УДК 539.3

ВЫВОД ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕНОСА ДЛЯ ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ С ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ, ИСПОЛЬЗУЯ ФОРМАЛИЗМ ОБОБЩЁННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2026 А. В. Мишин[1,2]

[1] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: mishinav@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 13.03.2026 г.; после доработки 22.06.2026 г.; принята к публикации 16.09.2026 г.

Представлены операции по гомогенизации стационарного уравнения теплопроводности с уравнением состояния типа Фурье. Гетерогенная среда является двухфазной и обладает иерархической структурой (гетерогенная среда, вложенная в гетерогенную среду). Используется метод условных моментов и формализм обобщённой производной, учитывающий конфигурацию внутренних границ гетерогенной системы. Для учёта многоуровневой структуры гомогенизация осуществляется для ограниченной неоднородной среды. Получение эффективного коэффициента проводится для трёхмерного пространства и далее обобщается для пространства произвольной размерности. Анализируется механизм появления характерных размеров фаз в эффективном коэффициенте, являющийся следствием использования формализма обобщённой производной и проведения гомогенизации для ограниченной системы. Проводимые операции показывают наличие эффективного числа степеней свободы для анализируемого поля в гетерогенной среде. Рассмотрено влияние условий на межфазных границах на итоговый эффективный коэффициент.

Ключевые слова: гетерогенная среда, микроструктура, обобщённая производная, функция Грина, условное осреднение, корреляционная функция, преобразование Фурье.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.307

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическое исследование гетерогенных сред является комплексной задачей с рядом нерешённых проблем. Актуальным является исследование иерархической структуры гетерогенной среды или многоуровневой гетерогенности (гетерогенная среда, вложенная в гетерогенную среду, концепция «композит в композите»), когда материал (композит) имеет несколько уровней неоднородности (от микро- до макроструктуры). Процессы в таких средах могут быть разными при изменении масштаба (например, диффузия в пористых средах с разными уровнями пористости).

Приведём несколько примеров работ, где рассматриваются многоуровневые неоднородные структуры. Эти работы иллюстрируют подходы к моделированию, экспериментальным исследованиям и практическому применению таких материалов. В работе [1] проводится аналитическое и экспериментальное исследование электропроводности композитов на основе углеродных нанотрубок, учитывающее микро и наноструктуру, и туннельный эффект между нанотрубками, изучается влияние геометрии и распределения нанотрубок на образование проводящих

путей и общую электропроводность композита. Используется метод Монте-Карло и конечно-элементный поход. В статье [2] подробно обсуждаются модели перколяции и эффективной среды для описания течения и электропроводности в пористых средах, включая среды с двойной пористостью (например, трещиноватые породы). В работе [3] проводится многомасштабное моделирование термоупругих свойств композитов с периодической структурой неоднородностей. При выводе гомогенизированного уравнения теплопроводности для эффективной среды со средними эффективными свойствами применялось асимптотическое усреднение и численное моделирование. Статья [4] посвящена численному моделированию термо-гидро-механического взаимодействия в многомасштабных трещиноватых породах, используется также модель двойной пористости. В работе [5] предложена модель с использованием фракталов для описания теплопроводности в средах с многоуровневой гетерогенностью. Показано, что фрактальная размерность структуры влияет на эффективную теплопроводность. При этом актуальным в контексте настоящей работы является то, что эффективная теплопроводность гетерогенной среды зависит от её фрактальной размерности, и эффективная размерность в системе определяется через число степеней свободы, доступных для переноса тепла. В статьях [6, 7] приводится модель двойной пористости для описания гетерогенных сред. Показано, что фрактальная размерность трещин и блоков влияет на поток флюида. В ряде работ [8–12] в рамках численных методов и экспериментальных подходов исследуется влияние многоуровневой гетерогенности на механические свойства.

В настоящей работе для анализа иерархической гетерогенной среды предлагается использовать подход, основанный на гомогенизации и опирающийся на работу [13]. Получение эффективного коэффициента, входящего в осреднённые уравнения, осуществляется методом условных моментов [13–15]. Влияние микроструктуры гетерогенной среды на её осреднённые свойства учтено формализмом обобщённой производной [13], которая наличием сингулярной составляющей описывает конфигурацию внутренних границ гетерогенной среды. В рамках используемого подхода произведено построение решения на функцию Грина, где оператор составляют не обычные производные, а обобщённые. Эти производные составляют оператор исходного уравнения переноса. В итоге для получения эффективных коэффициентов методом условных моментов необходимо посчитать интегралы, содержащие функцию Грина и корреляционную функцию геометрии структуры.

Следует отметить, что на данный момент разработаны различные физико-математические модели гомогенизации гетерогенных сред [14–29], основанные как на полуэмпирических (прикладных) и эвристических подходах, так и на строгом математическом аппарате. При этом в ряде приведённых методов детальный анализ конфигурации локальных межфазных границ зачастую опускается, учитывается в упрощённой форме или реализуется приближённо, что в том числе обусловлено рамками конкретного исследования.

Операции, приведённые в настоящей работе, отличаются следующими основными аспектами относительно работы [13]. Первый связан с тем, что предлагается использовать функцию Грина для однородной и изотропной ограниченной среды, представляющую собой сферу радиуса R. Члены, связанные с конфигурацией внутренних границ (с обобщённой производной), предлагается перенести в правую часть – это второй аспект. Третье отличие связано с тем, что операции делаются для пространства произвольной размерности.

Механизм появления размеров в эффективном коэффициенте, полученном для ограниченной неоднородной среды и найденном для пространства произвольной размерности, и учёт влияния условий на внутренних границах на эффективный коэффициент представляют новизну данной работы. Вывод результата, характеризующего то, что поведение поля в гетерогенной среде имеет эффективное число степеней свободы, является также новизной относительно существующих методов по описанию неоднородных сред (обладающих иерархической структурой, в частности). Результаты являются следствием используемого аналитического подхода, использующего формализмы обобщённой производной и условного осреднения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем стационарное распределение поля теплопроводности в микронеоднородной двухфазной среде, имеющей иерархическую структуру.

В качестве исходной модели используем модель стационарной изотропной линейной теории теплопроводности в форме

$$\nabla_j(\sigma\nabla_j\varphi) = 0, \tag{1}$$

где перенос тепла определяется Фурье-соотношением $j_i = \sigma\nabla_i\varphi$. По повторяющимся индексам (j) используется правило суммирования. В уравнении (1) запись ∇_j является обобщённой производной

$$\nabla_j\varphi(\boldsymbol{r}) = \partial_j\varphi(\boldsymbol{r}) + \sum_k \int\limits_{S_k} [\varphi]_{\boldsymbol{x}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\,ds_j, \tag{2}$$

где $[\varphi]_{\boldsymbol{x}}$ характеризует скачек поля на границе раздела фаз $[\varphi]_{\boldsymbol{x}} = \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}) - \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{0})$, ∂_j — производная по пространственной переменной, $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})$ — трёхмерная дельта-функция, $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор до границы разрыва (раздела), слагаемое $\int\limits_{S_k} [\varphi]_{\boldsymbol{x}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\,ds_j$ характеризует вклад в поле одной из внутренних границ неоднородной среды S_k.

