УДК 519.61

УСКОРЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОРТРЕТОВ МАТРИЦ

© 2026 Н.Абдаллах[1a], Э. А. Бибердорф[2b]

[1] *Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]nouarabdallah111@mail.ru, [b]elina@biberdorf.ru

Поступила в редакцию 29.12.2025 г.; после доработки 21.09.2026 г.; принята к публикации 03.10.2026 г.

Представлен алгоритм, позволяющий ускорить процесс построения одномерных спектральных портретов матриц как графиков норм решения обобщённого дискретного уравнения Ляпунова в зависимости от параметра. Идея нового подхода заключается в частичной замене метода дихотомии спектра относительно окружности на вычисление решений двух классических дискретных уравнений Ляпунова. Эксперименты показали, что применение нового метода позволяет получить значительное ускорение.

Ключевые слова: спектральные портреты, резольвента, матричный спектр, дихотомия спектра, уравнение Ляпунова.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.301

ВВЕДЕНИЕ

Исследование спектров различных операторов требуется при решении многих прикладных задач, например, при анализе устойчивости, сходимости численных методов и т. д. Для этих целей широко используется современное программное обеспечение, включающее в себя реализацию вариаций известных эффективных QR и QZ алгоритмов. Однако, в случае несимметрических задач проблема чувствительности спектра к возмущениям матриц и к вычислительным погрешностям остаётся актуальной. Для демонстрации этого эффекта в работах Годунова С.К. и его соавторов приводится яркий пример с матрицей размера 7×7 (см., например, [1], [2]). А мы возьмём за основу пример матрицы с кратным значением в нуле, приведённый в работе [3], и видоизменим его таким образом, чтобы получить несколько матриц A_j с одинаковым спектром, лежащим в левой полуплоскости и не содержащим кратных собственных значений. Пусть $D_0, \ldots, D_3$ — верхние двухдиагональные матрицы размера 10×10 с одинаковой главной диагональю:

$$[-1, -1.1, -1.2, \ldots, -1.9].$$

Вторые диагонали выберем следующими: $[2, 2, \ldots, 2]$ для D_0, $[10, 10, \ldots, 10]$ для D_1, $[50, 50, \ldots, 50]$ для D_2, $[3^8, 3^6, 3^3, 3^2, 3^2, 3, 3, 3^{-1}, 3^{-1}]$ для D_3. L_1, L_2 — нижние двухдиагональные матрицы, на главной диагонали у которых стоят единицы, а на второй диагонали: -1 у матрицы L_1 и -2 у L_2. Рассмотрим матрицы A_j, связанные с матрицами $D_0, \ldots, D_3$ подобным преобразованием

$$\begin{aligned} &A_0 = L_1 D_0 L_1^{-1}, \quad A_1 = L_1 D_1 L_1^{-1}, \quad A_2 = L_1 D_2 L_1^{-1}, \\ &A_3 = L_2 D_1 L_2^{-1}, \quad A_4 = L_2 D_2 L_2^{-1}, \quad A_5 = L_1 D_3 L_1^{-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Вычислим спектр матриц A_j с помощью процедуры eig в Matlab. Результаты изображены на рис. 1. Звёздочками и кружками отмечены значения, вычисленные на разных компьютерах. Как видно, на точность вычислений влияет как несимметричность исходных матриц D_k, так и число обусловленности матриц L_k. При этом вычисленные собственные значения могут создавать различные конфигурации: как симметричные так и несимметричные относительно среднего арифметического точных собственных значений.

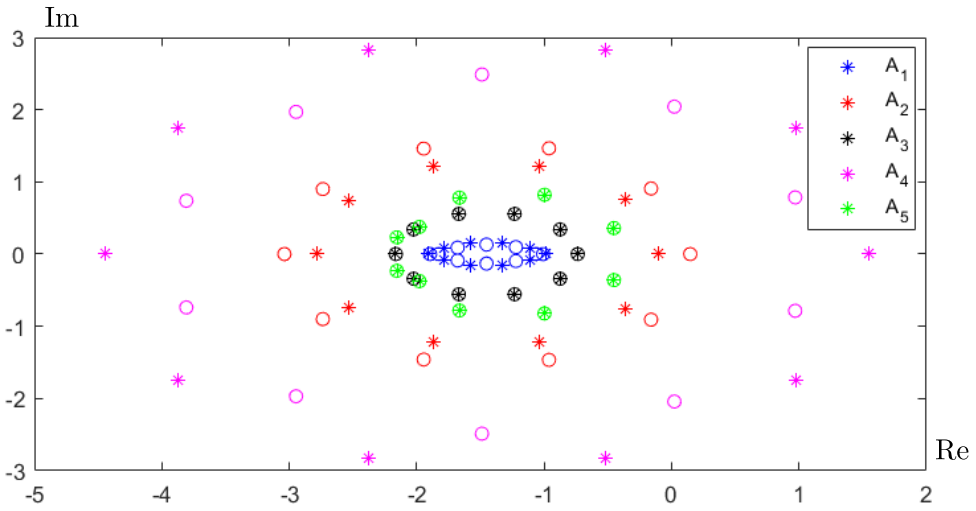


Рис. 1. Вычисленные собственные значения матриц A_j

Очевидно, что такой уровень погрешности может быть неприемлем во многих прикладных задачах. При этом программа никак не характеризует точность результата, а у пользователя, не являющегося квалифицированным специалистом в вычислительных методах линейной алгебры, нет инструмента для его проверки.

В то же время простым и наглядным способом визуализации чувствительности собственных значений являются спектральные портреты [1], [2], [4], [5]. Обычный спектральный портрет представляет собой поверхность над комплексной плоскостью параметра λ, задаваемую функцией $\|(A-\lambda I)^{-1}\|$ или $\sigma_{\min}(A-\lambda I)$. Здесь использованы следующие обозначения A — заданная матрица, I — единичная матрица того же размера, $\sigma_{\min}$ — минимальное сингулярное число, $\|\cdot\|$ – спектральная норма.

Для определения одномерных спектральных портретов используется следующий подход.

Если $\gamma(a)$ — параметризованное семейство кривых, тогда одномерный спектральный портрет — это график функции $\|H_A(a)\|$:

$$H_A(a) = \frac{1}{l_{\gamma(a)}} \int\limits_{\gamma(a)} (A^* - \overline{\lambda} I)^{-1} C_0 (A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda. \tag{2}$$

Здесь параметр $l_{\gamma(a)}$ равен длине кривой $\gamma(a)$, если кривая замкнута, и фиксированной ненулевой константе, если длина $\gamma(a)$ бесконечна, например в случаях, если $\{\gamma(a)\}$ представляет собой семейство прямых, парабол или гипербол. Отметим, что в случае окружностей и прямых матрица $H_A(a)$ является решением одного из двух обобщённых уравнений Ляпунова (см., например, [1], [2]). В случае параболы в работе [6] сконструирован аналог обобщённого уравнения Ляпунова. Вероятно, подобные матричные уравнения, для которых $H_A(a)$ является решением, можно построить и для других кривых. Более подробно свойства спектральных портретов обсудим в следующем разделе.

Заметим, что $\|H_A(a)\| = \infty$ если $\lambda_j(A)$ лежит на $\gamma(a)$, то есть матрица $H_A(a)$ и её норма $\|H_A(a)\|$ являются матричным и численным критериями разделения на две части (дихото-

мии) спектра матрицы A относительно кривой $\gamma(a)$ (см., например, [1], [2], [5]–[14]). Отметим, что постановка задачи дихотомии и методы её решения являются естественным и ближайшим обобщением задачи о линейной устойчивости по Ляпунову. Для вычисления матричных критериев дихотомии на данный момент создана целая группа итерационных алгоритмов. Основным можно назвать алгоритм дихотомии спектра относительно окружности [7]–[10], и именно о нём пойдёт речь в последующих разделах. Дихотомия спектра относительно других кривых сводится к задаче дихотомии окружностью. По этому принципу, например, построены алгоритмы разделения спектра относительно кривых второго порядка [11, 12]. Для приложений, связанных с задачами устойчивости, наибольшее значение имеет задача дихотомии спектра относительно прямой. Первые алгоритмы из этой группы (см. [1, 2], [9, 10], [13]) основывались на экспоненциальном преобразовании для отображения мнимой оси в единичную окружность, что является с одной стороны довольно естественным приёмом, но с другой — накладывало жёсткие ограничения на матрицу. Использование для тех же целей дробно-линейного преобразования позволило расширить область применения метода дихотомии. На основе дробно-линейных преобразований спектральной переменной построены также алгоритмы, определяющие отсутствие спектра матрицы на отрезке и луче, создан алгоритм дихотомии корней полинома относительно мнимой оси, последовательное выполнение нескольких алгоритмов дихотомии позволяет разделять спектр относительно кусочно-гладких кривых, состоящих из отрезков и дуг [14].

Вычислительная устойчивость этих алгоритмов обусловлена тем, что основой каждой итерации является QR-разложение определённой матрицы, реализация которого, однако, связана с относительно высокими вычислительными затратами. Самым быстрым из алгоритмов дихотомии окружностью считается алгоритм Малышева А. Н., представленный в работах [9, 10], который мы более подробно рассмотрим в разд. 2.

