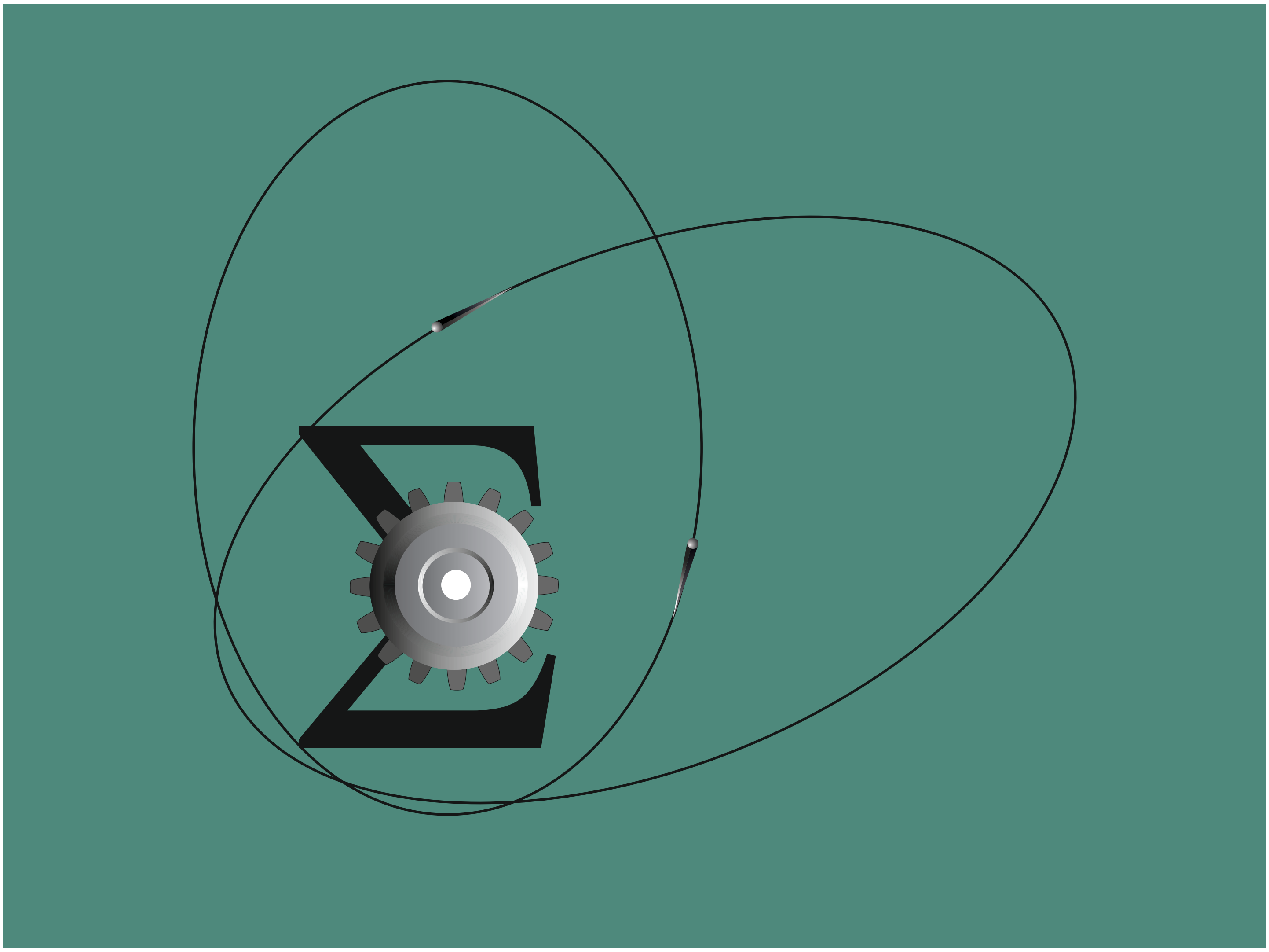
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 26 № 1 2023



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Учредители журнала:
Сибирское отделение РАН
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году — Выходит 4 раза в год

Том 26, № 1(93) — Научный журнал — **Январь–март, 2023 г.**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СибЖИМ
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
Телефон: +7 (383) 329-76-11
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998 4 issues per year

Vol. 26, No. 1(93) Scientific journal **January–March, 2023**

CONTENTS

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:
SibJIM
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
pr. Akad. Koptyuga 4
Novosibirsk 630090, Russia
Phone: +7 (383) 329-76-11
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2023. Т. 26, № 1. С. 5–19

УДК 539.3:517.958

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ АНИЗОТРОПНОЙ МОМЕНТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ЧИСТОМ СДВИГЕ СО СТЕСНЁННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

© 2023 Б. Д. Аннин[1,2a], Н. И. Остросаблин[1b], Р. И. Угрюмов[1,2c]

[1]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,*
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия,
[2]*Новосибирский государственный университет,*
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]annin@hydro.nsc.ru, [b]o.n.i@ngs.ru, [c]riugryumov@mail.ru

Поступила в редакцию 25.05.2022 г.; после доработки 25.05.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Приводятся основные уравнения линейной моментной теории упругости. Определяющие соотношения записаны для случая произвольной анизотропии в виде линейных уравнений. Рассматриваются некоторые упрощённые варианты, в частности со стеснённым вращением, и плоская деформация при наличии только сдвиговых напряжений. Для несимметричных тензоров четвёртого ранга вводятся собственные модули и собственные состояния.

