

УДК 532.591:532.517

КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ В ПРИДОННОМ ПЛОТНОСТНОМ ТЕЧЕНИИ

© 2026 С. К. Тарасов

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: s.tarasov1@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 07.05.2026 г.; после доработки 09.07.2026 г.;
принята к публикации 15.07.2026 г.

Рассматривается трёхслойное стратифицированное течение с массообменом над наклонным дном. Предполагается, что генерация вихрей в промежуточном слое уравнивается диссипативными эффектами. В приближении Буссинеска течение описывается уравнениями движения близкими по структуре к модели двухслойной мелкой воды под крышкой. Для течений с пассивным верхним слоем модель редуцируется к уравнениям однослойной мелкой воды, включающим в качестве параметра прослоечное число Ричардсона. С использованием критерия Уизема получены условия, при которых малые возмущения постоянного решения трансформируются в нелинейные квазипериодические волновые пакеты конечной амплитуды. Выполнены численные расчёты эволюции малых возмущений, демонстрирующие формирование катящихся волн. Построен двухпараметрический класс точных кусочно-гладких периодических решений, соответствующий режиму катящихся волн.

Ключевые слова: гравитационные течения, приближение Буссинеска, длинноволновые возмущения, катящиеся волны

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.207

ВВЕДЕНИЕ

Гравитационные течения над склоном играют важную роль в различных геофизических процессах и практических приложениях [1]. Характерной особенностью таких течений является генерация волновых возмущений и развитие сдвиговой неустойчивости на внутренних границах слоёв различной плотности, приводящее к турбулентному перемешиванию и формированию слоёв смешения. Совместное влияние нелинейности, плавучести, топографических эффектов и перемешивания порождает многообразие волновых конфигураций в стратифицированных течениях. Недавний обзор [2] подтверждает высокий интерес к этой тематике и предлагает направления дальнейших исследований. Влияние процессов перемешивания на структуру внутренних гидравлических прыжков рассматривается в [3, 4]. Работы [5, 6, 7] фокусируются на анализе скорости распространения фронта гравитационного потока над склоном при учёте формирования слоя смешения. Основные аспекты моделирования гравитационных течений, включая построение математических моделей, изложены в монографии [8].

Метод построения длинноволновых моделей стратифицированных течений с массообменом, основанный на трёхслойном представлении течения и осреднении уравнений Эйлера, позволяет описывать динамику внутренних волн и процессы перемешивания замкнутыми одномерными системами законов сохранения [9]. С использованием этого подхода разработаны модели формирования и эволюции слоя смешения, возникающего вследствие развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца в двухслойном течении [10, 11]. В этих работах построены стационарные решения, определены понятия сверхкритического и докритического слоистого

течения, а также проведена валидация моделей сравнением с известными экспериментальными данными. Указанный подход получил дальнейшее развитие на случай негидростатических течений и применяется для моделирования эволюции и обрушения внутренних волн большой амплитуды [12, 13], процессов перемешивания в приповерхностных [14, 15] и глубоководных течениях [16, 17].

Равновесная модель по отношению к исходной системе получается заменой некоторых уравнений системы конечными соотношениями. Хорошо известен переход от классической модели мелкой воды, описывающей течение тонкого слоя над наклонным дном, к кинематической модели распространения длинных волн [18]. Применяемая в этом случае гипотеза состоит в том, что скатывающая сила уравнивается донным трением и, соответственно, скорость потока выражается через толщину слоя жидкости. Для рассматриваемых стратифицированных течений с массообменом переход к равновесной модели менее очевиден. Как показано в [11], при описании развития слоя смешения в сверхкритическом режиме можно использовать равновесную модель, в которой уравнение для скорости “больших вихрей”, определяющее массообмен между слоями, заменяется конечным соотношением (законом вовлечения). При этом скорость “больших вихрей” выражается через остальные параметры потока и непосредственно следует из структуры уравнений трёхслойного течения. Ещё более простая равновесная модель, характеризующаяся постоянством прослоечного числа Ричардсона, предложена в [19]. Дополнительные предположения ограничивают возможности применения модели, но позволяют продвинуться в аналитическом исследовании отдельных классов течений. В рамках такого подхода получено решение задачи о распаде произвольного разрыва, а также описаны транскритические режимы трёхслойного течения над локальным препятствием [19].

Данная работа продолжает исследования трёхслойных течений над наклонным дном на основе равновесной модели с постоянным прослоечным числом Ричардсона. Основное внимание уделяется рассмотрению течений с пассивным верхним слоем (покоящийся и бесконечно глубокий). В такой постановке модель сводится к гиперболической системе двух неоднородных законов сохранения. С использованием критерия Уизема сформулированы условия устойчивости постоянного решения и определены параметры потока, при которых возможно формирование катящихся волн. Выполнены численные расчёты, иллюстрирующие нелинейную эволюцию малых возмущений и формирование квазипериодических волн конечной амплитуды для течений в затопленном пространстве и под крышкой. В классе бегущих волн построены точные кусочно-гладкие периодические решения, зависящие от двух параметров – критической толщины слоя и амплитуды волны. При соответствующем выборе этих параметров профиль волны совпадает с полученным численным решением нестационарной задачи о формировании волн конечной амплитуды.

1. РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ТРЁХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассматривается движение трёхслойной стратифицированной жидкости с массообменом между слоями в области, ограниченной дном $z = Z(x)$ и непроницаемой крышкой $z = H_0 = \text{const}$ (см. рис. 1). Во внешних однородных слоях с плотностями ρ_1 и ρ_2 течение потенциальное, а вовлечение в промежуточную прослойку (при наличии) является симметричным. Поэтому в промежуточной вихревой прослойке средняя плотность $\bar{\rho}$ постоянна и равна полусумме плотностей внешних слоёв. Осреднённые по толщине слоёв уравнения трёхслойного

