УДК 517.957:532.529

ЗАДАЧА ОБ ИНИЦИИРОВАНИИ ДИФФУЗИОННОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

© 2026 А. Л. Казаков[1a], Л. Ф. Спевак[2b]

[1] *Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, ул. Лермонтова, 134, г. Иркутск 664033, Россия,*
[2] *Институт машиноведения им. Э. С. Горкунова УрО РАН, ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург 620049, Россия*

E-mails: [a]kazakov@icc.ru, [b]lfs@imach.uran.ru

Поступила в редакцию 29.12.2025 г.; после доработки 21.09.2026 г.;
принята к публикации 03.10.2026 г.

Для системы двух вырождающихся нелинейных параболических уравнений типа реакция-диффузия исследуется новая граничная задача, отличительной особенностью которой является наличие граничных условий разных типов для двух искомых функций: для одной из них задаётся уравнение движущегося нулевого фронта, а для другой — краевой режим в неподвижной точке. Целью работы является построение решений поставленной задачи в виде диффузионной волны с нулевым фронтом. Сформулирована и конструктивно доказана новая теорема существования решения рассмотренной задачи, показано, что оно имеет искомый тип. Предложен новый численный алгоритм, основанный на методе коллокаций и разностной аппроксимации по времени. Для его верификации проведён вычислительный эксперимент, численные решения тестировались сравнением с известными точными решениями. Результаты расчётов показали хорошую точность при различных параметрах задачи, а также численную сходимость предложенного алгоритма.

Ключевые слова: нелинейная параболическая система, граничные условия, вырождение, теорема существования, точное решение, численное решение.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.304

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье авторы продолжают изучение вырождающихся нелинейных параболических [1] уравнений и систем, которые, как известно, имеют широкий спектр приложений. Они используются при моделировании процессов различной природы, происходящих в сплошных средах — теплопроводности [2], диффузии, фильтрации жидкостей и газов в пористой среде [3, 4], конвекции [5, 6]. Базовые сведения об этих математических объектах можно найти в монографии [7].

Для современного математического моделирования представляют особый интерес нелинейные параболические уравнения и системы с вырождением [8], поскольку в этом случае у них появляются решения, которые способны описать возмущения, распространяющиеся по покоящемуся фону с конечной скоростью [2, 9]. Подобные математические объекты представляют собой составные кусочно-гладкие решения из двух частей: неотрицательной и нулевой, непрерывно состыкованных между собой на некоторой линии (поверхности) — нулевом фронте. Отметим, что нетривиальное решение меняет знак при переходе через нулевой фронт, однако при этом нарушается единственность, что позволяет заменить отрицательную (нефизичную) часть нетривиального решения тождественным нулём.

Впервые такие решения, которые в литературе именуются тепловыми, фильтрационными, диффузионными волнами (в зависимости от их физической интерпретации) [10, 11], были использованы для описания высокотемпературных процессов в физике плазмы в работе [12] и фильтрации жидкостей и газов в пористых пластах грунта (см., например, [13]). Квазилинейные параболические уравнения и их решения типа фильтрационной (тепловой, диффузионной) волны изучаются в научной школе академика А. Ф Сидорова (см. [10, 14]), к которой принадлежат авторы, уже около 40 лет. До недавнего времени в исследованиях рассматривались только отдельные уравнения, однако в последние годы предпринимаются усилия по распространению полученных результатов на случай систем [15]. В ходе проведённых исследований понятие диффузионной волны было существенно обобщено: так, была исследована диффузионная волна с двумя различными нулевыми фронтами [16]. Для случая двух различных нулевых фронтов диффузионная волна состоит уже из трёх частей: 1) обе функции положительны; 2) одна из функций положительна, другая равна нулю; 3) обе функции равны нулю (трёхчастная структура).

Подробно о современном состоянии исследований в этой области можно прочитать в наших недавних публикациях [17, 18], а здесь мы сделаем акцент на новых аспектах в постановках, основное внимание уделив граничным условиям, при которых изучается система. Ранее нами рассмотрены два вида граничных задач для системы реакции-диффузии. В первом случае граничными условиями задаются уравнения движения нулевых фронтов (подвижных многообразий), совпадающих [15] или различных [16], для двух искомых функций. Второй тип — это задачи об инициировании диффузионной волны, в которых для искомых функций на неподвижном многообразии задают краевые условия [17, 18]. Аналогичные постановки были ранее сформулированы для одного уравнения [10] и были исследованы нами в большом количестве работ (см., например [19]). Таким образом, во всех исследованных нами ранее задачах краевые условия для двух искомых функций были одного типа. Следует отметить, что подобных задач для систем у других авторов нами не найдено. Наиболее близкие граничные условия рассмотрены в работе [20] для нелокальной параболической системы в следующем виде:

$$u_i|_{x=\alpha(t)} = u_i|_{x=\beta(t)} = 0, \tag{1}$$

где $u_i(t,x)$ — искомые функции, $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$, $t \in [0,T]$. Функции $x = \alpha(t)$, $x = \beta(t)$ задают, таким образом, два подвижных нулевых фронта, совпадающих для всех искомых функций. В большинстве же работ задаются краевые условия на неподвижных границах. Например, в работе [21] для сингулярно возмущённой системы реакция-диффузия рассмотрены условия вида (1) при $\alpha(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv 1$. Также в научной литературе рассматриваются решения квазилинейных параболических систем типа бегущих волн [22, 23], которые тоже отличаются от того, что исследуется в наших работах.

В данной статье исследуется задача для вырождающейся системы реакции-диффузии, когда для двух искомых функций заданы граничные условия разных типов (смешанные). Именно, для одной из них задаётся уравнение подвижного нулевого фронта, а для второй — краевой режим в неподвижной точке. При этом предполагается наличие нулевого фронта и для второй функции. Насколько нам известно, подобная постановка задачи рассматривается впервые. Во всяком случае, соответствующих публикаций нам найти не удалось. Разный вид двух граничных условий приводит к тому, что пошаговые алгоритмы построения искомых функций, по сравнению с известными работами, существенно усложняются. Как и в предыдущих наших статьях, проведено комплексное численно-аналитическое исследование новой задачи: сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций; предложен алгоритм численного решения по шагам по времени; проведён вычислительный эксперимент для верификации численных решений, при этом были использованы точные решения системы, найденные нами ранее.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему параболических уравнений типа «реакция-диффузия»

$$u_t = uu_{xx} + u_x^2/\sigma + F(u,v), \qquad v_t = vv_{xx} + v_x^2/\delta + G(u,v), \tag{2}$$

где t, x — скалярные независимые переменные, $u(t,x)$, $v(t,x)$ — неизвестные функции, σ, δ — положительные константы, F, G — известные достаточно гладкие функции своих аргументов такие, что $F(0,0) = G(0,0) = 0$. Легко убедиться, что при сделанных предположениях система (2) имеет тривиальное решение $u \equiv 0$, $v \equiv 0$.

Для системы (2) рассмотрим смешанные краевые условия

$$u|_{x=a(t)} = 0, \tag{3}$$

$$v|_{x=0} = g(t). \tag{4}$$

Здесь $a(t)$, $g(t)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $a(0) = g(0) = 0$, $a'(0) > 0$, $g'(0) > 0$. Таким образом, для функции u задан нулевой фронт, а для v – краевой режим в точке $x = 0$.

