

УДК 517.938:517.984

# КОМБИНАЦИОННЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЬЁ — ХИЛЛА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2026 А. Г. Швец

Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090, Россия

E-mail: a.shvets1@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 27.04.2026 г.; после доработки 11.06.2026 г.;  
принята к публикации 15.07.2026 г.

В работе методом усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского исследуется комбинационный параметрический резонанс в гильбертовом пространстве  $H$  для нелинейного уравнения Матьё — Хилла вида  $u''(t) + A^2u(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t))$ , где  $A^2$  — самосопряжённый положительный оператор в  $H$  с компактной резольвентой. Правая часть  $\varepsilon F(\omega t, u(t))$  предполагается периодическим по времени  $t$  возмущением с частотой  $\omega > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  — малый скалярный параметр. Показано, что в первом приближении наряду с основными параметрическими резонансами возникают комбинационные резонансы, определяемые резонансными соотношениями  $k\omega = \nu_p \pm \nu_q$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $p \neq q$ , где  $\nu_n$  — собственные значения оператора  $A = (A^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В случае комбинационного резонанса установлены условия конечности резонансных наборов индексов  $(p, q)$  при фиксированной частоте  $\omega$ , что обеспечивает отделённость нерезонансных частотных комбинаций от нуля. Также построена усреднённая конечномерная резонансная система первого приближения и доказано, что решения исходного уравнения аппроксимируются решениями построенной усреднённой системы с оценкой погрешности в норме пространства  $H$  порядка  $O(\varepsilon)$  на промежутке длины  $T/\varepsilon$ .

**Ключевые слова:** уравнение Матьё — Хилла, оператор Штурма — Лиувилля, комбинационный параметрический резонанс, метод усреднения, усреднённая резонансная система первого приближения

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.208

## ВВЕДЕНИЕ

Параметрический резонанс является одним из наиболее характерных проявлений неустойчивости в системах, в которых параметры изменяются периодически по времени [1]–[5]. Для уравнений вида

$$u''(t) + A^2u(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где  $T > 0$  — фиксированный момент времени, резонансные явления возникают при определённых частотах внешнего воздействия, согласующихся со спектральными характеристиками невозмущённой задачи, и в резонансных режимах могут приводить к заметному росту амплитуд решений даже при малых возмущениях. В нелинейных задачах это явление, как правило, сопровождается появлением медленной динамики амплитуд [3]–[5]; при этом картина резонанса существенно отличается от линейного случая, что было показано в [6].

Уравнение (1) в гильбертовом пространстве  $H$  относится к классу операторных уравнений Матьё — Хилла, возникающих при описании колебательных процессов в распределённых системах, когда периодическое по времени возмущение действует на параметры или на состояние системы [6], [7]. В [6] предложен подход к исследованию основного параметрического

резонанса для абстрактных уравнений Матьё — Хилла (1) в гильбертовом пространстве  $H$ , основанный на применении модифицированного метода усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского [8], [9]. В настоящей работе, как и в [6], оператор  $A^2$  является самосопряжённым, положительным оператором в  $H$  с компактной резольвентой; поэтому спектр оператора  $A$  состоит из счётного набора собственных значений  $\nu_n$ ,  $\nu_n \rightarrow \infty$ , а соответствующие собственные функции  $\varphi_n$  образуют ортонормированный базис в  $H$ . В связи с колебательной интерпретацией решений невозмущённого уравнения эти собственные значения  $\nu_n$  оператора  $A = (A^2)^{1/2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , далее будем называть собственными частотами невозмущённой задачи. Важная особенность подобных задач в  $H$  состоит в том, что резонансные режимы определяются этими собственными частотами. В [6] рассматривались резонансные случаи, связанные с одной собственной частотой  $\nu_p$ : внешние резонансы задавались соотношениями  $k\omega = \nu_p$ , а основные параметрические резонансы — соотношениями  $k\omega = 2\nu_p$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . В нашей работе методом усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского для уравнения Матьё — Хилла (1) исследуется комбинационный параметрический резонанс. В этом случае резонансные соотношения имеют вид  $k\omega = \nu_p \pm \nu_q$ ,  $p \neq q$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , то есть внешняя частота связана с суммой или разностью двух различных собственных частот.

Метод усреднения возник в задачах теории нелинейных колебаний и небесной механики [10] и получил систематическое развитие в работах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [8], [9]. Для линейных задач параметрического резонанса близкие вопросы рассматривались в [1], а для конечномерных нелинейных систем — в [11].

Непосредственно к рассматриваемой тематике примыкают работы [12], [13]. Задачи о нелинейных комбинационных резонансах для конкретных механических и осцилляторных моделей рассматривались в [14]–[16]: в [14] изучалась система связанных нелинейных уравнений Матьё, в [15] — аксиально движущаяся вязкоупругая балка, в [16] — аксиально движущаяся пьезоэлектрическая пластина.

Цель настоящей работы состоит в выделении условий комбинационного параметрического резонанса для уравнения (1) в гильбертовом пространстве  $H$ , построении соответствующей конечномерной усреднённой системы первого приближения и обосновании этого приближения на промежутках времени порядка  $T/\varepsilon$  с погрешностью  $O(\varepsilon)$  в норме пространства  $H$ . Для этого исходное уравнение сводится к системе для медленных амплитуд, затем выделяются резонансные частотные комбинации, доказывается отделённость нерезонансных комбинаций от нуля и строится усреднённая резонансная система. В результате исследование решений уравнения (1) в комбинационном резонансном режиме сводится к анализу конечномерной системы для резонансных амплитуд.

Структура работы следующая. В разд. 1 приводятся предварительные сведения и постановка задачи. В разд. 2 выводятся уравнения для медленных амплитуд и резонансные соотношения. В разд. 3 устанавливается контроль малых знаменателей. В разд. 4 строится усреднённая резонансная система первого приближения. В разд. 5 доказывается оценка погрешности первого приближения. В заключении обсуждается переход к почти-периодическим возмущениям.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть  $H$  — гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  и нормой

$$\|u\|_H = \langle u, u \rangle_H^{1/2}.$$

Обозначим через  $\mathcal{L}(H)$  пространство линейных ограниченных операторов  $T: H \rightarrow H$ , определённых на всём пространстве  $H$ , с нормой

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\|u\|_H=1} \|Tu\|_H.$$

### 1.1. Метод усреднения для построения первого приближения

При исследовании уравнений вида (1) исходное уравнение с помощью замены переменных записывают в стандартном виде в смысле Н. Н. Боголюбова (см. [8])

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon Z(t, z, \varepsilon),$$

где  $z$  обозначает новую неизвестную функцию, а правая часть периодически зависит от времени  $t$ . Так как  $\varepsilon$  стоит перед функцией  $Z(t, z, \varepsilon)$ , то за один период изменения коэффициентов функция  $z(t)$  меняется мало, а основной вклад в её изменение накапливается на промежутках времени порядка  $O(1/\varepsilon)$ .

Пусть правая часть допускает следующее разложение по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$Z(t, z, \varepsilon) = Z_0(t, z) + \varepsilon Z_1(t, z) + \varepsilon^2 Z_2(t, z) + \dots \quad (2)$$

При построении первого приближения решения  $z$  учитывают только главный член  $Z_0(t, z)$ . Если его период по времени равен  $T_0$ , то средним значением главного члена называется функция

$$\bar{Z}_0(z) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} Z_0(s, z) ds.$$

Система первого усреднённого приближения имеет вид

$$z_1'(t) = \varepsilon \bar{Z}_0(z_1(t))$$

относительно неизвестной функции  $z_1$ . Она называется системой первого приближения потому, что в ней сохраняется только средний вклад главного члена правой части системы, записанной в стандартном виде. При выполнении определённых условий гладкости и ограниченности правой части  $Z(t, z, \varepsilon)$  решение этой системы приближает решение исходной системы, записанной в стандартном виде, на промежутках времени порядка  $1/\varepsilon$ .