течения в приближении Буссинеска имеют вид [10]:

$$\begin{aligned}
 h_t + (uh)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (v\eta)_x &= 2\sigma q, & \zeta_t + (w\zeta)_x &= -\sigma q, \\
 u_t + \left(\frac{u^2}{2} + bh + \bar{b}\eta + p\right)_x &= -bZ_x - \frac{c_f u|u|}{h}, & w_t + \left(\frac{w^2}{2} + p\right)_x &= 0, \\
 v_t + \left(\frac{v^2}{2} + \bar{b}h + \bar{b}\eta + p\right)_x &= -\bar{b}Z_x + \frac{\sigma q}{\eta}(u + w - 2v), \\
 q_t + vq_x &= \frac{\sigma}{2\eta}((u - v)^2 + (w - v)^2 - (2 + \kappa)q^2 - b\eta).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x , t — пространственная координата и время; h , η , ζ — толщины нижнего, верхнего и промежуточного слоёв; u , v , w — средние скорости жидкости в слоях; q — средняя скорость «больших вихрей» в промежуточном слое (пропорциональна скорости вовлечения в прослойку); p — давление на верхней крышке канала; $b = g(\rho_1 - \rho_2)/\rho_2 > 0$ и $\bar{b} = b/2$ — коэффициенты плавучести; g — ускорение силы тяжести; c_f — коэффициент донного трения; $\sigma = 0.15$, $\kappa \in [2, 8]$ — эмпирические постоянные, отвечающие за массообмен и диссипацию. Поскольку полная толщина жидкости $H(x) = H_0 - Z(x) = h + \eta + \zeta$ известна, то из первых трёх уравнений (1) следует, что $Q_x = 0$, $Q = uh + v\eta + w\zeta$. Далее полный расход $Q(t)$ будем считать заданным.

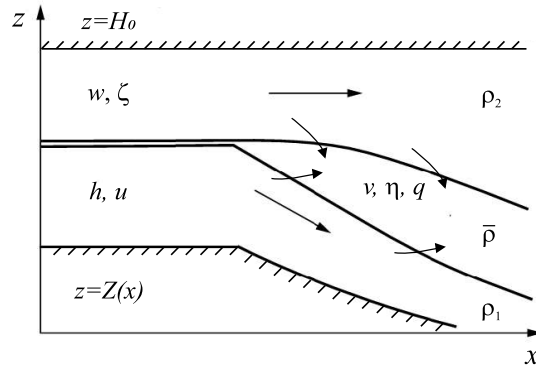


Рис. 1. Схема трёхслойного течения с вовлечением в промежуточный слой

В недавней работе [11] показано, что для моделирования сверхкритических и транскритических течений над локальным препятствием применима равновесная модель, в которой последнее уравнение в системе (1) заменяется конечным соотношением

$$q^2 = \max\left\{0, \frac{(u - v)^2 + (w - v)^2 - b\eta}{2 + \kappa}\right\}, \quad q = \sqrt{q^2}, \tag{2}$$

определяющим закон вовлечения жидкости в промежуточную прослойку. Заметим, что соотношение (2) соответствует обращению в нуль правой части последнего уравнения (1). При течении стратифицированной жидкости в длинном канале с относительно небольшим уклоном дна средняя скорость турбулентного вовлечения в прослойку близка к нулю и генерация «больших вихрей» в промежуточном слое уравновешивается диссипацией [19]. В этом случае возможно дальнейшее упрощение системы (1), при котором, помимо (2), выполняются соотношения:

$$\text{Ri} = \frac{b\eta}{(u - w)^2} = \text{const}, \quad v = \frac{u + w}{2}. \tag{3}$$

Безразмерный параметр Ri (прослоечное число Ричардсона) характеризует отношение между силами плавучести и силами сдвига потока. Нетрудно видеть, что только при $\text{Ri} = 1/2$ подстановка величин η и v , определяемых формулами (3), в соотношении (2) обеспечивает обращение

в нуль переменной q и выполнение условий равновесия. Однако число Ричардсона Ri удобно оставить в модели как параметр.

Введём новые искомые функции $m = h + \eta/2$ и $r = u - w$, определяющие сумму толщин нижнего и половины промежуточного слоёв и разность скоростей во внешних слоях, соответственно. Сложение первого и второго (с множителем $1/2$) уравнений системы (1), а также разность четвёртого и пятого уравнений этой системы, позволяет получить замкнутую систему законов сохранения для определения переменных m и r

$$\begin{aligned} m_t + \left(\left(\bar{u} + \left(1 - \frac{m}{H}\right)r \right) m - \frac{Ri}{4b} r^3 \right)_x &= 0, \\ r_t + \left(\frac{r^2}{2} + \left(\bar{u} - \frac{mr}{H} \right) r + bm \right)_x &= -bZ_x - \frac{cfu|u|}{h}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\bar{u} = Q/H$ – средняя скорость потока. С использованием (3) переменные u , w , h , η и ζ выражаются через функции m , r , полную толщину жидкости $H(x)$ и расход $Q(t)$ формулами

$$w = \frac{Q - mr}{H}, \quad u = r + w, \quad \eta = \frac{Ri}{b} r^2, \quad h = m - \frac{\eta}{2}, \quad \zeta = H - h - \eta.$$

Если принять $Ri = 0$ (т. е. $\eta = 0$), то уравнения (4) являются классическими уравнениями двухслойной мелкой воды под крышкой, исследованными в [1, 9]. Тем не менее, при значениях прослоечного числа Ричардсона Ri отличных от $1/2$ и нуля уравнения (4) также имеют физический смысл и могут быть использованы для прогнозирования и интерпретации гравитационных течений над склоном. В частности, при «отключении» возможности вовлечения ($\sigma = 0$ в уравнениях (1)), соотношения (3) выделяют однопараметрический подкласс трёхслойных течений, в которых параметры потока в промежуточном слое определяются скоростями внешних слоёв и числом Ричардсона. Кроме того, учёт особенностей распределения профиля скорости по глубине при выводе осреднённых уравнений трёхслойного течения с перемешиванием может модифицировать закон вовлечения (2) и, соответственно, отклонять «равновесное» число Ричардсона от значения $Ri = 1/2$.

