

УДК 517.955.8:532.546

АСИМПТОТИКА ОДНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРИТОКЕ К ТРЕЩИНЕ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ С МГРП

© 2026 А. Э. Жаглова^a, И. М. Индрупский^b

*Институт проблем нефти и газа РАН,
ул. Губкина, 3, г. Москва 119333, Россия*

E-mails: ^aazhaglova@ipng.ru, ^bi-ind@ipng.ru

Поступила в редакцию 29.12.2025 г.; после доработки 15.05.2026 г.;
принята к публикации 15.07.2026 г.

Горизонтальные скважины с многостадийным гидроразрывом пласта широко применяются при разработке низкопроницаемых нефтяных и газовых залежей, однако интерпретация данных гидродинамических исследований таких скважин существенно осложнена из-за длительного времени выхода на классический радиальный режим течения и интерференции множественных трещин. В настоящей работе поставлена и решена математическая задача притока к трещине бесконечной проводимости с условием непротекания на эллиптическом контуре, соответствующая течению к горизонтальной скважине с многостадийным гидроразрывом при интерференции близко расположенных трещин. Впервые получено аналитическое выражение для изменения давления на трещине при запуске в работу скважины с постоянным дебитом, а также найдена асимптотика решения при большом времени. Показано, что короткое время работы скважины до остановки приводит к появлению на кривых восстановления давления характерной промежуточной асимптотики радиального режима течения даже при значительной интерференции трещин. Полученные результаты важны для оценки параметров низкопроницаемых пластов по данным исследований горизонтальных скважин с многостадийным гидроразрывом пласта.

Ключевые слова: эллиптическое течение, преобразование Лапласа, асимптотическое решение, кривая давления, функции Матьё, горизонтальная скважина, радиальный режим.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.203

ВВЕДЕНИЕ

Бурение горизонтальных скважин с многостадийным гидроразрывом пласта (ГС с МГРП) широко применяется при разработке низкопроницаемых нефтяных и газовых залежей [1, 2]. Горизонтальный ствол проводится в плоскости залегания пласта, а вдоль него формируется серия поперечных трещин. В результате образуется сложная фильтрационная система, в которой приток флюида к скважине осуществляется через сеть взаимно влияющих друг на друга трещин.

Одним из основных инструментов диагностики параметров пласта являются гидродинамические исследования скважин, в частности анализ кривых восстановления давления (КВД) [3, 4]. После остановки скважины регистрируется изменение забойного давления во времени; по форме этой кривой и её логарифмической производной (производной давления по логарифму времени) можно определить гидропроводность, скин-фактор и другие характеристики системы «пласт–скважина». В классическом случае вертикальной скважины в однородном пласте на поздних временах реализуется радиальный (позднерадийный) режим течения: изолинии давления имеют форму окружностей, а логарифмическая производная давления по времени выходит на горизонтальный участок. Этот участок играет важную роль для оцен-

ки параметров системы, поскольку его наличие позволяет независимо определить значение гидропроводности пласта и далее использовать его при оценке других параметров.

В случае горизонтальной скважины с МГРП ситуация существенно усложняется, поскольку время выхода на позднерадialный режим может быть чрезвычайно велико. Теоретически эту проблему можно решить, используя данные раннерадialного режима, который связан с формированием радиальной симметрии на поздней стадии притока к отдельным трещинам и проявляется на существенно более раннем участке КВД. Но для его возникновения необходимо, чтобы расстояние между трещинами вдоль ствола скважины составляло не менее 3–5 их полудлин [5]. На практике это условие редко соблюдается, что исключает возможность оценки параметров пласта таким способом. Кроме того, КВД в скважинах с МГРП имеют сложную форму из-за взаимодействия множественных трещин.

Представленные в работе [6] исследования показали наличие на графиках логарифмической производной КВД горизонтального участка, не связанного с классическим радиальным течением. Этот участок соответствует некоторому радиально-подобному режиму течения и наблюдается для определённого диапазона достаточно малых значений времени работы скважины до остановки T .

Как показано в работе [6], в период проявления на графике производной КВД соответствующего горизонтального участка формируются эллипсы постоянного давления в ближайшей к трещинам зоне (рис. 1(а)). Такое наблюдение позволяет поставить математическую задачу о притоке к единичной трещине с условием непротекания на эллиптическом контуре, что эквивалентно притоку к отдельной трещине в системе с несколькими близко расположенными интерферирующими трещинами.

Математический аппарат решения задачи об эллиптическом притоке, используемый в данной статье, хорошо известен и неоднократно применялся в литературе. Кучук и Бригам разработали аналитические решения задач эллиптического притока, применимые к вертикальным скважинам с трещинами гидроразрыва бесконечной проводимости в неограниченном пласте и анизотропным коллекторам [7]. Райли и соавторы представили аналитическое решение для давления в вертикальной трещине конечной проводимости с эллиптическим поперечным сечением, дренирующей неограниченный пласт [8]. Амини и соавторы построили кривые падения дебита на основе решения для давления в системе, содержащей трещину гидроразрыва в центре эллиптической зоны дренирования [9]. В работе [10] был разработан метод определения параметров пласта и трещины гидроразрыва на основе данных снижения давления при постоянном дебите в режиме эллиптического потока. Авторы [11] создали математическую модель эллиптического потока для газового пласта с тройной пористостью, учитывающую анизотропию, и получили решение через функции Матьё. Функции Матьё также использовались в аналитических и полуаналитических моделях для учёта зон стимулированного объёма (SRV), которые, как правило, предполагаются эллиптической формы и существенно влияют на добычу газа [12]–[15].

В данной работе на основе решения Амини и соавт. [9] впервые получено аналитическое выражение в пространстве изображений по Лапласу для изменения давления на трещине бесконечной проводимости при запуске в работу скважины с постоянным дебитом, а также найдена асимптотика этого решения в оригиналах при $t \rightarrow \infty$. При помощи полученной асимптотики обосновывается возможность проявления радиально-подобного режима на КВД и его связь с длительностью работы скважины до остановки.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим приток к отдельной трещине бесконечной проводимости в однородном, изотропном, горизонтальном пласте с равномерной толщиной h , эффективной пористостью m и эффективной проницаемостью k (см. рис. 1(б)). Трещина вскрывает пласт по всей толщине.

Пусть общая сжимаемость системы равна c_p , пластовый флюид слабосжимаемый и имеет вязкость μ . Эффектом гравитации можно пренебречь, течение внутри пласта подчиняется закону Дарси.

