УДК 532.584

ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ ПРИ СЕДИМЕНТАЦИИ ЧАСТИЦ В НАКЛОННОМ СОСУДЕ

© 2026 В. В. Шелухин[a], В. В. Неверов[b]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]shelukhin@hydro.nsc.ru, [b]neverovvladim@gmail.com

Поступила в редакцию 04.02.2026 г.; после доработки 04.02.2026 г.; принята к публикации 16.09.2026 г.

В рамках термодинамики двухскоростного континуума сформулирована математическая модель седиментации твёрдых частиц в суспензиях. Численные результаты согласуются с бенчмарк экспериментом Бойкотта, согласно которому седиментация происходит интенсивнее в наклонённом сосуде. С помощью трёхмерных расчётов доказано, что осаждение частиц в круглой трубе определяется вихрями. В частности, установлено, что поперечная миграция частиц вызвана циркуляциями типа Ленгмюра, которые отсутствуют в «двумерных» сосудах.

Ключевые слова: суспензии, седиментация, вихри.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.310

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе обсуждается математическая модель, которая описывает циркуляции типа Ленгмюра при 3D-седиментации суспензий в наклонной круглой трубе. Что касается вертикального сосуда, то в недавней работе авторов [1] установлено, что в соответствующих 2D-течениях подобные вихри отсутствуют.

Впервые указанные циркуляции наблюдались непосредственно под поверхностью океана как «валы» — почти параллельные линии пены или обломков, скапливающиеся в нисходящих областях между вихрями [2]. Согласно теории Крейка-Лейбовича [3], это явление вызвано взаимодействием подповерхностных сдвиговых течений и плоских волн, генерируемых ветром под косым углом к поверхности. В нашем случае поверхность океана заменена плоскостью, перпендикулярной плоскости симметрии, а косой угол — наклоном трубы. Мы показываем, что для круглой трубы механизм циркуляции определяется силой тяжести.

Прогресс в изучении явления Лангмюра применительно к поверхности водоёмов всесторонне представлен в обзорах [4, 5]. Гораздо меньше известно о вихрях в трубных течениях. В работе [6] циркуляции типа Ленгмюра обнаружены во «вторичном течении» в трубах, где первичный поток представляет собой поток типа Пуазейля; при этом шероховатость стенки должна быть структурированной, например, в виде «яичного лотка».

Ещё одна особенность наклонных трубок связана с эффектом Бойкотта [7], согласно которому осаждение частиц в наклонном сосуде происходит интенсивнее, чем в вертикальном. В работах [8, 1] такой эффект был объяснён для двумерной трубы. При проведении здесь трёхмерных расчётов для наклонного сосуда обнаруживается, что механизмы поперечной миграции частиц в двумерных и трёхмерных трубах совершенно различны.

В настоящей работе применяется термодинамический подход Халантикова — Ландау, разработанный ими для математического описания сверхтекучести жидкости 2He [9]. Частицы

и несущая жидкость рассматриваются как различные жидкие фазы, образующие двухскоростной континуум. Законы сохранения формулируются согласованно с термодинамическими принципами и инвариантно относительно преобразований Галилея при переходе из системы отсчёта несущей жидкости в лабораторную систему отсчёта. В трёхмерном случае с помощью вычислений показано, что в каждой плоскости, проходящей через ось вертикальной трубы существуют два одинаковых макровихря, вращающихся в противоположных направлениях. Картина отличается в случае наклонной трубы. В плоскости симметрии находится один вихрь, который преобладает над вихрями, наблюдаемыми в вертикальном случае. Скорость в плоскости симметрии значительно больше, чем в вертикальном случае. Более того, в поперечных сечениях трубы обнаружены четыре вихря с чередующимися знаками. Интересно, что картина из четырёх макровихрей в поперечном сечении трубы наблюдается даже при максимальном угле наклона, т. е. в горизонтальной трубке.

Структура статьи следующая. Сначала объясняется базовая математическая модель, а затем рассматривается седиментация в наклонных трубах.

1. ТЕРМОДИНАМИКА ДВУХСКОРОСТНОГО КОНТИНУУМА

Для удобства читателей здесь приводится краткое описание математической модели, обоснованной в [1]. Формулируя двухскоростную модель для суспензионных потоков мы предполагаем, что несущая жидкость (f-фаза) представляет собой ньютоновскую вязкую жидкость со скоростью $\mathbf{v}_f$. Мы не рассматриваем сухие частицы (p-фаза) как жидкую фазу. Вместо этого сухие частицы считаются смоченными с небольшим количеством жидкого связующего (m-фаза). Такой подход позволяет нам рассматривать слабосмачиваемый гранулированный материал как гранулированную жидкую фазу (s-фаза). Обозначим скорость частиц через $\mathbf{v}_s$, предполагая, что скорости частиц и жидкого связующего одинаковы.

