

УДК 519.63

**ЧИСЛЕННО–АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ДВУХ
ЭПИДЕМИЙ С УЧЁТОМ МИГРАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ**

© 2026 А. В. Будянский

*Донской государственный технический университет,
пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону 344002, Россия*

E-mail: a_v_budyansky@mail.ru

Поступила в редакцию 05.11.2025 г.; после доработки 17.07.2026 г.;
принята к публикации 17.07.2026 г.

Целью настоящего исследования является изучение модели массовых инфекционных заболеваний на основе системы нелинейных параболических уравнений. Моделирование проводится в рамках гипотезы о двойной эпидемии, вызванной разными инфекционными штаммами или близкородственными вирусами. Подразумевается, что заболевания обеспечивают взаимный иммунитет. Рассматривается пространственно–временное взаимодействие двух категорий населения: восприимчивых к инфекции и инфицированных. При этом инфицированное население разделено на две непересекающиеся группы, относящиеся к разным заболеваниям. Учитывается локальное взаимодействие, определяющее взаимный переход из одной категории в другую, и миграционные потоки, обусловленные диффузией и направленной миграцией. Моделирование проводится без учёта демографических факторов и возможности получения иммунитета переболевшими. Для пространственной аппроксимации задачи применяется метод конечных разностей на основе смещённых сеток. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируется по времени методом Рунге — Кутты. Компьютерные эксперименты проводятся в системе MATLAB. В ходе исследования установлены параметрические зависимости, при которых в рассматриваемой задаче возникает непрерывное семейство равновесий. Проанализирована возможность нахождения стационарных распределений без использования численных методов. В вычислительных экспериментах дана трактовка эпидемиологических последствий в случае распада семейства решений. Исследовано влияние миграции на сценарии локального вытеснения и сосуществования вирусных инфекций.

Ключевые слова: математическое моделирование, эпидемия, нелинейные параболические уравнения, миграция, косимметрия.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.202

ВВЕДЕНИЕ

Вирусы сопровождают человечество на протяжении всей его истории, становясь причиной развития массовых инфекционных заболеваний [1]. Уходить от контроля иммунной системы и средств лечения им помогает способность к мутации и рекомбинации. При этом исходный вирус и полученный в ходе мутации новый штамм могут не пересекаясь присутствовать в одной популяции [2]. Кроме того, учёные наблюдали случаи, когда вирусы имеют разное происхождение, но вызывают перекрывающийся иммунный ответ носителя. Например, болезнь Зика, протекающая в более лёгкой форме, может обеспечить иммунную защиту от лихорадки Денге [3]. Это делает актуальным развитие математических моделей, позволяющих исследовать динамику двух взаимодействующих инфекционных заболеваний [4, 5, 6, 7].

Основным инструментом моделирования эпидемий является компартментальный подход, когда всё население разделяется на непересекающиеся группы в зависимости от риска заражения [8]. Данный тип моделей позволяет не только рассматривать усреднённые данные по

каждой группе [9, 10], но и учитывать распределение населения по ареалу. Учёт пространственной неоднородности имеет важное значение для понимания процессов, протекающих в биологических сообществах, и представляет интерес для математического моделирования [11, 12]. При этом, как правило, рассматривается случайное распространение, представляющее диффузионный процесс [13]. Модели распространения эпидемий с учётом направленной миграции, вызванной некоторым стимулом, в настоящий момент мало изучены.

В работе рассматривается детерминированная модель на основе системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Всё население разделено на восприимчивых к инфекциям (Susceptible) и инфицированных (Infected) двумя разными вирусами. Оба заболевания распространяются параллельно, и эпидемия, вызванная одним вирусом, даёт иммунитет к другому. Допускается выздоровление инфицированных, что относит рассматриваемую задачу к классу SIS-моделей [14, 15, 16]. Модель дополняется миграционными потоками, обусловленными диффузионным распространением и направленной миграцией. Направленная миграция учитывает неоднородность жизненных условий (некоторый постоянный стимул), а также неравномерность распределения инфицированных для группы восприимчивых к инфекции. Насколько известно автору модели двойной эпидемии с учётом подобных миграционных эффектов ранее не рассматривались. Для анализа модели применяется теория косимметричных динамических систем [17, 18], в которых возможно появление непрерывных семейств стационарных распределений. Анализ условий, при которых происходит распад семейства, позволяет дать трактовку ряду эпидемиологических сценариев.

1. МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВИРУСНЫХ ИНФЕКЦИЙ

В данном разделе описывается пространственно-временное взаимодействие трёх групп населения: восприимчивых к инфекциям $S(x, t)$ и двух групп инфицированных $I_A(x, t)$ и $I_B(x, t)$ вирусами A и B соответственно. Наиболее вероятным источником вируса B является мутация или рекомбинация вируса A . Для описания динамики по каждой группе используются два компонента: локальное взаимодействие, определяющее заболевание и выздоровление, а также перенос за счёт миграционных потоков.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\beta_1 S I_A}{N} - \frac{\beta_2 S I_B}{N} + \gamma_1 I_A + \gamma_2 I_B, \quad (1)$$

$$\frac{\partial I_A}{\partial t} = -\frac{\partial Q_2}{\partial x} + \frac{\beta_1 S I_A}{N} - \gamma_1 I_A, \quad (2)$$

$$\frac{\partial I_B}{\partial t} = -\frac{\partial Q_3}{\partial x} + \frac{\beta_2 S I_B}{N} - \gamma_2 I_B. \quad (3)$$

Здесь x — пространственная переменная, t — время, а $N(x, t) = S(x, t) + I_A(x, t) + I_B(x, t)$. Присутствие в знаменателях (1)–(3) всех групп населения определяет вероятность контакта инфицированных определённым вирусом с восприимчивыми [15]. Имеется в виду, что в данной точке ареала инфицированный индивид может контактировать не только с восприимчивыми к инфекции индивидами, но и с инфицированными. Модель подразумевает, что вирусы A и B дают перекрёстный иммунитет. Интенсивность заражения при контакте здорового населения группами I_A и I_B определяется коэффициентами β_1 и β_2 . Выздоровление задаётся слагаемыми с коэффициентами γ_1 и γ_2 . Коэффициенты γ_1 (γ_2) отражают вероятность завершения заболевания A (B) в единицу времени. Иногда данный показатель интерпретируют как величину, обратную средней продолжительности болезни. Подразумевается, что если заболевание проходит через k дней, то больной индивид в конкретный день выздоровеет с вероятностью $\gamma_j = 1/k$. Полагается, что параметры β_j, γ_j положительны.

