УДК 517.955:517.958

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С УЧЁТОМ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

© 2026 **Х. Г. Умаров**[1,2]

[1] *Академия наук Чеченской Республики,*
ул. В. Алиева, 19 а, г. Грозный 364043, Россия,
[2] *Чеченский государственный педагогический университет,*
ул. С. Кишиевой, 33, г. Грозный 364068, Россия

E-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 25.09.2025 г.; после доработки 09.04.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа (уравнения не разрешённые относительно старшей временной производной), обобщающего уравнение колебаний стержня с учётом движущейся нагрузки, исследуется задача Коши в пространстве непрерывных функций, заданных на всей числовой оси, и для которых существуют пределы на бесконечности. Найдено в явном виде классическое решение соответствующего линейного однородного уравнения и получены оценки норм операторнозначных функций, представляющих это решение. Получена оценка нормы решения задачи Коши для линейного однородного уравнения. Установлен временной отрезок существования и единственности классического решения вспомогательной задачи Коши, связанной с исходной и приведена оценка нормы этого локального решения. Найдены условия, обеспечивающие связь между классическими решениями исходной и вспомогательной задач Коши на определённом временном отрезке. Рассмотрены условия разрушения классического решения задачи Коши на конечном временном отрезке.

Ключевые слова: колебания стержня с учётом движущейся нагрузки, нелинейное уравнение соболевского типа, разрушение решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.108

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1}$$

где $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, штрих в уравнении обозначает дифференцирование по $u_x = \partial_x u = \partial u / \partial x$, коэффициенты α, β, γ — положительные постоянные, а нелинейность $f(\cdot)$ — заданная функция. Основная цель — получение условий существования локального $t \in [0, t_1]$ классического решения задачи Коши, оценка его нормы при $t \in [0, t_1]$ и условий разрушения решения на некотором конечном временном отрезке.

В случае $f(\cdot) \equiv 0$ уравнение (1) описывает колебания стержня с учётом движущейся нагрузки и моделирует колебания рельса на участке железнодорожного пути, который можно рассматривать как стержень, лежащий на упругом основании, при движении по нему состава бесконечной длины (см. [1, гл. 6, § 6.3, (6.103)]).

Уравнения вида (1) входят в класс псевдогиперболических уравнений, определённых в монографии [2, гл. 2], в которой содержатся первые теоремы о разрешимости задачи Коши для линейных уравнений этого класса. В литературе уравнения вида (1) часто называют уравнениями соболевского типа, поскольку работы академика С. Л. Соболева, который вывел и исследовал уравнение малых колебаний вращающейся жидкости, были первыми глубокими исследованиями уравнений в частных производных, не разрешённых относительно старшей временной производной и послужили началом для нового направления в теории дифференциальных уравнений. Уравнения соболевского типа — важный инструмент в математическом моделировании сложных динамических систем и имеется большое количество работ, посвящённых изучению различных задач для таких уравнений (см., например, [3] и обширную библиографию, приведённую там). Не разрешённое относительно старшей временной производной уравнение (1), является уравнением соболевского типа с младшими (в обобщённом смысле [2]) членами уравнения. Параметры α, β, γ являются коэффициентами при младших членах уравнения, при этом, как отмечается в работе [4], в отличие от гиперболических и параболических уравнений равенство нулю некоторых из этих параметров (т. е. добавление или отбрасывание младших членов в уравнении, не разрешённом относительно старшей производной) может существенно повлиять на разрешимость задачи Коши.

Задача Коши для уравнения (1) рассматривается в пространстве $C(\mathbb{R})$ [5, гл. VIII, § 1] непрерывных функций $g = g(x)$, с нормой $\|g\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$, для которых существуют оба предела при $x \to \pm\infty$. Полагаем, что начальные функции

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

и искомое классическое решение $u = u(t,x)$, $(t,x) \in \overline{R}_+ \times R$, $\overline{R}_+ = [0,+\infty)$, вместе с частными производными входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат $C(\mathbb{R})$. (Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка, и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.)

Через $C^{(k)}(\mathbb{R}) = \{g(x) \in C(\mathbb{R}) \mid g'(x), \ldots, g^{(k)}(x) \in C(\mathbb{R})\}$, $k \in \mathbb{N}$, обозначаются подмножества дифференцируемых функций в $C(\mathbb{R})$.

В уравнении (1) нелинейная функция $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема, $x \in \mathbb{R}$, модуль $|f(r)|$ является неубывающей функцией, $r \geqslant 0$, причём $|f(r)| > 0$ при $r > 0$, и справедливы оценки

$$\begin{gathered} \sup_{x\in R} |f^{(i)}(g(x))| \leqslant |f^{(i)}(\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|)|, \quad i = \overline{0,1}, \quad \text{для всех} \quad g(x) \in C(\mathbb{R}), \\ |f(\xi r)| \leqslant \chi(\xi)|f(r)|, \quad \xi > 0, \quad r \geqslant 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\chi(\xi)$ – непрерывная функция при $\xi \geqslant 0$ (простейший пример функции $f(x)$ – степенная функция, другие нетривиальные примеры в [6]).

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать и уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial t \partial x^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma v = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(v), \tag{4}$$

получающееся из (1) после дифференцирования обеих частей по x и последующей замены $v = u_x$ (левые части уравнений (1) и (4) совпадают). Для уравнения (4) соответствующие начальные условия примут вид

$$v|_{t=0} = \varphi'(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi'(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Исследование задачи Коши (1), (2) проведём по следующему плану: прежде чем приступать к установлению основного результата статьи убедимся, что постановка задачи Коши (1), (2) корректна и локальное по времени классическое решение её существует.

С этой целью для соответствующего (1) линейного уравнения:

$$\big(I-\partial_x^2\big)u_{tt}-\big(\partial_x^3-\alpha\partial_x\big)u_t+\big(\partial_x^4+\beta\partial_x^2+\gamma I\big)u=0, \tag{6}$$

найдём решение задачи Коши, используя методы теории сильно непрерывных полугрупп операторов и косинус оператор-функций и получим, используемые в дальнейшем, оценки норм операторнозначных функций, представляющих это решение.