Обозначим через φ_k и $\bar{\rho}_k$ объёмные доли и истинные плотности соответственно ($k = f, s, m$), тогда $\rho_k = \varphi_k \bar{\rho}_k$ имеют смысл парциальных плотностей. Очевидно, $\varphi_f + \varphi_p + \varphi_m = 1$. Введём полную плотность, плотность твёрдой фазы и массовую концентрацию частиц следующим образом:

$$\rho = \rho_f + \rho_p + \rho_m, \quad \rho_s = \rho_p + \rho_m, \quad c = \rho_p/\rho.$$

Обозначим через E^0 и $\mathbf{j}^0$ внутреннюю энергию и полный импульс. Далее верхний индекс 0 относится к системе отсчёта, связанной с f-фазой. Энергия E^0 удовлетворяет тождеству Гиббса

$$dE^0 = \theta dS + \mu d\rho + \mu_p d\rho_p + \mathbf{u} \cdot d\mathbf{j}^0, \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_f, \tag{1}$$

где S — энтропия, μ и μ_p — химические потенциалы, θ — абсолютная температура.

Начнём вывод законов сохранения со случая, когда эффектами диссипации можно пренебречь. Будем искать законы сохранения в виде

$$\rho_t + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}_t + \operatorname{div} \Pi = 0, \quad S_t + \operatorname{div} \mathbf{F}_\theta = 0, \tag{2}$$

$$\rho_{st} + \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad (\rho c)_t + \operatorname{div} \mathbf{F}_c = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{v}_{ft} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla)\mathbf{v}_f = \alpha \nabla \mu + \beta \nabla \theta + \gamma \nabla \mu_p, \tag{4}$$

$$E_t + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \tag{5}$$

где $\mathbf{j}$ — полный импульс в лабораторной системе отсчёта, Π — полный поток импульса, $\mathbf{F}_\theta$ — поток энтропии, $\mathbf{F}_c$ — поток концентрации, E — энергия, $\mathbf{Q}$ — поток энергии. Скалярные параметры α, β, γ будут определены ниже вместе с неизвестными потоками в уравнениях (2)–(5). Напомним, что вектор $\operatorname{div} \Pi$ определяется для матрицы Π по формуле $(\operatorname{div} \Pi)_i = \dfrac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}$.

Переходя в лабораторную систему отсчёта из системы отсчёта, связанную с f-фазой,

$$(E^0, \mathbf{j}^0, \mathbf{Q}^0, \Pi^0) \to (E, \mathbf{j}, \mathbf{Q}, \Pi),$$

приходим к формулам [9]

$$E = E^0 + \rho\frac{\mathbf{v}_f^2}{2} + \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{j}^0, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}^0 + \rho\mathbf{v}_f, \quad \Pi = \Pi^0 + \rho\mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{j}^0 + \mathbf{j}^0 \otimes \mathbf{v}_f, \tag{6}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^0 + \left(\rho\frac{\mathbf{v}_f^2}{2} + \mathbf{j}^0 \cdot \mathbf{v}_f + E^0\right)\mathbf{v}_f + \mathbf{j}^0\frac{\mathbf{v}_f^2}{2} + \Pi^0 \cdot \mathbf{v}_f. \tag{7}$$

Абсолютная температуры и химпотенциалы удовлетворяют равенствам

$$\theta = \frac{\partial E^0}{\partial S}, \quad \mu = \frac{\partial E^0}{\partial \rho}, \quad \mu_p = \frac{\partial E^0}{\partial(\rho c)}. \tag{8}$$

По своему смыслу, давление есть производная энергии по объёму. Следовательно

$$p = -E^0 + \theta S + \mu\rho + \mu_p\rho c + \mathbf{u} \cdot \mathbf{j}^0. \tag{9}$$

$$dp = Sd\theta + \rho d\mu + \rho c d\mu_p + \mathbf{j}^0 \cdot d\mathbf{u}, \quad \rho = \rho_s + \rho_f, \tag{10}$$

$$\nabla p = S\nabla\theta + \rho\nabla\mu + \rho c\nabla\mu_p + (\nabla\mathbf{u})^* \cdot \mathbf{j}^0. \tag{11}$$

Введём удельную энтропию $s = S/\rho$. Неизвестные потоки можно определить, так как уравнение энергии делает всю систему уравнений переопределённой. Так же как в [1] получаем следующие формулы:

$$\alpha = -1, \quad \beta = -s, \quad \gamma = -c, \quad \mathbf{F}_c = c\mathbf{j}, \tag{12}$$

$$\mathbf{F}_\theta = s\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \rho_s\mathbf{v}_s + \rho_f\mathbf{v}_f, \quad \mathbf{j}^0 = \rho_s\mathbf{u}, \tag{13}$$

$$\Pi^0 = p \cdot I + \rho_s\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \quad \Pi = pI + \rho_f\mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f + \rho_s\mathbf{v}_s \otimes \mathbf{v}_s. \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ есть тензорное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$.

