

УДК 532.5

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВИХРЯ В ВЯЗКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ В
КАНАЛЕ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ© 2023 С. А. Васюткин^а, А. П. Чупахин^б*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*E-mails: ^аs.vasyutkin@g.nsu.ru, ^бalexander190513@gmail.comПоступила в редакцию 21.04.2023 г.; после доработки 13.08.2023 г.;
принята к публикации 01.11.2023 г.

Рассматриваются уравнения Навье—Стокса для плоского установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости в ортогональной системе координат, в которой линии тока жидкости совпадают с координатными линиями одного из семейств ортогональной системы координат. В этой системе координат вектор скорости имеет только касательную компоненту и система трёх уравнений Навье—Стокса является переопределённой системой для двух функций — касательной компоненты скорости и давления. В работе система приведена в инволюцию, получены условия совместности, которые являются уравнениями для вихря скорости в этой системе координат. В коэффициенты этих уравнений входят кривизны координатных линий и производные от них до второго порядка. Полученные уравнения существенно сложнее уравнений для вихря в канале простой геометрии.

Ключевые слова: уравнения Навье—Стокса, криволинейная система координат, линии тока, кривизна линии тока, условия совместности, уравнение для вихря.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.401

Описание движения вязкой несжимаемой жидкости в каналах сложной геометрии является нетривиальной задачей фундаментальной математической гидродинамики, имеющей многочисленные приложения при описании природных явлений [1–3]. Кривизна канала существенно перестраивает течение, усложняя его топологию, приводя к возникновению вихрей и вторичных течений. На сегодняшний день, единственным безразмерным параметром, определяющим характер медленных течений в слабо изогнутых каналах, является число Дина [2]. Уравнения Навье—Стокса, записанные в специальных системах координат, отвечающих геометрии канала, имеют сложный вид и трудно поддаются качественному анализу [3, 4]. Многочисленные вычислительные работы не могут в полной мере отразить влияние геометрии канала на гидродинамику потока в нём. Ряд работ посвящён формулировке и исследованию начально-краевых задач для уравнений Навье—Стокса на многообразиях и в каналах сложной геометрии, например [5, 6]. В этих работах исследуется влияние кривизн границы на топологию и качественные свойства решения. Задаче протекания для уравнения Навье—Стокса посвящено много работ, отметим [7], в которой дан обзор результатов по проблеме Ж. Лерэ, а также близкую к рассматриваемым нами вопросам [8], в которой, в частности, обсуждается влияние вихря, порождённого сложной геометрией стенок канала, на краевые условия задачи. Важную роль при отыскании частных точных решений играют теоретико-групповые методы Ли—Овсянникова [9] и исследование уравнений в лагранжевых координатах [10], которое позволяет строить широкие классы точных решений.

В работе рассматриваются уравнения Навье—Стокса для плоского установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости в ортогональной системе координат [1], в которой ли-

нии тока жидкости совпадают с координатными линиями одного из семейств ортогональной системы координат. Поскольку в этой системе координат вектор скорости имеет лишь одну компоненту, касательную вдоль этих линий, то система трёх уравнений Навье—Стокса является переопределённой системой для двух функций — касательной компоненты скорости и давления. Возникает задача получения полной системы дифференциальных следствий, условий совместности [11]. Эта система приведена в работе в инволюцию, получены условия совместности, которые являются уравнениями для вихря скорости в этой системе координат. В коэффициенты уравнений входят кривизны координатных линий и производные от них до второго порядка. Полученные уравнения существенно сложнее уравнений для вихря в канале простой геометрии [1].

Задача обтекания вязким потоком плоского профиля сложной геометрии, возникает при исследовании скольжения лыжи по поверхности снега [12] и связана с гидродинамикой вблизи супергидрофобных поверхностей [13]. Проектирование оптимальных форм, обтекаемых потоком жидкости, с минимальным (максимальным) лобовым сопротивлением можно рассматривать как задачу оптимизации формы для уравнений гидродинамики [14].