Будем искать решение задачи (2)—(4) в классе аналитических функций в окрестности точки $t = 0, x = 0$ и покажем, что при выполнении некоторых дополнительных предположений оно существует и обладает следующими свойствами:

1) функция $v(t,x)$ удовлетворяет условию

$$v|_{x=b(t)} = 0 \tag{5}$$

для некоторой, априори неизвестной, функции $b(t)$, $b(0) = 0$, $b'(0) > 0$;

2) $u > 0$, $v > 0$ при $0 < x < a(t)$ для малых t. Иначе говоря, это решение можно рассматривать как первую часть (см. выше) диффузионной волны.

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

В данном разделе будет доказана основная теорема данного исследования. Под аналитической на некотором множестве далее понимается функция, совпадающая на этом множестве со своим тейлоровским разложением.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *функции $a(t)$, $g(t)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки $t = 0$;*
2) *функции $F(u,v)$, $G(u,v)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точки $u = 0,\ v = 0$;*
3) *$a(0) = 0$, $a'(0) > 0$, $g(0) = 0$, $F(0,0) = 0$, $G(0,0) = 0$;*
4) *$g'(0) > \delta[a'(0)]^2$.*

Тогда задача (2)–(4) имеет в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = 0)$ аналитическое решение, для которого $v|_{x=a(t)} > 0$ при $t > 0$; $u > 0$, $v > 0$ при $0 < x < a(t)$. Иных аналитических решений с такими свойствами не существует.

Доказательство. Предваряя рассуждения, обосновывающие данную теорему, отметим, что решение задачи (2)–(4) далее строится в виде кратного ряда по степеням переменных t и $z = x - a(t)$, который рассматривается в полной окрестности точки $t = 0, x = 0$ или, что равносильно, $t = 0, z = 0$.

Для удобства дальнейших выкладок сделаем в задаче (2)–(4) замену независимых переменных

$$\tau = t, \quad z = x - a(t). \tag{6}$$

Якобиан замены (6) $J = 1$, т. е. она невырожденная. При такой замене задача (2)–(4) примет вид

$$u_\tau = a'(\tau)u_z + uu_{zz} + u_z^2/\sigma + F(u,v), \quad v_\tau = a'(\tau)v_z + vv_{zz} + v_z^2/\delta + G(v,u), \tag{7}$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad v|_{z=-a(\tau)} = g(\tau). \tag{8}$$

Задача (7), (8) близка к обобщённой задаче Коши [24], которая рассматривалась нами ранее, однако не подпадает под действие доказанных теорем.

Из условия 1) теоремы вытекает, что функции $a(\tau)$ и $g(\tau)$ могут быть разложены в сходящиеся ряды

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{\tau^k}{k!}, \quad g_k = \left.\frac{d^k g}{d\tau^k}\right|_{\tau=0}, \quad a(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\tau^k}{k!}, \quad a_k = \left.\frac{d^k a}{d\tau^k}\right|_{\tau=0}.$$

Решение задачи (7), (8) будем искать в виде

$$u = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l} \frac{\tau^k}{k!}\frac{z^l}{l!}, \quad u_{k,l} = \left.\frac{\partial^{k+l} u}{\partial\tau^k \partial z^l}\right|_{\substack{\tau=0,\\ z=0}}; \quad v = \sum_{k,l=0}^{\infty} v_{k,l} \frac{\tau^k}{k!}\frac{z^l}{l!}, \quad v_{k,l} = \left.\frac{\partial^{k+l} v}{\partial\tau^k \partial z^l}\right|_{\substack{\tau=0,\\ z=0}}, \tag{9}$$

коэффициенты ряда (9) определяются индукцией по суммарному номеру коэффициентов $n = k + l$.

Установим базу индукции. Из условия 3) имеем, что $u_{0,0} = 0,\ v_{0,0} = 0$.

Из первого условия (8) следует, что $u_{n,0} = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, включая $u_{1,0} = 0$. Для определения $u_{0,1}$, положив в первом уравнении (7) $\tau = z = 0$, получим квадратное уравнение

$$u_{0,1}^2/\sigma + a_1 u_{0,1} = 0, \tag{10}$$

имеющее корни $u_{0,1} = 0,\ u_{0,1} = -\sigma a_1$. Можно убедиться, что нулевой корень приводит к тому, что функция $u \equiv 0$, поэтому примем далее, что $u_{0,1} = -\sigma a_1$.

Найдём теперь $v_{0,1},\ v_{1,0}$. Для этого положим во втором уравнении (7) $\tau = z = 0$. Получим квадратное уравнение

$$v_{1,0} = a_1 v_{0,1} + v_{0,1}^2/\delta. \tag{11}$$

Также продифференцируем второе условие (8) и положим $\tau = 0$. Имеем

$$v_{1,0} - a_1 v_{0,1} = g_1. \tag{12}$$

Можно видеть, что в (11), (12) нет вторых производных. Это достигается за счёт того, что множители перед u_{zz} и v_{zz} одновременно зануляются. Система (11), (12) имеет корни $v_{0,1} = \pm\sqrt{\delta g_1}$, $v_{1,0} = g_1 \pm a_1\sqrt{\delta g_1}$. Положительное значение $v_{0,1}$ порождает решение задачи (7), (8), в котором функции u, v при $\tau > 0, z > 0$ будут иметь разные знаки, что противоречит требованиям теоремы. Поэтому положим $v_{0,1} = -\sqrt{\delta g_1}$. Отсюда $v_{1,0} = g_1 - a_1\sqrt{\delta g_1}$. Из условия 4) следует, что $v_{1,0} > 0$, что обеспечит выполнение искомых свойств $v|_{z=0} > 0$; $u > 0,\ v > 0$ при $z < 0$.

Таким образом, база индукции установлена.

Пусть известны $u_{k,l},\ v_{k,l}$ при $k + l = 2, \ldots, n$, найдём $u_{k,n+1-k},\ v_{k,n+1-k}$. Для этого будем дифференцировать уравнения системы (7) k раз по τ и $n - k$ раз по z, полагая при этом $\tau = 0,\ z = 0$. После приведения подобных слагаемых получим, что

$$\begin{gathered}
u_{n+1,0} - nu_{1,0}u_{n-1,2} - \left(\frac{2}{\sigma}u_{0,1} + a_1\right) u_{n,1} = p_{n,0};\\
u_{k+1,n-k} - ku_{1,0}u_{k-1,n-k+2} - \left[u_{0,1}\left(n - k + \frac{2}{\sigma}\right) + a_1\right] u_{k,n+1-k} = p_{k,n-k},\\
k = n-1, \ldots, 1;\\
-\left[u_{0,1}\left(n + \frac{2}{\sigma}\right) + a_1\right] u_{0,n+1} + u_{1,n} = p_{0,n}.
\end{gathered} \tag{13}$$

$$
\begin{gathered}
v_{n+1,0} - nv_{1,0}v_{n-1,2} - \left(\frac{2}{\delta}v_{0,1} + a_1\right) v_{n,1} = q_{n,0};\\
v_{k+1,n-k} - kv_{1,0}v_{k-1,n-k+2} - \left[v_{0,1}\left(n-k+\frac{2}{\delta}\right) + a_1\right] v_{k,n+1-k} = q_{k,n-k},\\
k = n-1,\ldots,1;\\
-\left[v_{0,1}\left(n+\frac{2}{\delta}\right) + a_1\right] v_{0,n+1} + v_{1,n} = q_{0,n}.
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Иными словами, имеем две системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Формулы для $p_{k,n-k},\ q_{k,n-k}$ здесь не приводятся ввиду громоздкости. Отметим лишь, что они зависят от величин, которые известны в силу предположения индукции. Представление о том, как выглядят соответствующие выражения, можно составить по статье [19]. Отметим, что системы (13) и (14) незамкнутые, в них уравнений на 1 меньше, чем искомых величин. Для замыкания необходимо рассмотреть условия (8).