Ключевые слова: моментная теория упругости, несимметричные тензоры напряжений, определяющие уравнения, модули упругости, тензоры четвёртого ранга, чистый сдвиг, стеснённое вращение, двумерная задача.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.101

Классическая линейная теория упругости не даёт удовлетворительного описания деформирования упругих тел при больших градиентах напряжений, для областей с угловыми точками, зернистых сред, полимерных материалов и других случаев деформирования. Чтобы иметь возможность более адекватного описания деформирования упругих тел, была предложена [1–6] модель моментной упругой среды, учитывающая, кроме силового взаимодействия, ещё и вращательное взаимодействие между частицами. Упругая среда рассматривается как совокупность частиц, положение которых в декартовой прямоугольной системе координат x_i, $i = 1, 2, 3$, определяется вектором смещений u_i и независимым вектором поворотов φ_i. Принимается, что вектор силовых напряжений p_i на площадке с нормалью n_i и вектор моментных напряжений m_i на этой площадке определяются формулами Коши (по повторяющимся индексам проводится суммирование)

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \quad \mu_{ij} n_j = m_i, \tag{1}$$

где $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ — тензор силовых напряжений, $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$ — тензор моментных напряжений. Уравнения равновесия для моментной среды имеют вид [1–6]

$$\partial_j \sigma_{ij} + F_i = 0, \tag{2}$$

$$\partial_j \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} + M_i = 0, \tag{3}$$

где ∂_j — производная по координате x_j; ε_{ijk} — кососимметричный по любой паре индексов тензор Леви-Чивиты; F_i — вектор объёмных сил; M_i — вектор объёмных моментов. В клас-

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект 2.3.1.3.1).

сической теории упругости считают, что $\mu_{ij} = 0$, $M_i = 0$, тогда из (3) следует симметрия напряжений $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

В качестве характеристик несимметричной деформации принимают несимметричные тензоры деформации e_{ij} и кручения-изгиба $\varkappa_{ij}$ [1–6]:

$$e_{ij} = \partial_j u_i - \varphi_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} - \varphi_{ij}, \quad \varkappa_{ij} = \partial_j \varphi_i = \gamma_{ij} + \beta_{ij}, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j), \\ \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j), \quad \beta_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i - \partial_i \varphi_j) \end{aligned} \tag{5}$$

и $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$, $\beta_{ij} = -\beta_{ji}$ — кососимметричные тензоры. Запишем тензоры ω_{ij}, φ_{ij} в виде матриц и с помощью тензора Леви-Чивиты:

$$\begin{gathered} \omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{21} & -\omega_{31} \\ \omega_{21} & 0 & -\omega_{32} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\omega_k, \quad \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial_j u_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{kj}; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \varphi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_{21} & -\varphi_{31} \\ \varphi_{21} & 0 & -\varphi_{32} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \varphi_{ij} = \varepsilon_{ikj}\varphi_k, \quad \varphi_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varphi_{kj}. \end{gathered} \tag{7}$$

Для тензора β_{ij} аналогичная запись имеет вид (6). Из формул (6), (7) видно, что компоненты векторов ω_i, φ_i являются переобозначением компонент тензоров ω_{ij}, φ_{ij}:

$$\omega_1 = \omega_{32}, \quad \omega_2 = \omega_{13}, \quad \omega_3 = \omega_{21}; \quad \varphi_1 = \varphi_{32}, \quad \varphi_2 = \varphi_{13}, \quad \varphi_3 = \varphi_{21}.$$

С учётом (6), (7) кососимметричный тензор в первой формуле (4) можно записать в виде

$$\psi_{ij} = -\psi_{ji} = \omega_{ij} - \varphi_{ij} = \varepsilon_{ikj}(\omega_k - \varphi_k). \tag{8}$$

Тензоры деформаций (4) являются несимметричными тензорами, напряжения также несимметричные тензоры, т. е.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)} + \sigma_{[ij]}, \quad \mu_{ij} = \mu_{(ij)} + \mu_{[ij]}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{(ij)} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}), \quad \sigma_{[ij]} = \frac{1}{2}(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}), \\ \mu_{(ij)} = \frac{1}{2}(\mu_{ij} + \mu_{ji}), \quad \mu_{[ij]} = \frac{1}{2}(\mu_{ij} - \mu_{ji}). \end{aligned} \tag{10}$$

Круглые и квадратные скобки в индексах в (9), (10) означают симметричную и антисимметричную части тензоров по соответствующим индексам.

Связь напряжений и деформаций можно взять в виде обратимых линейных соотношений [2, 6–9]

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}e_{kl} + B_{ijkl}\varkappa_{kl}, \quad \mu_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} + D_{ijkl}\varkappa_{kl}. \tag{11}$$

В работах [2, 6–9] считается, что тензоры четвёртого ранга в (11) имеют симметрию вида

$$A_{ijkl} = A_{klij}, \quad D_{ijkl} = D_{klij}, \quad C_{ijkl} = B_{klij}, \tag{12}$$

т. е. предполагается существование потенциала (удельной энергии деформации)

$$2\Phi = A_{ijkl}e_{ij}e_{kl} + 2B_{ijkl}e_{ij}\varkappa_{kl} + D_{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}. \tag{13}$$

Допущения (12) в общем случае не обязательны, они следуют из (13), если за основу принимают потенциал (13) (упругость по Грину). Но можно принять за основу линейные соотношения (11) (упругость по Коши). Случай упругости по Коши без учёта вращений, когда $A_{ijkl} \neq A_{klij}$, рассматривался, например, в [10, 11]. Тензоры четвёртого ранга в (11) считаем не зависящими от координат x_i. Если имеется такая зависимость, то для получения эффективных характеристик применяют методы осреднения [8, 12]. В [12] приведён обзор литературы по моментной теории упругости.