1. СИСТЕМА КООРДИНАТ, СВЯЗАННАЯ С ЛИНИЯМИ ТОКА

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в плоском случае, используя для этого натуральные координаты на плоскости [1]. Пусть поле течения покрыто ортогональной сеткой, образованной семейством линий тока C и ортогональным им семейством кривых N . Единичный касательный вектор на кривой C , направленный в сторону увеличения длины дуги, обозначим через $\mathbf{t}$, элемент длины дуги через ds и кривизну кривой C через κ_s . Для ортогональной кривой N соответствующие величины обозначим dn , $\mathbf{n}$, κ_n . Примем за стандартное такое расположение кривых C и N , при котором вектор $\mathbf{n}$ получается из вектора $\mathbf{t}$ поворотом на прямой угол против часовой стрелки. Запишем уравнения в естественных координатах, вводя в каждой точке угол θ , образуемый вектором $\mathbf{t}$ с осью Ox прямоугольной системы координат Oxy . В этой системе координат

$$\kappa_s = \frac{\partial \theta}{\partial s}, \quad \kappa_n = \frac{\partial \theta}{\partial n}, \quad (1)$$

кроме того

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta ds, & dy &= \sin \theta ds, \\ dx &= -\sin \theta dn, & dy &= \cos \theta dn. \end{aligned} \quad (2)$$

Такая система координат для записи уравнений гидродинамики используется в [1]. Для полноты изложения приведём подробные выкладки вывода уравнений для линии тока.

Уравнения репера Френе—Серре в этих координатах имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \kappa_s \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial n} = -\kappa_n \mathbf{t}, \quad (3)$$

причём $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle = 1$, $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве. Дифференцируя формулу $\langle \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle = 0$ по s и n получим аналогичные формулам (3) выражения для репера Френе—Серре связанного с кривой N :

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} = \kappa_n \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = -\kappa_s \mathbf{t}. \quad (4)$$

Условия совместности уравнений (3) и (4)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{t}}{\partial s \partial n} = \frac{\partial^2 \mathbf{t}}{\partial n \partial s}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial n \partial s} = \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial s \partial n}$$

выполнены в силу уравнений (1).

Замечание. Базис (1), (2) определяет на плоскости линейную связность, которая не согласована с метрикой [15]. Чтобы убедиться в этом проверим несимметричность объектов связности Γ_{ij}^k исходя из уравнений (3) и (4). Сопоставим вектору $\mathbf{t}$ и координатной линии S индекс "1" а вектору $\mathbf{n}$ и линии N — "2" так что уравнения (3) и (4) выражают производные координатных векторов:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Имеем тогда следующие выражения для объектов связности:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= \kappa_s, & \Gamma_{21}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= \kappa_n, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\kappa_s, & \Gamma_{12}^2 &= 0, & \Gamma_{21}^2 &= -\kappa_n, & \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом $\Gamma_{12}^1 \neq \Gamma_{21}^1$ и $\Gamma_{12}^2 \neq \Gamma_{21}^2$. Эта связность не согласована с метрикой, но по такой связности можно строить ковариантные производные [16–18].

В данной системе координат вектор скорости $\vec{q}$ имеет представление

$$\vec{q} = q_s \mathbf{t} + q_n \mathbf{n}.$$

Для удобства вычислений введём, следуя [1], дифференциальные операторы

$$\nabla = \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}, \quad \langle \vec{q}, \nabla \rangle = q_s \frac{\partial}{\partial s} + q_n \frac{\partial}{\partial n}.$$

Уравнения Навье—Стокса установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости имеют тогда вид

$$\langle \vec{q}, \nabla \rangle \vec{q} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nu \Delta \vec{q}, \quad \langle \nabla, \vec{q} \rangle = 0, \quad (5)$$

где через $\rho = \text{const}$ обозначена плотность жидкости, $\nu = \text{const}$ — кинематическая вязкость.

Естественные координаты (1), (2) используется в гидродинамике не слишком часто. В последнее время они используются при анализе движущихся кривых [16–19], где их формализм был разработан достаточно подробно. Для двумерных уравнений их применение представляется более оправданным ввиду наглядного геометрического смысла координатных линии, по сравнению с ортогональными криволинейными координатами Ламе [3]. В работе [19] исследованы условия гладкости и регулярности предлагаемой системы координат: получены условия не самопересечения координатных линий и построено отображение, преобразующее криволинейный четырёхугольник, порождённый этими линиями, в прямоугольник в декартовой системе координат. Тем самым определена область, в которой определена данная система координат.

Далее будет дан краткий вывод уравнений Навье—Стокса исходя из уравнений (5) в координатах (1), (2).

2. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА

Линия тока в установившемся течении жидкости характеризуется тем, что направление касательной линии к ней в каждой точке совпадает с направлением скорости частицы жидкости в этой точке, иными словами частица движется вдоль линии тока [1, 3]. Выбирая кривые C в качестве линии тока получаем что скорость жидкости имеет только одну компоненту $q = q_s$, при этом $q_n = 0$, так что

$$\vec{q} = q \mathbf{t}. \quad (6)$$

Получим явный вид уравнений (5) в этом случае. Уравнение неразрывности приводится к виду

$$\begin{aligned}\langle \nabla, \vec{q} \rangle &= \left\langle \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}, q \mathbf{t} \right\rangle = \left\langle \mathbf{t} \frac{\partial q}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial q}{\partial n}, \mathbf{t} \right\rangle + q \left(\left\langle \mathbf{t}, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} \right\rangle + \left\langle \mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} \right\rangle \right) = \\ &= \frac{\partial q}{\partial s} + q (\langle \mathbf{t}, \kappa_s \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{n}, \kappa_n \mathbf{n} \rangle) = \frac{\partial q}{\partial s} + \kappa_n q = 0.\end{aligned}$$

Левая часть уравнения импульсов в (5) вычисляется аналогичным образом:

$$\begin{aligned}\langle \vec{q}, \nabla \rangle \vec{q} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \langle q \mathbf{t}, \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \rangle q \mathbf{t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = q \frac{\partial q}{\partial s} \mathbf{t} + q^2 \kappa_s \mathbf{n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \mathbf{t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \mathbf{n} = \\ &= \left(q \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right) \mathbf{t} + \left(q^2 \kappa_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \mathbf{n}.\end{aligned}\quad (7)$$

Более громоздким процессом является вычисление лапласиана Δ от вектора скорости $\vec{q}$. Используем формулу

$$\Delta = \langle \nabla, \nabla \rangle = \left\langle \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n}, \mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \right\rangle = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \kappa_s \frac{\partial}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial}{\partial s}.$$

Применим оператор Δ к вектору скорости $\vec{q}$:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{q} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial n^2} - \kappa_s \frac{\partial}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial}{\partial s} \right) q \mathbf{t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial q}{\partial s} \mathbf{t} + q \kappa_s \mathbf{n} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial q}{\partial n} \mathbf{t} + q \kappa_n \mathbf{n} \right) - \kappa_s \left(\frac{\partial q}{\partial n} \mathbf{t} + q \kappa_n \mathbf{n} \right) + \kappa_n \left(\frac{\partial q}{\partial s} \mathbf{t} + q \kappa_s \mathbf{n} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} \mathbf{t} + 2 \frac{\partial q}{\partial s} \kappa_s \mathbf{n} + q \frac{\partial \kappa_s}{\partial s} \mathbf{n} - q \kappa_s^2 \mathbf{t} + \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} \mathbf{t} + 2 \frac{\partial q}{\partial n} \kappa_n \mathbf{n} + q \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \mathbf{n} - q \kappa_n^2 \mathbf{t} - \kappa_s \frac{\partial q}{\partial n} \mathbf{t} + \kappa_n \frac{\partial q}{\partial s} \mathbf{t} = \\ &= \left[\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} - \kappa_s \frac{\partial q}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial q}{\partial s} - q(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) \right] \mathbf{t} + \left[2 \kappa_s \frac{\partial q}{\partial s} + 2 \kappa_n \frac{\partial q}{\partial n} + q \left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) \right] \mathbf{n}.\end{aligned}\quad (8)$$

Собирая вместе полученные представления (7) и (8), получаем покомпонентную запись уравнений линий тока для уравнений Навье—Стокса (5):

Теорема 1. Уравнения Навье—Стокса (5) в координатах (1), (2) при условии (6) имеют вид

$$q \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \nu \left[\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} - \kappa_s \frac{\partial q}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial q}{\partial s} - q(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) \right], \quad (9)$$

$$q^2 \kappa_s + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \nu \left[2 \kappa_s \frac{\partial q}{\partial s} + 2 \kappa_n \frac{\partial q}{\partial n} + q \left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \kappa_n q = 0. \quad (11)$$

Вычислим представление для вихря $\vec{\omega}$ скорости $\vec{q}$ (6):

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \nabla \times \vec{q} = \left(\mathbf{t} \frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \times (q \mathbf{t}) = \frac{\partial q}{\partial s} \mathbf{t} \times \mathbf{t} + q \kappa_s \mathbf{t} \times \mathbf{n} + \frac{\partial q}{\partial n} \mathbf{n} \times \mathbf{t} + q \kappa_n \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \\ &= \left(q \kappa_s - \frac{\partial q}{\partial n} \right) \mathbf{t} \times \mathbf{n}.\end{aligned}$$

Вектор вихря $\vec{\omega}$ лежит в плоскости ортогональной координатной плоскости Oxy и ортогонален векторам $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$: $\langle \vec{\omega}, \mathbf{t} \rangle = \langle \vec{\omega}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Обозначим через ω единственную ненулевую координату вектора вихря

$$\omega = \left(q\kappa_s - \frac{\partial q}{\partial n} \right). \quad (12)$$

Везде далее кривизны линии тока и ортогональной кривой κ_s , κ_n предполагаются заданными гладкими функциями.