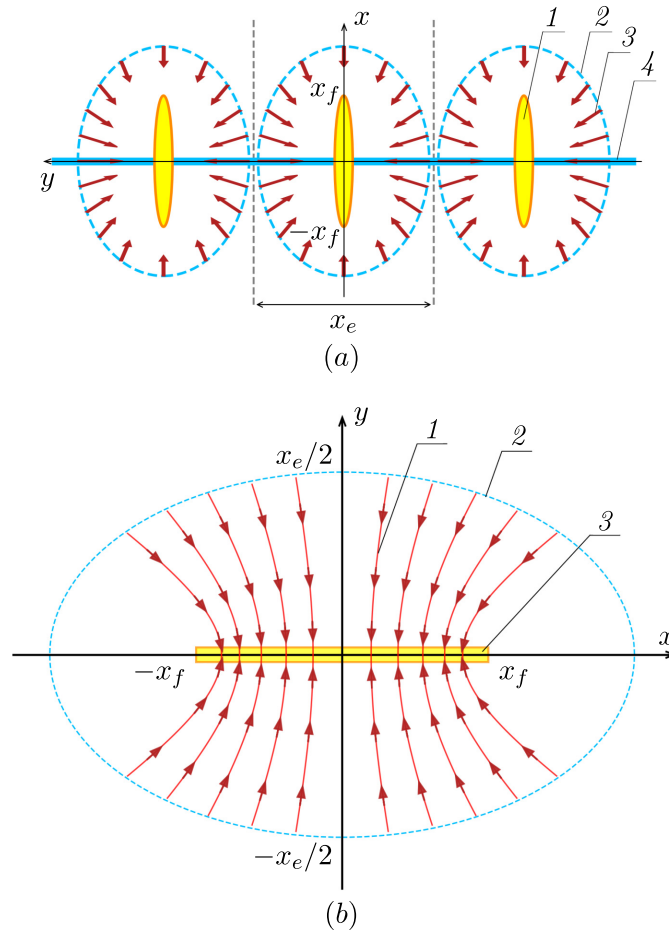


Рис. 1. Эллиптический приток

- (а) к интерферирующим трещинам: 1 — трещина, 2 — граница области дренирования, 3 — направление течения, 4 — горизонтальная скважина;
 (б) к трещине с непроницаемой границей:
 1 — линии тока, 2 — непроницаемая граница, 3 — трещина;
 x_e — расстояние между соседними интерферирующими трещинами,
 x_f — полудлина трещины,

Замечание 1.1. В работе [6] показано, что для трещин конечной проводимости характерны аналогичные особенности притока с точки зрения формирования радиально-подобного режима на КВД. Однако в формировании структуры потока в качестве источника участвует не вся трещина, а только некоторая её эффективная часть, которая к моменту существенной интерференции трещин оказывает значимое влияние на перераспределение давления. Поэтому на данном этапе мы ограничиваемся постановкой задачи для трещины с бесконечной проводимостью, чтобы определить характерные особенности поведения системы и выявить закономерности, связанные с формированием радиально-подобного режима. В дальнейшем рассматриваемая задача может быть обобщена на случай трещины конечной проводимости.

В постановке задачи (см. рис.1) используется два параметра, определяемых геометрией скважины и трещин гидроразрыва: x_f соответствует эффективной полудлине трещины и задаёт внутреннее граничное условие, x_e соответствует половине расстояния между соседними

трещинами и определяет малую полуось эллипса, на котором задана внешняя граница непротекания.

До начала влияния интерференции соседних трещин решение должно соответствовать решению работы [7] для аналогичной трещины в неограниченном пласте. Поэтому геометрия потока определяется софокусными эллипсами и условие непротекания, вызванное интерференцией трещин, также ставится на эллипсе, софокусном с вырожденным эллипсом-трещиной.

Будем также предполагать, что для интересующего нас периода проявления радиально-подобного режима можно не учитывать различия в симметрии течения между краевыми и внутренними трещинами, о чём свидетельствует численное моделирование притока в работе [6].

Уравнение пьезопроводности для нестационарного распределения давления p при течении слабосжимаемого флюида по линейному закону Дарси, записанное с учётом осреднения по вертикальной оси, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = c_p m \frac{\mu}{k} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1)$$

Решение для эллиптического притока может быть получено из уравнения (1) путём перехода к эллиптическим координатам (ξ, η) :

$$x = x_f \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = x_f \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \quad (2)$$

Заданная эллиптическая система координат характеризуется семейством конфокальных эллипсов с фокальным радиусом x_f , которые ортогональны семейству гипербол с тем же фокальным радиусом. На рис. 2 схематично изображены эллиптические координаты.

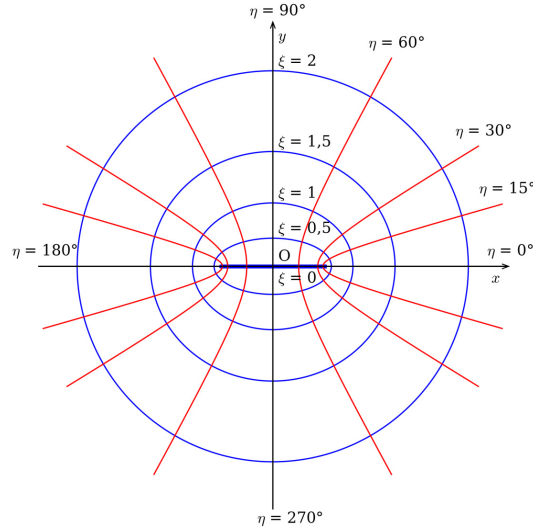


Рис. 2. Эллиптическая система координат

Подставляя (2) в (1), получим уравнение пьезопроводности в эллиптических координатах [7]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} = c_p m \mu \frac{x_f^2}{2k} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3)$$

Зададим начальные и граничные условия. Предположим, что на момент запуска скважины давление в пласте распределено равномерно и равно начальному давлению p_i [9]:

$$p(\xi, \eta, 0) = p_i. \quad (4)$$

Предположим, что шириной трещины можно пренебречь ($\xi = 0$). На рис. 2 трещина представляет собой отрезок длиной в два фокальных радиуса на оси Ox . На внутренней границе области течения (трещине) давление равномерно распределено и равно давлению на скважине p_{wf} :

$$p(0, \eta, t) = p_{wf}. \quad (5)$$

На внешней границе (контуре) $\xi_0 = \operatorname{arsh} \frac{x_e}{2x_f}$ задано условие непротекания:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0. \quad (6)$$

Приведём задачу (3)–(6) к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p_D}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial p_D}{\partial t_D}, \quad (7)$$

$$p_D(0, \eta, t_D) = 1, \quad (8)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{\partial p_D}{\partial \xi} = 0, \quad (9)$$

$$p_D(\xi, \eta, 0) = 0,$$

где $p_D(\xi, \eta, t_D) = \frac{p_i - p(\xi, \eta, t)}{p_i - p_{wf}}$ — безразмерное давление, $t_D = \frac{kt}{c_p m \mu x_f^2}$ — безразмерное время [7].