Следует отдельно заметить, что отличительной чертой методов дихотомии является одновременное разделение спектра на две части (вычисление проекторов на инвариантные подпространства, приведение матрицы к клеточно-диагональной форме) и диагностика качества этого разделения с помощью критерия дихотомии. Таким образом, любой пользователь, получив результат вычислений, понимает, в какой степени данному результату можно доверять.

Структура работы следующая. Раздел 1 посвящён обсуждению свойств псевдоспектров и спектральных портретов. В разд. 2 рассматриваются алгоритм Малышева и его модификация, содержащая определённые усовершенствования, направленные на повышение эффективности. Проводится их сравнение с другими методами. В разд. 3 предлагается комбинированный итерационный метод для нахождения решения обобщённого дискретного уравнения Ляпунова, зависящего от параметра r. Работа нового алгоритма тестируется в численных экспериментах и сравнивается с алгоритмом Малышева по точности и скорости. Каждый пример снабжён нами ссылкой на программный код, с помощью которого проведены расчёты. Это даёт возможность читателю повторить представленные вычислительные эксперименты, провести эксперимент с другими параметрами или использовать программные реализации алгоритмов в своей работе.

1. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОРТРЕТЫ

Двумерные спектральные портреты можно изобразить либо в виде поверхности $\|(A-\lambda I)^{-1}\|$ над комплексной плоскостью, либо в виде контуров

$$\sigma_{\min}(A-\lambda I)=\varepsilon \tag{3}$$

для фиксированных $\varepsilon>0$. Области внутри контуров называются ε-спектром или псевдоспектром и являются обобщением понятия спектра. Каждая точка принадлежащая ε-спектру является собственным значением некоторой возмущённой матрицы $\tilde{A}$ такой, что $\|\tilde{A}-A\|\leqslant\varepsilon$.

Для удобства анализа предпочтительно изображать графики логарифма: $\log_{10}\|(A-\lambda I)^{-1}\|$. На рис. 2 приведены спектральные портреты матриц A_1, A_2 (см. (1)). Видно, что пятна псевдоспектра матрицы A_2 значительно больше, чем у A_1, что объясняет разницу в погрешности собственных значений при вычислениях.

Текст программы, использованной для вычисления графиков на рис. 2, находится по ссылке https://github.com/nouar1-23/Two-dimensional-spectral-portraits

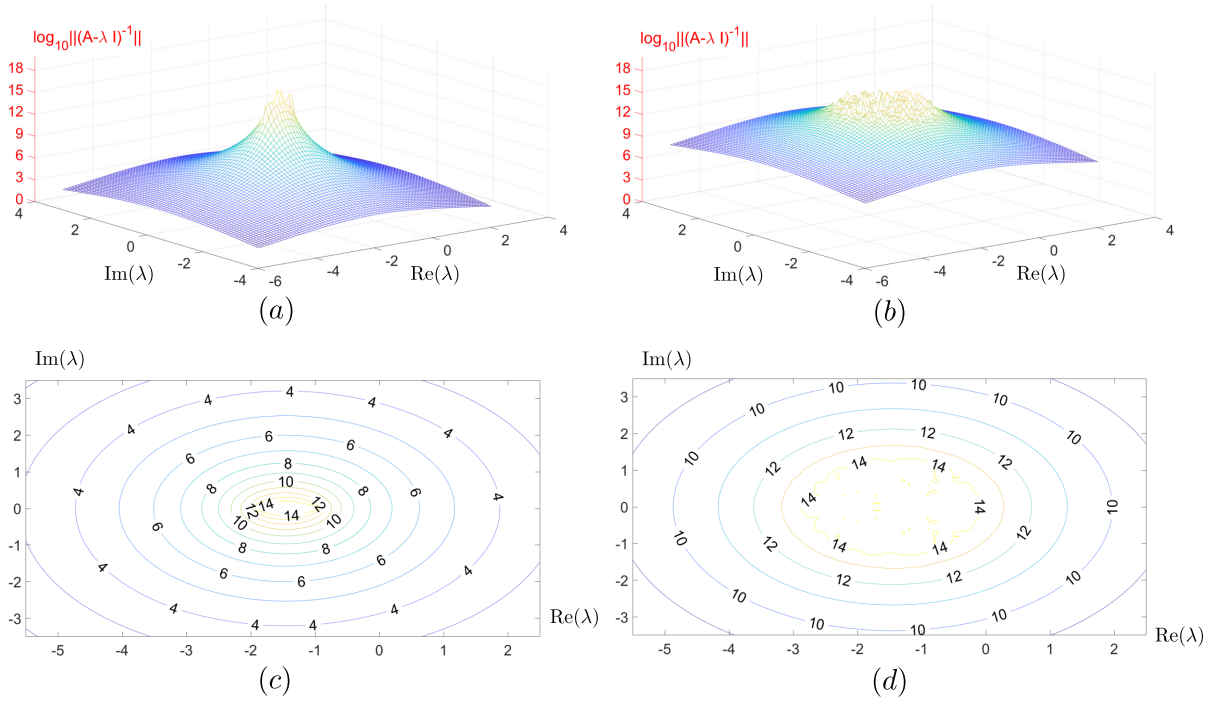


Рис. 2. Псевдоспектр матриц: (a) A_1, (b) A_2;
(c), (d) — линии уровня функции (3) для $\varepsilon = 10^k$,
соответствующие значения k обозначены на графиках

Перейдём к обсуждению одномерных спектральных портретов. Нас в первую очередь интересуют радиальные спектральные портреты, когда семейство кривых представляет собой окружности с центром в нуле. Во-первых, как уже говорилось, те значения параметра r, при которых график функции $\|H_A(r)\|$ выходит на вертикальную асимптотику (стремится к бесконечности), являются радиусами окружностей, на которых расположены собственные значения.

Во-вторых, если значение $\|H_A(r)\|$ конечно, а значит собственные значения на окружности радиуса r отсутствуют, можно оценить внутренний ρ_{in} и внешний ρ_{out} радиусы кольца, внутри которого также нет собственных значений (см. [14]):

$$\rho_{\text{in}} = r\sqrt{\frac{\|H_A(r)\|-1}{\|H_A(r)\|+1}}, \qquad \rho_{\text{out}} = r\sqrt{\frac{\|H_A(r)\|+1}{\|H_A(r)\|-1}}.$$

В-третьих, когда $\|H_A(r)\| < \infty$, можно оценить $\|H_B(r)\|$, если матрицы A, B достаточно близки.

Теорема 1.1. *Пусть матрицы A, B близки в смысле неравенства $\|A-B\| \leqslant \varepsilon\|A\|$, где $\varepsilon > 0$. Тогда при условии*

$$\varepsilon m_\gamma(A) < 1, \ \text{где } m_\gamma(A) = \|A\| \max_{\lambda\in\gamma} \|(A-\lambda I)^{-1}\|, \tag{4}$$

их матричные критерии дихотомии H_A, H_B относительно кривой γ, определённые по формуле (2)*, подчиняются оценке*

$$\|H_A - H_B\| \leqslant \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1-\varepsilon m_\gamma(A)}\left(2+\frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1-\varepsilon m_\gamma(A)}\right)\|H_A\|.$$

Подобная теорема сформулирована в [1] в виде задачи и доказывается с использованием следующего представления резольвент

$$(B-\lambda I)^{-1} = (I+\Delta(\lambda))(A-\lambda I)^{-1}, \quad \|\Delta(\lambda)\| \leqslant \frac{\varepsilon m_\gamma(A)}{1-\varepsilon m_\gamma(A)}.$$

Следствие 1.1. *Пусть у матрицы A нет точек спектра на кривой γ, т. е. $\|H_A\| < \infty$. Тогда для того, чтобы у матрицы B также отсутствовал спектр на γ, $\|H_B\|<\infty$, достаточно выполнения неравенства*

$$\|A-B\| \leqslant \delta_\gamma, \ \text{ где } \ \delta_\gamma = \frac{l_\gamma}{4}\left(\sqrt{1+\frac{16}{\|H_A\|l_\gamma^2}}-1\right). \tag{5}$$

Доказательство. Из условия теоремы 1 следует, что для одновременной ограниченности критерия дихотомии для матриц A и B достаточно, чтобы удовлетворялось неравенство (4). Однако, согласно теореме 4.2 из [1] имеет место соотношение

$$m_\gamma(A) \leqslant \|A\|\|H_A\|\frac{l_\gamma}{4}\left(1+\sqrt{1+\frac{16}{\|H_A\|l_\gamma^2}}\right).$$

Значит, при выборе $\delta_\gamma = \varepsilon\|A\|$ такого, что

$$\delta_\gamma = \left[\|H_A\|\frac{l_\gamma}{4}\left(1+\sqrt{1+\frac{16}{\|H_A\|l_\gamma^2}}\right)\right]^{-1},$$

неравенство (4) выполняется. Если при этом избавиться от корня в знаменателе, то будет получено нужное представление δ_γ (5). □

Если ввести дополнительное условие на $\|H_A\|$, оценку (5) можно упростить, несколько загрубив.