Модель также учитывает миграционные потоки:

$$Q_1 = -d_1 \frac{\partial S}{\partial x} + a_1 S \frac{\partial P}{\partial x} + b_{12} S \frac{\partial I_A}{\partial x} + b_{13} S \frac{\partial I_B}{\partial x}, \quad (4)$$

$$Q_2 = -d_2 \frac{\partial I_A}{\partial x} + a_2 I_A \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (5)$$

$$Q_3 = -d_3 \frac{\partial I_B}{\partial x} + a_3 I_B \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (6)$$

Положительные коэффициенты d_j определяют диффузионное распространение. Направленная миграция, вызванная некоторым стимулом $P(x)$, описывается слагаемыми с параметрами a_j , а миграция вследствие неравномерности распределения населения слагаемыми с параметрами b_{1j} . Данный подход аналогичен [19, 20], когда перенос плотности S , вызванный неравномерностью распределения плотности I_A , задаётся выражением $b_{12} S \frac{\partial I_A}{\partial x}$. Знаки коэффициентов a_j, b_{1j} могут быть различны и определяют разные виды реакции. В дальнейшем функцию $P(x)$ будем понимать как *неравномерность распределения жизненных условий*. Миграция населения может быть вызвана желанием сменить климат, а также медицинским и человеческим факторами.

Рассматривается случай одномерного изолированного ареала $\Omega = [0, a]$, на границе которого ставятся условия отсутствия потоков:

$$Q_j(0, t) = Q_j(a, t) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Модель дополняется начальными распределениями плотностей:

$$S(x, 0) = S^0(x), \quad I_A(x, 0) = I_A^0(x), \quad I_B(x, 0) = I_B^0(x). \quad (8)$$

2. АНАЛИЗ МОДЕЛИ

В данном разделе проводится поиск стационарных решений задачи (1)–(8) без использования численных методов. На основе теории косимметрии [17] анализируются условия на параметры системы, при которых реализуется непрерывное семейство равновесий. Делается предположение о возможном исчезновении одного из заболеваний.

Рассматриваемая модель (1)–(8) при дополнительных условиях на параметры системы относится к классу косимметричных динамических систем, для которых возможно возникновение непрерывных семейств стационарных состояний. Для уравнения $\dot{Y} = F(Y)$ косимметрия L представляет собой вектор-функцию, которая ортогональна F для любого Y . В отличие от систем с симметрией, где все решения, принадлежащие одному семейству, обладают идентичным спектром устойчивости, косимметрия порождает семейства с вариативным спектром. Это означает, что в таких семействах могут сосуществовать как устойчивые, так и неустойчивые состояния. Существование косимметрии для исследуемой системы устанавливает следующая лемма.

Лемма 1. Вектор функция $L = (0, \gamma_2 e^{-(a_2/d_2)P} I_B, -\gamma_1 e^{-(a_3/d_3)P} I_A)^T$ является косимметрией системы (1)–(8) при

$$d_3/d_2 = a_3/a_2 = \beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1. \quad (9)$$

Доказательство. По определению косимметрии вектор L должен быть ортогонален правой части системы (1)–(8) для любых функций S, I_A, I_B . Это означает выполнение следующего равенства:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_0^a \left(-\frac{\partial Q_2}{\partial x} \gamma_2 e^{-(a_2/d_2)P} I_B + \frac{\partial Q_3}{\partial x} \gamma_1 e^{-(a_3/d_3)P} I_A \right) dx, \\ \Phi_2 &= \int_0^a \left(\left[\frac{\beta_1 S I_A}{N} - \gamma_1 I_A \right] \gamma_2 e^{-(a_2/d_2)P} I_B - \left[\frac{\beta_2 S I_B}{N} - \gamma_2 I_B \right] \gamma_1 e^{-(a_3/d_3)P} I_A \right) dx.\end{aligned}$$

Интегрирование по частям и учёт краевых условий позволяют записать Φ_1 в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_0^a \left(-\gamma_2 e^{-(a_2/d_2)P} \left[d_2 \frac{\partial I_A}{\partial x} - a_2 I_A \frac{\partial P}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial I_B}{\partial x} - \frac{a_2}{d_2} \frac{\partial P}{\partial x} I_B \right] \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1 e^{-(a_3/d_3)P} \left[d_3 \frac{\partial I_B}{\partial x} - a_3 I_B \frac{\partial P}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial I_A}{\partial x} - \frac{a_3}{d_3} \frac{\partial P}{\partial x} I_A \right] \right) dx.\end{aligned}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых с учётом (9) получаем $\Phi_1 = 0$. Подстановка (9) в Φ_2 даёт $\Phi_2 = 0$, что доказывает лемму 1. $\square$

В работе [12] для системы двух конкурирующих популяций установлено существование непрерывного семейства стационарных распределений. При этом у каждого члена семейства, характеризуемого индивидуальным соотношением плотностей видов на ареале, существует своя область начальных данных, из которых данное решение реализуется. Это семейство является следствием косимметрии задачи, что подталкивает к следующей гипотезе.

Гипотеза 1. При выполнении соотношений (9) для системы (1)–(8) будет существовать семейство стационарных распределений.

Условия (9) не накладывают ограничений на миграционные параметры восприимчивых к инфекции, что делает аналитический поиск решений затруднительным. Однако существование непрерывного семейства равновесий при дополнительных условиях устанавливает следующая лемма.

Лемма 2. Система (1)–(8) в случае выполнения условий (9) и $a_1/d_1 = a_2/d_2 = a_3/d_3$, $b_{12} = b_{13} = 0$ имеет семейство равновесий:

$$S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}, \quad I_A = c_2 e^{(a_2/d_2)P}, \quad I_B = c_3 e^{(a_3/d_3)P}, \quad \text{где } c_1, c_2, c_3 - \text{const} : \quad (10)$$

$$c_2 = \theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1) / \gamma_1, \quad c_3 = (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1) / \gamma_1, \quad \theta = [0, 1]. \quad (11)$$

Доказательство. Стационарное решение должно удовлетворять условиям:

$$0 = -\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \beta_1 \frac{S I_A}{N} - \beta_2 \frac{S I_B}{N} + \gamma_1 I_A + \gamma_2 I_B, \quad (12)$$

$$0 = -\frac{\partial Q_2}{\partial x} + \beta_1 \frac{S I_A}{N} - \gamma_1 I_A, \quad (13)$$

$$0 = -\frac{\partial Q_3}{\partial x} + \beta_2 \frac{S I_B}{N} - \gamma_2 I_B. \quad (14)$$

Рассмотрим уравнение, описывающее динамику восприимчивых к инфекции, переписав правую часть (12) в виде $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$, где

$$\kappa_1 = -\frac{\partial Q_1}{\partial x}, \quad \kappa_2 = -\beta_1 \frac{SI_A}{N} + \gamma_1 I_A, \quad \kappa_3 = -\beta_2 \frac{SI_B}{N} + \gamma_2 I_B.$$

Подставив $S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}$ в выражение Q_1 при $b_{12} = b_{13} = 0$ имеем:

$$Q_1 = -d_1 \frac{\partial(c_1 e^{(a_1/d_1)P})}{\partial x} + a_1 c_1 e^{(a_1/d_1)P} \frac{\partial P}{\partial x} = -c_1 a_1 e^{(a_1/d_1)P} \frac{\partial P}{\partial x} + c_1 a_1 e^{(a_1/d_1)P} \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Очевидно, что $Q_1 = 0$ отвечает условию $\kappa_1 = 0$ и соответствует краевым условиям рассматриваемой задачи.