Полученная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных (7) может быть решена в пространстве Лапласа. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (7) и граничным условиям (8)–(9), получим [9]:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \eta^2} = \frac{s}{2}(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \bar{p}_D, \quad (10)$$

$$\bar{p}_D(0, \eta) = \frac{1}{s}, \quad (11)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \xi} = 0, \quad (12)$$

где $\bar{p}_D$ — безразмерное давление в пространстве Лапласа.

2. РЕШЕНИЕ

Решение задачи (10)–(12) имеет вид [9]:

$$\bar{p}_D(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n 2A_0^{2n}}{s} \times \frac{\operatorname{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \operatorname{Ce}_{2n}(\xi, -s/4) - \operatorname{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \operatorname{Fek}_{2n}(\xi, -s/4)}{\operatorname{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \operatorname{Ce}_{2n}(0, -s/4) - \operatorname{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \operatorname{Fek}_{2n}(0, -s/4)} \operatorname{ce}_{2n}(\eta, -s/4) \right]. \quad (13)$$

где A_0^{2n} — коэффициент Фурье, зависящий от $(-s/4)$; $\operatorname{Ce}_{2n}(\xi, -s/4)$, $\operatorname{Fek}_{2n}(\xi, -s/4)$, $\operatorname{ce}_{2n}(\eta, -s/4)$ — функции Матьё; $\operatorname{Fek}'_{2n}(\xi, -s/4)$, $\operatorname{Ce}'_{2n}(\xi, -s/4)$ — их производные по ξ . Вид функций Матьё, используемых в данной работе, представлен в Приложении I.

Безразмерный расход (дебит) флюида, поступающего через внутреннюю границу области в трещину, в пространстве Лапласа задаётся следующим образом:

$$\bar{q}_D(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\eta. \quad (14)$$

Подставляя решение (13) в (14), получим:

$$\bar{q}_D(s) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(A_0^{2n})^2}{s} \frac{\text{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Ce}'_{2n}(0, -s/4) - \text{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Fek}'_{2n}(0, -s/4)}{\text{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Ce}_{2n}(0, -s/4) - \text{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Fek}_{2n}(0, -s/4)}. \quad (15)$$

Чтобы преобразовать полученное решение для дебита (15) при заданном давлении на скважине в решение для давления при заданном дебите, используем теорему о свёртке [16]:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{1}{s^2 \bar{q}_D(s)}, \quad (16)$$

где $\bar{p}_{wD}(s)$ – безразмерное давление на внутренней границе (трещине) при заданном дебите в пространстве Лапласа.

Подставляя (15) в (16), получим:

$$\bar{p}_{wD}(s) = -\left(2s \sum_{n=0}^{\infty} (A_0^{2n})^2 \frac{\text{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Ce}'_{2n}(0, -s/4) - \text{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Fek}'_{2n}(0, -s/4)}{\text{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Ce}_{2n}(0, -s/4) - \text{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Fek}_{2n}(0, -s/4)}\right)^{-1}. \quad (17)$$

где безразмерному давлению в пространстве оригиналов соответствует

$$p_{wD} = 2\pi k h (p_i - p(\xi, \eta, t)) / q\mu.$$

Таким образом, решение (17) представляет собой аналитическое выражение для изменения безразмерного давления на трещине в пространстве Лапласа при запуске в работу скважины с постоянным дебитом (снятии кривой стабилизации давления – КСД). Используя метод суперпозиции, из него можно получить решение для КВД. Однако форма (17) не позволяет проанализировать решение на наличие диагностических признаков режимов течения.

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПРИ МАЛОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА ЛАПЛАСА (КРИВАЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ДАВЛЕНИЯ)

В работе [6] показано, что радиально-подобный режим на КВД возникает в период существенного влияния интерференции трещин. Следовательно, нас интересует поведение решения при малых значениях параметра Лапласа ($s \rightarrow 0$), что соответствует большим временам в оригиналах (реальной временной координате), то есть, когда трещины начинают активно интерферировать.

Используя асимптотики функций Матё для $s \rightarrow 0$ (Приложение I) и учитывая тот факт, что $\lim_{s \rightarrow 0} A_0^{2n} = 0$ для $n > 0$ и $A_0^0 = 1/\sqrt{2}$ [17], из (17) получим

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} \frac{1}{s^2} - \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\ln s}{s} + \left((\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \right) \frac{1}{s}, \quad (18)$$

где γ – константа Эйлера – Маскерони.

Выражение (18) представляет собой асимптотику безразмерного давления (17) при $s \rightarrow 0$.

На рис. 3 показана относительная погрешность асимптотического приближения (18).

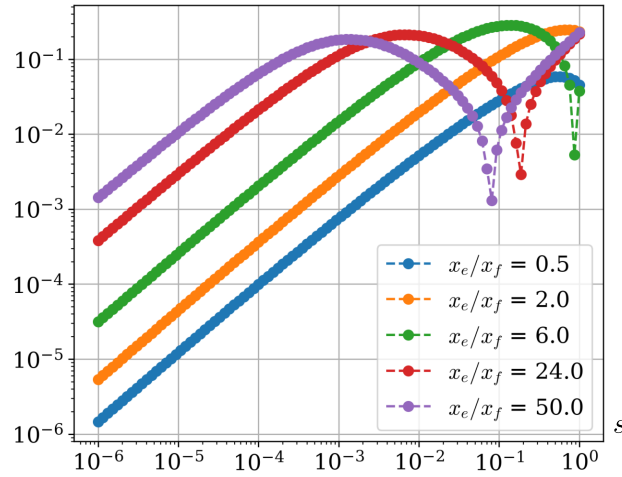


Рис. 3. График зависимости относительной погрешности асимптотической формулы (18)

На рисунке видно, что при убывании s относительная погрешность уменьшается, а с увеличением x_e/x_f возрастает. При этом практический интерес представляют отношения $x_e/x_f < 5$, т. е., когда не проявляется классический (ранне)радиальный режим.

На рис. 4 показана зависимость безразмерного давления на трещине в пространстве Лапласа от параметра s , рассчитанная по точной аналитической формуле (17) и по асимптотическому выражению (18), полученному для малых значений s .