Учитывая симметрию и несимметрию тензоров (4), (5) и (8)–(10), соотношения (11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{(ij)} &= A_{(ij)(kl)}\varepsilon_{kl} + A_{(ij)[kl]}\psi_{kl} + B_{(ij)(kl)}\gamma_{kl} + B_{(ij)[kl]}\beta_{kl},\\
\sigma_{[ij]} &= A_{[ij](kl)}\varepsilon_{kl} + A_{[ij][kl]}\psi_{kl} + B_{[ij](kl)}\gamma_{kl} + B_{[ij][kl]}\beta_{kl},\\
\mu_{(ij)} &= C_{(ij)(kl)}\varepsilon_{kl} + C_{(ij)[kl]}\psi_{kl} + D_{(ij)(kl)}\gamma_{kl} + D_{(ij)[kl]}\beta_{kl},\\
\mu_{[ij]} &= C_{[ij](kl)}\varepsilon_{kl} + C_{[ij][kl]}\psi_{kl} + D_{[ij](kl)}\gamma_{kl} + D_{[ij][kl]}\beta_{kl}.
\end{aligned} \tag{14}$$

В формулах (14) в явном виде выделены симметричные и кососимметричные составляющие всех рассматриваемых тензоров. Уравнения равновесия (2), (3) записываются в аналогичном виде:

$$\partial_j(\sigma_{(ij)} + \sigma_{[ij]}) + F_i = 0, \quad \partial_j(\mu_{(ij)} + \mu_{[ij]}) + \varepsilon_{ijk}\sigma_{[jk]} + M_i = 0. \tag{15}$$

Связь между тензорами σ_{ij} и μ_{ij} рассмотрена в [13]. В работе [9] соотношения (11), (12) записываются в матрично-блочном виде и ставится задача определения собственных модулей и собственных тензоров блочной матрицы аналогично подходу Кельвина в классической анизотропной упругости [10, 14]. С учётом известного равенства $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$, где δ_{kl} — символы Кронекера, второе уравнение (15) можно записать в виде [3, 13]

$$\sigma_{[ml]} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ilm}[\partial_s(\mu_{(is)} + \mu_{[is]}) + M_i].$$

При подстановке напряжений (11) в уравнения равновесия (2), (3) или выражений (14) в (15) получаются шесть уравнений для шести неизвестных u_k, φ_k, $k = 1, 2, 3$. В качестве граничных условий на поверхности тела принимаются заданными векторы p_i и m_i (1) или задаются значения самих функций u_k и φ_k. Число независимых граничных условий обсуждается в [3].

В определяющих соотношениях (11), (14) участвуют несколько тензоров четвёртого ранга, задавая которые в определённом виде, можно получать различные варианты моментных упругих сред. Задавая в (11), (12) материальные тензоры в виде изотропного тензора четвёртого ранга

$$A_{ijkl} = A_1\delta_{ij}\delta_{kl} + A_2\delta_{ik}\delta_{lj} + A_3\delta_{il}\delta_{jk},$$

получают определяющие соотношения изотропной моментной среды [2, 5, 6, 15]. Если среда обладает центром симметрии, т. е. материальные тензоры не изменяются при изменении направления координатных осей, тогда в (11), (12) тензоры $B_{ijkl}=0$, $C_{ijkl}=0$, при этом соотношения (11), (14) принимают вид [6]

$$\sigma_{ij}=A_{ijkl}e_{kl},\quad \mu_{ij}=D_{ijkl}\varkappa_{kl};$$

$$\sigma_{(ij)}=A_{(ij)(kl)}\varepsilon_{kl}+A_{(ij)[kl]}\psi_{kl},\quad \sigma_{[ij]}=A_{[ij](kl)}\varepsilon_{kl}+A_{[ij][kl]}\psi_{kl};\tag{16}$$

$$\mu_{(ij)}=D_{(ij)(kl)}\gamma_{kl}+D_{(ij)[kl]}\beta_{kl},\quad \mu_{[ij]}=D_{[ij](kl)}\gamma_{kl}+D_{[ij][kl]}\beta_{kl}.\tag{17}$$

Уравнения (16) упрощаются, если тензор $\psi_{kl}=0$, т. е. в (8) вектор φ_k независимого вращения равен вектору $\omega_k=(1/2)\varepsilon_{kjl}\partial_j u_l$ стеснённого вращения (псевдоконтинуум Коссера [5]). В этом случае из (4) получаем $e_{ij}=\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$ — симметричный тензор и тензор кручения-изгиба

$$\varkappa_{ij}=\partial_j\omega_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{imn}\partial_{jm}u_n\tag{18}$$

выражается через вторые производные от вектора смещения u_n [1]. Тензор (18) можно выразить через тензор ε_{ij}. Имеют место соотношение $\partial_k\omega_{ij}=\partial_j\varepsilon_{ik}-\partial_i\varepsilon_{jk}$ [5] и формулы (6), тогда

$$\varkappa_{ij}=\partial_j\omega_i=\partial_j\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{irs}\omega_{sr}\right)=\frac{1}{2}\varepsilon_{irs}(\partial_r\varepsilon_{sj}-\partial_s\varepsilon_{rj}).$$

Симметричная часть $\gamma_{ij}=\gamma_{ji}$ и кососимметричная часть $\beta_{ij}=-\beta_{ji}$ тензора $\varkappa_{ij}$ определяется по формулам (5).

