

УДК 539.3:517.958

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОМЕНТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНОГО ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

© 2026 Н. И. Остросаблин

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: o.n.ii@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.06.2024 г.; после доработки 12.09.2025 г.;
принята к публикации 15.06.2026 г.

Трёхмерная система дифференциальных уравнений четвёртого порядка моментной линейной теории упругости в смещениях изотропного псевдоконтинуума Коссера представлена в виде объединения автоморфной системы третьего порядка и разрешающей системы первого порядка. Решение разрешающей системы выражено через четыре гармонические функции. Для системы в смещениях найдено два варианта представления общего решения через три функции, удовлетворяющих трём независимым уравнениям, т. е. система диагоназируется. Приведены формулы производства новых решений (операторы симметрии), позволяющие путём дифференцирования из какого-либо заданного решения находить новые решения исходных уравнений. С использованием представления решения разрешающей системы через гармонические функции получается представление смещений в статике через гармонические функции и для классической изотропной упругой среды.

Ключевые слова: моментная теория упругости, псевдоконтинуум Коссера, общие решения, операторы симметрии, диагональная система, стеснённое вращение, несимметричные тензоры напряжений и деформаций.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.205

ВВЕДЕНИЕ И ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Моментная линейная теория упругости позволяет более адекватно, чем классическая линейная теория упругости, описывать деформирование упругих тел при больших градиентах напряжений, деформирование волокнистых, зернистых, полимерных материалов и других различных композитных материалов. Моментная упругая среда представляется совокупностью частиц, характеризующихся в декартовой прямоугольной системе координат x_i , $i = 1, 2, 3$, вектором смещений u_i и независимым вектором поворотов ω_i (см. [1–3]). Такая теория впервые была предложена в начале 20 века в работах братьев Коссера [1]. В моментной среде при нагружении возникают несимметричные силовые напряжения $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ и моментные напряжения $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$. Уравнения равновесия для моментной среды имеют вид (см. [1–3]) (по повторяющимся индексам проводится суммирование)

$$\partial_j \sigma_{ij} + F_i = 0; \quad (1)$$

$$\partial_j \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} + M_i = 0, \quad (2)$$

где ∂_j — производная по координате x_j ; ε_{ijk} — кососимметричный по любой паре индексов тензор Леви-Чивиты; F_i — вектор объёмных сил; M_i — вектор объёмных моментов. Вектор

силовых напряжений p_i на площадке с нормалью n_i и вектор моментных напряжений m_i на этой площадке определяются формулами Коши

$$\sigma_{ij}n_j = p_i, \quad \mu_{ij}n_j = m_i. \quad (3)$$

Деформированное состояние моментной среды характеризуют несимметричные тензоры деформации e_{ij} и кручения-изгиба $\varkappa_{ij}$ (см. [1–3]):

$$e_{ij} = \partial_j u_i - \omega_{ij}, \quad \varkappa_{ij} = \partial_j \omega_i, \quad (4)$$

где

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{21} & -\omega_{31} \\ \omega_{21} & 0 & -\omega_{32} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\omega_k, \quad \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{kj}.$$

Формулы (5) связывают кососимметричный тензор ω_{ij} и вектор ω_i . Определяющие уравнения для упругой изотропной моментной среды записываются в виде (см. [1, 2])

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + (\mu + \alpha)e_{ij} + (\mu - \alpha)e_{ji}, \quad \mu_{ij} = \beta \varkappa_{kk}\delta_{ij} + (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\varkappa_{ji}, \quad (6)$$

где λ, μ — постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — дополнительные постоянные упругости; δ_{ij} — символ Кронекера, единичная матрица. Если постоянные в (6) удовлетворяют неравенствам (см. [2])

$$3\lambda + 2\mu \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad \alpha \neq 0; \quad 3\beta + 2\gamma \neq 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \varepsilon \neq 0,$$

то соотношения (6) обратимы

$$e_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha}\right)\sigma_{ij} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha}\right)\sigma_{ji},$$

$$\varkappa_{ij} = \frac{-\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)}\mu_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\varepsilon}\right)\mu_{ij} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\mu_{ji}.$$

Удельная энергия деформации имеет вид (см. [1, 2])

$$2\Phi = \sigma_{ij}e_{ij} + \mu_{ij}\varkappa_{ij} =$$

$$= \lambda e_{kk}e_{ii} + (\mu + \alpha)e_{ij}e_{ij} + (\mu - \alpha)e_{ji}e_{ij} + \beta \varkappa_{kk}\varkappa_{ii} + (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{ij}\varkappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\varkappa_{ji}\varkappa_{ij}. \quad (7)$$

Квадратичная форма (7) от восемнадцати переменных $e_{ij}, \varkappa_{ij}$ должна быть положительно определённой. Проверка положительной определённости формы (7) в (см. [2, 4]) проводится с помощью вычисления восемнадцати определителей главных миноров матрицы формы (7). Но условия на коэффициенты формы (7) можно получить без вычисления определителей. Для этого необходимо из тензоров $e_{ij}, \varkappa_{ij}$ выделить неприводимые составляющие. Перепишем форму (7)

$$2\Phi = \lambda e_{kk}e_{ii} + 2\mu e_{(ij)}e_{(ij)} + 2\alpha e_{[ij]}e_{[ij]} + \beta \varkappa_{kk}\varkappa_{ii} + 2\gamma \varkappa_{(ij)}\varkappa_{(ij)} + 2\varepsilon \varkappa_{[ij]}\varkappa_{[ij]}$$

$$= \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)e_{kk}e_{ii} + 2\mu\left(e_{(ij)} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right)\left(e_{(ij)} - \frac{1}{3}e_{ss}\delta_{ij}\right) + 2\alpha e_{[ij]}e_{[ij]}$$

$$+ \frac{1}{3}(3\beta + 2\gamma)\varkappa_{kk}\varkappa_{ii} + 2\gamma\left(\varkappa_{(ij)} - \frac{1}{3}\varkappa_{kk}\delta_{ij}\right)\left(\varkappa_{(ij)} - \frac{1}{3}\varkappa_{ss}\delta_{ij}\right) + 2\varepsilon \varkappa_{[ij]}\varkappa_{[ij]}. \quad (8)$$

