

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДВУХ ДИФФУЗИОННЫХ КОМПОНЕНТ

© 2026 Г. В. Алексеев^{1,2a}, Ю. Э. Рогозина^{1b}¹*Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, г. Владивосток 690041, Россия,*²*Дальневосточный федеральный университет,
о. Русский, п. Аякс, 10, г. Владивосток 690922, Россия*E-mails: ^aalekseev@iam.dvo.ru, ^buliyaspivak@gmail.comПоступила в редакцию 20.05.2026 г.; после доработки 24.06.2026 г.;
принята к публикации 15.07.2026 г.

Рассматривается неоднородная краевая задача для стационарной модели тепломассопереноса с переменными коэффициентами в случае, когда главные коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии, а также младшие коэффициенты зависят от двух диффузионных компонент: температуры среды и концентрации растворённого вещества. Для исследования указанной краевой задачи разрабатывается математический аппарат, основанный на вариационном подходе с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке и теоремы Лебега о мажорантной сходимости. На основе разработанного аппарата доказывается глобальная разрешимость рассматриваемой краевой задачи в слабой постановке и устанавливаются достаточные условия на исходные данные задачи, обеспечивающие локальную единственность слабого решения, обладающего дополнительным свойством гладкости для диффузионных компонент.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса — Буссинеска, неоднородные краевые условия, слабое решение, глобальная разрешимость, лифтинг, локальная единственность, теорема Шаудера о неподвижной точке, теорема Лебега о мажорантной сходимости.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.201

ВВЕДЕНИЕ

В 30-е годы прошлого века после выхода фундаментальных работ Лере [1, 2] возникло новое научное направление, которое сейчас принято называть математической гидродинамикой. Оно сосредоточено на исследовании качественных свойств решений уравнений гидродинамики, таких как существование и единственность решений краевых задач, устойчивость и регулярность решений, поведение решений при больших временах, а также ряда других свойств с использованием методов нелинейного функционального анализа. К началу XXI века в этом направлении появилось большое количество исследований и было опубликовано несколько отличных монографий (см., например, [3, 4, 5]).

Начиная с 60-х годов прошлого века, идеи нелинейного функционального анализа стали проникать в изучение качественных свойств решений уравнений тепломассопереноса. После опубликования статьи [6] в математической теории тепломассопереноса (ТМП) стало развиваться направление, связанное с изучением качественных свойств решений уравнений ТМП с переменными коэффициентами, зависящими от температуры и/или от концентрации вещества. Отметим среди них статьи [7, 8, 9], посвящённые изучению разрешимости краевых задач для однодиффузионных нестационарных и стационарных моделей теплопереноса.

В XXI веке это направление продолжало интенсивно развиваться, а опубликованные работы можно разделить на три группы. Первую группу составляют исследования, посвящённые анализу разрешимости начально-краевых задач для однодиффузионных нестационарных уравнений теплопереноса с использованием приближения Буссинеска. В эту группу входят статьи [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Вторую группу составляют работы [18, 19, 20, 21, 22], посвящённые изучению краевых задач для однодиффузионных стационарных моделей ТМП. Третья группа содержит работы [23, 24, 25], посвящённые исследованию разрешимости краевых задач для двухдиффузионных моделей ТМП с постоянными коэффициентами, и недавно вышедшие работы [26, 27], посвящённые исследованию разрешимости краевых задач для двухдиффузионных моделей ТМП с переменными коэффициентами в некоторых частных случаях.

Настоящая статья, продолжая развивать направление исследований, инициированное в предыдущих работах [20, 26, 27], направлена на разработку математического аппарата исследования разрешимости неоднородных краевых задач для стационарных моделей ТМП с переменными старшими и младшими коэффициентами, зависящими от двух диффузионных компонент – температуры и концентрации. Как и в предыдущих работах [24, 26, 27], наш аппарат будет основан на сведении доказательства разрешимости рассматриваемой краевой задачи к задаче доказательства существования неподвижной точки специально сконструированного оператора F с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. Разумеется, наличие нескольких переменных коэффициентов в исследуемой модели и неоднородных граничных условий Дирихле для диффузионных компонент существенно усложняет структуру упомянутого оператора F . Следствием этого, как будет показано ниже, является возникновение двух возможных сценариев при построении ограниченного выпуклого замкнутого множества K , используемого для применения теоремы Шаудера. Ниже мы приведём простую формулу (81), описывающую указанные два сценария, построим явные формулы для искомого множества K для этих двух сценариев, и для каждого сценария докажем глобальную разрешимость рассматриваемой краевой задачи. Поэтому главная теорема разрешимости (теорема 1) содержит два типа оценок искомого решения, которые являются разными для разных сценариев.

1. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ , состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N . В данной работе рассматривается следующая неоднородная краевая задача для обобщённой модели Буссинеска теплопереноса с переменными коэффициентами, описывающая движение бинарной теплопроводящей жидкости:

$$-\operatorname{div}(\nu(T, C)\nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - [b_1(T)T - b_2(C)C]\mathbf{G}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$-\operatorname{div}(k(T, C)\nabla T) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = f \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

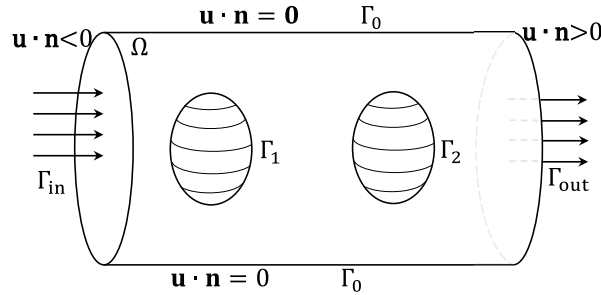
$$-\operatorname{div}(\lambda(T, C)\nabla C) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)C + \gamma(T, C)C = f^c \text{ в } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad C = \varphi \text{ на } \Gamma, \quad k(T, C)\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T)T = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор скорости, T — температура среды, C — концентрация растворённого вещества, которое вместе с основной жидкостью образует бинарную смесь, $p = P/\rho_0$, где P — давление, а $\rho_0 = \operatorname{const}$ — плотность жидкости, $\nu = \nu(T, C)$ — коэффициент кинематической вязкости, $k = k(T, C)$ — коэффициент теплопроводности, $\lambda = \lambda(T, C)$ — коэффициент диффузии, $\gamma = \gamma(T, C)$ — коэффициент распада, характеризующий скорость растворения вещества вследствие химических реакций с основной жидкостью, $\alpha = \alpha(T)$ — коэффициент граничного теплообмена, $\mathbf{G} = -(0, 0, G)$ — вектор ускорения свободного падения, $b_1(T)$ (или $b_2(C)$) — коэффициент теплового (или концентрационного) расширения, зависящий от T или C , при этом слагаемые $b_1(T)T\mathbf{G}$ или $b_2(C)C\mathbf{G}$ описывают соответствующие силы плавучести, возникающие

вследствие тепловых или концентрационных эффектов, $\mathbf{f}$ — плотность гидродинамических источников, f (или f^c) — плотность источников тепла (или массы). Ниже мы будем называть задачу (1)–(4) с заданными функциями $\nu(T, C)$, $k(T, C)$, $\lambda(T, C)$, $\gamma(T, C)$, $\alpha(T)$, $b_1(T)$, $b_2(C)$, $\mathbf{f}$, f , f^c , $\mathbf{g}$, ψ , φ и χ задачей 1. Подробности вывода модели (1), (2), (3), а также граничных условий (4) читатель может найти в [28, разд. 54 и 55] и [29].

В частном случае, когда $\alpha = 0$, граничное условие Робена для T на Γ_N сводится к нелинейному условию Неймана $k(T, C)\partial T/\partial n = \chi$ на Γ_N , которое соответствует заданию нормального теплового потока $k(T, C)\partial T/\partial n$ на Γ_N . В другом частном случае, когда $\Gamma_N = \emptyset$ и $\Gamma_D = \Gamma$, задача (1)–(4) сводится к неоднородной задаче Дирихле для системы (1)–(3). Мы подчеркнём, что использование неоднородных граничных условий в (4) позволяет применить разработанную ниже теорию для изучения физически интересных задач, касающихся течений бинарных теплопроводящих жидкостей в различных типах трёхмерных каналов. Типичный пример таких течений жидкостей проиллюстрирован на рисунке, где показана возможная ситуация течения жидкости в цилиндрическом канале с двумя препятствиями.



Типичный пример области Ω , имеющей форму канала с двумя препятствиями, где необходимо задавать неоднородные граничные условия как для скорости, так и для диффузионных компонент на входе Γ_{in} и выходе Γ_{out}

2. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Ниже мы будем широко использовать пространства $L^r(D)$ для $1 \leq r \leq \infty$ и пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω , либо границу Γ , либо часть Γ_0 границы Γ . Соответствующие пространства вектор-функций будут обозначаться через $\mathbf{L}^r(D)$ и $\mathbf{H}^s(D)$. Мы обозначаем через $(\cdot, \cdot)_{s, \Omega}$, $\|\cdot\|_{s, \Omega}$ или $|\cdot|_{s, \Omega}$ соответственно скалярное произведение, норму или полунорму в $H^s(\Omega)$. Скалярные произведения и нормы в $L^2(\Omega)$ обозначаются через $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|_{\Omega}$. X^* обозначает двойственное пространство гильбертова пространства X , а двойственность между X и X^* записывается как $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ или просто как $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Как и в [25, 26, 27], мы будем использовать следующие функциональные пространства:

$$L_0^2(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega) \mid (h, 1) = 0\}, \quad \mathcal{C} = H_0^1(\Omega) \equiv \{h \in H^1(\Omega) \mid h|_{\Gamma} = 0\},$$

$$\mathcal{T} = \{h \in H^1(\Omega) \mid h|_{\Gamma_D} = 0\}, \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)^3, \quad V = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}.$$

Отметим, что каждое из пространств $\mathcal{C} = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{T}$ или $H^1(\Omega)$ является гильбертовым относительно нормы $\|\cdot\|_{1, \Omega}$, которая в силу неравенства Фридрихса — Пуанкаре (см. [30])

$$\|\varphi\|_{1, \Omega} \leq c_P |\varphi|_{1, \Omega} \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{T} \text{ (или } \varphi \in \mathcal{C}), \quad c_P = \text{const} > 1, \quad (5)$$

эквивалентна полунорме $|\cdot|_{1, \Omega}$ для функций $C \in \mathcal{C}$ или $T \in \mathcal{T}$. Для функции $T \in \mathcal{T}$ неравенство (5) выполняется, конечно, когда $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$, (см. предположение **2.1** ниже). Ключевую роль

ниже при исследовании разрешимости задачи 1 будут играть произведения пространств $X = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ и $W = V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C} \subset X$, наделённые нормой

$$\|\mathbf{x}\|_X^2 = \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|T\|_{1,\Omega}^2 + \|C\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{для любого } \mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, T, C) \in X \text{ (или } (\mathbf{u}, T, C) \in W), \quad (6)$$

а также двойственное пространство $X^* = \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathcal{T}^* \times \mathcal{C}^*$ к пространству X .