Следствие 1.2. *Пусть у матрицы A нет точек спектра на кривой γ, т. е. $\|H_A\| < \infty$, причём $\|H_A\| > 16/l_\gamma$. Тогда для того, чтобы у матрицы B также отсутствовал спектр на γ, $\|H_B\|<\infty$, достаточно выполнения неравенства*

$$\|A-B\| \leqslant \delta_\gamma, \quad \text{где} \quad \delta_\gamma = \frac{2}{\|H_A\|}\left(1-\frac{4}{\|H_A\|l_\gamma}\right). \tag{6}$$

Доказательство. Заметим, что при $0 < x < 1$ из разложения в ряд Тейлора следует, что $\sqrt{1+x} > 1 + x/2 - x^2/8$. Применяя это выражение к правой части представления (5) для δ_γ, получаем оценку (6), достаточную для выполнения (4). □

Таким образом, размер окрестности матрицы A в пространстве матриц, в которой каждая матрица не имеет собственных значений на γ, обратно пропорционален критерию дихотомии $\|H_A\|$.

На рис. 3 представлены радиальные спектральные портреты матриц A_0, A_1 и A_3. «Пики» на графике для A_0 указывают на модули собственных значений. Но на графиках для A_1

и A_3 невозможно выделить отдельные «пики». Вместо этого на целом интервале параметра r критерий дихотомии принимает весьма большие значения, которые при этом ведут себя хаотично, как следствие вычислительных погрешностей. Такие интервалы r указывают на наличие пятен ε-спектра для достаточно малого ε, охватывающие все собственные значения.

Также на рис. 3 представлены графики зависимости $\log_{10}\delta(r)$, где величина $\delta(r) = \delta_{\gamma(r)}$ определена формулой (5) для окружности с радиусом r. Точки пересечения этих графиков с прямой $\log_{10}\delta = -15$ разделяют весь рассматриваемый интервал на области, в которых $\log_{10}\delta(r) > -15$ либо < -15. В первых областях находятся значения r радиусов окружностей, на которых нет собственных значений как у исходной матрицы A_j так и у всех её возмущений B_j, если $\|A_j - B_j\| \leqslant 10^{-15}$. И наоборот, если r принадлежит области второго типа, где график $\log_{10}\delta(r)$ опускается ниже уровня -15, то может найтись такое возмущение B_j, $\|A_j - B_j\| \leqslant 10^{-15}$, у которого точки спектра лежат на окружности радиуса r, то есть эти области играют роль спектральных пятен.

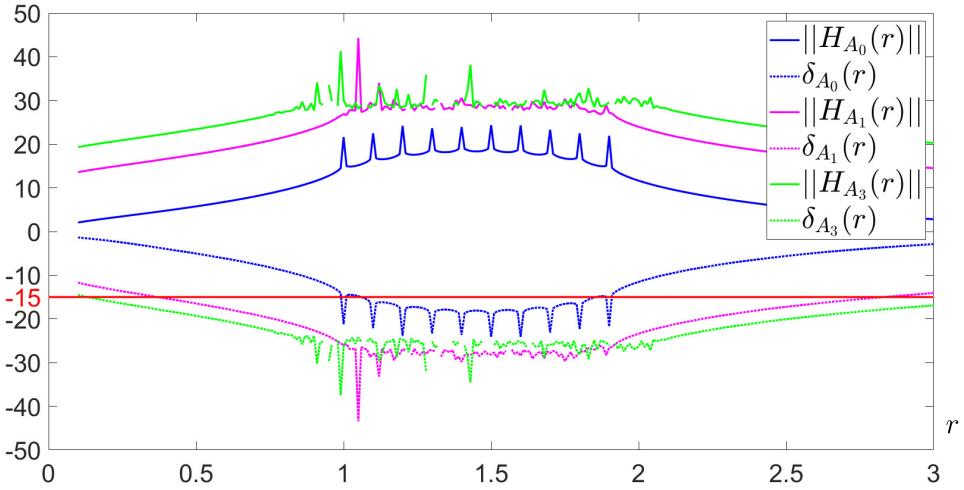


Рис. 3. Одномерные спектральные портреты матриц A_0, A_1 и A_3

Графики построены с помощью программы, текст которой доступен по ссылке https://github.com/nouar1-23/One-dimensional-spectral-portraits

Как видно из примеров, спектральные портреты являются достаточно информативным инструментом. В работах академика Годунова С. К. и его соавторов спектральные портреты применялись для исследования проблемы флаттера крыла, колебаний лопастей турбины, явления резонанса [2, 5]. В последние годы эти методы нашли применение в области, связанной с определением распределений нейтронов в твэлах [15]. Несмотря на это спектральными портретами пользуются редко. Одна из возможных причин — это сравнительно большие временные затраты. В данной же работе представлен подход, позволяющий ускорить процесс построения одномерных спектральных портретов. Ускорение достигается за счёт комбинации двух методов решения уравнения Ляпунова.

2. АЛГОРИТМ ДИХОТОМИИ МАЛЫШЕВА И ЕГО СВОЙСТВА

2.1. Модификации метода Малышева

В качестве семейства кривых мы будем рассматривать окружности $\gamma(r)$ радиуса r с центром в нуле. В этом случае критерий дихотомии $H = H_A(r)$ представляет собой решение следующего обобщённого уравнения Ляпунова

$$H - \frac{1}{r^2}A^*HA = P^*C_0P - (I-P)^*C_0(I-P), \tag{7}$$

где P, $I-P$ — матрицы проекторов на инвариантные подпространства матрицы A, отвечающие собственным числам, лежащим соответственно внутри и вне окружности радиуса r, $C_0 = C_0^* > 0$ — постоянная матрица. Далее для простоты изложения мы полагаем $C_0 = I$.

Разрешимость уравнения (7), дополненного условиями на проекторы и матрицу H

$$P^2 = P, \quad PA = AP, \quad H^* = H > 0, \quad P^*H = HP, \tag{8}$$

устанавливается следующей теоремой [1]

Теорема 2.1 (Обобщённая теорема Ляпунова). *Система* (7), (8) *для любого* $r > 0$ *такого, что* $|\lambda_j(A)| \neq r$, *разрешима единственным образом, причём решение* $H = H^*$ *имеет интегральное представление*

$$H = H(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma(r)} (A^* - \overline{\lambda} I)^{-1} (A - \lambda I)^{-1} \, d\lambda.$$

Очевидно, что смысл теоремы и свойства матрицы H не меняется при замене A на A^*.

Задача дихотомии матричного спектра относительно окружности радиуса r подразумевает нахождение решения системы (7), (8). Все существующие варианты алгоритмов дихотомии окружностью (см. [1], [7], [10], [13] и др.) основаны на решении системы матричных разностных уравнений с постоянными коэффициентами методом ортогональных исключений. Вследствие чего все алгоритмы этого семейства имеют итерационную структуру, причём на каждой итерации выполняется операция QR-разложения для перехода от матричного пучка $A_k - \lambda B_k$ к следующему пучку $A_{k+1} - \lambda B_{k+1}$:

$$\begin{bmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Очевидно, что переход (9) может быть осуществлён более экономично. Для этого QR-разложение применяется к матрице

$$\begin{bmatrix} -B_k \\ A_k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \times & Q_1 \\ \times & Q_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \times \\ 0 \end{bmatrix},$$

а новые матрицы имеют вид $A_{k+1} := Q_1^* A_k$, $B_{k+1} := Q_2^* B_k$.

Алгоритм, созданный Малышевым А. Н., является самым быстрым среди алгоритмов дихотомии окружностью. Его преимущество в скорости выполнения связано с тем, что его итерации не предусматривают обязательного обращения каких-либо матриц. Малышев А. Н. предлагал заранее оценивать число необходимых итераций по формуле (см. [10]):

$$m_0 = \log_2 \left[(1 + \omega_{\max}) \ln \frac{2(1+\varepsilon)\sqrt{\omega_{\max}}}{\varepsilon} \right], \tag{10}$$

где ε — желаемая абсолютная точность вычисления проекторов P, $I-P$, а $\omega_{\max}$ — максимально допустимая норма решения $\|H\|$. Превышение этой границы означает, что спектр матрицы A подходит слишком близко к окружности и не может быть разделён достаточно надёжно. И только после выполнения m_0 итераций вычисляются проекторы, для чего и производится однократное обращение матрицы $P \approx -(A_k - B_k)^{-1} B_k$.

Такой подход возможен вследствие двух факторов. Во-первых, алгоритм Малышева предназначен для решения задачи

$$\hat{H} - \frac{1}{r^2} A \hat{H} A^* = PP^* - (I-P)(I-P)^*,$$

эквивалентной (7). Во-вторых, в алгоритме перед основной итерационной процедурой производится предварительная балансировка исходного матричного пучка $A - \lambda I$. Откуда следует существование предела $H = \lim_{k\to\infty}(B_k + A_k)^{-1}(B_k + A_k)^{-*}$, а значит вычисление H также можно провести однократно после завершения итерационного цикла. То есть алгоритм Малышева не требует обращения матриц на каждом шаге, и именно это делает его более быстрым по сравнению с другими методами.