Напомним, что из первого условия (8) имеем $u_{n+1,0} = 0$. Учитывая это и ранее найденные значения $u_{0,1},\ u_{1,0}$, СЛАУ (13) можно существенно упростить

$$
\begin{gathered}
a_1 u_{n,1} = p_{n,0};\\
u_{k+1,n-k} + a_1\left[(n-k)\sigma + 1\right] u_{k,n+1-k} = p_{k,n-k}, \quad k = n-1,\ldots,1;\\
a_1(n\sigma+1)u_{0,n+1} + u_{1,n} = p_{0,n}.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

СЛАУ (15) является двухдиагональной, причём на главной диагонали матрицы системы находятся величины $a_1[\sigma(n-k)+1]$, $k = n,\ldots,0$, которые являются положительными по условию теоремы, т.е. (15) однозначно разрешима, причём, фактически, прямой ход метода Гаусса уже выполнен.

Для замыкания СЛАУ (14) продифференцируем второе условие (8) $n+1$ раз по τ, используя двумерный аналог формулы Фаа-Ди-Бруно [25]

$$
\left(\sum_{k_1+2k_2+\cdots+(n+1)k_{n+1}=n+1} \frac{(n+1)!\Xi_1^{k_1}\Xi_2^{k_2}\ldots\Xi_{n+1}^{k_{n+1}}}{k_1!k_1!\ldots k_{n+1}!}\right) v(\tau,z) = g_{n+1},
\tag{16}
$$

где

$$
\Xi_1 = \frac{\partial}{\partial\tau} - a'(\tau)\frac{\partial}{\partial z}, \quad \Xi_i = -\frac{a^{(i)}(\tau)}{i!}\frac{\partial}{\partial z}, \quad i \geqslant 2; \quad k_j \geqslant 0.
$$

Положив в (16) $\tau = z = 0$, получим равенство, содержащее коэффициенты $v_{k,l}$, $k+l = 1,2,\ldots,n+1$:

$$
\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k (-a_1)^k v_{n+1-k,k} = g_{n+1} - \Upsilon_n,
\tag{17}
$$

где

$$
\Upsilon_n = \left(\sum_{k_1+2k_2+\cdots+(n+1)k_{n+1}=n+1,\ k_1<n} \frac{(n+1)!\Xi_1^{k_1}\Xi_2^{k_2}\ldots\Xi_{n+1}^{k_{n+1}}}{k_1!k_1!\ldots k_{n+1}!}\right) v(\tau,z)\Bigg|_{\tau=0,z=0}
$$

и зависит от величин, известных в силу предположения индукции.

Таким образом, получена СЛАУ

$$
A_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{q}_n,
\tag{18}
$$

где $\mathbf{v}_{n+1} = (v_{0,n+1}, v_{1,n}, \ldots, v_{n,1})^T$ — вектор искомых величин; квадратная матрица A_{n+1} и вектор $\mathbf{q}_n = (q_{0,n}, q_{1,n-1}, \ldots, q_{n,0})^T$ известны.

Пусть $\gamma = -2v_{0,1}/\delta - a_1 = 2\sqrt{g_1/\delta} - a_1$, по условию 4) $\gamma > 0$; $\beta = -v_{0,1} = \sqrt{\delta g_1} > 0$, $\alpha = v_{1,0} = g_1 - a_1\sqrt{\delta g_1} > 0$, тогда матрица СЛАУ (18) перепишется в виде

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} \gamma + n\beta & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\alpha & \gamma + (n-1)\beta & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & \gamma + 2\beta & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -(n-1)\alpha & \gamma + \beta & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -n\alpha & \gamma & 1 \\ 1 & -na_1 & \ldots & C_{n+1}^k(-a_1)^k & \ldots & n(-a_1)^n & (-a_1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

или

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} \gamma_n & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & \gamma_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \gamma_{n-2} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{n-1} & \gamma_1 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\alpha_n & \gamma_0 & 1 \\ \theta_0^{(n+1)} & \theta_1^{(n+1)} & \ldots & \theta_k^{(n+1)} & \ldots & \theta_n^{(n+1)} & \theta_{n+1}^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

где

$$\theta_k^{(n+1)} = (-a_1)^k C_{n+1}^k = \frac{(-a_1)^k (n+1)!}{k!(n+1-k!)}, \quad \gamma_k = \gamma + k\beta, \quad \alpha_k = k\alpha.$$

Отметим, что система (18) существенно отличается от трехдиагональных СЛАУ, которые ранее неоднократно возникали при построении аналитических решений вырождающихся параболических уравнений [19] и систем [18] в работах авторов.

Решение (18) будем строить, используя метод прогонки. Из первого уравнений выразим $v_{1,n}$ через $v_{0,n+1}$

$$v_{1,n} = -\gamma_n v_{0,n+1} + q_{0,n} = -\eta_1^{(n+1)} v_{0,n+1} + q_{0,n}^*,$$

где $\eta_1^{(n+1)} = \gamma_n$, $q_{0,n}^* = q_{0,n}$. Подставим это выражение во второе уравнение и получим, что

$$-\alpha_1 v_{0,n+1} + \gamma_{n-1}(-\gamma_n v_{0,n+1} + q_{0,n}^*) + v_{2,n} = q_{1,n-1},$$

откуда $v_{2,n} = \eta_2^{(n+1)} v_{0,n+1} + q_{1,n-1}^*$, где $\eta_2^{(n+1)} = \alpha_1 + \gamma_{n-1}\gamma_n$, $\quad q_{1,n-1}^* = q_{1,n-1} - \gamma_{n-1} q_{0,n}^*$.

И так далее, индукцией по k можно убедиться, что справедливы равенства

$$v_{k,n+1-k} = (-1)^k \eta_k^{(n+1)} v_{0,n+1} + q_{k,n-k}^*, \quad k = 1, \ldots, n+1, \tag{19}$$

где

$$\eta_0^{(n+1)} = 1, \quad \eta_1^{(n+1)} = \gamma_n, \quad \eta_{k+1}^{(n+1)} = \gamma_{n+1-k}\eta_k^{(n+1)} + \alpha_k \eta_{k-1}^{(n+1)}, \quad k = 1, \ldots, n+1,$$

известны, причём без труда можно убедиться, что $\eta_k^{(n+1)} > 0$, а $q_{k,n-k}^*$ представляют собой линейные комбинации $q_{k+i,n-k-i}$, $i = 1, \ldots, n-k$, т. е. также известны в силу предположения индукции.

Подставим выражения (19) в формулу (17). Получим равенство

$$(-1)^{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a_1^k \eta_{n+1-k}^{(n+1)} \right] v_{0,n+1} = g_{n+1} - \Upsilon_n^*, \tag{20}$$

где $\Upsilon_n^* = \Upsilon_n + \sum\limits_{k=0}^{n} C_{n+1}^k (-a_1)^k q_{n-k,k}^*$ — зависит от величин, известных в силу предположения индукции. Легко убедиться, что выражение в квадратных скобках в (20) строго положительно и, следовательно, $v_{0,n+1}$ определяется однозначно. Далее, пользуясь соотношениями (17), также однозначно определяем $v_{k,n+1-k}$, $k = 1, \ldots, n+1$.

Формальное решение задачи (7), (8), а, значит, и (2)–(4), в виде рядов (9) построено. Из процедуры построения коэффициентов рядов следует, что решение с искомыми свойствами является единственным.