Круглые и квадратные скобки в индексах означают симметричную и антисимметричную части тензоров по соответствующим индексам. Из последних выражений (8) очевидно, что $2\Phi > 0$ всегда, когда постоянные удовлетворяют неравенствам

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad \alpha > 0; \quad 3\beta + 2\gamma > 0, \quad \gamma > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

В [4] кроме этих неравенств приведено ещё два лишних неравенства, в обозначениях из [4]: $\mu - \gamma > 0$, $\vartheta > 0$. В наших обозначениях $\mu - \gamma = \mu + \alpha > 0$, $\vartheta = \gamma + \varepsilon > 0$ эти неравенства всегда выполняются. Так как квадратичная форма (7) записана в виде (8) суммы квадратов независимых переменных с коэффициентами при этих квадратах, то коэффициенты являются собственными значениями соответствующей кратности матрицы формы (7)

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 3\lambda + 2\mu, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2\mu, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 4\alpha, \\ \lambda_{10} = 3\beta + 2\gamma, \quad \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{15} = 2\gamma, \quad \lambda_{16} = \lambda_{17} = \lambda_{18} = 4\varepsilon, \end{aligned}$$

причём должно быть $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, 18}$.

Теперь, учитывая запись (8), можно переписать определяющие соотношения (6) в виде отдельных независимых выражений

$$\begin{aligned} \sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)e_{kk}, \quad \sigma_{(ij)} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = 2\mu\left(e_{(ij)} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right), \quad \sigma_{[ij]} = 2\alpha e_{[ij]}, \\ \mu_{kk} = (3\beta + 2\gamma)\varkappa_{kk}, \quad \mu_{(ij)} - \frac{1}{3}\mu_{kk}\delta_{ij} = 2\gamma\left(\varkappa_{(ij)} - \frac{1}{3}\varkappa_{kk}\delta_{ij}\right), \quad \mu_{[ij]} = 2\varepsilon\varkappa_{[ij]}. \end{aligned}$$

Из последних соотношений очевидна их обратимость и ограничения на постоянные.

В упрощённой теории Коссера считают, что вектор поворота (5) равен среднему повороту поля перемещений (см. [1])

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\partial_k u_l, \quad (9)$$

т. е. имеем стеснённое вращение

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3), \quad \omega_3 = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

Тогда тензоры (4) принимают вид

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \varkappa_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\partial_j u_l, \quad \varkappa_{ii} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\partial_{ik} u_l = 0. \quad (10)$$

Из (6) находим симметричную часть тензора напряжений

$$\sigma_{(ij)} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (11)$$

а из (2), считая $M_i = 0$, получаем несимметричную часть

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = \partial_j \mu_{1j}, \quad \sigma_{31} - \sigma_{13} = \partial_j \mu_{2j}, \quad \sigma_{12} - \sigma_{21} = \partial_j \mu_{3j}. \quad (12)$$

Из второго уравнения (6) с учётом (4), (10) получаем моментные напряжения

$$\mu_{ij} = (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\varkappa_{ji} = \gamma(\partial_j \omega_i + \partial_i \omega_j) + \varepsilon(\partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j), \quad (13)$$

которые подставим в формулы (12):

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = (\gamma + \varepsilon)\partial_{jj}\omega_1, \quad \sigma_{31} - \sigma_{13} = (\gamma + \varepsilon)\partial_{jj}\omega_2, \quad \sigma_{12} - \sigma_{21} = (\gamma + \varepsilon)\partial_{jj}\omega_3. \quad (14)$$

С учётом (9)–(11), (14) находим выражения напряжений через смещения

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\partial_1 u_1 + \lambda(\partial_2 u_2 + \partial_3 u_3), & \sigma_{12} &= \mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) + \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_3, \\
 \sigma_{21} &= \mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) - \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_3, & \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\partial_2 u_2 + \lambda(\partial_1 u_1 + \partial_3 u_3), \\
 \sigma_{31} &= \mu(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) + \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_2, & \sigma_{32} &= \mu(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) - \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_1, \\
 \sigma_{13} &= \mu(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) - \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_2, \\
 \sigma_{23} &= \mu(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) + \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_1, \\
 \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu)\partial_3 u_3 + \lambda(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя напряжения (15) в уравнения равновесия (1) без учёта объёмных сил, получим три уравнения для трёх смещений (см. [1]):

$$\mu\partial_{kk}u_i + (\lambda + \mu)\partial_{ik}u_k + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\varepsilon_{imn}\partial_m\varepsilon_{njl}\partial_j u_l = 0. \tag{16}$$

Слагаемые со вторыми производными в (16) соответствуют классическим уравнениям Ламе, а слагаемые с четвёртыми производными отвечают за моментное состояние псевдоконтинуума Коссера. К уравнениям (16) добавляют граничные условия в напряжениях (3) или задают на границе рассматриваемой области смещения. Вопрос о граничных условиях для системы (16) и способы её интегрирования кратко обсуждаются в [1]. Определив из (16) смещения u_i по формулам (9), (13), (15), получим ω_i , μ_{ij} , σ_{ij} .

1. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ (16) К СИСТЕМЕ МОИСИЛА — ТЕОДОРЕСКУ

Используя известное соотношение

$$\partial_{kk}u_i = \partial_{ik}u_k - \varepsilon_{imn}\partial_m\varepsilon_{njl}\partial_j u_l,$$

уравнение (16) можно переписать в виде

$$(\lambda + 2\mu)\partial_{ik}u_k + \left[\frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} - \mu\right]\varepsilon_{imn}\partial_m\varepsilon_{njl}\partial_j u_l = 0$$

или с учётом (9)

$$(\lambda + 2\mu)\partial_{ik}u_k + \left[\frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} - 2\mu\right]\varepsilon_{imn}\partial_m\omega_n = 0. \tag{17}$$

Введём обозначения

$$(\lambda + 2\mu)\partial_{ik}u_k = \psi, \quad \left[2\mu - \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\right]\omega_n = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\right]\varepsilon_{njl}\partial_j u_l = \varphi_n. \tag{18}$$

В системе (18) четыре уравнения для трёх функций u_k , т. е. функции в правой части (18) должны удовлетворять условиям совместности. Условием совместности является соотношение

$$\partial_n\varphi_n = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\right]\varepsilon_{njl}\partial_{nj}u_l = 0. \tag{19}$$

С учётом обозначений (18) уравнения (17) принимают вид

$$\partial_i \psi - \varepsilon_{imn} \partial_m \varphi_n = 0. \quad (20)$$

Система вида (18) в [5] названа автоморфной системой, а уравнения вида (19), (20) названы разрешающей системой. В [5] эти системы исследуются методами группового анализа.

Запишем систему (19), (20) подробнее:

$$\begin{aligned} \partial_1 \psi + \partial_3 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_3 &= 0, & \partial_2 \psi - \partial_3 \varphi_1 + \partial_1 \varphi_3 &= 0, \\ \partial_3 \psi + \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_2 &= 0, & \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

или в матричном виде

$$M\varphi = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ \partial_2 & -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_3 & \partial_2 & -\partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (21a)$$

Здесь матрицу системы обозначили через M . Система (21) известна как система Моисила — Теодореску (см. [6, 7]). Её решения связаны с решениями классических уравнений Ламе [6] и, как следует из (17), (18), с решениями уравнений (16) псевдоконтинуума Коссера. Находим транспонированную матрицу

$$M' = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \\ 0 & -\partial_3 & \partial_2 & \partial_1 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 & \partial_3 \end{bmatrix}.$$

Имеет место соотношение

$$M'M = \begin{bmatrix} \partial_{kk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{kk} \end{bmatrix} = MM', \quad (22)$$

т. е. матрицы M и M' перестановочны и их произведение равно диагональной матрице $\partial_{kk}\delta_{ij}$. Решение системы (21), (21a) представим в виде

$$\varphi = M'\psi, \quad M\varphi = MM'\psi = \partial_{kk}\delta_{ij}\psi_j = \partial_{kk}\psi_i = 0,$$

или в развёрнутой записи

$$\begin{aligned} \psi &= \partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3, & \varphi_1 &= -\partial_3 \psi_2 + \partial_2 \psi_3 + \partial_1 \psi_4, \\ \varphi_2 &= \partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 + \partial_2 \psi_4, & \varphi_3 &= -\partial_2 \psi_1 + \partial_1 \psi_2 + \partial_3 \psi_4, & \partial_{kk}\psi_i &= 0; \end{aligned} \quad (23)$$

т. е. решение (23) системы (21), (21a) выражается через четыре произвольные гармонические функции ψ_i , $i = \overline{1, 4}$. Но и сами функции ψ , φ_i , очевидно, являются гармоническими функциями, из (21a), (22) следует

$$M'M\varphi = \begin{bmatrix} \partial_{kk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Для случая плоской деформации $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = 0$, тогда из (18) получаем

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) &= \psi, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \\ \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(\partial_{11} + \partial_{22}) \right] (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) &= \varphi_3, \end{aligned}$$

и система (21) принимает вид условий (уравнений) Коши — Римана

$$\partial_1 \psi - \partial_2 \varphi_3 = 0, \quad \partial_2 \psi + \partial_1 \varphi_3 = 0, \quad \partial_3 \psi = 0, \quad \partial_3 \varphi_3 = 0$$

для аналитической функции $\varphi(z) = \psi + i\varphi_3$, $i = \sqrt{-1}$ комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$. Таким образом, система (21) является обобщением системы Коши — Римана на трёхмерный случай.

2. ВЫРАЖЕНИЕ СМЕЩЕНИЙ В СЛУЧАЕ КЛАССИЧЕСКОГО ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Если в (18) не учитывать моментные слагаемые, то с помощью решения уравнений (23) относительно функций ψ_i , можно получить выражение смещений u_i через гармонические функции ψ_i для случая классического изотропного материала. Решение системы (23) в этом случае будет следующее (см. [8]):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a(bu_1 + x_1\psi + x_2\varphi_3 - x_3\varphi_2), \quad \psi_2 = a(bu_2 + x_2\psi + x_3\varphi_1 - x_1\varphi_3), \quad a = \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 7\mu}, \\ \psi_3 &= a(bu_3 + x_3\psi + x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1), \quad \psi_4 = a(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3), \quad b = \frac{4\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из соотношений (24) можно выразить смещения u_i через ψ_i :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{b} \left(-\frac{1}{a}\psi_1 + x_1\psi + x_2\varphi_3 - x_3\varphi_2 \right), \quad u_2 = -\frac{1}{b} \left(-\frac{1}{a}\psi_2 + x_2\psi + x_3\varphi_1 - x_1\varphi_3 \right), \\ u_3 &= -\frac{1}{b} \left(-\frac{1}{a}\psi_3 + x_3\psi + x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляем в (25) выражения (23)

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{b} \left[-\frac{1}{a}\psi_1 + x_1(\partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3) + \right. \\ &\quad \left. + x_2(-\partial_2 \psi_1 + \partial_1 \psi_2 + \partial_3 \psi_4) - x_3(\partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 + \partial_2 \psi_4) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{b} \left[-\frac{1}{a}\psi_2 + x_2(\partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3) + \right. \\ &\quad \left. + x_3(-\partial_3 \psi_2 + \partial_2 \psi_3 + \partial_1 \psi_4) - x_1(-\partial_2 \psi_1 + \partial_1 \psi_2 + \partial_3 \psi_4) \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= -\frac{1}{b} \left[-\frac{1}{a}\psi_3 + x_3(\partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3) + \right. \\ &\quad \left. + x_1(\partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 + \partial_2 \psi_4) - x_2(-\partial_3 \psi_2 + \partial_2 \psi_3 + \partial_1 \psi_4) \right], \quad \partial_{kk}\psi_i = 0. \end{aligned}$$