Введём следующие предположения относительно исходных данных задачи 1:

2.1. Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$; открытые подмножества Γ_D и Γ_N границы Γ удовлетворяют условиям: $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ и $\text{meas } \Gamma_D > 0$.

2.2. $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $f \in \mathcal{T}^*$, $f^c \in \mathcal{C}^*$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$.

2.3. $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} \geq 0$, и, кроме того, $(\mathbf{g}, \mathbf{n})_{\Gamma^{(j)}} = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$.

2.4. $\nu(\cdot, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, $k(\cdot, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, $\lambda(\cdot, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, $\gamma(\cdot, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, и существуют положительные константы $\nu_{\min}$, $\nu_{\max}$, $k_{\min}$, $k_{\max}$, $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$, $\gamma_{\min}$ и $\gamma_{\max}$ такие, что

$$\begin{aligned} \nu_{\min} &\leq \nu(t, s) \leq \nu_{\max}, & k_{\min} &\leq k(t, s) \leq k_{\max}, \\ \lambda_{\min} &\leq \lambda(t, s) \leq \lambda_{\max}, & 0 &\leq \gamma(t, s) \leq \gamma_{\max} \quad \text{для любых } (t, s) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

2.5. $b_i(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}^1)$, $i = 1, 2$, и существуют положительные константы b_i^0 такие, что

$$|b_i(t)| \leq b_i^0 \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}^1, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

2.6. $\alpha(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}^1)$ и существует положительная константа $\alpha_{\max}$ такая, что

$$0 \leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max} \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}^1. \quad (9)$$

Следствием предположения **2.5** для $b_i(\cdot)$ является следующее важное свойство для суперпозиции $\mathbf{b}_i(\varphi) \equiv b_i(\varphi)\mathbf{G}$, где $\varphi \in H^1(\Omega)$ – произвольная функция: вектор-функция $\mathbf{b}_i(\varphi) \equiv b_i(\varphi)\mathbf{G}$ принадлежит $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{b}_i(\varphi)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \beta_i \equiv b_i^0 |\mathbf{G}| \quad \text{для любой } \varphi \in H^1(\Omega). \quad (10)$$

Аналогично, в качестве следствий предположений **2.4** и **2.6** мы получаем следующие важные свойства суперпозиций $\gamma(T, C)$ и $\alpha(T)$, где $T \in H^1(\Omega)$ и $C \in H^1(\Omega)$ – произвольные функции:

$$\|\gamma(T, C)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \gamma_{\max} \quad \text{для любых } T, C \in H^1(\Omega), \quad (11)$$

$$\|\alpha(T)\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \leq \alpha_{\max} \quad \text{для любой } T \in H^1(\Omega). \quad (12)$$

Ниже мы будем использовать неравенство Гёльдера для трёх скалярных функций

$$|(au, v)| \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_\Omega \|v\|_\Omega \quad \text{для любых } a \in L^\infty(\Omega), u, v \in L^2(\Omega), \quad (13)$$

и следующие неравенства:

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leq c_s \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \text{для любой } \varphi \in H^1(\Omega), \quad 1 \leq s \leq 6, \quad (14)$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^s(\Omega)} \leq c_s \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad 1 \leq s \leq 6. \quad (15)$$

Здесь c_s – константа, зависящая от Ω и от $s \in [1, 6]$. Отметим, что неравенства (14), (15) следуют из теоремы вложения Соболева, которая утверждает, что пространство $H^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $L^s(\Omega)$ для $s \leq 6$ и компактно вложено, если $s < 6$.

Рассмотрим последовательности $\{T_n\} \in H^1(\Omega)$ и $\{C_n\} \in H^1(\Omega)$ такие, что $T_n \rightarrow T \in H^1(\Omega)$ и $C_n \rightarrow C \in H^1(\Omega)$ п.в. в Ω при $n \rightarrow \infty$. Из предположений **2.4** и **2.5** следует, что

последовательности $\{k(T_n, C_n)\}$ и $\{\mathbf{b}_1(T_n)\}$ ограничены в том смысле, что $|k(T_n, C_n)| \leq k_{\max}$, $|\mathbf{b}_1(T_n)| \leq \beta_1$ п.в. в Ω , и, кроме того, $k(T_n, C_n) \rightarrow k(T, C)$, $\mathbf{b}_1(T_n) \rightarrow \mathbf{b}_1(T)$ п.в. в Ω при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы Лебега о мажорантной сходимости [31], которая даёт, например, для разности $k(T_n, C_n) - k(T, C)$ следующее свойство:

$$\int_{\Omega} [k(T_n, C_n) - k(T, C)] f \, d\mathbf{x} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любой } f \in L^1(\Omega). \quad (16)$$

Замечание 1. Аналогичный результат имеет место для последовательностей $\lambda(T_n, C_n)$, $\nu(T_n, C_n)$, $\gamma(T_n, C_n)$, $\mathbf{b}_1(T_n)$, $\mathbf{b}_2(C_n)$ и $\alpha(T_n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Ниже мы будем использовать ряд свойств билинейных и трилинейных форм, связанных с линейными и нелинейными слагаемыми в (1)–(4). Эти формы будут использоваться в слабой формулировке задачи 1 (которая будет введена в разделе 3).

Лемма 1. Пусть $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ с $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ – заданная функция, и пусть выполняются предположения **2.1**, **2.4–2.6**. Тогда существуют положительные константы δ_0 , δ_1 , δ_2 , α_0 , γ_0 , γ_1 , γ'_1 , γ_2 , γ'_2 , γ_3 и β , зависящие от Ω , такие, что выполняются следующие соотношения:

$$|(k(\eta, \mu) \nabla T, \nabla S)| \leq k_{\max} \|T\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \eta, \mu, T, S \in H^1(\Omega), \quad (17)$$

$$(\nabla T, \nabla T) \geq \delta_1 \|T\|_{1,\Omega}^2, \quad (k(\eta, \mu) \nabla T, \nabla T) \geq k_* \|T\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любых } T \in \mathcal{T}, \eta, \mu \in H^1(\Omega), \quad (18)$$

$$|(\lambda(\eta, \mu) \nabla C, \nabla h)| \leq \lambda_{\max} \|C\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \eta, \mu, C, h \in H^1(\Omega), \quad (19)$$

$$(\nabla C, \nabla C) \geq \delta_2 \|C\|_{1,\Omega}^2, \quad (\lambda(\eta, \mu) \nabla C, \nabla C) \geq \lambda_* \|C\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любых } \eta, \mu \in H^1(\Omega), C \in \mathcal{C}, \quad (20)$$

$$|(\nu(\eta, \mu) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})| \leq \nu_{\max} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \eta, \mu \in H^1(\Omega), \quad (21)$$

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \geq \delta_0 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2, \quad (\nu(\eta, \mu) \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \geq \nu_* \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любых } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \eta, \mu \in H^1(\Omega), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} |((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \gamma'_1 \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \\ &\leq \gamma_1 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \end{aligned} \quad (23)$$

$$((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \text{ для любых } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (24)$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{v} \neq 0} -(\operatorname{div} \mathbf{v}, p) / \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \geq \beta \|p\|_{\Omega} \text{ для любой } p \in L_0^2(\Omega), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u} \cdot \nabla T, h)| &\leq \gamma'_2 \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \|T\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \leq \gamma_2 \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|T\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \\ &\text{для любых } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), T \in H^1(\Omega), h \in \mathcal{T} \text{ (или } h \in \mathcal{C}), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{w} \cdot \nabla T, S)| &\leq \tilde{\gamma}_2 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|T\|_{L^4(\Omega)} \|S\|_{1,\Omega} \\ &\leq \gamma_2 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|T\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), T \in H^1(\Omega), S \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (27)$$

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla S, S) = (1/2)(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, S^2)_{\Gamma_N} \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla h, h) = 0 \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (28)$$

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi, \varphi) = 0 \text{ для любых } \mathbf{w} \in V, \varphi \in \mathcal{T} \text{ (или } \varphi \in \mathcal{C}), \quad (29)$$

$$|(\chi, S)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \chi \in L^2(\Gamma_N), S \in \mathcal{T}, \quad (30)$$

$$|(\mathbf{b}_i(\eta) \varphi, \mathbf{v})| \leq \beta_i \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \eta, \varphi \in H^1(\Omega), \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2, \quad (31)$$

$$|(\gamma(T, C) C, h)| \leq \gamma_0 \|C\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \text{ для любых } C, h \in H^1(\Omega), \quad (32)$$

$$|(\alpha(\eta) T, S)_{\Gamma_N}| \leq \alpha_0 \|T\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \eta, T, S \in H^1(\Omega). \quad (33)$$

Здесь $\delta_1 = 1/c_P^2$, где константа c_P определена в (5), $\gamma_0 = \tilde{c}\gamma_{\max}$, $\alpha_0 = \tilde{c}_\Gamma\alpha_{\max}$, где $\tilde{c}$ и $\tilde{c}_\Gamma$ — константы, зависящие от Ω , $k_* = \delta_1 k_{\min}$, $\lambda_* = \delta_2 \lambda_{\min}$, $\nu_* = \delta_0 \nu_{\min}$, а $\nu_{\min}$, $\nu_{\max}$, $k_{\min}$, $k_{\max}$, $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$, $\gamma_{\max}$ и $\alpha_{\max}$ — константы, определённые в 2.4 и 2.6.