Далее, для вспомогательной задачи Коши (4), (5) найдём временной отрезок $[0,t_1]$ существования и единственности классического решения и оценим норму этого локального решения в $C(\mathbb{R})$. Затем, установим связь между решениями уравнений (1) и (4). В заключительной части статьи найдём условия разрушения решения задачи Коши (1), (2) на конечном временном отрезке.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ (6)

Напомним, что в пространстве $C(\mathbb{R})$ (см. [5, гл. VIII, § 1] и [7, § 2]) дифференциальные операторы ∂_x, с областью определения $D(\partial_x)=C^{(1)}(\mathbb{R})$, и ∂_x^2, $D(\partial_x^2)=C^{(2)}(\mathbb{R})$, являются соответственно производящими операторами сильно непрерывных сжимающих группы:

$$U(\tau;\partial_x)g(x)=g(x+\tau),\quad \tau\in R,$$

и полугруппы:

$$U\big(t;\partial_x^2\big)g(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\xi^2/(4t)}g(x+\xi)\,d\xi,\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+.$$

Полуось $\lambda>0$ принадлежит резольвентным множествам операторов ∂_x и ∂_x^2 и для соответствующих резольвент

$$(\lambda I-\partial_x)^{-1}g(x)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda s}g(x+s)\,ds,$$

$$\big(\lambda I-\partial_x^2\big)^{-1}g(x)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sqrt{\lambda}|s|}g(x+s)\,ds$$

справедливы оценки норм

$$\|(\lambda I-\partial_x)^{-1}\|\leqslant\lambda^{-1},\quad \|(\lambda I-\partial_x^2)^{-1}\|\leqslant\lambda^{-1},$$

где I — тождественный оператор, причём эти резольвенты коммутируют между собой.

Введём в уравнение (6) новую неизвестную функцию

$$v(t,x)=u(t,x)-u_{xx}(t,x), \tag{7}$$

полагая, что частные производные u_{xx}, u_{txx} непрерывны при $t\in\overline{\mathbb{R}}_+$. Из замены (7) при условии, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $C^{(2)}(\mathbb{R})$, можно единственным образом определить начальные значения функции $v=v(t,x)$:

$$v|_{t=0}=v_0(x)=\varphi(x)-\varphi''(x),\quad v_t|_{t=0}=v_1(x)=\psi(x)-\psi''(x),$$

и, используя принадлежность положительной полуоси резольвентному множеству дифференциального оператора ∂_x^2, выразить решение $u(t,x)$ уравнения (6) через новую неизвестную функцию $v(t,x)$:

$$u(t,x)=\big(I-\partial_x^2\big)^{-1}v(t,x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-|s|}v(t,x+s)\,ds. \tag{8}$$

В результате замены (7) получим эквивалентное (6) интегро-дифференциальное уравнение

$$v_{tt} + A_1 v_t + A_2 v = 0, \tag{9}$$

в котором операторные коэффициенты определяются следующим образом:

$$A_1 = \partial_x + (\alpha - 1)\big[(I - \partial_x)^{-1} - \big(I - \partial_x^2\big)^{-1}\big], \quad D(A_1) = C^{(1)}(\mathbb{R}),$$
$$A_2 = -\partial_x^2 - (\beta + 1)I + (\beta + \gamma + 1)\big(I - \partial_x^2\big)^{-1}, \quad D(A_2) = C^{(2)}(\mathbb{R}).$$

Оператор A_1 получен возмущением производящего оператора ∂_x группы левых сдвигов ограниченным оператором

$$A_{12} = (\alpha - 1)\big[(I - \partial_x)^{-1} - \big(I - \partial_x^2\big)^{-1}\big],$$

который порождает равномерно непрерывную группу $U(\tau; A_{12})$, $\tau \in \mathbb{R}$, представляющуюся степенным рядом

$$U(\tau; A_{12}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau^n}{n!} A_{12}^n,$$

сходящимся равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ на каждом конечном отрезке. Возмущение ограниченным оператором сохраняет свойство оператора быть производящим оператором, поэтому оператор A_1 является производящим оператором сильно непрерывной группы, для которой справедливы представление

$$U(\tau; A_1)g(x) = U(\tau; A_{12})g(x + \tau), \quad \text{для любых} \quad g(x) \in C(\mathbb{R}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

и оценка нормы

$$\|U(t; A_1)\| \leqslant e^{\|A_{12}\|t} \leqslant e^{2|\alpha - 1|t}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{10}$$

В уравнении (9) произведём замену неизвестной функции

$$w(t, x) = U(t/2; A_1)v(t, x), \tag{11}$$

тогда можно единственным образом определить начальные значения функции $w(t, x)$:

$$w\big|_{t=0} = w_0(x) = v_0(x),$$

$$w_t\big|_{t=0} = w_1(x) = v_1(x) + A_1 v_0(x)/2 = v_1(x) + (v_0(x))'/2$$
$$+ \frac{\alpha - 1}{4}\Big(2\int_0^{+\infty} e^{-r} v_0(x + r)\,dr - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} v_0(x + s)\,ds\Big).$$

Используя равенство $U(-t/2; A_1) = (U(t/2; A_1))^{-1}$, выразим решение $v(t, x)$ уравнения (9) через новую неизвестную функцию $w(t, x)$:

$$v(t, x) = U(-t/2; A_1)w(t, x). \tag{12}$$

В результате замены (11) получим эквивалентное (9) интегро-дифференциальное уравнение

$$w_{tt} = Bw, \tag{13}$$

в котором операторный коэффициент

$$B = \frac{1}{4}A_1^2 - A_2 = B_1^2 + B_2,$$

где

$$B_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\partial_x, \quad D(B_1) = C^{(1)}(\mathbb{R}),$$

является производящим оператором сильно непрерывной группы сдвигов

$$U(\tau; B_1)g(x) = g(x + \tau\sqrt{5}/2), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

а ограниченный оператор B_2 определяется следующим образом:

$$B_2 = \delta I - (\gamma + \delta)(I - \partial_x^2)^{-1} + \frac{1}{4}A_{12}^2, \quad D(B_2) = C(\mathbb{R}),$$

здесь $\delta = \beta + 1 - (\alpha - 1)/2$.