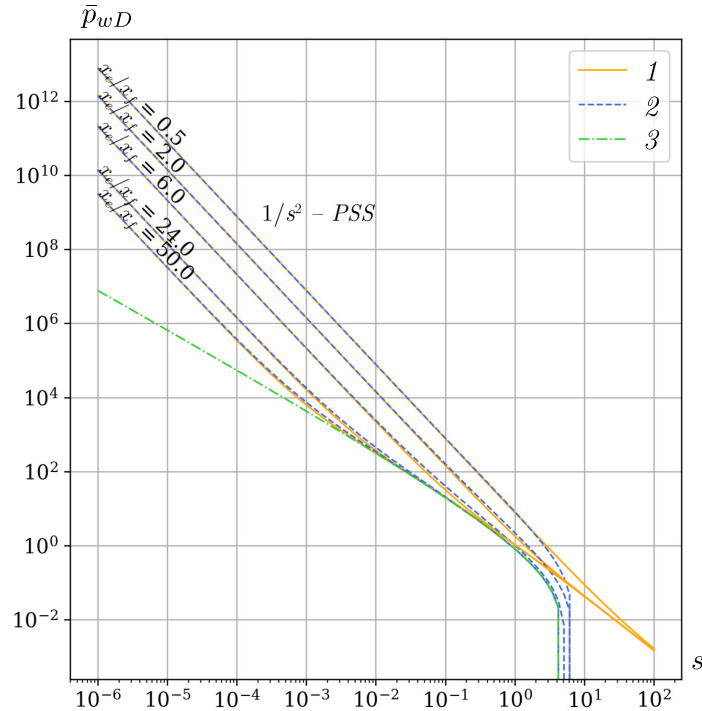


Рис. 4. Билогарифмический график зависимости безразмерного давления на трещине в пространстве Лапласа от параметра s :

1 — точная формула (17), 2 — асимптотическая формула (18), 3 — радиальный режим

При плотном расположении трещин (при малых значениях x_e/x_f) и на аналитической, и на асимптотической кривых наблюдается длительное сохранение поведения, соответствующего псевдостационарному режиму течения (PSS-режиму) с зависимостью $\bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s^2$

($p_{wD}(t_D) \sim t_D$), а характерное радиальному режиму поведение не проявляется. Напротив, при редком расположении трещин (при больших значениях x_e/x_f) с уменьшением s (увеличением t_D) наблюдается сначала радиальный (раннерадialный) режим течения, описываемый зависимостью $\bar{p}_{wD}(s) \sim \ln(s)/s$, и только затем PSS-режим. Полученные результаты подтверждают, что горизонтальный участок на графике логарифмической производной давления, соответствующий раннерадialному режиму, на кривой стабилизации давления для ГС с МГРП будет проявляться лишь при значительном удалении трещин друг от друга. В противном случае на КСД будет наблюдаться только PSS-режим.

Чтобы построить решение для КСД в оригиналах, применим к (18) обратное преобразование Лапласа и получим выражение для безразмерного давления на трещине при $t_D \rightarrow \infty$:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D + \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \ln t_D + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \left(\xi_0 + \frac{3\gamma}{2} - \ln 4 \right) + \ln 4 - \frac{\gamma}{2}. \quad (19)$$

Первое слагаемое в выражении (19) — это линейная компонента, связанная с псевдостационарным режимом течения. Второе слагаемое — логарифмическая компонента, характерная для радиального режима. Явный переход от (17) к (18) представлен в Приложении II.

На рис. 5 изображён диагностический билигарифмический график зависимости логарифмической производной давления от времени, построенный по асимптотическому выражению (19).

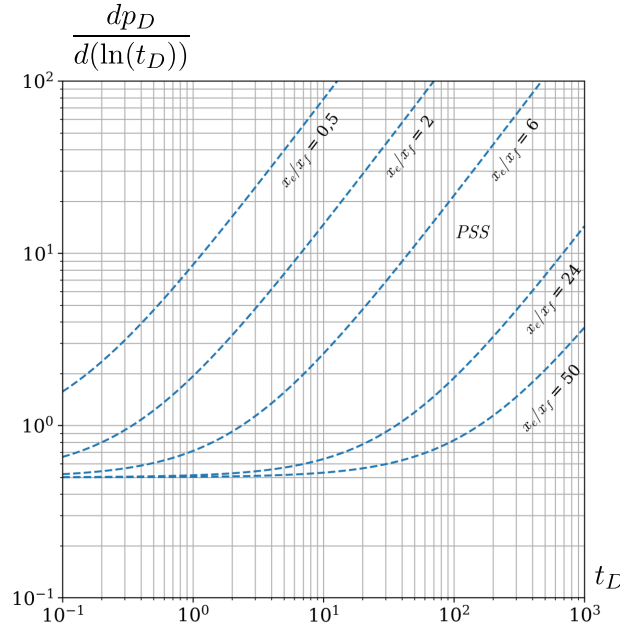


Рис. 5. Билигарифмический график зависимости логарифмической производной безразмерного давления от безразмерного времени, построенный по асимптотической формуле (19)

График в оригиналах полностью согласуется с графиком в пространстве Лапласа: так же видно проявление раннерадialного режима в случае больших соотношений x_e/x_f (горизонтальный участок) и участка с наклоном 1, что соответствует PSS-режиму.

4. КРИВАЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Изменение давления на скважине после остановки (КВД) определяется суперпозицией:

$$\Delta p_{wD} = p_{wD}(t_D) - p_{wD}(t_D - T_D), \quad (20)$$

где T_D – безразмерное время отработки (работы скважины до остановки).

Используя найденную асимптотику (19) давления на скважине до остановки при $t_D \rightarrow \infty$, можно получить асимптотику распределения давления на скважине после остановки:

$$\Delta p_{wD} = \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \operatorname{sh} 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{t_D}{t_D - T_D} + \frac{4}{\operatorname{sh} 2\xi_0} T_D. \quad (21)$$

Первое слагаемое в выражении (21) соответствует искомой асимптотике радиально-подобного режима, если осуществить используемый при анализе КВД переход к времени Хорнера $\frac{t_D}{t_D - T_D}$ [5]. Однако коэффициент при логарифме в (21) отличается от $1/2$ (стандартного раннерадialного режима [7]) и характеризует особенности радиально-подобного режима, выявленного в [6]. В то же время, асимптотика (21) применима только при $t_D \gg T_D$.