В случае S, I_A, I_B , удовлетворяющих (10), κ_2 переписывается в виде:

$$\kappa_2 = -\beta_1 \frac{c_1 e^{(a_1/d_1)P} c_2 e^{(a_2/d_2)P}}{c_1 e^{(a_1/d_1)P} + c_2 e^{(a_2/d_2)P} + c_3 e^{(a_3/d_3)P}} + \gamma_1 c_2 e^{(a_2/d_2)P}. \quad (15)$$

Учёт соотношений $a_1/d_1 = a_2/d_2 = a_3/d_3$ и подстановка (11) в (15) даёт

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= -\beta_1 \frac{c_1 e^{(a_1/d_1)P} \theta(\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1}{1 + \theta(\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1 + (1 - \theta)(\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + \theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1) e^{(a_1/d_1)P} \\ &= -\beta_1 \frac{c_1 e^{(a_1/d_1)P} \theta(\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1}{1 + (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + \theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1) e^{(a_1/d_1)P} \\ &= c_1 e^{(a_1/d_1)P} \theta(\beta_1 - \gamma_1) \left(-\beta_1 \frac{1/\gamma_1}{1 + (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично для κ_3 имеем:

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= -\beta_2 \frac{e^{(a_1/d_1)P} (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1}{1 + (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + \gamma_2 (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1 e^{(a_1/d_1)P} \\ &= e^{(a_1/d_1)P} (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1) \left(-\beta_2 \frac{1/\gamma_1}{1 + (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + \gamma_2/\gamma_1 \right). \end{aligned}$$

В силу условий (9) на параметры β_j, γ_j имеем $\kappa_3 = 0$. Аналогичные выкладки справедливы для (13), (14), что доказывает лемму 2. $\square$

Формально система (1)–(8) позволяет получать решения с отрицательными значениями. Такие решения не отвечают жизненным ситуациям и не представляют интереса. Однако заметим, что система (1)–(8) допускает полное отсутствие инфицированных индивидуумов на ареале. Этому случаю соответствует решение

$$S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}, \quad I_A = 0, \quad I_B = 0 \quad (16)$$

для любого набора параметров.

Лемма 3. Система (1)–(8) при выполнении (9) и $a_1/d_1 = a_2/d_2 = a_3/d_3$, $b_{12}b_{13} \leq 0$, $|b_{12}| + |b_{13}| \neq 0$ имеет равновесие:

$$S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}, \quad I_A = c_2 e^{(a_2/d_2)P}, \quad I_B = c_3 e^{(a_3/d_3)P}, \quad (17)$$

где c_1, c_2, c_3 — константы:

$$c_2 = \theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1, \quad c_3 = (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1, \quad \theta = b_{13}/(b_{13} - b_{12}). \quad (18)$$

Доказательство. Для условия $Q_1 = 0$ в (12) при ненулевых параметрах b_{1j} необходимо выполнение следующего соотношения:

$$b_{12}S \frac{\partial I_A}{\partial x} + b_{13}S \frac{\partial I_B}{\partial x} = 0.$$

После подстановки (17)–(18) данное выражение переписывается в виде

$$c_1^2 e^{(a_1/d_1)P} (\beta_1 - \gamma_1) / \gamma_1 e^{(a_1/d_1)P} (b_{12}\theta + b_{13}(1 - \theta)) = 0$$

и будет выполнено при $\theta = b_{13}/(b_{13} - b_{12})$. Из условий на параметры b_{12}, b_{13} следует $\theta \in [0, 1]$, что делает найденное решение физически осмысленным. В остальном доказательство аналогично приведённому в лемме 2. $\square$

В силу условий (7) и отсутствия демографических процессов средняя плотность населения на ареале не меняется во времени, что легко доказывается:

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \frac{d(\bar{S} + \bar{I}_A + \bar{I}_B)}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \int_0^a (S + I_A + I_B) dx = -\frac{1}{a} \left(Q_1 \Big|_0^a + Q_2 \Big|_0^a + Q_3 \Big|_0^a \right) = 0.$$

Таким образом величина $\bar{N}$ может интерпретироваться как параметр, что приводит к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 2 и $\bar{N} = \Psi$, тогда система (1)–(8) будет иметь семейство решений

$$S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}, \quad I_A = c_2 e^{(a_2/d_2)P}, \quad I_B = c_3 e^{(a_3/d_3)P},$$

где

$$c_1 = \frac{\gamma_1 a \Psi}{\beta_1 \tau}, \quad c_2 = \frac{\theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1)}{\gamma_1}, \quad c_3 = \frac{(1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1)}{\gamma_1}, \quad \tau = \int_0^a e^{(a_1/d_1)P} dx, \quad \theta = [0, 1].$$

Доказательство. Доказательство основывается на лемме 2 и производится непосредственной подстановкой S, I_A, I_B из (10), (11) в выражение $\bar{N} = \bar{S} + \bar{I}_A + \bar{I}_B = \Psi$. $\square$

Пример. Пусть выполняются условия:

$$\Omega = [0, 2], \quad d_1 = 0.01, \quad d_2 = 0.02, \quad d_3 = 0.01, \quad (19)$$

$$a_1 = 0.03, \quad a_2 = 0.06, \quad a_3 = 0.03, \quad b_{12} = b_{13} = 0, \quad (20)$$

$$\beta_1 = 0.6, \quad \beta_2 = 0.3, \quad \gamma_1 = 0.2, \quad \gamma_2 = 0.1 \quad \text{и} \quad \bar{N} = 0.9. \quad (21)$$

Функция неравномерности жизненных условий даётся формулой

$$P(x) = \ln(2 \sin^2(\pi x) + 2). \quad (22)$$

Тогда для τ из теоремы 1 справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{(a_1/d_1)P} dx &= \int_0^2 e^{3 \ln(2 \sin^2(\pi x) + 2)} dx = \int_0^2 (2 \sin^2(\pi x) + 2)^3 dx \\ &= \frac{27 \sin(4\pi x) + 4 \sin^3(2\pi x) - 336 \sin(2\pi x) + 756\pi x}{24\pi} \Big|_0^2 = 63. \end{aligned}$$

Таким образом система (1)–(8) при выполнении условий (19)–(21) будет иметь решение:

$$S = \frac{0.6}{63}e^{3P}, \quad I_A = \frac{1.2\theta}{63}e^{3P}, \quad I_B = \frac{1.2(1-\theta)}{63}e^{3P}, \quad \theta \in [0, 1]. \quad (23)$$

При моделировании реальных процессов выполнение ограничений на параметры системы (9) является достаточно редким явлением. Однако найденное аналитически или численно семейство может служить отправной точкой в реализации различных эпидемиологических сценариев. В следующем разделе на основе вычислительных экспериментов изучается разрушение семейства, когда отдельные параметры не удовлетворяют условию косимметрии. Это позволит лучше понять динамику системы и на данном этапе позволяет сделать следующее предположение.