Сходимость построенных рядов доказывается классическим методом мажорант с использованием теоремы Коши — Ковалевской [26]. Процедура является стандартной (см. [19]) и здесь, ввиду ограниченности объёма статьи, не приводится. При этом по построению имеем, что особенностей в решении не возникает, по крайней мере, в малой окрестности начала координат, где ряды сходятся. Этим завершается доказательство теоремы. □

Следствие. *В условиях теоремы искомые функции u, v положительны при $0 < x < a(t)$ и малых $t > 0$, и найдётся такая линия $x = b(t)$, что $v|_{x=b(t)} = 0$, $b(0) = 0$, $b(t) > a(t) > 0$ при $t > 0$, т. е. выполнено условие* (5).

Доказательство. Будем рассматривать решение в проколотой окрестности $\tau = 0,\ z = 0$. Воспользуемся значениями первых производных искомых функций по переменным $\tau,\ z$, полученными в ходе доказательства теоремы.

1. Поскольку $u|_{z=0} = 0$, $u_z(0,0) < 0$, имеем, что $u(\tau, z) > 0$ при $z < 0,\ \tau > 0$.

2. Из того, что $v|_{z=0} > 0$, $v_z(0,0) < 0$ следует, что $v(\tau, z) > 0$ при $z < 0$ и $\tau > 0$. Более того, поскольку $v_z(0,0) \cdot v_\tau(0,0) < 0$, найдётся такая линия $z = a^*(\tau) > 0$ при $\tau > 0$, $a^*(0) = 0$, что $v|_{z=a^*(\tau)} = 0$.

Из 1 и 2 следует справедливость доказываемого утверждения, достаточно лишь вернуться в плоскость переменных (t, x) и принять $b(t) = a^*(t) + a(t)$. □

Замечание 1. Если $g'(0) = \delta[a'(0)]^2$, то можно показать, что решение задачи (7), (8) существует и, при задании дополнительных условий на первые производные, единственно, в том числе возможно совпадение нулевых фронтов $x = a(t)$ и $x = b(t)$ (см. примеры 1, 2). Выполнение (или невыполнение) условия $v|_{x=a(t)} \geqslant 0$ здесь зависит от значений вторых производных.

Замечание 2. Случай $g'(0) < \delta[a'(0)]^2$ также представляет определённый интерес, однако он не допускает очевидной физической интерпретации и здесь не рассматривается.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Приближенное решение задачи (2)—(4) будем строить по шагам по времени. На каждом шаге $t_k = kh$, где h — размер шага, сформулируем изохронную краевую задачу, решением которой будут искомые функции в своих областях положительных значений:

$$u(t_k, x), \quad x \in [0, a(t_k)]; \quad v(t_k, x), \quad x \in [0, b(t_k)].$$

Будем предполагать, что выполнены условия теоремы, доказанной выше. Также, опираясь на следствие из неё, будем считать, что на рассматриваемом интервале времени для неизвестного априори значения $b(t_k)$ справедливо неравенство $b(t_k) > a(t_k)$.

Можно показать, что в сделанных предположениях из условий (3), (5) и уравнений системы (2) следуют соотношения для производных искомых функций по пространственной переменной:

$$[u_x^2/\sigma + a'(t)u_x + F(u,v)]|_{x=a(t)} = 0. \tag{21}$$

$$(v_x^2/\delta + b'(t)v_x)|_{x=b(t)} = 0. \tag{22}$$

Используя (21), сформулируем следующую краевую задачу для функции $u(t_k, x)$ на отрезке $x \in [0, L_k]$, где $L_k = a(t_k)$:

$$u_{xx}(t_k, x) = \frac{1}{u(t_k, x)} \left(u_t(t_k, x) - \frac{[u_x(t_k, x)]^2}{\sigma} - F(u(t_k, x), v(t_k, x)) \right), \tag{23}$$

$$u(t_k, L_k) = 0, \tag{24}$$

$$[u_x(t_k, L_k)]^2/\sigma + a'(t_k) u_x(t_k, L_k) + F(0, v(t_k, L_k)) = 0. \tag{25}$$

Поскольку функция $b(t)$ в задаче (2)–(4) неизвестна, для использования условия (22) аппроксимируем её. Из (22) в момент t_k имеем:

$$b'(t_k) = -\frac{v_x(t_k, l_k)}{\delta}, \tag{26}$$

где $l_k = b(t_k)$ — априори неизвестная величина. Примем на отрезке $t \in [t_{k-1}, t_k]$ квадратичную аппроксимацию функции $b(t)$ в виде:

$$b(t) = B(t^2 - t_{k-1}^2) - B(t_k + t_{k-1})(t - t_{k-1}) + \frac{l_k - l_{k-1}}{h}(t - t_{k-1}) + l_{k-1}, \tag{27}$$

где B — константа. Подставив функцию (27) в равенство (26) для моментов t_{k-1} и t_k, можно получить следующее соотношение, которые примем в качестве дополнительного граничного условия для функции $v(t_k, x)$:

$$\frac{2l_k}{h} + \frac{v_x(t_k, l_k)}{\delta} = S_{k-1}. \tag{28}$$

Здесь значение

$$S_{k-1} = \frac{2l_{k-1}}{h} - \frac{v_x(t_{k-1}, l_{k-1})}{\delta}$$

найдено на предыдущем шаге по времени t_{k-1}, если $k > 1$. Для решения на первом шаге найдём соответствующее начальному моменту времени значение S_0. Из условия (4) следует, что $v_t|_{x=0} = g'(t)$. С учётом системы (2) в момент $t = 0$ будем иметь равенство $[v_x(0, 0)]^2/\delta = g'(0)$. Тогда, согласно сделанным предположениям о направлении движения нулевых фронтов $v_x(0, 0) = -\sqrt{\delta g'(0)}$ и

$$S_0 = \sqrt{g'(0)/\delta}.$$

Таким образом, мы можем сформулировать для функции $v(t_k, x)$ краевую задачу задачу на отрезке $x \in [0, l_k]$:

$$v_{xx}(t_k, x) = \frac{1}{v(t_k, x)} \left(v_t(t_k, x) - \frac{[v_x(t_k, x)]^2}{\delta} - G(u(t_k, x), v(t_k, x)) \right), \tag{29}$$

$$v(t_k, 0) = V_k, \quad v(t_k, l_k) = 0, \tag{30}$$

$$\frac{2l_k}{h} + \frac{v_x(t_k, l_k)}{\delta} = S_{k-1}. \tag{31}$$

Здесь $V_k = g(t_k)$.

Замечание 3. Задача (29)—(31) не является переопределённой, поскольку значение l_k неизвестно.

Итак, в момент $t = t_k$ мы имеем две связанные задачи (23)—(25) и (29)—(31), для совместного решения которых построим итерационный алгоритм.

Замечание 4. При решении следует учитывать, что $L_k < l_k$, следовательно, $u(t_k, x) = 0$ при $x \in [L_k, l_k]$.

Решение будем искать в виде $u(t_k, x) = p(x)+q(x)$, $v(t_k, x) = r(x)+s(x)$, где $p(x)$ — частное решение уравнения (23); $r(x)$ — частное решение уравнения (29); $q(x)$ — решение подходящей задачи для однородного уравнения,

$$q''(x) = 0, \tag{32}$$

$$q(L_k) = -p(L_k), \tag{33}$$

$$[p'(L_k) + q'(L_k)]^2/\sigma + a'(t_k)[p'(L_k) + q'(L_k)] + F(0, r(L_k) + s(L_k)) = 0; \tag{34}$$

$s(x)$ — решение подходящей задачи для однородного уравнения,

$$s''(x) = 0, \tag{35}$$

$$s(0) = V_k - r(0), \quad s(l_k) = -r(l_k), \tag{36}$$

$$\frac{2l_k}{h} + \frac{r'(l_k) + s'(l_k)}{\delta} = S_{k-1}. \tag{37}$$

Опишем теперь этапы итерационного процесса. Далее $u^{(n)}$, $p_{(n)}$, $q_{(n)}$, $v^{(n)}$, $r_{(n)}$, $s_{(n)}$, $l_k^{(n)}$ — n-е итерации соответствующих решений и параметра.