Докажем, например, (32). Применяя неравенство Гёльдера (13), используя (11), (14) при $s = 2$ и полагая $\tilde{c} = c_2^2$, выводим для любой пары $C, h \in H^1(\Omega)$, что

$$|\gamma(T, C)C, h| \leq \|\gamma(T, C)\|_{L^\infty(\Omega)} \|C\|_\Omega \|h\|_\Omega \leq \gamma_{\max} \tilde{c} \|C\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \equiv \gamma_0 \|C\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega}.$$

Остальные утверждения доказываются по аналогичной схеме (см. также [25, 26, 30, 32, 33]).

Следует отметить, что наличие неоднородных граничных условий Дирихле для $\mathbf{u}$, T и C в (4) существенно усложняет доказательство разрешимости задачи 1. Чтобы упростить анализ её разрешимости, мы будем использовать лифтинги, то есть специальные продолжения граничных данных Дирихле внутрь области Ω , обладающие определёнными свойствами. В случае задачи 1 существование лифтингов обеспечивается следующей леммой, доказательство отдельных утверждений которой можно найти в [25, 33].

Лемма 2. Пусть выполняется предположение 2.1. Тогда:

1). Если граничный вектор $\mathbf{g}$ удовлетворяет 2.3, то для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ существует функция (лифтинг скорости) $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ такая, что $\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0$ в Ω , $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{g}$ на Γ , и

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq c_\varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \quad |(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}| \leq \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (34)$$

Здесь c_ε — константа, зависящая от ε и Ω .

2). Существует семейство непрерывных неубывающих функций $M_\delta: \mathbb{R}_+ \equiv (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ с $M_\delta(0) = 0$, зависящих от параметра $\delta \in (0, 1]$, а также от Ω , таких, что для любой не тождественно нулевой функции $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует функция $T_\delta \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$T_\delta|_{\Gamma_D} = \psi, \quad \|T_\delta\|_{L^4(\Omega)} \leq \delta, \quad \|T_\delta\|_{1,\Omega} \leq M_\delta^\psi \equiv M_\delta(\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}) \quad \text{для любой } \delta \in (0, 1]. \quad (35)$$

Ниже мы будем называть функцию $\mathbf{u}_\varepsilon$ (или T_δ) лифтингом скорости (или лифтингом температуры), а под лифтингом концентрации мы будем понимать функцию $C_\tau \in H^1(\Omega)$, зависящую от параметра $\tau \in (0, 1]$ и от Ω , удовлетворяющую условиям

$$C_\tau|_\Gamma = \varphi, \quad \|C_\tau\|_{L^4(\Omega)} \leq \tau, \quad \|C_\tau\|_{1,\Omega} \leq M_\varphi^\tau \equiv M_\tau(\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}) \quad \text{для любой } \tau \in (0, 1]. \quad (36)$$

Существование лифтинга концентрации следует из утверждения 2 леммы 2, в котором нужно сделать следующие переобозначения: $\Gamma_D \rightarrow \Gamma$, $T \rightarrow C$, $\delta \rightarrow \tau$, $M_\psi^\delta \rightarrow M_\varphi^\tau$.

3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ 1

Мы начнём этот раздел с введения слабой формулировки задачи 1. Для этого умножим первое уравнение в (1) на тестовую функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, уравнение (2) — на $S \in \mathcal{T}$, а уравнение (3) — на $h \in \mathcal{C}$, проинтегрируем по области Ω , применим формулы Грина и учтём граничные условия (4). Непосредственные выкладки приводят к слабой формулировке задачи 1, которая состоит в нахождении четвёрки функций $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $p \in L_0^2(\Omega)$, $T \in H^1(\Omega)$ и $C \in H^1(\Omega)$, называемых слабым решением задачи 1, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} & (\nu(T, C) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ & = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1(T)T - \mathbf{b}_2(C)C, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (37)$$

$$(k(T, C)\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) + (\alpha(T)T, S)_{\Gamma_N} = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (38)$$

$$(\lambda(T, C)\nabla C, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C, h) + (\gamma(T, C)C, h) = \langle f^c, h \rangle \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (39)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D \quad \text{и} \quad C = \varphi \text{ на } \Gamma. \quad (40)$$

Рассмотрим сужение тождества (37) на пространство V , которое имеет вид

$$(\nu(T)\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1(T)T) - (\mathbf{b}_2(C)C, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (41)$$

Из результатов [25, разд. 3.2] и [30, гл. 4] следует, что доказательство существования для задачи 1 сводится к изучению задачи (38)–(41) для тройки $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ и восстановлению $p \in L_0^2(\Omega)$ с помощью схемы де Рама. Принимая это во внимание, мы будем искать решение $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ задачи (38)–(41) в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}, \quad T = T_0 + \tilde{T}, \quad C = C_0 + \tilde{C}. \quad (42)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{u}} \in V$, $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ и $\tilde{C} \in \mathcal{C}$ – новые неизвестные функции, в то время как $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}_{\varepsilon_0} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $T_0 = T_{\delta_0} \in H^1(\Omega)$ и $C_0 = C_{\tau_0} \in H^1(\Omega)$ представляют собой значения при $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\delta = \delta_0$ и $\tau = \tau_0$ лифтингов скорости, температуры и концентрации $\mathbf{u}_\varepsilon$, T_δ и C_τ ($0 < \varepsilon \leq 1$, $0 < \delta \leq 1$, $0 < \tau \leq 1$), удовлетворяющих условиям (34), (35), (36).

Точные значения δ_0 и τ_0 параметров δ и τ , которые характеризуют лифтинги температуры и концентрации, будут определены позже. Что касается значения ε_0 параметра ε , характеризующего лифтинг скорости, мы выберем его исходя из условия $\varepsilon = \varepsilon_0 \leq (\nu_*/2\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma})$, из которого следует второе неравенство в (34) (см. [1, 33] для более подробной информации). Подставляя (42) в (38), (39) и (41), мы получаем следующие тождества для тройки $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C})$:

$$\begin{aligned} & (k(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla \tilde{T}, \nabla S) + (\alpha(T_0 + \tilde{T})\tilde{T}, S)_{\Gamma_N} \\ & + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \tilde{T}, S) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T}, S) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla T_0, S) = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} \\ & - (k(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla T_0, \nabla S) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, S) - (\alpha(T_0 + \tilde{T})T_0, S)_{\Gamma_N} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla \tilde{C}, \nabla h) + (\gamma(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\tilde{C}, h) \\ & + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \tilde{C}, h) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{C}, h) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla C_0, h) = \langle f^c, h \rangle \\ & - (\lambda(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla C_0, \nabla h) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C_0, h) - (\gamma(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})C_0, h) \\ & \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & (\nu(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ & = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\nu(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) \\ & - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - (\mathbf{b}_1(T_0 + \tilde{T})(T_0 + \tilde{T}), \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2(C_0 + \tilde{C})(C_0 + \tilde{C}), \mathbf{v}) \\ & \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (45)$$

Чтобы доказать существование решения $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) \in W \equiv V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ задачи (43), (44), (45), сведём эту задачу к задаче доказательства существования решения нелинейного операторного уравнения с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. С этой целью определим тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ и $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) \in W$ и определим оператор $F : W \rightarrow W$, действующий

следующим образом: $F(\mathbf{z}) = \mathbf{y}$. Здесь компоненты $\tilde{\mathbf{u}} \in V$, $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ и $\tilde{C} \in \mathcal{C}$, составляющие вектор $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) \in W$, являются решениями следующих линейных задач:

$$\begin{aligned} a_1^{\mathbf{z}}(\tilde{T}, S) &\equiv (k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla\tilde{T}, \nabla S) + (\alpha(T_0 + \eta)\tilde{T}, S)_{\Gamma_N} \\ &\quad + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla\tilde{T}, S) + (\mathbf{w} \cdot \nabla\tilde{T}, S) = \langle l_1, S \rangle - (\mathbf{w} \cdot \nabla T_0, S) \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} a_2^{\mathbf{z}}(\tilde{C}, h) &\equiv (\lambda(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla\tilde{C}, \nabla h) + (\gamma(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\tilde{C}, h) \\ &\quad + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla\tilde{C}, h) + (\mathbf{w} \cdot \nabla\tilde{C}, h) = \langle l_2, h \rangle - (\mathbf{w} \cdot \nabla C_0, h) \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} a_0^{\mathbf{z}}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &\equiv (\nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ &= \langle l_0, \mathbf{v} \rangle - ((\mathbf{b}_1(T_0 + \eta)(T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}) + \mathbf{b}_2(C_0 + \mu)(C_0 + \tilde{C}_{\mathbf{z}})), \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (48)$$

Индекс $\mathbf{z}$ в обозначениях $\tilde{T}_{\mathbf{z}}$ и $\tilde{C}_{\mathbf{z}}$ в (48) указывает, что $\tilde{T}_{\mathbf{z}}$ и $\tilde{C}_{\mathbf{z}}$ являются решениями линейных задач (46) и (47), соответствующих данному элементу $\mathbf{z} \in W$, тогда как функционалы $l_1^{\mathbf{z}}: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $l_2^{\mathbf{z}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ и $l_0^{\mathbf{z}}: V \rightarrow \mathbb{R}$, также зависящие от $\mathbf{z}$, определяются формулами:

$$\langle l_1^{\mathbf{z}}, S \rangle = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} - (k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla T_0, \nabla S) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, S) - (\alpha(T_0 + \eta)T_0, S)_{\Gamma_N}, \quad (49)$$

$$\langle l_2^{\mathbf{z}}, h \rangle = \langle f^c, h \rangle - (\lambda(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla C_0, \nabla h) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C_0, h) - (\gamma(T_0 + \eta, C_0 + \mu)C_0, h), \quad (50)$$

$$\langle l_0^{\mathbf{z}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}). \quad (51)$$

Разобьём дальнейший процесс исследования задачи 1 на три этапа. На первом этапе мы докажем однозначную разрешимость каждой из трёх задач (46), (47), (48) при предположениях **2.1–2.6** и выведем оценки их решений с помощью теоремы Лакса – Мильграма. Затем, основываясь на этих оценках, мы построим выпуклое замкнутое множество K в пространстве W , которое оператор F отображает в себя. Наконец, на третьем этапе будет доказано, что оператор F непрерывен и компактен на K .