Гипотеза 2. В случае выполнения $d_3/d_2 = a_3/a_2$ и $\beta_2/\beta_1 \neq \gamma_2/\gamma_1$ и $I_A^0, I_B^0 \neq 0$ система (1)–(8) будет иметь равновесие, соответствующее присутствию на ареале только одной группы инфицированных:

$$(S, I_A, 0) \quad \text{или} \quad (S, 0, I_B).$$

Далее представлены результаты вычислительных экспериментов. Рассматривается динамика восприимчивых к инфекции и инфицированных в случае разрушения семейства распределений. Исследуется способность миграционных факторов влиять на развитие массовых инфекционных заболеваний.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАПРАВЛЕННОЙ МИГРАЦИИ НА ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ НАСЕЛЕНИЯ

Для численного решения задачи (1)–(8) применялся метод прямых с дискретизацией на основе смещённых сеток. Рассматривалась сетка с узлами $x_r = rh$, $r = 0, \dots, n+1$, $h = a/(n+1)$. Плотности в узлах x_r определялись функциями $(S)_r$, $(I_A)_r$, $(I_B)_r$. Для вычисления потоков Q_j вводилась вспомогательная сетка $x_{r-1/2} = -h/2 + rh$, $r = 0, \dots, n+2$.

С применением дифференциального оператора первого порядка и оператора вычисления среднего

$$(\sigma w)_{r+1/2} = \frac{w_{r+1} - w_r}{h}, \quad (\delta w)_{r+1/2} = \frac{w_{r+1} + w_r}{2}$$

система (1)–(8) переписывается как система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d(S)_r}{dt} = \left[-\sigma Q_1 - \beta_1 \frac{SI_A}{N} - \beta_2 \frac{SI_B}{N} + \gamma_1 I_A + \gamma_2 I_B \right]_r, \quad (24)$$

$$\frac{d(I_A)_r}{dt} = \left[-\sigma Q_2 + \beta_1 \frac{SI_A}{N} - \gamma_1 I_A \right]_r, \quad (25)$$

$$\frac{d(I_B)_r}{dt} = \left[-\sigma Q_3 + \beta_2 \frac{SI_B}{N} - \gamma_2 I_B \right]_r. \quad (26)$$

Потоки $(Q_j)_{r+1/2}$, $(r = 0, \dots, n)$ определяются формулами

$$(Q_1)_{r+1/2} = -[d_1 \sigma S - a_1 \delta S \sigma P - b_{12} \delta S \sigma I_A - b_{13} \delta S \sigma I_B]_{r+1/2}, \quad (27)$$

$$(Q_2)_{r+1/2} = -[d_2 \sigma I_A - a_2 \delta I_A \sigma P]_{r+1/2}, \quad (28)$$

$$(Q_3)_{r+1/2} = -[d_2 \sigma I_B - a_3 \delta I_B \sigma P]_{r+1/2}. \quad (29)$$

Дискретные варианты граничных условий формулируются с использованием фиктивных узлов:

$$(Q_j)_{-1/2} = -(Q_j)_{1/2}, \quad (Q_j)_{n+1/2} = -(Q_j)_{n-1/2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (30)$$

Из (8) следуют начальные условия:

$$(S)_r = S^0(x_r), \quad (I_A)_r = I_A^0(x_r), \quad (I_B)_r = I_B^0(x_r), \quad r = 0, \dots, n+1. \quad (31)$$

Система (24)–(31) может быть записана в виде

$$\frac{dY}{dt} = F(Y), \quad Y(0) = Y_0. \quad (32)$$

Здесь вектор $Y = ((S)_0, (S)_1, \dots, (S)_{n+1}, (I_A)_0, (I_A)_1, \dots, (I_A)_{n+1}, (I_B)_0, (I_B)_1, \dots, (I_B)_{n+1})$ содержит значения переменных в узлах сетки.

Компьютерные эксперименты с полученной системой ОДУ проводились в системе MATLAB. Для интегрирования по времени применялся метод Рунге — Кутты четвёртого порядка.

Далее представлены результаты расчётов на ареале $\Omega = [0, 2]$. Изучалось влияние следующих параметров на сценарии развития эпидемии: миграционных коэффициентов a_2, a_3, b_{12}, b_{13} и коэффициента выздоровления γ_2 . Остальные параметры были фиксированы и соответствовали примеру из разд. 2:

$$d_1 = 0.01, \quad d_2 = 0.02, \quad d_3 = 0.01, \quad a_1 = 0.03, \\ \beta_1 = 0.6, \quad \beta_2 = 0.3, \quad \gamma_1 = 0.2.$$

Функция неравномерности жизненных условий $P(x)$ задавалась формулой (22), соответствующей ареалу с двумя благоприятными зонами. Вычисления проводились для различных I_A^0 и I_B^0 . Начальные распределения группы восприимчивых к инфекции находились из

$$S^0 = \frac{1.8}{63} e^{3P} - I_A^0 - I_B^0,$$

где первое слагаемое соответствует S из (16) при $\bar{N} = 0.9$. Таким образом во всех расчётах, представленных ниже, $\bar{S} + \bar{I}_A + \bar{I}_B = 0.9$. В вычислительных экспериментах было установлено, что финальные распределения почти не зависят от областей ареала, в которых располагаются эпицентры инфекции. Аналогично результатам, полученным в [12], важным для реализации стационарных распределений, входящих в семейство решений, является соотношение в начальный момент времени средних значений плотностей двух групп инфицированных. Данный факт подтверждает общие закономерности, присущие биологическим сообществам.