I. Задаём начальные итерации частных решений:

$$p_{(0)} \equiv 0, \quad r_{(0)} \equiv 0. \tag{38}$$

II. На n-й итерации, $n \geqslant 0$, при известных $p_{(n)}$, $r_{(n)}$, представляем решения задач (32)—(34) и (35)—(37) в следующем виде:

$$q_{(n)} = \overline{q}_{(n)}(x - L_k) - p_{(n)}(L_k), \tag{39}$$

$$s_{(n)} = \frac{r_{(n)}(0) - r_{(n)}(l_k^{(n)}) - V_k}{l_k^{(n)}} x + V_k - r_{(n)}(0). \tag{40}$$

Очевидно, что условия (33), (36) для функций (39), (40) выполняются. Подставив (39), (40) в условия (34), (37), получаем систему двух уравнений относительно неизвестных параметров $\overline{q}_{(n)}$ и $l_k^{(n)}$. При этом второе из уравнений будет содержать только одну неизвестную, $l_k^{(n)}$, которая может быть однозначно найдена. После этого из первого уравнения можно будет найти $\overline{q}_{(n)}$.

После нахождения $\overline{q}_{(n)}$ и $l_k^{(n)}$, мы получим окончательный вид функций $p_{(n)}$ и $s_{(n)}$ в соответствии с уравнениями (39), (40).

III. Выполнив шаг **II**, мы получаем n-ю итерацию решения задач (23)—(25) и (29)—(31):

$$u^{(n)} = p_{(n)}(x) + q_{(n)}(x), \quad v^{(n)} = r_{(n)}(v) + s_{(n)}(v). \tag{41}$$

IV. Находим следующие итерации частных решений уравнений (23) и (29). Для этого решаем уравнения

$$p''_{(n+1)} = \Phi(u^{(n)}, v^{(n)}), \quad r''_{(n+1)} = \Psi(u^{(n)}, v^{(n)}), \tag{42}$$

где

$$\Phi(u^{(n)}, v^{(n)}) = \frac{1}{u^{(n)}} \left(u_t^{(n)} - \frac{(u^{(n)\prime})^2}{\sigma} - F(u^{(n)}, v^{(n)}) \right),$$

$$\Psi(u^{(n)}, v^{(n)}) = \frac{1}{v^{(n)}} \left(v_t^{(n)} - \frac{(v^{(n)\prime})^2}{\delta} - G(u^{(n)}, v^{(n)}) \right),$$

методом коллокаций [27, 28], используя разложения правых частей по радиальным базисным функциям (РБФ) [29, 30]:

$$\Phi(u^{(n)}, v^{(n)}) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi_k(x), \quad \Psi(u^{(n)}, v^{(n)}) = \sum_{m=1}^{M} \beta_{n+1}^{(m)} \varphi_m(x). \tag{43}$$

Здесь $\varphi_k(z) = \varphi_k(|z - z_k|)$ — РБФ, z_k — точки коллокации, для каждой $\varphi_k(z)$ найдётся $\psi_k(z)$, такая что $\psi_k''(z) = \varphi_k(z)$. Расположив точки коллокации $x_1, x_2, \ldots, x_K$ на отрезке $[0, L_k]$, а точки коллокации $y_1, y_2, \ldots, y_M$ — на отрезке $[0, l_k^{(n)}]$, получаем из (43) две СЛАУ относительно коэффициентов $\alpha_{n+1}^{(k)}$, $\beta_{n+1}^{(m)}$:

$$\Phi(u^{(n)}, v^{(n)})\big|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{n+1}^{(k)} \varphi_k(x_i), \ i = 1, \ldots, K, \tag{44}$$

$$\Psi(u^{(n)}, v^{(n)})\big|_{x=y_j} = \sum_{m=1}^{M} \beta_{n+1}^{(m)} \varphi_m(y_j), \ j = 1, \ldots, M. \tag{45}$$

Решив системы (44), (45), получаем следующие итерации частных решений,

$$p_{(n+1)} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_{n+1}^{(k)} \psi^{(k)}(x), \quad r_{(n+1)} = \sum_{m=1}^{M} \beta_{n+1}^{(m)} \psi^{(m)}(x),$$

после чего переходим к шагу **II**. Производные по времени в левых частях (44), (45) вычисляются методом конечных разностей. Когда n-я и $(n+1)$-я итерации достаточно близки, итерационный процесс останавливается, и в качестве решения задачи (2)—(4) в момент t_k принимаются непрерывно дифференцируемые по пространственной переменной функции

$$u(t_k, x) = p_{(n+1)}(x) + q_{(n+1)}(x), \quad v(t_k, x) = r_{(n+1)}(x) + s_{(n+1)}(x).$$

При этом будет найдено положение нулевого фронта функции v в момент t_k: $b(t_k) = l_k^{(n+1)}$.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Пример 1. Пусть в системе (2) $\sigma = \delta$, $F(u, v) = u^\lambda v^{1-\lambda}$, $G(u, v) = u^\mu v^{1-\mu}$, где $\lambda, \mu \in [0, 1]$. Тогда система имеет точное решение

$$u_1(t, x) = v_1(t, x) = \kappa e^t \left[\frac{\kappa}{\sigma}(e^t - 1) - x \right], \tag{46}$$

где $\kappa > 0$ — произвольная константа. В сделанных предположениях, с помощью предложенного выше алгоритма, была численно решена задача (2)—(4). Краевые условия были заданы в соответствии с решением (46): в условии (3) $a(t) = a_1(t) = \kappa(e^t - 1)/\sigma$, в условии (4) $g(t) = g_1(t) = \kappa^2 e^t (e^t - 1)/\sigma$. Отметим, что для данного примера выполняются все условия теоремы, кроме 4). Здесь справедливо равенство $g'(0) = \delta[a'(0)]^2$, что связано с совпадением двух нулевых фронтов (см. Замечание 1). Аналогичная ситуация имеет место в примере 2.

Исходя из вида граничных условий, в качестве критерия останова во всех примерах использовалось условие

$$\max\left\{ \left| u^{(n+1)}(0) - u^{(n)}(0) \right|, \ \left| l_k^{(n+1)} - l_k^{(n)} \right| \right\} < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — заданное число; в расчётах $\varepsilon = 10^{-10}$. Точность численного решения на шаге времени t_k оценивалась по наибольшему отклонению от точного решения, которое для функции u наблюдалось в точке $x = 0$, а для функции v — в точке $x = a_1(t_k)$, что соответствует виду краевых условий. Также оценивалась точность нахождения нулевого фронта функции v. Таким образом, оценивались погрешности

$$\Delta_1 = |u(t_k, 0) - u_1(t_k, 0)|, \quad \Delta_2 = |v(t_k, a_1(t_k)) - v_1(t_k, a_1(t_k))|, \quad \Delta_3 = |l_k - a_1(t_k)|. \tag{47}$$

В табл. 1 сравнивается точность численных решений при различных значениях h для следующих значений параметров задачи: $\sigma = \delta = 3$, $\lambda = \mu = 0,5$, $\kappa = 0,3$. Результаты расчётов показали хорошую точность и сходимость численного алгоритма относительно шага по времени. Отметим, что число точек коллокации, используемых при решении уравнений (42), не оказывает заметного влияния на результат, поскольку решение (46) является линейным по x.