Для построения следующих  $n$ -х приближений вводят замену переменных с поправками

$$z(t) = \xi(t) + \varepsilon v_1(t, \xi(t)) + \varepsilon^2 v_2(t, \xi(t)) + \dots + \varepsilon^n v_n(t, \xi(t)).$$

Функции  $v_1, v_2, \dots, v_n$  выбираются периодическими по времени и подбираются последовательно по степеням  $\varepsilon$ : на каждом шаге слагаемые преобразованной правой части, имеющие среднее значение, включаются в усреднённую систему, а слагаемые с нулевым средним устраняются за счёт очередной периодической поправки (см. [8], [9]). В итоге получается усреднённая система

$$\xi'(t) = \varepsilon G_1(\xi(t)) + \varepsilon^2 G_2(\xi(t)) + \dots + \varepsilon^n G_n(\xi(t)) + \varepsilon^{n+1} R(\xi(t), t, \varepsilon),$$

где  $R$  обозначает остаточный член. Здесь  $G_1 = \bar{Z}_0$ , а функции  $G_2, \dots, G_n$  возникают при учёте поправок  $v_1, \dots, v_n$  и членов  $Z_1, Z_2, \dots$  в разложении правой части (2). В частности, при  $n = 1$  для переменной  $\xi$  получается преобразованная система

$$\xi'(t) = \varepsilon G_1(\xi(t)) + \varepsilon^2 R(\xi(t), t, \varepsilon).$$

После отбрасывания остаточного члена порядка  $\varepsilon^2$  она даёт систему первого усреднённого приближения для  $z_1(t)$ , записанную выше. Чем выше порядок приближения, тем больше условий требуется на гладкость правой части в разложении (2) и тем сложнее становится контроль остаточных членов.

В задачах параметрического резонанса особую роль играет то, какие слагаемые преобразованной правой части имеют ненулевое среднее. В дальнейшем будут встречаться множители вида  $e^{i\Phi t}$ , где  $\Phi \in \mathbb{R}$ . Для отдельного такого множителя среднее по времени понимается как

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S e^{i\Phi t} dt.$$

Это среднее равно единице при  $\Phi = 0$  и равно нулю при  $\Phi \neq 0$ . Поэтому построение первого приближения в резонансной задаче сводится к выделению слагаемых с ненулевым средним и оценке вклада остальных слагаемых.

### 1.2. Оператор $A$ и спектральные обозначения

По предположению оператор  $A^2$  является самосопряжённым в  $H$ , имеет компактную резольвенту и положительно определён в следующем смысле: существует число  $\alpha > 0$  такое, что

$$\langle A^2 u, u \rangle_H \geq \alpha^2 \|u\|_H^2, \quad u \in D(A^2).$$

Положим  $A = (A^2)^{1/2}$ , где  $A$  — положительный квадратный корень оператора  $A^2$  (см. [17]). Тогда  $A$  является самосопряжённым положительным оператором. Кроме того, для  $u \in D(A)$  имеем

$$\|Au\|_H^2 \geq \alpha^2 \|u\|_H^2,$$

откуда следует, что  $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ .

Компактность резольвенты оператора  $A^2$  обеспечивает дискретность спектра и существование в  $H$  ортонормированного базиса  $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subset H$  из собственных векторов оператора  $A$  (см. [17]). Обозначим соответствующие собственные значения оператора  $A$  через  $\nu_n > 0$ ,  $\nu_n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$A\varphi_n = \nu_n \varphi_n, \quad A^2 \varphi_n = \nu_n^2 \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для любого  $u \in H$  имеет место единственное разложение в ряд Фурье

$$u = \sum_{n \geq 1} u_n \varphi_n, \quad u_n = \langle u, \varphi_n \rangle_H, \quad \|u\|_H^2 = \sum_{n \geq 1} |u_n|^2. \quad (3)$$

**Пример. Оператор Штурма — Лиувилля.** В качестве  $A^2$  можно рассматривать оператор Штурма — Лиувилля с однородными граничными условиями Дирихле

$$(A^2 u)(x) = -u''(x) + q(x)u(x), \quad u(a) = u(b) = 0,$$

где  $q \in L^\infty([a, b])$  и  $q(x) \geq q_0 > 0$  почти всюду на  $[a, b]$ . Его область определения имеет вид

$$D(A^2) = \{u \in W_2^2(a, b) : u(a) = u(b) = 0\}.$$

Тогда оператор  $A^2$  является самосопряжённым и положительно определённым в  $L^2(a, b)$ . Компактность его резольвенты следует из того, что резольвента действует из  $L^2(a, b)$  в  $D(A^2) \subset W_2^2(a, b)$ , а вложение  $W_2^2(a, b) \hookrightarrow L^2(a, b)$  компактно. Собственные значения оператора  $A$  имеют асимптотику (см. [18])

$$\nu_n = c_1 n + \frac{c_2}{n} + r_n, \quad |r_n| \leq \frac{c}{n^2}, \quad n \geq 1, \quad (4)$$

где  $c_1 > 0$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ . Именно это спектральное свойство будет использовано далее для контроля малых знаменателей при усреднении уравнения (1).

### 1.3. Задача Коши для уравнения (1)

Для уравнения (1) рассмотрим задачу Коши с начальными условиями

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (5)$$

Предположим, что начальные данные согласованы с операторами  $A$  и  $A^2$  следующим образом:

$$u^0 \in D(A^2), \quad u^1 \in D(A),$$

где  $D(A^2)$  и  $D(A)$  — области определения операторов  $A^2$  и  $A$  соответственно.

Невозмущённое уравнение (1) ( $\varepsilon = 0$ ) имеет вид

$$u''(t) + A^2 u(t) = 0. \quad (6)$$

Покажем, что все решения задачи (5), (6) ограничены. Для этого рассмотрим функционал

$$E(t) = \frac{1}{2} (\|u'(t)\|_H^2 + \|Au(t)\|_H^2), \quad (7)$$

заданный на решении  $u(t)$  задачи (5), (6). Дифференцируя (7) по  $t$ , получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} (\langle u''(t), u'(t) \rangle_H + \langle u'(t), u''(t) \rangle_H + \langle Au'(t), Au(t) \rangle_H + \langle Au(t), Au'(t) \rangle_H).$$

Так как  $A$  самосопряжён, имеем

$$\langle Au(t), Au'(t) \rangle_H = \langle A^2 u(t), u'(t) \rangle_H, \quad \langle Au'(t), Au(t) \rangle_H = \langle u'(t), A^2 u(t) \rangle_H.$$

Поэтому

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} (\langle u''(t) + A^2 u(t), u'(t) \rangle_H + \langle u'(t), u''(t) + A^2 u(t) \rangle_H).$$

С учётом (6) отсюда следует, что  $\frac{dE}{dt} = 0$ , то есть  $E(t) = E(0)$ ,  $t \geq 0$ . Из соотношений (5), (7) получаем

$$\|u'(t)\|_H^2 + \|Au(t)\|_H^2 = \|u^1\|_H^2 + \|Au^0\|_H^2.$$

Итак, величины  $\|u'(t)\|_H$  и  $\|Au(t)\|_H$  остаются ограниченными по  $t$ . Кроме того, из положительной определённости оператора  $A^2$  следует оценка  $\|Au\|_H \geq \alpha \|u\|_H$  для  $u \in D(A)$ . Следовательно, ограниченность  $\|Au(t)\|_H$  влечёт ограниченность  $\|u(t)\|_H$ . Таким образом, решения невозмущённой задачи (5), (6) остаются ограниченными по  $t$ . Возможный рост решений возмущённой задачи связан с действием периодического возмущения в уравнении (1).