Алгоритм 1 (Малышев А.Н., оригинал).

Дано: матрица A, r — радиус окружности, ε — критерий сходимости, $\omega_{\max}$ — максимально допустимая норма решения, I — единичная матрица, m_0 — заданное число итераций, вычисленное по формуле (10).

Шаг 1. Балансировка пучка:

$$[Q, R] := \mathrm{qr}\begin{bmatrix} A^*/r \\ I \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A_0 & \times \\ B_0 & \times \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. **for** $i = 1 : m_0$

$$[Q, R] = \mathrm{qr}\begin{bmatrix} -B_0 \\ A_0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \times & Q_1 \\ \times & Q_2 \end{pmatrix},$$
$$A_1 := Q_1^* A_0, \quad B_1 := Q_2^* B_0,$$
$$A_0 := A_1, \quad B_0 := B_1$$

end for.

Шаг 3. **if** $\max(\mathrm{cond}(A_1 - B_1), \mathrm{cond}(A_1 + B_1)) > \omega_{\max}$
print('дихотомия невозможна')
return
end if

$P = -(A_1 - B_1)^{-1}B_1$ % Проектор
$H = (B_1 + A_1)^{-1}(B_1 + A_1)^{-*}$ % Решение обобщённого уравнения Ляпунова

Результат P, H.

Заметим, что оценка достаточного числа итераций (10), которая используется в алгоритме, как правило даёт слишком завышенные значения, так как при её получении учитывается максимально допустимая $\|H\|$. В результате несмотря на то, что при выполнении алгоритма не тратится время на обращения матриц, избыточное количество итераций значительно увеличивает время работы программы. Если включить в алгоритм периодическую проверку сходимости, то его работа ускорится. Проверку сходимости можно организовать различным образом: можно контролировать норму разности двух последовательно вычисленных матриц H и/или P либо невязку $P^2 - P$. При этом для контроля сходимости проекторов предпочтительно использовать абсолютную оценку, так как норма проектора может быть нулевой, а для матриц H лучшим вариантом является относительная оценка. Три возможных варианта приведены ниже. Так как проверка сходимости требует вычисления H или P, а значит и обращения матрицы, то её следует проводить не на каждой итерации. Так в алгоритме ниже такая проверка производится через три итерации. Кроме того, для ускорения вместо спектральной нормы $\|\cdot\|$ для проверки сходимости можно использовать эквивалентную норму $\|\cdot\|_{\max}$, которая вычисляется проще и быстрее: $\|A\|_{\max} = \max_{kl}|A_{kl}|$.

В результате этих изменений получается вариант алгоритма, который работает быстрее, чем оригинал.

Алгоритм 2 (Малышев А.Н., модификация).

Дано: матрица A, r – радиус окружности, ε – критерий сходимости, $\omega_{\max}$ — максимально допустимая норма решения, I — единичная матрица, m_0 — заданное число итераций.
$P_0 := 2I$ % Начальное приближение проектора для 1-го или 2-го условий.
$\%H_0 := I$ % Начальное приближение решения для 3-его условия.
$\%k := 0$ % Число итераций.

Шаг 1. Балансировка пучка

$$[Q, R] := \mathrm{qr}\begin{bmatrix} A^*/r \\ I \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} A_0 & \times \\ B_0 & \times \end{bmatrix}$$

Шаг 2. Первая итерация
$P_1 := -(A_0 - B_0)^{-1}B_0\%$ для 1-го или 2-го условий
$\%\ H_1 := (B_0 + A_0)^{-1}(B_0 + A_0)^{-*}\%$ для 1-го или 2-го условий

Шаг 3. while $\|P_1 - P_0\|_{\max} > \varepsilon$ **and** $k \leqslant m_0$ % 1-ый вариант условия
$\%\ \|P_1^2 - P_1\|_{\max} > \varepsilon$ **and** $k \leqslant m_0$ % 2-ой вариант условия
$\%\ \|H_1 - H_0\|_{\max} > \varepsilon\|H_1\|_{\max}$ **and** $\|H_1\|_{\max} < \omega_{\max}$ **and** $k \leqslant m_0$,% 3-ий вариант условия
for $i = 1 : 3$

$$[Q, R] = \mathrm{qr}\begin{bmatrix} -B_0 \\ A_0 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} \times & Q_1 \\ \times & Q_2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 := Q_1^* A_0, B_1 := Q_2^* B_0,$$

$$A_0 := A_1, B_0 := B_1,$$

end for
if $\max(\mathrm{cond}(A_1 - B_1), \mathrm{cond}(A_1 + B_1)) > \omega_{\max}$
print('дихотомия невозможна')
return
end if
$k := k + 3$
$P_0 := P_1$ $\%H_0 := H_1$
$P_1 := -(A_1 - B_1)^{-1}B_1$ $\%H := (B_1 + A_1)^{-1}(B_1 + A_1)^{-*}$
end while
$H = (B_1 + A_1)^{-1}(B_1 + A_1)^{-*}$ % 1-ый и 2-ой варианты
$\%P := -(A_1 - B_1)^{-1}B_1$ % 3-ий вариант
Результат P, H.

Программная реализация данного алгоритма находится по следующей ссылке: https://github.com/nouar1-23/malysheva-method-1d-spectral-portraits

Сравним на численных примерах скорость работы Алгоритмов 1 и 2. С этой целью для матриц различной размерности n, элементы которых являются равномерно распределёнными на интервале $[0, 1]$ случайными числами, выполним построение одномерного спектрального портрета на отрезке $[1, 2]$. Это значит, что для $r_j \in [1, 2]$, $r_j = 1 + j \cdot 0.01$, $j = 0, 1, 2, \ldots, 100$ происходит вычисление матрицы H с помощью оригинального и модифицированного алгоритмов, причём с использованием 1-го или 2-го варианта условия сходимости. Для каждой размерности n построение происходит 15 раз, затем время выполнения программы усредняется. В алгоритмах используются следующие константы: $\varepsilon = 10^{-10}$, $\omega_{\max} = 10^{16}$. На рис. 4 изображены графики времени построения спектрального портрета в зависимости от n. Видно,

что оригинальный Алгоритм 1, даже с оптимизированным QR-разложением заметно проигрывает алгоритмам с контролем сходимости. Наилучший результат показывает Алгоритм 2 со вторым вариантом условия сходимости, поэтому именно этот алгоритм в дальнейшем будем использовать для сравнения с новым методом.

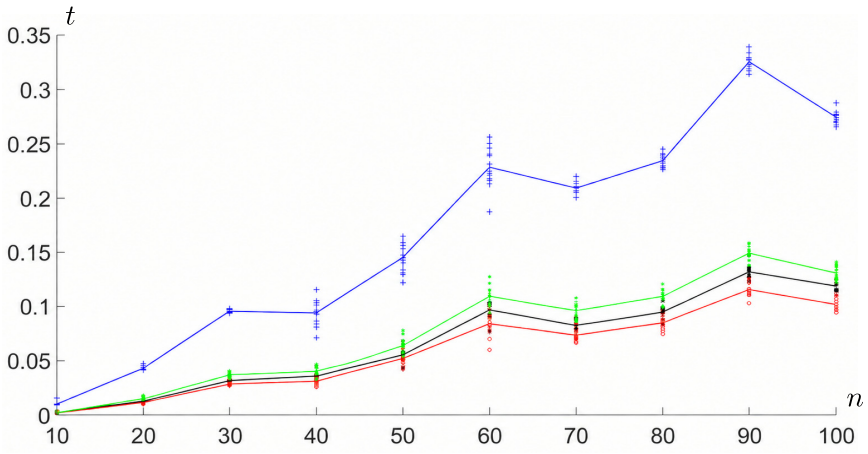


Рис. 4. Время, затраченное на построение спектрального портрета с помощью различных вариантов алгоритма Малышева А. Н.: синяя линия — Алгоритм 1, чёрная, красная и зелёная линии — Алгоритм 2 с использованием первого, второго и третьего варианта условий сходимости соответственно

Для построения графиков (рис. 4) использовалась программа, текст которой размещён по следующей ссылке: https://github.com/nouar1-23/malysheva-performance-comparison

2.2. Сравнение с другими методами

Альтернативный подход к решению задачи (8), основанный на разложении Шура, представлен в работе [16]. По имени авторов будем называть его методом Садкане — Сиджи. Метод состоит из следующих этапов: сначала вычисляется разложение Шура матрицы. Затем путём решения уравнения Сильвестра находится проектор. Обобщённое уравнение Ляпунова разбивается на два отдельных дискретных уравнения Ляпунова. На последнем этапе из их решений восстанавливается искомое решение обобщённого уравнения. Последние два шага метода мы подробнее осветим в следующем разделе. Здесь, однако, отметим, что для решения дискретных уравнений Ляпунова можно выбирать различные методы [17]. Для расчётов ниже мы используем два из них. Во-первых, итерационный алгоритм, базирующийся на представлении решения в виде ряда (метод Дэвисона — Мэна). Этот подход был почти одновременно описан в работах [18], [19] и позднее многократно представлен различными авторами (подробный литературный обзор см. [17]). Во-вторых, прямой метод решения СЛАУ [20] (метод Китагавы). Полученные два варианта метода Садкане — Сиджи будем обозначать S-S(D-M) и S-S(K).