Перейдём к изображению суперпозиции давлений (20) в пространстве Лапласа:

$$\mathcal{L}\{\Delta p_{wD}\}(s) = \Delta \bar{p}_{wD}(s) = (1 - e^{-sT_D})\bar{p}_{wD}(s). \quad (22)$$

На рис. 6 представлены графики КВД в пространстве Лапласа для различных значений T_D , построенные по формуле (22).

При больших временах отработки T_D в системе успевает установиться PSS-режим (рис. 6(с), 6(д)). Радиальный режим проявляется только при очень больших отношениях x_e/x_f , что соответствует низкой плотности трещин. При малых значениях T_D PSS-режим не успевает сформироваться (рисунки 6(а), 6(б)). Суперпозиция «снимает» маскирующий эффект PSS-режима и позволяет проявиться радиально-подобному режиму на КВД даже для систем с высокой плотностью трещин. Графически это выражается в том, что с уменьшением T_D участок кривой, характерный для радиального режима, меняет положение и становится более протяжённым и выраженным.

Пояснить сделанные выводы можно, проанализировав выражение (22). Асимптотическое выражение (18) для $\bar{p}_{wD}(s)$ получено при $s \rightarrow 0$. Поведение экспоненты в (22) зависит от её аргумента sT_D .

Если $sT_D \ll 1$, тогда

$$\begin{aligned} (1 - e^{-sT_D})\bar{p}_{wD}(s) &\approx \left(sT_D - \frac{T_D^2 s^2}{2} + \frac{T_D^3 s^3}{6} + o(s^4) \right) \left(C_1 \frac{1}{s^2} - C_2 \frac{\ln s}{s} + C_3 \frac{1}{s} \right) \\ &= C_1 T_D \frac{1}{s} - C_2 T_D \ln s + \left(C_3 T_D - C_1 \frac{T_D^2}{2} \right) + C_2 \frac{T_D^2}{2} s \ln s - C_3 \frac{T_D^2}{2} s + C_1 \frac{T_D^3}{6} s + o(s), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$C_1 = \frac{4}{\operatorname{sh} 2\xi_0}, \quad C_2 = \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \operatorname{sh} 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right), \quad C_3 = (\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \operatorname{sh} 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \operatorname{sh} 2\xi_0} \xi_0.$$

В выражении (23) доминирующее слагаемое $C_1 T_D/s$. Соответственно при $sT_D \ll 1$ на графиках будет проявляться зависимость $\Delta \bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s$.

Если $sT_D \gg 1$, то $e^{-sT_D} \approx 0$ и

$$(1 - e^{-sT_D})\bar{p}_{wD}(s) \approx C_1 \frac{1}{s^2} - C_2 \frac{\ln s}{s} + C_3 \frac{1}{s}. \quad (24)$$

В выражении (24) доминирующее слагаемое C_1/s^2 . Соответственно при $sT_D \gg 1$ на графиках будет проявляться зависимость $\Delta \bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s^2$, (рисунки 6(с) и 6(д)), соответствующая PSS-режиму.

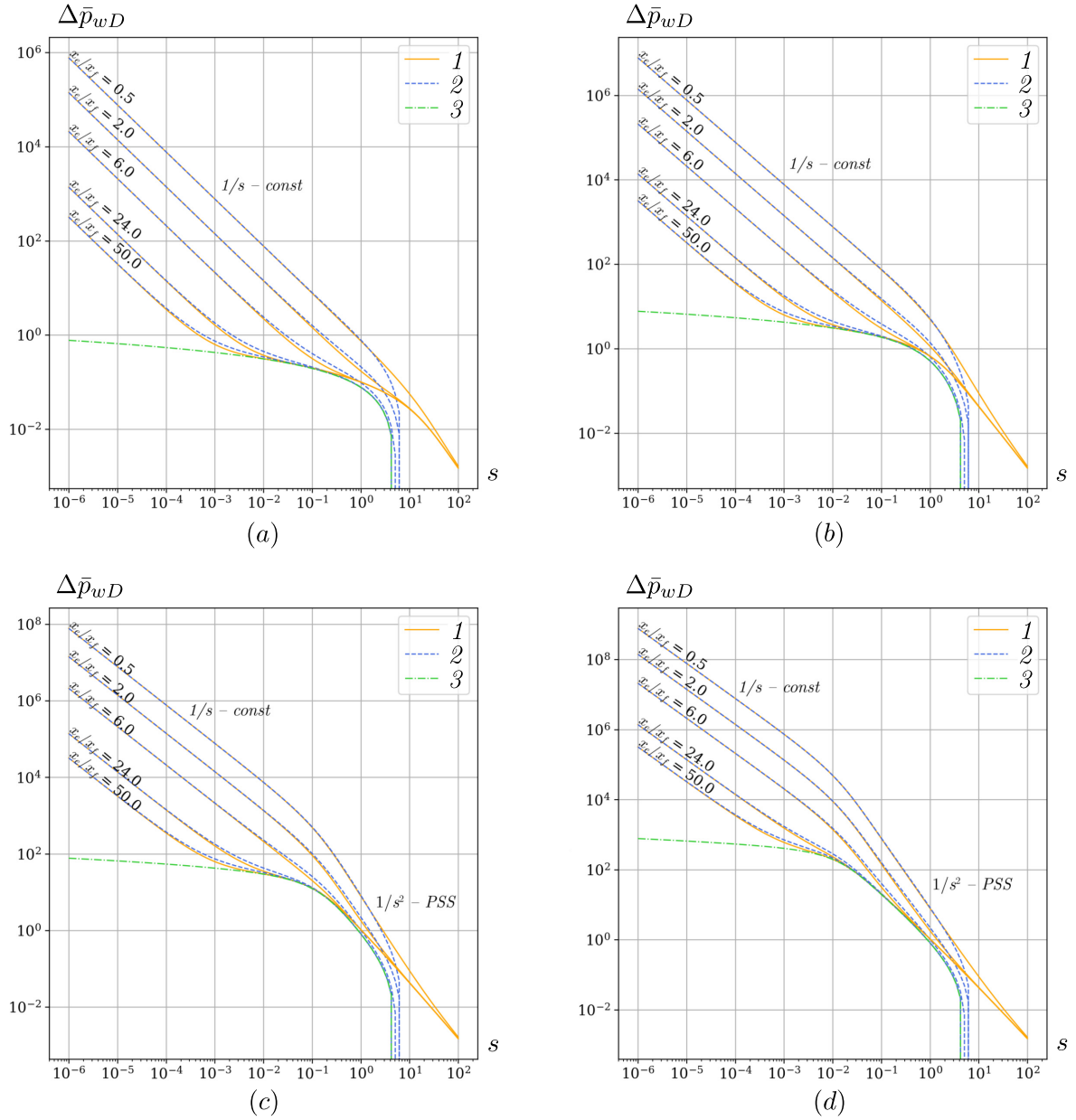


Рис. 6. КВД в пространстве Лапласа при: (а) $T_D = 0.1$; (б) $T_D = 1$; (с) $T_D = 10$; (д) $T_D = 100$;
 1 — точная формула (17), 2 — асимптотическая формула (18), 3 — радиальный режим

Замечание 4.1. Формально при выводе асимптотики (18) предполагается, что T_D — фиксированная константа, поэтому при $s \rightarrow 0$ произведение sT_D также стремится к нулю. Однако анализ графиков показывает, что решение, полученное в предположении $s \rightarrow 0$, хорошо воспроизводит поведение точного решения и в некоторой области немаленьких значений s . Поэтому рассмотрение такого случая позволяет описать поведение точного решения в соответствующей области с увеличением T_D .