Таблица 1

Погрешности численных решений в примере 1

t_k	h	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0,5	0,1	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$6,8 \cdot 10^{-4}$
0,5	0,05	$3,1 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$
0,5	0,01	$9,5 \cdot 10^{-6}$	$8,9 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$
1	0,1	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$
1	0,05	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$7,9 \cdot 10^{-4}$	$9,7 \cdot 10^{-4}$
1	0,01	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$	$7,9 \cdot 10^{-4}$

Пример 2. Рассмотрим теперь пример, когда искомые функции не совпадают, но имеют общий нулевой фронт. Пусть в системе (2) $F(u, v) = \alpha v$, $G(u, v) = \beta u$, $\sigma = \alpha\delta$, $\alpha\beta = 1$. Тогда точное решение системы имеет вид [17]

$$u_2(t, x) = \alpha\mu(e^{2t} - e^t) - \sqrt{\alpha\sigma\mu} \cdot e^t x, \quad v_2(t, x) = \mu(e^{2t} - e^t) - \sqrt{\delta\mu} \cdot e^t x, \tag{48}$$

где $\mu > 0$ — произвольный параметр. При этом нулевые фронты функций u_2 и v_2 совпадают: $a(t) = b(t) = \sqrt{\mu/\delta}(e^t - 1)$. В краевом условии (4) в этом случае $g(t) = \mu(e^{2t} - e^t)$. Точность решения оценивалась с помощью погрешностей, аналогичных (47). Результаты расчётов при $\sigma = 2,4$, $\delta = 3$, $\alpha = 0,8$, $\beta = 1,25$, $\mu = 0,1$, приведённые в табл. 2, вновь демонстрируют сходимость алгоритма относительно шага по времени.

Таблица 2

Погрешности численных решений в примере 2

t_k	h	Δ_1	Δ_2	Δ_3
0,5	0,1	$7,0 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$
0,5	0,05	$2,9 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$
0,5	0,01	$3,4 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
1	0,1	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$
1	0,05	$1,8 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$
1	0,01	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$5,7 \cdot 10^{-4}$	$7,9 \cdot 10^{-4}$

Пример 3. Пусть в системе (2) $F(u,v) = \alpha_1 u + \alpha_2 v$, $G(u,v) = \beta_1 u + \beta_2 v$. Тогда при значениях параметров $\sigma = 8,\ \delta = 4,913,\ \alpha_1 = 1,36,\ \alpha_2 = \beta_1 = 0,4,\ \beta_2 = 0,156$ система имеет следующее точное решение [17]

$$\begin{aligned} u_3(t,x) &= 0,629e^{0,4t} + 0,051e^{-0,4t} - 0,68(x+1)^2, \\ v_3(t,x) &= 0,629e^{0,4t} - 0,051e^{-0,4t} - 0,578(x+1)^2. \end{aligned} \tag{49}$$

В краевых условиях (3), (4) решению (49) соответствуют функции

$$a(t) = \sqrt{0,925e^{0,4t} + 0,075e^{-0,4t}} - 1, \quad g(t) = 0,629e^{0,4t} - 0,051e^{-0,4t} - 0,578.$$

Решение (49) удовлетворяет задаче (2)–(4) при $0 \leqslant x \leqslant a(t)$, поскольку $u = 0$ при $x > a(t)$. В области $x \geqslant a(t)$ для функции v можно сформулировать следующую задачу:

$$v_t = vv_{xx} + v_x^2/\delta + \beta_2 v, \quad v|_{x=a(t)} = 0,09435(e^{0,4t} - e^{-0,4t}). \tag{50}$$

Решение задачи (50) в явном виде получить невозможно, однако для тестирования предложенного в настоящей статье алгоритма можно построить численное решение с помощью верифицированного алгоритма, разработанного авторами ранее. На рис. 1(a) представлены графики численного решения, точного решения (49) и тестового решения задачи (50) при $t = 1$. Расчёты показали хорошее совпадение обеих найденных численно искомых функций с точным решением на отрезке $x \in [0, a(t)]$. В области $x > a(t)$ найденная численно функция v совпадает с тестовым решением, которое заметно отличается от точного решения (49). На рис. 1(b) для функции u проиллюстрирована сходимость итерационного процесса. В соответствии с алгоритмом, начальная итерация является линейной. Начиная с третьей итерации, численное решение графически неотличимо от точного. Заданная точность достигается при $n = 15$. Отметим, что в этом примере выполняются все условия теоремы. Таким образом, справедливо следствие, что можно видеть на рис. 1(a).

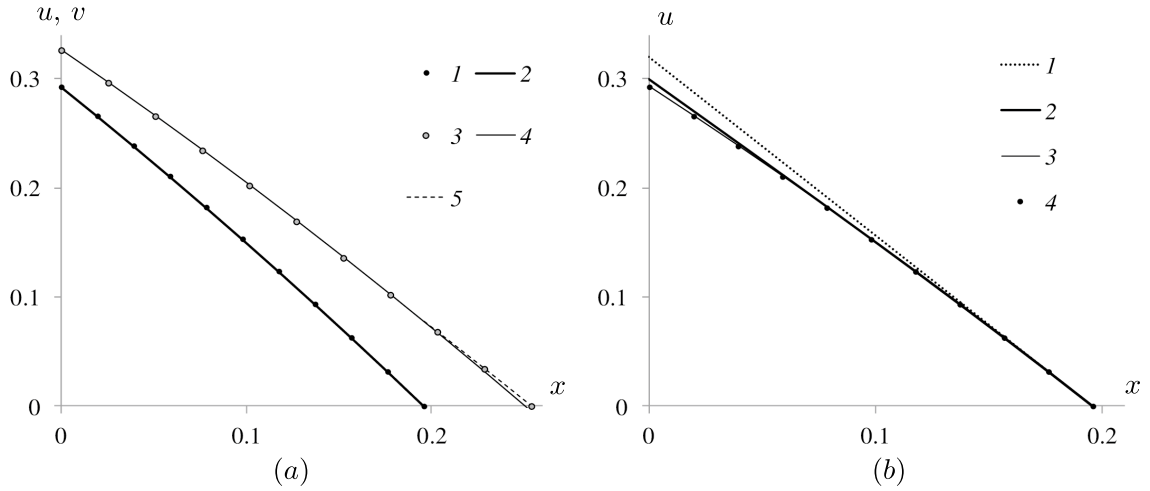


Рис. 1. Пример 3. Сравнение численного и точного решений:
(a) — решения при $t = 1$:
$u(t,x)$, численное (*1*); $u(t,x)$, точное (*2*); $v(t,x)$, численное (*3*);
$v(t,x)$, точное (*4*); $v(t,x)$, тестовое решение задачи (50) (*5*);
(b) — итерации $u^{(n)}(x)$ при $t = 1$:
$n = 0$ (*1*); $n = 1$ (*2*); $n \geqslant 2$ (*3*); точное решение (*4*)

Пример 4. В заключение проиллюстрируем оценку сходимости численного алгоритма в отсутствие известного точного решения. Пусть в задаче (2)–(4) $F(u,v) = 15uv$, $G(u,v) = 10uv$, $a(t) = e^{0.3t} - 1$, $g(t) = \ln(0.7t)$. На рис. 2, аналогично рис. 1б, графически демонстрируется достаточно быстрая сходимость итерационного процесса при $t = 1$. Заданная точность достигается при $n = 14$. Для количественного анализа сходимости алгоритма использовались невязки уравнений (2) при подстановке построенных решений:

$$\Delta_4 = \max_{x\in[0,L_k]} |u_t - uu_{xx} - u_x^2/\sigma - F(u,v)|, \quad \Delta_5 = \max_{x\in[0,l_k]} |v_t - vv_{xx} - v_x^2/\delta - G(v,u)|.$$

Представленные в табл. 3 результаты расчётов демонстрируют сходимость относительно шага по времени h и количеств точек коллокации K, M. В целом проведённый вычислительный эксперимент показал эффективность предложенного алгоритма численного решения задачи (2)–(4), машинную сходимость и хорошую точность решения.