Объясним понятия непрерывности и дифференцируемости по времени  $t$  для функций  $u(t)$  со значениями в  $D(A)$  и  $D(A^2)$ . Для этого рассмотрим данные области определения как гильбертовы пространства со следующими нормами:

$$\begin{aligned} H_1 &:= D(A), \quad \|x\|_1^2 := \|x\|_H^2 + \|Ax\|_H^2, \\ H_2 &:= D(A^2), \quad \|x\|_2^2 := \|x\|_H^2 + \|A^2 x\|_H^2. \end{aligned}$$

Очевидно, что вложения  $H_1 \hookrightarrow H$  и  $H_2 \hookrightarrow H$  непрерывны, поскольку  $\|x\|_H \leq \|x\|_1$  для  $x \in H_1$  и  $\|x\|_H \leq \|x\|_2$  для  $x \in H_2$ . Кроме того,  $H_2 \subset H_1$ , причём вложение  $H_2 \hookrightarrow H_1$  непрерывно. В силу самосопряжённости и положительности оператора  $A$ , для  $x \in D(A^2)$  имеем

$$\|Ax\|_H^2 = \langle Ax, Ax \rangle_H = \langle A^2 x, x \rangle_H \leq \|A^2 x\|_H \|x\|_H \leq \frac{1}{2} (\|A^2 x\|_H^2 + \|x\|_H^2),$$

откуда следует оценка

$$\|x\|_1 \leq C \|x\|_2, \quad x \in H_2,$$

где  $C > 0$  — некоторая константа.

Далее будет использоваться свойство плотности множества  $H_2$  в  $H_1$  по норме  $\|\cdot\|_1$ , то есть

$$H_1 = \overline{H_2}^{\|\cdot\|_1}, \quad (8)$$

где  $\overline{H_2}^{\|\cdot\|_1}$  обозначает замыкание множества  $H_2$  по норме  $\|\cdot\|_1$ .

Докажем свойство (8). Пусть  $x \in H_1$  и  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$ ,  $x_n = \langle x, \varphi_n \rangle_H$ . Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \nu_n^2) |x_n|^2 < \infty.$$

Для  $t > 0$  по определению положим

$$x_t := e^{-tA} x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\nu_n} x_n \varphi_n.$$

В силу равенства Парсеваля (см. (3)) и того, что  $M_t := \sup_{\lambda \geq 0} \lambda^2 e^{-t\lambda} < \infty$ , имеем

$$\|A^2 x_t\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^4 e^{-2t\nu_n} |x_n|^2 \leq M_t^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Следовательно,  $x_t \in H_2$ . Кроме того,

$$\|x_t - x\|_1^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \nu_n^2) |e^{-t\nu_n} - 1|^2 |x_n|^2.$$

Для каждого  $n$  множитель  $|e^{-t\nu_n} - 1|^2$  стремится к нулю при  $t \rightarrow +0$  и не превосходит 1, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \nu_n^2) |x_n|^2$  сходится. По теореме о мажорируемой сходимости для рядов получаем  $\|x_t - x\|_1 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +0$ , т. е. свойство (8) доказано.

Решением задачи (1), (5) на отрезке  $[0, T]$  будем называть функцию

$$u(t) \in C([0, T]; H_2) \cap C^1([0, T]; H_1) \cap C^2([0, T]; H), \quad (9)$$

удовлетворяющую уравнению (1) как равенству в пространстве  $H$  при всех  $t \in [0, T]$ , и начальным условиям (5). Здесь условие  $u(t) \in C^1([0, T]; H_1)$  означает дифференцируемость по  $t$  в норме  $\|\cdot\|_1$ . Поскольку отображение  $A: H_1 \rightarrow H$  непрерывно ( $\|Ax\|_H \leq \|x\|_1$ ), то из условия  $u(t) \in C^1([0, T]; H_1)$  следует, что  $Au \in C^1([0, T]; H)$ , причём для всех  $t \in [0, T]$  выполнено

$$(Au(t))' = Au'(t).$$

#### 1.4. Предположения о правой части $F(\omega t, u(t))$

Пусть отображение  $F(\theta, u)$ ,  $\theta = \omega t$ , определено на  $\mathbb{R} \times H_1$  и принимает значения в  $H$ . Предположим, что  $F(\theta, u)$  непрерывно по совокупности аргументов и является  $2\pi$ -периодическим по  $\theta$ .

Для локальной корректности задачи Коши (1), (5) будем использовать условие гладкости правой части, применяемое при приведении абстрактного уравнения Матъё — Хилла к системе первого порядка в работе [6]. Предположим, что в некоторой окрестности нуля по переменной

$u$  отображение  $u \mapsto F(\theta, u)$  имеет непрерывный дифференциал Фреше как отображение из  $H_1$  в  $H$ .

Далее будем использовать значение правой части и её дифференциала при  $u = 0$ . Положим

$$g(\theta) := F(\theta, 0) \in H, \quad B(\theta) := D_u F(\theta, 0): H_1 \rightarrow H.$$

Будем предполагать, что оператор  $B(\theta)$  допускает продолжение до ограниченного линейного оператора на все пространство  $H$ . Это продолжение также будем обозначать через  $B(\theta)$ . Тогда  $B(\theta) \in \mathcal{L}(H)$ . Отметим, что это является дополнительным условием на линейную по  $u$  часть возмущения: оно означает ограниченность  $B(\theta)$  относительно нормы пространства  $H$ , а не только относительно нормы  $H_1$ . Поскольку  $H_1$  плотно вложено в  $H$ , такое продолжение, если оно существует, единственно. Будем также предполагать, что отображение  $\theta \mapsto B(\theta)$ , понимаемое как функция со значениями в  $\mathcal{L}(H)$ , непрерывно и  $2\pi$ -периодично по  $\theta$ .

Тогда справедливо разложение

$$F(\theta, u) = g(\theta) + B(\theta)u + R(\theta, u), \quad (10)$$

где остаточный член  $R(\theta, u) \in H$  удовлетворяет следующему условию: для каждого фиксированного  $\theta$

$$\frac{\|R(\theta, u)\|_H}{\|u\|_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|u\|_1 \rightarrow 0.$$

Иными словами, разложение (10) понимается как разложение по переменной  $u$  в окрестности нуля при фиксированном значении параметра  $\theta$ .

## 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННЫХ АМПЛИТУД. РЕЗОНАНСНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Так как  $A$  является самосопряжённым положительным оператором, операторная экспонента  $e^{itA}$  определяется по спектральной теореме и образует сильно непрерывную унитарную группу в  $H$ ; используемые ниже свойства этой группы и формула сильной производной на  $D(A)$  следуют из стандартной теории однопараметрических групп, порождённых самосопряжёнными операторами (см. [17, гл. IX, разд. 1, пример 1.6, стр. 485–486]). В частности, для каждого  $t \in \mathbb{R}$  оператор  $e^{itA}$  принадлежит  $\mathcal{L}(H)$ , и справедливы равенства

$$e^{0 \cdot iA} = I, \quad (e^{itA})^* = e^{-itA}, \quad \|e^{itA}u\|_H = \|u\|_H, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in H.$$