Если в (16), (17) тензоры

$$A_{(ij)[kl]}=0,\quad A_{[ij](kl)}=0,\quad D_{(ij)[kl]}=0,\quad D_{[ij](kl)}=0,\tag{19}$$

то (16), (17) примут вид обычного закона Гука

$$\sigma_{(ij)}=A_{(ij)(kl)}\varepsilon_{kl},\quad \sigma_{[ij]}=A_{[ij][kl]}\psi_{kl},\quad \mu_{(ij)}=D_{(ij)(kl)}\gamma_{kl},\quad \mu_{[ij]}=D_{[ij][kl]}\beta_{kl}\tag{20}$$

для симметричных и несимметричных частей тензоров напряжений. Рассмотрим первое равенство (20). Тензор $A_{(ij)(kl)}$ имеет симметрию в первой паре индексов и во второй

$$A_{(ij)(kl)}=A_{(ji)(kl)},\quad A_{(ij)(kl)}=A_{(ij)(lk)},\tag{21}$$

но в случае упругости по Коши [10] этот тензор не обладает главной симметрией: $A_{(ij)(kl)}\neq A_{(kl)(ij)}$ и в общем случае имеет 36 независимых компонент. Для симметричных по двум индексам тензоров (20), (21) будем использовать формулы перехода от двух индексов к одному (переобозначение компонент тензоров)

$$\begin{gathered}\sigma_{(11)}=\sigma_1,\quad \sigma_{(22)}=\sigma_2,\quad \sigma_{(33)}=\sigma_3,\\ \sqrt{2}\sigma_{(23)}=\sqrt{2}\sigma_{(32)}=\sigma_4,\quad \sqrt{2}\sigma_{(13)}=\sqrt{2}\sigma_{(31)}=\sigma_5,\quad \sqrt{2}\sigma_{(12)}=\sqrt{2}\sigma_{(21)}=\sigma_6.\end{gathered}\tag{22}$$

Тогда с учётом (22) формулы (20) для симметричных тензоров принимают вид

$$\sigma_i=A_{ij}\varepsilon_j,\quad \mu_i=D_{ij}\gamma_j,\quad i,j=\overline{1,6},\quad \sigma=A\varepsilon,\quad \mu=D\gamma.\tag{23}$$

Невырожденные матрицы A, D в общем случае несимметричные: $A_{ij}\neq A_{ji}$, $D_{ij}\neq D_{ji}$.

Матрица A может быть представлена в виде [10]

$$A=T\Lambda F',\tag{24}$$

где штрих означает транспонирование матрицы, $T=[t_{ip}]$, $F=[f_{ip}]$ — ортогональные матрицы, т. е. $T'T=E$, $F'F=E$ (E — единичная матрица); $\Lambda=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)$ —

диагональная матрица ($\lambda_i > 0$). Величины λ_i являются собственными модулями, а матрицы t_{ip}, f_{ip} — собственными состояниями. Каждый столбец этих матриц в силу (22) соответствует симметричному тензору второго ранга. Аналогичное представление вида (24) имеет место и для матрицы D в (23).

С учётом (24) перепишем определяющее соотношение (23):

$$\sigma = T\Lambda F'\varepsilon, \quad T'\sigma = \Lambda F'\varepsilon, \quad \tilde{\sigma} = \Lambda\tilde{\varepsilon}, \tag{25}$$

где соответственно обозначили $\tilde{\sigma} = T'\sigma$, $\tilde{\varepsilon} = F'\varepsilon$. Обращение последних формул имеет вид $\sigma = T\tilde{\sigma}$, $\varepsilon = F\tilde{\varepsilon}$. Последнее выражение в (25) представляет собой шесть отдельных независимых равенств

$$\tilde{\sigma}_1 = \lambda_1\tilde{\varepsilon}_1, \quad \tilde{\sigma}_2 = \lambda_2\tilde{\varepsilon}_2, \quad \tilde{\sigma}_3 = \lambda_3\tilde{\varepsilon}_3, \quad \tilde{\sigma}_4 = \lambda_4\tilde{\varepsilon}_4, \quad \tilde{\sigma}_5 = \lambda_5\tilde{\varepsilon}_5, \quad \tilde{\sigma}_6 = \lambda_6\tilde{\varepsilon}_6, \tag{26}$$

которые являются инвариантной записью определяющих соотношений (23) или (20). В соответствии с (26) удельная энергия деформации записывается в каноническом виде

$$2\Phi = \tilde{\sigma}_p\tilde{\varepsilon}_p = \lambda_p\tilde{\varepsilon}_p^2 = \lambda_1\tilde{\varepsilon}_1^2 + \lambda_2\tilde{\varepsilon}_2^2 + \lambda_3\tilde{\varepsilon}_3^2 + \lambda_4\tilde{\varepsilon}_4^2 + \lambda_5\tilde{\varepsilon}_5^2 + \lambda_6\tilde{\varepsilon}_6^2 = \lambda_p(f_{ip}\varepsilon_i)^2 \tag{27}$$

положительно определённой квадратичной формы. Для моментных напряжений (23) можно выписать аналогичные соотношения вида (25)–(27). В [10] приведён общий вид матриц (тензоров) A анизотропии для всех классов кристаллографических симметрий. Вид матрицы A трансверсально-изотропной упругой по Коши среды (ось симметрии x_3) следующий:

$$A_{ij} = C_{ij} + B_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & -B_{61} \\ C_{21} & C_{11} & C_{31} - B_{31} & 0 & 0 & B_{61} \\ C_{31} + B_{31} & C_{31} + B_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & -B_{54} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{54} & C_{44} & 0 \\ B_{61} & -B_{61} & 0 & 0 & 0 & C_{11} - C_{21} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

где $C_{ij} = C_{ji}$ — симметричная часть, а $B_{ij} = -B_{ji}$ — кососимметричная часть матрицы A. Матрица (28) содержит восемь независимых компонент, в том числе три дополнительные компоненты B_{31}, B_{61}, B_{54} кососимметричной части. Двумерная задача плоской деформации с использованием матрицы вида (28) исследована в работе [11]. Такой же вид (28) имеет матрица D для моментных напряжений (23) в случае трансверсальной изотропии.