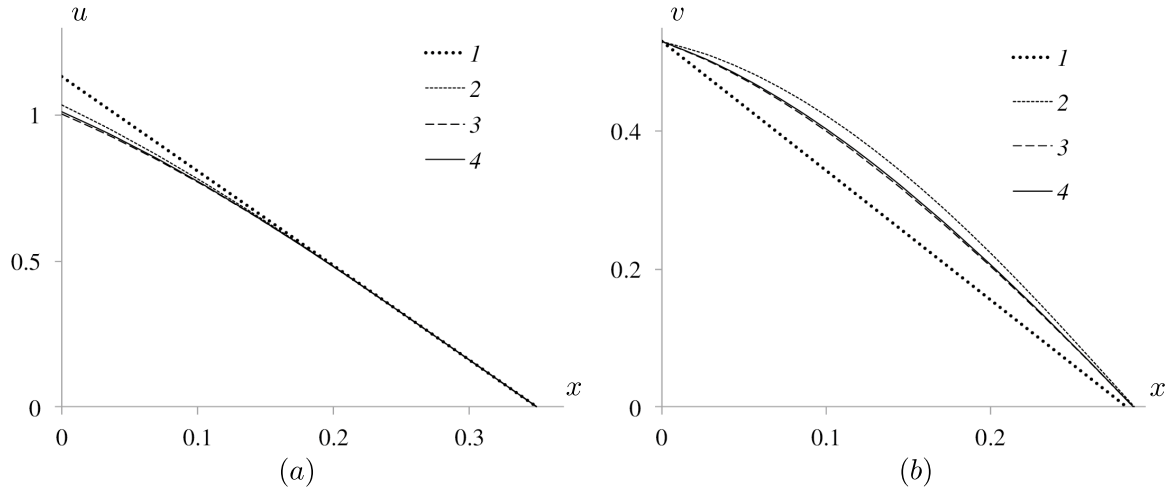


Рис. 2. Пример 4. Итерации численного решения при $t = 1$:
(a) — $v^{(n)}(x)$; (b) — $u^{(n)}(x)$:
$n = 0$ (*1*); $n = 1$ (*2*); $n = 2$ (*3*); $n \geqslant 4$ (*4*)

Таблица 3

Невязки уравнений системы (2) в примере 4, $t = 1$

h	K	M	Δ_4	Δ_5
0,1	15	10	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$
0,1	25	20	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$
0,1	50	40	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-4}$
0,05	15	10	$5,1 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$
0,05	25	20	$2,8 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$
0,05	50	40	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$
0,01	15	10	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$9,4 \cdot 10^{-4}$
0,01	25	20	$6,7 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$
0,01	50	40	$8,7 \cdot 10^{-5}$	$4,9 \cdot 10^{-5}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе для систем вырождающихся нелинейных параболических уравнений проведено комплексное исследование нового вида граничных задач, главной особенностью которых является принципиальное различие видов граничных условий, заданных для двух искомых функций: для одной задаётся подвижный нулевой фронт, а для другой — краевой режим в неподвижной точке. Это обстоятельство существенно осложняет как аналитическое исследование, так и построение численных решений. Насколько нам известно, такая постановка рассмотрена впервые.

В ходе исследования конструктивно доказана теорема существования и единственности аналитического решения типа диффузионной волны с построением искомых функций в виде сходящихся степенных рядов с рекуррентно определяемыми коэффициентами. Разработан алгоритм численного решения с разностной аппроксимацией по времени; на каждом шаге пространственная задача решается итерационно с использованием метода коллокаций и радиальных базисных функций. Проведённые в рамках вычислительного эксперимента расчёты продемонстрировали хорошую точность численных решений, а также численную сходимость алгоритма относительно шага по времени и числа точек коллокации.

Перспективы развития полученных результатов связаны с увеличением размерности задачи, рассмотрением более общего вида уравнений системы и краевых условий, нахождения новых классов точных решений.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственных заданий Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (№ гос. регистрации 121041300058-1) и Института машиноведения имени Э. С. Горкунова УрО РАН (№ гос. регистрации 124020600042-9). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vazquez J.* The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
2. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
3. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.
4. *Coussy O.* Poromechanics. Chichester: Wiley and Sons, 2004.
5. *Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В.* Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008.
6. *Бекежанова В.Б., Гончарова О.Н., Овчарова А.С.* Моделирование конвекции в двухфазной системе в условиях диффузионного испарения в замкнутой области // Прикл. механика и техн. физика. 2023. Т. 64, № 4. С. 14-–26; DOI: 10.15372/PMTF202215141
7. *Grindrod P.* Patterns and Waves: Theory And Applications of Reaction-Diffusion Equations. N. Y.: Clarendon Press, 1991.
8. *DiBenedetto E.* Degenerate Parabolic Equations. N. Y.: Springer-Verl., 1993.
9. *Antontsev S., Shmarev S.* Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up. Paris: Atlantis, 2015.

10. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.

11. *Баутин С.П.* Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003.

12. *Зельдович Я.Б., Компанеец А.С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сб., посвящённый 70-летию акад. А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР. 1950. С. 61–71.

13. *Баренблатт Г.И.* О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 1. С. 67–78.

14. *Сидоров А.Ф.* Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 47–51.

15. *Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.* Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 4. С. 64—78; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.405

16. *Казаков А.Л., Спевак Л.Ф.* Решения нелинейной вырождающейся системы реакция — диффузия типа диффузионных волн с двумя фронтами // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 6. С. 104–115; DOI: 10.15372/PMTF20220612

17. *Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.* Задача об инициировании диффузионной волны для нелинейной параболической системы второго порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 67—86; DOI: 10.21538/0134-4889-2023-29-2-67-86

18. *Казаков А.Л., Спевак Л.Ф.* Аналитические и численные решения задачи об инициировании диффузионной волны для квазилинейной параболической системы // Прикладная механика и техническая физика. 2025. Т. 66, № 3. С. 217–229; DOI: 10.15372/PMTF202415542.

19. *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97-105.

20. *Almeida R.M.P., Duque J.C.M., Ferreira J., Robalo R.J.* Finite element schemes for a class of nonlocal parabolic systems with moving boundaries // Appl. Numer. Math. 2018. V. 127. P. 226–248; DOI: 10.1016/j.apnum.2018.01.007

21. *Clavero C., Gracia J.L.* An improved uniformly convergent scheme in space for 1D parabolic reaction–diffusion systems // Appl. Math. Comput. 2014. V. 243. P. 57–73; DOI: 10.1016/j.amc.2014.05.081

22. *Ruan W.* Wavefront solutions of degenerate quasilinear reaction–diffusion systems with mixed quasi-monotonicity // Nonlinear Analysis. 2019. Vol. 182. P. 75–96; DOI: 10.1016/j.na.2018.12.003

23. *Zhao Z., Cui H., Shen Y.* Traveling waves of a modified Holling-Tanner predator–prey model with degenerate diffusive // Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik. 2024. Vol. 75. Article number 205; DOI: 10.1007/s00033-024-02339-z

24. *Баутин С.П., Казаков А.Л.* Обобщённая задача Коши и её приложения. Новосибирск: Наука, 2006.

25. *Шабат А.Б., Эфендиев М.Х.* О приложениях формулы Фаа-Ди-Бруно // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9, № 3. С. 132–137.

26. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

27. *Chen C.S., Chen W., Fu Z.J.* Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods. Berlin, Heidelberg: Springer-Verl., 2013.

28. *Luo W.-H., Huang T.-Z., Gu X.-M., Liu Y.* Barycentric rational collocation methods for a class of nonlinear parabolic partial differential equations // Appl. Math. Lett. 2017. V. 68. P. 13-19; DOI: 10.1016/j.aml.2016.12.011

29. *Buhmann M.D.* Radial Basis Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

30. *Fornberg B., Flyer N.* Solving PDEs with radial basis functions // Acta Numerica. 2015. V. 24. P. 215–258; DOI: 10.1017/S0962492914000130

UDC 517.957:532.529

THE PROBLEM TO DIFFUSION WAVE INITIATION FOR A REACTION-DIFFUSION SYSTEM UNDER THE MIXED BOUNDARY CONDITIONS

© 2026 **A. L. Kazakov**[1], **L. F. Spevak**[2]

[1] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Lermontov st., 134, Irkutsk 664033, Russia,*
[2] *Institute of Engineering Science of UB RAS, Komsomolskaya st., 34, Ekaterinburg 620049, Russia*

E-mails: [a]kazakov@icc.ru, [b]lfs@imach.uran.ru

Received 29.12.2025, revised 21.09.2026, accepted 03.10.2026

Abstract. The paper deals with a new boundary value problem to a reaction-diffusion system of two degenerate nonlinear parabolic equations. The speciality of the problem formulation is the specification of different types of boundary conditions for two desired functions: a moving zero front is specified for one of them, and a boundary condition at a fixed point for another one. The purpose of the study is to construct solutions to the problem which have the form of diffusion waves with zero fronts. The new existence theorem of the solution in the class of analytical functions is formulated and constructively proved. A new numerical solution algorithm is proposed which is based on the collocation method and finite-difference time approximation. A computational experiment is performed to verify the algorithm. Numerical solutions are tested by the comparison with known exact solutions and by the estimation of equation residuals. The calculation results show good precision for various problem parameters, as well as the numerical convergence of the algorithm.

Keywords: nonlinear parabolic system, boundary conditions, degeneration, existence theorem, exact solution, numerical solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.304

REFERENCES

1. Vazquez J. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
2. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations. Berlin: Walter de Gruyte, 1995.
3. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1990.
4. Coussy O. Poromechanics. Chichester: Wiley and Sons, 2004.
5. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. Mathematical models of convection. Berlin: Walter De Gruyter, 2012.
6. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Ovcharova A. S. Simulation of convection in a two-phase system under conditions of diffusive evaporation in a closed region. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2023, Vol. 64, No. 4, pp. 564–574; DOI: 10.1134/S0021894423040028
7. Grindrod P. Patterns and Waves: Theory And Applications of Reaction-Diffusion Equations. N. Y.: Clarendon Press, 1991.
8. DiBenedetto E. Degenerate Parabolic Equations. N. Y.: Springer-Verl., 1993.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2026, Vol. 20, No. 3.

9. Antontsev S., Shmarev S. Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up. Paris: Atlantis, 2015.
10. Sidorov A.F. Izbrannye trudy: Matematika. Mehanika [Selected Works: Mathematics. Mechanics.]. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
11. Bautin S.P. Analiticheskaya teplovaya volna [Analytical heat wave]. Moscow: Fizmatlit, 2003 (in Russian).
12. Zel'dovich Ya.B., Kompaneec A.C. K teorii rasprostraneniya tepla pri teploprovodnosti, zavisyashchej ot temperatury [Regarding the theory of heat propagation in the case of temperature?dependent thermal conductivity]. *Collection dedicated to the 70th anniversary of Academician A.F. Ioffe*. Moscow: AS USSR Publ., 1950, pp. 61–71 (in Russian).
13. Barenblatt G.I. O nekotoryh neustanovivshihsya dvizheniyah zhidkosti i gaza v poristoj srede [On some unsteady flows of fluid and gas in a porous medium]. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1952, Vol. 16, Iss. 1, pp. 67–78 (in Russian).
14. Sidorov A.F. Analytic representations of solutions of nonlinear parabolic equations of time-dependent filtration (porous medium) type. *Soviet mathematics Doklady*, 1985, Vol. 31, pp. 40-–44.
15. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. Construction of Solutions to a Boundary Value Problem with Singularity for a Nonlinear Parabolic System. *J. Appl. Indust. Math.*, 2021, Vol. 15, pp. 616—626; DOI: 10.1134/S1990478921040050
16. Kazakov A.L., Spevak L.F. Diffusion-wave type solutions with two fronts to a nonlinear degenerate reaction-diffusion system. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, Vol. 63, No. 6, pp. 995-1004; DOI: 10.1134/S0021894422060128
17. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A., Spevak L. F. The Problem of Diffusion Wave Initiation for a Nonlinear Second-Order Parabolic System. *Proc. Steklov Institute of Mathematics*, 2023, Vol. 321, No. 1, pp. 109–126; DOI: 10.1134/S0081543823030112
18. Kazakov A. L., Spevak L. F. Analytical and numerical solutions of the problem of diffusion wave initiation for a quasilinear parabolic system. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2025, Vol. 66, No. 3, pp. 583-–593; DOI: 10.1007/s10958-025-07946-3
19. Kazakov A.L., Lempert A.A. Existence and uniqueness of the solution of the boundary-value problem for a parabolic equation of unsteady filtration. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, Vol. 54, No. 2, pp. 251–258; DOI: 10.1134/S0021894413020107
20. Almeida R.M.P., Duque J.C.M., Ferreira J., Robalo R.J. Finite element schemes for a class of nonlocal parabolic systems with moving boundaries. *Appl. Numer. Math.*, 2018, Vol. 127, pp. 226–248; DOI: 10.1016/j.apnum.2018.01.007
21. Clavero C., Gracia J.L. An improved uniformly convergent scheme in space for 1D parabolic reaction–diffusion systems. *Appl. Math. Comput.*, 2014, Vol. 243, pp. 57–73; DOI: 10.1016/j.amc.2014.05.081
22. Ruan W. Wavefront solutions of degenerate quasilinear reaction–diffusion systems with mixed quasi-monotonicity. *Nonlinear Analysis*, 2019, Vol. 182, pp. 75–96; DOI: 10.1016/j.na.2018.12.003
23. Zhao Z., Cui H., Shen Y. Traveling waves of a modified Holling-Tanner predator–prey model with degenerate diffusive. *Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Physik*, 2024, Vol. 75, Article number 205; DOI: 10.1007/s00033-024-02339-z
24. Bautin S.P., Kazakov A.L. Obobshchyonnaya zadacha Koshi i eyo prilozheniya [The generalized Cauchy problem and its applications]. Novosibirsk: Nauka, 2006 (in Russian).
25. Shabat A. B., Efendiev M. K. On applications of Faa-Di-Bruno formula. *Ufa Math. J.*, 2017, Vol. 9, No. 3, pp. 131–136; DOI: 10.13108/2017-9-3-131]
26. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations. N. Y.: Interscience, 2008.
27. Chen C.S., Chen W., Fu Z.J. Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods. Berlin, Heidelberg: Springer-Verl., 2013.
28. Luo W.-H., Huang T.-Z., Gu X.-M., Liu Y. Barycentric rational collocation methods for a class of nonlinear parabolic partial differential equations. *Appl. Math. Lett.*, 2017, Vol. 68, pp. 13-19; DOI: 10.1016/j.aml.2016.12.011

29. Buhmann M.D. Radial Basis Functions. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

30. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions. *Acta Numerica*, 2015, Vol. 24, pp. 215–258; DOI: 10.1017/S0962492914000130