Заметим, что уравнение (4) можно записать в виде

$$\mathbf{v}_{ft} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla)\mathbf{v}_f = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho}\nabla|\mathbf{u}|^2. \tag{15}$$

Чтобы учесть диссипацию, будем искать законы сохранения в виде

$$\rho_t + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j}_t + \operatorname{div}(\Pi + \pi) = 0, \quad S_t + \operatorname{div}\left(\mathbf{F}_\theta + \frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) = \frac{R}{\theta}, \tag{16}$$

$$\rho_{st} + \operatorname{div}(\rho_s\mathbf{v}_s) = 0, \quad (\rho c)_t + \operatorname{div}(\mathbf{F}_c + \mathbf{l}) = 0, \tag{17}$$

$$\mathbf{v}_{ft} + (\mathbf{v}_f \cdot \nabla)\mathbf{v}_f = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho}\nabla|\mathbf{u}|^2 + \mathbf{f}_2, \tag{18}$$

$$E_t + \operatorname{div}(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}_1) = 0, \tag{19}$$

с неизвестными добавками

$$\pi,\ \mathbf{q},\ R,\ \mathbf{l},\ \mathbf{Q}_1, \mathbf{f}_2. \tag{20}$$

Переменные π, $\mathbf{q}$, R, $\mathbf{l}$, есть вязкая часть полного тензора напряжений, вектор поток тепла, производство энтропии и вектор потока концентрации соответственно.

Подобно тому, как это сделано в работе [1], для добавок (20) устанавливаются следующие формулы: $\pi = \pi^s + \pi^f$,

$$-\pi^i = 2\eta_i D_i, \quad 2D^i = \nabla \mathbf{v}_i + (\nabla \mathbf{v}_i)^*, \tag{21}$$

$$\mathbf{l} = -\alpha_1 \nabla \mu_p, \tag{22}$$

$$\rho_f \mathbf{f}_2 = k\mathbf{u} - \operatorname{div} \pi_f, \quad \mathbf{q} = -\varkappa \nabla \theta, \tag{23}$$

$$R = \frac{\varkappa |\nabla \theta|^2}{\theta} + 2\eta_f |D_f|^2 + 2\eta_s |D_s|^2 + \frac{|\mathbf{l}|^2}{\alpha_1} + k|\mathbf{u}|^2. \tag{24}$$

Здесь $\varkappa$ — теплопроводность, η_i и λ_i — вязкости, k и α_1 — термодинамические параметры. При указанном выборе производство энтропии R будет неотрицательным, если все параметры в формулах (21)–(23) считать положительными.

Закон Фика (22) можно представить в другом виде. Будем считать, что химический потенциал μ есть известная функция переменных p, θ, c и $\mathbf{u}^2$. Поэтому

$$\nabla \mu = \partial_p \mu \nabla\, p + \partial_\theta \mu \nabla\, \theta + \partial_c \mu \nabla\, c + \partial_u \mu \nabla\, \mathbf{u}^2, \quad \partial_p \mu \equiv \frac{\partial \mu}{\partial p}. \tag{25}$$

Из (11) следует, что

$$\nabla\, \mu_p = \tilde{\gamma}_1 \nabla\, p + \tilde{\gamma}_2 \nabla\, \theta + \tilde{\gamma}_3 \nabla\, c + \tilde{\gamma}_4 \nabla\, \mathbf{u}^2, \tag{26}$$

где

$$\tilde{\gamma}_1 = \frac{1 - \rho \partial_p \mu}{\rho c}, \quad \tilde{\gamma}_2 = -\frac{S + \rho \partial_\theta \mu}{\rho c}, \quad \tilde{\gamma}_3 = -\frac{\partial_c \mu}{c}, \quad \tilde{\gamma}_4 = -\frac{\rho_s/2 + \rho \partial_u \mu}{\rho c}. \tag{27}$$

Теперь формула (22) сводится к следующей:

$$\mathbf{l} = -\left(\gamma_3 \nabla c + \gamma_1 \nabla p + \gamma_2 \nabla \theta + \gamma_4 \nabla\, \mathbf{u}^2\right), \quad \gamma_i = \alpha_1 \tilde{\gamma}_i. \tag{28}$$

Обычно закон Фика пишут как закон диффузии

$$\mathbf{l} = -\rho D(\nabla\, c + k_\theta \nabla\, \theta + k_p \nabla\, p), \tag{29}$$

