

УДК 532.5.032

БАЛАНС ЭНЕРГИИ В ТЕЧЕНИИ КОЛМОГОРОВА

© 2026 А. О. Посудневская

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4, Москва 125047, Россия*

E-mail: posudnevskaja.ao@phystech.edu

Поступила в редакцию 16.09.2025 г.; после доработки 20.11.2025 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Статья посвящена численному исследованию двумерного течения Колмогорова вязкой слабосжимаемой жидкости, возникающего под действием статической внешней силы. Численное моделирование выполнено на основе системы уравнений Навье — Стокса в квадратной расчётной области с периодическими граничными условиями. Выявлено существование трёх основных режимов течения: ламинарного, турбулентного и вихревого. Изучено влияние донного трения на формирование различных режимов течения и механизмов диссипации энергии. Проведён анализ энергетического баланса для различных типов течения. В турбулентном и ламинарном режимах преобладает диссипация энергии за счёт трения о дно. В вихревом режиме доминирующего механизма диссипации не выявлено.

Ключевые слова: численное моделирование, система уравнений Навье — Стокса, течение Колмогорова, вязкая сжимаемая жидкость, турбулентность, трение о дно, диссипация энергии.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.206

ВВЕДЕНИЕ

Академик А. Н. Колмогоров предложил простейшую физическую модель для изучения двумерной турбулентности — движение жидкости под действием периодической внешней силы (накачки) [1]. Эта задача была расширена А. М. Обуховым путём добавления в систему уравнений слагаемого, соответствующего трению о дно. Такая формулировка позволила более точно описать турбулентные течения в тонких слоях жидкости.

Известно, что в трёхмерных изотропных турбулентных течениях наблюдается прямой каскад энергии Колмогорова [2]. Главной особенностью двумерного турбулентного течения, возбуждаемого стационарной внешней силой, является возникновение обратного каскада энергии [3]. Вследствие нелинейных эффектов пространственный масштаб вихрей, создаваемых внешней силой, увеличивается до тех пор, пока их рост не будет остановлен размером исследуемой области, что приводит к накоплению энергии на этом масштабе. При такой локализации энергии в течении формируются системы когерентных вихрей [4]. Как показано в [4, 5, 6, 7], в зависимости от значений коэффициента донного трения и силы накачки могут возникать различные типы течений: ламинарное, постоянное во времени; турбулентное, в котором существуют вихри различных масштабов и времён жизни; вихревое, в котором преобладает крупный вихрь с чётко определённым средним профилем. Важным моментом в анализе турбулентных течений является изучение диссипации энергии, которая может происходить вследствие наличия вязкости и трения о дно. В работе [8] обсуждаются вопросы, связанные с энергетической характеристикой течения Колмогорова.

В данной работе рассматривается двумерное течение вязкой, слабосжимаемой жидкости под действием статической силы, периодической в пространстве. Исследуются вопросы

производства и передачи энергии для различных режимов течения. Показано, что энергия, привносимая в систему, диссипирует за счёт вязкости и трения о дно. Цель данной работы — исследовать баланс энергии для разных режимов течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Исследуются двумерные течения вязкой слабосжимаемой жидкости, описываемые системой уравнений Навье — Стокса. Ниже представлены уравнение неразрывности (1), уравнения сохранения импульса (2), (3) и уравнение слабой сжимаемости (4).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla(\rho u \bar{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G \sin ky + \mu \Delta u - \rho \alpha u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla(\rho v \bar{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho G \sin kx + \mu \Delta v - \rho \alpha v, \quad (3)$$

$$dp = c^2 \rho_0 \frac{d\rho}{\rho}, \quad (4)$$

здесь ρ — плотность жидкости; $\bar{V} = (u, v)$ — вектор скорости; $\mu = 0.1$ Па·с — динамическая вязкость жидкости; p — давление; α — коэффициент донного трения; G — амплитуда внешней силы; $k = 5 \text{ м}^{-1}$ — пространственная частота внешней силы; $c = 100 \text{ м/с}$ — скорость звука. Правая часть уравнений движения (2), (3) содержат члены $\rho G \sin ky$ и $-\rho G \sin kx$, которые моделируют действие внешней силы. Компоненты $-\rho \alpha u$ и $-\rho \alpha v$ описывают трение о дно.

