УДК 519.622

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПОЗВОЛЯЕТ СОКРАТИТЬ ВРЕМЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

© 2026 А. Л. Карчевский

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

Поступила в редакцию 03.02.2025 г.; после доработки 03.02.2025 г.;
принята к публикации 03.10.2026 г.

Показано, что решение обратной задачи определения неизвестных параметров среды можно разделить на два этапа. Сначала предлагается решить задачу продолжения в подобласти, где параметры среды известны, а затем решить обратную задачу в подобласти, где эти параметры неизвестны и требуется их определить. Этот подход продемонстрирован на двух примерах: задаче прогнозирования разрушения дорожного покрытия и обратной динамической задаче сейсморазведки по определению упругих параметров тонкослоистого слоя. Показано, что этот подход позволяет значительно сократить время, необходимое для определения неизвестных параметров среды. В этих примерах предполагалось, что модель среды является горизонтально-слоистой. Для решения задач продолжения используется метод послойного пересчёта. Для рекурсивного пересчёта были получены выражения без накопления ошибок округления.

Ключевые слова: обратная задача, задача продолжения, остаточный функционал, горизонтально-слоистая среда.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.305

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается совместное решение задачи продолжения и решение обратной задачи по определению свойств среды. Такое совместное решение двух задач возможно, если, например, свойства среды известны в некоторой части области и неизвестны в другой. Примерами таких областей могут быть дорожное покрытие, взлётно-посадочная полоса аэродрома, верхняя часть археологического разреза и т. д. Если решить задачу продолжения до некоторой глубины, то можно получить постановку обратной задачи, которая ставится не на всей, а только на части области, причём эта часть может быть существенно меньше всей области. Предлагаемый подход демонстрируется на примере решения двух практических обратных задач.

Оптимизационный подход для решения обратной задачи является широко используемым на практике. Наверное 95% всех практических обратных задач решаются этим методом. Необходимо отметить, что оптимизационный подход к решению обратной задачи — это многократное решение прямой задачи. И в этом может скрываться основная проблема оптимизационного подхода — время решения обратной задачи существенно зависит от времени решения прямой задачи. Как пример, приведём работу [1]: время решения прямой задачи составляло 10 секунд, а время решения обратной задачи с применением оптимизационного подхода по определению трёх постоянных — 40 часов. Для ускорения вычислений можно применять различные подходы, например, применение суперкомпьютеров, но не всегда на практике это возможно. Можно применять параллельные вычисления для некоторых вычислительных этапов алгоритма решения обратной задачи. Например, для обратных задач в частотной области возможно применять естественное распараллеливание, поскольку прямая задача для каждого

параметра, которым является каждая пространственная и временная частоты, решается отдельно. В работе [2] предложен метод сопряжённого оператора, который позволяет сводить решение линейных обратных задач (например, обратные задачи по определению неизвестной правой части, начальных или краевых условий) к задаче типа проблемы моментов, для которых оптимизационный подход применим, но он не требует решения сопряжённой задачи для вычисления градиента функционала невязки. Для коэффициентных обратных задач метод сопряжённого оператора позволяет решать прямую и сопряжённую задачу параллельно, что в стандартном подходе можно было делать только последовательно. В обоих случаях (линейном и нелинейном) удаётся сократить время вычислений при оптимизационном решении обратной задачи как минимум в два раза. В предлагаемом в данной работе подходе решение задачи продолжения в подобласти, где параметры среды известны, и решение обратной задачи в подобласти, где параметры среды неизвестны, удаётся достичь сокращения времени вычислений за счёт уменьшения области (в некоторых случаях весьма существенной), в которой решается обратная задача. Необходимо отметить результаты работ [3, 4], в которых знание параметров первого слоя позволяет подавить результат многократных отражений, что облегчает решение обратной задачи с помощью стандартных средств, применяемых в современной геофизике при обработке реальных сейсмограмм. Данный аспект нами не будет рассматриваться, поскольку он требует отдельного исследования, а будет только показано к какой экономии времени вычислений может привести сокращение области, в которой решается обратная задача.

В двухмерном и трёхмерном случае задача продолжения является неустойчивой и требует применения методов регуляризации (см., например, [5]–[11]). В стационарном случае задача продолжения математически формулируются как задача Коши для эллиптического уравнения, в нестационарном — как задача для параболического или гиперболического уравнения с данными на времениподобной границе. Для численного решения задачи Коши для эллиптического уравнения предложено много различным методов численного решения (см., например, обзор во Введении в работе [12]); для численного решения уравнений с данными на времениподобной границе известны только два метода: метод оптимизации [13] и метод сопряжённого оператора [2]. Как правило, предлагаемые методы тестировались на симулированных данных. В работах [2], [14]–[16] задача Коши для эллиптического уравнения была решена для данных, полученных в ходе лабораторных экспериментов. Так же в работах [17, 18] представлено численное решение параболического уравнения с данными о времениподобной границе для обработки данных лабораторных экспериментов. Некоторые частные постановки задач продолжения можно найти в работах [19]–[21].

Предложенный в работе подход будет продемонстрирован на двух примерах: задача прогноза разрушения дорожного покрытия и обратная динамическая задача сейсмики по определению упругих параметров тонкослоистой пачки. Будет предполагаться, что модель среды является горизонтально-слоистой. В этом случае рассматриваемые обратные задачи будут одномерными, а задача продолжения будет корректной, поскольку она будет задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Для решения задачи продолжения будет использован метод послойного пересчёта.

Насколько нам известно, первым технологичным алгоритмом послойного пересчёта для решения дифференциального уравнения второго порядка для горизонтально-слоистой среды был алгоритм А.Н. Тихонова и Д.Н. Шахсуварова [22]. Однако этот алгоритм имел некоторые ограничения: аналитические выражения для расчёта искомых величин содержали экспоненты, показатели степеней которых имели положительные действительные части, что приводило к накоплению ошибок округления при послойном пересчёте. Этот недостаток был устранён в работах В.И. Дмитриева (см., например, [23, 24]). Он использовал идею прогонки, предложенную И.М. Гельфандом и О.В. Локуциевским [25]. Это позволило получить выражения для послойного пересчёта без накопления ошибок округления. В дальнейшем ме-

тод послойного пересчёта был разработан для численного решения систем дифференциальных уравнений второго порядка. В работах [26]–[28] рассмотрена система уравнений теории упругости для горизонтально-слоистых изотропных сред, в работах [29, 30] этот метод распространён на горизонтально-слоистые изотропные среды с поглощением, в работе [31] — на трансверсально-изотропные среды с осью симметрии, совпадающей с осью Oz, в работах [32, 33] — на горизонтально-слоистые среды любого типа анизотропии. Опыт работы [32, 33] позволил построить решение уравнений Максвелла для горизонтально-слоистой среды любого типом анизотропии [34], решение системы уравнений конвективного тепло- и влагопереноса [35] и решение дифференциального уравнения четвёртого порядка для поперечных колебаний кусочно-однородной балки [36]. В настоящее время метод послойного пересчёта признан наиболее подходящими для численного решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений второго порядка для горизонтально-слоистых сред [37] и часто используется для решения обратных задач оптимизационным методом (см., например, [38]–[50]).

Необходимо отметить, что в нашем случае метод послойного пересчёта будет применяться для решения задачи Коши, в то время как во всех вышеперечисленных случаях метод послойного пересчёта использовался для решения краевых задач. В вышеприведёных работах прогонка осуществлялась в два этапа: первый этап — вычисления прогоночных коэффициентов «снизу-вверх», второй этап — вычисление решения «сверху-вниз». В этом случае получаются выражения для рекуррентного пересчёта без накопления ошибок округления. В данной работе решения задачи продолжения, являющейся задачей Коши, осуществляется с помощью метода послойного пересчёта, вычисления ведутся так же в два этапа, но на каждом этапе «сверху-вниз», тем не менее полученые выражения позволяют осуществлять рекуррентный пересчёт без накопления ошибок округления.

1. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ

1.1. Математическая постановка задачи

Будем считать, что рассматривается дорожное покрытие, сооружённое в соответствие со строительными нормами и эксплуатируемое в соответствии с допустимыми нагрузками. Во время эксплуатации дорожного покрытия может происходить его деформирование или разрушение в следствие природных условий, например, поднятия грунтовых вод, или техногенных явлений, например, нарушение целостности грунта или потеря его однородности (см., например, [51]), содержание в грунте крупного инородного объекта (см., например, [53]), и т. д.