Имеет место ещё четвёртое соотношение (24)

$$\psi_4 = a[x_1(-\partial_3\psi_2 + \partial_2\psi_3 + \partial_1\psi_4) + x_2(\partial_3\psi_1 - \partial_1\psi_3 + \partial_2\psi_4) + x_3(-\partial_2\psi_1 + \partial_1\psi_2 + \partial_3\psi_4)]. \quad (27)$$

Таким образом, в классическом случае смещения u_i по (26) выражаются через четыре гармонические функции ψ_i , которые связаны соотношением (27). Перепишем формулы (26), (27)

$$u_1 = -\frac{1}{b} \left[\left(-\frac{1}{a} + x_1\partial_1 - x_2\partial_2 - x_3\partial_3 \right) \psi_1 + (x_1\partial_2 + x_2\partial_1)\psi_2 + (x_1\partial_3 + x_3\partial_1)\psi_3 + (x_2\partial_3 - x_3\partial_2)\psi_4 \right],$$

$$u_2 = -\frac{1}{b} \left[(x_2\partial_1 + x_1\partial_2)\psi_1 + \left(-\frac{1}{a} - x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - x_3\partial_3 \right) \psi_2 + (x_2\partial_3 + x_3\partial_2)\psi_3 + (x_3\partial_1 - x_1\partial_3)\psi_4 \right], \quad (28)$$

$$u_3 = -\frac{1}{b} \left[(x_3\partial_1 + x_1\partial_2)\psi_1 + (x_3\partial_2 + x_2\partial_3)\psi_2 + \left(-\frac{1}{a} - x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + x_3\partial_3 \right) \psi_3 + (x_2\partial_3 - x_3\partial_2)\psi_4 \right], \quad \partial_{kk}\psi_i = 0,$$

$$\psi_4 = a[(x_2\partial_3 - x_3\partial_2)\psi_1 + (x_3\partial_1 - x_1\partial_3)\psi_2 + (x_1\partial_2 - x_2\partial_1)\psi_3 + (x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3)\psi_4].$$

Представление смещений (28) имеет вид $u_j = C_{jk}\psi_k$, где матрица C_{jk} очевидна из (28). Представление (26)–(28) аналогично известному решению Папковича – Нейбера, в котором смещения u_i выражаются через четыре гармонические функции, связанные между собой одним соотношением [9].

3. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ И ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (16)

С учётом соотношения $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{njl} = \delta_{ij}\delta_{ml} - \delta_{il}\delta_{mj}$ матрицу операторов системы (16) запишем в виде

$$A_{ij} = \mu\partial_{kk}\delta_{ij} + (\lambda + \mu)\partial_{ij} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}(\partial_{ij} - \delta_{ij}\partial_{mm}). \quad (29)$$

Для матрицы (29) имеем собственный вектор $t_{j1} = \partial_j$:

$$A_{ij}t_{j1} = \left[\mu\partial_{kk}\delta_{ij} + (\lambda + \mu)\partial_{ij} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}(\partial_{ij} - \delta_{ij}\partial_{mm}) \right] \partial_j = \partial_i[(\lambda + 2\mu)\partial_{kk}]$$

и $D_1 = (\lambda + 2\mu)\partial_{kk}$ – собственное значение (собственный оператор) матрицы (29). Ортогональный вектор t_{j2} к вектору $t_{j1} = \partial_j$ есть $t_{j2} = \varepsilon_{jps}c_p\partial_s$, где c_p – произвольный числовой или операторный с постоянными коэффициентами вектор. Вектор t_{j2} является собственным вектором для матрицы (29):

$$\begin{aligned} A_{ij}t_{j2} &= \left[\mu\partial_{kk}\delta_{ij} + (\lambda + \mu)\partial_{ij} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}(\partial_{ij} - \delta_{ij}\partial_{mm}) \right] \varepsilon_{jps}c_p\partial_s \\ &= \varepsilon_{ips}c_p\partial_s \left[\mu\partial_{kk} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\partial_{mm} \right] \end{aligned}$$

с собственным значением

$$D_2 = \mu \partial_{kk} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{kk} \partial_{mm} = \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right].$$

Третий собственный вектор можно взять в виде $t_{j3} = c_j \partial_{kk} - c_m \partial_{mj}$:

$$\begin{aligned} A_{ij} t_{j3} &= [\mu \partial_{kk} \delta_{ij} + (\lambda + \mu) \partial_{ij} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{kk} (\partial_{ij} - \delta_{ij} \partial_{mm})] (c_j \partial_{kk} - c_m \partial_{mj}) \\ &= (c_i \partial_{kk} - c_m \partial_{mi}) \left[\mu \partial_{kk} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{kk} \partial_{mm} \right], \end{aligned}$$

т. е. t_{j3} — собственный вектор с собственным значением $D_3 = D_2 = \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right]$.

Для матрицы (29) операторов системы (16) имеют место соотношения

$$AT = TD, \quad T'A = DT', \quad (30)$$

где штрих означает транспонирование матрицы. Тогда общее решение системы (16) имеет вид [9, 10]

$$u = Tv, \quad Dv = f, \quad Tf = 0, \quad (31)$$

где

$$T = [\partial_i, \varepsilon_{ips} c_p \partial_s, c_i \partial_{kk} - c_m \partial_{mi}] = \begin{bmatrix} \partial_1 & c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2 & c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1} \\ \partial_2 & c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3 & c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2} \\ \partial_3 & c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1 & c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3} \end{bmatrix}; \quad (32)$$

$$D = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Первая формула (30) имеет вид вполне аналогичный формуле для числовых матриц. Поэтому операторы D_1 , D_2 , D_3 можно называть и собственными значениями и собственными операторами (см. выше).