Численное моделирование выполнено в квадратной вычислительной области Ω со стороной $L = 2\pi \text{ м}$ с периодическими граничными условиями. Начальными условиями являются невозмущённые поля давления $P_0 = 10^5 \text{ Па}$, плотности $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ и нулевой скорости $\bar{V}_0 = 0 \text{ м/с}$.

Численное решение системы уравнений Навье — Стокса основано на методе искусственной сжимаемости [9]. В этом случае гиперболическая часть уравнений решается явным методом Мак-Кормака [10], а параболическая часть — стандартным методом конечных разностей. Численные эксперименты проводились на равномерных сетках размером 512×512 ячеек.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В результате численного моделирования были получены три основных режима течения (см. рис. 1): (а) ламинарный, при котором характер движения жидкости стабилен во времени; (с) турбулентный, характеризующийся случайным появлением и исчезновением вихрей различного масштаба; (е) вихревой, при котором формируется большой стабильный вихревой диполь. Также были выявлены переходные режимы течения, возникающие между ламинарным и турбулентным режимами (рис. 1(б)) и между турбулентным и вихревым режимами (рис. 1(д)). Анализ результатов численного моделирования проводился для течений, достигших статистически стационарного состояния. Это определяется кинетической энергией течения, которая слабо меняется со временем и находится около некоторого среднего значения.

После проведения серии численных экспериментов с использованием различных значений коэффициента донного трения α и амплитуды внешней силы G была получена фазовая диаграмма режимов течения (см. рис. 2). Каждая точка на фазовой диаграмме соответствует численному расчёту с различными значениями G и α . Чёрные точки обозначают расчёты, соответствующие ламинарному режиму. Красные квадраты описывают турбулентный режим. Зелёные ромбы соответствуют вихревому режиму. Синие треугольники указывают на переход между ламинарным и турбулентным течениями. На основании фазовой диаграммы можно

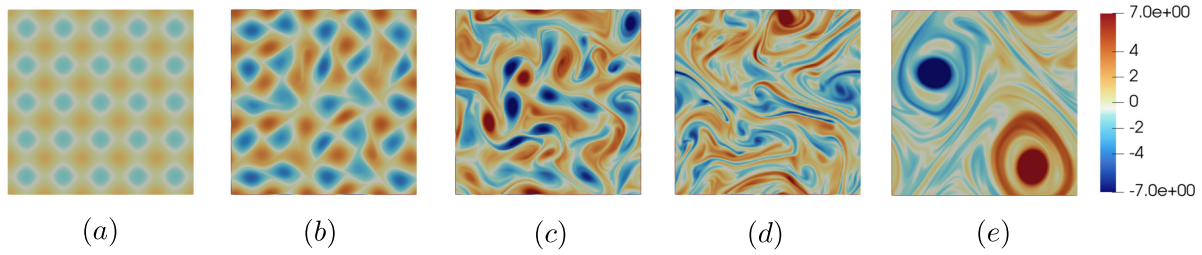


Рис. 1. Поля завихренности при фиксированном $G = 0.15 \text{ м/с}^2$ и различных значениях α : (a) ламинарного ($\alpha = 1 \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 13 \cdot 10^3$); (b) ламинарно-турбулентного ($\alpha = 3 \cdot 10^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 47 \cdot 10^3$); (c) турбулентного ($\alpha = 10^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 88 \cdot 10^3$); (d) турбулентно-вихревого ($\alpha = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 94 \cdot 10^3$); (e) вихревого режимов течения ($\alpha = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 277 \cdot 10^3$)

сделать вывод, что коэффициент донного трения оказывает наибольшее влияние на режим течения. Вихревой режим наблюдается, когда коэффициент донного трения α ниже 10^{-3} с^{-1} . Ламинарный режим формируется, когда коэффициент донного трения α превышает 10^{-1} с^{-1} . Турбулентный режим возникает при средних значениях коэффициента донного трения α .