Для реализации первого этапа нам потребуются некоторые дополнительные оценки билинейных и трилинейных форм, входящих в (46), (47), (48). Эти оценки следуют из (21), (22), (23), (26), (27), (31), (32), (33), (34) и (42) и имеют вид неравенств:

$$|(\nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v})| \leq \nu_{\max} c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \eta \in \mathcal{T}, \mu \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in V, \quad (52)$$

$$(\nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \geq (\nu_*/2) \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega}^2 \quad \text{для любых } \eta \in \mathcal{T}, \mu \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in V, \quad (53)$$

$$|((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v})| \leq \gamma_1 \|\mathbf{u}_0\|_{1, \Omega}^2 \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \leq \gamma_1 c_{\varepsilon_0}^2 \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma}^2 \|\mathbf{v}\|_V \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (54)$$

$$|(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, S)| \leq \gamma_2 \|\mathbf{u}_0\|_{1, \Omega} \|T_0\|_{1, \Omega} \|S\|_{1, \Omega} \leq \gamma_2 c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} M_{\psi}^{\delta} \|S\|_{1, \Omega} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (55)$$

$$|(\mathbf{w} \cdot \nabla T_0, S)| \leq \gamma_2' \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \|T_0\|_{L^4(\Omega)} \|S\|_{1, \Omega} \leq \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \|S\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \mathbf{w} \in V, S \in \mathcal{T}, \quad (56)$$

$$|(\alpha(T_0 + \eta)T_0, S)_{\Gamma_N}| \leq \alpha_0 \|T_0\|_{1, \Omega} \|S\|_{1, \Omega} \leq \alpha_0 M_{\psi}^{\delta} \|S\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \eta, S \in \mathcal{T}, \quad (57)$$

$$|(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C_0, h)| \leq \gamma_2 \|\mathbf{u}_0\|_{1, \Omega} \|C_0\|_{1, \Omega} \|h\|_{1, \Omega} \leq \gamma_2 c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} M_{\phi}^{\tau} \|h\|_{1, \Omega} \quad \text{для любой } h \in \mathcal{T}, \quad (58)$$

$$|(\mathbf{w} \cdot \nabla C_0, h)| \leq \gamma_2' \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \|C_0\|_{L^4(\Omega)} \|h\|_{1, \Omega} \leq \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \|h\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \mathbf{w} \in V, h \in \mathcal{C}, \quad (59)$$

$$|(\gamma(T_0 + \eta, C_0 + \mu)C_0, h)| \leq \gamma_0 \|C_0\|_{1, \Omega} \|h\|_{1, \Omega} \leq \gamma_0 M_{\varphi}^{\tau} \|h\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \eta \in \mathcal{T}, \mu, h \in \mathcal{C}. \quad (60)$$

Из (17), (19), (30), (33), (52), (54), (55), (57), (58) и (60) следует, что $l_1^{\mathbf{z}} \in \mathcal{T}^*$, $l_2^{\mathbf{z}} \in \mathcal{C}^*$, $l_0^{\mathbf{z}} \in V^*$ для любой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$, и имеют место следующие оценки:

$$\|l_1^{\mathbf{z}}\|_{\mathcal{T}^*} \leq M_{l_1}^{\delta} = \|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N} + k_{\max} M_{\psi}^{\delta} + \gamma_2 c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} M_{\psi}^{\delta} + \alpha_0 M_{\psi}^{\delta}, \quad (61)$$

$$\|l_2^z\|_{C^*} \leq M_{l_2}^\tau = \|f^c\|_{C^*} + \lambda_{\max} M_\varphi^\tau + \gamma_2 c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} M_\varphi^\tau + \gamma_0 M_\varphi^\tau, \quad (62)$$

$$\|l_0^z\|_{V^*} \leq M_{l_0} \equiv \|\mathbf{f}\|_{-1, \Omega} + M_{\mathbf{g}}, \quad M_{\mathbf{g}} = \nu_{\max} c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} + \gamma_1 c_{\varepsilon_0}^2 \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma}^2. \quad (63)$$

Более того, для каждой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ билинейная форма $a_1^z: \mathcal{T} \times \mathcal{T}$, определённая в (46), является непрерывной и коэрцитивной с константой коэрцитивности k_* , определённой в лемме 1. Следовательно, имеет место следующая оценка:

$$a_1^z(S, S) \geq k_{\min}(\nabla S, \nabla S) \geq k_* \|S\|_{1, \Omega}^2 \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}. \quad (64)$$

Поскольку для правой части задачи (46) в силу (61) и (56) справедлива оценка

$$|\langle l_1, S \rangle - (\mathbf{w} \cdot \nabla T_0, S)| \leq (M_{l_1}^\delta + \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega}) \|S\|_{1, \Omega} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (65)$$

то из теоремы Лакса – Мильграма следует, что для любой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ существует единственное решение $\tilde{T} \equiv \tilde{T}_{\mathbf{z}} \in \mathcal{T}$ задачи (46). Кроме того, в силу (64) и (65), для решения $\tilde{T}_{\mathbf{z}}$ и для суммы $T \equiv T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}$ выполняются следующие оценки:

$$\|\tilde{T}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} \leq c_1 \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_1 M_{l_1}^\delta \quad (c_1 = 1/k_*), \quad \|T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} \leq c_1 \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_1 M_{l_1}^\delta + M_\psi^\delta. \quad (66)$$

Рассуждая аналогично и используя (59), (62), мы можем доказать, что для любой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ существует единственное решение $\tilde{C} \equiv \tilde{C}_{\mathbf{z}} \in \mathcal{C}$ задачи (47), и выполняются следующие оценки:

$$\|\tilde{C}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} \leq c_2 \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_2 M_{l_2}^\tau \quad (c_2 = 1/\lambda_*), \quad \|C_0 + \tilde{C}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} \leq c_2 \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_2 M_{l_2}^\tau + M_\varphi^\tau. \quad (67)$$

Обратимся теперь к задаче (48) относительно $\tilde{\mathbf{u}}$. Из (31), (63), (66) и (67) вытекает следующая оценка для правой части задачи (48):

$$\begin{aligned} & |\langle l_0, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1(T_0 + \eta)(T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}), \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2(C_0 + \mu)(C_0 + \tilde{C}_{\mathbf{z}}), \mathbf{v})| \\ & \leq (M_{l_0} + \beta_1 \|T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} + \beta_2 \|C_0 + \tilde{C}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega}) \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \\ & \leq [M_{l_0} + \beta_1 (c_1 \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_1 M_{l_1}^\delta + M_\psi^\delta)] \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} + \beta_2 (c_2 \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_2 M_{l_2}^\tau + M_\varphi^\tau) \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \\ & \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (68)$$

Кроме того, из (21), (24) и (52) следует, что билинейная форма $a_0^z: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, определённая в (48), является непрерывной и коэрцитивной с константой коэрцитивности $\nu_*/2$, где ν_* определено в лемме 1. Следовательно, по теореме Лакса – Мильграма для каждой тройки $(\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ существует единственное решение $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ задачи (48), и выполняется оценка

$$(\nu_*/2) \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1, \Omega} \leq (\beta_1 c_1 \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + \beta_2 c_2 \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega}) + u_\delta + v_\tau. \quad (69)$$

Здесь два последних слагаемых в правой части (константы) u_δ и v_τ определяются формулами

$$u_\delta = M_{l_0} + \beta_1 c_1 M_{l_1}^\delta + \beta_1 M_\psi^\delta, \quad v_\tau = \beta_2 c_2 M_{l_2}^\tau + \beta_2 M_\varphi^\tau. \quad (70)$$

Как уже упоминалось, следующий этап состоит в построении ограниченного выпуклого замкнутого множества $K \subset W$, которое оператор F отображает в себя. При построении этого множества K мы будем использовать ранее полученные соотношения (66)–(69) и будем искать искомое множество K в форме «коробки»:

$$K = \{(\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W \mid \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \leq M_{\tilde{\mathbf{u}}}, \|\eta\|_{1, \Omega} \leq M_{\tilde{T}}, \|\mu\|_{1, \Omega} \leq M_{\tilde{C}}\}. \quad (71)$$

Здесь $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$, $M_{\tilde{T}}$ и $M_{\tilde{C}}$ — некоторые положительные константы, которые мы будем называть размерами («коробки» K). Они будут определены из условия $F(K) \subseteq K$.