Для кососимметричных по первой и второй парам индексов тензоров $A_{[ij][kl]}$, $D_{[ij][kl]}$ (20) также можно ввести собственные модули и состояния. Пусть тензор $A_{[ij][kl]}$ (или $D_{[ij][kl]}$) имеет симметрию индексов (далее для краткости квадратные скобки в индексах не пишем):

$$A_{klij} = A_{ijkl}, \quad A_{jikl} = -A_{ijkl}, \quad A_{ijlk} = -A_{ijkl}. \tag{29}$$

При ортогональном преобразовании системы координат (δ_{pq} — единичная матрица, символ Кронекера)

$$x_i = \alpha_{ij}\hat{x}_j, \quad \hat{x}_j = \alpha_{ij}x_i, \quad \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \delta_{pq}, \quad i, j, p, q = 1, 2, 3,$$

тензор A_{ijkl} (29) преобразуется по формулам

$$A_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\hat{A}_{pqrs}\alpha_{kr}\alpha_{ls}, \quad \hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}A_{ijkl}\alpha_{kr}\alpha_{ls}. \tag{30}$$

Перепишем (30) с учётом антисимметрии (29):

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2}(\alpha_{ip}\alpha_{jq} - \alpha_{iq}\alpha_{jp})\hat{A}_{pqrs}\frac{1}{2}(\alpha_{kr}\alpha_{ls} - \alpha_{ks}\alpha_{lr}) = \alpha_{ijpq}\hat{A}_{pqrs}\alpha_{klrs}, \quad \hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ijpq}A_{ijkl}\alpha_{klrs},$$

где обозначили $\alpha_{ijpq} = (\alpha_{ip}\alpha_{jq} - \alpha_{iq}\alpha_{jp})/2$, причём

$$\alpha_{jipq} = -\alpha_{ijpq}, \quad \alpha_{ijqp} = -\alpha_{ijpq}, \quad \alpha_{ijpq}\alpha_{ijrs} = \frac{1}{2}(\delta_{pr}\delta_{qs} - \delta_{ps}\delta_{qr}) = \tilde{\delta}_{pqrs}.$$

Тензор $\tilde{\delta}_{pqrs}$ имеет симметрию (29) и является единичным в пространстве тензоров вида (29). Если $t_{ji} = -t_{ij}$, то $\tilde{\delta}_{pqrs}t_{rs} = t_{pq}$.

Для постоянного тензора вида (29) можно поставить задачу на собственные значения и тензоры [16]:

$$A_{ijkl}t_{kl} = 2\lambda t_{ij}, \quad (A_{ijkl} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ijkl})t_{kl} = 0. \tag{31}$$

Запишем антисимметричный тензор $t_{ij} = -t_{ji}$ в виде (6):

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -t_{21} & -t_{31} \\ t_{21} & 0 & -t_{32} \\ t_{31} & t_{32} & 0 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

который имеет три независимые компоненты. С учётом (29), (32) распишем уравнение (31):

$$2[(A_{ij21} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij21})t_{21} + (A_{ij31} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij31})t_{31} + (A_{ij32} - 2\lambda\tilde{\delta}_{ij32})t_{32}] = 0. \tag{33}$$

Все ненулевые компоненты тензора $\tilde{\delta}_{ijkl}$ в (33) имеют значения 1/2. Далее в (33) нужно придавать все значения индексам i, j. Если $i = j$, то уравнения нулевые, если $i \neq j$, то уравнения с индексами ij и ji отличаются знаком. Таким образом, из (33) получаем однородную систему уравнений

$$\begin{aligned} (A_{2121} - \lambda)t_{21} + A_{2131}t_{31} + A_{2132}t_{32} = 0, \\ A_{3121}t_{21} + (A_{3131} - \lambda)t_{31} + A_{3132}t_{32} = 0, \\ A_{3221}t_{21} + A_{3231}t_{31} + (A_{3232} - \lambda)t_{32} = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

для определения собственных значений λ и тензоров t_{ij} (32). Матрица системы (34) является симметрической и её характеристическое уравнение имеет три действительных корня λ_1, λ_2, λ_3, которым соответствуют три собственных тензора t_{ij} вида (32). В [16] по аналогии с классификацией тензоров четвёртого ранга модулей упругости [14] проведена классификация тензоров вида (29) в четырёхмерном пространстве в зависимости от числа различных собственных значений λ_i и их кратностей. Для тензоров $D_{[ij][kl]}$ (20) выписываются совершенно аналогичные уравнения вида (29)–(34) для определения собственных модулей и состояний. В дальнейшем следует исследовать структуру тензоров четвёртого ранга вида (19).

Некоторые двумерные задачи для изотропной моментной среды решены, например, в работах [17, 18]. Рассматривается случай плоской деформации, когда $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = 0$ и $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3(x_1, x_2)$. Для стеснённого вращения имеет место равенство $\varphi_3 = \omega_3 = (1/2)(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$.