где D — коэффициент диффузии [9]. Поэтому ниже будут использоваться формулы

$$\gamma_1 = \rho D k_p, \quad \gamma_2 = \rho D k_\theta, \quad \gamma_3 = \rho D. \tag{30}$$

Запишем систему (16)–(18) в терминах фазовых переменных. Скорость $\mathbf{v}_f$ удовлетворяет уравнению

$$(\rho_f \mathbf{v}_f)_t + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f) = -\frac{\rho_f \nabla p}{\rho} + \frac{\rho_f \rho_s}{2\rho} \nabla |\mathbf{u}|^2 + k\mathbf{u} + \operatorname{div} T^f, \tag{31}$$

где

$$T^i = 2\eta_i D_i, \quad i = s, f, \tag{32}$$

Уравнение импульса для s-фазы есть следствие уравнений (31) и (16):

$$(\rho_s \mathbf{v}_s)_t + \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{v}_s \otimes \mathbf{v}_s) = -\frac{\rho_s \nabla p}{\rho} - \frac{\rho_f \rho_s}{2\rho} \nabla |\mathbf{u}|^2 - k\mathbf{u} + \operatorname{div} T^s, \tag{33}$$

Законы сохранения масс

$$\rho_{st} + \operatorname{div}(\rho_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad \rho_{ft} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad (\rho c)_t + \operatorname{div}(c\mathbf{j} + \mathbf{l}) = 0 \tag{34}$$

есть следствия уравнений (16), (17), в которых $\mathbf{l}$ задаётся формулой (28). Уравнение для удельной энтропии s можно записать в виде

$$(\rho s)_t + \operatorname{div}\left(s\rho_s\mathbf{v}_s + s\rho_f\mathbf{v}_f + \frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) = \frac{R}{\theta}, \quad \rho = \rho_f + \rho_s. \tag{35}$$

Внутренняя энергия

$$E^0 = E^0(s, \rho, c), \quad S = \rho s, \tag{36}$$

считается известной функцией. Абсолютная температура θ, химпотенциалы μ и μ_p, а также давление p вычисляются через внутреннюю энергию по формулам (8) и (9):

$$\theta = \frac{\partial E^0}{\partial S}, \quad \mu = \frac{\partial E^0}{\partial \rho}, \quad \mu_p = \frac{\partial E^0}{\partial(\rho c)}, \quad p = -E_0 + \theta S + \mu\rho + \mu_p\rho c + \mathbf{u}\cdot\mathbf{j}^0. \tag{37}$$

Пренебрегая тепловыми эффектами, применим сформулированные уравнения к задаче о седиментации в вертикальной или наклонной трубе Ω_α с отклонением от вертикальной оси на угол α (см. схему на рис. 2 (a,b). Длина трубы равна H. Предполагается, что труба имеет радиус R, нижний конец трубы имеет форму полусферы также радиусом R; верхний конец совпадает с круглым поперечным сечением.

Предположим, что плотности материалов постоянны, а объёмная доля жидкости, смачивающей сухие частицы, пренебрежимо мала:

$$\bar\rho_i = \text{const}, \quad \phi_m \approx 0, \quad i = f, p, m. \tag{38}$$

Теперь из определения концентрации c и из формул (34) следует, что

$$c = \frac{\rho_s}{\rho}, \quad 1 - c = \frac{\rho_f}{\rho}, \quad \varphi_s = \frac{c}{\bar r + c(1-\bar r)}, \quad \rho = \frac{\bar\rho_s}{\bar r + c(1-\bar r)}, \tag{39}$$

где $\bar r = \bar\rho_s/\bar\rho_f$. Заметим, что парциальные плотности ρ_s и ρ_f а также полная плотность $\rho = \rho_s + \rho_f$ не являются постоянными:

$$\frac{\rho_s}{\bar\rho_f} = c[1 + (\bar r - 1)\phi_s(c)] \equiv r_s(c), \quad \frac{\rho_f}{\bar\rho_f} = 1 - \phi_s(c) \equiv r_f(c), \quad \frac{\rho}{\bar\rho_f} = r_s + r_f \equiv r, \tag{40}$$

здесь $r_s(c)$ $r_f(c)$ обозначают безразмерные парциальные плотности.