Уравнение (1) дополняется заданием стандартных граничных условий на внутренних границах: $[j_i] = 0$, $[\varphi] = 0$ и внешней границе [13].

В работе [13] было показано, что обобщённая производная (впервые введена Шварцем [30] в рамках функционального анализа Соболева), входящая в уравнение (1) с модифицированным оператором, является следствием варьирования функционала энергии

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_V \sum_\nu \sigma_\nu f_\nu \partial_j(\varphi_\nu f_\nu)\partial_j(\varphi_\nu f_\nu)\,d\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

где $f_\nu(\boldsymbol{r})$ — индикаторная функция, характеризующая фазу ν в точке, $\nu = 1,\ 2$. Если в точке находится фаза ν, то $f_\nu(\boldsymbol{r}) = 1$, иначе имеем $f_\nu(\boldsymbol{r}) = 0$. Индикаторная функция неотделима от анализируемого поля $\varphi_\nu f_\nu$ и коэффициента переноса $\sigma_\nu f_\nu$. Формула для обобщённой производной (2) следует из формулы $\partial_j(\varphi f) = \nabla_j\varphi$. Сингулярная составляющая для обобщённой производной $\boldsymbol{\nabla}$ в (2) является следствием выражения $\varphi(\boldsymbol{r})\partial_j f(\boldsymbol{r})$. При варьировании функционала (3) использованы равенства: $f_\nu f_\nu = f_\nu$, $f_\nu\partial_j f_\nu = \partial_j f_\nu$, $f_\nu\partial_j\partial_j f_\nu = \partial_j\partial_j f_\nu$, обоснование которых представлено в [13].

Полученный модифицированный оператор в (1) учитывает конфигурацию областей и границ, разделяющих фазы и определяет обобщённую производную, что является следствием введённого функционала энергии с индикаторной функцией (3). В работе [31] корректность уравнений с модифицированный оператором устанавливается через формализм функций Грина и подход теории смесей [24]. На основе формализма обобщённой производной и пространственного осреднения в [31] получена пространственная теорема осреднения [24], являющаяся фундаментом теории смесей.

Целью является получение эффективного коэффициента теплопроводности σ^*, входящего в осреднённые уравнения модели (1). Для дальнейших операций в рамках используемого метода условных моментов [14, 15] уравнения (1) с учётом соотношения (2) предлагается переписать в виде

$$\sigma^*\partial_j\partial_j\varphi = -\sigma^*\sum_k \int\limits_{S_k} [\partial_j\varphi]_{\boldsymbol{x}}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x})\,ds_j - \nabla_j(\sigma-\sigma^*)\nabla_j\varphi, \tag{4}$$

В уравнении (4) учтено граничное условие на поверхностях раздела фаз $[\varphi] = 0$. Используемую модель вначале рассмотрим в трёхмерном пространстве.

Координатами в используемой модели выступают микроточки, в каждой из которых находится одна из фаз со своими физическими свойствами. Если в микроточке находится фаза 1, то материальный коэффициент принимает значение $\sigma = \sigma_1$, аналогично и исследуемые поля φ, $\partial_i\varphi$, $j_i = \sigma\partial_i\varphi$ (j_i характеризует поток) при этом принимают значения, соответствующие фазе 1.

В данной работе моделирование (гомогенизацию) иерархической структуры произведём следующим образом. Иерархическую неоднородную среду на каждом из уровней считаем обладающей статистически однородными и изотропными свойствами. Рассмотрим один из уровней неоднородной двухфазной системы, считая его шаром радиуса R. То есть гомогенизацию проведём для ограниченной гетерогенной структуры, направленную учесть концепт уровня (ячейки) иерархической гетерогенной среды. При этом R — минимальный размер гомогенизации, на котором статистически проявляются характерные микроструктурные свойства среды. При увеличении R эти свойства не меняются. R — масштаб осреднения (макроточка), на котором существует постоянное осреднённое поле, на большем масштабе оно не будет постоянным. Изменением макроскопического поля на масштабе R пренебрегаем. Размер всей анализируемой области гетерогенной среды считаем много больше масштабов осреднения и масштаба изменения осреднённого поля.

Введём микроструктурные параметры фаз. Фазой 2 являются шары с радиусом a, их окружение — фаза 1 с характерным масштабом b. Введём также характерный масштаб структуры $\Delta = a+b$. Объёмные концентрации фаз c_1, c_2, $c_1+c_2 = 1$. Осреднение представляет собой переход от микро уровня к одному из промежуточных уровней — к мезоуровню. Найденный эффективный коэффициент при этом будет представлять осреднённую характеристику для промежуточного масштаба — масштаба мезоуровня, который при переходе к макроуровню можно считать одной из фаз для гетерогенной среды. В зависимости от структуры иерархической гетерогенной среды переходов от микро к мезо может быть несколько, аналогично для переходов от мезо к макро. Каждая из таких гомогенизаций характеризуется своими параметрами a, b, R, c_2, также, как и своими проводимостями фаз σ_1, σ_2.

Ещё ряд предположений будет сделан при анализе вклада от межфазных границ: Их вычисление произведём вдали от границы шара (осреднения) радиуса R, т.е. с использованием асимптотик; изменением осреднённого поля φ на масштабе элементарного структурного элемента фаз пренебрегаем.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА АНАЛИЗИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

Определяемая действующим оператором функция Грина отображает отклик поля в среде на приложенное воздействие (характеризует единичный источник с учётом гран. условий). Этот отклик в анализируемом случае предполагает единичный источник в ограниченной среде радиуса R с оператором $\hat{L} = \sigma^*\Delta$ в постановке задачи Дирихле

$$\sigma^*\Delta G = -\delta(\boldsymbol{r}), \quad G|_R = 0.$$

Функция Грина для системы, являющейся шаром радиуса R в трёхмерном пространстве для оператора $\hat{L} = \sigma^*\Delta$, принимает вид [32]:

$$G = \frac{1}{4\pi\sigma^*}\frac{1}{|\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(2))}|} - \frac{1}{4\pi\sigma^*}\frac{R}{|\boldsymbol{r}^{(2)}|}\frac{1}{|\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(3)}|}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{r}^{(3)} = \boldsymbol{r}^{(2)}\dfrac{R^2}{|\boldsymbol{r}^{(2)}|^2}$.