Несмотря на то, что сравнение итерационных методов не всегда корректно, так как и скорость и точность зависят от выбора критерия остановки итераций, проведём следующий численный эксперимент. Для матриц различной размерности n, элементы которых являются равномерно распределёнными на интервале $[0, 1]$ случайными числами, вычисляется решение обобщённого уравнения Ляпунова с помощью модифицированного алгоритма Малышева и с помощью методов S-S(D-M) и S-S(K), при этом фиксируются значения

$$\alpha = \|PA - AP\|, \qquad \beta = \|H - r^{-2}A^*HA - P^*P + (I - P)^*(I - P)\|,$$

характеризующие точность проектора и невязку уравнения, а также t — время выполнения программы в секундах. Для каждого n вычисления повторяются 15 раз, затем значения усред-

няются. В ортогональных исключениях используется 2-й вариант условия сходимости (см. выше) при $\varepsilon_{it} = 10^{-10}$, алгоритм Дэвисона — Мэна взят в редакции, описанной ниже в разд. 3 при $\varepsilon_{it} = 10^{-10}$.

В данной конфигурации точность вычисления проектора с помощью метода Садкане — Сиджи оказалась выше (рис. 5(a)), при том что невязка уравнения наоборот меньше при использовании метода Малышева (рис. 5(b)). То есть в вопросе точности сравнение не выявило однозначного преимущества того или иного метода. При этом сравнение времени работы алгоритмов (рис. 5(c, d)) показало, что итерационный метод решения уравнения Ляпунова значительно быстрее, чем метод Китагавы, в то время как методы Малышева и Садкане — Сиджи (с использованием алгоритма Дэвисона — Мэна) практически равны по скорости.

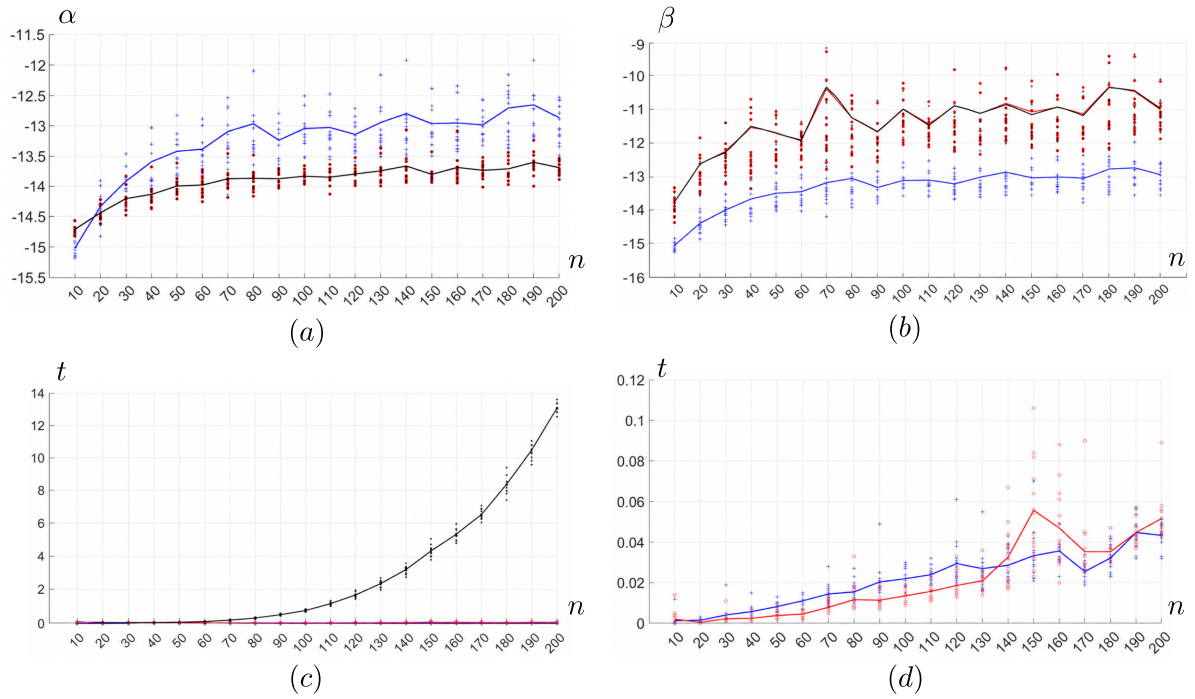
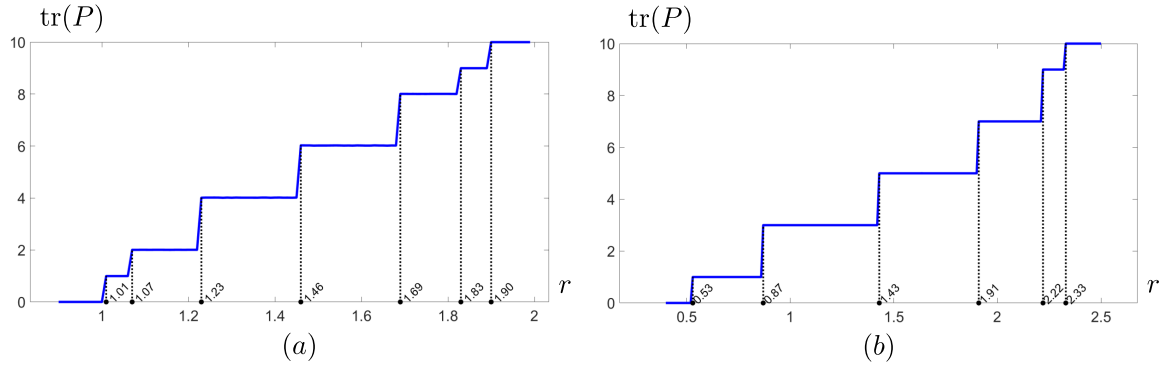


Рис. 5. Сравнение точности и скорости алгоритмов:
синий цвет — метод Малышева;
красный — метод Садкане — Сиджи с использованием алгоритма Дэвисона — Мэна;
чёрный — метод Садкане — Сиджи с использованием алгоритма Китагавы

Для построения графиков (см. рис. 5) использовалась программа, текст которой размещён по следующей ссылке https://github.com/nouar1-23/Discrete-Lyapunov-Methods-Benchmark

Вычислим с помощью метода Садкане — Сиджи и построим графики $\operatorname{tr} P(r)$ для проекторов на инвариантные подпространства матриц A_1, A_3 (см. (1)), соответствующие собственным значениям, лежащим внутри окружности радиуса r. След проектора это кусочно-постоянная функция, причём расположение скачков от одного значения к другому соответствует модулям собственных значений, разница между двумя соседним значениями равна числу собственных значений с одним модулем. Как видно на рис. 6, в данном случае следы полученных проекторов не соответствуют расположению собственных значений, что является следствием использования QR-алгоритма, лежащего в основе метода Садкане — Сиджи и характеризует его работу при наличии крупных пятен псевдоспектра.

Для построения графиков (рис.6) использовалась программа, текст которой размещён по следующей ссылке https://github.com/nouar1-23/Trace-of-Projector



(a) (b)

Рис. 6. Графики следов проекторов на инвариантные подпространства матриц: (a) A_1, (b) A_3, вычисленные методом Садкане — Сиджи

3. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОРТРЕТОВ

3.1. Описание алгоритмов

Для ускорения построения спектральных портретов мы используем комбинацию алгоритмов Малышева и Дэвисона — Мэна.

Напомним, что разрешимость дискретного уравнения Ляпунова

$$H - A^* H A = C, \tag{11}$$

определяется известной теоремой (см. [1, 17, 21]), которая при условии $|\lambda_k(A)| < 1$ на все собственные значения матрицы A гарантирует существование единственного решения и его представления в виде ряда

$$H = \sum_{j=0}^{\infty} (A^*)^j C A^j.$$

Заметим, что частичные суммы $H_j = \sum_{n=0}^{j} (A^*)^n C A^n$ при $j = 2^k$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$H_{2^k} = \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_{k-1} + A^{*2^{k-1}} \mathcal{H}_{k-1} A^{2^{k-1}}, \tag{12}$$

где $k = 1, 2, \ldots$, $\mathcal{H}_0 = C$. Нетрудно получить неравенство, определяющее скорость их сходимости $\|H - \mathcal{H}_k\| \leqslant \|A^{2^k}\|^2 \|H\|$. Представление (12) является основой алгоритма Дэвисона — Мэна (см. [17]).

Алгоритм 3.