Складывая уравнения

$$\frac{\partial\phi_s}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi_s\mathbf{v}_s) = 0, \quad \frac{\partial\phi_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi_f\mathbf{v}_f) = 0, \tag{41}$$

вытекающие из (34), и используя формулу $\phi_s + \phi_f = 1$, приходим к уравнению

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{42}$$

для среднеобъемной скорости

$$\mathbf{v} \equiv \varphi_s(c)\mathbf{v}_s + \varphi_f(c)\mathbf{v}_f, \quad \varphi_f = \frac{\bar r(1-c)}{\bar r + c(1-\bar r)}. \tag{43}$$

Уравнение переноса концентрации принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{v}) + \rho^{-1}\operatorname{div}\mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{l} = -\left(\gamma_3\nabla c + \gamma_1\nabla p + \gamma_4\nabla\mathbf{u}^2\right) + \rho c B\mathbf{g}_\alpha. \tag{44}$$

Отметим, что в законе Фика для потока концентрации присутствует гравитационный член $\rho c B \mathbf{g}_\alpha$ с коэффициентом мобильности B [9].

В работе [1] обосновывается, что B можно выбрать по формуле

$$B(c) = \frac{V_{St} H(c)}{g}, \quad V_{St} = \frac{2(\bar\rho_p - \bar\rho_f) g (d_p/2)^2}{9\eta_f}, \quad H = (1-c)^\nu, \tag{45}$$

где V_{St} — скорость проскальзывания Стокса, $H(c)$ — функция «препятствования», а d_p — диаметр частицы.

Коэффициенты диффузии γ_1 и γ_4 обращаются в ноль при $c = 0$ и при $c = 1$. Для случая седиментации можно использовать аппроксимацию $k = 18\eta_f c/(d_p^2)$, [1].

В ряде работ вязкость η_s выбирается по формуле Krieger — Douhgerty [1]: $\eta_s/\eta_{s0} = (1 - \phi_s(c)/\phi_{s*})^{-2.5}$, где η_{s0} — вязкость s-фазы, когда нет частиц, и ϕ_{s*} — эффективный максимальный объём доли частиц. Таким образом, неизвестные функции p, c, $\mathbf{v}_s$, $\mathbf{v}_f$, удовлетворяют уравнениям (31), (33), (42) и (44).

При выполнении условий несжимаемости (38) давление больше не является термодинамической переменной и, как в теории Навье — Стокса, включается в число неизвестных функций. Уравнения (41) играют роль законов сохранения массы.

2. СЕДИМЕНТАЦИЯ В НАКЛОННОЙ ТРУБЕ

Предполагается, что частицы изначально находятся в состоянии покоя и равномерно распределены вдоль трубки. В этом случае поток симметричен относительно плоского участка $\Sigma = (a, b, c, d)$, рис. 2(b), лежащего в плоскости, образованной векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{g}$; здесь $\mathbf{g}$ — вектор гравитации, а $\mathbf{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси трубки, так что $\mathbf{e} \cdot \mathbf{g} < 0$. Другими словами, Σ — это сечение трубки плоскостью, имеющей в качестве вектора нормали вектор $\mathbf{g} \times \mathbf{e}$. Наклон трубки определяется углом α между векторами $-\mathbf{e}$ и $\mathbf{g}$. В силу симметрии, поток массы через Σ отсутствует.

Рассмотрим эффект Бойкотта. Расчёты показывают, что зона чистой жидкости $c = 0$ сначала появляется в верхней части сосуда Ω_α, а затем расширяется вниз. Относительный объём этой зоны определяется следующим образом:

$$V(t) = |\Omega_\alpha|^{-1} \int\limits_{\Omega_\alpha} 1_{c=0}\, dxdydz,$$

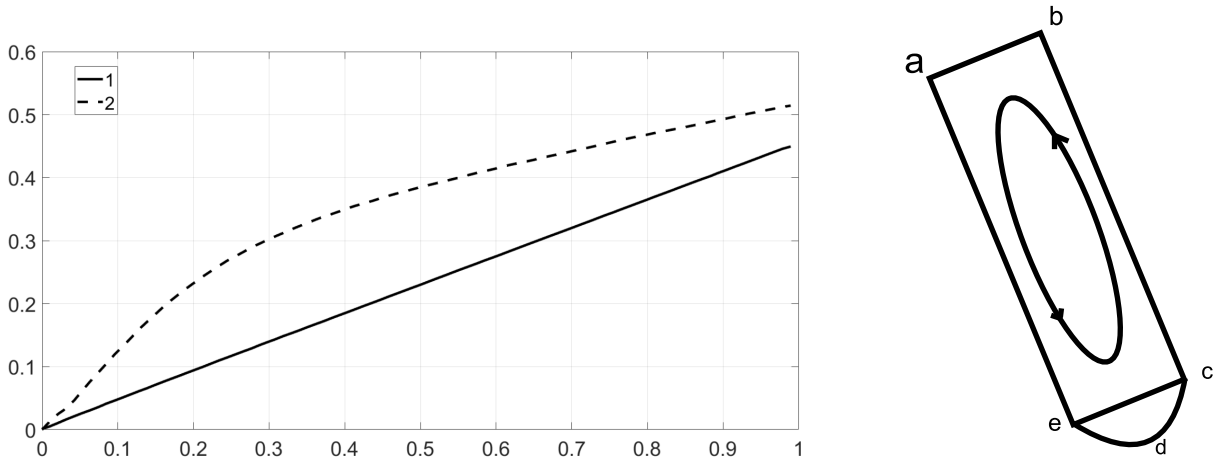
где 1_A — характеристическая функция множества A. На рис. 1 видно, что чем больше угол α, тем быстрее $V(t)$ растёт со временем. В чём причина?