Информация о коллективном влиянии фаз на распространяющееся по неоднородной системе поле либо должна быть отображена в операторе, определяющем функцию Грина, либо

в источниковом члене в анализируемом дифференциальном уравнении. В работе [13] использован первый вариант. В настоящей работе влияние конфигурации границ на поле в исследуемой структуре вынесено в источник в уравнении (4), что требует отдельного анализа.

3. НАХОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Произведём получение эффективного модуля σ^*, отображающего искомую информацию о гетерогенной структуре и входящего в осреднённые соотношения

$$\partial_i\langle j_i\rangle = 0, \quad \langle j_i\rangle = \sigma^*\partial_i\langle\varphi\rangle,$$

где $\langle j_i\rangle$ – осреднённый поток, $\langle j_i\rangle = c_1\langle j_i\rangle_1 + c_2\langle j_i\rangle_2$. Анализируя многоуровневую неоднородную структуру, гомогенизацию проведём для одного из её уровней.

Для получения коэффициента σ^* используем метод условных моментов [14, 15]. В работе [13] в рамках данного подхода с учётом формализма обобщённой производной получен эффективный коэффициент линейной теплопроводности, интегрально отображающий микроструктуру гетерогенной системы. В настоящей работе для получения эффективного модуля σ^* нужно преобразовать источниковое слагаемое в модели (4) с учётом другой функции Грина.

Решение уравнения (4), записанное через функцию Грина, имеет вид

$$\varphi(\boldsymbol{r}^{(1)}) = \langle\varphi\rangle - \int G(\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{r}^{(2)})\nabla_j(\sigma(\boldsymbol{r}^{(2)}) - \sigma^*)\nabla_j\varphi(\boldsymbol{r}^{(2)})\,d\boldsymbol{r}^{(2)} - \int G(\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{r}^{(2)})\sigma^*\sum_k\int\limits_{S_k}[\partial_j\varphi]_{\boldsymbol{x}}\delta(\boldsymbol{r}^{(2)}-\boldsymbol{x})\,ds_j\,d\boldsymbol{r}^{(2)}. \quad (6)$$

Слагаемое $\langle\varphi\rangle$ справа от знака равно соответствует условию на границе системы, которое можно задать как в виде $\varphi|_R = \langle\varphi\rangle$, так и виде $\varphi|_R = \langle\partial_i\varphi\rangle r_i$ (это с учётом дальнейшего дифференцирования уравнения (6)).

Используя соотношение для обобщённой производной (2) и граничные условия $[\sigma\partial_j\varphi]_{\boldsymbol{x}}$=0, $[\varphi]_{\boldsymbol{x}} = 0$ для конфигурации внутренних границ, получим выражение

$$\varphi(\boldsymbol{r}^{(1)}) = \langle\varphi\rangle - \int\partial_j G(\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{r}^{(2)})(\sigma(\boldsymbol{r}^{(2)}) - \sigma^*)\partial_j\varphi\,d\boldsymbol{r} - \sum_k\int\limits_{S_k}\partial_j^{(2)}G(\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{r}^{(2)})(\sigma'\varphi)_{\boldsymbol{x}}\,ds_j. \quad (7)$$

При нахождении (7) использованы равенства $[\sigma\varphi]_{\boldsymbol{x}} = (\sigma'\varphi)_{\boldsymbol{x}}$; $\sigma' = \sigma_1 - \sigma_2$ и цепочка равенств

$$\sum_k\int G(\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{r}^{(2)})\int\limits_{S_k}[\sigma\varphi]_{\boldsymbol{x}}\partial_j^{(2)}\delta(\boldsymbol{r}^{(2)}-\boldsymbol{x})\,ds_j d\boldsymbol{r}^{(2)} = \sum_k\int\partial_j^{(2)}G(\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{r}^{(2)})\int\limits_{S_k}[\sigma\varphi]_{\boldsymbol{x}}\delta(\boldsymbol{r}^{(2)}-\boldsymbol{x})\,ds_j d\boldsymbol{r}^{(2)} = \sum_k\int\limits_{S_k}\partial_j^{(2)}G(\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{x})(\sigma'\varphi)_{\boldsymbol{x}}\,ds_j,$$

где ds_j — элемент поверхности раздела фаз в точке $\boldsymbol{x}$. (При дальнейших операциях с поверхностными интегралами в (7) вместо $\boldsymbol{x}$ местами будет также использоваться $\boldsymbol{r}^{(2)}$, $\boldsymbol{r}^{(2)} = \boldsymbol{x}$).

Последующие вычисления направлены на преобразование поверхностного слагаемого $\sum_k\int\limits_{S_k}\partial_j^{(2)}G(\boldsymbol{r}^{(1)},\boldsymbol{x})(\sigma'\varphi)_{\boldsymbol{x}}ds_j$ в (7) к виду $X\varphi(\boldsymbol{r}^{(1)})$, где X – искомый член, зависящий от фазы.

Для k-ого элемента с поверхностью S_k имеем цепочку равенств:

$$\int\limits_{S_k} \partial_j^{(2)} G(\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}})\ (\sigma'\varphi)_{\boldsymbol{x}}\, ds_j = -\varphi(\boldsymbol{r^{(2)}}) \int\limits_{S_k} \frac{1}{4\pi\sigma^*}\ \frac{(\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}})_j}{|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|^3} (\sigma')_{\boldsymbol{x}}\, ds_j$$

$$\cong -\varphi(\boldsymbol{r^{(2)}}) \int\limits_{S_k} \frac{1}{4\pi\sigma^*}\ \frac{a}{|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|^3} (\sigma')_{\boldsymbol{x}} a^2\, d\Omega \cong \varphi(\boldsymbol{r^{(2)}})(\sigma')_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{4\pi\sigma^*} 4\pi \frac{\pi a}{4} \frac{3a^3}{|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|^4}, \quad (8)$$

где $ds_j = a^2 n_j d\Omega$, слагаемое $(\boldsymbol{r^{(1)}})_j n_j$ при интегрировании по углам даёт нуль,

$$(\boldsymbol{r^{(2)}})_j n_j = (\boldsymbol{l} + a\boldsymbol{n})_j n_j = (\boldsymbol{l})_j n_j + a n_j n_j = 0 + a = a.$$