Дано: матрица A, ε_{it} — критерий сходимости, $\omega_{\max}$ — максимально допустимая норма решения, $\mathcal{H}_0 = C$.

Шаг 1. Инициализация: $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 + A^* \mathcal{H}_0 A, \quad s = 1.$

Шаг 2. while $\|\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_0\|_{\max} > \varepsilon_{it}$ **and** $\|\mathcal{H}_1\|_{\max} < w_{max}$ **and** $s < 5$

$s = s + 1$

for $i = 1 : 3$

Вычисляем $A = A^2$.

Заменяем $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1$,

$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 + A^* \mathcal{H}_0 A$.

end for.
end while.

Перейдём теперь к решению обобщённого уравнения Ляпунова (7). Следующая теорема даёт возможность выразить его через решения двух дискретных уравнений Ляпунова вида (11).

Теорема 3.1. *Если спектр матрицы A делится на две части окружностью радиуса r, тогда имеют место представления*

$$A = T \begin{bmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{bmatrix} T^{-1}, \qquad H = T^{-*} \begin{bmatrix} U_- & 0 \\ 0 & U_+ \end{bmatrix} T^{-1},$$

где $|\lambda_j(A_-)| < r$, $|\lambda_j(A_+)| > r$, а U_- и U_+ решения уравнений Ляпунова

$$U_- - \frac{1}{r^2} A_-^* U_- A_- = W_-, \tag{13}$$

$$U_+ - r^2 A_+^{-*} U_+ A_+^{-1} = r^2 A_+^{-*} W_+ A_+^{-1}, \tag{14}$$

$$W = T^*T = \begin{bmatrix} W_- & \times \\ \times & W_+ \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Клеточно-диагональное представление матрицы A следует из теоремы Шура (подробнее см. [1], с. 25). Из него вытекает представление для проекторов на инвариантные подпространства

$$P = T \begin{bmatrix} I_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}, \quad I - P = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_+ \end{bmatrix} T^{-1}. \tag{15}$$

Далее в [1] на с. 60–63 обосновано разложение $H = H_- + H_+$, где слагаемые $H_\pm$, удовлетворяют уравнениям

$$H_- - \frac{1}{r^2} A^* H_- A = P^* P, \tag{16}$$

$$H_+ - \frac{1}{r^2} A^* H_+ A = -(I - P)^*(I - P), \tag{17}$$

а также могут быть представлены в следующем виде

$$H_- = T^{-*} \begin{bmatrix} U_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}, \quad H_+ = T^{-*} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_+ \end{bmatrix} T^{-1}. \tag{18}$$

Подставляя (18) и (15) в уравнение (16), получаем следующее равенство

$$T^{-*} \begin{bmatrix} U_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} - \frac{1}{r^2} T^{-*} \begin{bmatrix} A_-^* & 0 \\ 0 & A_+^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{bmatrix} T^{-1}$$
$$= T^{-*} \begin{bmatrix} I_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^* T \begin{bmatrix} I_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = T^{-*} \begin{bmatrix} W_- & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}. \tag{19}$$

Отсюда следует справедливость равенства (13). Аналогичным образом равенство (14) следует из подстановки (18) и (15) в уравнение (17). □

На этой теореме основывается новый алгоритм для нахождения решения обобщённого уравнения Ляпунова (7) с использованием Алгоритма 3 для нахождения решений U_-, U_+.

Алгоритм 4.

Дано: радиус окружности r, матрицы A_-, A_+, приводящая матрица T, матрица $W = T^*T$, параметр сходимости ε_{it}, максимально допустимое значение нормы решения $\omega_{\max}$, m_0 — максимально допустимое число итераций.
Шаг 1. Применение Алгоритма 3 к матрицам $A := A_-/r, \quad \mathcal{H}_0 := W_-$
Результат: U_-
Шаг 2. Применение Алгоритма 3 к матрицам $A := rA_+^{-1}, \quad \mathcal{H}_0 := A^*W_+A$
Результат: U_+
Шаг 3. Вычисление решения:

$$H = T^{-*}\begin{bmatrix} U_- & 0 \\ 0 & U_+ \end{bmatrix} T^{-1}.$$

Результат H.

Перейдём к формулировке алгоритма построения одномерного спектрального портрета, сочетающего в себе Алгоритмы 3 и 4.

Алгоритм 5.

Дано: матрица A, $a = r_0 < r_1 < \cdots < r_M = b$ — значения радиусов окружностей, для которых будет решаться система (7), $\omega_{\max}$ — максимально допустимое значение нормы решения
$j := 0$
Шаг 1. Применение алгоритма дихотомии
Применение Алгоритма 2 к матрице A и радиусу r_j.
Результат: $m(j) = \|H\|_{\max}$, P
Шаг 2. Вычисления
$k = \mathrm{tr}(P)$ % Число собственных значений внутри окружности радиуса r_j
$\begin{bmatrix}[U_1, W_1], \Sigma_1, V_1\end{bmatrix} := \mathrm{svd}(P)$
$\begin{bmatrix}[U_2, W_2], \Sigma_2, V_2\end{bmatrix} := \mathrm{svd}(I - P)$
$T := [U_1, U_2]$ % Вычисление приводящей матрицы

$$\begin{bmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{bmatrix} := T^{-1}AT$$

Шаг 3. for $j = 1 : M$
if $m(j-1) < \omega_{\max}$
Применение алгоритма Дэвисона-Мэна
Применение Алгоритма 4 к матрицам A_-, A_+, T, радиусу r_j
Результат: $m(j) = \|H\|_{\max}$
else
Применение алгоритма дихотомии
Применение Алгоритма 2 к матрице A и радиусу r_j.
Результат: $m(j) = \|H\|_{\max}$, P
Вычисления
$k = \mathrm{tr}(P)$
$\begin{bmatrix}[U_1, W_1], \Sigma_1, V_1\end{bmatrix} := \mathrm{svd}(P)$
$\begin{bmatrix}[U_2, W_2], \Sigma_2, V_2\end{bmatrix} := \mathrm{svd}(I - P)$
$T := [U_1, U_2]$

$$\begin{bmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{bmatrix} := T^{-1}AT$$

end if
end for

Результат: массив m, элементами которого являются нормы решения обобщённого уравнения Ляпунова в точках r_j.

Алгоритм был реализован на языке Octave, доступ к программе можно получить по ссыле https://github.com/nouar1-23/combined-method-1d-spectral-portraits

Новый алгоритм отличается от алгоритма Малышева тем, что метод дихотомии применяется только при больших значениях $\|H\|_{\max}$ (см. условие в **шаге 3**), а значит только в небольшой окрестности собственного значения. При этом учитывается, что проектор не изменяется между двумя последовательными собственными значениями. За счёт этого удаётся значительно снизить вычислительные затраты.

3.2. Численные эксперименты

3.2.1. Построение спектрального портрета.

Рассмотрим следующие двухдиагональные матрицы, которые отличаются только второй диагональю:

$$A=\begin{bmatrix} 30 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.01 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.001 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 30 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.1 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.01 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.001 \end{bmatrix}.$$

На их примере продемонстрируем работу алгоритмов 2 и 5 при построении спектральных портретов для значений параметра r_j, принадлежащего интервалу $(0, 35)$ с шагом $h = 0.01$. В алгоритмах используются константы: $\varepsilon = 10^{-10}$, $\omega_{\max} = 10^{16}$.

В верхнем ряду рис. 7 изображены одномерные радиальные портреты матриц A и B. Ниже расположены графики, отражающие сходимость вычисленных приближений матриц $H(r)$. На них синим цветом представлены результаты расчётов с помощью нового комбинированного алгоритма, а красным — с помощью метода Малышева. В нижней части рис. 7 приведены графики, демонстрирующие число потребовавшихся итераций. Здесь красная линия представляет число итераций Алгоритма 2, синяя линия — количество итераций для нахождения решения U_-, а зелёная линия — количество итераций для нахождения решения U_+ (Алгоритм 3). Данные результаты показывают, что результат вычислений и его точность близки для обоих методов. При этом число итераций, требующееся для сходимости метода уточнений, в среднем ниже. Напомним, что итеративные уточнения применяются к матрицам $U_\pm$, чей размер меньше размера исходной матрицы, и не требуют использования QR-разложения. Эти факторы влияют на время выполнения алгоритма и объясняют результаты, которые демонстрируются в следующем разделе.

Для получения графиков на рис. 7 можно использовать программу, размещённую по следующей ссылке: https://github.com/nouar1-23/spectral-comparison-matrices-A-B

3.2.2. Сравнение времени выполнения алгоритмов.