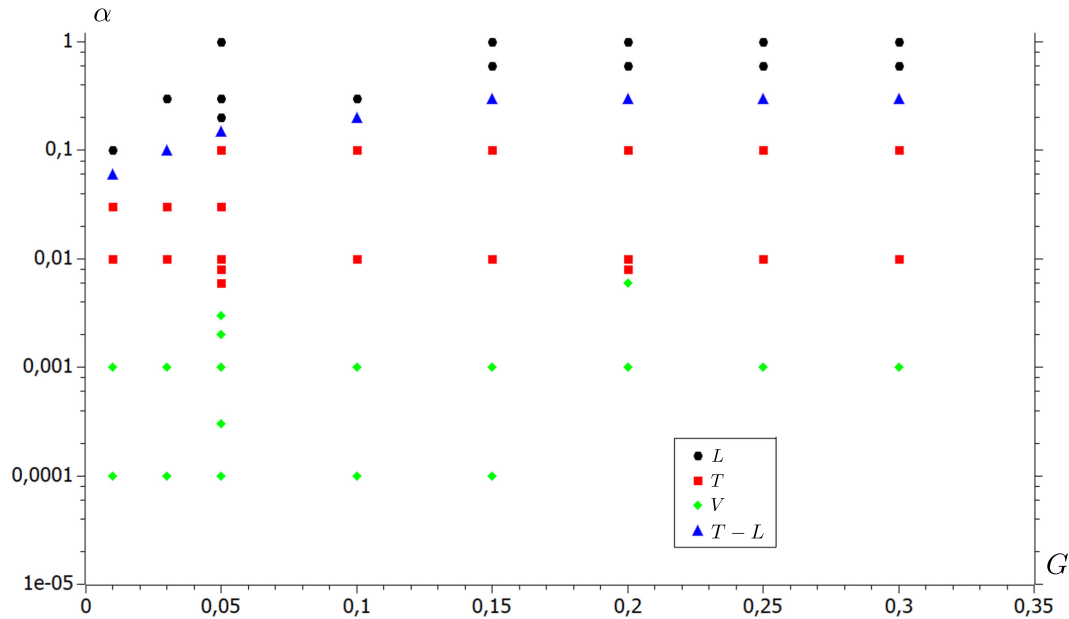


Рис. 2. Фазовая диаграмма типов течений.

L — ламинарный режим течения, T — турбулентный режим течения,

V — вихревой режим течения,

$T - L$ — переходный между ламинарным и турбулентным режимом течения при различных значениях коэффициента донного трения $\alpha (\text{с}^{-1})$ и амплитуды внешней силы $G (\text{м/с}^2)$

Рассмотрим различные режимы течений при фиксированном значении амплитуды силы накачки $G = 0.1 \text{ м/с}^2$.

Энергия, вводимая в систему посредством силы накачки, диссипирует двумя различными способами: на малых масштабах за счёт вязкости и на больших масштабах за счёт трения о дно. Исследуем, какие механизмы диссипации преобладают в различных режимах течения. Прежде всего, необходимо обеспечить достижение энергетического баланса, то есть в каждый момент времени изменение энергии должно состоять из мощности силы накачки и мощности диссипационных сил, обусловленных вязкостью и трением. Для каждого временного шага

должно выполняться следующее соотношение:

$$dE = P - D_f - D_v, \quad (5)$$

здесь $dE = \frac{E - E'}{t - t'}$, E и E' — значения кинетической энергии в настоящий (t) и предыдущий (t') моменты времени; P — мощность накачки, D_f — диссипация энергии за счёт трения о дно, а D_v — диссипация энергии за счёт вязкости. Вкладом сжимаемости жидкости в энергетический баланс можно пренебречь, поскольку его значение незначительно по сравнению с другими. Для расчёта энергетического баланса используются следующие уравнения:

$$E = K \int_{\Omega} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) dx dy, \quad (6)$$

$$P = K \int_{\Omega} \rho (u F_x + v F_y) dx dy, \quad (7)$$

$$D_f = K \int_{\Omega} \rho \cdot \alpha (u^2 + v^2) dx dy, \quad (8)$$

$$D_v = K \int_{\Omega} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (9)$$

здесь $K = 1 \text{ м}$ — размерный коэффициент; $F_x = \rho G \sin ky$, $F_y = -\rho G \sin kx$ — компоненты силы накачки вдоль направлений X и Y .

