Kuznetsova Yu., Yassinskiy V. Study of partial discharges in liquids // J. Electrostatics. 2020. V. 103. Article number 103412; DOI: 10.1016/j.elstat.2019.103412
2. Guo B., Li X., Ebert U., Teunissen J. A computational study of accelerating, steady and fading negative streamers in ambient air // Plasma Sources Sci. Technol. 2022. V. 31, N 9. Article number 095011; DOI:10.1088/1361-6595/ac8e2e
3. Qi B., Wang H., Liu C., Teng F., Yu D., Liang Y., Wang F. Numerical Simulation of Streaming Discharge Characteristics of Free Metal Particles in SF₆/CF₄ Gas Mixtures Under Highly Heterogeneous Electric Field // Sensors. 2025. V. 5. P. 3847; DOI: 10.3390/s25133847
4. Yan X., Zhou X., Li Z., Qian Y., Sheng G. Numerical simulation of streamer discharge with different electrode shapes in C₄F₇N // AIP Advances. 2023. V. 13. Article number 035238; DOI: 10.1063/5.0134509
5. Wei Y., Zhang L., Liu J., Li Zh., Zhao C. Numerical simulation and analysis of streamer discharge of SF₆/N₂ mixed gas under high-pressure, low-temperature conditions // The Proceedings of the 11th Frontier Academic Forum of Electrical Engineering (FAFEE2024). Springer, 2025. V. VII. P. 1–13.
6. Wang Zh., Sun A., Teunissen J. A comparison of particle and fluid models for positive streamer discharges in air // Plasma Sources Sci. Technol. 2022. V. 31, N 1. Article number 015012; DOI 10.1088/1361-6595/ac417b
7. <https://gitlab.com/MD-CWI-NL/afivo-streamer>
8. Babaeva N.Y., Tereshonok D.V., Naidis G.V., Smirnov B.M. Initiation of breakdown in strings of bubbles immersed in transformer oil and water: string orientation and proximity of bubbles // J. Phys. D: Appl. Phys. 2016. V. 49, N 2. Article number 025202; DOI:10.1088/0022-3727/49/2/025202
9. Savenko R.A., Karpov D.I., Ridel A.V., Korobeynikov S.M. Simulation of gas discharge in a helium bubble in liquid dielectric // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2025. V. 13, N 1. P. 108–117.
10. Курбанисмаилов В.С., Омаров О.А., Рагимханов Г.Б., Терешонок Д.В. Особенности формирования и развития ионизационных фронтов в предварительно ионизированной газовой среде // Письма в Журн. техн. физики. 2017. Т. 43, № 17. С. 73–81; DOI: 10.21883/PJTF.2017.18.45036.16844.
11. Биберман Л.М., Воробьёв В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982.
12. Davies D.K., Jones F.L., Morgan C.G. Primary ionization coefficient of helium // Proc. Phys. Soc. 1962. V. 80, N 4. P. 898–908; DOI: 10.1088/0370-1328/80/4/312

13. *Ran J., Luo H., Yue Y., Wang X.* Measurement of the first Townsend ionization coefficients in helium, air, and nitrogen at atmospheric pressure // *J. Phys. Soc. Japan.* 2014. V. 83. Article number 074503; DOI: 10.7566/JPSJ.83.074503
14. *Lakshminarasimha C.S., Lucas J.* The ratio of radial diffusion coefficient to mobility for electrons in helium, argon, air, methane and nitric oxide // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1977. V. 10. P. 313–321; DOI: 10.1088/0022-3727/10/3/011
15. *Смирнов Б.М.* Свойства газоразрядной плазмы. СПб: Изд-во Политехнического ун-та, 2010.
16. *Drawin H. W., Emard F.* Collisional-radiative volume recombination and ionization coefficients for quasi-stationary helium plasmas // *Z. Physik.* 1972. V. 243. P. 326–340; DOI: 10.1007/BF01395918
17. *Бейтс Д., Далгарно А.* Электрон-ионная рекомбинация // *Атомные и молекулярные процессы.* М.: Мир, 1964.
18. *Hinnov E., Hirschberg J.G.* Electron-ion recombination in dense plasmas // *Phys.Rev.* 1962. V. 125, N 3. P. 795–801.
19. *Кудрявцев А.А., Никитин А.Г.* Кинетика рекомбинации атомарных ионов в плотной низкотемпературной неизотермической плазме // *Теплофизика высоких температур.* 1991. Т. 29, № 4. С. 625–632.
20. *Korobeynikov S.M., Ridel A.V., Medvedev D.A., Karpov D.I., Ovsyannikov A.G., Meredova M.B.* // Registration and simulation of partial discharges in free bubbles at AC voltage // *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation.* 2019. V. 26, N 4. P. 1035–1042; DOI: 10.1109/TDEI.2019.007808
21. *Korobeynikov S., Ridel A., Karpov D., Ovsyannikov A., Meredova M.* Mechanism of partial discharges in free helium bubbles in transformer oil // *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation.* 2019. V. 26, N 5. P. 1605–1611; DOI: 10.1109/TDEI.2019.008199