Для произвольного  $u_0 \in H$  функция  $v(t) = e^{itA}u_0$  является корректно определённой и сильно непрерывной по  $t$  функцией со значениями в  $H$ . Если дополнительно  $u_0 \in D(A)$ , то эта функция является классическим решением задачи Коши

$$v'(t) = iAv(t), \quad v(0) = u_0.$$

Кроме того, для каждого фиксированного  $u \in D(A)$  отображение  $t \mapsto e^{\pm itA}u$  дифференцируемо и выполняется формула сильной производной

$$\frac{d}{dt}(e^{\pm itA}u) = \pm iAe^{\pm itA}u. \quad (11)$$

### 2.1. Сведение задачи (1), (5) к эквивалентной системе первого порядка

Пусть  $u(t)$  принадлежит классу (9). Тогда для всех  $t \in [0, T]$  имеем  $u(t) \in D(A^2) \subset D(A)$ ,  $u'(t) \in D(A)$ , и поэтому выражения  $Au(t)$ ,  $u'(t) + iAu(t)$ ,  $u'(t) - iAu(t)$  корректно определены как элементы пространства  $H$ . Введём функции  $x(t)$  и  $y(t)$  со значениями в  $H$  по формулам

$$x(t) := e^{-itA}(u'(t) + iAu(t)), \quad y(t) := e^{itA}(u'(t) - iAu(t)). \quad (12)$$

Умножим в (12) первое равенство на  $e^{itA}$ , а второе — на  $e^{-itA}$ . Тогда получим

$$e^{itA}x(t) = u'(t) + iAu(t), \quad e^{-itA}y(t) = u'(t) - iAu(t).$$

Складывая и вычитая эти равенства, имеем

$$u'(t) = \frac{1}{2}(e^{itA}x(t) + e^{-itA}y(t)), \quad Au(t) = \frac{1}{2i}(e^{itA}x(t) - e^{-itA}y(t)). \quad (13)$$

Так как  $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ , то из второго равенства (13) следует представление

$$u(t) = \frac{1}{2i}A^{-1}(e^{itA}x(t) - e^{-itA}y(t)). \quad (14)$$

Дифференцируя соотношения (12) и используя формулу сильной производной (11), получаем

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{-itA}(u'(t) + iAu(t))) = e^{-itA}(u''(t) + A^2u(t)), \\ y'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{itA}(u'(t) - iAu(t))) = e^{itA}(u''(t) + A^2u(t)). \end{aligned}$$

Если функция  $u(t)$  является решением задачи (1), (5), то имеем систему

$$x'(t) = \varepsilon e^{-itA}F(\omega t, u(t)), \quad y'(t) = \varepsilon e^{itA}F(\omega t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

где  $u(t)$  выражается через  $x(t)$ ,  $y(t)$  по формуле (14). Начальные значения для  $x$ ,  $y$  находятся из (12) при  $t = 0$ :

$$x(0) = u^1 + iAu^0, \quad y(0) = u^1 - iAu^0. \quad (16)$$

Таким образом, всякому решению  $u$  задачи (1), (5) соответствует решение  $x, y$  задачи Коши (15), (16).

Обратно, пусть  $x(t)$ ,  $y(t)$  удовлетворяют системе (15) с начальными данными (16), а функция  $u(t)$  определяется формулой (14). Тогда из системы (15) следует, что при дифференцировании (14) слагаемые, содержащие  $x'(t)$  и  $y'(t)$ , взаимно сокращаются, поэтому выполняется первое равенство (13). Второе равенство (13) следует непосредственно из (14). Дифференцируя первое равенство (13), используя систему (15) и второе равенство (13), получаем

$$u''(t) + A^2u(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t)).$$

Кроме того, начальные условия (5) восстанавливаются из (16). Следовательно, задача (1), (5) эквивалентна задаче Коши (15), (16).

Из условий на  $F$ , сформулированных в пункте 1.4, следует локальная липшицевость правой части системы (15) по переменным  $x$  и  $y$  на каждой ограниченной области пространства  $H \times H$ . Поэтому по теореме Коши–Липшица задача (15), (16) имеет единственное локальное решение, а формула (14) определяет соответствующее единственное локальное решение задачи (1), (5).

Подставляя разложение (10) в систему (15) и используя представление (14), получаем следующую систему для  $x(t)$ ,  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \varepsilon e^{-itA}(g(\omega t) + B(\omega t)u(t) + R(\omega t, u(t))), \\ y'(t) &= \varepsilon e^{itA}(g(\omega t) + B(\omega t)u(t) + R(\omega t, u(t))), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $u(t)$  выражается через  $x(t)$ ,  $y(t)$  по формуле (14).

## 2.2. Координатная форма системы и частотные комбинации

Для каждого фиксированного  $t \in [0, T]$  функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$  являются элементами пространства  $H$ . Поэтому из (3) имеем единственные разложения в ряды Фурье по базису  $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ :

$$x(t) = \sum_{n \geq 1} x_n(t) \varphi_n, \quad y(t) = \sum_{n \geq 1} y_n(t) \varphi_n, \quad u(t) = \sum_{n \geq 1} u_n(t) \varphi_n,$$

где

$$x_n(t) = \langle x(t), \varphi_n \rangle_H, \quad y_n(t) = \langle y(t), \varphi_n \rangle_H, \quad u_n(t) = \langle u(t), \varphi_n \rangle_H.$$

Коэффициенты  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$  будем называть амплитудными коэффициентами функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Из формул (13), (14) и равенства  $e^{\pm itA} \varphi_n = e^{\pm i\nu_n t} \varphi_n$  получаем

$$u'_n(t) = \frac{1}{2} (e^{i\nu_n t} x_n(t) + e^{-i\nu_n t} y_n(t)), \quad u_n(t) = \frac{1}{2i\nu_n} (e^{i\nu_n t} x_n(t) - e^{-i\nu_n t} y_n(t)).$$

Умножим систему (17) скалярно на  $\varphi_n$ . Получим координатную форму системы (17) для амплитудных коэффициентов:

$$x'_n(t) = \varepsilon e^{-i\nu_n t} f_n(t), \quad y'_n(t) = \varepsilon e^{i\nu_n t} f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где

$$f_n(t) = \langle g(\omega t), \varphi_n \rangle_H + \langle B(\omega t)u(t), \varphi_n \rangle_H + \langle R(\omega t, u(t)), \varphi_n \rangle_H.$$

Начальные значения для координатной системы получаются из (16):

$$x_n(0) = \langle u^1 + iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad y_n(0) = \langle u^1 - iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для построения конечномерной усреднённой системы первого приближения далее полагаем, что  $g(\theta)$  и  $B(\theta)$  являются тригонометрическими полиномами по переменной  $\theta$ . Тогда существует конечное множество  $K \subset \mathbb{Z}$  такое, что

$$g(\theta) = \sum_{k \in K} g_k e^{ik\theta}, \quad B(\theta) = \sum_{k \in K} B_k e^{ik\theta}, \quad (19)$$

где  $g_k \in H$ ,  $B_k \in \mathcal{L}(H)$ .

Рассмотрим линейный по  $u$  член в  $f_n(t)$ . Из (14) и (19) имеем

$$\langle B(\omega t)u(t), \varphi_n \rangle_H = \sum_{k \in K} e^{ik\omega t} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{2i\nu_p} (e^{i\nu_p t} x_p(t) - e^{-i\nu_p t} y_p(t)) \langle B_k \varphi_p, \varphi_n \rangle_H. \quad (20)$$

Подставляя разложение (20) в систему (18) и обозначая внешний индекс  $n$  через  $q$ , получаем четыре типа частотных комбинаций, встречающихся в показателях экспонент правых частей (18):

$$k\omega + \nu_p + \nu_q, \quad k\omega + \nu_p - \nu_q, \quad k\omega - \nu_p + \nu_q, \quad k\omega - \nu_p - \nu_q, \quad k \in K, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Именно комбинации (21) далее используются при выделении резонансных и нерезонансных слагаемых в системе (18).