Уравнение (13) можно переписать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = \big(B_1^2 + B_2\big)W, \tag{14}$$

где $W = W(t) : t \to w(t, x)$ — искомая вектор-функция, определённая для $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и со значениями в пространстве $C(\mathbb{R})$.

Начальные условия для уравнения (14) в $C(\mathbb{R})$ перепишутся в виде

$$W|_{t=0} = W_0, \quad W_t|_{t=0} = W_1, \tag{15}$$

где $W_0 = w_0(x)$, $W_1 = w_1(x)$ — элементы пространства $C(\mathbb{R})$.

Оператор B_1^2 является (см. [7, § 1.5]) производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; B_1^2)$, $\tau \in \mathbb{R}$, для которой справедливо представление

$$C(\tau; B_1^2)g(x) = \frac{1}{2}[U(\tau; B_1) + U(-\tau; B_1)]g(x) = \frac{1}{2}\left[g\left(x + \tau\frac{\sqrt{5}}{2}\right) + g\left(x - \tau\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

и оценка нормы

$$\big\|C\big(t; B_1^2\big)\big\| \leqslant 1, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Ограниченный оператор B_2 порождает (см. [7, § 4.2]) косинус оператор-функцию $C(\tau; B_2), \tau \in \mathbb{R}$, для которой справедливо представление

$$C(\tau; B_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau^{2n}}{(2n)!}B_2^n,$$

в котором степенной ряд сходится равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ на каждом конечном отрезке, и оценка нормы

$$\|C(t; B_2)\| \leqslant \operatorname{ch}(k_1 t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

где $k_1^2 = (\alpha - 1)^2 + |\delta| + |\gamma + \delta|$.

Возмущение ограниченным оператором B_2 сохраняет способность оператора B_1^2 порождать косинус оператор-функцию (см. [7, § 8.2]), поэтому оператор $B = B_1^2 + B_2$ является производящим оператором косинус оператор-функции, для которой на элементах $g(x) \in D(B) = C^{(2)}(\mathbb{R})$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$ справедливо представление

$$C(\tau; B)g(x) = C\big(\tau; B_1^2\big)g(x) + \frac{\tau^2}{2}\int_0^1 j_1\big(\tau\sqrt{1 - s^2}, B_1^2\big)C(\tau s; B_1)g(x)\, ds, \tag{16}$$

где

$$j_1(\tau, B_1^2)g(x) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1-s^2}C\big(\tau s; B_1^2\big)g(x)\,ds, \quad \big\|j_1\big(\tau, B_1^2\big)\big\| \leqslant 1,$$

и оценка нормы

$$\|C(t;B)\| \leqslant 1 + \frac{t}{2k_1}\mathrm{sh}(k_1 t) = h_1(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{17}$$

С косинус оператор-функцией (16) связана [7, § 1.4] синус оператор-функция:

$$S(\tau;B)g(x) = \int_0^\tau C(s;B)g(x)ds, \quad g(x) \in C(\mathbb{R}), \tag{18}$$

и линейное многообразие

$$C_1(\mathbb{R}) = \{g(x) \in C(\mathbb{R}) \mid C(\tau;B)g(x) \in C^{(1)}(R, C(\mathbb{R}))\},$$

т.е. подмножество $C_1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ состоит из тех функций из $C(\mathbb{R})$, для которых функция $C(\tau;B)g(x) : \mathbb{R} \to C(\mathbb{R})$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной τ. Очевидно, что $D(B) \subset C_1(\mathbb{R})$.

Из соотношений (17) и (18) выводим оценку нормы синус оператор-функции:

$$\|S(t;B)\| \leqslant t + \frac{t}{2k_1^2}\mathrm{ch}(k_1 t) = h_2(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{19}$$

Задача Коши (14), (15) равномерно корректна (см. [7, § 1.4]) только тогда, когда оператор B является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau;B)$, $\tau \in \mathbb{R}$, при этом классическое решение абстрактной задачи Коши (14), (15) даётся формулой

$$W(t) = C(t;B)W_0 + S(t;B)W_1, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

для любых $W_0 \in D(B)$ и $W_1 \in C_1(\mathbb{R})$.

Теперь, производя обратные замены (8) и (12), находим решение задачи Коши для уравнения (6):

$$u(t,x) = U(-\frac{t}{2}; A_1)\Big\{C(t;B)\varphi(x) + S(t;B)\Big[\psi(x) + \frac{1}{2}A_1\varphi(x)\Big]\Big\}. \tag{20}$$

Таким образом, имеет место утверждение:

Лемма 1. *Пусть начальные функции подчинены условиям* $\varphi(x) \in C^{(4)}(\mathbb{R})$ *и* $\psi(x) \in C^{(3)}(\mathbb{R})$ *, тогда задача Коши для линейного уравнения* (6) *равномерно корректна, классическое решение даётся формулой* (20) *и для него в пространстве* $C(\mathbb{R})$ *при* $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *справедлива оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)| \leqslant e^{|\alpha-1|t}\Big[h_1(t)\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)| + h_2(t)\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi(x)| + |\alpha-1|\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)| + \frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi'(x)|\Big)\Big]$$

в которой функции $h_1(t)$ *и* $h_2(t)$ *из* (17) *и* (19) *соответственно.*

Замечание 1. Классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (14), (15) принадлежит $C^{(2)}(\overline{R}_+, C(\mathbb{R}))$ и для него $BW(t) \in C(\overline{R}_+, C(\mathbb{R}))$, поэтому решение $u(t,x) = (I - \partial_x^2)^{-1}U(-t/2; A_1)w(t,x)$ уравнения (6) принадлежит $C^{2,4}(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R})$.

3. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ (4)

Подействуем на обе части уравнения (4) линейным ограниченным оператором $(I - \partial_x^2)^{-1}$, тогда получим эквивалентное (4) нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$v_{tt} + A_1 v_t + A_2 v = [(I - \partial_x^2)^{-1} - I] f(v), \tag{21}$$

в котором операторные коэффициенты A_1 и A_2 такие же, как и в уравнении (9).

Уравнение (21) в результате замены $v(t,x) = U(-t/2; A_1) w(t,x)$ примет вид

$$U(-t/2; A_1)[w_{tt}(t,x) - Bw(t,x)] = \left[\left(I - \partial_x^2\right)^{-1} - I\right] f(U(-t/2; A_1) w(t,x)),$$

но $U(t; A_1)$ — группа и, значит, действуя на обе части последнего уравнения оператором $U(t/2; A_1) = U^{-1}(-t/2; A_1)$, получим в пространстве $C(\mathbb{R})$ абстрактное полулинейное уравнение

$$W_{tt} = BW + F(t, U(-t/2; A_1) W), \tag{22}$$

здесь оператор B такой же, как и в уравнении (13), а $F(t,\cdot)$ — нелинейный оператор

$$F(t, g(x)) = [(I - \partial_x^2)^{-1} - I] U(t/2; A_1) f(g(x)),$$

где $f(\cdot)$ — оператор суперпозиции: $f(g) = f(g(x))$, $g(x) \in C(\mathbb{R})$.

Используя неравенство (10), выводим оценку нормы в пространстве $C[R]$ оператора F при $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\|F(t,g)\|_C \leqslant 2e^{|\alpha-1|t} |f(\|g\|_C)|. \tag{23}$$

Для уравнения (22) рассмотрим абстрактную задачу Коши записав начальные условия в виде

$$W|_{t=0} = W_0', \quad W_t|_{t=0} = W_1', \tag{24}$$

где $W_0' = (w_0(x))'$ и $W_1' = (w_1(x))'$ — элементы пространства $C(\mathbb{R})$.

Из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции $f(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций (см. [8, гл. 5, § 20.1]) и ограниченности линейных операторов $(I - \partial_x^2)^{-1}$ и $U(\tau/2; A_1)$, $\tau \in \mathbb{R}$, следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(t,\cdot)$ в пространстве $C(\mathbb{R})$ и, значит, найдётся промежуток $[0, t_0)$, в котором абстрактная задача Коши (22), (24) для любых $W_0' \in D(B)$ и $W_1' \in C_1(\mathbb{R})$ имеет (см. [9, § 3]) единственное классическое решение $W = W(t)$, которое удовлетворяет абстрактному интегральному уравнению

$$W(t) = C(t; B) W_0' + S(t; B) W_1' + \int_0^t S(t-s; B) F(s, U(-s/2; A_1) W(s))\, ds. \tag{25}$$

Оценивая норму левой части равенства (25) через норму правой и применяя неравенства (17), (19) и (23), имеем

$$\|W(t)\|_C \leqslant h_1(t)\|W_0'\|_C + h_2(t)\|W_1'\|_C + 2\int_0^t h_2(t-s) e^{|\alpha-1|s} |f(\|U(-s/2; A_1) W(s)\|_C)|\, ds. \tag{26}$$

Из неравенства (26), используя оценки (10), (3) и

$$|f(\|U(-s/2; A_1) W(s)\|_C)| \leqslant |f(e^{|\alpha-1|s}\|W(s)\|_C)| \leqslant \chi(e^{|\alpha-1|s}) |f(\|W(s)\|_C)|,$$

обозначая
$$h_3(t) = h_1(t)\|W_0'\|_C + h_2(t)\|W_1'\|_C \quad \text{и} \quad h_4(t) = 2e^{|\alpha-1|t}\chi(e^{|\alpha-1|t})$$
и применяя очевидное неравенство $h_2(t-s) \leqslant h_2(t)$, $s \in [0,t]$, получаем интегральное неравенство
$$\|W(t)\|_C \leqslant h_3(t) + h_2(t)\int_0^t h_4(s)|f(\|W(s)\|_C)|ds.$$
Откуда выводим [6] оценку нормы классического решения $W(t)$ абстрактной задачи Коши (22), (24) на отрезке $t \in [0,t_1]$:
$$\|W(t)\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |w(t,x)| \ \leqslant h_3(t)\Omega^{-1}(\Omega(1) + h_2(t)h_5(t)) = h_6(t),$$
в которой мажоранта $h_6(t)$ определяется функциями
$$\Omega(\xi) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \frac{ds}{|f(s)|}, \quad \xi \geqslant \xi_0 > 0, \quad h_5(t) = \int\limits_0^t h_4(s)\frac{\chi(h_3(s))}{h_3(s)}\,ds,$$
здесь $\Omega^{-1}(\cdot)$ — функция обратная к $\Omega(\cdot)$, а временной отрезок $[0,t_1] \subset [0,t_0)$ определяется теми значениями t, для которых значения функции $\Omega(1) + h_2(t)h_5(t)$ принадлежат области существования обратной функции $\Omega^{-1}(\cdot)$: $\Omega(1) + h_2(t)h_5(t) \in \mathrm{Dom}(\Omega^{-1})$.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть нелинейность уравнения* (1) *— функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяет условию* (3), *а начальные функции* $\varphi(x) \in C^{(5)}(\mathbb{R})$ *и* $\psi(x) \in C^{(4)}(\mathbb{R})$, *тогда на отрезке* $t \in [0,t_1]$ *существует единственное классическое решение* $v(t,x) = u_x(t,x) = U(-t/2;A_1)w(t,x)$, *задачи Коши* (4), (5), *для которого справедлива оценка нормы*
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|v(t,x)| \ = \sup_{x\in\mathbb{R}}|u_x(t,x)| \ \leqslant e^{|\alpha-1|t}\sup_{x\in\mathbb{R}}|w(t,x)| \ \leqslant e^{|\alpha-1|t}h_6(t) = h_7(t). \tag{27}$$