Для анализа модели и проведения расчётов удобно перейти к безразмерным переменным с помощью преобразования:

$$x = \frac{h_0}{c_f} x', \quad t = \frac{1}{c_f} \sqrt{\frac{h_0}{b}} t', \quad (u, w) = \sqrt{bh_0} (u', w'), \quad (h, \eta) = h_0 (h', \eta').$$

Далее полагаем, что рельеф дна является прямолинейным $Z(x) = -kx$ с коэффициентом наклона $k > 0$, а скорость жидкости в нижнем слое считаем неотрицательной $u \geq 0$. Введём безразмерный параметр $\alpha = k/c_f$, являющийся отношением уклона дна к коэффициенту донного трения. В безразмерных переменных уравнения (4) в дифференциальной форме принимают вид (штрихи опущены)

$$\begin{aligned} m_t + \left(\bar{u} + \left(1 - \frac{2m}{H}\right)r \right) m_x + \left(\left(1 - \frac{m}{H}\right)m - \frac{3Ri}{4} r^2 \right) r_x &= 0, \\ r_t + \left(1 - \frac{r^2}{H}\right) m_x + \left(\bar{u} + \left(1 - \frac{2m}{H}\right)r \right) r_x &= \alpha - \frac{u^2}{h}. \end{aligned} \quad (5)$$

Несложные вычисления позволяют найти скорости характеристик уравнений (5)

$$\lambda_{\pm} = \bar{u} + \left(1 - \frac{2m}{H}\right)r \pm \sqrt{D}, \quad D = \left(1 - \frac{r^2}{H}\right) \left(\left(1 - \frac{m}{H}\right)m - \frac{3Ri}{4} r^2 \right).$$

Система (5) является гиперболической при выполнении условия $D > 0$, налагающем ограничения на параметры потока. Далее будет получена модификация уравнений (4) для течений с пассивным верхним слоем и проведено сопоставление решений этих моделей.

2. РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ С ПАССИВНЫМ ВЕРХНИМ СЛОЕМ

Пусть толщина верхнего слоя значительно больше толщин других слоёв, а его средняя скорость равна нулю: $\zeta \gg h$, $\zeta \gg \eta$, $w = 0$. В пределе при $\zeta \rightarrow \infty$ имеем $\bar{u} = Q/H \rightarrow 0$, $m/H \rightarrow 0$. Такая конфигурация с пассивным верхним слоем соответствует придонному гравитационному течению над склоном. Равновесная модель (4) в этом случае упрощается и в безразмерных переменных принимает вид

$$m_t + \left(um - \frac{\text{Ri}}{4} u^3 \right)_x = 0, \quad u_t + \left(\frac{u^2}{2} + m \right)_x = \alpha - \frac{u^2}{h}. \quad (6)$$

Заметим, что в частном случае $\text{Ri} = 0$ уравнения (6) совпадают с классическими уравнениями однослойной мелкой воды [9, 18].

Скорости характеристик системы (6) определяются формулами

$$\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{m - \frac{3\text{Ri}}{4} u^2}. \quad (7)$$

Условие гиперболичности модели требует, чтобы характеристики были вещественными и различными. Поскольку $w = 0$, из (3) следует, что $\eta = \text{Ri} u^2$ и, соответственно, $m = h + \text{Ri} u^2/2$. Поэтому в терминах переменных h и u условие гиперболичности уравнений (6) принимает вид

$$\frac{h}{u^2} > \frac{\text{Ri}}{4}. \quad (8)$$

Легко видеть, что система (6) имеет постоянное решение

$$m = \left(1 + \frac{\alpha \text{Ri}}{2} \right) h, \quad u = \sqrt{\alpha h}, \quad h = h_e = \text{const}. \quad (9)$$

Замена второго уравнения системы (6) равновесным соотношением $u = \sqrt{\alpha h}$ позволяет перейти к кинематической модели

$$m_t + \left(\left(1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{2(2 + \alpha \text{Ri})} \right) \sqrt{\frac{2\alpha m^3}{2 + \alpha \text{Ri}}} \right)_x = 0. \quad (10)$$

Скорость характеристики λ_e кинематического уравнения (10) выражается через толщину h и определяется выражением

$$\lambda_e(h) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{2(2 + \alpha \text{Ri})} \right) \sqrt{\alpha h}. \quad (11)$$

Подстановка зависимости $u = \sqrt{\alpha h}$ в формулы (7) определяет скорости замороженных характеристик $\hat{\lambda}_{\pm}(h)$. При этом условие гиперболичности (8) принимает вид $\alpha \text{Ri} < 4$.

Критерий Уизема устойчивости постоянного решения неоднородной гиперболической системы из двух уравнений (см. [18], гл. 10) состоит в том, что скорость равновесной характеристики λ_e ограничена скоростями замороженных характеристик $\hat{\lambda}_{\pm}$, т. е.

$$\hat{\lambda}_-(h) < \lambda_e(h) < \hat{\lambda}_+(h).$$

Принимая во внимание представления характеристик (7) и (11), предыдущие неравенства записываются следующим образом:

$$-\sqrt{1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{4}} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3\alpha \text{Ri}}{2(2 - \alpha \text{Ri})} \right) \sqrt{\alpha} < \sqrt{1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{4}}. \quad (12)$$

Интересно отметить, что в данном случае условие устойчивости не зависит от выбранной толщины нижнего слоя h , а определяется только прослоечным числом Ричардсона Ri и параметром α , являющимся отношением коэффициентов наклона дна и трения. Для этих параметров, лежащих в диапазоне $0 \leq \text{Ri} \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 10$, область выполнения критерия устойчивости (12) приведена на рис. 2 (закрашенная часть).

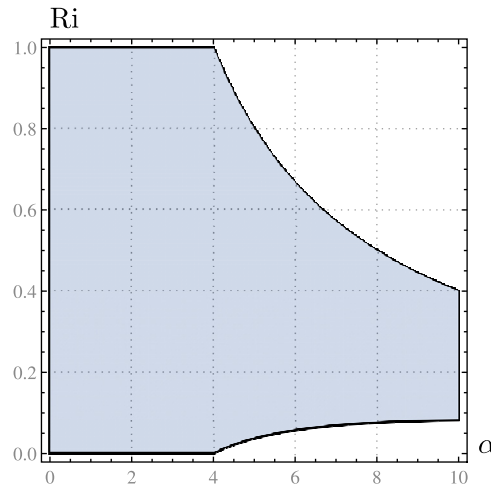


Рис. 2. Закрашенная область соответствует устойчивости постоянного решения (9) системы (6) согласно критерию Уизема (12)

Как видно из графика, чем больше коэффициент α (более крутой наклон дна), тем уже диапазон чисел Ричардсона Ri , для которых выполнены условия устойчивости Уизема (12). При этом в верхней не закрашенной области параметров на рис. 2 система (6) является эллиптической, а в нижней — гиперболической.