### 2.3. Резонансные соотношения

Рассмотрим систему (18) при произвольном фиксированном  $q \in \mathbb{N}$ . Из разложений (19) и представления  $u_p(t)$  в (14) следует, что линейный по  $u$  член в уравнении для  $x'_q(t)$  содержит сумму слагаемых вида

$$\varepsilon \sum_{k \in K} \sum_{p \geq 1} \frac{\langle B_k \varphi_p, \varphi_q \rangle_H}{2i\nu_p} (e^{i(k\omega + \nu_p - \nu_q)t} x_p(t) - e^{i(k\omega - \nu_p - \nu_q)t} y_p(t)),$$

а в уравнении для  $y'_q(t)$  содержится сумма слагаемых вида

$$\varepsilon \sum_{k \in K} \sum_{p \geq 1} \frac{\langle B_k \varphi_p, \varphi_q \rangle_H}{2i\nu_p} (e^{i(k\omega + \nu_p + \nu_q)t} x_p(t) - e^{i(k\omega - \nu_p + \nu_q)t} y_p(t)).$$

Поэтому в правых частях координатной системы (18) возникают множители  $e^{i\Phi t}$ , где  $\Phi$  принимает одно из значений, перечисленных в (21). Свободный член  $g(\omega t)$  даёт аналогичные осциллирующие множители с частотами  $k\omega - \nu_q$  и  $k\omega + \nu_q$ ; они отвечают внешним резонансам.

Согласно схеме усреднения, описанной в п. 1.1, в усреднённой системе первого приближения сохраняются слагаемые правых частей системы (18), имеющие ненулевое среднее по времени. Так как  $g(\theta)$  и  $B(\theta)$  являются тригонометрическими полиномами, после подстановки разложений (19) возникают конечные суммы слагаемых с множителями  $e^{i\Phi t}$ , где  $\Phi$  принимает одно из значений, перечисленных в (21). По сказанному выше, среднее такого множителя отлично от нуля только при  $\Phi = 0$ . Поэтому резонансные соотношения возникают тогда, когда для некоторого набора индексов и некоторого  $k \in K \setminus \{0\}$  одна из частотных комбинаций (21) обращается в нуль; остальные слагаемые относятся к нерезонансной части.

Выделим следующие виды резонансов:

1) **внешние резонансы**, связанные со свободным членом  $g(\omega t)$ :

$$k\omega = \nu_p, \quad k \in K \setminus \{0\}, \quad p \in \mathbb{N};$$

2) **основные параметрические резонансы**, задаваемые соотношением между внешней частотой и удвоенной собственной частотой:

$$k\omega = 2\nu_p, \quad k \in K \setminus \{0\}, \quad p \in \mathbb{N};$$

3) **комбинационные параметрические резонансы**, задаваемые соотношениями между внешней частотой и суммой или разностью двух различных собственных частот:

$$k\omega = \nu_p \pm \nu_q, \quad k \in K \setminus \{0\}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad p \neq q. \quad (22)$$

Далее рассматривается комбинационный резонанс: частота  $\omega$  выбирается так, что внешние резонансы  $k\omega = \pm \nu_q$  и основные параметрические резонансы  $k\omega = 2\nu_q$ ,  $k \in K$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , не возникают. Поэтому дальнейшее исследование сосредоточено на резонансных соотношениях (22), а координатная система (18) используется для построения усреднённой системы первого приближения (см. [2], [19]).

## 3. АСИМПТОТИКА СПЕКТРА И КОНТРОЛЬ «МАЛЫХ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ»

В правых частях координатной системы (18) возникают частотные комбинации вида (21). Каждое слагаемое с такой комбинацией имеет вид произведения коэффициента, содержащего коэффициенты разложений (19), одного из амплитудных коэффициентов  $x_p(t)$  или  $y_p(t)$  и осциллирующего множителя  $e^{i\Phi t}$ , где  $\Phi$  — одна из комбинаций (21).

При  $\Phi = 0$  множитель  $e^{i\Phi t}$  равен единице, поэтому такое слагаемое входит в усреднённую систему. При  $\Phi \neq 0$  при интегрировании по времени  $t$  на отрезке  $[0, t]$  возникает выражение

$$\int_0^t e^{i\Phi s} ds = \frac{e^{i\Phi t} - 1}{i\Phi}.$$

Поэтому для оценки вклада нерезонансных слагаемых необходимо контролировать величину  $|\Phi|^{-1}$ , то есть установить отдалённость от нуля нерезонансных значений частотных комбинаций (21). Контроль таких делителей является стандартной частью обоснования усреднения в задачах параметрического резонанса (см. [20]).

Далее предполагаем, что собственные значения оператора  $A$  удовлетворяют асимптотике (4). Тогда существует  $N_0 \in \mathbb{N}$  такое, что

$$\nu_n \geq \frac{c_1}{2} n, \quad n \geq N_0.$$

Используя эту оценку, докажем конечность резонансных наборов индексов и отдалённость от нуля нерезонансных частотных комбинаций.

**Лемма 3.1.** *Для любых фиксированных  $\Omega \in \mathbb{R}$  и  $\delta > 0$  множество пар*

$$S_+(\Omega, \delta) := \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |\nu_p + \nu_q - \Omega| < \delta\}$$

*является конечным.*

**Доказательство.** Пусть  $p, q \geq N_0$ . Тогда  $\nu_p + \nu_q \geq \frac{c_1}{2}(p + q)$ . Если  $|\nu_p + \nu_q - \Omega| < \delta$ , то  $\nu_p + \nu_q < |\Omega| + \delta$ , откуда  $p + q$  ограничено сверху константой  $\frac{2(|\Omega| + \delta)}{c_1}$ . Значит, возможных пар  $(p, q)$  конечное число. Случаи, когда хотя бы один индекс не превышает  $N_0$ , также, очевидно, дают лишь конечное число пар.  $\square$

Из леммы 3.1 следует, что для каждого фиксированного  $k$  множество пар  $(p, q)$ , удовлетворяющих соотношению  $k\omega = \nu_p + \nu_q$ , конечно. Следовательно, существует  $\delta_k^+ > 0$  такое, что для всех нерезонансных пар вне некоторого конечного множества выполнено

$$|k\omega - \nu_p - \nu_q| \geq \delta_k^+.$$

Для разностных комбинаций положим  $\Omega = k\omega$  и рассмотрим выражения  $\Omega - (\nu_p - \nu_q)$ . Запишем асимптотику (4) в виде

$$\nu_n = c_1 n + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда вдоль диагоналей  $p - q = t$  разности  $\nu_p - \nu_q$  имеют предельные значения  $c_1 t$ . Поэтому введём множество

$$Z_{c_1} := \{c_1 t : t \in \mathbb{Z}\}.$$

**Лемма 3.2.** *Пусть  $\Omega \in \mathbb{R} \setminus Z_{c_1}$ . Тогда существуют число  $\delta_-(\Omega) > 0$  и конечное множество пар индексов  $M_-(\Omega) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  такие, что для всех  $(p, q) \notin M_-(\Omega)$  выполнена оценка*

$$|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq \delta_-(\Omega).$$

**Доказательство.** Покажем, что для некоторых  $N(\Omega) \in \mathbb{N}$  и  $\delta(\Omega) > 0$  выполнено

$$|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq \delta(\Omega), \quad p, q \geq N(\Omega).$$

Положим  $m = p - q$ . Из  $\nu_n = c_1 n + \varepsilon_n$  имеем

$$\nu_p - \nu_q = c_1 m + \varepsilon_p - \varepsilon_q.$$

Так как  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , существует  $C > 0$ , для которого  $|\varepsilon_n| \leq C$ . Поэтому

$$|\nu_p - \nu_q| \geq c_1 |m| - |\varepsilon_p - \varepsilon_q| \geq c_1 |m| - 2C.$$

Выберем  $M \in \mathbb{N}$  так, что  $c_1 |m| - 2C > |\Omega| + 1$  при  $|m| > M$ . Тогда при  $|p - q| > M$

$$|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq |\nu_p - \nu_q| - |\Omega| > 1.$$