UDC 537.52:519.63

ON THE FEATURES OF NUMERICAL SIMULATION OF ELECTRIC DISCHARGE IN A HELIUM BUBBLE IN DIELECTRIC LIQUID**© 2026 R. A. Savenko^{1,2a}, D. I. Karpov^{1,2b}, A. V. Ridel^{2c},
S. M. Korobeynikov^{2d}**¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS,
Lavrentyev pr., 15, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Novosibirsk State Technical University,
K. Marx pr., 20, Novosibirsk 630073, Russia*E-mails: ^asavenko@hydro.nsc.ru, ^bkarpov@hydro.nsc.ru, ^cridel@corp.nstu.ru,
^dkorobeynikov@corp.nstu.ru

Received 30.10.2025, revised 14.04.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. A model developed earlier for three-dimensional simulation of partial discharge in a helium bubble immersed in a dielectric liquid has been investigated for numerical stability. The effect of the recombination coefficient on the numerical stability of calculations is specifically discussed. The discharge was simulated from the beginning of the process to the final stage of gradual charge relaxation. Two different cases were simulated. In the first case, the initial small region of ionized gas (the seed) was located on the axis of the bubble near its pole. In the second case, the seed was located away from the axis of the system near the bubble wall. The three-dimensional evolution of the number densities of helium ions and electrons in a bubble was calculated. Positive charge fronts with characteristic features were observed in different cases. Three-dimensional distributions of the electric field in the interelectrode gap for different time points are obtained.

Keywords: partial discharge, gas discharge, «true» charge, 3D simulation, recombination.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.107

REFERENCES

1. Korobeynikov S., Ovsyannikov A., Ridel A., Karpov D., Lyutikova M., Kuznetsova Yu., Yassinskiy V. Study of partial discharges in liquids. *J. Electrostatics*, 2020, Vol. 103, Article number 103412; DOI: 10.1016/j.elstat.2019.103412
2. Guo B., Li X., Ebert U., Teunissen J. A computational study of accelerating, steady and fading negative streamers in ambient air. *Plasma Sources Sci. Technol.*, 2022, Vol. 31, No. 9, Article number 095011; DOI: 10.1088/1361-6595/ac8e2e
3. Qi B., Wang H., Liu C., Teng F., Yu D., Liang Y., Wang F. Numerical Simulation of Streaming Discharge Characteristics of Free Metal Particles in SF₆/CF₄ Gas Mixtures Under Highly Heterogeneous Electric Field. *Sensors*, 2025, Vol. 25, Article number 3847; DOI: 10.3390/s25133847
4. Yan X., Zhou X., Li Z., Qian Y., Sheng G. Numerical simulation of streamer discharge with different electrode shapes in C₄F₇N. *AIP Advances*, 2023, Vol. 13, Article number 035238; DOI: 10.1063/5.0134509
5. Wei Y., Zhang L., Liu J., Li Zh., Zhao C. Numerical simulation and analysis of streamer discharge of SF₆/N₂ mixed gas under high-pressure, low-temperature conditions. *Lecture Notes in Electrical Engineering 1293. The Proceedings of the 11th Frontier Academic Forum of Electrical Engineering (FAFEE2024)*. Beijing Paiké Culture Commu. Co., Ltd. 2025. Springer. 2025, Vol. VII. pp. 1–13.