Взаимное расположение равновесной λ_e и замороженных характеристик $\hat{\lambda}_{\pm}$ в зависимости от параметра $\alpha \in (0, 8)$ при фиксированной толщине нижнего слоя $h = 1$ и числе Ричардсона равном $\text{Ri} = 0.02$ и $\text{Ri} = 0.5$ показано на рис. 3. В первом случае (см. рис. 3 (a)) при $\alpha > \alpha_* \approx 4.5$ нарушается неравенство $\lambda_e < \hat{\lambda}_+$, что говорит о неустойчивости постоянного решения для указанных параметров. Во втором случае (см. рис. 3 (b)) условия устойчивости (12) не нарушаются. Условие гиперболичности (8) ограничивает диапазон изменения α значением $\alpha^* = 8$, при котором скорости равновесной и замороженных характеристик совпадают. Приведённые ниже расчёты иллюстрируют неустойчивость постоянного решения (9) при нарушении условий (12).

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Нелинейная модель (6) допускает решения с сильными разрывами, которые могут возникнуть в результате эволюции гладкого решения. Для корректного моделирования внутренних гидравлических скачков необходимо выбрать физически корректную консервативную форму модели [9, 18]. Для проведения численных расчётов и построения кусочно-гладких решений в классе бегущих волн будем использовать следующую консервативную форму уравнений (6),

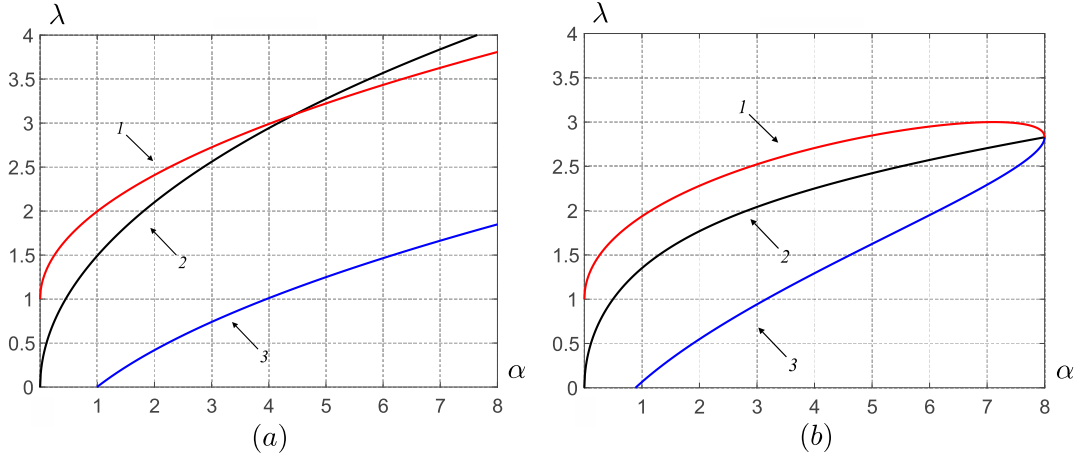


Рис. 3. Равновесная λ_e (кривые 2) и замороженные $\hat{\lambda}_{\pm}$ (кривые 1 и 3) скорости характеристик в зависимости от параметра α при $\text{Ri} = 0.02$ (a) и $\text{Ri} = 0.5$ (b)

соответствующую законам сохранения массы и импульса:

$$\begin{aligned} m_t + \left(\left(m - \frac{\text{Ri}}{4} u^2 \right) u \right)_x &= 0, \\ (um)_t + \left(u^2 m + \frac{m^2}{2} - \frac{3\text{Ri}}{16} u^4 \right)_x &= \alpha m - \frac{mu^2}{h}. \end{aligned} \quad (13)$$

Численное моделирование выполняется на основе простой и надёжной схемы второго порядка, разработанной для решения гиперболических законов сохранения [20]. Программный код реализован в MATLAB. Расчёты проводятся в промежутке $[0, L]$ на равномерной сетке с числом узлов N , шаг по времени определяется автоматически из условия Куранта с использованием скоростей характеристик (7). В качестве начальных данных берётся постоянное решение $m = m_0$, $u = u_0$, определяемое формулами (9) с $h_e = 1$. На левой границе $x = 0$ в поток вносятся малые периодические возмущения $m = m_0 + 0.01 \sin(4\pi t)$, $u = u_0$. На правой границе задаются условия Неймана $U_N = U_{N-1}$ (U_i – значение искомых функций в i -м узле). Во всех рассмотренных ниже случаях длина расчётного интервала $L = 100$ и число узлов $N = 8000$, что обеспечивает достаточное пространственное разрешение.

Формирование квазипериодических волн конечной амплитуды в результате эволюции малых периодических возмущений постоянного решения показано на рис. 4. Приведены графики скорости $u(x)$ для $\text{Ri} = 0.02$, $\alpha = 6$ и $\alpha = 7$ в момент времени $t = 40$, при котором возмущения достигли правой границы расчётной области. Качественное поведение переменных m и h аналогично. Указанные параметры (α, Ri) принадлежат нижней не закрашенной области на рис. 2, при которых система (6) является гиперболической, но нарушаются условия устойчивости (12). Как видно из рис. 4 с ростом α при фиксированном Ri увеличивается амплитуда a сформировавшихся волн, которая для переменной u составляет $a = 0.27$ при $\alpha = 6$ и $a = 0.45$ при $\alpha = 7$. Увеличение прослоечного числа Ричардсона напротив ведёт к уменьшению амплитуды волны, а при переходе в область выполнения условий устойчивости (12) к затуханию малых возмущений.