Запишем решение (31) с учётом (32), (33):

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_1 v_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) v_2 + (c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1}) v_3, \\ u_2 &= \partial_2 v_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) v_2 + (c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2}) v_3, \\ u_3 &= \partial_3 v_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) v_2 + (c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3}) v_3; \end{aligned} \quad (34)$$

$$(\lambda + 2\mu) \partial_{kk} v_1 = f_1, \quad \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] v_2 = f_2, \quad \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] v_3 = f_3; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) f_2 + (c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1}) f_3 &= 0, \\ \partial_2 f_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) f_2 + (c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2}) f_3 &= 0, \\ \partial_3 f_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) f_2 + (c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3}) f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, решение системы (16) по формулам (34) выражается через три функции v_i , которые удовлетворяют трём отдельным независимым уравнениям (35), однородным или неоднородным.

Из [9] и соотношений (30) следует, что если $u = Tv$, где $Dv = 0$, то уравнение (16), (29) удовлетворяется $Au = ATv = TDv = 0$. Если $v = T'\tilde{u}$, где $A\tilde{u} = 0$, то выполняется уравнение $Dv = DT'\tilde{u} = T'A\tilde{u} = 0$. Таким образом, согласно формулам

$$u = Tv, \quad v = T'\tilde{u}, \quad (37)$$

решения уравнений $Au = 0$, $Dv = 0$ переходят друг в друга, и системы эквивалентны [11]. Но чтобы не было потери части решений, в общем случае необходимо в правой части (35) учитывать функции f_i , ядро оператора T (32), (36).

Кроме того, из формул (37) получаем, что если $A\tilde{u} = 0$, то $u = TT'\tilde{u}$ – новое решение: $Au = ATT'\tilde{u} = TDT'\tilde{u} = TT'A\tilde{u} = 0$. Если $D\tilde{v} = 0$, то и $v = T'T\tilde{v}$ – решение: $Dv = DT'T\tilde{v} = T'AT\tilde{v} = T'TD\tilde{v} = 0$. Выражение $u = TT'\tilde{u}$ есть формула производства решений, так как из любого решения $\tilde{u}$ получается новое решение u ; оператор $Q = TT'$ является оператором симметрии в смысле группового анализа [5, 9].

Столбцы матрицы (32) ортогональны:

$$T'T = t_{ip}t_{iq} = \begin{bmatrix} \partial_{jj} & 0 & 0 \\ 0 & c_j c_j \partial_{kk} - c_m c_n \partial_{mn} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{ss}(c_j c_j \partial_{kk} - c_m c_n \partial_{mn}) \end{bmatrix},$$

причём определитель матрицы (32) равен

$$|T| = t_{j3}t_{j3} = (t_{i1}t_{i1})(t_{j2}t_{j2}) = \partial_{ii}(c_j c_j \partial_{kk} - c_m c_n \partial_{mn})$$

и

$$TT' = t_{in}t_{jn} = \partial_{ij} + \varepsilon_{ips}\varepsilon_{jqr}c_p c_q \partial_{sr} + (c_i \partial_{kk} - c_m \partial_{mi})(c_j \partial_{ss} - c_n \partial_{nj}).$$

Из (32) находим транспонированную матрицу

$$T' = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2 & c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3 & c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1 \\ c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1} & c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2} & c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3} \end{bmatrix}$$

и получаем функции v_i через решение исходных уравнений

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_1 \tilde{u}_1 + \partial_2 \tilde{u}_2 + \partial_3 \tilde{u}_3, \\ v_2 &= (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) \tilde{u}_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) \tilde{u}_2 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) \tilde{u}_3, \\ v_3 &= (c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1}) \tilde{u}_1 + (c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2}) \tilde{u}_2 + (c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3}) \tilde{u}_3. \end{aligned}$$

В матрице (32) все три столбца ортогональны друг к другу и третий столбец содержит вторые производные. Но можно взять третий столбец в виде, аналогичном второму столбцу, содержащем первые производные. Тогда вместо матрицы (32) будет матрица вида

$$T = [\partial_i, \varepsilon_{ips}c_p \partial_s, \varepsilon_{imn}\gamma_m \partial_n] = \begin{bmatrix} \partial_1 & c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2 & \gamma_2 \partial_3 - \gamma_3 \partial_2 \\ \partial_2 & c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3 & \gamma_3 \partial_1 - \gamma_1 \partial_3 \\ \partial_3 & c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1 & \gamma_1 \partial_2 - \gamma_2 \partial_1 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

где c_p , γ_m — произвольные ненулевые непропорциональные векторы, при этом определитель

$$|T| = [(c_2 \gamma_3 - c_3 \gamma_2) \partial_1 + (c_3 \gamma_1 - c_1 \gamma_3) \partial_2 + (c_1 \gamma_2 - c_2 \gamma_1) \partial_3] \partial_{kk}$$

не равен нулю [12]. Для случая матрицы (38) также имеют место соотношения (30) и общее решение системы (16) вида (31) с той же диагональной матрицей D (33). Выписываем это решение в явном виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_1 v_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) v_2 + (\gamma_2 \partial_3 - \gamma_3 \partial_2) v_3, \\ u_2 &= \partial_2 v_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) v_2 + (\gamma_3 \partial_1 - \gamma_1 \partial_3) v_3, \\ u_3 &= \partial_3 v_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) v_2 + (\gamma_1 \partial_2 - \gamma_2 \partial_1) v_3, \end{aligned} \quad (39)$$

где функции v_i удовлетворяют трём независимым уравнениям (35), а функции f_i — уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) f_2 + (\gamma_2 \partial_3 - \gamma_3 \partial_2) f_3 &= 0, \\ \partial_2 f_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) f_2 + (\gamma_3 \partial_1 - \gamma_1 \partial_3) f_3 &= 0, \\ \partial_3 f_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) f_2 + (\gamma_1 \partial_2 - \gamma_2 \partial_1) f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Формулы (37) и все другие приведённые выше соотношения между функциями имеют место и в случае матрицы (38). Оператор симметрии $Q = TT'$ дан в явном виде в [12]. Придавая компонентам c_j , γ_j различные значения, можно получить различные варианты общих решений в случаях (32) или (38).