Для проверки энергетического баланса мы строим графики зависимости правой (dE , красная кривая на рис. 3) и левой ($P - D_f - D_v$, чёрная кривая на рис. 3) частей уравнения (5) от N , где N — номер выдачи выходных данных. Выходные данные записываются каждые 0.25 с времени вычислений. Совпадение красной и чёрной кривых на рис. 3 подтверждает выполнение энергетического баланса.

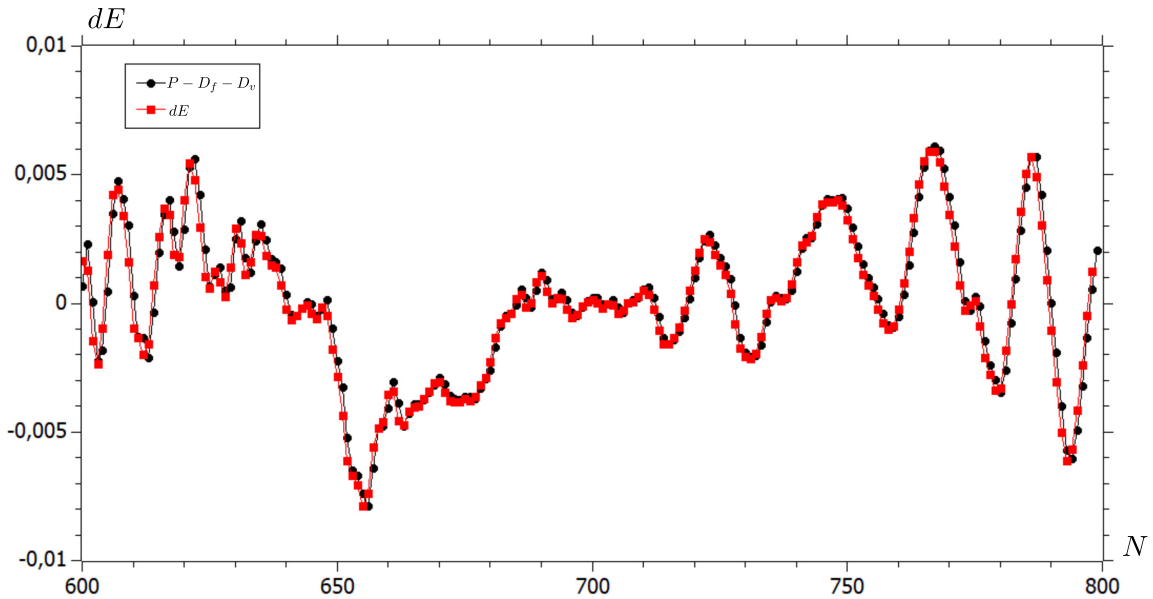


Рис. 3. Проверка энергетического баланса

Проведём оценки средней кинетической энергии и различных механизмов диссипации в зависимости от коэффициента донного трения α при фиксированной величине силы накачки.

Средняя кинетическая энергия определяется следующим образом:

$$E = \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_f} K \int_{\Omega} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) dx dy,$$

здесь $t_0 = 200$ с, $t_f = 250$ с — начало и конец временного интервала, в течение которого производится осреднение.

На рис. 4 приведена зависимость средней кинетической энергии от коэффициента донного трения α . График показывает монотонное уменьшение средней энергии при увеличении коэффициента донного трения α . Резкое уменьшение энергии происходит при переходе между вихревым и турбулентным режимами течения, что соответствует значениям α от 10^{-3} с $^{-1}$ до 10^{-2} с $^{-1}$.