Рассмотрим задачу прогнозирования разрушения дорожного покрытия как задачу определения электромагнитных параметров грунта. На рис. 1 показано типовое строение дорожного покрытия и связанная с ним модель среды.

Будем считать, что электромагнитные параметры дорожного полотна известны, требуется определить электромагнитные параметры грунта. Сухой грунт имеет соответствующую диэлектричекую проницаемость. Если влажность грунта увеличивается в следствие повышения грунтовых вод, то относительная диэлектрическая проницаемость грунта так же должна увеличиться. Если для данного типа грунта имеется корреляционная зависимость влажности от относительной диэлектрической проницаемости, то по значению относительной диэлектрической проницаемости с достаточной точностью можно определить значение влажности грунта. При критических значениях влажности для предотвращения разрушения дорожного полотна следует провести работы по влагоотведению.

Пусть электромагнитное поле возбуждается источником стороннего тока

$$j(r,\phi,z,t) = (j_r, j_\phi, j_z)^T \equiv (0, j_\phi, 0)^T, \quad j_\phi(r,z,t) = f(t)\delta(r-r_0)\delta(z-z_*),$$

индекс ^{T} означает операцию транспонирования, z_* — координата источника на оси Oz, $z_* < 0$ (источник находится в воздухе), пусть z_* достаточно мало, $r_0 > 0$ — параметр размера источника, функция $f(t)$ описывает поведение источника в зависимости от времени.

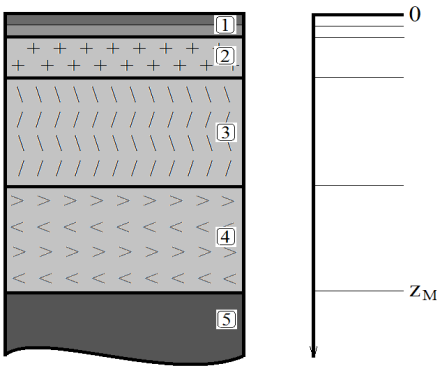


Рис. 1. (a) Типовое строение дорожного покрытия:
1 — асфальтобетон (4 см) или слой мелкозернистого асфальта (1 см)
и слой крупнозернистого асфальта (3 см), 2 — мелкий щебень (6 см),
3 — крупный щебень (25 см), 4 — щебёночно-песочная смесь (35 см), 5 — грунт.
(b) Модель среды

Считаем, что среда является изотропной, источник не зависит от угла ϕ, тогда уравнения Максвелла могут быть записаны в цилидрической системе координат, компоненты электромагнитного поля не будут зависить от угла ϕ. Учитывая вид источника, можно сказать, что только три компоненты электромагнитного поля из шести отличаются от нуля: E_ϕ, H_r и H_z (см., например, [55, 56]), и компонента E_ϕ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mu\epsilon_0\epsilon E_{\phi,tt} + \mu\sigma E_{\phi,t} = E_{\phi,zz} + E_{\phi,rr} + \frac{1}{r}E_{\phi,r} - \frac{1}{r^2}E_\phi - \mu j_{\phi,t}$$

На границах раздела слоёв z_n функции E_ϕ и $E_{\phi,z}$ остаются непрерывными. В начальный момент $t = 0$ электромагнитное поле отсутствовало. Считаем, что на поверхности произведены измерения

$$E_\phi|_{z=0} = \xi(r,t).$$

Применяя преобразование Лапласа по временной переменной t и преобразование Бесселя по пространственной переменной r, для функции $u(\nu,z,p)$, которая является образом функции $E_\phi(r,z,t)$, после некоторых упрощений и перехода к пределу $z_* \to 0$, получаем следующую постановку прямой задачи в частотной области:

$$u_{zz} - k^2 u = 0, \tag{1}$$

$$(u_z - k_0 u)|_{z=0} = \mu p f(p) g(\nu), \quad u|_{z\to\infty} = 0, \tag{2}$$

$$[u_z]_{z_n} = 0, \quad [u]_{z_n} = 0, \quad n = \overline{1,M}. \tag{3}$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения: $f(p)$ — образ Лапласа для функции $f(t)$, $p = \gamma - i\omega$ — параметр преобразования Лапласа, γ — параметр затухания, ω — круговая временная частота, $g(\nu) = r_0 J_1(r_0\nu)$, $J_1(r)$ — функция Бесселя 1-ого порядка, $\xi(\nu,p)$ — образ функции $\xi(r,t)$, кусочно-постоянная функция $k(z) = \sqrt{\nu^2 + p^2\mu\epsilon_0\epsilon(z) + p\mu\sigma(z)}$ и $\mathrm{Re}\{k(z)\} > 0$, для n-ого слоя $k_n = \sqrt{\nu^2 + p^2\mu\epsilon_0\epsilon_n + p\mu\sigma_n}$, в воздухе $k_0 = \sqrt{\nu^2 + p^2\mu\epsilon_0}$, $\epsilon_0 = 8.854\cdot 10^{-12}$(Ф/м) — диэлектрическая проницаемость вакуума, ϵ — относительная диэлектрическая проницаемость среды (для большинства геофизических сред лежит в интервале $[1, 80]$), σ — проводимость среды (См), μ — магнитная проницаемость среды (для большинства геофизических сред $\mu = 4\pi\cdot 10^{-7}$(Гн/м)).

Может быть сформулирована обратная задача: Определить электромагнитные параметры ϵ_{M+1} и σ_{M+1} подстилающего слоя $[z_M, \infty)$, если известно, что функция $u(\nu, z, p)$ удовлетворяет постановке прямой задачи (1)–(3), имеет место дополнительная информация

$$u|_{z=0} = \xi(\nu, p), \tag{4}$$

и предполагается, что известны электромагнитные параметры ϵ_n и σ_n $(n = \overline{1, M})$.

Стандартный путь решения обратной задачи (1)–(4) — это минимизация функционала невязки

$$J[\epsilon_{M+1}, \sigma_{M+1}] = \sum_{i,k} \bigl| u|_{z=0} - \xi(\nu_i, p_k) \bigr|^2, \tag{5}$$

здесь значения параметров ν_i и $p_k = \gamma - i\omega_k$ взяты из некоторых конечных интервалов.

Поскольку при постановке обратной задачи считаются известными электромагнитные параметры ϵ_n и σ_n $(n = \overline{1, M})$, может быть рассмотрена задача продолжения электромагнитного поля: На интервале $[0, z_M]$ необходимо найти решение дифференциального уравнения (1), которое удовлетворяет данным Коши (2) и (4).

Более точно, необходимо определить величины $u_z|_{z=z_M}$ и $u|_{z=z_M}$. Знание этих величин позволит определить электромагнитные параметры грунта достаточно просто.

1.2. Решение задачи продолжения

Приведём здесь основные этапы получения величин $u_z|_{z=z_M}$ и $u|_{z=z_M}$.

Рассмотрим функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$, связанные с функцией $u(\nu, z, p)$ следующим соотношением:

$$u_z = \alpha u + \beta. \tag{6}$$

Подставим (6) в (1)–(3) и получим, что функции $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ удовлетворяют следующим задачам:

$$\alpha' + \alpha^2 = k^2, \quad \alpha(0) = k_0, \quad [\alpha]_{z_n} = 0, \quad n = \overline{1, M}, \tag{7}$$

$$\beta' + \alpha\beta = 0, \quad \beta(0) = \mu p f(p) g(\nu), \quad [\beta]_{z_n} = 0, \quad n = \overline{1, M}. \tag{8}$$

Для краткости обозначим: $\alpha^n = \alpha(z_n)$, $\beta^n = \beta(z_n)$, $u_n = u(\nu, z_n, p)$.