При $a_2 = 0.06, a_3 = 0.03, \gamma_2 = 0.1$ система (1)–(8) отвечает условиям косимметрии (9). На рис. 1 представлены линии, соответствующие семействам для различных значений b_{12}, b_{13} . Результаты расчётов даны на плоскости среднеквадратичных отклонений $(\sigma I_A, \sigma I_B)$, вычисляемых по формулам:

$$\sigma I_{A(B)} = \sqrt{\frac{1}{n+2} \sum_{r=0}^{n+1} (I_{A(B)} - \bar{I}_{A(B)})^2}, \quad \bar{I}_{A(B)} = \frac{1}{n+2} \sum_{r=0}^{n+1} (I_{A(B)})_r.$$

Здесь $(I_A)_r, (I_B)_r$ — плотности распределения групп населения в узлах сетки, а n — количество внутренних узлов.

При отсутствии миграции восприимчивых к инфекции, вызванной неравномерностью инфицированных ($b_{12} = b_{13} = 0$), параметры системы соответствуют (19)–(21) из примера в разд. 2. Соответствующее семейство (23) представлено линией 1 на рис. 1. Для ненулевых значений b_{12}, b_{13} семейства равновесий устанавливались численно, см. линии 2, 3 на рис. 1.

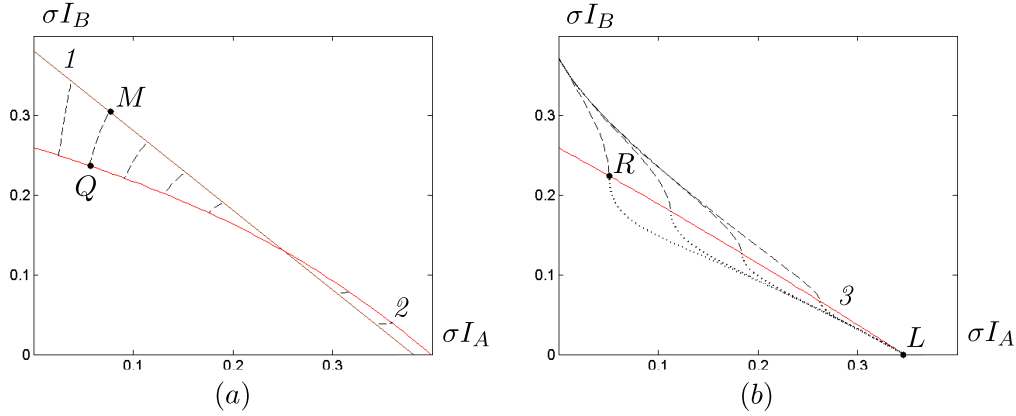


Рис. 1. Семейства стационарных распределений двух инфицированных групп населения при $\gamma_2 = 0.1$ и $b_{12} = b_{13} = 0$ (линия 1); $b_{12} = 0.03$, $b_{13} = -0.06$ (линия 2); $b_{12} = -0.02$, $b_{13} = -0.06$ (линия 3); разрушение семейства 3 при $\gamma_2 = 0.15$ — пунктир и $\gamma_2 = 0.05$ — штрих

Элементы спектра устойчивости λ

θ	λ				
0.25	$-1.7 \cdot 10^{-9}$	$-1.4 \cdot 10^{-4}$	$-2.5 \cdot 10^{-4}$	-0.0023	-0.0024
0.5	$-1.4 \cdot 10^{-9}$	$-1.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.4 \cdot 10^{-4}$	-0.0023	-0.0028
0.75	$-1.2 \cdot 10^{-9}$	$-1.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.2 \cdot 10^{-4}$	-0.0024	-0.0029

В качестве начальных данных брались решения (23) с шагом по θ , равным 0.01. На рис. 1(а) штриховыми линиями дана эволюция семейства при $b_{12} = 0.03$, $b_{13} = -0.06$. Стоит отметить, общая точка представленных семейств отвечает случаю $\theta = 2/3$ и соответствует решению (17).

В таблице даны элементы спектра устойчивости, рассчитанного для (32). Приведены по пять наиболее близких к мнимой оси собственных значений для трёх стационарных решений, входящих в (23), см. линия 1 на рис. 1(а). Наличие практически нулевых собственных значений говорит, что данные решения входят в нетривиальное семейство стационарных распределений. Стоит отметить, что в отличие от систем с симметрией, где решения из семейства имеют одинаковый спектр устойчивости, при косимметрии возможны решения с меняющимся вдоль семейства спектром.

При значении параметра γ_2 , не удовлетворяющего условию $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1$, происходит распад семейства с выходом на стационарные изолированные равновесия. Эволюция к изолированным решениям дана пунктирными и штриховыми линиями на рис. 1(б). Расчёты показывают, что в случае $\gamma_2 > \gamma_1\beta_2/\beta_1$ из инфицированных остаётся только группа I_A , а при $\gamma_2 < \gamma_1\beta_2/\beta_1$ группа I_B . Выбор начальной точки не влияет на финальное состояние, а траектории установления близки к линии семейства.

Рис. 2(а, б, с) иллюстрирует пространственно-временную динамику распределений групп восприимчивых к инфекции и инфицированных, соответствующую траектории MQ на рис. 1(а).

В этом случае происходит трансформация равновесия, входящего в семейство 1, в стационарное распределение, соответствующее семейству 2. В силу отрицательности параметра b_{13} и доминирования на ареале группы I_B происходит отток восприимчивых к инфекции из мест скопления инфицированных. Вследствие этого наблюдается снижение доли заражённого населения. Эволюция во времени плотностей распределения групп населения, соответствующая траектории RL на рис. 1(б) дана на рис. 2(с, d, e). В начале установления происходит резкий

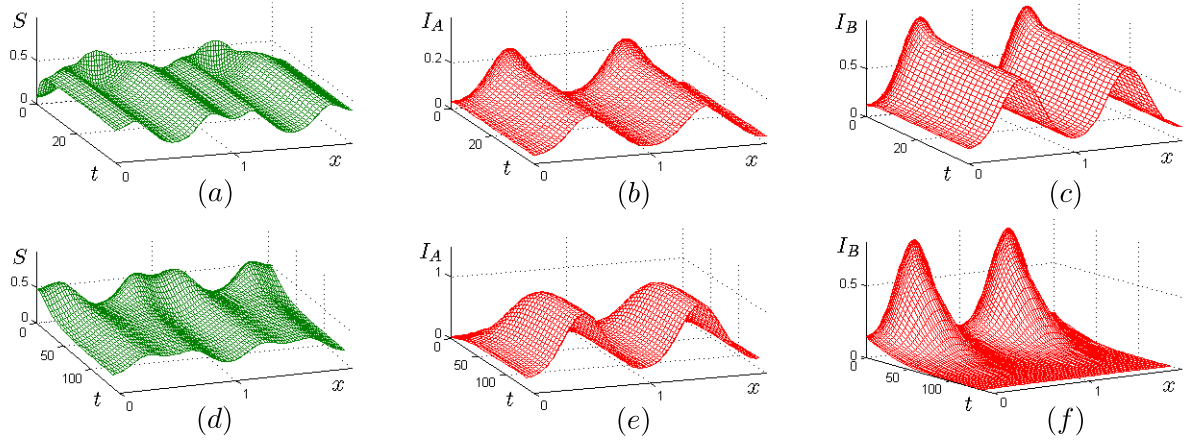


Рис. 2. Установление стационарных распределений, соответствующих траекториям:

MQ (см. рис. 1(a)) при $\gamma_2 = 0.2$, $b_{12} = 0.03$, $b_{13} = -0.06$ рис. (a, b, c);

RL (см. рис. 1(b)) при $\gamma_2 = 0.15$, $b_{12} = -0.02$, $b_{13} = -0.06$ рис. (d, e, f): $a_2 = 0.06$, $a_3 = 0.03$

спад плотности I_B , а затем плавный выход на стационарное решение с присутствием на ареале только группы I_A . При этом вытеснение с ареала I_B компенсируется ростом I_A .

Существование непрерывных семейств равновесий с присутствием на ареале обеих групп инфицированных и распад семейства с исчезновением одной из них подтверждают гипотезы, выдвинутые в разд. 2. Однако исследование показало, в случае миграционных параметров a_2 и a_3 , не удовлетворяющих условию (9), имеются области параметров как с вытеснением одной из групп инфицированных, так и с устойчивым сосуществованием.

На рис. 3 даны карты миграционных параметров a_2 , a_3 с зонами, соответствующими сосуществованию групп инфицированных ($I_A + I_B$), и присутствием на ареале только одной группы (I_A , I_B).

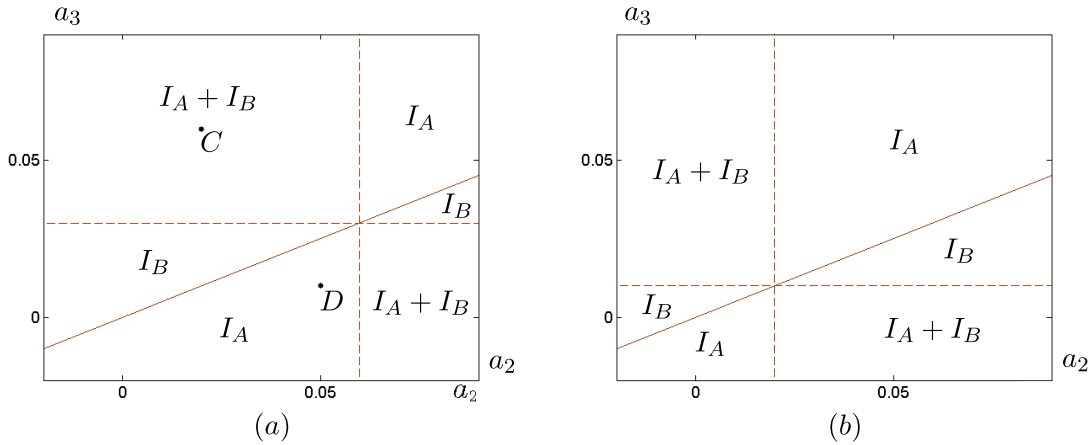


Рис. 3. Карты миграционных параметров с областями, отвечающими различному присутствию инфицированных на ареале при $\beta_{12} = \beta_{13} = 0$ (a); при $\beta_{12} = \beta_{13} = -0.03$ (b): $\gamma_2 = 0.1$

В расчётах начальные распределения были локализованы и задавались формулами:

$$I_A^0(x) = \begin{cases} 0.3 \sin \frac{5\pi x}{a}, & x \in l_A = [1, 1.4], \\ 0, & x \in \Omega \setminus l_A, \end{cases} \quad I_B^0(x) = \begin{cases} 0.3 \sin \frac{5\pi x}{a}, & x \in l_B = [0.15, 0.55], \\ 0, & x \in \Omega \setminus l_B. \end{cases}$$

Вычисления проводились для двух наборов параметров b_{12} , b_{13} при $\gamma_2 = 0.1$. Сплошная линия соответствует условию существования семейства решений, членами которого являются

стационарные распределения I_A и I_B в различных комбинациях. Стоит отметить, что при $b_{12} = b_{13} = 0$ общей точкой для всех областей соответствуют $a_2 = 0.06$ и $a_3 = 0.03$. Данные значения отвечают условию леммы 2 и дополняют набор параметров (19)–(21), при котором будет существовать семейство решений (23). В случае отрицательных b_{12}, b_{13} общая точка для всех областей смещается к началу координат.

Рис. 4 демонстрирует установление распределений S и I_A, I_B для набора миграционных параметров, отвечающего точкам С и D на рис. 3.

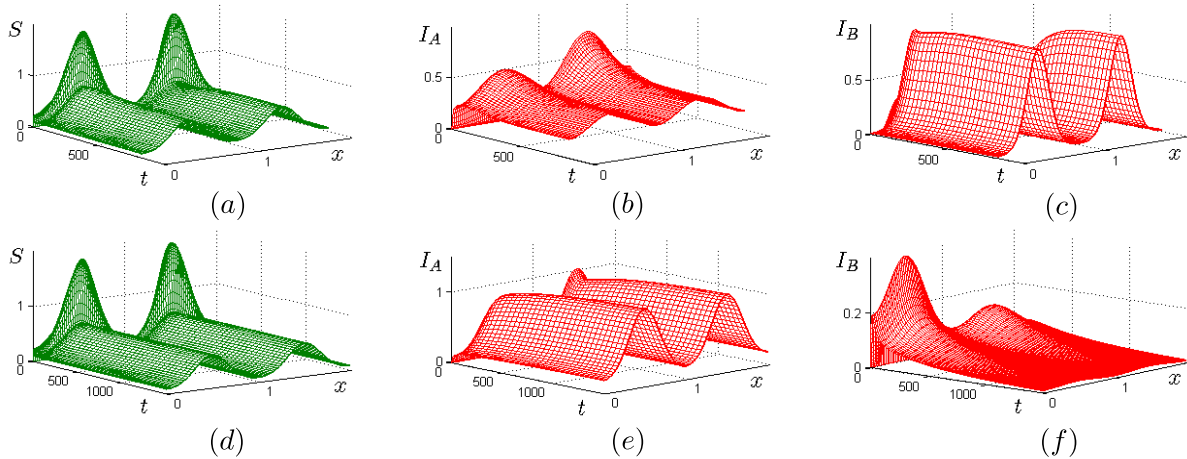


Рис. 4. Установление стационарных распределений групп инфицированных при $a_1 = 0.02$, $a_2 = 0.05$ рис. (a, b, c); $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.01$ рис. (d, e, f): $b_{12} = b_{13} = 0$, $\gamma_2 = 0.1$