Изменением поля φ на масштабе элементарного структурного элемента фаз (масштабы a и b) пренебрегаем. Использовано упрощение: $\varphi(\boldsymbol{r^{(2)}}) \cong \varphi(\boldsymbol{r^{(1)}})$, основной вклад от межфазных границ осуществляется вблизи точки $\boldsymbol{r^{(1)}}$, связью флуктуаций поля с геометрическими особенностями системы, влияющими на вычисление интеграла (8), тоже пренебрегаем. Далее, член $|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|^{-3}$ не раскладывался по n_j (на сферические функции), т. к. эти члены разложения дадут относительно малый вклад при интегрировании по $d\Omega$. Т. е. член $|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|^{-3}$ не влияет на интегрирование по $d\Omega$. Вычисление производим вдали от границы, т.е. с использованием асимптотик: $|\boldsymbol{r_1}| \sim |\boldsymbol{r_2}| \ll R$, $|\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}| \ll R$, $|\boldsymbol{r_3}| = \dfrac{R^2}{|\boldsymbol{r_2}|} \gg R$. При этом второе слагаемое в функции Грина с $\boldsymbol{r}^{(3)}$ при вычислении даёт малый вклад и оно не рассматривается. При вычислении интеграла (8) учтено, что $(\sigma')_{\boldsymbol{x}}$ для рассматриваемых замкнутых границ принимает значения $\pm\ (\sigma')_{\boldsymbol{x}}$, что зависит от перехода между фазами. Радиус вектор $\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(2)}$ пересекая сферу радиуса a два раза, образует хорду, среднее значение которой $\frac{\pi a}{4}$. При вычислении (8) член $|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|^{-3}$ продифференцирован и умножен на $\dfrac{\pi a}{4}$. Это является следствием того, что при пересечении сферы $(\sigma')_{\boldsymbol{x}}$ принимает два противоположных значения, и значения $|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|^{-3}$ вычитаются друг из друга.

Считая конфигурацию внутренних границ статистически однородно и изотропно заполняющими пространство, как и в работе [13], перейдём от суммы по внутренним границам в (7) к интегралу

$$\int \partial_j^{(2)} G(\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}) \int\limits_{S_k} (\sigma'\varphi)_{\boldsymbol{x}}\, ds_j \frac{4\pi\Delta|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|^2}{\Delta^3 4\pi/3} \frac{d|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|}{\Delta}. \quad (9)$$

Слагаемое $\dfrac{4\pi\Delta|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|^2}{\Delta^3 4\pi/3}$ выражает число внутренних границ для сферы радиуса $|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|$ с толщиной Δ. Шаг интегрирования соответствует $\Delta = a + b$. Дальнейшие выкладки ориентированы на получение поправки в первом приближении, связанной с внешней границей, в связи с этим от функции Грина учтём только часть $\dfrac{1}{4\pi\sigma^*} \dfrac{1}{|\boldsymbol{r^{(1)}} - \boldsymbol{r^{(2)}}|}$.

Вычисление интеграла (9) с учётом проделанных операций (8) зависит от того, какая фаза находится в точке $\boldsymbol{r}^{(1)}$. Конкретной фазой определяется нижний предел в интеграле: a — если в точке $\boldsymbol{r}^{(1)}$ находится фаза 2, b — если в точке $\boldsymbol{r}^{(1)}$ находится фаза 1.

Для фазы 1 в точке $\boldsymbol{r}^{(1)}$ имеем результат $X = X_1 = \dfrac{\sigma'}{\sigma^*}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{b}\right)\dfrac{a^4}{\Delta^3}$. Для фазы 2 в точке $\boldsymbol{r}^{(1)}$: $X = X_2 = \dfrac{\sigma'}{\sigma^*}\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{a}\right)\dfrac{a^4}{\Delta^3}$.

Таким образом, в результате проведённых операций с межфазными слагаемыми получим выражение (координатные индексы здесь и далее опущены)

$$\varphi = \langle\varphi\rangle - \int \partial_j G(\sigma - \sigma^*)\partial_j\varphi \, d\boldsymbol{r} - X\varphi, \tag{10}$$

которое продифференцируем в пределах одной фазы

$$(1 + X)\partial_i\varphi = \langle\partial_i\varphi\rangle - \int \partial_i\partial_j G(\sigma - \sigma^*)\partial_j\varphi \, d\boldsymbol{r}. \tag{11}$$

Применим формализм условного осреднения к выражению (11). Для этого умножим его на $f\big(\partial_i\varphi^{(1)},\ \partial_i\varphi^{(2)},\ X^{(1)}, \sigma^{(2)}|_\nu^{(1)}\big)$. и проинтегрируем по конфигурации полей. В результате чего имеем равенство:

$$(1 + X_\nu)\langle\partial_i\varphi\rangle_\nu = \langle\partial_i\varphi\rangle - \sum_k \int_V \partial_i\partial_j G p_{\nu k}(\sigma_k - \sigma^*)\langle\partial_j\varphi\rangle_k \, d\boldsymbol{r}, \tag{12}$$

где слагаемое $p_{\nu k}^{(1,2)} = w\big({}_k^{(2)}|_\nu^{(1)}\big). = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k)\psi^{(1,2)}$ характеризует вероятностную функцию геометрии и времени структуры, которая определяет вероятность нахождения фазы k, $k = 1, 2$, в точке $\boldsymbol{r}^{(2)}$ при условии, что фаза ν расположена в точке $\boldsymbol{r}^{(1)}$; $\psi^{(1,2)}$ — корреляционная функция геометрии и времени неоднородной структуры; $\nu,\ k = 1, 2$.

В результате условного осреднения возникают члены $\langle\partial_i\varphi^{(2)k}|_\nu^{(1)})\rangle$, обозначающие условно осреднённый градиент температуры в точке $\boldsymbol{r}^{(2)}$ для фазы k при условии, что в точке $\boldsymbol{r}^{(1)}$ находится компонента ν. Для подобных членов, как и в работах [13–15], считается выполненным равенство $\langle\partial_i\varphi^{(2)k}|_\nu^{(1)}).\rangle = \langle\partial_i\varphi\rangle_k(\boldsymbol{r}^{(2)})$.

На основе выражения (12) и соотношений

$$\begin{gathered} X' = X_1 - X_2, \quad X'' = c_1X_2 + c_2X_1, \\ \sigma' = \sigma_1 - \sigma_2, \quad \sigma'' = c_1\sigma_2 + c_2\sigma_1 - \sigma^*, \\ \langle\partial_i\varphi\rangle_1 = \langle\partial_i\varphi\rangle + c_2\langle\partial_i\varphi\rangle', \quad \langle\partial_i\varphi\rangle_2 = \langle\partial_i\varphi\rangle - c_1\langle\partial_i\varphi\rangle' \end{gathered}$$

найдём разницу для двух фаз $\langle\partial_i\varphi\rangle' = \langle\partial_i\varphi\rangle_1 - \langle\partial_i\varphi\rangle_2$:

$$\langle\partial_i\varphi\rangle' + X'\langle\partial_i\varphi\rangle + X''\langle\partial_i\varphi\rangle' = -\int \partial_i\partial_j G(\boldsymbol{r})\psi(\sigma'\langle\partial_j\varphi\rangle + \sigma''\langle\partial_j\varphi\rangle') \, d\boldsymbol{r}. \tag{13}$$