В каждом n-ом слое решение дифференциального уравнения Риккати (7) может быть представлено в следующих видах:

$$\alpha(z) = k_n \frac{(\alpha^{n-1} + k_n) + (\alpha^{n-1} - k_n) e^{-2k_n(z - z_{n-1})}}{(\alpha^{n-1} + k_n) - (\alpha^{n-1} - k_n) e^{-2k_n(z - z_{n-1})}}, \tag{9}$$

$$\alpha(z) = k_n \frac{(\alpha^{n} + k_n) e^{2k_n(z - z_{n})} + (\alpha^{n} - k_n)}{(\alpha^{n} + k_n) e^{2k_n(z - z_{n})} - (\alpha^{n} - k_n)}, \tag{10}$$

решение дифференциального уравнения (8) может быть представлено в следующих видах:

$$\beta(z) = \beta^{n-1} e^{-\int\limits_{z_{n-1}}^{z} \alpha(x)\,dx} = \frac{2k_n e^{-k_n(z - z_{n-1})} \beta^{n-1}}{(\alpha^{n-1} + k_n) - (\alpha^{n-1} - k_n) e^{-2k_n(z - z_{n-1})}}, \tag{11}$$

$$\beta(z) = \beta^{n} e^{-\int\limits_{z_{n}}^{z} \alpha(x)\,dx} = \frac{2k_n e^{k_n(z - z_{n})} \beta^{n}}{(\alpha^{n} + k_n) e^{2k_n(z - z_{n})} - (\alpha^{n} - k_n)}, \tag{12}$$

и решение дифференциального уравнения (6) может быть получено в следующем виде:

$$u(\nu, z, p) = u_{n-1} e^{\int\limits_{z_{n-1}}^{z} \alpha(x)\,dx} + e^{\int\limits_{z_{n-1}}^{z} \alpha(x)\,dx} \int\limits_{z_{n-1}}^{z} \beta(y)\, e^{-\int\limits_{z_{n-1}}^{y} \alpha(x)\,dx} dy.$$

Используя (10) и (12), получим

$$u(\nu,z,p)=u_{n-1}\,e^{-k_n(z-z_{n-1})}\frac{(\alpha^n+k_n)e^{2k_n(z-z_n)}-(\alpha^n-k_n)}{(\alpha^n+k_n)e^{-2k_nh_n}-(\alpha^n-k_n)}$$
$$+\beta^n e^{k_n(z_n-z)}\frac{e^{-2k_nh_n}-e^{2k_n(z-z_n)}}{(\alpha^n+k_n)e^{-2k_nh_n}-(\alpha^n-k_n)}. \quad (13)$$

В соотношениях (9) и (11) вычисление функций $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ осуществляется «сверху-вниз», а в соотношениях (10) и (12) — «снизу-вверх». Для вывода выражения (13) для вычисления функции $u(\nu,z,p)$ «сверху-вниз» необходимо использовать выражения для функций $\alpha(z)$ и $\beta(z)$, для которых вычисление производится «снизу-вверх».

Для решения задачи продолжения, т. е. для определения величин $u_z|_{z=z_M}$ и $u|_{z=z_M}$ можем организовать вычисления следующим образом:

1. Вычислим значения α^n и β^n $(n=\overline{1,M})$, используя рекуррентные соотношения

$$\alpha^0=k_0,\quad \alpha^n=k_n\frac{(\alpha^{n-1}+k_n)+(\alpha^{n-1}-k_n)e^{-2k_nh_n}}{(\alpha^{n-1}+k_n)-(\alpha^{n-1}-k_n)e^{-2k_nh_n}}, \quad (14)$$

$$\beta^0=\mu pf(p)g(\nu),\quad \beta^n=\beta^{n-1}\frac{2k_ne^{-k_nh_n}}{(\alpha^{n-1}+k_n)-(\alpha^{n-1}-k_n)e^{-2k_nh_n}}, \quad (15)$$

которые получены из соотношений (9) и (11) и условий склейки из (7) и (8).

2. Зная величины α^n и β^n $(n=\overline{1,M})$, для вычисления величин u_n $(n=\overline{1,M})$ может быть использовано (см. (13)) рекуррентное соотношение

$$u_0=\xi(\nu,p),\quad u_n=\frac{2k_n\zeta_n}{(\alpha^n+k_n)e^{-2k_nh_n}-(\alpha^n-k_n)}, \quad (16)$$
$$\zeta_n=u_{n-1}e^{-k_nh_n}-\beta^n\frac{1-e^{-2k_nh_n}}{2k_n}.$$

Таким образом, величины $u_z|_{z=z_M}=\alpha^M u_M+\beta^M$ и $u|_{z=z_M}=u_M$ вычислены.

Необходимо заметить, что в выражениях (14)–(16) присутствуют только экспоненты, у которых действительные части показателей отрицательные. Это означает, что вычисление необходимых величин и рекуррентный пересчёт будет обходится без накопления ошибок округлений.

1.3. Решение обратной задачи

Целью решения обратной задачи является определение величин ϵ_{M+1} и σ_{M+1}. Необходимо заметить, что в силу условия затухания (2) решение дифференциального уравнения (2) в подстилающем слое имеет вид $ce^{-k_{M+1}z}$. Нетрудно получить соотношение

$$(u_z+k_{M+1}u)|_{z=z_M}=0.$$

Используя данное равенство, решение задачи продолжения условия склейки в точке $z=z_M$ (3), получим равенство

$$k_{M+1}=-\frac{\beta^M}{u_M}-\alpha^M,$$

откуда следует равенство

$$p\epsilon_0\epsilon_{M+1}+\sigma_{M+1}=\chi\equiv\frac{1}{p\mu}\left[\left(\frac{\beta^M}{u_M}+\alpha^M\right)^2-\nu^2\right],$$

из которого для электромагнитных параметров подстилающего слоя нетрудно получить следующие выражения:

$$\epsilon_{M+1} = \frac{1}{\epsilon_0\,\omega}\mathrm{Im}\{\chi\}, \quad \sigma_{M+1} = \frac{\gamma}{\omega}\,\mathrm{Im}\{\chi\} - \mathrm{Re}\{\chi\}. \tag{17}$$

Таким образом, обратная задача по определению электромагнитных параметров грунта дорожного полотна решена.

1.4. Вывод

При определении относительной диэлектрической проницаемости ϵ_{M+1} и проводимости σ_{M+1} подстилающего слоя (грунта дорожного полотна) решение задачи продолжения электромагнитного поля позволило не решать обратную задачу оптимизационным методом — минимизировать функционал невязки (5), а получить аналитические формулы (17).

2. ОБРАТНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА СЕЙСМИКИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ ТОНКОСЛОИСТОЙ ПАЧКИ

2.1. Математическая постановка задачи

В работах [57]–[61] решалась обратная динамическая задача сейсмики по определению упругих параметров тонкослоистой пачки, модель среды считалась изотропной или анизотропной, горизонтально-слоистой (см. рис. 2), обратная задача решалась в частотной области.

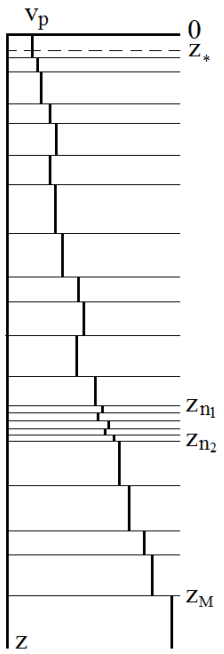


Рис. 2. Модель среды и скорость продольных волн v_p.
Тонкослоистая пачка располагается между границами z_{n_1} и z_{n_2}

Здесь рассмотрим постановки прямой и обратной задачи по определению скорости продольных волн v_p. Данные постановки получаются из общих постановок прямой и обратной задач, когда параметры преобразований Фурье по пространственным переменным равны ну-

лю. Таким образом, рассмотрим следующую постановку прямой задачи

$$\begin{gathered}\left(\rho v_p^2 u_z\right)_z - \rho p^2 u = 0,\\ \left(\rho v_p^2 u_z\right)\big|_{z=0} = 0, \quad u|_{z\to\infty} = 0,\\ \left[\rho v_p^2 u_z\right]_{z_*} = 0, \quad [u]_{z_*} = -\frac{f(p)}{\rho v_p^2}, \quad \left[\rho v_p^2 u_z\right]_{z_n} = 0,\\ [u]_{z_n} = 0, \quad n = \overline{1, M},\end{gathered} \tag{18}$$

здесь u — образ функции продольных смещений по оси Oz, ρ — плотность, $f(p)$ — образ Лапласа функции источника $f(t)$, $p = \gamma - i\omega$ — параметр преобразования Лапласа, γ — параметр затухания, ω — круговая временная частота, источник рсполагается на глубине z_* в первом слое, т. е. $0 < z_* < z_1$. Функции ρ и v_p являются кусочно-постоянными, обозначим $m = p\rho v_p$ и $k = p/v_p$, которые также будут кусочно-постоянными и в n-ом слое их постоянные значения будем обозначать m_n и k_n. Обозначим $h_n = z_n - z_{n-1}$ $(n = \overline{2, M})$, $h_1 = z_1 - z_*$.