Расчёты ведутся из локализованных начальных распределений. В обоих случаях в начале установления наблюдается убыль здорового населения, вызванная развитием инфекционных заболеваний. Динамика, соответствующая точке С, приведена на рис. 4(a, b, c) и характеризуется выходом на устойчивое сосуществование групп инфицированных. При этом финальные (стационарные) распределения характеризуются преобладанием группы I_B над группой I_A . В случае набора миграционных параметров, отвечающих точке D, происходит вытеснение группы I_B с ареала (см. рис. 4(d, e, f)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена и рассмотрена эпидемиологическая модель на основе системы нелинейных уравнений в частных производных. Изучается взаимодействие группы индивидов, восприимчивых к инфекции, и двух групп инфицированных. Модель подразумевает распределение населения по ареалу с миграционными потоками вследствие диффузионного распространения и направленной миграции. В ходе исследования были установлены параметрические зависимости, при которых в рассматриваемой системе возникает непрерывное семейство решений. Сформулирован ряд утверждений о возможности нахождения стационарных распределений без использования вычислительного эксперимента. Для установления семейств равновесий и анализа их разрушений применялся вычислительный эксперимент. Были построены карты миграционных параметров, отвечающие различным эпидемиологическим сценариям. Установлено, что миграция инфицированного населения способствует как исчезновению одного из заболеваний, так и сосуществованию групп инфицированных на ареале.

Представленные результаты предоставляют основу для усовершенствования методологии анализа распространения инфекционных заболеваний массового характера и оценки их долгосрочных последствий. Перспективным направлением для дальнейшего развития полученных в рамках настоящего исследования выводов является применение статистических данных для изучения как прошлых, так и текущих эпидемиологических ситуаций.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Донского государственного технического университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Snowden F.M. Epidemics and society: from the black death to the present. Yale Univ. Press, 2019.
2. Porrozzi R., Teva A., Amaral V.F. Cross-immunity experiments between different species or strains of leishmania in rhesus macaques (*macaca mulatta*) // The American J. Tropical Medicine and Hygiene. 2004. V. 71, N 3. P. 297–305; DOI: 10.4269/ajtmh.2004.71.297
3. Gordon A., Gresh L., Ojeda S., Katzelnick L.C., Sanchez N., Mercado J.C., et al. Prior dengue virus infection and risk of Zika: A pediatric cohort in Nicaragua // PLoS Med. 2019. V. 16, N 1. Article number e1002726; DOI: 10.1371/journal.pmed.1002726
4. Ng T.W., Turinici G., Danchin A. A double epidemic model for the SARS propagation // BMC Infect Dis. 2003. V. 3. Article number 19; DOI: 10.1186/1471-2334-3-19
5. Ahn K.W., Kosoy M., Chan K.-S. An approach for modeling cross-immunity of two strains, with application to variants of Bartonella in terms of genetic similarity // Epidemics. 2014. V. 7. P. 7–12; DOI: 10.1016/j.epidem.2014.03.001
6. Alkhazzan A., Wang J., Nie Y., Khan H., Alzabut J. A novel SIRS epidemic model for two diseases incorporating treatment functions, media coverage, and three types of noise // Chaos, Solitons & Fractals. 2024. V. 181. Article number 114631; DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114631
7. Kabanikhin S., Krivorotko O., Neverov A., Kaminskiy G., Semenova O. Identification of the mathematical model of tuberculosis and HIV co-infection dynamics // Mathematics. 2024. V. 12. Article number 3636; DOI: 10.3390/math12233636
8. Schlickeiser R., Kroger M. Mathematics of Epidemics: On the General Solution of SIRVD, SIRV, SIRD, and SIR Compartment Models // Mathematics. 2024. V. 12, N 7. Article number 941; DOI: 10.3390/math12070941
9. Sidi Ammi M.R., Tahiri M., Torres D.F.M. Global stability of a Caputo fractional SIRS model with general incidence rate // Math. Comput. Sci. 2020. V. 15, N 1. P. 91–105; DOI: 10.48550/arXiv.2002.02560
10. Kumar P., Erturk V. S., Yusuf A., Nisar K.S., Abdelwahab S.F. A study on canine distemper virus (CDV) and rabies epidemics in the red fox population via fractional derivatives // Results Phys. 2021. V. 25. Article number 104281; DOI: 10.1016/j.rinp.2021.104281
11. Говорухин В.Н., Загребнева А.Д. Популяционные волны и их бифуркации в модели «активный хищник — пассивная жертва» // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12, № 4. С. 831–843; DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-831-843
12. Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability // Appl. Math. Comput. 2021. V. 410. Article number 126456; DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456
13. Sidi Ammi M. R., Zinihi A., Raezah A. A., Sabbar Y. Optimal control of a spatiotemporal *SIR* model with reaction–diffusion involving ρ -Laplacian operator // Results Phys. 2023. Vol. 52. Article number 106895; DOI: 10.1016/j.rinp.2023.106895
14. Будянский А.В. Влияние направленной миграции на заболеваемость населения в SIS-модели // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2024. Т. 17, № 3. С. 18–28; DOI: 10.14529/mmp240302

15. *Peng R., Liu S.Q.* Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction–diffusion model // *Nonlinear Analysis*. 2009. V. 71. P. 239–247; DOI: 10.1016/j.na.2008.10.043
16. *Allen L.J.S., Bolker B.M., Lou Y., Nevai A.L.* Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic disease patch model // *SIAM J. Appl. Math.* 2007. V. 67. P. 1283–1309; DOI: 10.48550/arXiv.1911.02219
17. *Юдович В.И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // *Мат. заметки*. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148; DOI: 10.1007/BF01142654
18. *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos*. 1995. V. 5, N 2. P. 402–411; DOI: 10.1063/1.166110
19. *Будянский А.В., Цибулин В.Г.* Моделирование конкуренции популяций с учётом многофакторного таксиса // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2023. Т. 26, № 3. С. 14–25; DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.302
20. *Будянский А.В.* Численное исследование влияния направленной миграции неаборигенных видов на инвазивные сценарии // *Вестн. Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2023. Т. 33, № 4. С. 551–562; DOI: 10.35634/vm230401

UDC 519.63

NUMERICAL AND ANALYTICAL STUDY OF THE MODEL OF TWO EPIDEMICS TAKING INTO ACCOUNT MIGRATION EFFECTS

© 2026 A. V. Budyansky

*Don State Technical University,
Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don 344002, Russia*