Данный вычислительный эксперимент организован следующим образом. Сначала задаётся случайная матрица размера $n = 10$, где все элементы равномерно распределены в диапазоне $(0, 1)$. Для каждого из двух алгоритмов фиксируется время, необходимое для вычисления спектральных портретов на интервале $[1, 2]$ с шагом $h = 0.1$. Для остановки итераций

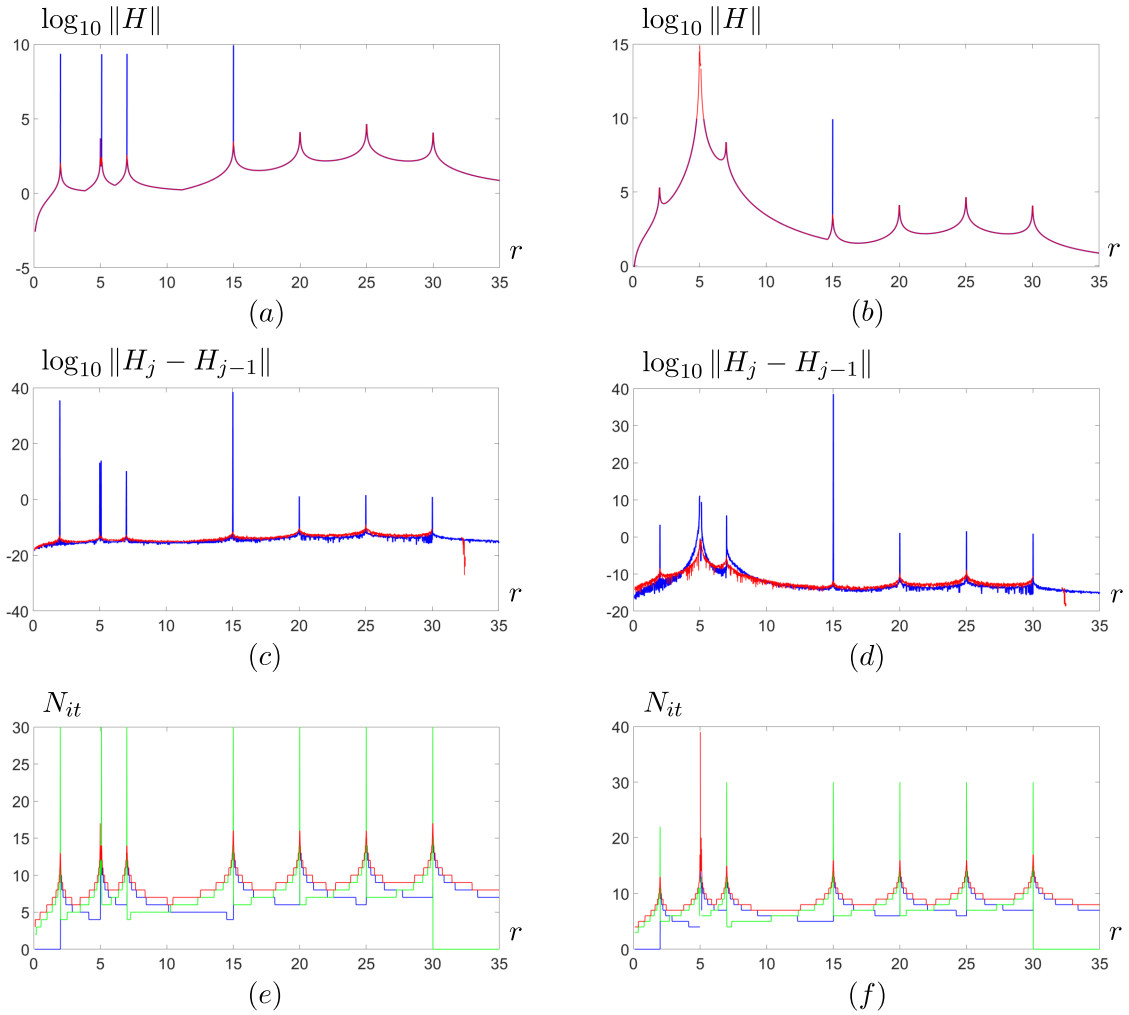


Рис. 7. Спектральные портреты матриц A, B и сравнение сходимости алгоритмов

используются константы $\varepsilon = 10^{-10}$, $\omega_{\max} = 10^{16}$. Затем расчёты повторяются три раза для различных матриц одного и того же размера, после чего вычисляется среднее арифметическое затраченного времени. Таким образом, проводится сравнение алгоритмов для матриц размеров $n = 10, 20, \ldots, 200$ (см. рис. 8).

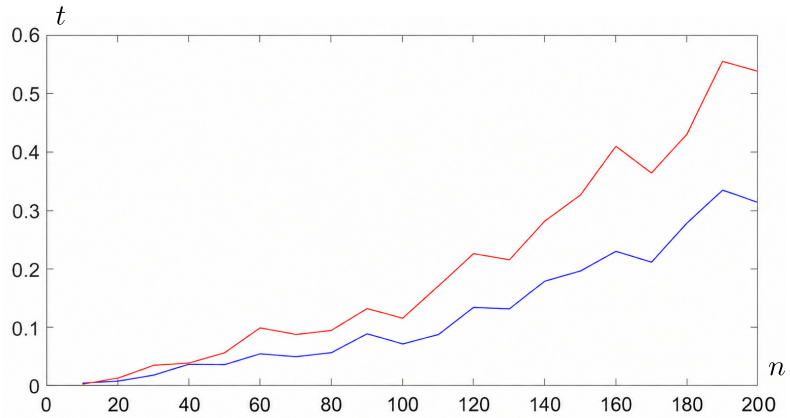


Рис. 8. Время, необходимое для вычисления спектральных портретов:
синий цвет — комбинированный метод; красный цвет — метод Малышева

Аналогичным образом было проведено сравнение алгоритмов для различных типов матрицов, в результате чего были получены графики, представленные на рис. 9. Численное сравнение и построение графиков в данном разделе произведено с помощью программы https://github.com/nouar1-23/spectral-portraits-performance-benchmarking

Вычислительные эксперименты показали ускорение построения спектральных портретов от 1.5 до 20 раз в зависимости от типа матрицы.

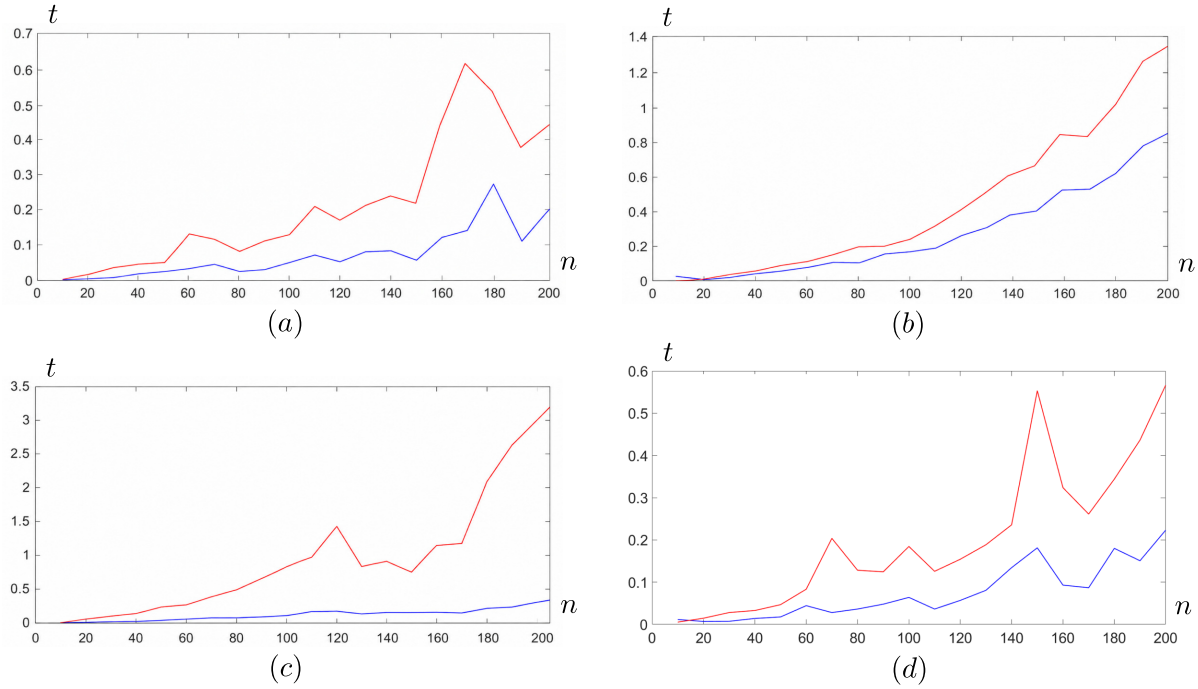


Рис. 9. Сравнение времени для матриц, элементы которых являются случайными числами: с экспоненциальным распределением (a); дискретным распределением (c); стандартным нормальным распределением (d); для эрмитовых матриц с равномерным распределением на интервале $(0, 1)$ (b). Синий цвет — комбинированный метод, красный цвет — метод Малышева