Обратная задача. Определить скорости продольных волн $v_{p,n}$ в тонкослоистой пачке $(n = \overline{n_1 + 1, n_2})$, если известно, что функция $u(z, p)$ удовлетворяет постановке прямой задачи (18), известна дополнительная информация:

$$u|_{z=0} = \xi(p), \tag{19}$$

и предполагается, что плотность ρ известна во всей области, а скорости продольных волн $v_{p,n}$ известны в слоях с номерами $n = \overline{1, n_1}$ и $n = \overline{n_2 + 1, M + 1}$.

Стандартный путь решения обратной задачи (18)–(19) — это минимизация функционала невязки

$$J[v_{p,n_1+1}, \ldots, v_{p,n_2}] = \sum_k \big|u|_{z=0} - \xi(p_k)\big|^2, \tag{20}$$

здесь значения параметра преобразования Лапласса $p_k = \gamma - i\omega_k$ взяты из некоторых конечных интервалов.

2.2. Решение задачи продолжения

Рассмотрим функцию $\alpha(z)$, которая связаны с функцией $u(z, p)$ следующим соотношением:

$$\rho v_p^2 u_z = \alpha u. \tag{21}$$

Подставим (21) в (18), получим, что функция $\alpha(z)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\alpha' + \frac{1}{\rho v_p^2}\alpha^2 = \rho p^2, \quad \alpha(0) = 0, \quad [\alpha]_{z_n} = 0, \quad n = \overline{1, M}. \tag{22}$$

В каждом n-ом слое решение дифференциального уравнения Риккати из (22) может быть представлено в следующих видах:

$$\alpha(z) = m_n \frac{(\alpha^{n-1} + m_n) + (\alpha^{n-1} - m_n)e^{-2k_n(z - z_{n-1})}}{(\alpha^{n-1} + m_n) - (\alpha^{n-1} - m_n)e^{-2k_n(z - z_{n-1})}}, \tag{23}$$

$$\alpha(z) = m_n \frac{(\alpha^{n} + m_n)e^{2k_n(z - z_{n})} + (\alpha^{n} - m_n)}{(\alpha^{n} + m_n)e^{2k_n(z - z_{n})} - (\alpha^{n} - m_n)}, \tag{24}$$

решение дифференциального уравнения (21) имеет вид

$$u(z, p) = u_{n-1} e^{\frac{1}{\rho v_p^2}\int\limits_{z_{n-1}}^{z} \alpha(x)\,dx}.$$

Используя представление (24), получим

$$u(z,p)=u_{n-1}e^{-k_n(z-z_{n-1})}\frac{(\alpha^n+m_n)e^{2k_n(z-z_n)}-(\alpha^n-m_n)}{(\alpha^n+m_n)e^{-2k_nh_n}-(\alpha^n-m_n)}. \tag{25}$$

Для решения задачи продолжения вычисления могут быть организованы следующим образом:

1. Для интервала $[0,z_*]$ вычислим

$$\alpha_-^*\equiv\alpha(z_*-0)=m_1\frac{1-e^{2k_1z_*}}{1+e^{2k_1z_*}} \tag{26}$$

(см. представление (23) и краевое условие в (22)) и

$$u(z_*-0,p)=\frac{2m_1\xi(p)e^{-k_1z_*}}{(\alpha_-^*+m_1)e^{-2k_1z_*}-(\alpha_-^*-m_1)} \tag{27}$$

(см. дополнительную информацию (19) и представление (25)).

2. Из условий склейки в точке $z=z_*$ (см. (18)) следует

$$\begin{aligned}&u(z_*+0,p)=u(z_*-0,p)-\frac{f(p)}{\rho v_p^2},\\ &\alpha_+^*=\alpha_-^*\,\frac{u(z_*-0,p)}{u(z_*+0,p)}.\end{aligned} \tag{28}$$

3. Вычислим значения α^n $(n=\overline{1,n_1})$ с помощью рекуррентных соотношений

$$\alpha^0=\alpha_+^*,\quad \alpha^n=m_n\frac{(\alpha^{n-1}+m_n)+(\alpha^{n-1}-m_n)e^{-2k_nh_n}}{(\alpha^{n-1}+m_n)-(\alpha^{n-1}-m_n)e^{-2k_nh_n}}, \tag{29}$$

которые получены из (23) и условий склейки в (22).

4. Используя вычисленные α^n $(n=\overline{1,n_1})$, вычислим u_n $(n=\overline{1,n_1})$ с помощью рекуррентных соотношений

$$u_0=u(z_*+0,p),\quad u_n=\frac{2u_{n-1}m_ne^{-k_nh_n}}{(\alpha^n+m_n)e^{-2k_nh_n}-(\alpha^n-m_n)} \tag{30}$$

(см. (25)).

5. Вычислим значения α^n $(n=\overline{M,n_2+1})$, используя рекуррентные соотношения

$$\alpha^M=-m_{M+1},\quad \alpha^{n-1}=m_n\frac{(\alpha^n+m_n)e^{-2k_nh_n}+(\alpha^n-m_n)}{(\alpha^n+m_n)e^{-2k_nh_n}-(\alpha^n-m_n)} \tag{31}$$

(см. представление (24), условия склейки и условия затухания на бесконечности в (22)).

Таким образом, задача продолжения поля решена, т. е. вычислены величины $u|_{z=z_{n_1}}=u_{n_1}$ и $\rho v_p^2u_z|_{z=z_{n_1}}=\alpha^{n_1}u_{n_1}$ и получено краевое условие $\bigl(\rho v_p^2u_z-\alpha^{n_2}u\bigr)|_{z=z_{n_2}}=0$.

2.3. Решение обратной задачи

После решения задачи продолжения переформулируем прямую задачу, которая будет поставлена на меньшем интервале: на интервале $[z_{n_1},z_{n_2}]$ необходимо найти решение дифференциального уравнения

$$\bigl(\rho v_p^2u_z\bigr)_z-\rho p^2u=0, \tag{32}$$

для решения которого в точках z_n ($n = \overline{n_1+1, n_2-1}$) имеют место условия склейки

$$\left[\rho v_p^2 u_z\right]_{z_n} = 0, \quad [u]_{z_n} = 0, \tag{33}$$

и выполняются краевые условия

$$\left(\rho v_p^2 u_z\right)\big|_{z_{n_1}} = \alpha^{n_1} u_{n_1}, \quad \left(\rho v_p^2 u_z - \alpha^{n_2} u\right)|_{z=z_{n_2}} = 0. \tag{34}$$

Для нахождения неизвестных скоростей продольных волн в слоях $[z_{n-1}, z_n]$, $n = \overline{n_1+1, n_2}$, может быть сформулирована обратная задача: найти величины $v_{p,n}$, $n = \overline{n_1+1, n_2}$, если о решении прямой задачи (32)–(34) известна дополнительная информация

$$u|_{z=z_{n_1}} = u_{n_1}. \tag{35}$$

Прежде чем привести выражения для численного решения обратной задачи (32)–(35), получим выражения для решения прямой задачи (32)–(34) в точке $z = z_{n_1}$.