Система трёх уравнений (9)–(11) для двух функций p и q является переопределённой, поскольку содержит больше уравнений, чем искомым функций. Дополняя её уравнением (12) мы получаем переопределённую систему четырёх уравнений для трёх функций p , q и ω . Эта система является активной и порождает условия совместности [11]. Нашей целью является выписывание этих условий совместности, иными словами приведение системы (9)–(11) в инволюцию. Подобные условия для уравнения Навье—Стокса в стандартной системе координат являются уравнениями для вихря [3]. Течение жидкости в более сложной геометрической конфигурации порождает и более сложные условия совместности, являющиеся также уравнениями для вихря в этом случае.

3. УСЛОВИЯ СОВМЕСТИСТИ

Первым этапом приведения системы (9)–(12) в инволюцию является вывод условий совместности уравнений (11), (12). Уравнение неразрывности (11) и определение вихря (12) даст представление первых производных функции q через саму функцию q и вихрь ω :

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -\kappa_n q, \quad \frac{\partial q}{\partial n} = \kappa_s q - \omega. \quad (13)$$

Систему (13) можно рассматривать как переопределённую относительно функции $q = q(s, n)$, поскольку она задаёт значения её первых производных $\partial q / \partial s, \partial q / \partial n$. При такой трактовке условия совместности, т. е. условия симметричности смешанной производной $\partial^2 q / \partial s \partial n$, будут выражаться в терминах правых частей этой системы, т. е. в терминах ω и производных величины вихря. Такой подход является стандартным при исследовании совместности переопределённых систем. В нашем случае он оправдан тем, что и финальные условия совместности мы получаем в терминах только величины завихренности ω и производных от неё. Так система (13) является переопределённой и порождает условия совместности, являющиеся условием симметричности смешанной производной $\partial^2 q / \partial s \partial n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q}{\partial n \partial s} &= -\kappa_n \frac{\partial q}{\partial n} - \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} q = -\kappa_n (\kappa_s q - \omega) - \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} q = - \left(\frac{\partial \kappa_n}{\partial n} + \kappa_s \kappa_n \right) q + \kappa_n \omega, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial s \partial n} &= \frac{\partial}{\partial s} (\kappa_s q - \omega) = \kappa_s \frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_s}{\partial s} q - \frac{\partial \omega}{\partial s} = -\kappa_s \kappa_n q + \frac{\partial \kappa_s}{\partial s} q - \frac{\partial \omega}{\partial s}. \end{aligned}$$

Приравнивая правые части последних уравнений, получаем условия совместности системы (13) в терминах функций q , ω и производной $\partial \omega / \partial s$:

$$q \left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial s} + \kappa_n \omega. \quad (14)$$

При условии

$$\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} = \Delta \theta \neq 0 \quad (15)$$

из уравнения (14) можно выразить скорость q :

$$q = \frac{1}{\Delta \theta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} \omega \right). \quad (16)$$

В (15), (16) используются формулы (1) для κ_s и κ_n . Тем самым доказана

Лемма 1. *Условием совместности переопределённой системы (13) в терминах величины ω является уравнение (14).*

Система (13) в совокупности со вторым уравнением импульсов (10) даёт условия представления величины q через ω и $\partial p/\partial n$. Подставим выражения (13) для производных в уравнение (10), после некоторых преобразований получаем уравнение

$$\kappa_s q^2 - \nu \left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) q + 2\nu \kappa_n \omega + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (17)$$

Из (17) при условии $\kappa_s \neq 0$ следует

Лемма 2. *Решение уравнений Навье—Стокса (9)–(11) существует при условии*

$$(\nu \Delta \theta)^2 - 4 \frac{\partial \theta}{\partial s} \left(2\nu \frac{\partial \theta}{\partial n} \omega + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \geq 0. \quad (18)$$

Доказательство. Условие (18) есть условие неотрицательности дискриминанта уравнения (17), как квадратного уравнения относительно величины q . Оно является условием, связывающим геометрию течения с физическими величинами — вихрем ω и производной давления по нормали $\partial p/\partial n$. $\square$