Значит, остаётся рассмотреть пары с  $|p - q| \leq M$ . Зафиксируем  $m \in \{-M, \dots, M\}$ . Если  $p - q = m$ , то  $\nu_p - \nu_q = c_1 m + \varepsilon_p - \varepsilon_q$ , и при  $p, q \rightarrow \infty$  вдоль этой диагонали имеем  $\nu_p - \nu_q \rightarrow c_1 m$ . Поскольку  $\Omega \notin Z_{c_1}$ , для всех  $|m| \leq M$  выполнено  $\Omega \neq c_1 m$ , поэтому

$$d := \min_{|m| \leq M} |\Omega - c_1 m| > 0.$$

Для каждого такого  $m$  существует  $N_m \in \mathbb{N}$  такое, что при  $p - q = m$  и  $p, q \geq N_m$  выполнено  $|\nu_p - \nu_q - c_1 m| < d/2$ . Тогда

$$|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq |\Omega - c_1 m| - |\nu_p - \nu_q - c_1 m| \geq d/2.$$

Положим

$$N(\Omega) := \max_{|m| \leq M} N_m, \quad \delta(\Omega) := \min\{1, d/2\}.$$

Тогда  $|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq \delta(\Omega)$  для всех  $p, q \geq N(\Omega)$ . Остаётся вынести в исключительное множество конечное число пар с малым индексом:

$$M_-(\Omega) := \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |p - q| \leq M, \min\{p, q\} < N(\Omega)\}, \quad \delta_-(\Omega) := \delta(\Omega).$$

Множество  $M_-(\Omega)$  конечно, и для всех  $(p, q) \notin M_-(\Omega)$  получаем требуемую оценку. Лемма доказана.  $\square$

**Замечание 3.1.** Условие  $\Omega \notin Z_{c_1}$  существенно: если  $\Omega = c_1 m$  для некоторого  $m \in \mathbb{Z}$ , то при  $q \rightarrow \infty$ ,  $p = q + m$ , вдоль диагонали  $p - q = m$  имеем  $\nu_p - \nu_q \rightarrow \Omega$ , поэтому разностные знаменатели могут сколь угодно близко приближаться к нулю.

Из лемм 3.1 и 3.2 следует необходимый для первого приближения контроль малых знаменателей. Будем предполагать, что внешняя частота  $\omega$  удовлетворяет условию

$$k\omega \notin Z_{c_1}, \quad k \in K \setminus \{0\}. \quad (23)$$

**Следствие 3.1.** Пусть выполнено условие (23). Тогда резонансных троек  $(k, p, q) \in (K \setminus \{0\}) \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , для которых одна из частотных комбинаций (21) равна нулю, может быть только конечное число. Кроме того, существует  $\delta^* > 0$  такое, что все нерезонансные значения этих комбинаций отделены от нуля величиной не меньше  $\delta^*$ .

**Доказательство.** Для каждого фиксированного  $k \in K \setminus \{0\}$  лемма 3.1 даёт требуемую оценку для суммарных комбинаций. Для разностных комбинаций применяем лемму 3.2 с  $\Omega = k\omega$ ; условие  $\Omega \notin Z_{c_1}$  при этом выполнено в силу (23). Оставшиеся пары индексов образуют конечное множество. В нём нулевые значения соответствуют резонансным тройкам, а среди ненулевых значений можно выбрать наименьшее по модулю. Поскольку множество  $K \setminus \{0\}$  конечно, минимум всех полученных положительных оценок также положителен. Обозначим его через  $\delta^*$ . Следствие 3.1 доказано.  $\square$

По следствию 3.1 ненулевые комбинации из (21) при  $k \in K \setminus \{0\}$  отделены от нуля. Поэтому в резонансную часть первого приближения входят только слагаемые с нулевой частотной комбинацией.

#### 4. УСРЕДНЁННАЯ РЕЗОНАНСНАЯ СИСТЕМА ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ КОМБИНАЦИОННОМ РЕЗОНАНСЕ

Пусть внешняя частота  $\omega > 0$  удовлетворяет условию (23). Далее учитываются суммарные и разностные комбинационные резонансы; возможные внешние и основные параметрические резонансы в эту систему не включаются. Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_+ &= \{(k, p, q) \mid k \in K \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{N}, p \neq q, k\omega = \nu_p + \nu_q\}, \\ \mathcal{R}_- &= \{(k, p, q) \mid k \in K \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{N}, p \neq q, k\omega = \nu_p - \nu_q\}.\end{aligned}\tag{24}$$

По следствию 3.1 множества  $\mathcal{R}_+$  и  $\mathcal{R}_-$  конечны. Обозначим

$$I_R = \{n \in \mathbb{N} \mid n = p \text{ или } n = q \text{ для некоторой тройки } (k, p, q) \in \mathcal{R}_+ \cup \mathcal{R}_-\}.$$

Усреднённая система строится для амплитудных коэффициентов  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$ ,  $n \in I_R$ , с начальными данными

$$x_n(0) = \langle u^1 + iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad y_n(0) = \langle u^1 - iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad n \in I_R.$$

Для тройки  $(k, p, q) \in \mathcal{R}_+$  вклад в уравнения для  $x_p, y_p, x_q, y_q$  имеет вид

$$\begin{aligned}x'_p(t) &= -\varepsilon \frac{1}{2i\nu_q} \langle B_k \varphi_q, \varphi_p \rangle_H y_q(t), \\ x'_q(t) &= -\varepsilon \frac{1}{2i\nu_p} \langle B_k \varphi_p, \varphi_q \rangle_H y_p(t), \\ y'_p(t) &= \varepsilon \frac{1}{2i\nu_q} \langle B_{-k} \varphi_q, \varphi_p \rangle_H x_q(t), \\ y'_q(t) &= \varepsilon \frac{1}{2i\nu_p} \langle B_{-k} \varphi_p, \varphi_q \rangle_H x_p(t).\end{aligned}\tag{25}$$

Если один и тот же индекс  $n$  встречается в нескольких тройках из  $\mathcal{R}_+$ , то в уравнениях для  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$  суммируются слагаемые, полученные по формуле (25) для этих троек.

Для тройки  $(k, p, q) \in \mathcal{R}_-$  получаем систему

$$\begin{aligned}x'_p(t) &= \varepsilon \frac{1}{2i\nu_q} \langle B_k \varphi_q, \varphi_p \rangle_H x_q(t), \\ x'_q(t) &= \varepsilon \frac{1}{2i\nu_p} \langle B_{-k} \varphi_p, \varphi_q \rangle_H x_p(t), \\ y'_p(t) &= -\varepsilon \frac{1}{2i\nu_q} \langle B_{-k} \varphi_q, \varphi_p \rangle_H y_q(t), \\ y'_q(t) &= -\varepsilon \frac{1}{2i\nu_p} \langle B_k \varphi_p, \varphi_q \rangle_H y_p(t).\end{aligned}\tag{26}$$

Полная усреднённая резонансная система первого приближения получается суммированием вкладов вида (25) по всем тройкам из  $\mathcal{R}_+$  и вкладов вида (26) по всем тройкам из  $\mathcal{R}_-$ . Так как множества  $\mathcal{R}_+$  и  $\mathcal{R}_-$  конечны, система конечномерна: для каждого  $n \in I_R$  она содержит уравнения для двух амплитудных коэффициентов  $x_n(t)$  и  $y_n(t)$ .