Рассмотрим функцию $\zeta(z)$, которая связана с функцией $u(z,p)$ следующим соотношением:

$$\rho v_p^2 u_z = \zeta u. \tag{36}$$

Подставим соотношение (36) в (32), получим, что функция $\zeta(z)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\zeta' + \frac{1}{\rho v_p^2}\zeta^2 = \rho p^2, \quad \zeta|_{z=z_{n_2}} = \alpha^{n_2}, \quad [\zeta]_{z_n} = 0, \quad (n = \overline{n_1+1, n_2-1}). \tag{37}$$

По рекуррентным соотношениям (см. (24)) рассчитаем величины ζ^n ($n = \overline{n_2, n_1+1}$):

$$\zeta^{n_2} = \alpha^{n_2}, \quad \zeta^{n-1} = m_n \frac{(\zeta^n + m_n)e^{-2k_n h_n} + (\zeta^n - m_n)}{(\zeta^n + m_n)e^{-2k_n h_n} - (\zeta^n - m_n)}. \tag{38}$$

После рекуррентного пересчёта (38) и использования краевого условия в точке $z = z_1$ (34) получим выражение для решения дифференциального уравнения (36) в точке $z = z_1$:

$$u|_{z=z_{n_1}} = \frac{\alpha^{n_1}}{\zeta^{n_1}} u_{n_1}. \tag{39}$$

Сравнение выражений (35) и (39) позволяет сделать вывод, что решение обратной задачи (32)-(35) эквивалентно решению обратной задачи по нахождению неизвестных значений скоростей продольных волн в слоях $[z_{n-1}, z_n]$ ($n = \overline{n_1+1, n_2}$) для постановки прямой задачи (37) с дополнительной информацией о решении

$$\zeta|_{z=z_{n_1}} = \alpha^{n_1}, \tag{40}$$

которая численно может решаться при помощи минимизации функционала невязки:

$$\Phi[v_{p,n_1+1}, \ldots, v_{p,n_2}] = \sum_{k=1}^{K} \left|\zeta^{n_1} - \alpha^{n_1}\right|^2. \tag{41}$$

Поскольку величины ζ^{n_1} и α^{n_1} зависят от параметра преобразования Лапласа p, то в (41) суммирование ведётся по индексу k для величин $p_k = \gamma - i\omega_k$, где значения ω_k выбираются из некоторого конечного интервала $[\underline{\omega}, \overline{\omega}]$. В работах [57]-[59] подробно исследовано, какое влияние на поведение функционала невязки оказывают параметры γ, $\underline{\omega}$, $\overline{\omega}$, количество K и величина шага для выбора значений ω_k из интервала $[\underline{\omega}, \overline{\omega}]$. В этих работах предложена сратегия минимизации для поиска глобального минимума у функционалов невязки, подобных функционалу (41). При минимизации следование данной стратегии является обязательным, поскольку функционал невязки (41) имеет локальные минимумы и максимумы, а предложенная стратегия позволяет обойти их и достичь точки глобального минимума.

2.4. Вывод

Данный пример решения обратной задачи показал, что, во-первых, задача продолжения может решаться не в полном объёме, поскольку можно отказаться от вычисления величины u_n на шаге 4, т. к. было показано, что постановка обратной задачи (32)–(35) эквивалентна постановке обратной задачи (37), (40), для которой требуется только вычисление дополнительной информации (40). Во-вторых, полная модель среды (см. рис. **??**) может содержать 70–80 слоёв, а модель тонкослоистой пачки может содержать всего лишь 4–5 слоёв. Поскольку, как показывают полученные выше выражения, время решения прямой задачи пропорционально зависит от количества слоёв в модели среды, поскольку используется рекурентный пересчёт со слоя на слой. Следовательно, для вышерассмотренного примера время решения прямой задачи может быть сокращено в 14–20 раз, и, следовательно, во столько же раз уменьшится время решения обратной задачи.

3. ЗАМЕЧАНИЕ

Опыт работ [32]–[36] позволяет заключить, что вышеприведённый подход может быть распространён на решения задачи продолжения и обратной задачи для системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\big(AU_z + BU\big)_z + B^T U_z - DU = 0, \tag{42}$$

к которой в частотной области сводятся система дифференциальных уравнений теории упругости (см. [32, 33]), уравнения Максвелла (см. [34]) и другие (см., например, [35, 36]).

В (42) A, B и D — квадратные матрицы размерности два или три, U — двух- или трёхкомпонентный вектор-столбец, размерность которого зависит от количества уравнений в изначальной системе дифференциальных уравнений.

Для решения задачи продолжения для системы дифференциальных уравнений (42) так же могут быть получены выражения для рекуррентного пересчёта без накопления ошибок округления.

ВЫВОДЫ

Как показали вышеприведённые примеры, совместное решение задачи продолжения в той части области, где параметры среды известны, и решение обратной задачи по определению параметров среды в части области, где они неизвестны, может существенно ускорить скорость решения обратной задачи. Первый пример показал, что при определении электромагнитных параметров грунта дорожного покрытия можно отказаться от оптимизационного подхода при решении обратной задачи, поскольку после решения здачи продолжения для искомых параметров получены аналитические выражения. Второй пример показал, что время решения прямой задачи, и, следовательно, время решения обратной задачи может быть значительно уменьшено.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karchevsky A.L., Nazarov L.A., Nazarova L.A.* New method to interpret the 'canister test' data for determining kinetic parameters of coalbed gas: theory and experimen // Inverse Probl. Sci. En. 2021. V. 29. P. 2551–2560; DOI: 10.1080/17415985.2021.1936516
2. *Karchevsky A.L.* Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2013. V. 1. P. 4–20; https://ejmca.enu.kz/assets/files/1-2-1.pdf
3. *Fatyanov A.G.* A wave method of suppressing waves for any complex subsurface geometry // Numer. Anal. Appl. 2012. V. 5. P. 187–190; DOI: 10.1134/S1995423912020140
4. *Fatyanov A.G.* Wave method for multiple wave suppression without knowladge of a depth-velocity mediuum model // Dokl. Earth Sci. 2010 V. 435 P. 1535–1538; DOI: 10.1134/S1028334X10110279
5. *Тихонов А.Н.* Сборник научных трудов. В 10 т. М.: Наука, 2009
6. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Y.* Solutions of Ill-Posed Problems. N. Y.: John Wiley and Sons, 1977.
7. *Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Vasiliev V.G.* Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics. V. 167. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verl., 1970.
8. *Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P.* Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. Providence, American Mathematical Society, 1986.
9. *Vasin V.V., Ageev A.L.* Некорректно поставленные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: Наука, 1993.
10. *Васин В.В., Еремин И.И.* Операторы и итерационные процессы типа Фейера. Теория и приложения. Москва-Ижевск, Институт компьютерных технологий, Научный центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.
11. *Ягола А.Г., Яньфэй В., Степанова И.Е., Тараненко В.Н.* Обратные задачи и методы их решения. Применение в геофизике. М.:, БИНОМ, Лаборатория знаний, 2014.
12. *Sibiryakov N.E., Kochkin D.Yu., Kabov O.A., Karchevsky A.L.* Determining the heat flux density in the area of a contact line during the evaporation of liquid into a bubble // J. Appl. Ind. Math. 2023. V. 17. P. 628–639; DOI: 10.1134/S199047892303016X
13. *Belonosov A., Shishlenin M.* Regularization Methods of the Continuation Problem for the Parabolic Equation // Numerical Analysis and Its Applications, 6th Internat. Conf. NAA, 2016, P. 220–226; DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0_22
14. *Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A.* Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line // Appl. Math. Model. 2016. V. 40. P. 1029–1037; DOI: 10.1016/j.apm.2015.06.018
15. *Cheverda V.V., Marchuk I.V., Karchevsky A.L., Orlik E.V., Kabov O.A.* Experimental investigation of heat transfer in a rivulet on the inclined foil // Thermophys. Aeromech. 2016. V. 23. P. 415–420; DOI: 10.1134/S0869864316030112
16. *Cheverda V.V., Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A.* Heat flux density in the region of droplet contact line on a horizontal surface of a thin heated foil // Thermophys. Aeromech. 2017. V. 24. P. 803–806; DOI: 10.1134/S086986431705016X
17. *Karchevsky A.L.* Development of the heated thin foil technique for investigating nonstationary transfer processes // Interfacial Phenom. Heat Transf. 2018. V. 6. P. 179–185; DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2018028949
18. *Karchevsky A.L.* Numerical solving the heat equation with data on a time-like boundary for the heated thin foil technique // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2020. V. 8. P. 4–14; DOI: 10.32523/2306-6172-2020-8-4-4-14
19. *Япарова Н.М.* О различных подходах к решению обратных краевых задач тепловой диагностики // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика, механика, физика. 2012. Т. 7. С. 60–67.
20. *Япарова Н.М.* Численное моделирование решений обратной краевой задачи теплопроводности // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2013. Т. 6. С. 112–124.
21. *Solodusha S.V., Yaparova N.M.* Numerical solving an inverse boundary value problem of heat conduction using Volterra equations of the first kind // Numer. Analys. Appl. 2015. V. 8. P. 267–274; DOI: 10.1134/S1995423915030076

22. *Тихонов А.Н., Шахсуваров Д.Н.* Метод моделирования ТЕМ полей в слоистых средах // Изв. АН СССР, сер. Геофиз. 1956. V. 3. С. 251–254.

23. *Дмитриев В.И.* Универсальный метод инверсии электромагнитного поля в слоистых средах // Выч. мет. и прогр. МГУ. 1968. Т. 10. С. 55–65.