Во Введении уже указывалось, что схема построения множества K будет различаться в зависимости от двух сценариев. Они определяются одним из следующих неравенств:

$$1) \nu_* \leq \nu_*^0 \equiv 2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \quad \text{и} \quad 2) \nu_* > 2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2). \quad (72)$$

Сценарий 1) физически отвечает случаю, когда коэффициент $\nu_* \equiv \delta_0 \nu_{\min}$, характеризующий минимальное значение вязкости жидкости, меньше константы $\nu_*^0 \equiv 2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2)$ или равен ν_*^0 , в то время как сценарий 2) отвечает случаю, когда коэффициент ν_* больше константы ν_*^0 . В связи с этим мы будем называть (в некотором смысле условно) сценарий 1) в (72) сценарием с «малой вязкостью», а сценарий 2) в (72) — сценарием с «большой вязкостью».

Для сценария 1) в (72) удобно выбрать параметры $\delta_0 \in (0, 1)$ и $\tau_0 \in (0, 1)$ из условия:

$$\delta_0 = \tau_0 = \frac{\nu_*}{4\nu_*^0} \equiv \frac{\nu_*}{8(\beta_1 c_1 \gamma'_2 + \beta_2 c_2 \gamma'_2)} \leq \frac{1}{4}. \quad (73)$$

Из (73) следует, что

$$\delta_0 \leq \frac{\nu_*}{8\beta_1 c_1 \gamma'_2}, \quad \tau_0 \leq \frac{\nu_*}{8\beta_2 c_2 \gamma'_2}. \quad (74)$$

При выборе δ_0 и τ_0 , как указано в (73), мы выводим из (66), (67) и (69), с учётом (74), что

$$\|\tilde{T}\|_{1,\Omega} \leq (\nu_*/8\beta_1)\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + c_1 M_{l_1}^{\delta_0}, \quad \|\tilde{C}\|_{1,\Omega} \leq (\nu_*/8\beta_2)\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + c_2 M_{l_2}^{\tau_0}, \quad (75)$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \leq (1/2)\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + (2/\nu_*)(u_{\delta_0} + v_{\tau_0}). \quad (76)$$

Используя (75), (76), легко показать, что искомые размеры $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$, $M_{\tilde{T}}$ и $M_{\tilde{C}}$ определяются следующими формулами:

$$M_{\tilde{\mathbf{u}}} = (4/\nu_*)M_0, \quad M_0 = u_{\delta_0} + v_{\tau_0}, \quad \delta_0 = \tau_0 = \nu_*/4\nu_*^0, \quad (77)$$

$$M_{\tilde{T}} = (1/2\beta_1)M_0 + c_1 M_{l_1}^{\delta_0}, \quad M_{\tilde{C}} = (1/2\beta_2)M_0 + c_2 M_{l_2}^{\tau_0}. \quad (78)$$

Это означает, что для сценария 1) множество K , определённое формулами (71), (77) и (78), где значения δ_0 и τ_0 определены из (73), отображается оператором F в себя.

Рассмотрим теперь сценарий 2). Чтобы построить «коробку» K в этом случае, введём вспомогательное число $\theta \in (0, 1)$ и значения параметров δ и τ формулами

$$\theta \nu_* = 2\beta_1 c_1 \gamma'_2 + 2\beta_2 c_2 \gamma'_2, \quad \theta = \frac{\nu_*^0}{\nu_*} \equiv \frac{2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2)}{\nu_*}, \quad \delta = \delta_0 = 1, \quad \tau = \tau_0 = 1, \quad (79)$$

и перепишем с учётом (79) неравенство (69) в виде

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \leq \theta \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + (2/\nu_*)M_0. \quad (80)$$

Рассуждая далее, как при анализе сценария 1, можно легко установить, что для сценария 2 размеры искомой коробки K , имеющей вид (71), определяются формулами

$$M_{\tilde{\mathbf{u}}} = \frac{2}{\nu_*} \frac{M_0}{(1-\theta)}, \quad M_0 \equiv u_{\delta_0} + v_{\tau_0}, \quad \theta \equiv \frac{2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2)}{\nu_*}, \quad \delta_0 = \tau_0 = 1, \quad (81)$$

$$M_{\tilde{T}} = c_1 \gamma'_2 M_{\tilde{\mathbf{u}}} + c_1 M_{l_1}^{\delta_0} = \frac{2c_1 \gamma'_2 M_0}{\nu_*(1-\theta)} + c_1 M_{l_1}^{\delta_0}, \quad M_{\tilde{C}} = \frac{2c_2 \gamma'_2 M_0}{\nu_*(1-\theta)} + c_2 M_{l_2}^{\tau_0}. \quad (82)$$

Подчеркнём, что для каждого из сценариев 1) и 2) для любой тройки $(\mathbf{w}, \eta, \mu) \in K$ решение $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C})$ задачи (46), (47), (48) удовлетворяет следующим оценкам:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \leq M_{\tilde{\mathbf{u}}}, \quad \|\tilde{T}\|_{1,\Omega} \leq M_{\tilde{T}}, \quad \|\tilde{C}\|_{1,\Omega} \leq M_{\tilde{C}}, \quad (83)$$

где $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$, $M_{\tilde{T}}$ и $M_{\tilde{C}}$ – размеры соответствующего множества K . Важно, что в обоих сценариях 1) и 2) размеры $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$, $M_{\tilde{T}}$ и $M_{\tilde{C}}$ являются непрерывными неубывающими функциями норм $\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}$, $\|f\|_{\mathcal{T}^*}$, $\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}$, $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$, $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}$ и $\|\chi\|_{\Gamma_N}$.

Остаётся доказать, что оператор F компактен и непрерывен на множестве K , определённом формулами (71) с соответствующими конечными значениями $M_{\tilde{\mathbf{u}}} < \infty$, $M_{\tilde{T}} < \infty$ и $M_{\tilde{C}} < \infty$. Для этого возьмём произвольную последовательность $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n)$, $n = 1, 2, \dots$ из K и положим $\mathbf{y}_n \equiv (\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{T}_n, \tilde{C}_n) = F(\mathbf{z}_n) \in K$. Мы покажем, что из последовательности $\mathbf{y}_n$ можно извлечь подпоследовательность, которая сходится по норме X к элементу $\mathbf{y} \in K$. Сначала заметим, что в силу рефлексивности пространств $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и компактности вложений $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$, существует подпоследовательность последовательности $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n)$ (которую мы снова обозначим через $\mathbf{z}_n$), и существует элемент $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in K$ такой, что

$$\eta_n \rightarrow \eta \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^4(\Omega) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (84)$$

$$\mu_n \rightarrow \mu \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^4(\Omega) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (85)$$

$$\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w} \text{ слабо в } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ и сильно в } \mathbf{L}^4(\Omega) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (86)$$

Более того, $\eta_n \rightarrow \eta$, $\mu_n \rightarrow \mu$, $\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w}$ п.в. в Ω при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим элемент $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) = F(\mathbf{z}) \in K$. По определению, компоненты $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{T}$ и $\tilde{C}$ элемента $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) \in K$ являются решениями задач (46), (47), (48), отвечающими тройке $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu)$, тогда как компоненты $(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{T}_n, \tilde{C}_n)$ элемента $\mathbf{y}_n \equiv (\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{T}_n, \tilde{C}_n) \in W$ являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} a_1^{\mathbf{z}_n}(\tilde{T}_n, S) &\equiv (k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla \tilde{T}_n, \nabla S) + (\alpha(T_0 + \eta_n) \tilde{T}_n, S)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \tilde{T}_n, S) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla \tilde{T}_n, S) \\ &= \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} - (k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla T_0, \nabla S) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, S) \\ &\quad - (\mathbf{w}_n \cdot \nabla T_0, S) - (\alpha(T_0 + \eta_n) T_0, S)_{\Gamma_N} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} a_2^{\mathbf{z}_n}(\tilde{C}_n, h) &\equiv (\lambda(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla \tilde{C}_n, \nabla h) + (\gamma(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \tilde{C}_n, h) \\ &\quad + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \tilde{C}_n, h) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla \tilde{C}_n, h) = \langle f^c, h \rangle - (\lambda(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla C_0, \nabla h) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, h) \\ &\quad - (\mathbf{w}_n \cdot \nabla C_0, h) - (\gamma(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) T_0, h) \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} a_0^{\mathbf{z}_n}(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) &\equiv (\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla \tilde{\mathbf{u}}_n, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\mathbf{w}_n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \\ &\quad - (\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n)(T_0 + \tilde{T}_n), \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n)(C_0 + \tilde{C}_n), \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (89)$$

Они получаются из (46), (47) и (48) заменой элемента $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu)$ на $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n)$ и заменой элемента $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C})$ на $\mathbf{y}_n = (\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{T}_n, \tilde{C}_n)$.