6. Wang Zh., Sun A., Teunissen J. A comparison of particle and fluid models for positive streamer discharges in air. *Plasma Sources Sci. Technol.*, 2022. Vol. 31, No. 1, Article 015012; DOI: 10.1088/1361-6595/ac417b
7. <https://gitlab.com/MD-CWI-NL/afivo-streamer>
8. Babaeva N.Y., Tereshonok D.V., Naidis G.V., Smirnov B.M. Initiation of breakdown in strings of bubbles immersed in transformer oil and water: string orientation and proximity of bubbles. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2016, Vol. 49, No. 2, Article number 025202; DOI: 10.1088/0022-3727/49/2/025202
9. Savenko R.A., Karpov D.I., Ridel A.V., Korobeynikov S.M. Simulation of gas discharge in a helium bubble in liquid dielectric. *Euras. J. Math. Comput. Appl.*, 2025, Vol. 13, No. 1, pp. 108–117.
10. Kurbanismailov V.S., Omarov O.A., Ragimkhanov G.B., Tereshonok D.V. Peculiarities of the formation and development of ionization fronts in a pre-ionized gas medium. *Tech. Phys. Lett.*, 2017, Vol. 43, No. 17, pp. 853–856; DOI: 10.1134/S1063785017090206.
11. Biberman L.M., Vorobyev V.S., Yakubov I.T. *Kinetika neravnovesnoj nizkoterperaturnoj plazmy [Kinetics of non-equilibrium low-temperature plasma]*. Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
12. Davies D.K., Jones F.L., Morgan C.G. Primary ionization coefficient of helium. *Proc. Phys. Soc.*, 1962, Vol. 80, No. 4, pp. 898–908; DOI: 10.1088/0370-1328/80/4/312
13. Ran J., Luo H., Yue Y., Wang X. Measurement of the first Townsend ionization coefficients in helium, air, and nitrogen at atmospheric pressure. *J. Phys. Soc. Japan*, 2014, Vol. 83, Article number 074503; DOI: 10.7566/JPSJ.83.074503
14. Lakshminarasimha C.S., Lucas J. The ratio of radial diffusion coefficient to mobility for electrons in helium, argon, air, methane and nitric oxide. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1977, Vol. 10, pp. 313–321; DOI: 10.1088/0022-3727/10/3/011
15. Smirnov B.M. *Physics of ionized gases*. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
16. Drawin H.W., Emard F. Collisional-radiative volume recombination and ionization coefficients for quasi-stationary helium plasmas. *Z. Physik*, 1972, Vol. 243, pp. 326–340; DOI: 10.1007/BF01395918
17. Bates D.R., Dalgarno A. *Electron-ion recombination in Atomic and Molecular Processes*. N. Y., London, Academic Press, 1962.
18. Hinnov E., Hirschberg J.G. Electron-ion recombination in dense plasmas. *Phys.Rev.*, 1962, Vol. 125, No. 3, pp. 795–801.
19. Kudryavtsev A.A., Nikitin A.G. Recombination kinetics of atomic ions in dense low-temperature nonisothermal plasmas. *High Temperature*, 1991, Vol. 29, No. 4, pp. 483–489.
20. Korobeynikov S.M., Ridel A.V., Medvedev D.A., Karpov D.I., Ovsyannikov A.G., Meredova M.B. Registration and simulation of partial discharges in free bubbles at AC voltage. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 2019, Vol. 26, No. 4, pp. 1035–1042; DOI: 10.1109/TDEI.2019.007808
21. Korobeynikov S., Ridel A., Karpov D., Ovsyannikov A., Meredova M. Mechanism of partial discharges in free helium bubbles in transformer oil. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 2019, Vol. 26, No. 5, pp. 1605–1611; DOI: 10.1109/TDEI.2019.008199