24. *Дмитриев В.И., Федорова Е.А.* Численное моделирование электромагнитных полей в слоистых средах // Выч. мет. и прогр. МГУ. 1980. Т. 32. С. 150–183.

25. *Гельфанд И.М., Локуциевский О.В.* Метод «развертки» для решения разностных уравнений // В кн.: Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1980. С. 283–309.

26. *Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И.* Метод инверсии стационарных упругих волновых полей в слоистых средах // Численный метод в геофизике, Труды Моск. ун-та. 1979. С. 3–12.

27. *G.V. Akkuratov, V.I. Dmitriev* A method of calculating the field of steady-state elastic oscillations in a stratified medium // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1984. V. 24. P. 166–176; DOI: 10.1016/0041-5553(84)90138-1

28. *Pavlov V.M.* A convienent technique for calculating synthetic seismograms in layered half-space // Proc. Internat. Conf. Problems of Geocosmos, St. Peteburg, 03–08 June 2002. P. 320–323.

29. *Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г.* Метод инверсии нестационарных волновых полей в неупругих слоистых средах // Докл. Акад. Наука СССР. 1988. Т. 301. С. 834–839.

30. *Фатьянов А.Г.* Полуаналитические решения прямых динамических задач для слоистых сред // Докл. Акад. Наука СССР. 1990. Т. 310. С. 323–327.

31. *Фатьянов А.Г.* Нестационарные волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением // Препринт 857. Вычислительный центр СО РАН, Новосибирск, 1989.

32. *Karchevsky A.L.* A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media // Russ. Geol. Geophys. 2005. V. 46. P. 339–351.

33. *A.L. Karchevsky* Direct dynamical problem of seismics for horizontaly stratified media // Sib. Electron. Math. Rep. 2005. V. 2. P. 23–61; http://semr.math.nsc.ru/v2/p23-61.pdf

34. *Karchevsky A.L.* A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media // Russ. Geol. Geophys. 2007. V. 48. P. 689–695; DOI: 10.1016/j.rgg.2006.08.005

35. *Karchevsky A.L., Rysbayuly B.R.* Analitical expressions for a solution of convective heat and moisture transfer equations in the frequency domain for layered media // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3. P. 55–67; https://ejmca.enu.kz/assets/files/3-4-3.pdf

36. *Karchevsky A.L.* Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types // J. Appl. Ind. Math. 2020. V. 14. P. 52–69; DOI: 10.1134/S1990478920040043

37. *Somersalo E., Cheney M., Isaacson D., Isaacson E.* Layer stripping: a direct numerical method for impedance imaging // Inverse Probl. 1991. V. 7. P. 899–926; DOI: 10.1088/0266-5611/7/6/011

38. *Karchevsky A.L.* Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity // J. Inverese Ill-Posed Probl. 2009. V. 17. P. 385–402; DOI: 10.1515/JIIP.2009.026

39. *Durdiev U.D.* Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. V. 17. P. 179–189; DOI: 10.33048/semi.2020.17.013

40. *Bozorov Z.R.* Numerical determining a memory function of a horizontallystratified elastic medium with aftereffect // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2020. V. 8. P. 4–16; DOI: 10.32523/2306-6172-2020-8-2-4-16

41. *Vasil'ev V.I., Kardashevsky A.M., Popov V.V.* Iterative solution of a retrospective inverse heat conduction problem with inhomogeneous dirichlet boundary conditions // J. Appl. Ind. Math. 2022. V. 16. P. 841-–852; DOI: 10.1134/S1990478922040238

42. *Vasil'ev V.I., Kardashevsky A.M.* Iterative identification of the diffusion coefficient in an initial boundary value problem for the subdiffusion equation // J. Appl. Ind. Math. 2021. V. 15. P. 343—354; DOI: 10.1134/S1990478921020162

43. *Aida-zade K.R., Rahimov A.B.* Identification of piecewise constant filtration parameters and boundaries of their constancy domains // Autom Remote Control. 2017. V. 78. P. 1404—1416; DOI: 10.1134/S0005117917080021
44. *Fatyanov A.G., Burmin V.Y.* Occurrence of precursors of pkp waves in the layered radial-symmetric Earth // Dokl. Earth Sc. 2019. V. 489. P. 1313—1317; DOI: 10.1134/S1028334X19110011
45. *Fatyanov A.G., Burmin V.Y.* The P-Wave focusing effect in a low-velocity core of the earth: analytical solution // Dokl. Earth Sc. 2018. V. 478. P. 120-–123; DOI: 10.1134/S1028334X1801021X
46. *Iskakov K.T., Boranbaev S.A., Uzakkyzy N.* Wavelet processing and filtering of the radargram trace // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2017. V. 5. P. 43–54; https://ejmca.enu.kz/assets/files/5-4-4.pdf
47. *Iskakov K., Sagindykov K., Mukhambetkaliyev K., Kalmenov K., Seitkhanova A.* Study of pavement anomalies using GPR of OKO-2 series // Material and Mechanical Engineering Technology. 2023. V. 4. P. 42–46; DOI: 10.52209/2706-977X_2023_4_42
48. *Iskakov K.T., Boranbaev S.A., Oralbekova Zh.O., Zhusupov T.A., Mukhambetkaliev K.K., Seytkhanova A.V.* Software for determining the geological section of the road path // Bulletin of D. Serikbaev EKTU. 2023. V. 4. P. 220–228; DOI: 10.51885/1561-4212_2023_4_220
49. *Durdiev D.K., Merajova S.B.* Inverse problem for an equation of mixed parabolic–hyperbolic type with a Bessel operator // J. Appl. Ind. Math. 2022. V. 16. P. 394-–402; DOI: 10.1134/S1990478922030036
50. *Меражова С.Б.* О численном решении обратной задачи для уравнения смешанного параболическо-гиперболического типа с целью определения правой части уравнения // Мат. заметки СВФУ. 2022. Т. 3. С. 108–127; https://cyberleninka.ru/article/n/o-chislennom-reshenii-obratnoy-zadachi-dlya-uravneniya-smeshannogo-parabolo-giperbolicheskogo-tipa-po-opredeleniyu-pravoy -chasti
51. *Smogunov V.V., Artamonov D.V., Avdeev A.A.* Analysis of road destruction mechanisms // Proc. Internat. Symposium «Reliability and Quality». 2010. V. 2. P. 103–105; https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-mehanizmov-razrusheniy-dorog
52. *Бондарева Е.Д., Клековкина М.П.* Проектирование покрытий автомобильных и городских дорог. М.: КноРус, 2024.
53. *Zhartybayeva M., Oralbekova Zh.O., Iskakov K.T.* The interpretation of the radarograms on the basis of experimental data // Acta Phys. Pol. A. 2015. V. 128; https://api.semanticscholar.org/CorpusID:59040708
54. *Баранчук К.И., Искаков К.Т., Кренке Н.А., Миргаликизы Т.М., Модин И.Н., Хабдулина М.К.* Геофизические исследования курганов и межкурганного пространства при инженерных изысканиях для строительства // Инженерные изыскания. 2015. Т. 12. С. 34–39.
55. *Romanov V.G., Karchevsky A.L.* Determination of permittivity and conductivity of medium in a vicinity of a well having complex profile // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2018. V. 6. P. 64–74; DOI: 10.32523/2306-6172-2018-6-4-62-72
56. *Romanov V.G., Kabanikhin S.I.* Inverse Problems for Maxwell's Equations. VSP, Utrecht, 1994.
57. *Kurpinar E., Karchevsky A.L.* Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media // Inverse Probl. 2004. V. 20. P. 953-976; DOI: 10.1088/0266-5611/20/3/018
58. *Karchevsky A.L.* Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers // J. Inverese Ill-Posed Probl. 2004. V. 12. P. 519–634; DOI: 10.1515/1569394042531332
59. *Karchevsky A.L.* Analysis of solving of the inverse dynamical problem of seismics for horisontally stratified anisotropic medium // Russ. Geol. Geophys. 2006. V. 47. P. 1150–1164; https://www.researchgate.net/publication/258770524_Analysis_of_solving_of_the_inverse_dynamical_problem_of_seismics_for_horisontally_stratified_anisotropic_media
60. *Kurpinar E., Karchevsky A.L.* Finding of the elastic parameters of a horizontal (thinly stratified) anisotropic layer // Appl. Anal. 2008. V. 87. P. 1179–1212; DOI: 10.1080/00036810802378612
61. *Karchevsky A.L.* Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers // J. Inverese Ill-Posed Probl. 2010. V. 18. P. 371–388; DOI: 10.1515/jiip.2010.015

UDC 519.622

SOLVING THE CONTINUATION PROBLEM ALLOWS REDUCING THE TIME REQUIRED TO SOLVE THE INVERSE PROBLEM

© 2026 **A. L. Karchevsky**

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Acad. Koptyug ave., 4, Novosibirsk 630090, Russia

Received 03.02.2025, revised 03.02.2025, accepted 03.10.2026

Abstract. This paper shows that soluving an inverse problem of determining unknown parameters of the medium can be divided into two stages. First, it is proposed to solve the continuation problem into the subdomain where medium parameters are known, and then solve the inverse problem in the subdomain where these parameters are unknown and their determination is required. This approach is demonstrated using two examples: the problem of predicting the destruction of a road surface and the inverse dynamic problem of seismics to determine the elastic parameters of a thin-stratified layer. It was shown that this approach can significantly reduce the time required to determine unknown medium parameters. For these examples, it was assumed that the model of the medium is horizontally layered. To solve the problems of continuation, the method of layer-by-layer recalculation is used; for the recurrent recalculation, expressions without accumulation of rounding errors were obtained.