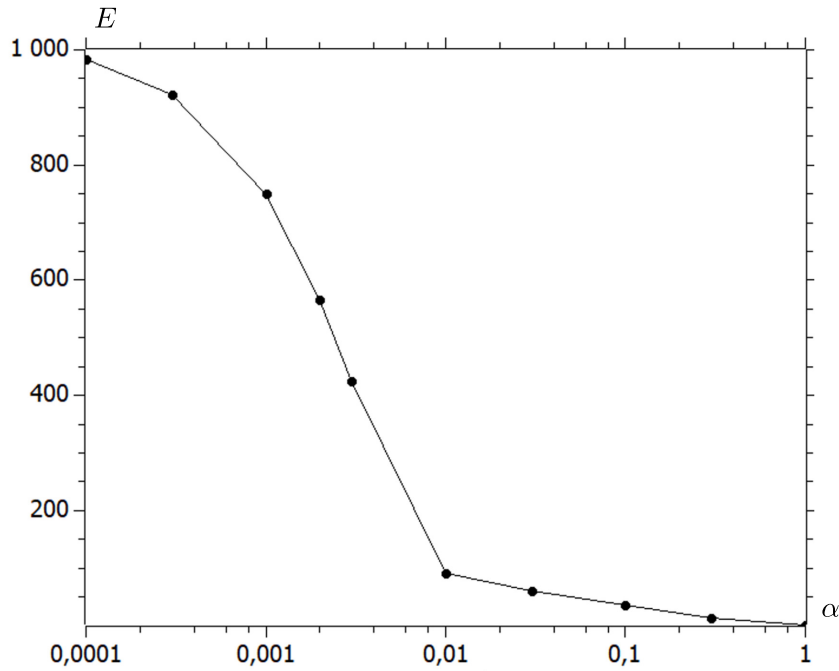


Рис. 4. Средняя энергия E (Дж) в зависимости от α (с $^{-1}$)

Определим отношение вклада сил трения ($\overline{D_f}$) и вязкости ($\overline{D_v}$) в энергетический баланс:

$$\overline{D_f} = \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_f} \frac{D_f}{D_f + D_v} \cdot 100\%,$$

$$\overline{D_v} = \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_f} \frac{D_v}{D_f + D_v} \cdot 100\%,$$

Для этого рассчитываем диссипацию энергии за счёт трения и вязкости, используя формулы (8) и (9), и усредняем их в интервале от $t_0 = 200$ с до $t_f = 250$ с. На рис. 5 показана зависимость вклада в диссипацию энергии от сил донного трения (чёрная кривая) и сил вязкости (красная кривая) от параметра α .

Чёрная кривая показывает монотонное увеличение $\overline{D_f}$ в зависимости от параметра α (см. рис. 5). При низких значениях коэффициента донного трения ($\alpha = 10^{-4}$ с $^{-1}$) вклад диссипации за счёт трения составляет около 30% от общей диссипации. Наиболее интенсивное увеличение $\overline{D_f}$ происходит в диапазоне α от 10^{-4} с $^{-1}$ до 10^{-3} с $^{-1}$, где процент диссипации за