Далее будет показано, что профиль сформировавшихся волн конечной амплитуды, называемых катающимися волнами [21], совпадает с точным кусочно-гладким решением уравнений (13) в классе бегущих волн, в котором искомые функции зависят от переменной $\xi = x - Dt$. Прежде чем перейти к построению катающихся волн покажем, что решения уравнений (5) в канале конечной толщины $H(x)$ стремятся к решению системы (6) для течений в затопленном

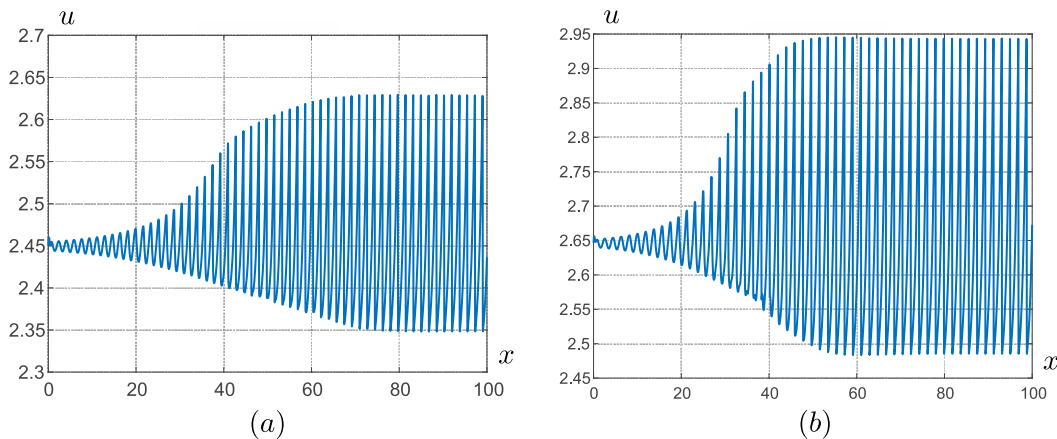


Рис. 4. Распределение скорости $u(x)$ при $t = 40$, полученное в результате эволюции малых периодических возмущений решения уравнений (13) при $Ri = 0.02$ и $\alpha = 6$ (а), $\alpha = 7$ (б)

пространстве при увеличении толщины верхнего слоя ζ . При этом более общая система уравнений (5) не допускает решений в классе бегущих волн.

Выполним расчёты по моделям (6) и (5) (в консервативной форме для переменных m и r) с начальными и граничными условиями, как в предыдущем примере (см.рис. 4). Для модели (5) при $t = 0$ дополнительно зададим нулевую скорость верхнего слоя $w = 0$ и уровень верхней границы H_0 , равный полной толщине слоя жидкости в сечении $x = 0$. Как и прежде, значения параметров $\alpha = 6$ и $Ri = 0.02$. На рис. 5 приведены графики, полученные при $H_0 = 50$ (верхняя панель) и $H_0 = 1000$ (нижняя панель) в момент времени $t = 40$.

Решение уравнений (6) и (5) показано сплошными и пунктирными линиями, соответственно. При указанных параметрах в рамках более старшей модели (5) также наблюдается рост малых возмущений и формирование квазипериодических волн конечной амплитуды, несколько превышающих амплитуду волн для модели (6). На рис. 5 (а, б) для переменных m и u наблюдается заметное различие в результатах расчёта, особенно на промежутке $x \in (30, 60)$, что обусловлено влиянием конечной толщины канала $H = H_0 + \alpha x$ в модели (5). При увеличении значения H_0 различия в решениях моделей уменьшаются. Это демонстрирует рис. 5 (с, д), полученный при $H_0 = 1000$. На графиках приведено распределение $m(x)$ на промежутке $x \in (40, 60)$ и более узком интервале. Таким образом, решения уравнений (5) при увеличении толщины $H(x)$ стремятся к решениям модели глубководного течения (6).

В представленных на рис. 4 и 5 расчётах развития катящихся волн прослеживается стабилизация волнового пакета по периоду и амплитуде. Одним из способов выяснения устойчивости пакета нелинейных волн является вывод уравнений модуляций для средних величин, характеризующих параметры волн, и определение типа полученной системы [9, 18]. Здесь этот анализ не проводится, но поскольку уравнения (6) близки к классическим уравнениям мелкой воды (совпадают при $Ri = 0$), то результаты будут аналогичны полученным в [9] (гл. 3, пар. 2).

4. КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ

В работе [21] предложен метод построения двухпараметрических периодических решений уравнений мелкой воды в классе бегущих волн (искомые функции зависят от переменной $\xi = x - Dt$, $D > 0$). Решения состоят из гладких участков, на которых происходит непрерывный переход докритического течения в сверхкритическое относительно скорости волны D , и сильных разрывов (гидравлических прыжков). Следуя [9, 21], будем называть такие решения катящимися волнами. Этот подход известен и применяется к различным моделям механики жидкости. В частности, катящиеся волны для двухслойных течений в наклонном