Действие прямого преобразования Фурье позволяет выделить выражение

$$R_{ij}(\boldsymbol{k}) = \int \partial_i\partial_j G(\boldsymbol{r})\psi e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} \, d\boldsymbol{r} = N\delta_{ij} \tag{14}$$

относительно входящих полей в интеграл, содержащее функцию Грина $G(\boldsymbol{r})$ и корреляционную функцию геометрии структуры $\psi(\boldsymbol{r})$. С учётом выполнения прямого и обратного преобразования Фурье выражение (13) преобразуется к виду

$$\langle\partial_j\varphi\rangle'(\delta_{ij}(1 + X'') + R_{ij}\sigma'') = -(R_{ij}\sigma' + \delta_{ij}X')\langle\partial_j\varphi\rangle,$$

который перепишем без тензорной записи

$$\langle\partial_i\varphi\rangle' = -(1 + X'' + N\sigma'')^{-1}(X' + N\sigma')\langle\partial_i\varphi\rangle. \tag{15}$$

Произведём вычисление интегралов $R_{ij}(\boldsymbol{k})$ в случае $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$. При $\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}$ искомый эффективный коэффициент будет представлять собой оператор, отображающий влияние микроструктуры гетерогенной среды на исследуемое поле. Произведём цепочку равенств:

$$R_{ij}(\boldsymbol{0}) = -\frac{1}{4\pi\sigma^*}\int\limits_V \partial_i\partial_j\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}^{(1)}-\boldsymbol{r}^{(2)}|}-\frac{R}{|\boldsymbol{r}^{(2)}|}\frac{1}{|\boldsymbol{r}^{(1)}-\boldsymbol{r}^{(3)}|}\right)e^{-\alpha r}d\boldsymbol{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\sigma^*}\frac{4\pi}{3}\delta_{ij} - \frac{1}{\sigma^*}\frac{1}{(R\alpha)^3}\delta_{ij}\big(2+\big((R\alpha)^2+2R\alpha+2\big)e^{-\alpha R}\big) \cong \frac{1}{3\sigma^*}\delta_{ij} - 2\frac{1}{\sigma^*}\frac{1}{(R\alpha)^3}\delta_{ij} = N\delta_{ij},$$

где функцию $\psi(\boldsymbol{r})$ возьмём в виде [33]: $\psi(\boldsymbol{r}) = e^{-\alpha r}$, $r = |\boldsymbol{r}^{(1)}-\boldsymbol{r}^{(2)}|$, где α — структурный коэффициент, который для шара определим как $\alpha = \left(\frac{\pi}{2}c_1 a\right)^{-1}$. Вычисление интеграла $\int\limits_V \partial_i\partial_j\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}^{(1)}-\boldsymbol{r}^{(2)}|}\right)e^{-\alpha r}d\boldsymbol{r}$ даёт результат $\frac{1}{4\pi\sigma^*}\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}$ и является следствием сингулярной составляющей, формальная составляющая вклада не даёт (вследствие интегрирования по углам). Данный интеграл не содержит информации о размерах системы. Вычисление интеграла $\int\limits_V \partial_i\partial_j\left(\frac{R}{|\boldsymbol{r}^{(2)}|}\frac{1}{|\boldsymbol{r}^{(1)}-\boldsymbol{r}^{(3)}|}\right)e^{-\alpha r}\,d\boldsymbol{r}$ произведено с использованием асимптотик: $|\boldsymbol{r_1}| \sim |\boldsymbol{r_2}| \ll R$, $|\boldsymbol{r_1}-\boldsymbol{r_2}| \ll R$, $|\boldsymbol{r_3}| = \frac{R^2}{|\boldsymbol{r_2}|} \gg R$, т. е. рассмотрение производится вдали от границы. Асимптотика имеет место в случае $\alpha R \gg 1$. Основной вклад при этом даёт выражение $-2\frac{1}{\sigma^*}\frac{1}{(R\alpha)^3}\delta_{ij}$.

Далее для нахождения эффективного коэффициента произведём суммирование выражения (12) по ν ($\nu=1,\ 2$) с учётом умножения его на c_ν:

$$\langle X\rangle\langle\partial_i\varphi\rangle - c_1c_2X'\langle\partial_i\varphi\rangle' = -\int \partial_i\partial_j G(\boldsymbol{r})(\langle\sigma\rangle\langle\partial_j\varphi\rangle + c_1c_2\sigma'\langle\partial_j\varphi\rangle' - \sigma^*\langle\partial_j\varphi\rangle)\,d\boldsymbol{r}, \qquad (16)$$

$$\langle\sigma\rangle = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2, \quad \langle X\rangle = c_1X_1 + c_2X_2,$$

Выполняя прямое и обратное преобразования Фурье уравнения (16) с учётом уравнения (15), обозначения

$$Y\delta_{ij} = \int \partial_i\partial_j G(\boldsymbol{r})e^{i\boldsymbol{kr}}\,d\boldsymbol{r} = -\frac{1}{4\pi\sigma^*}\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}$$

и приравнивания общего слагаемого при $\langle\partial_i\varphi\rangle$ к нулю, получим формулу

$$\langle X\rangle - c_1c_2X'\frac{X'+N\sigma'}{1+X''+N\sigma''} = -Y\left(\langle\sigma\rangle - c_1c_2\sigma'\frac{X'+N\sigma'}{1+X''+N\sigma''} - \sigma^*\right), \qquad (17)$$

которую далее с учётом выражений для R и X_ν перепишем к виду

$$\sigma^* = \langle\sigma\rangle - c_1c_2\sigma'\frac{X'+N\sigma'}{1+X''+N\sigma''} + \frac{1}{Y}\left(\langle X\rangle - c_1c_2X'\frac{X'+N\sigma'}{1+X''+N\sigma''}\right), \qquad (18)$$

$$Y = -\frac{1}{3\sigma^*}\delta_{ij}, \quad N = \frac{1}{3\sigma^*}\left(1-6\left(\frac{\pi}{2}c_1\right)^3\frac{a^3}{R^3}\right), \quad \langle X\rangle = \frac{\sigma'}{\sigma^*}\frac{a^4}{\Delta^3}\left(\frac{1}{R}-\frac{c_2}{a}-\frac{c_1}{b}\right),$$

$$X' = \frac{\sigma'}{\sigma^*}\frac{a^4}{\Delta^3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right), \quad X'' = \frac{\sigma'}{\sigma^*}\frac{a^4}{\Delta^3}\left(\frac{1}{R}-\frac{c_1}{a}-\frac{c_2}{b}\right), \quad \Delta = a+b.$$

Выражения для $\langle\sigma\rangle, \sigma',\ \sigma''$ даны выше и не содержат информации о геометрических свойствах гетерогенной среды.