Ответ связан с картиной течения. Результаты расчётов, касающихся поля скоростей $\mathbf{v}$, схематически представлены на рис. 2.

Имеется один вихрь, лежащий в сечении Σ, который преобладает над вихрями, наблюдаемыми в вертикальном случае, рис. 1(b). В поперечных сечениях E трубы обнаружены четыре вихря с чередующимися знаками, рис. 2(c) или два вихря в поперечных сечениях половины трубы, рис. 2(b). Подробные результаты расчётов, выполненных методом конечных элементов с помощью пакета FreeFem++, представлены на рис. 3.

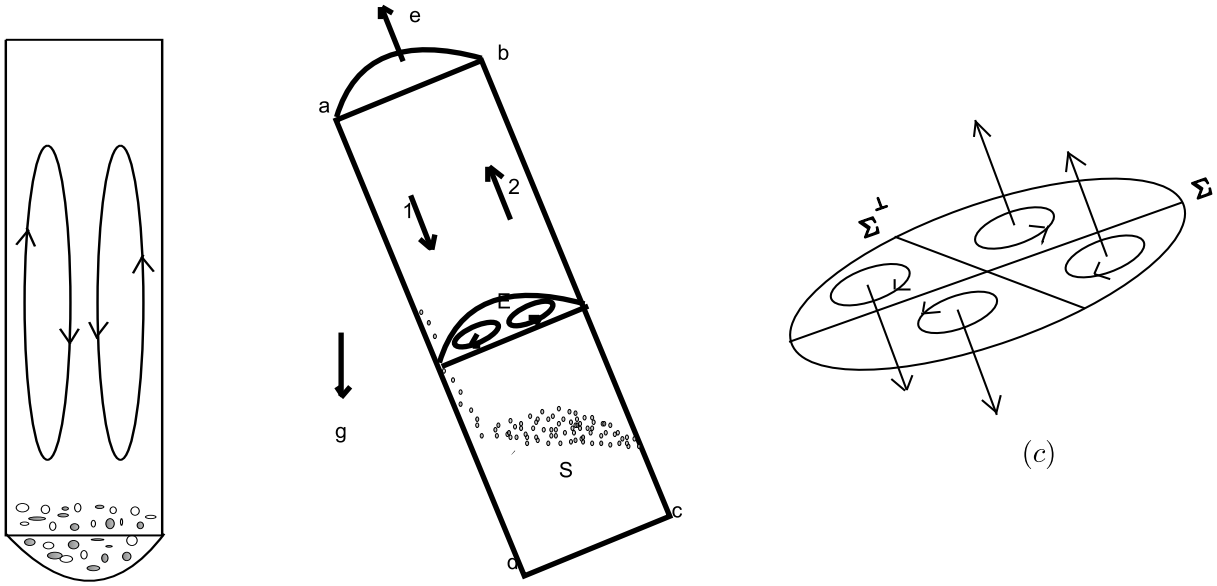
Поток, определяемый объёмной скоростью $\mathbf{v}$, имеет различные направления с разных сторон плоской поверхности $\Sigma^\perp$, где $\mathbf{v}$ обращается в нуль (см. рис. 2(c)). Заметим, что $\Sigma^\perp$ трансверсальна плоскости симметрии Σ. В вертикальной трубке отсутствуют спиральные движения. Нет наклона — нет циркуляций Ленгмюра.

Рассмотрим максимальный угол отклонения $\alpha = \pi/2$, соответствующий горизонтальной трубке. Чтобы уменьшить роль граничных условий на концах трубки, рассмотрим трубку бесконечной длины. Можно предположить, что движения частиц и жидкости одинаковы в каждом вертикальном сечении трубки. Поэтому достаточно выполнить двумерные расчёты. Результаты на рис. 4 показывают, что верхняя граница осадка практически плоская.