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ (1) И (4)

Предположим, что классическое решение $v = v(t,x) = u_x(t,x)$ вспомогательной задачи Коши (4), (5), его частные производные $v_{tt}(t,x)$, $v_{ttxx}(t,x)$, $v_{txxx}(t,x)$, $v_{xxxx}(t,x)$, $v_{tx}(t,x)$ $v_{xx}(t,x)$ и функции $v_x^2(t,x)\cdot f''(v(t,x))$ и $v_{xx}(t,x)\cdot f'(v(t,x))$ для всех значений временной переменной $t \in [0,t_1]$ по переменной x принадлежат пересечению пространства $C(\mathbb{R})$ с пространством $L_1(\mathbb{R})$ функций $g(x)$ абсолютно суммируемых на $\mathbb{R}$, т. е. $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx < \infty$. Все эти требования выполнены если на временном отрезке $t \in [0,t_1]$ справедливы условия
$$u_x,\ u_{ttx},\ u_{ttxxx},\ u_{txxxx},\ u_{xxxxx},\ u_{txx},\ u_{xxx},\ u_{xx}^2 f''(u_x),\ u_{xxx}f'(u_x) \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}). \tag{28}$$

Заметим, что из принадлежности $g(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, т. е. из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\,dx < \infty$ и существования пределов $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$ следует (см. [10, гл. 2, § 29.1]), что эти пределы равны нулю: $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$.

Лемма 2. *Из существования локального классического решения* $v = v(t,x)$, $t \in [0,t_1]$, *задачи Коши* (4), (5) *следует существование соответствующего решения*
$$u = u(t,x) = \lim_{x_0\to-\infty}\int\limits_{x_0}^{x} u_s(t,s)\,ds = \int\limits_{-\infty}^{x} v(t,s)\,ds \tag{29}$$
задачи Коши (1), (2) *на том же временном отрезке* $[0,t_1]$, *при выполнении условий* (28) *и предельных соотношений*
$$u_{tt}, u_{ttxx}, u_{txxx}, u_{xxxx}, u_{tx}, u_{xx}, u \to 0 \quad \textit{при} \quad x \to -\infty, \quad t \in [0,t_1]. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть $v = v(t,x) = u_x(t,x)$ — классическое решение уравнения (4), $t \in [0,t_1]$, тогда, используя предельные соотношения (30), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \partial_s^2 f(v(t,s))\,ds = \int\limits_{-\infty}^{x} [u_{ss}^2(t,s)f''(u_s(t,s)) + u_{sss}(t,s)f'(u_s(t,s))]\,ds$$
$$= u_{xx}(t,x)f'(u_x(t,x)) - \lim_{x_0\to-\infty} u_{xx}(t,x_0)f'(u_x(t,x_0)) = u_{xx}(t,x)f'(u_x(t,x)).$$

Теперь, подставляя функцию (29) в уравнение (1) и используя вышеприведённое представление, получаем тождественное равенство на отрезке $[0,t_1]$, откуда следует, что функция (29) является решением уравнения (1). □

5. РАЗРУШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (1), (2)

В дальнейших рассмотрениях предполагается, что классические решение $u = u(t,x)$, $(t,x) \in [0,t_1]\times\mathbb{R}$, задачи Коши (1), (2) принадлежит вместе с частными производными входящими в уравнение (1) пересечению пространства $C[R]$ с пространством $L_2(\mathbb{R})$ функций с интегрируемым квадратом, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2\,dx < \infty$. Все эти требования выполнены если на временном отрезке $t \in [0,t_1]$ справедливы условия

$$\partial_t^n\partial_x^m u(t,x) \in C(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R}), \quad n+m \leqslant 4, \quad n=\overline{0,2}, \quad m=\overline{0,4}, \tag{31}$$

Отметим, что из условий (31) следуют предельные соотношения

$$\lim_{x\to\pm\infty} \partial_t^n\partial_x^m u(t,x) = 0, \quad n+m \leqslant 4, \quad n=\overline{0,2}, \quad m=\overline{0,4}, \quad t\in[0,t_1]. \tag{32}$$

Напомним, что скалярное произведение (φ,ψ) и норма $\|\varphi\|_2$ в $L_2(R)$ определяются формулами

$$(\varphi,\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx, \quad \|\varphi\|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\,dx$$

соответственно.

На временном отрезке $t\in[0,t_1]$ существования классического решения $u = u(t,x)$ задачи Коши (1), (2) введём в рассмотрение функционал

$$y(t) = (u,u) + (u_x,u_x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2)\,dx = \|u\|^2_{W_2^1}, \quad t\in[0,t_1], \tag{33}$$

где $\|u\|^2_{W_2^1}$ — норма в пространстве Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ состоящем из функций из $L_2(\mathbb{R})$ обобщённая производная которых также принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

Применяя к значению производной $y'(t) = 2((u,u_t) + (u_x,u_{tx}))$ функционала (33) неравенство Коши — Буняковского и обозначая через

$$z(t) = (u_t,u_t) + (u_{tx},u_{tx}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{tx}^2)\,dx = \|u_t\|^2_{W_2^1}, \quad t\in[0,t_1], \tag{34}$$