Докажем, что $\tilde{T}_n \rightarrow \tilde{T}$ в $H^1(\Omega)$, $\tilde{C}_n \rightarrow \tilde{C}$ в $H^1(\Omega)$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ сильно при $n \rightarrow \infty$. С этой целью вычтем (46), (47) и (48) из (87), (88) и (89) соответственно. Получим следующие линейные вариационные задачи для разностей $\tilde{T}_n - \tilde{T}$, $\tilde{C}_n - \tilde{C}$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} a_1^{\mathbf{z}_n}(\tilde{T}_n - \tilde{T}, S) &\equiv (k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla (\tilde{T}_n - \tilde{T}), \nabla S) + (\alpha(T_0 + \eta_n) (\tilde{T}_n - \tilde{T}), S)_{\Gamma_N} \\ &\quad + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla (\tilde{T}_n - \tilde{T}), S) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla (\tilde{T}_n - \tilde{T}), S) \\ &= -((k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla (T_0 + \tilde{T}), \nabla S) \\ &\quad - ((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla (T_0 + \tilde{T}), S) - ((\alpha(T_0 + \eta_n) - \alpha(T_0 + \eta)) (T_0 + \tilde{T}), S)_{\Gamma_N} \\ &\quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned}
a_2^{z_n}(\tilde{C}_n - \tilde{C}, h) &\equiv (\lambda(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla(\tilde{C}_n - \tilde{C}), \nabla h) \\
&\quad + (\gamma(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n)(\tilde{C}_n - \tilde{C}), h) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla(\tilde{C}_n - \tilde{C}), h) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla(\tilde{C}_n - \tilde{C}), h) \\
&= -((\lambda(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - \lambda(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla(C_0 + \tilde{C}), \nabla h) - ((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla(C_0 + \tilde{C}), h) \\
&\quad - ((\gamma(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - \gamma(T_0 + \eta, C_0 + \mu))(C_0 + \tilde{C}), h) \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0^{z_n}(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &\equiv (\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) \\
&\quad + (((\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\mathbf{w}_n \cdot \nabla)(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) \\
&= -((\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - \nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{v}) \\
&\quad - (((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - (\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n)(\tilde{T}_n - \tilde{T}), \mathbf{v}) - ((\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n) - \mathbf{b}_1(T_0 + \eta))(T_0 + \tilde{T}), \mathbf{v}) \\
&\quad + (\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n)(\tilde{C}_n - \tilde{C}), \mathbf{v}) + ((\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n) - \mathbf{b}_2(C_0 + \mu))(C_0 + \tilde{C}), \mathbf{v}) \\
&\quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (92)
\end{aligned}$$

Основываясь на задачах (90), (91) и (92), докажем, что нормы их решений, представляющих собой разности $\tilde{T}_n - \tilde{T}$, $\tilde{C}_n - \tilde{C}$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}$, стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Чтобы установить этот факт, достаточно показать, что правые части (90), (91) и (92) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ для всех тестовых функций $S \in \mathcal{T}$, $h \in \mathcal{C}$ и $\mathbf{v} \in V$ соответственно. Сначала рассмотрим задачу (90) и покажем, что каждое слагаемое в её правой части стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Используя оценки (26), (83) и (86), для второго слагаемого получаем

$$\begin{aligned}
|((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla(T_0 + \tilde{T}), S)| &\leq \gamma'_2 \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|T_0 + \tilde{T}\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \\
&\leq \gamma'_2 M_T \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|S\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}. \quad (93)
\end{aligned}$$

Для доказательства сходимости к нулю двух других слагаемых в правой части (90) мы применим теорему Лебега о мажорантной сходимости. Начнём с первого слагаемого в правой части (90). Используя (16) с $T_n = T_0 + \eta_n$, $C_n = C_0 + \mu_n$, $T = T_0 + \eta$, $C = C_0 + \mu$, $f = \nabla(T_0 + \tilde{T}) \cdot \nabla S$, и принимая во внимание (84) и (85), мы выводим, что

$$\begin{aligned}
|((k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla(T_0 + \tilde{T}), \nabla S)| \\
\equiv \left| \int_{\Omega} [k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)] \nabla(T_0 + \tilde{T}) \cdot \nabla S \, d\mathbf{x} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \\
\text{для любой } S \in \mathcal{T}. \quad (94)
\end{aligned}$$

По аналогичной схеме мы доказываем, что

$$\begin{aligned}
|((\alpha(T_0 + \eta_n) - \alpha(T_0 + \eta))(T_0 + \tilde{T}), S)_{\Gamma_N}| \\
= \left| \int_{\Gamma_N} [\alpha(T_0 + \eta_n) - \alpha(T_0 + \eta)] (T_0 + \tilde{T}) S \, d\sigma \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}. \quad (95)
\end{aligned}$$

Как показано выше, для любой тройки $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n) \in W$ билинейная относительно разности $\tilde{T}_n - \tilde{T}$ и S форма $a_1^{z_n} : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, определённая в (90), является непрерывной и коэрцитивной с константой коэрцитивности $k_* > 0$. В силу (93), (94), (95) и теоремы Лакса – Мильграма, применённой к задаче (90), это означает, что

$$\|\tilde{T}_n - \tilde{T}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (96)$$

Нам осталось показать, что

$$\|\tilde{C}_n - \tilde{C}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0, \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (97)$$

Первое утверждение в (97) доказывается аналогично утверждению (96). Чтобы доказать второе утверждение в (97), обратимся к задаче (92) и оценим сначала, следуя подходу, используемому для вывода оценки (96), третье слагаемое в правой части (92). Используя (23), (83) и (86), мы заключаем, что

$$|((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| \leq \gamma'_1 M_{\tilde{\mathbf{u}}} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (98)$$

Применяя далее оценку (31) к четвёртому и шестому слагаемым в правой части (92) и используя (96) и первое соотношение в (97), выводим, что

$$|(\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n)(\tilde{T}_n - \tilde{T}), \mathbf{v})| \leq \beta_1 \|\tilde{T}_n - \tilde{T}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (99)$$

$$|(\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n)(\tilde{C}_n - \tilde{C}), \mathbf{v})| \leq \beta_2 \|\tilde{C}_n - \tilde{C}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (100)$$

Чтобы установить сходимость к нулю остальных слагаемых в правой части (92), мы снова используем теорему Лебега о мажорантной сходимости. Принимая во внимание (84), (85), а также ограниченность и непрерывность функций $\nu(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^2$ и $b_1(\cdot)$, $b_2(\cdot)$ в $\mathbb{R}^1$, мы выводим с помощью указанной теоремы, что

$$((\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - \nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{v}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (101)$$

$$|(\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n) - \mathbf{b}_1(T_0 + \eta))(T_0 + \tilde{T}) \cdot \mathbf{v})| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (102)$$

$$|(\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n) - \mathbf{b}_2(C_0 + \mu))(C_0 + \tilde{C}) \cdot \mathbf{v})| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (103)$$

Из (98)–(103) в силу теоремы Лакса — Мильграма, применённой к задаче (92), (которая является коэрцитивной с константой $\nu_*/2$, не зависящей от n ,) мы получаем справедливость второго соотношения в (97).

Из (96) и (97) следует, что определённый выше оператор $F: W \rightarrow W$ является непрерывным и компактным на множестве $K \subset W$, заданном в (71). Следовательно, по теореме Шаудера о неподвижной точке оператор F имеет неподвижную точку $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) = F(\mathbf{z}) \in K$, которая по построению является искомым решением задачи (43), (44), (45) и, кроме того, удовлетворяет всем оценкам в (83). Это, в свою очередь, означает, что тройка $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, определённая в (42), является искомым решением задачи (38)–(41), и для $(\mathbf{u}, T, C)$ выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} &\leq M_{\mathbf{u}} \equiv M_{\tilde{\mathbf{u}}} + c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \\ \|T\|_{1,\Omega} &\leq M_{\tilde{T}} + \|T_{\delta_0}\|_{1,\Omega} \leq M_T \equiv M_{\tilde{T}} + M_{\delta_0}(\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}), \\ \|C\|_{1,\Omega} &\leq M_{\tilde{C}} + \|C_{\tau_0}\|_{1,\Omega} \leq M_C \equiv M_{\tilde{C}} + M_{\tau_0}(\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}). \end{aligned} \quad (104)$$

Остаётся доказать существование компоненты p слабого решения задачи 1, которая вместе с тройкой $(\mathbf{u}, T, C)$ удовлетворяет тождеству (37). Как упоминалось выше, это достигается с помощью схемы де Рама (см. подробности в [30]). Кроме того, используя inf-sup условие (25) и следуя подходу в [20], можно вывести следующую оценку для p :

$$\|p\|_{\Omega} \leq M_p = \beta^{-1}[(\nu_{\max} + \gamma_1 M_{\mathbf{u}})M_{\mathbf{u}} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}]. \quad (105)$$

Здесь β — константа из (25). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполняются предположения 2.1–2.6. Тогда существует слабое решение $(\mathbf{u}, T, C, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ задачи 1, которое удовлетворяет оценкам (104) и (105). В (104) величины $M_{\bar{\mathbf{u}}}$, $M_{\bar{T}}$ и $M_{\bar{C}}$ определены формулами (77), (78) для сценария 1) в (72) и формулами (81), (82) для сценария 2) в (72).

4. УСЛОВНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы кратко обсудим вопрос о единственности решения задачи 1, существование которой было установлено в разделе 3. Для простоты мы будем исследовать единственность решения задачи 1 в более простом частном случае, соответствующем ситуации, когда $\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\chi = 0$, и поэтому граничные условия (4) принимают вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad C = \varphi \text{ на } \Gamma, \quad \partial T / \partial n = 0 \text{ на } \Gamma_N. \quad (106)$$

Кроме того, мы предположим, что старший коэффициент $k(\cdot)$ (или $\lambda(\cdot)$) зависит только от температуры T (или только от концентрации C), в то время как старший коэффициент $\nu(\cdot, \cdot)$ по-прежнему зависит от обоих параметров T и C .