(a) (b)

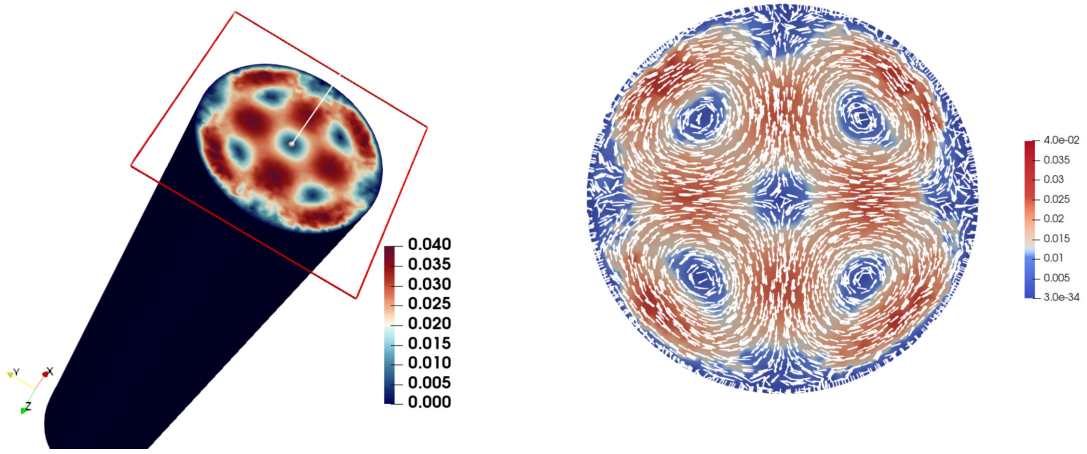
Рис. 1. (a) Относительный объём чистой жидкости $V(t)$ в зависимости от времени. Непрерывная и точечная линии соответствуют вертикальной и наклонной трубам (с углом 30 градусов). (b) Схема доминантного вихря в плоскости симметрии Σ для наклонной трубы



(a) (b) (c)

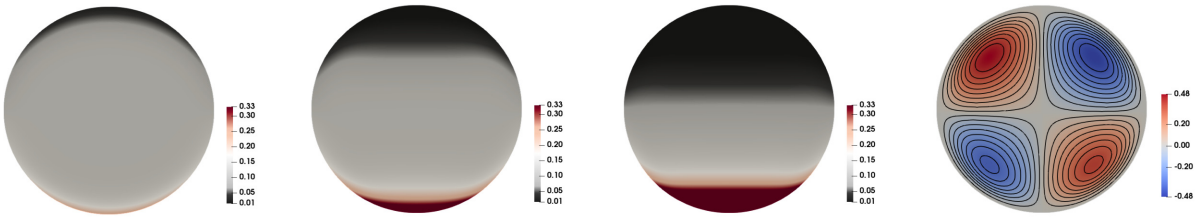
Рис. 2. (a) Схема вихрей в вертикальной трубе в сечении через ось симметрии. (b) Схема поля скорости $\mathbf{v}$ в наклонной половине трубы, полученной разрезанием плоскостью симметрии Σ. Объём S соответствует зоне осадка. (c) Схема вихрей в поперечном сечении E для наклонной трубы. Линии со стрелками соответствуют проекции нормализованной средне-объёмной скорости на ось трубы. Круги со стрелками означают проекцию траекторий (построенных по средне-объёмной скорости) на поперечное сечение трубы

Это связано с поперечной миграцией, показанной на рис. 2. Видно, что картина течения, связанная с полем скоростей $\mathbf{v}$, напоминает циркуляцию Ленгмюра. Можно заключить, что для течений в круглых трубах причиной циркуляции Ленгмюра является гравитация.



(a) (b)

Рис. 3. Результаты расчётов, выполненных методом конечных элементов с помощью пакета FreeFem++
(a) распределение модуля поперечной скорости $\mathbf{v}_2$ ($\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{e}$);
(b) поле скорости $\mathbf{v}_2$ в поперечном сечении



(a) (b) (c) (d)

Рис. 4. (a)–(c) Распределение концентрации в горизонтальной трубе для трёх возрастающих моментов времени слева направо.
(d) Линии тока для поля $\mathbf{v}$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована седиментация частиц в суспензиях с использованием математического моделирования. Для этой цели были сформулированы уравнения, основанные на законах сохранения и принципах термодинамики. Частицы и несущая жидкость рассматривались в рамках взаимодействия двух континуумов. Законы сохранения получены с использованием подхода Ландау — Халатникова, который первоначально был разработан для описания сверхтекучести жидкого гелия II. В качестве применения изучена проблема осаждения частиц в трубе. Трёхмерные расчёты показали, что эффект Бойкотта действительно имеет место. Он означает, что седиментация усиливается в наклонной трубе. В чём причина? Выяснилось, что в наклонном сосуде наблюдается более интенсивное вихревое течение. В вертикальной трубе течение также вихревое, но оно слабее. В вертикальных и наклонных трубах вихревая картина различна. В вертикальной круглой трубе присутствуют только продольные вихри, тогда как в наклонной трубе есть также поперечные циркуляции. Вихревая картина напоминает циркуляцию Ленгмюра: в поперечных сечениях трубки обнаруживаются четыре вихря с чередующимися знаками. Если угол наклона максимален, т. е. трубка горизонтальна, также имеют место циркуляции типа Ленгмюра.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа первого из соавторов (теоретические результаты и вывод модели) выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по теме «Современные методы гидродинамики для задач природопользования, индустриальных систем и полярной механики» (проект FZMW-2020-0008).