Найденный эффективный коэффициент (18) содержит информацию о геометрических свойствах гетерогенной среды в явном виде, что включает: характерные размеры элементарных структурных элементов фаз и размер анализируемой системы. При этом выделяются два отношения для размеров $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{a}{R}$. Информация о размерах при проведении гомогенизации получена на основе концепции обобщённой производной, учитывающей коллективное взаимодействие фаз.

При $X_\nu = 0$ и бесконечной среде $R \to \infty$ полученный эффективный коэффициент принимает вид

$$\sigma^* = \langle\sigma\rangle - c_1 c_2 \frac{(\sigma')^2}{\sigma'' + 2\sigma^*} \tag{19}$$

и согласуется с рядом существующих подходов в монографиях [14, 16, 17]. Формула (19) является частным случаем результата (18), учитывающего конфигурацию внутренних границ $X_\nu \neq 0$ (даже в случае бесконечной среды).

Следует отметить, что формула (18) не является симметричной относительно замен $c_1 \leftrightarrow c_2$, $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ в отличие от формулы (19). Это является следствием геометрии структуры, которая, в свою очередь, является следствием использования формализма обобщённой производной.

Таким образом, гомогенизация проведена для одного из уровней иерархической неоднородной среды. И для получения искомого эффективного коэффициента для всей среды следует проделать цепочку аналогичных осреднений – переходов между уровнями от микро к макро, подставляя в найденный результат.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ, ОПИРАЯСЬ НА ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предположим, что конфигурацией межфазных слагаемых можно пренебречь, т. е. $X = 0$ (соответственно, $X' = X'' = 0$) и рассмотрим пространство произвольной размерности n. И осреднение проведём для бесконечной среды. Тогда изменения коснутся функции Грина и, соответственно, параметра N при вычислении интегралов (14) с учётом соотношения $\delta_{ij}\delta_{ij} = n$. Фактор бесконечной среды приводит к наличию только сингулярной составляющей от действия вторых производных на функцию Грина. Итоговый эффективный коэффициент примет вид

$$\sigma^* = \langle\sigma\rangle - c_1 c_2 \frac{N_n(\sigma')^2}{1 + N_n\sigma''}, \quad N_n = \frac{1}{n\sigma^*}. \tag{20}$$

При $n = 3$ имеем результат (19).

Если считать среду ограниченной в виде шара радиусом R в пространстве размерности n, то нужно уловить взаимосвязь, как меняется функция Грина. В источнике [32] есть соответствующие решения как для трёхмерного, так и для двумерного и одномерного случаев. Действуя по аналогии, решение для произвольной размерности пространства осуществляется следующим образом: член $\dfrac{R}{|\boldsymbol{r}^{(2)}|}\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(3)}|}$ возводится в степень $n-2$, $n \geqslant 3$. Здесь также пренебрежём вкладом от конфигурации межфазных слагаемых $X = 0$. Вычисление интегралов $R_{ij}(\mathbf{0})$ осуществляется с учётом соотношения $\delta_{ij}\delta_{ij} = n$ и интегрированием по частям для члена с радиусом R. В итоге имеем результат:

$$R_{ij}(\mathbf{0}) = -\frac{1}{4\pi\sigma^*}\int\limits_{V_n} \partial_i\partial_j\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(2)}|} - \frac{R}{|\boldsymbol{r}^{(2)}|}\frac{1}{|\boldsymbol{r}^{(1)} - \boldsymbol{r}^{(3)}|}\right)e^{-\alpha r}\, d^n\boldsymbol{r}$$

$$\approx \frac{1}{n\sigma^*}\delta_{ij} - (n-1)!\frac{1}{\sigma^*}\frac{1}{(R\alpha)^n}\delta_{ij} = N_n\delta_{ij}.$$

Искомый эффективный коэффициент σ^* идентичен коэффициенту (20) в точности до изменения N_n:

$$N_n = \frac{1}{n\sigma^*} - (n-1)!\frac{1}{\sigma^*}\frac{1}{(R\alpha)^n}. \tag{21}$$

Согласно полученному эффективному коэффициенту (20) и результату (21), при нулевом вкладе от конфигурации межфазных границ $X = 0$ гомогенизация ограниченной гетерогенной среды радиуса R в пространстве исследуемой размерности n_0 эквивалентна с точностью до соотношения

$$n = \left(\frac{1}{n_0} - (n_0-1)!\frac{1}{(R\alpha)^{n_0}}\right)^{-1}$$

гомогенизации гетерогенной среды бесконечного размера, но в пространстве эффективной размерности n (итогового оператора это изменение не коснулось).

Выполнение операций для произвольной размерности пространства показывает не только суть зависимости σ^* от размерности эффективного коэффициента. Представленное осреднение показывает, что в общем случае исследуемое поле (электропроводность, теплопроводность) в гетерогенной среде распространяется в пространстве эффективной размерности (с эффективным числом степеней свободы), отличающейся от геометрической размерности пространства. Геометрические свойства фаз в иерархической гетерогенной среде влияют на топологические (на связанность фаз).

Эффективная размерность пространства n в системе — это размерность при описании макроскопического поведения системы, возникающая при усреднении, учитывающем её микроскопическую неоднородность. Эффективная размерность n связана с числом доступных степеней свободы для распространения поля. Эффективное число (внутренних) степеней свободы $2n$ характеризует, сколько независимых «каналов» или «путей» доступно для распространения поля в среде. В классической физике размерность пространства определяет количество независимых координат, необходимых для описания положения точки (например, $n = 3$ для трёхмерного пространства).

Для представленных выше вычислений рассмотрено равенство для членов $X = 0$, характеризующих конфигурацию межфазных границ. Данное равенство также может быть достигнуто изменением граничных условий и гипотез при выводе X. Равенство $X = 0$ имеет место в случае малых объёмных концентраций включений: $\Delta \sim b \gg a$. При этом для $X \neq 0$ с точностью до замены в (18) результат сводится к эффективному коэффициенту (20) в пространстве эффективной размерности n.

Результатом работы [13] является определённый параметр γ в эффективном коэффициенте, отличающемся от результата (18) настоящей работы. Однако, согласно формуле (20) для работы [13] следует вывод о пространстве эффективной размерности. В дальнейшем подходы будут сопоставлены и итоговые эффективные коэффициенты проанализированы.

Используемые ограничения при выводе коэффициента σ^* указывают на малость радиуса a относительно радиуса R (малость параметра $(R\alpha)^{(-1)}$). Но, следует отметить, что параметр a – это статистическая величина, характеризующая элементарный структурный элемент фазы, который не является шаром в общем случае. В ряде работ из обзора [1–12] одна из фаз представляет собой макроскопически связанную волокнистую структуру, которая способна образовать макроскопически связанный кластер при относительно (шаров) малой объёмной концентрации. Этот аспект является важным для настоящей работы в контексте эффективных степеней свободы для исследуемого поля. Применимость условия $a \leqslant R$, где размер a характеризует не шар и определяет макроскопически связанную структуру из включений при $c_2 \ll 1$, нуждается в последующем обосновании.