Первое приближение резонансной части решения имеет вид

$$u^{(1)}(t) = \sum_{n \in I_R} u_n^{(1)}(t) \varphi_n, \quad (27)$$

где

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{1}{2i\nu_n} (e^{i\nu_n t} x_n(t) - e^{-i\nu_n t} y_n(t)), \quad n \in I_R. \quad (28)$$

Если  $I_R = \{p, q\}$ , то

$$u^{(1)}(t) = u_p^{(1)}(t) \varphi_p + u_q^{(1)}(t) \varphi_q.$$

В общем случае сумма в (27) берётся по всем  $n \in I_R$ . Остаётся обосновать связь построенного первого приближения с решениями исходной задачи.

## 5. ОБОСНОВАНИЕ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть  $u(t)$  — точное решение задачи (1), (5) на промежутке  $0 \leq t \leq T/\varepsilon$ , а  $u^{(1)}(t)$  задано формулами (27), (28). Амплитуды  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$ ,  $n \in I_R$ , определяются конечной усреднённой системой, полученной суммированием слагаемых (25), (26) по тройкам из  $\mathcal{R}_+$ ,  $\mathcal{R}_-$ .

Предположим, что начальные данные задачи (1), (5) имеют вид

$$u^0 = \sum_{n \in I_R} u_n^0 \varphi_n, \quad u^1 = \sum_{n \in I_R} u_n^1 \varphi_n.$$

Начальные значения амплитуд задаём по формулам (16):

$$x_n(0) = \langle u^1 + iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad y_n(0) = \langle u^1 - iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad n \in I_R.$$

Тогда из (27), (28) следует

$$u^{(1)}(0) = u(0), \quad (u^{(1)})'(0) = u'(0). \quad (29)$$

Разность  $u(t) - u^{(1)}(t)$  будем называть погрешностью первого усреднённого приближения. При вычитании системы, построенной по формулам (25), (26), из полной координатной системы (18) слагаемые, заданные резонансными условиями (22) и множествами (24), сокращаются. В уравнении для погрешности остаются нерезонансные слагаемые с ненулевыми частотными комбинациями (21) и остаточные нелинейные члены, возникающие из  $R(\omega t, u(t))$  и  $R(\omega t, u^{(1)}(t))$ . Нерезонансные частотные комбинации отделены от нуля по следствию 3.1. Для остаточных членов предполагаем, что существуют  $\varepsilon_0 > 0$  и  $C_R > 0$  такие, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $0 \leq t \leq T/\varepsilon$  выполнена оценка

$$\|R(\omega t, u(t))\|_H + \|R(\omega t, u^{(1)}(t))\|_H \leq C_R \varepsilon. \quad (30)$$

**Замечание 5.1.** Оценка (30) не исключает нелинейные правые части в уравнении (1). Она накладывается только на остаток  $R$ , не включённый в первое приближение, и проверяется вдоль сравниваемых траекторий  $u(t)$ ,  $u^{(1)}(t)$ . Например, если при  $H = L^2(a, b)$  остаток имеет вид  $R(\theta, u)(x) = a(\theta, x)u^2(x)$ , где  $a$  ограничена, то  $\|R(\theta, u)\|_H \leq C\|u\|_{H_1}^2$ . Поэтому условие (30) выполняется, когда соответствующий остаточный член на рассматриваемом промежутке имеет порядок  $O(\varepsilon)$ .

Докажем оценку погрешности первого приближения.

**Теорема 5.1.** Пусть оператор  $A$  удовлетворяет условиям пункта 1.2, его собственные значения  $\nu_n$  удовлетворяют асимптотике (4), а правая часть  $F$  имеет вид (10). Пусть частота  $\omega > 0$  удовлетворяет условию (23), выполнены резонансные соотношения (22), и первое приближение  $u^{(1)}(t)$  построено по формулам (27), (28) с начальными данными, согласованными с точным решением в смысле (29). Если точное решение  $u(t)$  задачи (1), (5) и приближение  $u^{(1)}(t)$  определены на промежутке  $0 \leq t \leq T/\varepsilon$ , а для остаточных членов выполнена оценка (30), то существует константа  $C > 0$ , не зависящая от  $\varepsilon$ , такая, что

$$\|u(t) - u^{(1)}(t)\|_H \leq C\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}. \quad (31)$$

**Доказательство.** Рассмотрим погрешность первого приближения  $u(t) - u^{(1)}(t)$ . В силу (29) она имеет нулевые начальные данные. Чтобы получить дифференциальную систему для этой погрешности, вычтем систему, построенную по формулам (25), (26), из полной координатной системы (18). В правой части полученной системы резонансные слагаемые, заданные условиями (22) и множествами (24), сокращаются. Нерезонансные слагаемые содержат ненулевые частотные комбинации (21), которые по следствию 3.1 отделены от нуля; поэтому возникающие при интегрировании осциллирующие множители равномерно ограничены на  $0 \leq t \leq T/\varepsilon$ .

Остаточные нелинейные члены оцениваются с помощью неравенства (30). Так как в системе для амплитуд правая часть умножается на  $\varepsilon$ , их вклад в уравнение для погрешности приближения имеет порядок  $O(\varepsilon^2)$ . Поэтому после перехода к интегральной форме задачи Коши (см. [9]) получаем

$$\|u(t) - u^{(1)}(t)\|_H \leq C_1\varepsilon^2 t + C_2\varepsilon \int_0^t \|u(s) - u^{(1)}(s)\|_H ds, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}, \quad (32)$$

где константы  $C_1, C_2$  не зависят от  $\varepsilon$ .

Применяя к (32) неравенство Гронуолла, получаем

$$\|u(t) - u^{(1)}(t)\|_H \leq C\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon},$$

где, например,  $C = C_1 T e^{C_2 T}$ . Тем самым доказана оценка (31).  $\square$

Оценка (31) показывает, что построенное первое приближение (27), (28) описывает решение задачи (1), (5) с погрешностью порядка  $O(\varepsilon)$  на промежутке  $0 \leq t \leq T/\varepsilon$  при начальных данных из конечномерного резонансного подпространства.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован комбинационный параметрический резонанс для нелинейного уравнения Матьё — Хилла в гильбертовом пространстве  $H$  при периодическом возмущении с частотой  $\omega > 0$ . Резонансные условия имеют вид  $k\omega = \nu_p \pm \nu_q$ ,  $p \neq q$ ,  $k \in K \setminus \{0\}$ , и описывают взаимодействие различных собственных частот невозмущённой задачи. Для периодического возмущения доказана отделённость нерезонансных комбинаций от нуля. В почти-периодическом случае возникает более общий набор временных частот, поэтому контроль малых знаменателей требует отдельного условия отделённости от нуля; этот случай является естественным продолжением настоящей работы.

Полученные результаты дополняют статью [6], где основное внимание уделялось основным параметрическим резонансам. Здесь тот же подход применяется к комбинационному параметрическому резонансу, что позволяет описывать эффекты, связанные с суммами и разностями этих частот.