Рассматривая плоскую деформацию анизотропной среды, не предполагаем, что двумерные уравнения следуют из трёхмерных уравнений. При отсутствии объёмных сил и моментов уравнения равновесия (2), (3) в двумерном случае принимают вид [17, 18]

$$\partial_1\sigma_{11} + \partial_2\sigma_{12} = 0, \quad \partial_1\sigma_{21} + \partial_2\sigma_{22} = 0; \tag{35}$$

$$\partial_1\mu_{31} + \partial_2\mu_{32} + \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0. \tag{36}$$

Обобщённые деформации (4) совпадают с классическими [18]:

$$e_{11} = \varepsilon_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2, \quad e_{21} = e_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1), \tag{37}$$

и кроме того

$$\varkappa_{31} = \partial_1\omega_3 = \frac{1}{2}(\partial_{11}u_2 - \partial_{12}u_1), \quad \varkappa_{32} = \partial_2\omega_3 = \frac{1}{2}(\partial_{12}u_2 - \partial_{22}u_1). \tag{38}$$

С учётом (37), (38) определяющие соотношения возьмём в виде, следующем из формул (11):

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\sigma_{kl} = a_{ij11}\sigma_{11} + a_{ij21}\sigma_{21} + a_{ij12}\sigma_{12} + a_{ij22}\sigma_{22}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl},\\ \mu_{31} = D_{3131}\varkappa_{31} + D_{3132}\varkappa_{32}, \quad \mu_{32} = D_{3231}\varkappa_{31} + D_{3232}\varkappa_{32}.\end{gathered} \tag{39}$$

Здесь тензор a_{ijkl} является обратным к тензору A_{ijkl} в (11).

Рассмотрим случай чисто сдвиговых напряжений, при этом $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{22} = 0$. Тогда из (35) следует, что $\sigma_{21} = \sigma_{21}(x_2)$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}(x_1)$, и из (37), (39) получаем

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11} = \partial_1 u_1 = a_{1121}\sigma_{21}(x_2) + a_{1112}\sigma_{12}(x_1), \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 = a_{2221}\sigma_{21}(x_2) + a_{2212}\sigma_{12}(x_1),\\ \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = a_{2121}\sigma_{21}(x_2) + a_{2112}\sigma_{12}(x_1).\end{gathered} \tag{40}$$

Для деформаций (40) условие совместности $\partial_{22}\varepsilon_{11} + \partial_{11}\varepsilon_{22} - 2\partial_{21}\varepsilon_{21} = 0$ [5] принимает вид

$$a_{1121}\partial_{22}\sigma_{21}(x_2) + a_{2212}\partial_{11}\sigma_{12}(x_1) = 0. \tag{41}$$

Считаем, что $a_{1121} \neq 0$, $a_{2212} \neq 0$, тогда из (41) получаем напряжения

$$\sigma_{21}(x_2) = \frac{1}{a_{1121}}\big(c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0\big), \quad \sigma_{12}(x_1) = \frac{1}{a_{2212}}\big(- c_2x_1^2 + k_1x_1 + k_0\big), \tag{42}$$

где c_i, k_i — произвольные постоянные. Подставляем напряжения (42) в первые два уравнения (40):

$$\begin{gathered}\partial_1 u_1 = c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0 + \frac{a_{1112}}{a_{2212}}\big(- c_2x_1^2 + k_1x_1 + k_0\big),\\ \partial_2 u_2 = \frac{a_{2221}}{a_{1121}}\big(c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0\big) + \big(- c_2x_1^2 + k_1x_1 + k_0\big),\end{gathered}$$

отсюда получаем

$$\begin{gathered}u_1 = \big(c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0\big)x_1 + \frac{a_{1112}}{a_{2212}}\left(\frac{-c_2}{3}x_1^3 + \frac{k_1}{2}x_1^2 + k_0x_1\right) + u_1(x_2),\\ u_2 = \frac{a_{2221}}{a_{1121}}\left(\frac{c_2}{3}x_2^3 + \frac{c_1}{2}x_2^2 + c_0x_2\right) + \big(- c_2x_1^2 + k_1x_1 + k_0\big)x_2 + u_2(x_1).\end{gathered} \tag{43}$$

Далее подставляем (42), (43) в третье уравнение (40):

$$\partial_1 u_2(x_1) + c_1x_1 - 2\frac{a_{2112}}{a_{2212}}\big(- c_2x_1^2 + k_1x_1 + k_0\big) + \partial_2 u_1(x_2) + k_1x_2 - 2\frac{a_{2121}}{a_{1121}}\big(c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0\big) = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$\begin{gathered}u_1(x_2) = 2\frac{a_{2121}}{a_{1121}}\left(\frac{c_2}{3}x_2^3 + \frac{c_1}{2}x_2^2 + c_0x_2\right) - \frac{k_1}{2}x_2^2 - a_1x_2 + b_0,\\ u_2(x_1) = 2\frac{a_{2112}}{a_{2212}}\left(- \frac{c_2}{3}x_1^3 + \frac{k_1}{2}x_1^2 + k_0x_1\right) - \frac{c_1}{2}x_1^2 + a_1x_1 + a_0,\end{gathered} \tag{44}$$

где a_1, a_0, b_0 — произвольные постоянные.