При выводе коэффициента σ^* не указывается информация о контактах фазы включений между собой. Те же шары в роли включений могут образовывать связанную структуру

(волокнистого типа). Возможность описывать гетерогенные среды с объёмной концентрацией включений $c_2 \sim c_1$ также следует обосновать. Межфазные контакты могут быть учтены формализмом обобщённой производной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведённой гомогенизации стационарной модели линейной теплопроводности для двухфазной гетерогенной среды заданного размера получен эффективный коэффициент теплопроводности для пространства произвольной размерности.

Проведённое осреднение для ограниченной системы со статистически однородными и изотропными свойствами направлено учесть ячейку для иерархически устроенной гетерогенной среды. Выполненные операции по виду эффективного коэффициента показывают, что анализируемое поле имеет эффективное число степеней свободы в рассматриваемой гетерогенной среде с иерархической структурой, то есть исследуемое поле распространяется в пространстве размерности, отличной от исходной.

В итоговый эффективный коэффициент входит отношение характерных размеров фаз и отношение размера фазы к размеру рассматриваемой области гетерогенной среды. Первый механизм появления размеров связан с вычислением интегралов, содержащих функцию Грина (решение для оператора Лапласа в шаре заданного радиуса) и корреляционную функцию геометрии структуры. Данные интегралы возникают в используемом методе условных моментов при применении к решению, записанному через функцию Грина, условного осреднения и преобразования Фурье. Второй механизм связан с анализом членов, характеризующих совокупность межфазных границ и возникающих при использовании формализма обобщённой производной.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта № 075-15-2025-459 «Научное обоснование и создание инфраструктуры на основе использования синхротронного излучения для диагностики функционально-градиентных материалов»

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Li C., Thostenson E.T., Chou T.-W.* Modeling and characterization of the electrical conductivity of carbon nanotube-based polymer composites // Polymer. 2011. V. 52, N 13. P. 2964–2973.
2. *Sahimi M.* Flow phenomena in rocks: from continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing // Reviews of Modern Physics. 1993. V. 65, N 4. P. 1393–1534.
3. *Savatorova V.L., Talonov A.V., Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B.* Multiscale modeling of thermoelastic properties of composites with periodic structure of heterogeneities // Materials Physics and Mechanics. 2012. V. 13. P. 130–142.
4. *Rutqvist J., Wu Y.-S., Tsang C.-F., Bodvarsson G.* A numerical model for thermo-hydro-mechanical coupling in fractured rock // Internat. J. Rock Mechanics Mining Sci. 2002. V. 39, N 4. P. 429–442.
5. *Ostoja-Starzewski M.* Towards thermoelasticity of fractal media // J. Thermal Stresses. 2007. V. 30, N 9–10. P. 889–896; DOI: 10.1080/01495730701495618.
6. *Cowin S. C.* Bone poroelasticity // J. Biomechanics. 1999. V. 32, N 3. P. 217–238.
7. *Hamm S., Bidaux P.* Dual-porosity fractal models for transient flow analysis in fissured rocks // Water Resources Research. 1996. V. 32, N 4. P. 959–970.

8. *Ghosh S., Lee K., Moorthy S.* A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials // Internat. J. Solids and Structures. 2001. V. 38, N 14. P. 2335–2385.
9. *Ghosh S.* Numerical homogenization of n-component composites including stochastic interface defects // Internat. J. Numerical Methods in Engineering. 1995. V. 38, N 6. P. 1087–1121.
10. *Li X., Korayem A.H., Li C., Liu Y., He H., Sanjayan J.G.* Incorporation of graphene oxide and silica fume into cement paste: A study of dispersion and compressive strength // Construction and Building Materials. 2016. V. 123. P. 332–342.
11. *Fu S. Y., Lauke B., Mader E.* Hybrid composites with metal and ceramic fillers: microstructure and mechanical properties // Composites Science and Technology. 2008. V. 68, N 7—8. P. 1831–1838.
12. *Fratzl P., Burgert I.* Bioinspired materials research: What can we really learn from nature's structural materials? // J. Royal Society Interface. 2007. V. 4, N 15. P. 637–642.
13. *Мишин А.В.* Учёт обобщённой производной и коллективного влияния фаз на процесс гомогенизации // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 4. С. 86–98.
14. *Khoroshun L.P.* Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // Appl. Mechanics. 2000. V. 30, N 10. P. 30–62.
15. *Khoroshun L.P.* A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites // Mekh. Compos. Mater. 1995. V. 31, N 3. P. 310–318.
16. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
17. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. N. Y.: Academic Press, 1982.
18. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
19. *Hashin Z., Shtrikman S.* On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10, N 4. P. 335–342.
20. *Bruggeman D.A.G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitatskonstanten und Leitfahigkeiten von Vielrkistallen der nichtregularen Systeme // Ann. Phys. 1936. Bd. 417, N 25. P. 645–672.
21. *Hill R.A.* Self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13, N 4. P. 213–222.
22. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
23. *Болотин В.В., Москаленко В. Н.* Определение упругих констант микронеоднородной среды // Журн. Прикл. Мех. Техн. Физ. 1968. Т. 34, № 1. С. 66–72.
24. *Нигматуллин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
25. *Жидков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.
26. *Piatnitski A.L., Chechkin G.A., Shamaev A.S.* Homogenization: Methods and Applications. AMS, 2007.
27. *Ponte Castaneda P., Willis J.R.* The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media // J. Mech Phys Solids. 1995. V. 43. P. 1919–1951.
28. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metall. 1973. V. 21. P. 571–574.
29. *Fedotov A.* The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials // J. Mater. Sci. 2018. V. 53. P. 5092–5102.
30. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.
31. *Мишин А.В.* Обобщённая производная и её использование для анализа микроструктуры гетерогенной среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 4. С. 79–96; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406
32. *Боголюбов А.Н., Левашова Н.Т., Могилевский И.Е., Мухартова Ю.В., Шапкина Н.Е.* Функция Грина оператора Лапласа. Москва: изд-во МГУ, 2018.
33. *Khoroshun L.P.* Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media // Appl. Mechanics. 1978. V. 14. P. 3–17.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3

DERIVATION OF THE EFFECTIVE TRANSPORT COEFFICIENT FOR HETEROGENEOUS MEDIA WITH HIERARCHICAL STRUCTURE USING THE FORMALISM OF GENERALIZED DERIVATIVES

© 2026 A. V. Mishin[1,2]

[1]*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Institutskaya str., 4/1, Novosibirsk 630090, Russia*
[2]*Novosibirsk State University, Pirogova str., 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: mishinav@itam.nsc.ru

Received 13.03.2026, revised 22.06.2026, accepted 16.09.2026

Abstract. This paper presents operations for homogenizing a stationary heat conduction equation with a Fourier-type equation of state. The heterogeneous medium is two-phase and has a hierarchical structure (a heterogeneous medium nested within a heterogeneous medium). The method of conditional moments and the generalized derivative formalism taking into account the configuration of the internal boundaries of the heterogeneous system are used. To account for the multilevel structure, homogenization is performed for a bounded inhomogeneous medium. The effective coefficient is obtained for a three-dimensional space and then generalized to a space of arbitrary dimension. The mechanism for the appearance of characteristic phase sizes in the effective coefficient is analyzed, resulting from the use of the generalized derivative formalism and homogenization for a bounded system. The operations performed demonstrate the presence of an effective number of degrees of freedom for the analyzed field in a heterogeneous medium. The influence of conditions at interphase boundaries on the resulting effective coefficient is considered.