Следующим этапом приведения системы (9)–(12) в инволюцию является вычисление смешанных производных $\partial^2 p/\partial s \partial n$ и $\partial^2 p/\partial n \partial s$ из уравнений (9) и (10), подстановка в полученные выражения всех производных $\partial q/\partial s$ и $\partial q/\partial n$ из системы (13). При этом необходимо вычислить через q , ω производные от вихря и производные второго порядка скорости $\partial^2 q/\partial s \partial n$, $\partial^2 q/\partial n \partial s$. Получим выражения для вторых производных функции q из системы (13). Имеем

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = -\frac{\partial \kappa_n}{\partial s} q - \kappa_n \frac{\partial q}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} = \frac{\partial \kappa_s}{\partial n} q + \kappa_s \frac{\partial q}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n}.$$

Подставляем в эти формулы выражения (13) для первых производных, получим

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = \left(\kappa_n^2 - \frac{\partial \kappa_n}{\partial s} \right) q, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} = \left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial n} + \kappa_s^2 \right) q - \kappa_s \omega - \frac{\partial \omega}{\partial n}. \quad (19)$$

После подстановки (13) и (19) в (9) и (10) получаем представление для производных давления в терминах только функции q , ω и $\partial \omega/\partial n$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \kappa_n q^2 - \nu \left[\frac{\partial \omega}{\partial n} + (\kappa_s^2 + \kappa_n^2) q \right], \quad (20)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = -\kappa_s q^2 + \nu \left[\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) q - 2\kappa_n \omega \right]. \quad (21)$$

Вычисляя смешанные производные от p из уравнений (20) и (21), подставляя в полученные выражения представления (13) и (19) для первых и вторых производных функции q , получим выражения:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial n} = 2q(\kappa_s q - \omega)\kappa_n + q^2 \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} - \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + (\kappa_s q - \omega)(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) + 2q \left(\kappa_s \frac{\partial \kappa_s}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) \right],$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial n \partial s} = 2q^2 \kappa_n \kappa_s - q^2 \frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} - \frac{\partial \kappa_n}{\partial s} \omega + \kappa_n \frac{\partial \omega}{\partial s} \right],$$

Приравнивая правые части этих уравнений и упрощая полученное выражение, приходим ко второму условию совместности

$$\begin{aligned} \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \kappa_n \frac{\partial \omega}{\partial s} + (\kappa_s q - \omega)(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) - \frac{\partial \kappa_n}{\partial s} \omega + 2q \left(\kappa_s \frac{\partial \kappa_s}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) \right] + \\ + 2q\omega\kappa_n - q^2 \left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial s} \right) = 0. \quad (22) \end{aligned}$$

Таким образом, условиями совместности уравнений (9)–(11) являются два уравнения (14) и (22). При условии (15) уравнение (14) можно разрешить относительно q в виде (16). После подстановки (16) в (22) получается нелинейное уравнение для вихря. Последние два слагаемых в (22) можно упростить, воспользовавшись (14), и переписать (22) в форме

$$\begin{aligned} \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \kappa_n \frac{\partial \omega}{\partial s} - \omega(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) - \frac{\partial \kappa_n}{\partial s} \omega \right] + \\ + q \left[\nu \kappa_s(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) + 2\nu \left(\kappa_s \frac{\partial \kappa_s}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) + \kappa_n \omega - \frac{\partial \omega}{\partial s} \right] = 0, \quad (23) \end{aligned}$$

в которой явно выделены слагаемые, содержащие q в виде множителя. Тем самым доказана основная

Теорема 2. *Условиями совместности двумерных стационарных уравнений Навье—Стокса в естественных координатах, в которых линии тока совпадают с одной из координатных линий, являются уравнения (14) и (23). Уравнения (14), (23) являются уравнениями для вихря в указанных координатах.*

Замечание. Заметим, что в системе координат, в которой кривые C и N являются прямыми координатными линиями Ox и Oy имеем $\kappa_s = \kappa_n = 0$ и уравнение (23) совпадает с уравнением для вихря [3]:

$$\langle \vec{q}, \nabla \rangle \vec{\omega} - \langle \vec{\omega}, \nabla \rangle \vec{q} = \nu \Delta \vec{\omega}.$$

Учитывая представления (1), имеем

$$\kappa_s^2 + \kappa_n^2 = |\nabla \theta|^2, \quad 2 \left(\kappa_s \frac{\partial \kappa_s}{\partial n} + \kappa_n \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial n} |\nabla \theta|^2. \quad (24)$$

Уравнение (23) после подстановки (16) и (24) принимает вид

$$\begin{aligned} \nu \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} + \frac{\partial \theta}{\partial n} \frac{\partial \omega}{\partial s} - \omega \left(|\nabla \theta|^2 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial n \partial s} \right) \right] + \\ + \frac{1}{\Delta \theta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n} \omega \right) \left[\nu \frac{\partial \theta}{\partial s} |\nabla \theta|^2 + \nu \frac{\partial}{\partial n} |\nabla \theta|^2 + \frac{\partial \theta}{\partial n} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial s} \right] = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

и является нелинейным как относительно ω , так и первых производных ω .

4. ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Примеры некоторых точных решений уравнений Навье—Стокса хорошо описаны [9]. Построим пример точного решения уравнений Навье—Стокса для системы (9)–(12). Пусть угол θ зависит только от переменной s , т. е. $\theta = \theta(s)$. Тогда из соотношений (1) следует, что кривизна линии N равна нулю $\kappa_n = 0$ и кривизна линии тока $\kappa_s = \kappa_s(s)$. Предположим также, что величина q не зависит от n , $q = q(s)$. В таком случае, из соотношений (13), имеем

$$\frac{\partial q}{\partial s} = 0, \quad 0 = \kappa_s q - \omega.$$

Из первого уравнения получаем, что величина q также не зависит от s и, следовательно, постоянна $q = \text{const}$. Из второго уравнения получаем, что единственная ненулевая компонента вихря пропорциональна кривизне линии тока $\omega(s) = q\kappa_s(s)$. Отметим, что первое условие совместности (14) выполнено в данном случае тождественно. Подставим во второе условие совместности (23) компоненту вихря $\omega = q\kappa_s(s)$:

$$\nu [q\kappa_s'' - q\kappa_s^3] + q [\nu\kappa_s^3 - q\kappa_s'] = 0,$$

и преобразуем

$$\kappa_s'' - \frac{q}{\nu}\kappa_s = 0.$$

Таким образом, кривизна линии тока при предположении, что $\theta = \theta(s)$ и $q = q(s)$, вычисляется явно

$$\kappa_s = C_1 \frac{\nu}{q} \exp\left(\frac{q}{\nu}s\right) + C_2,$$

а угол θ соответственно имеет вид

$$\theta = \int \kappa_s ds = C_1 \left(\frac{\nu}{q}\right)^2 \exp\left(\frac{q}{\nu}s\right) + C_2 s + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 произвольные константы. Таким образом решение уравнений Навье—Стокса (9)–(12):

$$q = \text{const}, \quad \omega = q \left(C_1 \frac{\nu}{q} \exp\left(\frac{q}{\nu}s\right) + C_2 \right),$$

и давление p может быть найдено явно из уравнений (9)–(10).

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Очевидной выгодой используемой системы координат является задание течения только одной компонентой скорости $q = q(s, n)$. Вопрос о гидродинамической реализации полученного результата является нетривиальным и требует дальнейшего изучения. В отличие от классического подхода, уравнение для завихренности течения (25) является замкнутым и не включает в себя компонент скорости. Тем самым требуется постановка для него краевых условий в терминах величины вихря. Здесь возможны исследования в нескольких направлениях. Одно из них — постановка краевых условий с использованием вихря, как это делается, например, в работе [5]. Это обусловлено именно влиянием сложной геометрии стенки канала. В последнее время, для уравнений гидродинамики активно исследуются граничные условия проскальзывания типа Навье. Это мотивируется многочисленными приложениями, в которых поток обтекает шероховатую поверхность. Обзор физических постановок возникающих при этом задач, главной из которых является супергидрофобное обтекание, содержится в [20]. Одной из возможных постановок краевых условий является при этом задание тензора скольжения [21]. Одной из таких задач является моделирование скольжения лыжи по снегу [12]. Поверхность снега представляет собой шероховатую поверхность, рельеф которой определяется индивидуальной кристаллической структурой снега. При скольжении лыжи по снегу между её поверхностью и снегом возникает слой жидкости, обусловленный давлением лыжи. На практике замечено, что нанесение на скользящую поверхность лыжи микросетки специального рельефа, так называемой структуры, значительно улучшает скольжение. Этот рельеф зависит от структуры снега, погодных условий, профиля трассы и других факторов и определяется сегодня исключительно из опыта. Тем самым возникает задача моделирования сэндвича: жидкость между двумя шероховатыми поверхностями.

Коэффициенты уравнения (25) зависят от некоторых дифференциальных параметров ортогональных кривых, представляющих координатные линии. Точное решение, описанное в п. 4,

даёт иллюстративные примеры того, когда эти параметры могут принимать частные значения. В этом случае получается решение с постоянной длиной вектора скорости $q = \text{const}$ и завихренностью пропорциональной кривизне линии тока $\omega = q\kappa_s$. Анализ этих дифференциальных параметров, классификация возможных типов кривых C и N представляется самостоятельной задачей.