ещё один функционал, связанный с уравнением (1), выводим вспомогательную оценку

$$(y'(t))^2 \leqslant 4y(t)z(t). \tag{35}$$

Найдём достаточные условия разрушения решения задачи Коши (1), (2), понимая под этим условия возникновения разрыва второго рода для функционала $y(t)$ на отрезке $[0,t_2]\subseteq[0,t_1]$, который выбираем так, чтобы на нем выполнялись неравенства $y(t)>0$ и $y'(t)\geqslant 0$ вытекающие из соответствующих начальных условий $y(0)=\|\varphi\|_2^2+\|\varphi'\|_2^2>0$ и $y'(0)/2=(\varphi,\psi)+(\varphi',\psi')>0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (31), *требования леммы* 2 *и теоремы* 1 *и пусть параметры* α, β, γ, *начальные функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и нелинейность* $f(\cdot)$ *обеспечивают выполнение условий*

$$sf(s)\leqslant q_0\Phi(s),\ \text{для всех } s\in\mathbb{R},\ \text{где } \Phi(s)=\int\limits_0^s f(r)\,dr,\quad \text{причём}\quad \Phi(\varphi'(x))\in L_1(\mathbb{R}),$$

$$\|\varphi\|^2_{W_2^1}>0,\quad (\varphi,\psi)+(\varphi',\psi')>0,$$

$$\|\psi\|^2_{W_2^1}+\|\varphi''\|_2^2+\gamma\|\varphi\|_2^2\geqslant\beta\|\varphi'\|_2^2-2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\varphi'(x))\,dx,$$

$$[(\varphi,\psi)+(\varphi',\psi')]^2>\left(\frac{k_6+\alpha}{q_0-\alpha-3}\|\varphi\|^2_{W_2^1}+\frac{q_0E_0}{q_0-\alpha-1}\right)\|\varphi\|^2_{W_2^1},$$

тогда классическое решение задачи Коши (1), (2) *разрушается за время* T_∞, *для которого имеет место оценка сверху:*

$$T_\infty\leqslant\frac{1}{k_7\|\varphi\|^{(q_0-\alpha-3)/2}_{W_2^1}},$$

причём для функционала $y(t)=\|u(t,\cdot)\|^2_{W_2^1}$ *справедлива оценка снизу*

$$y(t)\geqslant\frac{1}{\left(\|\varphi\|^{(3+\alpha-q_0)/2}_{W_2^1}-k_7t\right)^{4/(q_0-\alpha-3)}},$$

и предельное равенство

$$\lim_{t\uparrow T_\infty}y(t)\ =+\infty.$$

Замечание 2. Фигурирующие в формулировке теоремы постоянные q_0, k_j, E_0 определяются в ходе доказательства теоремы и зависят от параметров α, β, γ, начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и нелинейности $f(\cdot)$.

Доказательство. Вычислим производную второго порядка функционала (33) и выразим её значение через функционал (34):

$$\frac{1}{2}y''(t)+(u_{xx},u_{tt})-(u,u_{tt})=z(t).\tag{36}$$

Умножим обе части уравнения (1) на функцию $u=u(t,x)$ и проинтегрируем полученное равенство по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, применяя формулу интегрирования по частям и учитывая предельные соотношения (32), т. е. равенство нулю внеинтегральных слагаемых при $x\to\pm\infty$, получим

$$(u_{xx},u_{tt})-(u,u_{tt})=\|u_{xx}\|_2^2-\beta\|u_x\|_2^2+\gamma\|u\|_2^2+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_xf(u_x)\,dx-(u_{xx},u_{tx})-\alpha(u_x,u_t).\tag{37}$$

Аналогично, умножая обе части уравнения (1) на $u_t = u_t(t,x)$ и обозначая через $\Phi(\cdot)$ – функционал, определяемый нелинейностью $f(\cdot)$ формулой $\Phi(s) = \int\limits_0^s f(r)\,dr$, с учётом равенств

$$(u_{tx}, u_{txx}) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \partial_x(u_{tx}^2)\,dx = \frac{1}{2}u_{tx}^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

$$(u_t, u_{tx}) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \partial_x(u_t^2)\,dx = \frac{1}{2}u_t^2\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 - \beta\|u_x\|_2^2 + \gamma\|u\|_2^2 + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(u_x)\,dx\right) = 0. \tag{38}$$

Введём в рассмотрение ещё один функционал $E(\cdot)$, связанный с уравнением (1):

$$E(t) = z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 - \beta\|u_x\|_2^2 + \gamma\|u\|_2^2 + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(u_x)\,dx.$$

Из равенства (38) следует, что производная функционала $E(t)$ равна нулю, следовательно, $E(t)$ не зависит от времени и поэтому справедливо равенство

$$E(t) = E(0) = E_0, \tag{39}$$

в котором начальное значение E_0 определяется формулой

$$E_0 = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi''\|_2^2 - \beta\|\varphi'\|_2^2 + \gamma\|\varphi\|_2^2 + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\varphi'(x))\,dx$$

и постулируется неотрицательным: $E_0 \geqslant 0$.

Используя представление уравнения (1) в эквивалентном виде

$$u_{tt} = (I - \partial_x^2)^{-1} u_{xx} f'(u_x) - A_1 u_t - A_2 u, \tag{40}$$

которое получено действием на обе части уравнения (1) линейным ограниченным оператором $(I - \partial_x^2)^{-1}$, выведем оценку квадрата нормы частной производной u_{tt}. С этой целью получим вспомогательные оценки. Применяя неравенства (3), (27), $\|u\|_2^2 \leqslant y(t)$ и $\|u_{tx}\|_2^2 \leqslant z(t)$, имеем

$$\|u_{xx}f'(u_x)\|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f'(u_x))^2 u_{xx}^2\,dx$$
$$\leqslant \big(f'\big(\sup_{x\in R}|u_x|\ \big)\big)^2\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant \big(f'\big(h_7(t)\big)\big)^2\|u_{xx}\|_2^2 = h_8^2(t)\|u_{xx}\|_2^2, \quad (*)$$

где $h_8(t) = |f'(h_7(t))|$ – непрерывная функция на отрезке $[0, t_1]$;

$$\|A_1u_t\|_2^2 \leqslant (\|u_{tx}\|_2 + 2|\alpha-1|\|u\|_2)^2 \leqslant 2\big(\|u_{tx}\|_2^2 + 4(\alpha-1)^2\|u\|_2^2\big) \leqslant 2(z(t) + 4(\alpha-1)^2 y(t)); \quad (**)$$

$$\|A_2u\|_2^2 \leqslant (\|u_{xx}\|_2 + (\beta+1)\|u\|_2 + (\beta+\gamma+1)\|u\|_2)^2$$
$$\leqslant 2\big(\|u_{xx}\|_2^2 + (2\beta+\gamma+2)^2\|u\|_2^2\big) \leqslant 2\big(\|u_{xx}\|_2^2 + (2\beta+\gamma+2)^2 y(t)\big). \quad (***)$$