Ниже мы будем называть задачу, описываемую соотношениями (1), (2), (3), (106), где коэффициенты $k(T, C)$ и $\lambda(T, C)$ следует заменить на $k(T)$ и $\lambda(C)$, соответственно, задачей 2. Её слабая формулировка состоит в нахождении четвёрки $(\mathbf{u}, T, C, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} (\nu(T, C) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1(T)T) + (\mathbf{b}_2(C)C, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (107)$$

$$(k(T) \nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) = \langle f, S \rangle \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (108)$$

$$(\lambda(C) \nabla C, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C, h) = \langle f^c, h \rangle \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (109)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad C = \varphi \text{ на } \Gamma. \quad (110)$$

Будем предполагать, что коэффициенты $\nu(\cdot, \cdot)$, $k(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$, $\mathbf{b}_1(\cdot)$ и $\mathbf{b}_2(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям:

4.1. $\nu(\cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}^2)$, $k(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, $\lambda(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ и существуют положительные константы $\nu_{\min}$, $k'_{\min}$, $k'_{\max}$, $\lambda'_{\min}$, $\lambda'_{\max}$ такие, что

$$\begin{aligned} 0 < \nu_{\min} \leq \nu(t, s), \quad 0 < k_{\min} \leq k(t), \quad 0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(s) \quad \text{для любой пары } (t, s) \in \mathbb{R}^2, \\ |k'(t)| \leq k'_{\max} < \infty, \quad |\lambda'(s)| \leq \lambda'_{\max} < \infty \quad \text{для любой пары } (t, s) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (111)$$

4.2. Функции $\nu(\cdot, \cdot)$, $k'(\cdot)$, $\lambda'(\cdot)$, а также $k(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$, являются липшиц-непрерывными и удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|\nu(t_1, s_1) - \nu(t_2, s_2)| \leq L_1^\nu |t_1 - t_2| + L_2^\nu |s_1 - s_2| \quad \text{для любых } (t_1, s_1), (t_2, s_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (112)$$

$$|k(s_1) - k(s_2)| \leq L_k |s_1 - s_2|, \quad |k'(s_1) - k'(s_2)| \leq L_{k'} |s_1 - s_2| \quad \text{для любых } s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1, \quad (113)$$

$$|\lambda(s_1) - \lambda(s_2)| \leq L_\lambda |s_1 - s_2|, \quad |\lambda'(s_1) - \lambda'(s_2)| \leq L_{\lambda'} |s_1 - s_2| \quad \text{для любых } s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1. \quad (114)$$

4.3. Функции $b_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, являются липшиц-непрерывными, и в дополнение к (8) они удовлетворяют условиям $|b_i(t) - b_i(s)| \leq L_i^b |t - s|$ для любой пары $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, из которых вытекают следующие оценки:

$$\|\mathbf{b}_i(\varphi_1) - \mathbf{b}_i(\varphi_2)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq L_i^b \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in H^2(\Omega), \quad L_i^b = L_i^b |\mathbf{G}|. \quad (115)$$

В (112)–(115) $L_1^v, L_2^v, L_k, L_{k'}, L_\lambda, L_{\lambda'}, L_1^b, L_2^b$ – некоторые положительные константы.

Поскольку задачу 2 можно рассматривать как частный случай задачи 1, то из теоремы 1 следует, что слабое решение $(\mathbf{u}, T, C, p)$ задачи 2 существует при предположениях **2.1–2.3, 2.5** (где мы полагаем $\alpha = 0, \gamma = 0, \chi = 0$) и **4.1–4.3**, и, кроме того, для решения $(\mathbf{u}, T, C, p)$ выполняются соответствующие оценки (104), (105).

Задача 2 близка к задаче 2, рассмотренной в [26], для которой доказана локальная условная единственность, и переходит в неё при $\varphi = 0, \psi = 0$. С учётом этих фактов мы можем доказать единственность решения задачи 2 с помощью небольшого изменения схемы, используемой в [26]. Соответствующая схема основана на свойстве эквивалентности между стандартной нормой $\|\varphi\|_{2,\Omega}$ и L^2 -нормой $\|\Delta\varphi\|_\Omega$ оператора Лапласа на функциях φ , принадлежащих некоторому подпространству $\tilde{H}^2(\Omega) \subset H^2(\Omega)$. В качестве подпространства $\tilde{H}^2(\Omega)$ мы будем использовать следующие конкретные подпространства:

$$H_t^2(\Omega) = \{T \in H^2(\Omega) \mid T|_{\Gamma_D} = 0, \partial T / \partial n|_{\Gamma_N} = 0\}, \quad H_c^2(\Omega) = \{C \in H^2(\Omega) \mid C|_\Gamma = 0\}$$

для температуры T и концентрации C соответственно. Введём в произведении $\mathbf{H}^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ следующее множество:

$$B_\varepsilon = \{(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \mid \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} < \varepsilon, \|T\|_{2,\Omega} < \varepsilon, \|C\|_{2,\Omega} < \varepsilon\}.$$

Справедлива следующая теорема о локальной единственности слабого решения задачи 2, которое обладает дополнительным свойством гладкости для температуры и концентрации. Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы единственности в [26] и здесь опускается.

Теорема 2. Пусть выполняются предположения **2.1–2.3, 2.5, 4.1–4.3**, и, кроме того, $\Gamma \in C^{1,1}$, $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что если существует слабое решение $(\mathbf{u}, T, C, p)$ задачи 2, удовлетворяющее $(\mathbf{u}, T, C) \in B_\varepsilon$, то это решение единственно в B_ε .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована неоднородная краевая задача для стационарных уравнений тепломассопереноса с переменными старшими и младшими коэффициентами. Предполагается, что старшие коэффициенты ν, k, λ и/или младшие коэффициенты γ, b_i ($i = 1, 2$) и α зависят от температуры среды и/или концентрации вещества. Мы определили понятие слабого решения задачи 1 и установили условия на коэффициенты $\nu, k, \lambda, \gamma, b_i, \alpha$ и другие данные задачи, обеспечивающие её глобальную разрешимость. Кроме того, мы установили локальную единственность слабого решения при дополнительных предположениях на данные задачи и гладкость диффузионных компонент (температуры и концентрации) слабого решения.

Следует отметить, что мы доказали локальную единственность решения задачи 1 только в частном случае, когда $\alpha = 0, \gamma = 0, \chi = 0$, а коэффициент k (или λ) зависит только от T (или от C). Задача доказательства единственности слабого решения в общем случае остаётся открытой. Авторы планируют посвятить отдельную статью детальному анализу единственности решения задачи 1 в общем случае, а также изучению других важных свойств решений рассматриваемой краевой задачи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (проект 075-00460-26-00) и работа первого автора также выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2026-1312 от 20.02.2026). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leray J.* Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique // *J. Math. Pure Appl.* 1933. V. 12. P. 1–82.
2. *Leray J.* Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // *Acta Math.* 1934. V. 63. P. 193–248.
3. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 1961.
4. *Galdi G.P.* An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations, Steady-state problems. New York: Springer, 2011; DOI: 10.1007/978-0-387-09620-9
5. *Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R.* The Steady Navier–Stokes System: Basics of the Theory and the Leray Problem. Switzerland: Springer Birkhäuser Cham, 2024; DOI: 10.1007/978-3-031-50898-1
6. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // *Докл. АН СССР.* 1959. Т. 125, № 3. С. 492–495.
7. *Lorca S. A., Boldrini J. L.* Stationary solutions for generalized Boussinesq models // *J. Differ. Equ.* 1996. V. 124, N 2. P. 389–406.
8. *Lorca S.A., Boldrini J.L.* The initial value problem for a generalized Boussinesq model // *Nonlinear Analysis.* 1999. V. 36, N 4. P. 457–480; DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00635-4
9. *Dias H., Galiano G.* Existence and uniqueness of solutions to the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion // *Topological Methods in Nonlinear Anal.* 1998. V. 11, N 1. P. 59–82.
10. *Buliček M., Málek J., Rajagopal K. R.* Navier's slip and evolutionary Navier-Stokes-like systems with pressure and shear-rate dependent viscosity // *Indiana University Math. J.* 2007. V. 56, N 1. P. 51–86.
11. *Buliček M., Feireisl E., Málek J.* A Navier-Stokes-Fourier system for incompressible fluids with temperature dependent material coefficients // *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 2009. V. 10, N 2. P. 992–1015; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2007.11.018
12. *Гончарова О.Н.* Единственность решения двумерной нестационарной задачи для уравнений конвекции с вязкостью, зависящей от температуры // *Дифференц. уравнения.* 2002. Т. 38, № 2. С. 23–242.
13. *Naumann J.* On the existence of weak solutions to the equations of non-stationary motion of heat-conducting incompressible viscous fluids // *Math. Meth. App. Sci.* 2006. V. 29. P. 1883–1906.
14. *Kim T., Cao D.* A non-steady system with friction boundary conditions for flow of heat-conducting incompressible viscous fluids // *J. Math. Anal. Appl.* 2020. V. 484, N 1. Article number 123676; DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.123676
15. *Antontsev S.N., Diaz J.I., B. de Oliveira H.* Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing // *Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 2005. V. 61. P. 1–14; DOI: 10.1007/3-7643-7317-2_1
16. *Antontsev S.N., B. de Oliveira H.* The Oberbeck-Boussinesq problem modified by a thermo-absorption term // *J. Math. Anal. Appl.* 2011. V. 379, N 2. P. 802–817; DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.02.018
17. *Galiano G.* Spatial and time localization of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion // *Nonlinear Anal.* 2000. V. 42, N 3. P. 423–438; DOI: 10.1016/S0362-546X(98)00355-1
18. *Consiglieri L.* Steady-state flows of thermal viscous incompressible fluids with convective-radiation effects // *Math. Meth. App. Sci.* 2006. V. 16, N 12. P. 2013–2027; DOI: 10.1142/S0218202506001790
19. *Барановский Е.С., Домнич А.А.* О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56, № 3. С. 317–327; DOI: 10.1134/S0374064120030036
20. *Alekseev G.V., Soboleva O.V.* Solvability analysis for the Boussinesq model of heat transfer under the nonlinear Robin boundary condition for the temperature // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2024. V. 382. Article number 2277; DOI: 10.1098/rsta.2023.0301