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются спектральные портреты, как инструмент для решения проблемы локализации матричного спектра и его чувствительности к возмущениям. Исследуются и сравниваются между собой различные способы построения одномерных спектральных портретов. Предложен новый комбинированный численный алгоритм, который сочетает в себе наиболее эффективные методы решения дискретных уравнений Ляпунова (7) на некотором интервале параметра r. Результаты вычислительных экспериментов продемонстрировали значительное — от 1.5 до 20 раз в зависимости от типа матрицы — ускорение по сравнению с алгоритмом Малышева А. Н., который в свою очередь является одним из наиболее быстрых среди аналогичных методов. Это указывает на перспективность предлагаемого подхода и его потенциальную применимость в задачах спектрального анализа.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН (проект № FWNF-2026-0028). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С.К.* Лекции по современным аспектам линейной алгебры. Науч. кн., 2002.
2. *Буньков В.Г., Годунов С.К., Курзин В.В., Садкане М.* Применение нового математического аппарата «Одномерные спектральные портреты матрицы» к решению проблемы аэроупругих колебаний решёток лопастей // Учёные записки ЦАГИ. 2009. Т. 40, № 6. С. 3–13.
3. *Bai Z., Demmel J., Mckenney A.* On computing condition numbers for the nonsymmetric eigenproblem // ACM Transactions on Mathematical Software. 1993. V. 19, N 2. P. 202–223.
4. *Reddy S.C., Schmid P.J., Henningson D.S.* Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld Operator // Socity for Industrial and Applied Mathematics. 1993. V. 53, N 1. P. 15–47.
5. *Godunov S.K., Sadkane M.* Spectral analysis of symplectic matrices with application to the theory of parametric resonance // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2006. V. 28, N 4. P. 1083–1096.
6. *Демиденко Г.В., Прохоров В.С.* О расположении матричного спектра относительно параболы // Матем. тр. 2023. Т. 26, № 1. С. 26–40.
7. *Годунов С.К.* Круговая дихотомия матричного спектра // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 5. С. 24–37.
8. *Булгаков А.Я., Годунов С.К.* Круговая дихотомия матричного спектра // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 5. С. 59–70.
9. *Малышев А.Н.* Гарантированная точность в спектральных задачах линейной алгебры // Труды Ин-та математики АН СССР. Сиб. отд-ние. 1990. Т. 17.
10. *Малышев А.Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. 1991.
11. *Godunov S.K., Sadkane M.* Elliptic dichotomy of a matrix spectrum // Linear Algebr Appl. 1996. V. 248. P. 205–232.
12. *Malyshev A.N., Sadkane M.* On parabolic and elliptic spectral dichotomy // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1997. Vol. 18, P. 265–278.
13. *Бибердорф Э.А., Блинова М.А., Попова Н.И.* Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости // СибЖВМ. 2018. Т. 21, № 2. С. 139–153.
14. *Biberdorf E.A., Li W.* Application of linear fractional transformation in problems of localization of matrix spectra and roots of polynomials // Sib. Elec. Math. Reports. 2024. V.21, N 2. P. 46–63.
15. *Бибердорф Э.А., Митенкова Е.Ф., Семёнова Т.В.* О спектральной проблеме в задаче моделирования распределения нейтронов в слабосвязных системах // Сиб. журн. индустр. матем. 2024. Т. 27, № 1. С. 5–15.
16. *Sadkane M., Sidje R.B.* Efficient computation of the spectral projections of regular matrix pairs // J. Comput. Appl. Math. 2016. N 298. P. 72–81.
17. *Gajic Z., Qureshi M.T.J.* Lyapunov matrix equation in system stability and control. Courier Corporation, 2008.
18. *Davison E.J., Man F.T.* The numerical solution of $A'Q+QA=-C$ // IEEE Transactions on Automatic Control. 1968. V. 13, N 4. P. 448–449.
19. *Smith R. A.* Matrix equation $XA+BX=C$ // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16, N 1. P. 198–201.
20. *Kitagawa, G.* An algorithm for solving the matrix equation $X=FXF'+S$ // Int. J. Control. 1977. V. 25, N 5. P. 745–753.
21. *Демиденко Г.В.* Матричные уравнения // Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. 2009.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.61

ACCELERATED ALGORITHM FOR CONSTRUCTING ONE-DIMENSIONAL SPECTRAL PORTRAITS OF MATRICES

© 2026 N. Abdallah[1a], E. A. Biberdorf[2b]

[1] *Novosibirsk State University, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: [a]nouarabdallah111@mail.ru, [b]elina@biberdorf.ru

Received 29.12.2025, revised 21.09.2026, accepted 03.10.2026

Abstract. The paper presents an algorithm that accelerates the construction of one-dimensional spectral portraits of matrices, understood as graphs of the norm of the solution to the generalized discrete Lyapunov equation as a function of a parameter. The idea of the new approach is to partially replace the spectral dichotomy method with respect to a circle by computing the solutions of two classical discrete Lyapunov equations. Experiments have shown that the new method provides a significant speedup.

Keywords: spectral portraits, resolvent, matrix spectrum, spectral dichotomy, Lyapunov equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.301

REFERENCES

1. Godunov S.K. Modern Aspects of Linear Algebra. American Mathematical Society, 1998.
2. Bun'kov V.G., Godunov S.K., Kurzin V.V., Sadkane M. Primenenie novogo matematicheskogo apparata «Odnomernye spektral'nye portrety matritsy» k resheniyu problemy aerouprugikh kolebanii reshetok lopastei [Application of the new mathematical tool «One-dimensional spectral portraits of a matrix» to the solution of the problem of aeroelastic vibrations of blade cascades]. *Uchenye Zapiski TsAGI*, 2009, Vol. 40, No. 6, pp. 3–13 (in Russian).
3. Bai Z., Demmel J., Mckenney A. On computing condition numbers for the nonsymmetric eigenproblem . *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1993, Vol. 19, No. 2, pp. 202–223.
4. Reddy S.C., Schmid P.J., Henningson D.S. Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld Operator. *Socity for Industrial and Applied Mathematics*, 1993, Vol. 53, No. 1, pp. 15–47.
5. Godunov S.K., Sadkane M. Spectral analysis of symplectic matrices with application to the theory of parametric resonance. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2006, Vol. 28, No. 4, pp. 1083–1096.
6. Demidenko G.V., Prokhorov V.S. On location of the matrix spectrum with respect to a parabola. *Siberian Adv. Math.*, 2023, Vol. 33, No. 3, pp. 190–199.
7. Godunov S.K. Circular dichotomy of the matrix spectrum. *Sib. Math. J.*, 1986, Vol. 27, No. 5, pp. 673–682.
8. Bulgakov A.Ya., Godunov S.K. Circular Dichotomy of the Matrix Spectrum. *Sib. Math. J.*, 1988, Vol. 29, No. 5, pp. 717–728.
9. Malyshev A.N. Garantirovannaya tochnost' v spektral'nykh zadachakh lineinoi algebry [Guaranteed accuracy in spectral problems of linear algebra]. *Trudy Inst. Mat. SO AN SSSR* [Proc. Institute of Mathematics of the USSR Academy of Sciences. Siberian Branch.], 1990, Vol. 17 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2026, Vol. 20, No. 3.

10. Malyshev A.N. Vvedenie v vychislitel'nuyu lineinuyu algebru [Introduction to computational linear algebra]. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1991 (in Russian).

11. Godunov S.K., Sadkane M. Elliptic dichotomy of a matrix spectrum. *Linear Algebr Appl.*, 1996, Vol. 248, pp. 205–232.

12. Malyshev A.N., Sadkane M. On parabolic and elliptic spectral dichotomy. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1997, Vol. 18, pp. 265–278.

13. Biberdorf E. A., Blinova M. A., Popova N. I. Modifications of the dichotomy method of a matrix spectrum and their application to stability tasks. *Num. Anal. Appl.*, 2018, Vol. 11, No. 2, pp. 108–120.

14. Biberdorf E.A., Li W. Application of linear fractional transformation in problems of localization of matrix spectra and roots of polynomials. *Sib. Elec. Math. Reports*, 2024, Vol.21, No. 2, pp. 46–63.

15. Biberdorf E.A., Mitenkova E.F., Semenova T.V. On the spectral problem of modeling neutron distribution in weakly coupled systems. *J. Appl. Industr. Math.*, 2024, Vol. 18, No. 1, pp. 10–17.

16. Sadkane M., Sidje R.B. Efficient computation of the spectral projections of regular matrix pairs. *J. Comput. Appl. Math.*, 2016. N 298. P. 72–81.

17. Gajic Z., Qureshi M.T.J. Lyapunov matrix equation in system stability and control. Courier Corporation, 2008.

18. Davison E.J., Man F.T. The numerical solution of $A'Q + QA = -C$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, Vol. 13, No. 4, pp. 448–449.

19. Smith R.A. Matrix equation $XA + BX = C$. *SIAM J. Appl. Math.*, 1968, Vol. 16, No. 1, pp. 198–201.

20. Kitagawa, G. An algorithm for solving the matrix equation $X = FXF' + S$. *Int. J. Control*, 1977, Vol. 25, No. 5, pp. 745–753.

21. Demidenko G.V. Matrichnye uravneniya [Matrix equations]. Textbook. Novosibirsk. Izd-vo Novosib. un-ta. 2009 (in Russian).