Оценивая нормы обеих частей уравнения (40) и применяя выше полученные вспомогательные оценки (*)–(***), рассмотрим цепочку соотношений

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant \big(\|I-\partial_x^2\|\|u_{xx}f'(u_x)\|_2 + \|A_1u_t\|_2 + \|A_2u\|_2\big)^2$$
$$\leqslant 3\Big(h_8^2(t)\|u_{xx}\|_2^2 + 2(z(t) + 4(\alpha-1)^2 y(t)) + 2\big(\|u_{xx}\|_2^2 + (2\beta+\gamma+2)^2 y(t)\big)\Big)$$
$$= 6z(t) + 6\big(4(\alpha-1)^2 + (2\beta+\gamma+2)^2\big)y(t) + 3\big(2+h_8^2(t)\big)\|u_{xx}\|_2^2.$$

Таким образом получаем оценку

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 6z(t) + k_2 y(t) + k_4\|u_{xx}\|_2^2, \quad t\in[0,t_2], \tag{41}$$

где $k_2 = 6(4(\alpha-1)^2 + (2\beta+\gamma+2)^2)$, $k_3 = \max_{t\in[0,t_1]} h_8^2(t)$ и $k_4 = 3(2+k_3)$.

Предположим, что выполняется условие

$$sf(s) \leqslant q\Phi(s) \quad \text{для любого} \quad s\in\mathbb{R}, \tag{42}$$

где $q>2$ – пока неопределённое достаточно большое положительное число.

Сравнивая равенства (37) и (39) и применяя условие (42), получим неравенство

$$qz(t) + (q-2)\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant qE_0 + (q-2)(\beta\|u_x\|_2^2 - \gamma\|u\|_2^2)$$
$$+ 2(u,u_{tt}) - 2(u_{xx},u_{tx}) - 2\alpha(u_x,u_t) - 2(u_{xx},u_{tt}). \tag{43}$$

Учитывая, что $\|u_x\|_2^2 \leqslant y(t)$ и применяя неравенство (41) и следующие оценки:

$$2(u,u_{tt}) \leqslant \|u\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 6z(t) + (1+k_2)y(t) + k_4\|u_{xx}\|_2^2,$$
$$2(u_{xx},u_{tx}) \leqslant \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 \leqslant z(t) + \|u_{xx}\|_2^2,$$
$$2(u_x,u_t) \leqslant \|u_x\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 \leqslant y(t) + z(t),$$
$$2(u_{xx},u_{tt}) \leqslant \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leqslant 6z(t) + k_2y(t) + (1+k_4)\|u_{xx}\|_2^2,$$

увеличим правую часть неравенства (43):

$$(q-\alpha-13)z(t) + (q-2k_4-4)\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant qE_0 + [(q-2)(\beta+\gamma) + 2k_2 + \alpha + 1]y(t). \tag{44}$$

Полагая одновременное выполнение неравенств $q-\alpha-13 \geqslant 1$ и $q-2k_4-4 \geqslant 1$, а для этого достаточно, чтобы параметр q удовлетворял условию

$$q = q_0 \geqslant \max\{\alpha+14; 6k_3+17\}, \tag{45}$$

и уменьшая левую часть неравенства (44), получим неравенство

$$z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 \leqslant qE_0 + k_5 y(t), \tag{46}$$

где $k_5 = (q-2)(\beta+\gamma) + 2k_2 + \alpha + 1$.

Из неравенства (46) выводим оценки

$$\|u_{xx}\|_2^2,\ z(t) \leqslant qE_0 + k_5 y(t), \quad t\in[0,t_2]. \tag{47}$$

Подставляя значение левой части равенства (37) в формулу (36), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x f(u_x)\,dx = z(t) - \frac{1}{2}y''(t) + \beta\|u_x\|_2^2 - \gamma\|u\|_2^2 - \|u_{xx}\|_2^2 + (u_{xx}, u_{tx}) + \alpha(u_x, u_t). \tag{48}$$

Сравнивая равенство (48) с соотношением, вытекающим из равенства (39):

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_x)\,dx = E_0 - z(t) - \|u_{xx}\|_2^2 + \beta\|u_x\|_2^2 - \gamma\|u\|_2^2,$$

и учитывая неравенство (42), в котором полагаем $q = q_0$, получим

$$(q_0+2)z(t) + (q_0-2)\|u_{xx}\|_2^2 \leqslant q_0E_0 + y''(t) + (q_0-2)\big(\beta\|u_x\|_2^2 - \gamma\|u\|_2^2\big) + \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 + \alpha\big(\|u_t\|_2^2 + \|u_x\|_2^2\big). \tag{49}$$

Учитывая то, что $q_0 > 3$, и применяя оценки (47), уменьшим левую и увеличим правую части неравенства (49), в результате получим

$$y''(t) + (k_6+\alpha)y(t) + q_0E_0 \geqslant (q_0-\alpha+1)z(t), \tag{50}$$

где $k_6 = (q_0-2)\max\{\beta,\gamma\}$.

Теперь, используя оценку (35), уменьшим правую часть неравенства (50), в итоге получим

$$y(t)y''(t) - \frac{q_0-\alpha+1}{4}\big(y'(t)\big)^2 + q_0E_0y(t) + (k_6+\alpha)y^2(t) \geqslant 0, \quad t\in[0,t_2]. \tag{51}$$

В силу выбора (45) значения параметра q_0 коэффициент в неравенстве (51) при квадрате производной функционала $y(t)$ будет больше единицы.