Если $sT_D \sim 1$, то на графиках будет проявляться переходный участок между зависимостями $\Delta\bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s$ и $\Delta\bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s^2$.

Таким образом, анализ полученного асимптотического решения для КВД показывает, что малое время отработки T_D позволяет проявиться радиально-подобному режиму на КВД, который в противном случае маскируется PSS-режимом (зависимостью $\sim 1/s^2$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе исследованных ранее особенностей течения вблизи трещин для ГС с МГРП поставлена и решена математическая задача притока к единичной трещине бесконечной проводимости с условием непротекания на эллиптическом контуре, моделирующем влияние соседних интерферирующих трещин. Впервые получено аналитическое выражение в пространстве изображений по Лапласу для изменения давления на трещине при пуске скважины в работу с постоянным дебитом.

Для полученного решения найдена асимптотика в оригиналах при большом времени в период образования эллипсов постоянного давления вокруг каждой трещины с учётом их интерференции, что позволило объяснить проявление раннерадialного режима течения на КСД лишь при значительном удалении трещин друг от друга (когда расстояние между ними превышает ~ 5 их полуудлин).

Показано, что на КВД радиально-подобный режим течения проявляется при коротком времени отработки даже при значительной интерференции трещин, что делает его перспективным инструментом для определения параметров низкопроницаемых пластов по данным исследований ГС с МГРП.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

В данном приложении мы приводим асимптотики некоторых функций Матьё при $s \rightarrow 0$. В данной работе используются функции Матьё в следующем виде [18]:

$$\text{Fek}_{2n}(\xi, -s/4) = \frac{p'_{2n}}{\pi A_0^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n} I_r \left(\sqrt{\frac{s}{4}} e^{-\xi} \right) K_r \left(\sqrt{\frac{s}{4}} e^{\xi} \right), \quad (25)$$

$$\text{Ce}_{2n}(\xi, -s/4) = \frac{p'_{2n}}{A_0^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n} I_r \left(\sqrt{\frac{s}{4}} e^{-\xi} \right) I_r \left(\sqrt{\frac{s}{4}} e^{\xi} \right), \quad (26)$$

$$\text{ce}_{2n}(\eta, -s/4) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n} \cos 2r\eta, \quad (27)$$

где $p'_{2n} = (-1)^n \text{ce}_{2n}(0, s/4) \text{ce}_{2n}(\frac{\pi}{2}, s/4) / A_0^{2n}$; I_r , K_r — модифицированные функции Бесселя.

Известно, что $\lim_{s \rightarrow 0} A_{2r}^{2n}(-s/4) = 0$ для $n > 0$ и $A_0^0(-\frac{s}{4}) = 1/\sqrt{2}$ [8]. Следовательно, членами порядка $n > 0$ в выражении (17) можно пренебречь.

Тогда асимптотика выражения (17) при $s \rightarrow 0$ примет вид:

$$\bar{p}_{wD}(s) \sim -\frac{1}{s} \frac{\text{Fek}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Ce}_0(0, -s/4) - \text{Ce}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Fek}_0(0, -s/4)}{\text{Fek}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Ce}'_0(0, -s/4) - \text{Ce}'_0(\xi_0, -\frac{s}{4}) \text{Fek}'_0(0, -s/4)}. \quad (28)$$

Из разложения Ce_{2n} по функциям Бесселя (26) нетрудно получить, что $\text{Ce}'_0(0, -s/4) = 0$. Тогда выражение (28) преобразуется к виду:

$$\bar{p}_{wD}(s) \sim \frac{1}{s} \frac{\text{Fek}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Ce}_0(0, -s/4)}{\text{Ce}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Fek}'_0(0, -s/4)} - \frac{1}{s} \frac{\text{Fek}_0(0, -s/4)}{\text{Fek}'_0(0, -s/4)}. \quad (29)$$

Согласно [8],

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{Fek}_0(0, -s/4)}{\text{Fek}'_0(0, -s/4)} = -2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln s + \gamma. \quad (30)$$

Заметим, что при $s \rightarrow 0$ второе слагаемое (29) является выражением для изменения безразмерного давления на трещине при условии бесконечно удалённой границы ($\lim_{\xi \rightarrow \infty} p_D = 0$), которое получили Кучук и Бригам в работе [7].

Используя (25)–(27), получим асимптотики функций Матьё и их производных, входящих в первое слагаемое (29), при $s \rightarrow 0$:

$$\text{Ce}_0(0, -s/4) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (31)$$

$$\text{Ce}'_0(\xi_0, -s/4) \sim \frac{s}{4\sqrt{2}} \text{sh } 2\xi_0, \quad (32)$$

$$\text{Fek}'_0(0, -s/4) \sim -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}, \quad (33)$$

$$\text{Fek}'_0(\xi_0, -s/4) \sim -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left(1 - \frac{s}{8} e^{-2\xi_0} (\gamma + \ln \sqrt{s} - \ln 4 + \xi_0) \right). \quad (34)$$

Подставляя асимптотики (30)–(34) в (29), получим асимптотику выражения (17) при $s \rightarrow 0$ (формула (18) в основном тексте статьи).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Обратное преобразование Лапласа каждого из слагаемых выражения (17) имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D, \quad (35)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ - \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\ln s}{s} \right\} = \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) (\ln t_D + \gamma), \quad (36)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left((\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \right) \frac{1}{s} \right\} = (\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0. \quad (37)$$