E-mail: a_v_budyansky@mail.ru

Received 05.11.2025, revised 17.07.2026, accepted 17.07.2026

Abstract. The purpose of this study is to investigate a model of mass infectious diseases based on a system of nonlinear parabolic equations. The modeling is carried out within the framework of the hypothesis of a double epidemic caused by different infectious strains or closely related viruses. It is implied that the diseases provide mutual immunity. The spatio-temporal interaction of two population categories is considered: susceptible to infection and infected. In this case, the infected population is divided into two non-overlapping groups related to different diseases. Local interaction determining the mutual transition from one category to another and migration flows caused by diffusion and directed migration are taken into account. The modeling is carried out without taking into account demographic factors and the possibility of obtaining immunity by those who have recovered. For spatial approximation of the problem, the finite difference method based on shifted grids is used. The resulting system of ordinary differential equations is integrated over time using the Runge-Kutta method. Computer experiments are conducted in the matlab system. The study established parametric dependencies, under which continuous family of equilibria occurs in the problem under consideration. The possibility of finding stationary distributions without using numerical methods was analyzed. In computational experiments, an analysis of epidemiological consequences in the case of the disintegration of a family of solutions was given. The influence of migration on scenarios of local displacement and coexistence of viral infections was studied.

Keywords: mathematical modelling, epidemic, nonlinear PDEs, taxis, cosymmetry.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.202

REFERENCES

1. Snowden F.M. Epidemics and society: from the black death to the present. Yale Univ. Press, 2019.
2. Porrozzi R., Teva A., Amaral V.F. Cross-immunity experiments between different species or strains of leishmania in rhesus macaques (*macaca mulatta*). *The American J. Tropical Medicine and Hygiene*, 2004, Vol. 71, No. 3, pp. 297–305; DOI: 10.4269/ajtmh.2004.71.297
3. Gordon A., Gresh L., Ojeda S., Katzelnick L.C., Sanchez N., Mercado J.C., et al. Prior dengue virus infection and risk of Zika: A pediatric cohort in Nicaragua. *PLoS Med.*, 2019, Vol. 16, No. 1, Article number e1002726; DOI: 10.1371/journal.pmed.1002726
4. Ng T.W., Turinici G., Danchin A. A double epidemic model for the SARS propagation. *BMC Infect Dis.*, 2003, Vol. 3, Article number 19; DOI: 10.1186/1471-2334-3-19
5. Ahn K.W., Kosoy M., Chan K.-S. An approach for modeling cross-immunity of two strains, with application to variants of Bartonella in terms of genetic similarity. *Epidemics*, 2014, Vol. 7, pp. 7–12; DOI: 10.1016/j.epidem.2014.03.001

6. Alkhazzan A., Wang J., Nie Y., Khan H., Alzabut J. A novel SIRS epidemic model for two diseases incorporating treatment functions, media coverage, and three types of noise. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, Vol. 181, Article number 114631; DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114631
7. Kabanikhin S., Krivorotko O., Neverov A., Kaminskiy G., Semenova O. Identification of the mathematical model of tuberculosis and HIV co-infection dynamics. *Mathematics*, 2024, Vol. 12, Article number 3636; DOI: 10.3390/math12233636
8. Schlickeiser R., Kroger M. Mathematics of Epidemics: On the General Solution of SIRVD, SIRV, SIRD, and SIR Compartment Models. *Mathematics*, 2024, Vol. 12, No. 7, Article number 941; DOI: 10.3390/math12070941
9. Sidi Ammi M.R., Tahiri M., Torres D.F.M. Global stability of a Caputo fractional SIRS model with general incidence rate. *Math. Comput. Sci.*, 2020, Vol. 15, No. 1, pp. 91–105; DOI: 10.48550/arXiv.2002.02560
10. Kumar P., Erturk V. S., Yusuf A., Nisar K.S., Abdelwahab S.F. A study on canine distemper virus (CDV) and rabies epidemics in the red fox population via fractional derivatives. *Results Phys.*, 2021, Vol. 25, Article number 104281; DOI: 10.1016/j.rinp.2021.104281
11. Govoruhin V.N., Zagrebneva A.D. Populyacionnye volny i ih bifurkacii v modeli «aktivnyj hishchnik — passivnaya zhertva» [Population waves and their bifurcations in the model «active predator — passive prey»]. *Computer Research and Modeling*, 2020, Vol. 12, No. 4, pp. 831–843 (in Russian); DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-831-843
12. Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability. *Appl. Math. Comput.*, 2021, Vol. 410, Article number 126456; DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456
13. Sidi Ammi M. R., Zinihi A., Raezah A. A., Sabbar Y. Optimal control of a spatiotemporal *SIR* model with reaction–diffusion involving ρ -Laplacian operator. *Results Phys.*, 2023, Vol. 52, Article number 106895; DOI: 10.1016/j.rinp.2023.106895
14. Budyansky A.V. Vliyanie napravlennoj migracii na zabolevaemost' naseleniya v SIS–modeli [The influence of directed migration on the morbidity of the population in the SIS–model]. *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. Model. Program.*, 2024, Vol. 17, No. 3, pp. 18–28 (in Russian); DOI: 10.14529/mmp240302
15. Peng R., Liu S.Q. Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction–diffusion model. *Nonlinear Analysis*, 2009, Vol. 71, pp. 239–247; DOI: 10.1016/j.na.2008.10.043
16. Allen L.J.S., Bolker B.M., Lou Y., Nevai A.L. Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic disease patch model. *SIAM J. Appl. Math.*, 2007, Vol. 67, pp. 1283–1309; DOI: 10.48550/arXiv.1911.02219
17. Yudovich V.I. Kosimmetriya, vyrozhdienie reshenij operatornyh uravnenij, vzniknovenie fil'tracionnoj konvekcii [Co-symmetry, degeneracy of solutions of operator equations, occurrence of filtration convection] *Mat. Zametki* [Mat. Notes], 1991, Vol. 49, No. 5, pp. 142–148 (in Russian); DOI: 10.1007/BF01142654
18. Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it. *Chaos*, 1995, Vol. 5, No. 2, pp. 402–411; DOI: 10.1063/1.166110
19. Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modelirovanie konkurencii populyacij s uchyotom mnogofaktornogo taksisa [Population competition modeling based on multifactorial taxation]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2023, Vol. 26, No. 3, pp. 14–25 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.302
20. Budyansky A.V. Chislennoe issledovanie vliyaniya napravlennoj migracii neaborigennyh vidov na invazivnye scenarij [Numerical study of the impact of directed migration of non-native species on invasive scenarios]. *Vestn. Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Comput. sci.*, 2023, Vol. 33, No 4, pp. 551–562 (in Russian); DOI: 10.35634/vm230401