Работа второго соавтора (разработка численного метода и проведение расчетов) выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России по теме «Моделирование течения сложных жидкостей в трещиновато-пористых средах для оптимизации разработки трудноизвлекаемых запасов углеводородов» (проект FWGG-2026-0006).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shelukhin V.V., Neverov V.V.* Dense suspension flows: a mathematical model consistent with thermodynamics // J. Fluids Eng. ASME. 2022. V. 144, N 9. Article number 021402:1–13.
2. *Langmuir I.* Surface motion of water induced by wind // Science. 1938. V. 87. P. 119–123.
3. *Craik A.D.D.; Leibovich S.* A rational model for Langmuir circulations // J. Fluid Mech. 1976. V. 73. P. 401–426.
4. *Leibovich S.* The form and dynamics of Langmuir circulations // Annu. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 391–427.
5. *Thorpe, S.A.* Langmuir circulation // Annu. Rev. Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 55–79; DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.052203.071431
6. *Ellingsen S.Å., Akselsen A.H.; Chan L.* Designing vortices in pipe flow with topography-driven Langmuir circulation // J. Fluid Mech. 2021. V. 926, A9; DOI: 10.1017/jfm.2021.696
7. *Boycott A.* Sedimentation of blood corpuscles // Nature. 1920. V. 104(2621). P. 532–532.
8. *Nevskii Y., Osiptsov A.* Slow gravitational convection of disperse systems in domains with inclined boundaries // Fluid Dyn. 2011. V. 46, N 2. P. 225–239.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. Теоретическая физика. Т. VI. М.: Наука, 1986.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 532.584

VORTEX STRUCTURES DURING PARTICLE SEDIMENTATION IN AN INCLINED VESSEL

© 2026 V. V. Shelukhin[a], V. V. Neverov[b]

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Acad. Lavrentyev ave., 15, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]shelukhin@hydro.nsc.ru, [b]neverovvladim@gmail.com

Received 04.02.2026, revised 04.02.2026, accepted 16.09.2026

Abstract. The thermodynamics of a two-velocity continuum is discussed. A mathematical model of sedimentation in suspensions of solid particles is developed. Theoretical results are validated by the benchmark experiment known as the Boycott effect stating that the enhanced sedimentation occurs in a tilted vessel. By performing 3D calculations, we prove that particle settling in a circular tube is determined by vortices. In particular, it is established that the lateral migration of particles is caused by Langmuirlike circulations.

Keywords: suspensions, sedimentation, vortex structures.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.310

REFERENCES

1. Shelukhin V.V., Neverov V.V. Dense suspension flows: a mathematical model consistent with thermodynamics. *J. Fluids Eng. ASME*, 2022, Vol. 144, No. 9. Article number 021402:1–13.
2. Langmuir I. Surface motion of water induced by wind. *Science*, 1938, Vol. 87, pp. 119–123.
3. Craik A.D.D.; Leibovich S. A rational model for Langmuir circulations. *J. Fluid Mech.*, 1976, Vol. 73, pp. 401–426.
4. Leibovich S. The form and dynamics of Langmuir circulations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1983, Vol. 15, pp. 391–427.
5. Thorpe, S.A. Langmuir circulation. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2004, Vol. 36, pp. 55–79; DOI: 10.1146/annurev.fluid.36.052203.071431
6. Ellingsen S.Å., Akselsen A.H.; Chan L. Designing vortices in pipe flow with topography-driven Langmuir circulation. *J. Fluid Mech.*, 2021, Vol. 926, A9; DOI: 10.1017/jfm.2021.696
7. Boycott A. Sedimentation of blood corpuscles. *Nature*, 1920, Vol. 104(2621), pp. 532–532.
8. Nevskii Y., Osiptsov A. Slow gravitational convection of disperse systems in domains with inclined boundaries. *Fluid Dyn.*, 2011, Vol. 46, No. 2, pp. 225–239.
9. Landau L.D., Lifshitz E.M. Gidrodinamika. Teoreticheskaya fizika [Hydrodynamics. Theoretical Physics]. Vol. VI. Moscow: Nauka, 1986.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2026, Vol. 20, No. 3.