Складывая (35)–(37), получим обратное преобразование Лапласа для (17):

$$\begin{aligned} p_{wD}(t_D) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{p}_{wD}(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} \frac{1}{s^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\ln s}{s} \right\} \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left((\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \right) \frac{1}{s} \right\} \\ &= \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D + \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) (\ln t_D + \gamma) + (\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \\ &= \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D + \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \ln t_D \\ &\quad + \frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} \gamma + \frac{\gamma}{2} + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \gamma - \gamma - \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \ln 4 + \ln 4 + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \\ &= \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D + \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \ln t_D + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \left(\xi_0 + \frac{3\gamma}{2} - \ln 4 \right) + \ln 4 - \frac{\gamma}{2}. \quad (38) \end{aligned}$$

Заметим, что если устремить внешнюю границу к бесконечности ($\xi_0 \rightarrow \infty$), то выражение (38) примет вид:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln t_D + \ln 4 - \frac{\gamma}{2}. \quad (39)$$

Формула (39) для классического радиального режима была получена в работе [7].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института проблем нефти и газа РАН (проект № 125020501405-1). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhao H.-F., Luo J.-L., Li X.-J. et al. Experimental investigation into the fracture propagation behavior of horizontal well multi-stage and multi-cluster fracturing within the roof of crushed soft coal seams // Petroleum Science. 2025. V. 22, Iss. 11. P. 4682–4713; DOI: 10.1016/j.petsci.2025.09.033
2. Zhao E., Jin Z., Li G. et al. Feasibility of CO₂ storage and enhanced gas recovery in depleted tight sandstone gas reservoirs within multi-stage fracturing horizontal wells // Petroleum Science. 2024. V. 21, Iss. 6. P. 4189–4203; DOI: 10.1016/j.petsci.2024.08.014.
3. Никонорова А.Н., Ворон К.А., Кременецкий М.И. и др. Оценка динамики добычных возможностей нефтегазовых горизонтальных скважин с многостадийным ГРП по результатам гидродинамических исследований на основе диагностики ранних режимов течения // Экспозиция Нефть Газ. 2024. № 6. С. 50–56; DOI: 10.24412/2076-6785-2024-6-50-56
4. Dheyauldeen A., Alfarge D., Alkhafaji H. et al. A generic method for diagnosing flow regimes based on dynamic gas in place in unconventional gas reservoirs // Model. Earth Syst. Environ. 2025. V. 11. Article number 346; DOI: 10.1007/s40808-025-02520-x
5. Кременецкий М.И., Ипатов А.И. Применение промыслово-геофизического контроля для оптимизации разработки месторождений нефти и газа. Т. 2. Роль гидродинамико-геофизического мониторинга в управлении разработкой. М.: ИКИ, 2020.
6. Абрамов Т.А., Индрупский И.М. Особенности и информативные возможности раннерадialного режима на КВД в горизонтальных скважинах с близко расположенными трещинами МГРП // Записки Горного института. 2025. Т. 276, № 2. С. 29–48.
7. Kucuk F., Brigham W. E. Transient Flow in Elliptical Systems // Society of Petroleum Engineers J. 1979. V. 19, N 6. P. 401–410; DOI: 10.2118/7488-pa
8. Riley M.F., Brigham W.E., Horne R.N. Analytic solutions for elliptical finite-conductivity fractures // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, October 6–9, 2011.
9. Amini S., Ilk D., Blasingame T.A. Evaluation of the Elliptical Flow Period for Hydraulically-Fractured Wells in Tight Gas Sands – Theoretical Aspects and Practical Considerations // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, College Station, Texas, USA, Jan. 2007. DOI: 10.2118/106308-MS
10. Cheng Y., Lee W.J., McVay D.A. A New Approach for Reliable Estimation of Hydraulic Fracture Properties Using Elliptical Flow Data in Tight Gas Wells // SPE Res. Eval. & Eng. 2009. V. 12. P. 254–262; DOI: 10.2118/105767-PA
11. Liehui Z., Xiaotao Z., Yong W. et al. A Study on Elliptical Gas Flow in Tri-porosity Gas Reservoirs // Transp. Porous Med. 2011. V. 87. P. 777–791; DOI: 10.1007/s11242-011-9718-9
12. Jiang R.-Z., Zhang F.-L., Cui Y.-Z. et al. Production Performance Analysis of Fractured Vertical Wells with SRV in Triple Media Gas Reservoirs Using Elliptical Flow // J. Nat. Gas Sci. Eng. 2019. V. 68. Article number 102925; DOI: 10.1016/j.jngse.2019.102925
13. Zhang Q., Su Y., Wang W. et al. Performance Analysis of Fractured Wells With Elliptical SRV in Shale Reservoirs // J. Nat. Gas Sci. Eng. 2017. V. 45. P. 380–390; DOI: 10.1016/j.jngse.2017.06.004
14. Xu J.-C., Guo C.-H., Teng W.-C. et al. Production Performance Analysis of Tight Oil/Gas Reservoirs Considering Stimulated Reservoir Volume Using Elliptical Flow // J. Nat. Gas Sci. Eng. 2015. V. 26. P. 827–839; DOI: 10.1016/j.jngse.2015.06.057

15. Xu Y., Zuping X., Yu M. Modeling Transient Flow Behavior of Off-Center Fractured Well With Multiple Fractures in Radial Composite Gas Reservoirs // SPE Reservoir Eval. Eng. 2023. V. 26, N 4. P. 1127–1143; DOI: 10.2118/215808-PA
16. van Everdingen A.F., Hurst W. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs // J. Petroleum Technology. 1949. V. 186. P. 305–324.
17. Igbokoyi A.O., Tiab D. A New Method of Well-Test Analysis in Naturally Fractured Reservoirs Based on Elliptical Flow // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, USA, September 2008; DOI: 10.2118/116732-MS
18. McLachlan N.W. Theory and Applications of Mathieu Functions. Oxford: The Clarendon Press, 1951.

UDC 517.955.8:532.546

ASYMPTOTICS OF ONE SOLUTION TO THE PROBLEM OF ELLIPTICAL INFLOW TO A FRACTURE FOR A HORIZONTAL WELL WITH MULTISTAGE HYDRAULIC FRACTURING

© 2026 A. E. Zhaglova^a, I. M. Indrupskiy^b

*Oil and Gas Research Institute RAS,
Gubkina str., 3, Moscow 119333, Russia*

E-mails: ^aazhaglova@ipng.ru, ^bi-ind@ipng.ru

Received 29.12.2025, revised 15.05.2026, accepted 15.07.2026

Abstract. Horizontal wells with multistage hydraulic fracturing are widely used in the development of low-permeability oil and gas reservoirs. However, the interpretation of well-test data from such wells is significantly complicated by the long time required to reach the classical radial flow regime and by the interference of multiple fractures. In this paper, we formulate and solve a mathematical problem of inflow to an infinite-conductivity fracture with an impermeable elliptical boundary, which models flow toward a horizontal well with multistage hydraulic fracturing under interference of closely spaced fractures. For the first time, we derive an analytical expression for the pressure variation at the fracture during constant-rate production and obtain the large-time asymptotics of the solution. It is demonstrated that a short production period before shut-in leads to the appearance of characteristic intermediate radial-flow asymptotics on the pressure buildup curves, even under significant fracture interference. The results obtained are important for estimating the parameters of low-permeability formations from well-test data of horizontal wells with multistage hydraulic fracturing.