Авторы благодарят П. И. Плотникова за плодотворные обсуждения во время выполнения исследования и рецензента за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания, позволившие улучшить изложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Milne-Thomson L. N.* Theoretical Hydrodynamics. London: The Macmillan And Company, 1962.
2. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary-Layer Theory. Heidelberg: Springer, 2003.
3. *Kochin N. E., Kibel I. A., Roze N. V.* Theoretical Hydromechanics. N. Y.: Interscience Publishers, 1964.
4. *Shikhmurzaev Y., Sisoiev G.* Spiralling liquid jets: Verifiable mathematical framework, trajectories and peristaltic waves // J. Fluid Mech. 2017. V. 819. P. 352–400.
5. *Chan C. H., Czubak M., Disconzi M. M.* The formulation of the Navier–Stokes equations on Riemannian manifolds // J. Geom. Phys. 2017. V. 121. P. 335–346.
6. *Marusic-Paloka E.* The effects of flexion and torsion on a fluid flow through a curved pipe // Appl. Math. Optim. 2001. V. 44, N 3. P. 245–272.
7. *Chen G. Q., Osborne D., Qian Z.* The Navier–Stokes equations with the kinematic and vorticity boundary conditions on non-flat boundaries // Acta Math. Sci. 2009. V. 29, N 4. P. 919–948.
8. *Коробков М. В., Пилецкас К., Пухначёв В. В., Руссо Р.* Задача протекания для уравнений Навье–Стокса // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 6. С. 115–176.
9. *Пухначев В. В.* Симметрии в уравнениях Навье–Стокса. Новосибирск: НГУ, 2022.
10. *Абрашкин А. А., Якубович Е. И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006.
11. *Pommaret J. F.* Differential Galois Theory. Mathematics and Its Applications: a Series of Monographs and Texts, V. 15. London: Gordon and Breach, Science Publishers, 1983.
12. *Паршин Д. В., Гайфутдинов Р. А., Коптюг А. В., Чупахин А. П.* Механика скольжения лыж по снегу: современное состояние дел и перспективы // Прикл. механика и техн. физика. 2023. Т. 64, № 4. С. 161–177.
13. *Агеев А. И., Осипцов А. Н.* Макро- и микрогидродинамика вязкой жидкости вблизи супергидрофобной поверхности // Коллоидный журн. 2022. Т. 84, № 4. С. 380–395.
14. *Plotnikov P. I., Sokolowski J.* Geometric Aspects of Shape Optimization // J. Geom. Anal. 2023. V. 33. Article 206.
15. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. N. Y.: Interscience Publishers, 1963.
16. *Dall’Acqua A., Pozzi P.* A Willmore–Helfrich L^2 -flow of curves with natural boundary conditions // Comm. Anal. Geom. 2014. V. 22, N 4. P. 617–669; DOI: 10.4310/cag.2014.v22.n4.a2
17. *Dziuk G., Kuwert E., Schatzle R.* Evolution of elastic curves in $\mathbb{R}^n$: Existence and computation // SIAM J. Math. Anal. 2002. V. 33, N 5. P. 1228–1245; DOI: 10.1137/s0036141001383709
18. *Lin C. C.* L^2 -flow of elastic curves with clamped boundary conditions // J. Differ. Equ. 2012. V. 252, N 12. P. 6414–6428; DOI: 10.1016/j.jde.2012.03.010
19. *Plotnikov P. I., Sokolowski J.* Gradient flow for Kohn–Vogelius functional // Siberian Electron. Math. Rep. 2023. V. 20, N 1. P. 524–579.
20. *Malkin A. Ya., Patlazhan S. A., Kulichikhin V. G.* Physicochemical phenomena leading to slip of a fluid along a solid surface // Usp. Khim. 2019. V. 88, N 3. P. 319–349.
21. *Bazant M. Z., Vinogradova O. I.* Tensorial Hydrodynamic Slip // J. Fluid Mech. 2008. V. 613. P. 125–134.