Во втором и третьем уравнениях (35) дифференциальный оператор $D_2 = D_3 = D$ представляет собой произведение оператора Лапласа $D_{(1)} = \partial_{kk}$ и оператора Гельмгольца $D_{(2)} = \mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm}$. Тогда решение однородного уравнения $Dv = D_{(1)}D_{(2)}v = 0$ по теореме Боджо [1] можно представить в виде суммы $v = g + h$, где g — гармоническая функция $D_{(1)}g = \partial_{kk}g = 0$, а функция h удовлетворяет уравнению Гельмгольца $D_{(2)}h = [\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm}]h = 0$. Различные частные решения уравнений Лапласа и Гельмгольца приведены в [13]. Таким образом, общее решение уравнений в смещениях (16) псевдоконтинуума Коссера по формулам (34)–(36), (39), (40) выражается через гармонические функции и функции Гельмгольца. По формуле $u = TT'\tilde{u}$, $A\tilde{u} = 0$ получаются новые решения из любого известного решения $\tilde{u}$. Если постоянная $\gamma + \varepsilon = 0$, то полученные решения (34)–(36), (39), (40) переходят в известные представления для случая классического изотропного материала [9, 10, 12].

4. ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЯ (23) СИСТЕМЫ МОИСИЛА — ТЕОДОРЕСКУ

Возможен ещё один подход к построению решения уравнений (16). Формулы (18), (23) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} \partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3 &= \psi = (\lambda + 2\mu)(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3), \\ -\partial_3 \psi_2 + \partial_2 \psi_3 + \partial_1 \psi_4 &= \varphi_1 = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2), \\ \partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 + \partial_2 \psi_4 &= \varphi_2 = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] (\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3), \\ -\partial_2 \psi_1 + \partial_1 \psi_2 + \partial_3 \psi_4 &= \varphi_3 = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1). \end{aligned} \quad (41)$$

Система (41) содержит четыре уравнения и семь неизвестных ψ_i , u_i и записана в виде

$$A\psi = Bu, \quad (42)$$

где матрицы $A = M'$ и B очевидны из (41). Для решения системы вида (42) необходимо найти матрицы C и D , такие, что $AC = BD$, тогда решение будет следующее [14]

$$\psi = Cv, \quad u = Dv + w, \quad Bw = 0, \quad (43)$$

где v — произвольный трёхмерный вектор. Чтобы получить все варианты решений, необходимо выбирать из семи неизвестных ψ_i, u_i по четыре неизвестных, оставляя их слева, а остальные неизвестные переносить вправо. При этом получим все варианты систем вида (42). Всего вариантов может быть $C_7^4 = 7!/(4!3!) = 35$. Допустимы те варианты, для которых $|A| \neq 0$ [14].

Рассмотрим для примера вариант 1)(1, 2, 3, 4; 5, 6, 7), соответствующий системе (41). Числами в скобках занумерованы неизвестные $(\psi_i; u_i)$. Для этого варианта определитель $|A| = |M'| = \partial_{ss}\partial_{kk} \neq 0$. Система Моисила — Теодореску (21a) имеет вид $M\varphi = 0$, где (см. (18) и (41))

$$\varphi = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_1 & (\lambda + 2\mu)\partial_2 & (\lambda + 2\mu)\partial_3 \\ 0 & -\tilde{\partial}_{kk}\partial_3 & \tilde{\partial}_{kk}\partial_2 \\ \tilde{\partial}_{kk}\partial_3 & 0 & -\tilde{\partial}_{kk}\partial_1 \\ -\tilde{\partial}_{kk}\partial_2 & \tilde{\partial}_{kk}\partial_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = Bu,$$

$$\tilde{\partial}_{kk} = \mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}.$$

Найдём произведение

$$MB = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ \partial_2 & -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_3 & \partial_2 & -\partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A. \quad (44)$$

Здесь A_{ij} являются элементами матрицы (29) операторов исходной системы (16). С учётом (44) уравнения (16) принимают вид $Au = MBu = 0$. Тогда $Bu = \varphi$, $M\varphi = 0$. Решение последнего уравнения следующее (см. (22), (23)) $\varphi = M'\psi$, $D\psi = 0$, $MM' = D$. Отсюда получаем $M'\psi = Bu$, т. е. систему (41).

Имеют место соотношения

$$M'A = BD, \quad M'MB = BD, \quad DB = BD,$$

$$\begin{bmatrix} \partial_{kk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & 0 & B_{33} \\ B_{41} & B_{42} & 0 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} \end{bmatrix}.$$

С учётом этих соотношений решение уравнений (41) имеет вид (43):

$$\psi = Av, \quad u = Dv + w, \quad Bw = 0. \quad (45)$$

Действительно $M'\psi = M'Av = M'MBv = DBv = BDv$, $Bu = B(Dv + w) = BDv$. Решение последнего уравнения (45) следующее $w_i = \partial_i g$, $\partial_{kk}g = 0$, тогда остальные выражения принимают вид

$$\psi_i = A_{ij}v_j, \quad \psi_4 = 0, \quad u_i = \partial_{ss}v_i + \partial_i g, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \partial_{kk}g = 0, \quad (46)$$

причём v_i — такие функции, что ψ_i — гармонические функции: $\partial_{ss}\psi_i = \partial_{ss}A_{ij}v_j = 0$. Рассмотрение остальных вариантов требует дальнейшей работы.

5. ДРУГОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ (16), (29)

С помощью системы (41) можно получить ещё одно представление решения уравнений (16), (29). Для случая $\psi_4 = 0$ (см. (46)) из трёх последних уравнений (41) получаем

$$\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] u_i = \psi_i + \partial_i q, \quad (47)$$

где q — произвольная функция. Из (47) и первого уравнения (41) находим

$$\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] \partial_i u_i = \partial_i \psi_i + \partial_{ii} q, \quad \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] \frac{1}{\lambda + 2\mu} \partial_i \psi_i = \partial_i \psi_i + \partial_{ii} q;$$

$$\partial_{ii} q = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \partial_i \psi_i. \quad (48)$$

При получении уравнения (48) учли, что ψ_i — гармонические функции. Решение уравнения Пуассона (48) имеет следующий вид:

$$q = -\frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} (x_k \psi_k) + g, \quad \partial_{ss} g = 0. \quad (49)$$

С учётом (49) представление (47) принимает вид

$$\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] u_i = \psi_i - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_i (x_k \psi_k) + \partial_i g, \quad i = 1, 2, 3. \quad (50)$$

Исходные уравнения (16), (29) можно записать в виде

$$\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm} \right] (\partial_{kk} u_i - \partial_{il} u_l) + (\lambda + 2\mu) \partial_{il} u_l = 0. \quad (51)$$

При подстановке выражений (50) в (51) уравнения (51) выполняются с учётом первого уравнения (41)

$$(\lambda + 2\mu) \partial_{il} u_l = \partial_i \psi_i. \quad (52)$$

Таким образом получили, что каждое смещение u_i удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (50) и они связаны уравнением (52), где в правых частях $\psi_1, \psi_2, \psi_3, g$ — произвольные гармонические функции.

Если $\gamma + \varepsilon = 0$, то для классической изотропной среды из (50) получаем представление смещений через гармонические функции

$$\mu u_i = \psi_i - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_i (x_k \psi_k) + \partial_i g, \quad i = 1, 2, 3, \quad (53)$$

при этом уравнения Ламе (16), (29), (51) и (52) выполняются. Представление (53) известно как общее решение Папковича – Нейбера [1, 9]. Четыре гармонические функции, входящие в (53), связаны между собой одним соотношением [9], как и в представлении (28).

В [3, 15] приведены с использованием модели псевдоконтинуума Коссера решения задач о чистом сдвиге и трещине продольного сдвига и ссылки на работы, в которых решаются конкретные задачи. Имеются и другие работы, например, [16–18], в которых применяется эта модель Коссера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получено два варианта общего решения для системы уравнений в смещениях изотропного псевдоконтинуума Коссера. Система уравнений диагонализуеться и решение выражается через гармонические функции и функции Гельмгольца. Даны формулы производства новых решений, исходя из любого заданного решения. Предложен подход к построению решений с использованием системы Моисила — Теодореску. Определяющие соотношения общей изотропной моментной среды представлены в виде отдельных независимых неприводимых составляющих, при этом определяются собственные модули и ограничения на постоянные упругости.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект FWGG-2026-0018). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
3. Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И., Угрюмов Р.И. Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стеснённым вращением // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26, № 1. С. 5–19.
4. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория ассиметрической упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твёрд. тела. 1964. Т. 6, вып. 9. С. 2689–2699.
5. Чиркунов Ю. А. Групповой анализ линейных и квазилинейных уравнений дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд. НГУЭУ, 2007.
6. Аннин Б.Д., Григорьев Ю.М., Наумов В.В. Решение пространственных статических задач теории упругости методами теории кватернионных функций // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы 9 Всесоюз. конф., Саратов, 26–30 июня 1985, Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986. С. 35–42.
7. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила — Теодореску // Сиб. журн. индустр. математики, 2022. Т. 25, № 2. С. 101–109.
8. Шмаков А.П. Представление общего решения в теории упругости // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Москов. ун-та, 1975. Вып. 4. С. 5–12.
9. Остросаблин Н.И. Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории к диагональному виду // Прикл. механика и техн. физика. 1993. Т. 34, № 5. С. 112–122.
10. Остросаблин Н.И. Об уравнениях линейной теории упругости анизотропных материалов, сводящихся к трём независимым волновым уравнениям // Прикл. механика и техн. физика. 1994. Т. 35, № 6. С. 143–150.
11. Борок В.М. О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1957. № 1. С. 45–65.
12. Остросаблин Н.И. Общее решение и приведение системы уравнений линейной изотропной упругости к диагональному виду // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 2. С. 79–83.
13. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
14. Остросаблин Н.И. Функции кинетических напряжений в механике сплошных сред // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО РАН. 2007. Вып. 125. С. 76–116.
15. Остросаблин Н.И., Угрюмов Р.И. Общее решение системы уравнений моментной линейной теории упругости изотропного псевдоконтинуума Коссера // Докл. РАН. Физика, техн. науки. 2024. Т. 517, № 1. С. 36–40.
16. Россихин Ю.А., Шитикова М.В. Анализ нестационарных волн в оболочках из псевдоконтинуума Коссера // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре гос. техн. ун-та. 2018. № III-1(35). С. 80–85.
17. Антонов А.М., Ерофеев В.И. Распространение волны Рэлея вдоль границы полупространства, описываемого упрощённой моделью Коссера // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81, № 3. С. 333–344.
18. Павлов И.С., Муравьёва А.В. Трёхмерная градиентная модель полубесконечной геосреды // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84, № 4. С. 480–492.

UDC 539.3:517.958

GENERAL SOLUTIONS AND REDUCTION OF THE SYSTEM OF EQUATIONS OF THE MOMENT LINEAR THEORY OF ELASTICITY OF THE ISOTROPIC PSEUDO-CONTINUUM OF COSSERAT TO A DIAGONAL FORM

© 2026 N. I. Ostrosablin

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Akad. Lavrentyev prosp., 15, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: o.n.ii@yandex.ru

Received 05.06.2024, revised 12.09.2025, accepted 15.06.2026

Abstract. The three-dimensional system of fourth-order differential equations of the moment linear theory of elasticity in displacements of the isotropic pseudo-continuum of Cosserat is presented as a combination of an automorphic system of the third order and a resolving system of the first order. The solution of the resolving system is expressed in terms of four harmonic functions. Two variants of the representation of the general solution in terms of three functions satisfying three independent equations are found for the displacement system, i. e. the system is diagonalized. Formulas for the production of new solutions (symmetry operators) are given, allowing, by differentiating from any given solution, to find new solutions to the original equations. Using the representation of the solution of the resolving system through harmonic functions, a representation of displacements in statics through harmonic functions and for a classical isotropic elastic medium is obtained.