Keywords: elliptical flow, Laplace transform, asymptotic solution, pressure curve, Mathieu functions, horizontal well, radial flow regime.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.203

REFERENCES

1. Zhao H.-F., Luo J.-L., Li X.-J. et al. Experimental investigation into the fracture propagation behavior of horizontal well multi-stage and multi-cluster fracturing within the roof of crushed soft coal seams. *Petroleum Sci.*, 2025, Vol. 22, Iss. 11, pp. 4682–4713; DOI: 10.1016/j.petsci.2025.09.033
2. Zhao E., Jin Z., Li G. et al. Feasibility of CO₂ storage and enhanced gas recovery in depleted tight sandstone gas reservoirs within multi-stage fracturing horizontal wells. *Petroleum Sci.*, 2024, Vol. 21, Iss. 6, pp. 4189–4203; DOI: 10.1016/j.petsci.2024.08.014.
3. Nikonorova A.N., Voron K.A., Kremeneckij M.I. et al. Ocenka dinamiki dobychnykh vozmozhnostej neftegazovykh gorizontaľnykh skvazhin s mnogostadijnym GRP po rezul'tatam gidrodinamicheskikh issledovanij na osnove diagnostiki rannih rezhimov techeniya [Assessment of the dynamics of production capabilities of oil and gas horizontal wells with multistage hydraulic fracturing based on the results of hydrodynamic studies based on diagnostics of early flow regimes]. *Ehkspoziciya Neft' Gaz* [Oil and Gas Exhibition], 2024, No. 6, pp. 50–56 (in Russian); DOI: 10.24412/2076-6785-2024-6-50-56
4. Dheyauldeen A., Alfarge D., Alkhafaji H. et al. A generic method for diagnosing flow regimes based on dynamic gas in place in unconventional gas reservoirs. *Model. Earth Syst. Environ.*, 2025, Vol. 11, Article number 346; DOI: 10.1007/s40808-025-02520-x

5. Kremeneckij M.I., Ipatov A.I. *Primenenie promyslovo-geofizicheskogo kontrolya dlya optimizacii razrabotki mestorozhdenij nefti i gaza*. Vol. 2. Rol' gidrodinamiko-geofizicheskogo monitoringa v upravlenii razrabotkoj [Application of field and geophysical control to optimize the development of oil and gas fields. Vol. 2. The role of hydrodynamic and geophysical monitoring in development management]. Moscow: IKI Publ., 2020 (in Russian).
6. Abramov T.A., Indrupskii I.M. Osobennosti i informativnye vozmozhnosti ranneradial'nogo rezhima na KVD v gorizontaľnyh skvazhinah s blizko raspolozhennymi treshchinami MGRP [Features and informative possibilities of the early radial regime of buildups in horizontal wells with closely spaced multi-stage fractures]. *Zapiski Gornogo instituta* [J. Mining Institute.] 2025, Vol. 276, Iss. 2, pp. 29–48 (in Russian).
7. Kucuk F., Brigham W. E. Transient Flow in Elliptical Systems. *Society of Petroleum Engineers J.*, 1979, Vol. 19, No. 6, pp. 401–410; DOI: 10.2118/7488-pa
8. Riley M.F., Brigham W.E., Horne R.N. Analytic solutions for elliptical finite-conductivity fractures. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, Texas, October 6–9, 2011.
9. Amini S., Ilk D., Blasingame T.A. Evaluation of the Elliptical Flow Period for Hydraulically-Fractured Wells in Tight Gas Sands – Theoretical Aspects and Practical Considerations. *SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference*, College Station, Texas, USA, Jan. 2007. DOI: 10.2118/106308-MS
10. Cheng Y., Lee W.J., McVay D.A. A New Approach for Reliable Estimation of Hydraulic Fracture Properties Using Elliptical Flow Data in Tight Gas Wells. *SPE Res. Eval. & Eng.*, 2009, Vol. 12, pp. 254–262; DOI: 10.2118/105767-PA
11. Liehui Z., Xiaotao Z., Yong W. et al. A Study on Elliptical Gas Flow in Tri-porosity Gas Reservoirs. *Transp. Porous Med.*, 2011, Vol. 87, pp. 777–791; DOI: 10.1007/s11242-011-9718-9
12. Jiang R.-Z., Zhang F.-L., Cui Y.-Z. et al. Production Performance Analysis of Fractured Vertical Wells with SRV in Triple Media Gas Reservoirs Using Elliptical Flow. *J. Nat. Gas Sci. Eng.*, 2019, Vol. 68, Article number 102925; DOI: 10.1016/j.jngse.2019.102925
13. Zhang Q., Su Y., Wang W. et al. Performance Analysis of Fractured Wells With Elliptical SRV in Shale Reservoirs. *J. Nat. Gas Sci. Eng.*, 2017, Vol. 45, pp. 380–390; DOI: 10.1016/j.jngse.2017.06.004
14. Xu J.-C., Guo C.-H., Teng W.-C. et al. Production Performance Analysis of Tight Oil/Gas Reservoirs Considering Stimulated Reservoir Volume Using Elliptical Flow. *J. Nat. Gas Sci. Eng.*, 2015, Vol. 26, pp. 827–839; DOI: 10.1016/j.jngse.2015.06.057
15. Xu Y., Zuping X., Yu M. Modeling Transient Flow Behavior of Off-Center Fractured Well With Multiple Fractures in Radial Composite Gas Reservoirs. *SPE Reservoir Eval. Eng.*, 2023, Vol. 26, No. 4, pp. 1127–1143; DOI: 10.2118/215808-PA
16. van Everdingen A.F., Hurst W. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs. *J. Petroleum Technology*, 1949, Vol. 186, pp. 305–324.
17. Igbokoyi A.O., Tiab D. A New Method of Well-Test Analysis in Naturally Fractured Reservoirs Based on Elliptical Flow. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Denver, Colorado, USA, September 2008; DOI: 10.2118/116732-MS
18. McLachlan N.W. *Theory and Applications of Mathieu Functions*. Oxford: The Clarendon Press, 1951.