Автор выражает благодарность В. С. Белоносову за постановку задачи и внимание к работе, а также рецензенту за ценные замечания, позволившие улучшить изложение статьи.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках подготовки кандидатской диссертации в аспирантуре Новосибирского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным исследованием не было.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients. V. 1, 2. N. Y.: Wiley, 1975.
2. Magnus W., Winkler S. Hill's Equation. N. Y.: Interscience Publ., 1966.
3. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985.
4. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. N. Y.: Wiley, 1979.
5. Maddi J., Coste C., Saint Jean M. Parametric resonance in a conservative system of coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. E. 2022. V. 105, N 5. Article number 054208; DOI: 10.1103/PhysRevE.105.054208
6. Белоносов В.С. Асимптотический анализ параметрической неустойчивости нелинейных гиперболических уравнений // Мат. сб. 2017. Т. 208, № 8. С. 4–30; DOI: 10.4213/sm8883
7. Verhulst F., Tuwankotta J.M. A Parametrically excited nonlinear wave equation // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Advanced Structured Materials. 2020. V. 139. P. 155–169; DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8\_11
8. Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. N. Y.: Gordon and Breach, 1962.
9. Sanders J.A., Verhulst F., Murdock J. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. 2nd ed. N. Y.: Springer, 2007.
10. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику: приближённые и асимптотические методы нелинейной механики. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
11. Люлько Н.А. Неустойчивость нелинейной системы двух осцилляторов при основном и комбинационном резонансах // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2015. Т. 55, № 1. С. 56–73; DOI: 10.7868/S0044466915010160
12. Belonosov V.S. Nonlocal problems of asymptotic methods of perturbation theory // In: Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy. Cham: Springer, 2020. P. 7–12; DOI: 10.1007/978-3-030-38870-6\_2
13. Belonosov V.S. Nonlocal approach to asymptotic methods of perturbation theory // International Conference PDEs and Mathematical Hydrodynamics: in Honor of V. A. Solonnikov's 85th Birthday. Abstracts. St. Petersburg, 2018. P. 5–6.
14. El-Dib Y.O., Alrowaily A.W., Tiofack C.G.L., El-Tantawy S.A. Resonance simulation of the coupled nonlinear Mathieu's equation // AIP Advances. 2023. V. 13, N 8. Article number 085032; DOI: 10.1063/5.0166730
15. Raj S.K., Sahoo B., Nayak A.R., Panda L. Multi-scale analysis for dynamic stability of an axially accelerating viscoelastic beam subjected to combination parametric resonance // J. Vib. Control. 2025. V. 31, N 13–14. P. 2716–2733; DOI: 10.1177/10775463241260987

16. *Li Z., Li Y., Yu H., Hu Y.* Nonlinear combination resonance analysis of parametric-forced excitation for an axially moving piezoelectric rectangular thin plate in thermal-electromechanical coupling field // *Thin-Walled Structures*. 2024. V. 200. Article number 111941; DOI: 10.1016/j.tws.2024.111941
17. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verl., 1980.
18. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
19. *Фомин В.Н.* Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределённых системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
20. *Белоносов В.С.* Спектральные свойства обобщённых функций и асимптотические методы теории возмущений // *Мат. сб.* 2012. Т. 203, № 3. С. 3–22; DOI: 10.4213/sm7812

UDC 517.938:517.984

# COMBINATIONAL PARAMETRIC RESONANCE FOR A NONLINEAR MATHIEU–HILL EQUATION IN A HILBERT SPACE

© 2026 A. G. Shvets

*Novosibirsk State University,  
Pirogov st., 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: a.shvets1@g.nsu.ru

Received 27.04.2026, revised 11.06.2026, accepted 15.07.2026

**Abstract.** Using the Krylov–Bogolyubov–Mitropolsky averaging method, this paper studies combinational parametric resonance in a Hilbert space  $H$  for a nonlinear Mathieu–Hill equation of the form  $u''(t) + A^2 u(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t))$ , where  $A^2$  is a self-adjoint positive operator in  $H$  with compact resolvent. The right-hand side  $\varepsilon F(\omega t, u(t))$  is assumed to be a time-periodic perturbation with frequency  $\omega > 0$ , and  $\varepsilon > 0$  is a small scalar parameter. It is shown that, in the first approximation, alongside principal parametric resonances, combinational resonances arise, determined by the resonant relations  $k\omega = \nu_p \pm \nu_q$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $p \neq q$ , where  $\nu_n$  are the eigenvalues of the operator  $A = (A^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . In the case of combinational resonance, conditions are established for finiteness of the resonant index sets  $(p, q)$  for a fixed frequency  $\omega$ , which ensures separation of the nonresonant frequency combinations from zero. An averaged finite-dimensional resonant system of the first approximation is also constructed, and it is proved that solutions of the original equation are approximated by solutions of the constructed averaged system with an  $O(\varepsilon)$  error estimate in the norm of  $H$  on an interval of length  $T/\varepsilon$ .

**Keywords:** Mathieu–Hill equation, Sturm–Liouville operator, combinational parametric resonance, averaging method, averaged resonant system of the first approximation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.208

## REFERENCES

1. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients. Vols. 1 and 2. N. Y.: Wiley, 1975.
2. Magnus W., Winkler S. Hill's Equation. N. Y.: Interscience Publ., 1966.
3. Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1997.
4. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. N. Y.: Wiley, 1979.
5. Maddi J., Coste C., Saint Jean M. Parametric resonance in a conservative system of coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. E*, 2022, Vol. 105, No. 5, Article number 054208; DOI: 10.1103/PhysRevE.105.054208
6. Belonosov V.S. Asymptotic analysis of the parametric instability of nonlinear hyperbolic equations. *Sbornik: Mathematics*, 2017, Vol. 208, No. 8, pp. 1088–1112; DOI: 10.1070/SM8883
7. Verhulst F., Tuwankotta J.M. A parametrically excited nonlinear wave equation. *Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Advanced Structured Materials*, 2020, Vol. 139, pp. 155–169; DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8\_11
8. Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. N. Y.: Gordon and Breach, 1962.

9. Sanders J.A., Verhulst F., Murdock J. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. 2nd ed. N. Y.: Springer, 2007.
10. Krylov N.M., Bogolyubov N.N. *Vvedenie v nelineinuyu mekhaniku: priblizhennyye i asimptoticheskiye metody nelineinoy mekhaniki* [Introduction to nonlinear mechanics: approximate and asymptotic methods of nonlinear mechanics]. Kiev: AS Ukrainian SSR Publ. House, 1937 (in Russian).
11. Lyul'ko N.A. Instability of a nonlinear system of two oscillators under main and combination resonances. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2015, Vol. 55, No. 1, pp. 53–70; DOI: 10.1134/S0965542515010169
12. Belonosov V.S. Nonlocal problems of asymptotic methods of perturbation theory. In: *Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy*. Cham: Springer, 2020, pp. 7–12; DOI: 10.1007/978-3-030-38870-6\_2
13. Belonosov V.S. Nonlocal approach to asymptotic methods of perturbation theory. *International Conference PDEs and Mathematical Hydrodynamics: in Honor of V. A. Solonnikov's 85th Birthday*. Abstracts. St. Petersburg, 2018, pp. 5–6.
14. El-Dib Y.O., Alrowaily A.W., Tiofack C.G.L., El-Tantawy S.A. Resonance simulation of the coupled nonlinear Mathieu's equation. *AIP Advances*, 2023, Vol. 13, No. 8, Article number 085032; DOI: 10.1063/5.0166730
15. Raj S.K., Sahoo B., Nayak A.R., Panda L. Multi-scale analysis for dynamic stability of an axially accelerating viscoelastic beam subjected to combination parametric resonance. *J. Vib. Control*, 2025, Vol. 31, No. 13–14, pp. 2716–2733; DOI: 10.1177/10775463241260987
16. Li Z., Li Y., Yu H., Hu Y. Nonlinear combination resonance analysis of parametric-forced excitation for an axially moving piezoelectric rectangular thin plate in thermal-electromechanical coupling field. *Thin-Walled Structures*, 2024, Vol. 200, Article number 111941; DOI: 10.1016/j.tws.2024.111941
17. Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verl., 1980.
18. Levitan B.M., Sargsyan I.S. *Operatory Shturma–Liuvillya i Diraka* [Sturm–Liouville and Dirac Operators]. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
19. Fomin V.N. *Matematicheskaya teoriya parametricheskogo rezonansa v lineinykh raspredelennykh sistemakh* [Mathematical theory of parametric resonance in linear distributed systems]. Leningrad: Leningrad State University Press, 1972 (in Russian).
20. Belonosov V.S. The spectral properties of distributions and asymptotic methods in perturbation theory. *Sbornik: Mathematics*, 2012, Vol. 203, No. 3, pp. 307–325; DOI: 10.1070/SM2012v203n03ABEH004224