Keywords: inverse problem, continuation problem, residual functional, horizontally layered medium.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.205

REFERENCES

1. Karchevsky A.L., Nazarov L.A., Nazarova L.A. New method to interpret the 'canister test' data for determining kinetic parameters of coalbed gas: theory and experiment. *Inverse Probl. Sci. En.*, 2021, Vol. 29, pp. 2551–2560; DOI: 10.1080/17415985.2021.1936516
2. Karchevsky A.L. Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2013, Vol. 1, pp. 4–20; https://ejmca.enu.kz/assets/files/1-2-1.pdf
3. Fatyanov A.G. A wave method of suppressing waves for any complex subsurface geometry. *Numer. Anal. Appl.*, 2012, Vol. 5, pp. 187–190; DOI: 10.1134/S1995423912020140
4. Fatyanov A.G. Wave method for multiple wave suppression without knowladge of a depth-velocity mediuum model. *Dokl. Earth Sci.*, 2010, Vol. 435, pp. 1535–1538; DOI: 10.1134/S1028334X10110279
5. Tikhonov A.N Collection of scientific works. In 10 Vol. Moscow: Nauka, 2009 (In Russian).
6. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Solutions of Ill-Posed Problems. N. Y.: John Wiley and Sons, 1977.
7. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Vasiliev V.G. Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 167. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verl., 1970.
8. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. Providence, AMS, 1986.
9. Vasin V.V., Ageev A.L. Nekorrektno postavlennye zadachi s apriornoj informaciej [Ill-posed problems with a priori information]. Ekaterinburg: Nauka, 1993 (in Russian).
10. V.V. Vasin, I.I. Eremin, Operatory i iteracionnye processy tipa Fejera. Teoriya i prilozheniya. [Operators and iteration processes of the Feyer type. Theory and applications]. [In Russian]. Moscow-Izhevsk, Institute of Computer Technologies, Research Center «Regular and Chaotic Dynamics», 2005.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2026, Vol. 20, No. 3.

11. A.G. Yagola, V. Yanfei, I.E. Stepanova, V.N. Taranenko Obratnye zadachi i metody ih resheniya. Primenenie v geofizike. [Inverse problems and methods for their solution. Applications in geophysics]. Moscow: BINOM, Laboratoriya znanii, 2014 (in Russian).
12. Sibiryakov N.E., Kochkin D.Yu., Kabov O.A., Karchevsky A.L. Determining the heat flux density in the area of a contact line during the evaporation of liquid into a bubble. *J. Appl. Ind. Math.*, 2023, Vol. 17, pp. 628–639; DOI: 10.1134/S199047892303016X
13. Belonosov A., Shishlenin M. Regularization Methods of the Continuation Problem for the Parabolic Equation. *Numerical Analysis and Its Applications, 6th Internat. Conf.*, NAA, 2016, pp. 220–226; DOI: 10.1007/978-3-319-57099-0_22
14. Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line. *Appl. Math. Model.*, 2016, Vol. 40, pp. 1029–1037; DOI: 10.1016/j.apm.2015.06.018
15. Cheverda V.V., Marchuk I.V., Karchevsky A.L., Orlik E.V., Kabov O.A. Experimental investigation of heat transfer in a rivulet on the inclined foil. *Thermophys. Aeromech.*, 2016, Vol. 23, pp. 415–420; DOI: 10.1134/S0869864316030112
16. Cheverda V.V., Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Heat flux density in the region of droplet contact line on a horizontal surface of a thin heated foil. *Thermophys. Aeromech.*, 2017, Vol. 24, pp. 803–806; DOI: 10.1134/S086986431705016X
17. Karchevsky A.L. Development of the heated thin foil technique for investigating nonstationary transfer processes. *Interfacial Phenom. Heat Transf.*, 2018, Vol. 6, pp. 179–185; DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2018028949
18. Karchevsky A.L. Numerical solving the heat equation with data on a time-like boundary for the heated thin foil technique. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2020, Vol. 8, pp. 4–14; DOI: 10.32523/2306-6172-2020-8-4-4-14
19. Yaparova N.M., [On various approaches to solving inverse boundary value problems of thermal diagnostics]. *Vestn. YUUrGU. Ser. Matematika, Mehanika, Fizika* [Vestn. SUSU, Ser. Math., Mech., Phys.], 2012, Vol. 7, pp. 60–67 (in Russian).
20. N.M. Yaparova, Chislennoe modelirovanie reshenij obratnoj kraevoj zadachi teploprovodnosti [Numerical modeling of solutions to the inverse boundary value problem of heat conduction]. *Vestn. YUUrGU. Ser. Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* [Vestn. SUSU, series Math. Modeling and Programming], 2013, Vol. 6, pp. 112–124 (in Russian).
21. Solodusha S.V., Yaparova N.M. Numerical solving an inverse boundary value problem of heat conduction using Volterra equations of the first kind. *Numer. Analys. Appl.*, 2015, Vol. 8, pp. 267–274; DOI: 10.1134/S1995423915030076
22. A.N. Tikhonov, D.N. Shakhsuvarov, Metod modelirovaniya TEM polej v sloistyh sredah [A method for modeling TEM fields in layered media]. *Izv. AN SSSR, ser. Geofiz.* [Izv. AN SSSR, Ser. Geofiz.], 1956, Vol. 3, pp. 251–254 (in Russian).
23. V.I. Dmitriev, [A universal method for inversion of the electromagnetic field in layered media]. *Vych. Met. Prog.* [Numerical Methods and Programming], 1968, Vol. 10, pp. 55–65 (in Russian).
24. V.I. Dmitriev, E.A. Fedorova Chislennoe modelirovanie ehlektromagnitnyh polej v sloistyh sredah [Numerical modeling of electromagnetic fields in layered media]. *Vych. Met. Prog.* [Numerical Methods and Programming], 1980, Vol. 32, pp. 150–183 (in Russian).
25. Gel'fand I.M., Lokutsievskii O.V. , Metod «razvertki» dlya resheniya raznostnyh uravnenij [The «sweep» method for solving difference equations]. In book: S.K. Godunov, V.S. Ryaben'kii, Vvedenie v Teoriyu Raznostnyh Shem [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Fizmatgiz, 1980, pp. 283–309 (in Russian).
26. G.V. Akkuratov, V.I. Dmitriev Metod inversii stacionarnyh uprugih volnovyh polej v sloistyh sredah [A method for inversion of stationary elastic wavefields in layered media]. *Chislennyj metod v geofizike, Trudy Mosk. Un-ta* [Numerical method in geophysics, Proceedings of Moscow University], 1979, pp. 3–12 (in Russian).
27. G.V. Akkuratov, V.I. Dmitriev A method of calculating the field of steady-state elastic oscillations in a stratified medium. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1984, Vol. 24, pp. 166–176; DOI: 10.1016/0041-5553(84)90138-1

28. Pavlov V.M. A convienent technique for calculating synthetic seismograms in layered half-space. *Proc. Internat. Conf. Problems of Geocosmos, St. Peteburg*, 03–08 June 2002, pp. 320–323.