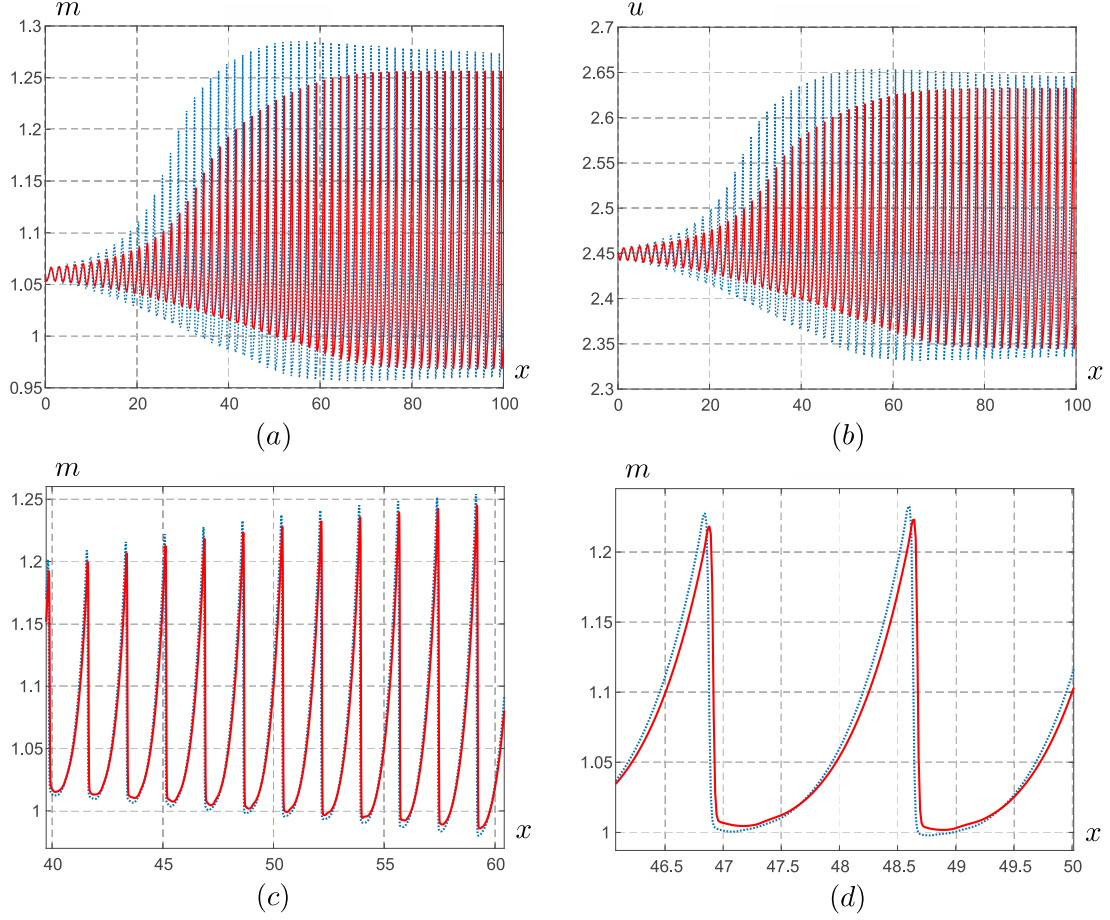


Рис. 5. Решения уравнений (5) (пунктир) и (6) (сплошные линии) при $t = 40$, полученные в результате эволюции малых возмущений постоянного решения (9) с параметрами $\alpha = 6$ и $\text{Ri} = 0.02$ при $H_0 = 50$ (a, b) и $H_0 = 1000$ (c, d)

канале построены в [22], для течений газа с внешним источником энергии в [23]. Применим технику [21] для построения кусочно-гладких периодических решений системы (13).

В классе бегущих волн система уравнений (13) принимает вид

$$\begin{aligned} (u - D)m - \frac{\text{Ri}}{4}u^3 &= (u_c - D)m_c - \frac{\text{Ri}}{4}u_c^3, \\ \left((u - D)um + \frac{m^2}{2} - \frac{3\text{Ri}}{16}u^4 \right)' &= \alpha m - \frac{mu^2}{h}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по ξ , u_c и m_c – постоянные. Выразим из первого уравнения (14) переменную $m = m(u)$ и введём обозначения

$$G(u) = (u - D)um + \frac{m^2}{2} - \frac{3\text{Ri}}{16}u^4, \quad F(u) = \alpha m - \frac{mu^2}{h}, \quad \Delta(u) = \frac{dG}{du}.$$

Тогда система (14) сводится к ОДУ

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{F}{\Delta}. \quad (15)$$

Как отмечалось выше, в катающейся волне происходит непрерывный переход докритического течения $\Delta > 0$ в сверхкритическое $\Delta < 0$. Для этого необходимо, чтобы функции $F(u)$ и $\Delta(u)$ обращались в нуль в одной точке: $F(u_c) = 0$, $\Delta(u_c) = 0$. Из первого соотношения

следует, что $u_c = \sqrt{\alpha h_c}$ и $m_c = (1 + \alpha \text{Ri}/2)h_c$, т. е. соответствует постоянному решению (9) с критической глубиной h_c . Значение h_c выбирается произвольно. Из условия $\Delta(u_c) = 0$ определяем скорость волны

$$D = \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{4}} \right) \sqrt{h_c},$$

которая равна скорости характеристики $\lambda_+(m, u)$ в точке $m = m_c$, $u = u_c$. Графики функций $G(u)$, $F(u)$ и $\Delta(u)$ с параметрами $\alpha = 6$, $\text{Ri} = 0.02$ и критической скоростью $u_c = 2.5$ представлены на рис. 6.

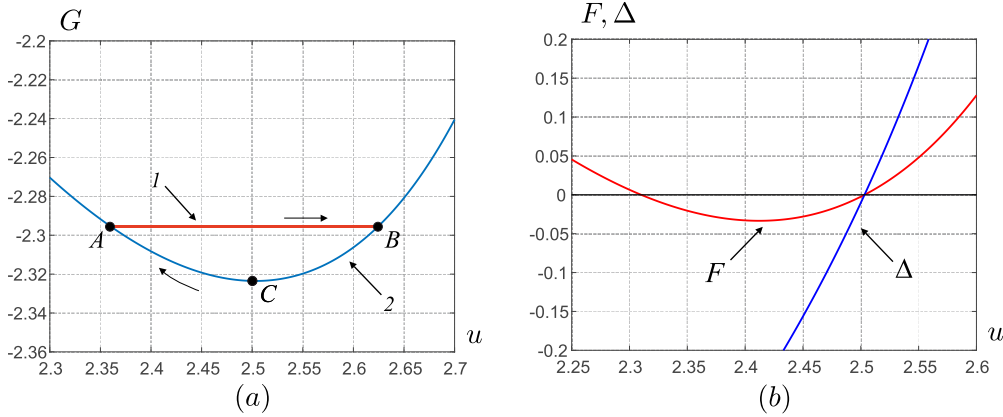


Рис. 6. График функции $G(u)$ (а) и взаимное расположение кривых $F(u)$ и $\Delta(u)$ (б), полученные при $\alpha = 6$, $\text{Ri} = 0.02$ и $u_c = 2.5$

Периодическое решение системы (14) состоит из гладкого участка течения BCA (кривая 2 на рис. 6 (а)), на котором поток непрерывно переходит из докритического состояния в сверхкритическое ($\Delta = 0$ в точке C), и сильного разрыва (кривая 1), связывающего точки A и B . Амплитуда скачка (длина отрезка AB) или значение u_A (скорость в точке A) выбирается произвольно, но так, чтобы правая часть уравнения (15) не меняла знак при изменении u на промежутке AB . Значение u_B в точке B находится из условия Ренкина–Гюгоньо $[G] = 0$. Взаимное расположение кривых F и Δ показано на рис. 6 (б). Как видно из графика отношение $F/\Delta > 0$, если $u_A > u_* \approx 2.31$. Поэтому значение u_A точки A , лежащей на кривой $G = G(u)$, должно быть в промежутке от u_* до u_c . Таким образом, гладкий профиль волны определяется решением ОДУ (15) и сильным разрывом $[G] = 0$, являющимся условием Ренкина – Гюгоньо для системы (14).