Keywords: heterogeneous medium, microstructure, generalized derivative, Green's function, conditional averaging, correlation function, Fourier transform.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.307

REFERENCES

1. Li C., Thostenson E.T., Chou T.-W. Modeling and characterization of the electrical conductivity of carbon nanotube-based polymer composites. *Polymer*, 2011, Vol. 52, No. 13, pp. 2964–2973.
2. Sahimi M. Flow phenomena in rocks: From continuum models to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing. *Reviews of Modern Physics*, 1993, Vol. 65, No. 4, pp. 1393–1534.
3. Savatorova V.L., Talonov A.V., Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B. Multiscale modeling of thermoelastic properties of composites with periodic structure of heterogeneities. *Materials Physics and Mechanics*, 2012, Vol. 13, pp. 130–142.
4. Rutqvist J., Wu Y.-S., Tsang C.-F., Bodvarsson G. A numerical model for thermo-hydro-mechanical coupling in fractured rock. *Internat. J. Rock Mechanics Mining Sci.*, 2002, Vol. 39, No. 4, pp. 429–442.
5. Ostoja-Starzewski M. Towards thermoelasticity of fractal media. *J. Thermal Stresses*, 2007, Vol. 30, No. 9–10, pp. 889–896; DOI: 10.1080/01495730701495618.
6. Cowin S. C. Bone poroelasticity. *J. Biomechanics*, 1999, Vol. 32, No. 3, pp. 217–238.
7. Hamm S., Bidaux P. Dual-porosity fractal models for transient flow analysis in fissured rocks. *Water Resources Research*, 1996, Vol. 32, No. 4, pp. 959–970.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2026, Vol. 20, No. 3.

8. Ghosh S., Lee K., Moorthy S. A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *Internat. J. Solids and Structures*, 2001, Vol. 38, No. 14, pp. 2335–2385.
9. Ghosh S. Numerical homogenization of n-component composites including stochastic interface defects. *Internat. J. Numerical Methods in Engineering*, 1995, Vol. 38, No. 6, pp. 1087–1121.
10. Li X., Korayem A.H., Li C., Liu Y., He H., Sanjayan J.G. Incorporation of graphene oxide and silica fume into cement paste: A study of dispersion and compressive strength. *Construction and Building Materials*, 2016, Vol. 123, pp. 332–342.
11. Fu S. Y., Lauke B., Mader E. Hybrid composites with metal and ceramic fillers: microstructure and mechanical properties. *Composites Science and Technology*, 2008, Vol. 68, No. 7—8, pp. 1831–1838.
12. Fratzl P., Burgert I. Bioinspired materials research: what can we really learn from nature's structural materials? *J. Royal Society Interface*, 2007, Vol. 4, No. 15, pp. 637–642.
13. Mishin A.V. Uchyot obobshchyonnoj proizvodnoj i kollektivnogo vliyaniya faz na process gomogenizacii [Accounting for the generalized derivative and the collective influence of phases on the homogenization process]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2022, Vol. 25, No. 4, pp. 86–98 (in Russian).
14. Khoroshun L.P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites. *Appl. Mechanics*, 2000, Vol. 30, No. 10, pp. 30–62.
15. Khoroshun L.P. A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites. *Mekh. Compos. Mater.*, 1995, Vol. 31, No. 3, pp. 310–318.
16. Shermergor T. D. Elasticity theory for microinhomogeneous Materials. Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).
17. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. An Introduction. N. Y.: Academic Press, 1982.
18. Bahvalov N.S., Panasenko G.P. Osrednenie processov v periodicheskih sredah [Averaging of processes in periodic media]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
19. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1962, Vol. 10, No. 4, pp. 335–342.
20. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitatskonstanten und Leitfahigkeiten von Vielrkistallen der nichtregularen Systeme. *Ann. Phys.*, 1936, Bd. 417, No. 25, pp. 645–672.
21. Hill R.A. Self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, Vol. 13, No. 4, pp. 213–222.
22. Ashby J. Continuum Theory of Dislocations. Moscow: Foreign Literature Publ., 1963 (in Russian).
23. Bolotin V.V., Moskalenko V. N. Determination of the elastic constants of a micro inhomogeneous medium. *Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1968, Vol. 34, No. 1, pp. 66–72 (in Russian).
24. Nigmatullin R.I. Osnovy mehaniki geterogennyh sred [Fundamentals of the mechanics of heterogeneous media]. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
25. Zhikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A. Usrednenie differencial'nyh operatorov [Homogenization of differential operators]. Moscow: Fizmatlit, 1993 (In Russian).
26. Piatnitski A.L., Chechkin G.A., Shamaev A.S. Homogenization: Methods and Applications. AMS, 2007.
27. Ponte Castaneda P., Willis J.R. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech Phys Solids*, 1995, Vol. 43, pp. 1919–1951.
28. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 1973, Vol. 21, pp. 571–574.
29. Fedotov A. The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials. *J. Mater. Sci.*, 2018, Vol. 53, pp. 5092–5102.
30. Shvarc L. Matematicheskie metody dlya fizicheskih nauk [Mathematical methods for the physical sciences]. M.: Mir, 1965 (in Russian).
31. Mishin A.V. Obobshchyonnaya proizvodnaya i eyo ispol'zovanie dlya analiza mikrostruktury geterogennoj sredy [Generalized derivative and its use for analyzing the microstructure of a heterogeneous medium]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2021, Vol. 24, No. 4, pp. 79–96 (in Russian);
DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406

32. Bogolyubov A.N., Levashova N.T., Mogilevskij I.E., Muhartova Yu.V., Shapkina N.E. Funkciya Grina operatora Laplasa [Green's function of the Laplace operator]. Moskva: MGU Publ., 2018 (in Russian).
33. Khoroshun L.P. Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media. *Appl. Mechanics*, 1978, Vol. 14, pp. 3–17.