UDC 532.5

CURL EQUATION IN VISCOUS HYDRODYNAMICS IN A CHANNEL OF COMPLEX GEOMETRY

© 2023 S. A. Vasyutkin^a, A. P. Chupakhin^b

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: ^as.vasyutkin@g.nsu.ru, ^balexander190513@gmail.com

Received 21.04.2023, revised 13.08.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. We consider the Navier–Stokes equations for the plane steady motion of a viscous incompressible fluid in an orthogonal coordinate system in which the fluid streamlines coincide with the coordinate lines of one of the families of the orthogonal coordinate system. In this coordinate system, the velocity vector has only the tangential component and the system of three Navier–Stokes equations is an overdetermined system for two functions — the tangential component of velocity and pressure. In the present paper, the system is brought to involution, and the consistency conditions are obtained, which are the equations for the curl of the velocity in this coordinate system. The coefficients of these equations include the curvatures of the coordinate lines and their derivatives up to the second order. The equations obtained are significantly more complicated than the curl equations in a channel of simple geometry.

Keywords: Navier–Stokes equations, curvilinear coordinate system, streamline, streamline curvature, consistency condition, curl equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.401

REFERENCES

1. L. N. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics* (Macmillan, London, 1962).
2. H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory* (Springer, Heidelberg, 2003).
3. N. E. Kochin, I. A. Kibel, and N. V. Roze, *Theoretical Hydromechanics* (Interscience, New York, 1964).
4. Y. Shikhmurzaev and G. Sisoiev, “Spiralling liquid jets: Verifiable mathematical framework, trajectories and peristaltic waves,” *J. Fluid Mech.* **819**, 352–400 (2017).
5. C. H. Chan, M. Czubak, and M. M. Disconzi, “The formulation of the Navier–Stokes equations on Riemannian manifolds,” *J. Geom. Phys.* **121**, 335–346 (2017).
6. E. Marusic-Paloka, “The effects of flexion and torsion on a fluid flow through a curved pipe,” *Appl. Math. Optim.* **44** (3), 245–272 (2001).
7. G. Q. Chen, D. Osborne, and Z. Qian, “The Navier–Stokes equations with the kinematic and vorticity boundary conditions on non-flat boundaries,” *Acta Math. Sci.* **29** (4), 919–948 (2009).
8. M. V. Korobkov, K. Pileckas, V. V. Pukhnachov, and R. Russo, “The flux problem for the Navier–Stokes equations,” *Russ. Math. Surv.* **69** (6), 1065–1122 (2014).
9. V. V. Pukhnachov, *Symmetries in the Navier–Stokes Equations* (Novosibirsk. Gos. Univ., Novosibirsk, 2022) [in Russian].
10. A. A. Abrashkin and E. I. Yakubovich, *Vortex Dynamics in the Lagrangian Description* (Fizmatlit, Moscow, 2006) [in Russian].
11. J. F. Pommaret, *Differential Galois Theory. Mathematics and Its Applications: A Series of Monographs and Texts. Vol. 15* (Gordon and Breach, London, 1983).

12. D. V. Parshin, R. A. Gaifutdinov, A. V. Koptug, and A. P. Chupakhin, “Mechanics of ski sliding on snow: Current status and prospects,” *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **64** (4), 693–706 (2023).
13. A. I. Ageev and A. N. Osipov, “Macro- and microhydrodynamics of a viscous fluid on a superhydrophobic surface,” *Colloid J.* **84**, 379–393 (2022).
14. P. I. Plotnikov and J. Sokolowski, “Geometric aspects of shape optimization,” *J. Geom. Anal.* **33**, 206 (2023).
15. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, New York, 1963).
16. A. Dall’Acqua and P. Pozzi, “A Willmore–Helfrich L^2 -flow of curves with natural boundary conditions,” *Commun. Anal. Geom.* **22** (4), 617–669 (2014). <https://doi.org/10.4310/cag.2014.v22.n4.a2>
17. G. Dziuk, E. Kuwert, and R. Schatzle, “Evolution of elastic curves in $\mathbb{R}^n$: Existence and computation,” *SIAM J. Math. Anal.* **33** (5), 1228–1245 (2002). <https://doi.org/10.1137/s0036141001383709>
18. C. C. Lin, “ L^2 -flow of elastic curves with clamped boundary conditions,” *J. Differ. Equ.* **252** (12), 6414–6428 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.03.010>
19. P. I. Plotnikov and J. Sokolowski, “Gradient flow for Kohn–Vogelius functional,” *Sib. Electron. Math. Rep.* **20** (1), 524–579 (2023).
20. A. Ya. Malkin, S. A. Patlazhan, and V. G. Kulichikhin, “Physicochemical phenomena leading to slip of a fluid along a solid surface,” *Usp. Khim.* **88** (3), 319–349 (2019).
21. M. Z. Bazant and O. I. Vinogradova, “Tensorial hydrodynamic slip,” *J. Fluid Mech.* **613**, 125–134 (2008).