29. A.G. Fatianov, B.G. Mikhailenko Metod inversii nestacionarnyh volnovyh polej v neuprugih sloistyh sredah [A method for inversion of non-stationary wave fields in non-elastic layered media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1988, Vol. 301, pp. 834–839 (in Russian).

30. A.G. Fatianov Poluanaliticheskie resheniya pryamyh dinamicheskih zadach dlya sloistyh sred [Semi-analytical solutions to forward dynamic problems for layered media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1990, Vol. 310, pp. 323–327 (in Russian).

31. A.G. Fatianov Nestacionarnye volnovye polya v neodnorodnyh anizotropnyh sredah s pogloshcheniem [Non-stationary wave fields in inhomogeneous anisotropic media with absorption. Preprint 857, Computing Center SB RAS, Novosibirsk, 1989 (in Russian).

32. Karchevsky A.L. A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media. *Russ. Geol. Geophys.*, 2005, Vol. 46, pp. 339–351.

33. A.L. Karchevsky Direct dynamical problem of seismics for horizontaly stratified media. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2005, Vol. 2, pp. 23–61; http://semr.math.nsc.ru/v2/p23-61.pdf

34. Karchevsky A.L. A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media. *Russ. Geol. Geophys.*, 2007, Vol. 48, pp. 689–695; DOI: 10.1016/j.rgg.2006.08.005

35. Karchevsky A.L., Rysbayuly B.R. Analitical expressions for a solution of convective heat and moisture transfer equations in the frequency domain for layered media. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2015, Vol. 3, pp. 55–67; https://ejmca.enu.kz/assets/files/3-4-3.pdf

36. Karchevsky A.L. Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types. *J. Appl. Ind. Math.*, 2020, Vol. 14, pp. 52–69; DOI: 10.1134/S1990478920040043

37. Somersalo E., Cheney M., Isaacson D., Isaacson E. Layer stripping: a direct numerical method for impedance imaging. *Inverse Probl.*, 1991, Vol. 7, pp. 899–926; DOI: 10.1088/0266-5611/7/6/011

38. Karchevsky A.L. Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity. *J. Inverese Ill-Posed Probl.*, 2009, Vol. 17, pp. 385–402; DOI: 10.1515/JIIP.2009.026

39. Durdiev U.D. Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2020, Vol. 17, pp. 179–189; DOI: 10.33048/semi.2020.17.013

40. Bozorov Z.R. Numerical determining a memory function of a horizontallystratified elastic medium with aftereffect. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2020, Vol. 8, pp. 4–16; DOI: 10.32523/2306-6172-2020-8-2-4-16

41. Vasil'ev V.I., Kardashevsky A.M., Popov V.V. Iterative solution of a retrospective inverse heat conduction problem with inhomogeneous dirichlet boundary conditions. *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, Vol. 16, pp. 841-–852; DOI: 10.1134/S1990478922040238

42. Vasil'ev V.I., Kardashevsky A.M. Iterative identification of the diffusion coefficient in an initial boundary value problem for the subdiffusion equation. *J. Appl. Ind. Math.*, 2021, Vol. 15, pp. 343—354; DOI: 10.1134/S1990478921020162

43. Aida-zade K.R., Rahimov A.B. Identification of piecewise constant filtration parameters and boundaries of their constancy domains. *Autom Remote Control*, 2017, Vol. 78, pp. 1404—1416; DOI: 10.1134/S0005117917080021

44. Fatyanov A.G., Burmin V.Y. Occurrence of precursors of pkp waves in the layered radial-symmetric Earth. *Dokl. Earth Sc.*, 2019, Vol. 489, pp. 1313—1317; DOI: 10.1134/S1028334X19110011

45. Fatyanov A.G., Burmin V.Y. The P-Wave focusing effect in a low-velocity core of the earth: analytical solution. *Dokl. Earth Sc.*, 2018, Vol. 478, pp. 120-–123; DOI: 10.1134/S1028334X1801021X

46. Iskakov K.T., Boranbaev S.A., Uzakkyzy N. Wavelet processing and filtering of the radargram trace. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2017, Vol. 5, pp. 43–54; https://ejmca.enu.kz/assets/files/5-4-4.pdf

47. Iskakov K., Sagindykov K., Mukhambetkaliyev K., Kalmenov K., Seitkhanova A. Study of pavement anomalies using GPR of OKO-2 series. *Material and Mechanical Engineering Technology*, 2023, Vol. 4, pp. 42–46; DOI: 10.52209/2706-977X_2023_4_42

48. Iskakov K.T., Boranbaev S.A., Oralbekova Zh.O., Zhusupov T.A., Mukhambetkaliev K.K., Seytkhanova A.V. Software for determining the geological section of the road path. *Bulletin of D. Serikbaev EKTU*, 2023, Vol. 4, pp. 220–228; DOI: 10.51885/1561-4212_2023_4_220

49. Durdiev D.K., Merajova S.B. Inverse problem for an equation of mixed parabolic–hyperbolic type with a Bessel operator. *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, Vol. 16, pp. 394-–402; DOI: 10.1134/S1990478922030036

50. Merajova S.B. O chislennom reshenii obratnoj zadachi dlya uravneniya smeshannogo parabolichesko-giperbolicheskogo tipa s cel'yu opredeleniya pravoj chasti uravneniya [On the numerical solving the inverse problem for the equation of mixed parabolic-hyperbolic type for defining the right-hand side of the equation]. *Mat. Zametki SVFU*, 2022, Vol. 3, pp. 108–127 (in Russian); https://cyberleninka.ru/article/n/o-chislennom-reshenii-obratnoy-zadachi-dlya-uravneniya-smeshannogo-parabolo-giperbolicheskogo-tipa-po-opredeleniyu-pravoy-chasti

51. Smogunov V.V., Artamonov D.V., Avdeev A.A. Analysis of road destruction mechanisms. *Proc. Internat. Symposium «Reliability and Quality»*, 2010, Vol. 2, pp. 103–105; https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-mehanizmov-razrusheniy-dorog

52. E.D. Bondareva, M.P. Klekovkina Proektirovanie pokrytij avtomobil'nyh i gorodskih dorog [Design of Pavements for Highways and Urban Roads]. Moscow: KnoRus, 2024 (in Russian).

53. Zhartybayeva M., Oralbekova Zh.O., Iskakov K.T. The interpretation of the radarograms on the basis of experimental data. *Acta Phys. Pol. A*, 2015, Vol. 128; https://api.semanticscholar.org/CorpusID:59040708

54. Baranchuk K.I., Iskakov K.T., Krenke N.A., Mirgalikyzy T.M., Modin I.N., Khabdulina M.K. Geofizicheskie issledovaniya kurganov i mezhkurgannogo prostranstva pri inzhenernyh izyskaniyah dlya stroitel'stva [Geophysical studies of mounds and intermound space during engineering surveys for construction], *Inzhenernye Izyskaniya* [Engineering Surveys], 2015, Vol. 12, pp. 34–39(in Russian).

55. Romanov V.G., Karchevsky A.L. Determination of permittivity and conductivity of medium in a vicinity of a well having complex profile. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2018, Vol. 6, pp. 64–74; DOI: 10.32523/2306-6172-2018-6-4-62-72

56. Romanov V.G., Kabanikhin S.I. Inverse Problems for Maxwell's Equations. VSP, Utrecht, 1994.

57. Kurpinar E., Karchevsky A.L. Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media. *Inverse Probl.*, 2004, Vol. 20, pp. 953-976; DOI: 10.1088/0266-5611/20/3/018

58. Karchevsky A.L. Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers. *J. Inverese Ill-Posed Probl.*, 2004, Vol. 12, pp. 519–634; DOI: 10.1515/1569394042531332

59. Karchevsky A.L. Analysis of solving of the inverse dynamical problem of seismics for horisontally stratified anisotropic medium. *Russ. Geol. Geophys.*, 2006, Vol. 47, pp. 1150–1164; https://www.researchgate.net/publication/258770524_Analysis_of_solving_of_the_inverse_dynamical_problem_of_seismics_for_horisontally_stratified_anisotropic_media

60. Kurpinar E., Karchevsky A.L. Finding of the elastic parameters of a horizontal (thinly stratified) anisotropic layer. *Appl. Anal.*, 2008, Vol. 87, pp. 1179–1212; DOI: 10.1080/00036810802378612

61. Karchevsky A.L. Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers. *J. Inverese Ill-Posed Probl.*, 2010, Vol. 18, pp. 371–388; DOI: 10.1515/jiip.2010.015