Построенное кусочно-гладкое периодическое решение соответствует профилю волны, полученному в нестационарном расчёте на рис. 4. При $x > 80$ минимальное значение переменной $u \approx 2.347$ (см. рис. 4 (а)). Для данного значения u_A при $\alpha = 6$ и $\text{Ri} = 0.02$ подбираем значение критической скорости u_c , обеспечивающее наилучшее совпадение решений. На рис. 7 пунктиром показан профиль бегущей волны (решение ОДУ (15)) при $u_c = 2.5$. Сплошной линией показана часть рис. 4 (а). Сплошная и пунктирная линия на интервале $x \in (85, 86.6)$ практически совпадают. Таким образом, эволюция малых возмущений постоянного решения (9) системы уравнений (13) приводит к формированию катящихся волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена предложенная в [19] равновесная длинноволновая модель (4), описывающая в приближении Буссинеска трёхслойное течение над склоном в канале конечной толщины (см. рис. 1). Эта нелинейная модель характеризуется постоянным прослоечным числом Ричардсона и является более простой по сравнению с известными моделями формирования

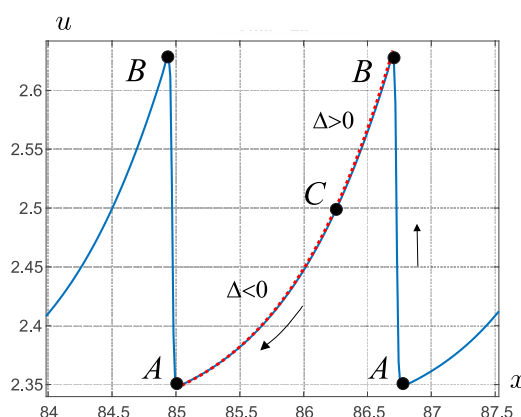


Рис. 7. Сравнение решения системы (13) (часть рис. 4 (а), сплошная линия) и профиля катящейся волны (15) (пунктир) при $\alpha = 6$, $Ri = 0.02$, $u_A = 2.347$ и $u_c = 2.5$

и эволюции слоя смешения в двухслойных течениях [10, 11]. Для движений стратифицированной жидкости с пассивным верхним слоем (покоящимся и бесконечно глубоким) модель редуцируется к системе уравнений (6), близкой по структуре к классическим уравнениям теории мелкой воды. Найдены скорости характеристик (7) и с использованием критерия Уизема сформулированы условия устойчивости (13) постоянного решения системы (6), определяемые прослоечным числом Ричардсона Ri и параметром α (отношение наклона дна к донному трению).

Уравнения (6) представлены в виде системы законов сохранения массы и импульса (13), на основе которой проведены нестационарные расчёты распространения внутренних волн. Показано, что при нарушении условий устойчивости Уизема в процессе эволюции малых возмущений постоянного решения модели могут формироваться квазипериодические волны конечной амплитуды (рис. 4). При этом для рассматриваемых примеров система уравнений остаётся в области гиперболичности. Сравнение с исходной моделью течения в канале конечной толщины показывает, что решения уравнений (5) при увеличении толщины канала $H(x)$ стремятся к решению системы (6) для течения в затопленном пространстве (рис. 5). В классе бегущих волн построены точные периодические кусочно-гладкие решения (катающиеся волны), определяемые двумя параметрами – критической толщиной и амплитудой волны. Рис. 7 показывает, что профиль волн конечной амплитуды, формирующихся в процессе нелинейной эволюции малых возмущений постоянного решения уравнений (13), совпадает с решением ОДУ (15) при подходящем выборе параметров катящихся волн.

Автор благодарит А. А. Чеснокова и В. Ю. Ляпидевского за полезные обсуждения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-21-00811). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baines P.G.* Topographic effects in stratified flows. Cambridge Univ. Press, 1995.
2. *He Z., Okon S.U., Zhu R., Pähitz T., Meiburg E.* Dynamics of gravity currents under external and internal stratification in geophysical systems // *Earth-Sci. Rev.* 2025. V. 271; DOI: 10.1016/j.earscirev.2025.105270
3. *Ogden K.A., Helfrich K.R.* Internal hydraulic jumps in two-layer flows with increasing upstream shear // *Phys. Rev. Fluids.* 2020. V. 5; DOI: 10.1103/physrevfluids.5.074803
4. *Lawrence G.A., Armi L.* Stationary internal hydraulic jumps // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 936; DOI: 10.1017/jfm.2022.74
5. *Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V.* A note on the propagation speed of a weakly dissipative gravity current // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 574. P. 393–403.
6. *Dai A.* Experiments on gravity currents propagating on different bottom slopes // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 731. P. 117–141.
7. *Zhu R., He Z., Meiburg E.* Mixing, entrainment and energetics of gravity currents released from two-layer stratified locks // *J. Fluid Mech.* 2023. V. 960; DOI: 10.1017/jfm.2023.146
8. *Ungarish M.* Gravity Currents and Intrusions — Analysis and Prediction. New Jersey, London, Tokyo: World Scientific, 2020.
9. *Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
10. *Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А.* Слой смешения в двухслойных спутных течениях стратифицированной жидкости // *Прикл. математика и техн. физика.* 2022. Т. 63, № 6. С. 122–134.
11. *Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А.* Равновесная модель слоя смешения в сдвиговом течении стратифицированной жидкости // *Прикл. математика и техн. физика.* 2024. Т. 65, № 3. С. 43–55.
12. *Chesnokov A.A., Liapidevskii V.Yu., Kazakov A.L.* Nonlinear internal waves and turbulent mixing in a three-layer stratified fluid in a closed reservoir // *Internat. J. Non-Linear Mech.* 2025. V. 179; DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105241
13. *Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А.* Обрушение уединённых внутренних волн в трёхслойной жидкости над препятствием // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 2025. Т. 65, № 5. С. 673–685.
14. *Gavrilyuk S.L., Liapidevskii V.Yu., Chesnokov A.A.* Interaction of a subsurface bubble layer with long internal waves // *Europ. J. Mech. B/Fluids.* 2019. V. 73. P. 157–169.
15. *Ермишина В.Е.* Гиперболическая модель сильно нелинейных волн в двухслойных течениях неоднородной жидкости // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2022. Т. 25, № 4. С. 71–85.
16. *Ляпидевский В.Ю., Зуёв О.А., Макаренко Н.И., Морозов Е.Г., Фрей Д.И.* Расщепление стратифицированных течений над препятствиями // *Прикл. математика и техн. физика.* 2025. Т. 66, № 4. С. 118–128.
17. *Чесноков А.А., Тарасов С.К.* Волновые режимы течения и перемешивание в придонных гравитационных потоках // *ПМТФ.* 2025. Т. 66, № 4. С. 58–73.
18. *Уизем Дж.* Линеинные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
19. *Ляпидевский В.Ю.* Двухслойная равновесная модель течения смешивающейся неоднородной жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2024. № 4. С. 76–89.
20. *Nessyahu H., Tadmor E.* Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* 1990. V. 87. P. 408–463.
21. *Dressler P.G.* Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels // *Comm. Pure Appl. Math.* 1949. V. 2. P. 140–194.
22. *Boudlal A.* Roll waves and plugs in two-layer flows // *Europ. J. Appl. Math.* 2008. V. 19. P. 1–19.
23. *Чесноков А.А.* Волновые структуры в течениях идеального газа с внешним источником энергии // *Труды МИАН.* 2023. Т. 322. С. 241–250.