Получив смещения (43), (44), найдём деформации (37), (40) и вращение $\varphi_3 = \omega_3 = (1/2)(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$, которые не выписываем. Далее находим компоненты (38) и моментные напряжения (39):

$$
\begin{aligned}
\mu_{31} &= D_{3131}\Big[-2c_2x_2 - c_1 + \frac{a_{2112}}{a_{2212}}(-2c_2x_1 + k_1)\Big] + D_{3132}\Big[-2c_2x_1 + k_1 - \frac{a_{2121}}{a_{1121}}(2c_2x_2 + c_1)\Big],\\
\mu_{32} &= D_{3231}\Big[-2c_2x_2 - c_1 + \frac{a_{2112}}{a_{2212}}(-2c_2x_1 + k_1)\Big] + D_{3232}\Big[-2c_2x_1 + k_1 - \frac{a_{2121}}{a_{1121}}(2c_2x_2 + c_1)\Big].
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Подставляем напряжения (42), (45) в уравнение (36):

$$
D_{3131}\frac{a_{2112}}{a_{2212}}(-2c_2) + D_{3132}(-2c_2) + D_{3231}(-2c_2) + D_{3232}\frac{a_{2121}}{a_{1121}}(-2c_2) + \frac{1}{a_{1121}}\big(c_2x_2^2 + c_1x_2 + c_0\big) - \frac{1}{a_{2212}}\big(-c_2x_1^2 + k_1x_1 + k_0\big) = 0.
$$

Из последнего уравнения следует, что

$$
c_2 = 0, \quad c_1 = 0, \quad k_1 = 0, \quad c_0/a_{1121} = k_0/a_{2212} = c. \tag{46}
$$

С учётом (46) из формул (40), (42)–(45) окончательно получаем

$$
\begin{gathered}
u_1 = c(a_{1121} + a_{1112})x_1 + (2a_{2121}c - a_1)x_2 + b_0,\\
u_2 = c(a_{2221} + a_{2212})x_2 + (2a_{2112}c + a_1)x_1 + a_0,\\
\varepsilon_{11} = c(a_{1121} + a_{1112}), \quad \varepsilon_{22} = c(a_{2221} + a_{2212}), \quad \varepsilon_{21} = c(a_{2112} + a_{2121}),\\
\varphi_3 = \omega_3 = c(a_{2112} - a_{2121}) + a_1,\\
\varkappa_{31} = 0, \quad \varkappa_{32} = 0, \quad \mu_{31} = 0, \quad \mu_{32} = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = c.
\end{gathered}
\tag{47}
$$

Решение (47) соответствует классической упругости, нет моментных напряжений, сдвиговые напряжения симметричны и постоянны. Возможно, такое решение получилось из-за того, что задача рассматривалась как двумерная, а не как следствие трёхмерных уравнений.

Допустим, что начало координат $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ не смещается и нет вращения, т. е. для решения (47) получаем

$$
u_1(0,0) = b_0 = 0, \quad u_2(0,0) = a_0 = 0, \quad \omega_3(0,0) = c(a_{2112} - a_{2121}) + a_1 = 0. \tag{48}
$$

Если $a_{2112} = a_{2121}$, то $a_1 = 0$. С учётом (48) смещения (47) принимают вид

$$
u_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \varepsilon_{21}x_2, \quad u_2 = \varepsilon_{21}x_1 + \varepsilon_{22}x_2. \tag{49}
$$

Решение (47) и формулы (49) имеют место и для двумерного случая трансверсальной изотропии с несимметричной матрицей модулей упругости вида (28) [10, 11], при этом

$$
\varepsilon_{11} = 2ca_{1121} = \frac{-\beta c}{2(\mu^2 + \beta^2)}, \quad \varepsilon_{22} = 2ca_{2221} = \frac{\beta c}{2(\mu^2 + \beta^2)}, \quad \varepsilon_{21} = 2ca_{2121} = \frac{\mu c}{2(\mu^2 + \beta^2)},
$$

где μ, β — постоянные [11]; для случая изотропии $\beta = 0$.

Для изотропной среды имеем коэффициенты

$$
a_{1121} = a_{1112} = 0, \quad a_{2221} = a_{2212} = 0, \quad a_{2121} = a_{2112} = 1/(4\mu) \tag{50}
$$

и моментные напряжения

$$\mu_{31} = D_2\varkappa_{31}, \quad \mu_{32} = D_2\varkappa_{32}, \tag{51}$$

где $\mu > 0$, $D_2 > 0$ — постоянные. С учётом (50) уравнения (40) принимают вид

$$\varepsilon_{11} = \partial_1 u_1 = 0, \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2 = 0, \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = \frac{1}{4\mu}(\sigma_{21}(x_2) + \sigma_{12}(x_1)), \tag{52}$$

причём условие совместности (41) выполняется. Из уравнений (52) получаем

$$u_1 = u_1(x_2), \quad u_2 = u_2(x_1), \quad \sigma_{21}(x_2) + \sigma_{12}(x_1) = 2\mu[\partial_1 u_2(x_1) + \partial_2 u_1(x_2)]. \tag{53}$$

Далее, с учётом (38), (51), (53) находим

$$\mu_{31} = \frac{1}{2}D_1\partial_{11}u_2(x_1), \quad \mu_{32} = -\frac{1}{2}D_2\partial_{22}u_1(x_2)$$

и из уравнения (36) получаем

$$\sigma_{21}(x_2) - \sigma_{12}(x_1) = -\frac{1}{2}D_2(\partial_{111}u_2(x_1) - \partial_{222}u_1(x_2)). \tag{54}$$

Из уравнений (53), (54) выражаем напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{21}(x_2) &= \mu\partial_2 u_1(x_2) + \frac{1}{4}D_2\partial_{222}u_1(x_2) + \mu\partial_1 u_2(x_1) - \frac{1}{4}D_2\partial_{111}u_2(x_1), \\ \sigma_{12}(x_1) &= \mu\partial_1 u_2(x_1) + \frac{1}{4}D_2\partial_{111}u_2(x_1) + \mu\partial_2 u_1(x_2) - \frac{1}{4}D_2\partial_{222}u_1(x_2). \end{aligned} \tag{55}$$