Keywords: moment theory of elasticity, Cosserat pseudocontinuum, general solutions, symmetry operators, diagonal system, constrained rotation, asymmetric stress and strain tensors.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.205

REFERENCES

1. Nowacki W. Theory of elasticity. Warszawa: PWN, 1970.
2. Kupradze V.D., Gegeliya T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V. Tryohmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti [Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity]. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
3. Annin B.D., Ostrosablin N.I., Ugryumov R.I. Opredelyayushchie uravneniya anizotropnoj momentnoj linejnoj teorii uprugosti i dvumernaya zadacha o chistom sdvige so stesnyonnym vrashcheniem [Defining equations of the anisotropic moment linear theory of elasticity and the two-dimensional problem of a pure shear with constrained rotation]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2023, Vol. 26, No. 1, pp. 5–19 (in Russian).
4. Aehro Eh.L., Kuvshinskij E.V. Kontinual'naya teoriya assimetricheskoy uprugosti. Ravnovesie izotropnogo tela [The continuum theory of asymmetric elasticity. Isotropic body equilibrium]. *Fizika Tvyord. Tela* [Solid state physics.], 1964, Vol. 6, Iss. 9, pp. 2689–2699 (in Russian).
5. Chirkunov Yu. A. Gruppovoj analiz linejnyh i kvazilinejnyh uravnenij differencial'nyh uravnenij [Group analysis of linear and quasi-linear equations of differential equations]. Novosibirsk: NGUEHU Publ., 2007 (in Russian).
6. Annin B.D., Grigor'ev Yu.M., Naumov V.V. Reshenie prostranstvennyh staticheskikh zadach teorii uprugosti metodami teorii kvaternionnyh funkcij [Solving spatial static problems of the theory of

- elasticity by methods of the theory of quaternionic functions]. *Chislennyye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti: Materialy 9 Vsesoyuz. konf.* [Numerical methods for solving problems of the theory of elasticity and plasticity: Materials of the 9th All-Union. Conf.], Saratov, 26–30 June, 1985 Novosibirsk: ITPM SO AN SSSR, 1986, pp. 35–42 (in Russian).
7. Senashov S.I., Savost'yanova I.L. Ispol'zovanie zakonov sohraneniya dlya resheniya kraevykh zadach sistemy Moisila — Teodoresku [Using conservation laws to solve boundary value problems of the Moisi system — Teodorescu]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2022. Vol. 25, No. 2, pp. 101–109 (in Russian).
 8. Shmakov A.P. Predstavlenie obshchego resheniya v teorii uprugosti [Representation of a general solution in the theory of elasticity]. *Uprugost' i neuprugost'* [Elasticity and inelasticity]. Moscow: MSU Publ., 1975, Vyp. 4, pp. 5–12 (in Russian).
 9. Ostrosablin N.I. Obshchie resheniya i privedenie sistemy uravnenij linejnoy teorii k diagonal'nomu vidu [General solutions and reduction of the system of equations of linear theory to a diagonal form]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1993, Vol. 34, No. 5, pp. 112–122 (in Russian).
 10. Ostrosablin N.I. Ob uravneniyah linejnoy teorii uprugosti anizotropnykh materialov, svodyashchihsva k tryom nezavisimym volnovym uravneniyam [On the equations of the linear theory of elasticity of anisotropic materials, reduced to three independent wave equations]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1994, Vol. 35, No. 6, pp. 143–150 (in Russian).
 11. Borok V.M. O sistemah linejnykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koefitsientami [On systems of linear partial differential equations with constant coefficients]. *Izv. VUZov. Matematika*, 1957, No. 1, pp. 45–65 (in Russian).
 12. Ostrosablin N.I. Obshchee reshenie i privedenie sistemy uravnenij linejnoy izotropnoy uprugosti k diagonal'nomu vidu [General solution and reduction of the system of equations of linear isotropic elasticity to a diagonal form]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2009, Vol. 12, No. 2, pp. 79–83 (in Russian).
 13. Polyanin A.D. Spravochnik po linejnym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
 14. Ostrosablin N.I. Funkcii kineticheskikh napryazhenij v mehanike sploshnykh sred [Kinetic stress functions in continuum mechanics]. *Dinamika Sploshnoi Sredy*, 2007, Vyp. 125, pp. 76–116 (in Russian).
 15. Ostrosablin N.I., Ugryumov R.I. Obshchee reshenie sistemy uravnenij momentnoj linejnoy teorii uprugosti izotropnogo psevdokontinuuma Kossera [General solution of the system of equations of the moment linear theory of elasticity of the Kosser isotropic pseudocontinuum]. *Dokl. RAN. Fizika, Tehn. Nauki*, 2024, Vol. 517, No. 1, pp. 36–40 (in Russian).
 16. Rossihin Yu.A., Shitikova M.V. Analiz nestacionarnykh voln v obolochkah iz psevdokontinuuma Kossera [Analysis of unsteady waves in shells from the Kosser pseudocontinuum]. *Uchyonye Zapiski Komsomol'Skogo-Na-Amure GTU* [Scientific Notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical Univ.], 2018, Vol. 35, No. III-1, pp. 80–85 (in Russian).
 17. Antonov A.M., Erofeev V.I. Rasprostranenie volny Rehleya vdol' granicy poluprostranstva, opisyaemogo uproshchyonnoj model'yu Kossera [Rayleigh wave propagation along the boundary of a half-space described by a simplified Kosser model]. *Problemy Prochnosti i Plastichnosti* [Problems of strength and plasticity], 2019, Vol. 81, No. 3, pp. 333–344 (in Russian).
 18. Pavlov I.S., Murav'yova A.V. Tryohmernaya gradientnaya model' polubeskonechnoj geosredy [Three-dimensional gradient model of a semi-infinite geo environment]. *Problemy Prochnosti i Plastichnosti* [Problems of strength and plasticity], 2022, Vol. 84, No. 4, pp. 480–492 (in Russian).