UDC 532.591:532.517

ROLL WAVES IN A BOTTOM DENSITY CURRENT

© 2026 S. K. Tarasov

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Akad. Lavrentyev prosp., 15, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: s.tarasov1@g.nsu.ru

Received 07.05.2026, revised 09.07.2026, accepted 15.07.2026

Abstract. A three-layer stratified flow with mass transfer over a sloping bottom is considered. It is assumed that vortex generation in the intermediate layer is balanced by dissipative effects. In the Boussinesq approximation, the flow is described by equations of motion similar in structure to the two-layer shallow water model under a cover. For deep-water currents, the model is reduced to single-layer shallow water equations, including the interlayer Richardson number as a parameter. Using the Whitham criterion, conditions are obtained under which small perturbations of a constant solution are transformed into nonlinear quasiperiodic wave packets of finite amplitude. Numerical simulations of the evolution of small perturbations are performed, demonstrating the formation of roll waves. A two-parameter class of exact piecewise smooth periodic solutions corresponding to the roll wave regime is constructed.

Keywords: gravity currents, Boussinesq approximation, long-wave disturbances, roll waves.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.207

REFERENCES

1. Baines P.G. Topographic effects in stratified flows. Cambridge Univ. Press, 1995.
2. He Z., Okon S.U., Zhu R., Pätz T., Meiburg E. Dynamics of gravity currents under external and internal stratification in geophysical systems. *Earth-Sci. Rev.*, 2025, Vol. 271; DOI: 10.1016/j.earscirev.2025.105270
3. Ogden K.A., Helfrich K.R. Internal hydraulic jumps in two-layer flows with increasing upstream shear. *Phys. Rev. Fluids*, 2020, Vol. 5; DOI: 10.1103/physrevfluids.5.074803
4. Lawrence G.A., Armi L. Stationary internal hydraulic jumps. *J. Fluid Mech.*, 2022, Vol. 936; DOI: 10.1017/jfm.2022.74
5. Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V. A note on the propagation speed of a weakly dissipative gravity current. *J. Fluid Mech.*, 2007, Vol. 574, pp. 393–403.
6. Dai A. Experiments on gravity currents propagating on different bottom slopes. *J. Fluid Mech.*, 2013, Vol. 731, pp. 117–141.
7. Zhu R., He Z., Meiburg E. Mixing, entrainment and energetics of gravity currents released from two-layer stratified locks. *J. Fluid Mech.*, 2023, Vol. 960; DOI: 10.1017/jfm.2023.146
8. Ungarish M. Gravity Currents and Intrusions — Analysis and Prediction. New Jersey, London, Tokyo: World Scientific, 2020.
9. Liapidevskii V.Yu., Teshukov V.M. Matematicheskie modeli rasprostraneniya dlinnyh voln v neodnorodnoj zhidkosti [Mathematical models of long wave propagation in an inhomogeneous fluid]. Novosibirsk: Publ. SB RAS, 2000 (In Russian).

10. Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A. Mixing layer in two-layer stratified flows. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, Vol. 63, pp. 1010–1021; DOI: 10.1134/S0021894422060141
11. Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A. Equilibrium model of the mixing layer in shear flow of a stratified fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2024, Vol. 65, pp. 427–438. DOI: 10.1134/S0021894424030040
12. Chesnokov A.A., Liapidevskii V.Yu., Kazakov A.L. Nonlinear internal waves and turbulent mixing in a three-layer stratified fluid in a closed reservoir. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 2025, Vol. 179; DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105241
13. Liapidevskii V.Yu., Chesnokov A.A. Breaking of internal solitary waves in a three-layer fluid over an obstacle. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2025, Vol. 65, pp. 1013–1025; DOI: 10.1134/S0965542525700332
14. Gavriluk S.L., Liapidevskii V.Yu., Chesnokov A.A. Interaction of a subsurface bubble layer with long internal waves. *Europ. J. Mech. B/Fluids*, 2019, Vol. 73, pp. 157–169.
15. Ermishina V.E. A Hyperbolic Model of Strongly Nonlinear Waves in Two-Layer Flows of an Inhomogeneous Fluid. *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, Vol. 16, pp. 659–671; DOI: 10.1134/S199047892204007X
16. Lyapidevsky, V.Y., Zuev, O.A., Makarenko, N.I. et al. Splitting of Stratified Flows over Obstacles. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2025, Vol. 66, pp. 735–744; DOI: 10.1134/S0021894425700294
17. Chesnokov A.A., Tarasov S.K. Wave regimes and mixing in bottom gravity currents. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2025, Vol. 66, pp. 683–696; DOI: 10.1134/S0021894425700257
18. Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. N. Y.: J. Wiley and Sons, 1974.
19. Liapidevskii V.Yu. Two-layer equilibrium model of the flow of a miscible inhomogeneous fluid. *J. Fluid Dynamics*, 2024, Vol. 59, pp. 709–722.
20. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 1990, Vol. 87, pp. 408–463.
21. Dressler P.G. Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1949, Vol. 2, pp. 140–194.
22. Boudlal A. Roll waves and plugs in two-layer flows. *Europ. J. Appl. Math.*, 2008, Vol. 19, pp. 1–19.
23. Chesnokov A.A. Wave structures in ideal gas flows with an external energy source. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2023, Vol. 322, pp. 232–241; DOI: 10.1134/S0081543823040193