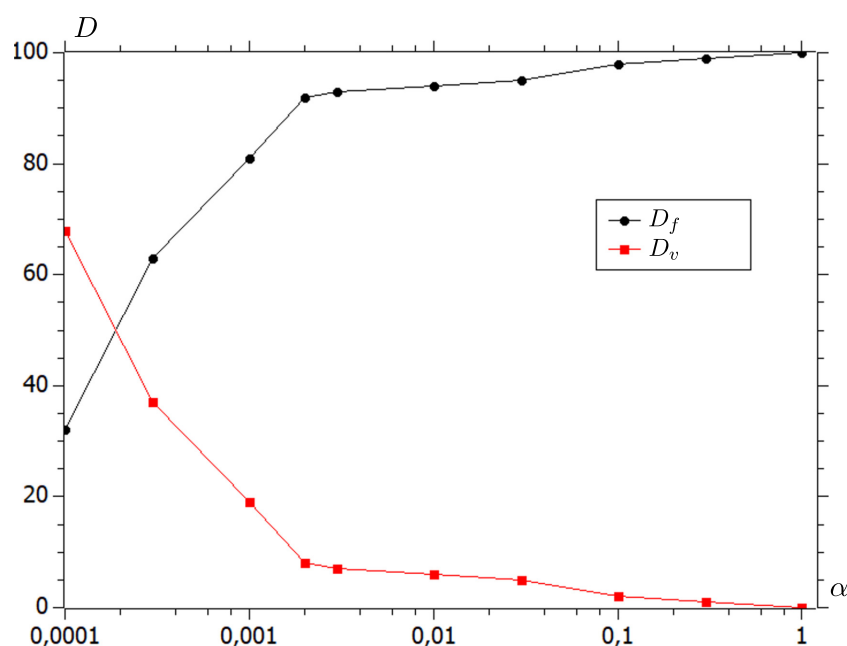


Рис. 5. Процент диссипации энергии D (%) за счёт трения (D_f) и вязкости (D_v) в зависимости от α (c^{-1})

счёт донного трения $\overline{D_f}$ возрастает до 90%. При дальнейшем увеличении α , $\overline{D_f}$ возрастает до 99%. График вязкой диссипации $\overline{D_v}$ демонстрирует противоположную картину (рис. 5, красная кривая). При $\alpha = 10^{-4}\text{c}^{-1}$ преобладают вязкостные силы, обеспечивающие около 70% от общей диссипации энергии. С ростом α наблюдается резкое снижение вклада вязкости. Наиболее интенсивное снижение наблюдается в диапазоне α от 10^{-4}c^{-1} до 10^{-3}c^{-1} . При $\alpha \geq 10^{-2}\text{c}^{-1}$ вязкая диссипация становится менее 5% и продолжает снижаться до 1% при значениях коэффициента донного трения $\alpha = 1\text{c}^{-1}$. Таким образом, диссипация энергии за счёт силы донного трения преобладает во всех режимах течения, за исключением вихревого. В этом случае (при α от 10^{-4}c^{-1} до 10^{-3}c^{-1}) мы не наблюдаем преобладания какого либо типа диссипации энергии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован энергетический баланс для ламинарного, турбулентного и вихревого режимов течения Колмогорова. Предложен метод расчёта энергетического баланса, основанный на вычислении вязкой диссипации и диссипации, обусловленной трением о дно. Показано, что в наших численных экспериментах диссипация энергии, вызванная трением о дно, вносит доминирующий вклад в энергетический баланс в ламинарном и турбулентном режимах течения.

Автор выражает благодарность С. В. Фортовой, И. В. Колоколову и В. В. Лебедеву за обсуждения в процессе подготовки данной статьи. Моделирование проводилось с использованием вычислительных мощностей Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (проект 124022400174-3). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И., Мешалкин Л.Д. Семинар А.Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958/59 г.) // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 1(91). С. 247–250.
2. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
3. Kraichnan R.H. Inertial ranges in two dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1967. V. 10. Article number. 1417; DOI: 10.1063/1.1762301
4. Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // Physics of Fluids. 2021. V. 33; DOI: 10.1063/5.0038863
5. Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex versus chaotic state in two-dimension turbulence // Annals of Physics. 2022. V. 447, part 2; DOI: 10.1016/j.aop.2022.169072
6. Guzev M.A., Fortova S.V., Doludenko A.N., Posudnevskaya A.O., Ermakov A.D. Maslov rank distributions for the analysis of two-dimensional and quasi-two-dimensional turbulent flows // Russian J. Math. Phys. 2024. V. 31. P. 438–449; DOI: 10.1134/S1061920824030075
7. Guzev M.A., Doludenko A.N., Ermakov A.D., Posudnevskaya A.O., Fortova S.V. Direct numerical simulation and rank analysis of two-dimensional Kolmogorov-type vortex flows // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2025. V. 12, N 1. P. 43–59; DOI: 10.14529/jsfi250104
8. Doludenko A.N., Kulikov Y.M., Saveliev A.S. Chaotic flow evolution arising in a body force field // Computer Research and Modeling. 2024. V. 16, N 4. P. 883–912; DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-883-912
9. Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Taylor. Francis. 2016; DOI: 10.1201/b12884
10. MacCormack R.W. A Numerical method for solving the equations of compressible viscous flow // AIAA Journal. 1982. V. 20. P. 1275–1281; DOI: 10.2514/6.1981-110