21. Алексеев Г.В., Спивак Ю.Э. Анализ смешанной краевой задачи для стационарной модели конвекции вещества с переменными коэффициентами вязкости и диффузии // Прикл. математика и техн. физика. 2024. Т. 65, № 5. С. 3–12; DOI: 10.15372/PMTF202415509
22. Kim T. Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions // Applications of Mathematics. 2022. V. 67, N 5. P. 593–613; DOI: 10.21136/AM.2022.0031-21
23. Гиль М.И. О разрешимости системы стационарных уравнений Буссинеска // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1936–1941.
24. Алексеев Г.В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
25. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010.
26. Алексеев Г.В., Соболева О.В. Разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 12. С. 1603–1619; DOI: 10.7868/S3034503025120023
27. Алексеев Г.В., Пухначев В.В., Соболева О.В. Анализ разрешимости краевой задачи для стационарной модели термодиффузии // Сиб. журн. индустр. математики. 2025. Т. 28, № 4. С. 5–20; DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.401
28. Joseph D.D. Stability of Fluid Motions. New York: Sprenger-Verlag, 1976.
29. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics, Volume 6: Fluid Mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1987.
30. Girault V., Raviart P.A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Berlin: Springer, 1986.
31. Serfozo R. Convergence of Lebesgue integrals with varying measures // Sankhya: The Indian J. of Stats. Series A. 1982. V. 44. P. 380–402.
32. Kovtunen V.A., Zubkova A.V., Reichelt S. Corrector estimates in homogenization of a nonlinear transmission problem for diffusion equations in connected domains // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. V. 43, N 4. P. 1838–1856; DOI: 10.1002/mma.6007
33. Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначёв В.В., Руссо Р. Задача протекания для уравнений Навье–Стокса // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 6. С. 115–176; DOI: 10.4213/rm9616

UDC 517.95

**SOLVABILITY OF AN INHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE
PROBLEM FOR A STATIONARY HEAT AND MASS TRANSFER
MODEL WITH VARIABLE COEFFICIENTS DEPENDING ON TWO
DIFFUSION COMPONENTS**

© 2026 G. V. Alekseev^{1,2a}, Yu. E. Rogozina^{1b}

¹*Institute of Applied Mathematics, FEB RAS,
Radio st., 7, Vladivostok 690041, Russia,*

²*Far Eastern Federal University,
Campus 10 Ajax Bay, Russky Island, Vladivostok 690922, Russia*

E-mails: ^aalekseev@iam.dvo.ru, ^buliyaspivak@gmail.com

Received 20.05.2026, revised 24.06.2026, accepted 15.07.2026

Abstract. An inhomogeneous new boundary value problem for the stationary heat and mass transfer model with variable coefficients is considered in the case when the leading coefficients of viscosity, thermal conductivity, and diffusivity, as well as lower-order coefficients, depend on two diffusive components: the temperature of the medium and the concentration of the dissolved substance. A mathematical apparatus based on the variational approach and using Schauder's fixed-point theorem and Lebesgue's dominated convergence theorem is developed to investigate the mentioned boundary value problem. Applying the developed apparatus, the global existence of a weak solution of the boundary value problem under consideration is proved, and sufficient conditions to the problem data are established providing local uniqueness of the weak solution possessing additional smoothness property for temperature and concentration.

Keywords: Navier–Stokes–Boussinesq equations, inhomogeneous boundary conditions, weak solution, global solvability, lifting, local uniqueness, Schauder's fixed-point theorem, Lebesgue's dominated convergence theorem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.201

REFERENCES

1. Leray J. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique. *J. Math. Pure Appl.*, 1933, Vol. 12, pp. 1–82.
2. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 1934, Vol. 63, pp. 193–248.
3. Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoj neszhimaemoj zhidkosti [Mathematical issues of the dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow: Fizmatlit, 1961 (in Russian).
4. Galdi G.P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations, Steady-state problems. N. Y.: Springer, 2011; DOI: 10.1007/978-0-387-09620-9
5. Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R. The Steady Navier–Stokes System: Basics of the Theory and the Leray Problem. Switzerland: Springer Birkhäuser Cham, 2024; DOI: 10.1007/978-3-031-50898-1
6. Ovsyannikov L.V. Gruppovye svoystva uravneniya nelinejnoj teploprovodnosti [Group properties of the nonlinear heat conduction equation] *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, Vol. 125, No. 3, pp. 492–495 (in Russian).

7. Lorca S.A., Boldrini J.L. Stationary solutions for generalized Boussinesq models. *J. Differ. Equ.*, 1996, Vol. 124, No. 2, pp. 389–406.
8. Lorca S.A., Boldrini J.L. The initial value problem for a generalized Boussinesq model. *Nonlinear Anal.*, 1999, Vol. 36, No. 4, pp. 457–480; DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00635-4
9. Dias H., Galiano G. Existence and uniqueness of solutions to the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 1998, Vol. 11, No. 1, pp. 59–82.
10. Bulíček M., Málek J., Rajagopal K. R. Navier's slip and evolutionary Navier-Stokes-like systems with pressure and shear-rate dependent viscosity. *Indiana University Math. J.*, 2007, Vol. 56, No. 1, pp. 51–86.
11. Bulíček M., Feireisl E., Málek J. A Navier-Stokes-Fourier system for incompressible fluids with temperature dependent material coefficients. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2009, Vol. 10, No. 2, pp. 992–1015; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2007.11.018
12. Goncharova O.N. Unique solvability of a two-dimensional nonstationary problem for the convection equations with temperature-dependent viscosity. *Differ. Equ.*, 2002, Vol. 38, No. 2, pp. 249–258; DOI: 10.1023/A:1015337513832
13. Naumann J. On the existence of weak solutions to the equations of non-stationary motion of heat-conducting incompressible viscous fluids. *Math. Meth. App. Sci.*, 2006, Vol. 29, pp. 1883–1906.
14. Kim T., Cao D. A non-steady system with friction boundary conditions for flow of heat-conducting incompressible viscous fluids. *J. Math. Anal. Appl.*, 2020, Vol. 484, No. 1, Article number 123676; DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.123676
15. Antontsev S.N., Diaz J.I., B. de Oliveira H. Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing. *Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2005, Vol. 61, pp. 1–14; DOI: 10.1007/3-7643-7317-2_1
16. Antontsev S.N., B. de Oliveira H. The Oberbeck-Boussinesq problem modified by a thermo-absorption term. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, Vol. 379, No. 2, pp. 802–817; DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.02.018
17. Galiano G. Spatial and time localization of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion. *Nonlinear Anal.*, 2000, Vol. 42, No. 3, pp. 423–438; DOI: 10.1016/S0362-546X(98)00355-1
18. Consiglieri L. Steady-state flows of thermal viscous incompressible fluids with convective-radiation effects. *Math. Meth. App. Sci.*, 2006, Vol. 16, No. 12, pp. 2013–2027; DOI: 10.1142/S0218202506001790
19. Baranovskii E. S., Domnich A. A. Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain. *Differ. Equ.*, 2020, Vol. 56, No. 3; P. 304–314; DOI: 10.1134/S0012266120030039
20. Alekseev G.V., Soboleva O.V. Solvability analysis for the Boussinesq model of heat transfer under the nonlinear Robin boundary condition for the temperature. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, 2024, Vol. 382, Article number 2277; DOI: 10.1098/rsta.2023.0301
21. Alekseev G. V., Spivak Yu. E. Analysis of a mixed boundary value problem for a stationary model of substance convection with variable viscosity and diffusion coefficients. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2024, Vol. 65, No. 5, pp. 793–801; DOI: 10.1134/S0021894424050018
22. Kim T. Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions. *Appl. Math.*, 2022, Vol. 67, No. 5, pp. 593–613; DOI: 10.21136/AM.2022.0031-21
23. Gil' M. I. Solvability of a system of stationary Boussinesq equations. *Differ. Equ.*, 1991, Vol. 27, No. 11, pp. 1377–1382.
24. Alekseev G. V. Solvability of inverse extremal problems for stationary heat and mass transfer equations. *Sib. Math. J.*, 2001, Vol. 42, No. 5, pp. 811–827; DOI: 10.1023/A:1011940606843
25. Alekseev G.V. Optimizaciya v stacionarnykh zadachah teplomassoperenosa i magnitnoj gidrodinamiki [Optimization in the Stationary Problems of the Heat-Mass Transfer and Magnetic Hydrodynamics]. Moscow: Nauchiy Mir, 2010 (in Russian).
26. Alekseev G.V., Soboleva O.V. Solvability of a boundary value problem for the stationary heat and mass transfer equations with variable coefficients. *Differ. Equ.*, 2025, Vol. 61, No. 12, pp. 1853–1868; DOI: 10.1134/S001226612512002X
27. Alekseev G.V., Puhachev V.V., Soboleva O.V. Analiz razreshimosti kraevoy zadachi dlya stacionarnoy modeli termodiffuzii [Analysis of the solvability of a boundary value problem for a stationary

- thermodiffusion model]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.* [Sib. J. Indust. Math.], 2025, Vol. 28, No. 4, pp. 5–20 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.401
28. Joseph D.D. *Stability of Fluid Motions*. N. Y.: Sprenger-Verl., 1976.
29. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics, Volume 6: Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1987.
30. Girault V., Raviart P.A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Berlin: Springe-Verl., 1986.
31. Serfozo R. Convergence of Lebesgue integrals with varying measures. *Indian J. Stats. Series A*, 1982, Vol. 44, pp. 380–402.
32. Kovtunenkov V.A., Zubkova A.V., Reichelt S. Corrector estimates in homogenization of a nonlinear transmission problem for diffusion equations in connected domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, Vol. 43, No. 4, pp. 1838–1856; DOI: 10.1002/mma.6007
33. Korobkov M.V., Pileckas K., Pukhnachev V.V., Russo R. The flux problem for the Navier–Stokes equation. *Russian Math. Surveys*, 2014, Vol. 69, No. 6, pp. 1065–1122; DOI: 10.1070/RM2014v069n06ABEH004928