Сравнивая неравенство (51) с одним из основных обыкновенных дифференциальных неравенств, подробно исследованных в монографии [11, Приложение, § 2, (2.38)] заключаем, что если выполнены начальные условия

$$\big(y'(0)\big)^2 > 4\left(\frac{k_6+\alpha}{q_0-\alpha-3}y(0) + \frac{q_0E_0}{q_0-\alpha-1}\right)y(0),$$

тогда время T_∞ существования решения задачи Коши (1), (2) не может быть сколь угодно большим, а именно имеет место оценка сверху:

$$T_\infty \leqslant k_7^{-1}\big(y(0)\big)^{(3+\alpha-q_0)/4},$$

где

$$k_7^2 = \frac{(q_0-\alpha-3)^2}{16}\big(y(0)\big)^{-(q_0-\alpha+1)/2}\Big(\big(y'(0)\big)^2 - \frac{4(k_6+\alpha)}{q_0-\alpha-3}y^2(0) - \frac{4q_0E_0}{q_0-\alpha-1}y(0)\Big),$$

причём для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу:

$$y(t) \geqslant \Big(\big(y(0)\big)^{(3+\alpha-q_0)/4} - k_7t\Big)^{4/(3+\alpha-q_0)}. \tag{52}$$

Из оценки (52) следует, что классическое решение задачи Коши (1), (2) разрушается за конечное время: $\lim_{t\uparrow T_\infty} y(t) = +\infty$. □

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Академии наук Чеченской Республики и Чеченского государственного педагогического университета. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Светлицкий В.А.* Строительная механика машин. Механика стержней. Т. 2. Динамика. М.: Физматлит, 2009.
2. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
4. *Демиденко Г.В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
5. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Dannan F.M.* Integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1985. V. 108, N 1. P. 151–164.
7. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия Матем. анализ. Т. 28. М.: ВИНИТИ, 1990.
8. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.,Пустыльник Е.И.,Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций М.: Наука, 1966.
9. *Travis C.C., Webb G.F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.
10. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 1. М.: Дрофа, 2006.
11. *Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В.* Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2014.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.955:517.958

BLOW UP OF THE SOLUTION TO THE VIBRATION EQUATION OF A ROD WITH A MOVING LOAD

© 2026 Kh. G. Umarov[1,2]

[1] *Academy of Sciences of the Chechen Republic, V. Aliev st., 19 a, Grozny 364043, Russia,*
[2] *Chechen State Pedagogical University, S. Kishieva st., 33, Grozny 364068 , Russia*

E-mail: umarov50@mail.ru

Received 25.09.2025, revised 09.04.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. For a nonlinear partial differential equation of Sobolev type (equations not solved with respect to the highest time derivative) generalizing the equation of rod oscillations taking into account a moving load, we study the Cauchy problem in the space of continuous functions defined on the entire number axis and for which limits at infinity exist. An explicit classical solution of the corresponding linear homogeneous equation is found and estimates of the norms of the operator-valued functions representing this solution are obtained. An estimate of the norm of a solution to the Cauchy problem for a linear equation is obtained. The time interval of existence and uniqueness of the classical solution to the auxiliary Cauchy problem related to the original one is established and an estimate of the norm of this local solution is given. Conditions are found that ensure a connection between the classical solutions of the original and auxiliary Cauchy problems on a certain time interval. Conditions for the blow up of the classical solution to the Cauchy problem on a finite time interval are considered.

Keywords: vibrations of a rod taking into account a moving load, nonlinear Sobolev-type equation, blow up of the solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.108

REFERENCES

1. Svetlickij V.A. Stroitel'naya mehanika mashin. Mehanika sterzhnej. V. 2. Dinamika [Structural mechanics of machines. Mechanics of rods. Vol. 2. Dynamics]. Moscow: FIZMATLIT, 2009 (in Russian).
2. Demidenko G.V., Uspenskij S.V. Uravneniya i sistemy, ne razreshyonnye otnositel'no starshej proizvodnoj [Equations and systems not resolved with respect to the highest derivative]. Novosibirsk: Nauch. kniga, 1998 (in Russian).
3. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. Linejnye i nelinejnye uravneniya sobolevskogo tipa [Linear and nonlinear equations of Sobolev type]. Moscow: Fizmatlit, 2007 (in Russian).
4. Demidenko G.V. Usloviya razreshimosti zadachi Koshi dlya psevdogiperbolicheskih uravnenij [Solvability conditions for the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations]. *Sib. Matem. Zhurn.* [Sib. Math. J.], 2015, Vol. 56, No. 6, pp. 1289–1303 (in Russian).
5. Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators. Part I: General Theory. N. Y.: Interscience, 1958.
6. Dannan F.M. Integral inequalities of Gronwall–Bellman–Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1985, Vol. 108, No. 1, pp. 151–164.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2026, Vol. 20, No. 1.

7. Vasil'ev V.V., Krejn S.G., Piskarev S.I. Polugruppy operatorov, kosinus operator-funkcii i linejnye differencial'nye uravneniya [Operator Semigroups, Cosine Operator Functions, and Linear Differential Equations]. *Itogi Nauki i Tehniki. Seriya Matem. Analiz. VINITI* [Results of Science and Technology. Series Mat. Analysis. VINITI], 1990, Vol. 28 (in Russian).

8. Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P.,Pustyl'nik E.I.,Sobolevskij P.E. Integral'nye operatory v prostranstvah summiruemyh funkcij [Integral Operators in Spaces of Summable Functions]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).

9. Travis C.C., Webb G.F. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1978, Vol. 32, pp. 75–96.

10. Kudryavcev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. V. 1. [The course of mathematical analysis.]. Moscow: Drofa, 2006 (in Russian).

11. Korpusov M.O., Sveshnikov A.G., Yushkov E.V. Metody teorii razrusheniya reshenij nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki [Methods of blow-up theory of solutions of nonlinear equations of mathematical physics]. Moscow: MGU Press, 2014 (in Russian).