UDC 532.5.032

ENERGY BALANCE IN THE KOLMOGOROV FLOW

© 2026 A. O. Posudnevskaya

*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS,
Miusskaya sq., 4, Moscow 125047, Russia*

E-mail: posudnevskaya.ao@phystech.edu

Received 16.09.2025, revised 20.11.2025, accepted 13.05.2026

Abstract. The article is devoted to the numerical study of a two-dimensional turbulent flow of a viscous weakly compressible fluid under the action of static external pumping. Numerical simulation is performed in a quadratic computational domain with periodic boundary conditions based on the Navier-Stokes system of equations, using the weak compressibility equation for closure. The influence of the bottom friction coefficient on the formation of various flow regimes and energy dissipation mechanisms is studied. The existence of three main flow modes has been revealed: laminar (stable flow), turbulent (random occurrence and disappearance of vortices of various scales) and vortex (dominance of a large stable vortex dipole). A phase diagram of the flow types is constructed depending on the bottom friction coefficient and the amplitude of the pumping force, and the key role of the bottom friction coefficient in the formation of the flow regime is revealed. The analysis of the energy balance of the numerical model has been carried out. Energy dissipation due to bottom friction dominates in the turbulent and laminar regimes.

Keywords: numerical simulation, Navier–Stokes equations, Kolmogorov flow, viscous fluid, turbulence, bottom friction, energy dissipation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.206

REFERENCES

1. Arnol'd V.I., Meshalkin L.D. Seminar A.N. Kolmogorova po izbrannym voprosam analiza [A.N. Kolmogorov's seminar on selected topics in analysis]. *Uspehi Mat. Nauk* [Successes Math. Sci.], 1960, Vol. 15, No. 1(91), pp. 247–250 (in Russian).
2. Kolmogorov A.N. Lokal'naya struktura turbulentnosti v neszhimaemoj vyazkoj zhidkosti pri ochen' bol'shih chislakh Rejnol'dsa [Local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid at very large Reynolds numbers]. *DAN SSSR*, 1941, Vol. 30, No. 4, pp. 299–303 (in Russian).
3. Kraichnan R.H. Inertial ranges in two dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1967, Vol. 10, Article number. 1417; DOI: 10.1063/1.1762301
4. Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction. *Physics of Fluids*, 2021, Vol. 33; DOI: 10.1063/5.0038863
5. Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex versus chaotic state in two-dimension turbulence. *Annals of Physics*, 2022, Vol. 447, part 2; DOI: 10.1016/j.aop.2022.169072
6. Guzev M.A., Fortova S.V., Doludenko A.N., Posudnevskaya A.O., Ermakov A.D. Maslov rank distributions for the analysis of two-dimensional and quasi-two-dimensional turbulent flows. *Russian J. Math. Phys.*, 2024, Vol. 31, pp. 438–449; DOI: 10.1134/S1061920824030075
7. Guzev M.A., Doludenko A.N., Ermakov A.D., Posudnevskaya A.O., Fortova S.V. Direct numerical simulation and rank analysis of two-dimensional Kolmogorov-type vortex flows. *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 2025, Vol. 12, No. 1, pp. 43–59; DOI: 10.14529/jsfi250104

8. Doludenko A.N., Kulikov Y.M., Saveliev A.S. Chaotic flow evolution arising in a body force field. *Computer Research and Modeling*, 2024, Vol. 16, No. 4, pp. 883–912; DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-883-912
9. Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Taylor. Francis. 2016; DOI: 10.1201/b12884
10. MacCormack R.W. A Numerical method for solving the equations of compressible viscous flow. *AIAA Journal*, 1982, Vol. 20, pp. 1275–1281; DOI: 10.2514/6.1981-110