Так как напряжения слева в (55) зависят от одной переменной, то из (55) следует, что смещения удовлетворяют уравнениям

$$\mu u_1(x_2) - \frac{1}{4}D_2\partial_{22}u_1(x_2) = \mu(c_1 x_2 + c_0), \quad \mu u_2(x_1) - \frac{1}{4}D_2\partial_{11}u_2(x_1) = \mu(k_1 x_1 + k_0), \tag{56}$$

где c_0, c_1, k_0, k_1 — произвольные постоянные. Решение уравнений (56) следующее:

$$u_1(x_2) = c_0 + c_1 x_2 + C_1 e^{\lambda_1 x_2} + C_2 e^{-\lambda_1 x_2}, \quad u_2(x_1) = k_0 + k_1 x_1 + K_1 e^{\lambda_1 x_1} + K_2 e^{-\lambda_1 x_1}, \tag{57}$$

где C_1, C_2, K_1, K_2 — произвольные постоянные; $\lambda_1 = 2\sqrt{\mu/D_2}$.

Зная смещения (57), находим все остальные величины:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}[k_1 + c_1 + \lambda_1(K_1 e^{\lambda_1 x_1} - K_2 e^{-\lambda_1 x_1} + C_1 e^{\lambda_1 x_2} - C_2 e^{-\lambda_1 x_2})], \\ \varphi_3 = \omega_3 = \frac{1}{2}[k_1 - c_1 + \lambda_1(K_1 e^{\lambda_1 x_1} - K_2 e^{-\lambda_1 x_1} - (C_1 e^{\lambda_1 x_2} - C_2 e^{-\lambda_1 x_2}))], \\ \varkappa_{31} = \frac{2\mu}{D_2}(K_1 e^{\lambda_1 x_1} + K_2 e^{-\lambda_1 x_1}), \quad \varkappa_{32} = -\frac{2\mu}{D_2}(C_1 e^{\lambda_1 x_2} + C_2 e^{-\lambda_1 x_2}), \\ \mu_{31} = 2\mu(K_1 e^{\lambda_1 x_1} + K_2 e^{-\lambda_1 x_1}), \quad \mu_{32} = -2\mu(C_1 e^{\lambda_1 x_2} + C_2 e^{-\lambda_1 x_2}), \\ \sigma_{21}(x_2) = \mu(c_1 + k_1) + 2\mu(C_1 e^{\lambda_1 x_2} - C_2 e^{-\lambda_1 x_2})\lambda_1, \\ \sigma_{12}(x_1) = \mu(k_1 + c_1) + 2\mu(K_1 e^{\lambda_1 x_1} - K_2 e^{-\lambda_1 x_1})\lambda_1. \end{gathered} \tag{58}$$

Решение (57), (58) содержит восемь свободных постоянных, которые можно назначать произвольно, тогда на границе рассматриваемой области значения функций (57), (58) будут такими, какими получатся. Но можно задавать значения функций в каких-то точках или на границе, а затем находить постоянные. Допустим, что начало координат $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ не смещается и не вращается. Тогда для решения (57), (58) получаем три условия для постоянных:

$$\begin{gathered} u_1(0,0) = c_0 + C_1 + C_2 = 0, \quad u_2(0,0) = k_0 + K_1 + K_2 = 0, \\ 2\omega_3(0,0) = k_1 - c_1 + \lambda_1(K_1 - K_2 - (C_1 - C_2)) = 0. \end{gathered} \tag{59}$$

Из выражений (58) для μ_{31}, μ_{32} следует, что при отсутствии моментных напряжений постоянные K_i, C_i равны нулю, тогда из (59) получаем $c_0 = 0$, $k_0 = 0$, $k_1 = c_1$, при этом

$$u_1 = c_1 x_2, \quad u_2 = c_1 x_1, \quad \varepsilon_{21} = c_1, \quad \omega_3 = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{12} = 2\mu c_1.$$

Последние формулы соответствуют формулам (47), (49), но в (47), (49) присутствуют ещё постоянные ε_{11}, ε_{22}. Для случая изотропии эти постоянные равны нулю.

Рассмотрим область V в виде прямоугольника $-l_1 \leqslant x_1 \leqslant l_1$, $-l_2 \leqslant x_2 \leqslant l_2$ и отнесём смещения u_i и x_i к l_i: $u_i/l_i = \tilde{u}_i$, $x_i/l_i = \tilde{x}_i$. Тогда коэффициенты в (57), (58) будут безразмерными. Но можно положить $l_1 = l_2 = 1$ и считать функции u_i и x_i безразмерными, т. е. знак «тильда» не писать.

Векторы усилий (1) в нашем случае записываются в виде

$$p_1 = \sigma_{12} n_2, \quad p_2 = \sigma_{21} n_1, \quad m_3 = \mu_{31} n_1 + \mu_{32} n_2$$

и на границе области V принимают вид

$$\begin{aligned} p_1(-1,x_2) = 0, \quad p_2(-1,x_2) = -\sigma_{21}(x_2); \quad & p_1(1,x_2) = 0, \quad p_2(1,x_2) = \sigma_{21}(x_2); \\ p_1(x_1,-1) = -\sigma_{12}(x_1), \quad p_2(x_1,-1) = 0; \quad & p_1(x_1,1) = \sigma_{12}(x_1), \quad p_2(x_1,1) = 0; \\ m_3(-1,x_2) = -\mu_{31}(-1), \quad & m_3(1,x_2) = \mu_{31}(1), \\ m_3(x_1,-1) = -\mu_{32}(-1), \quad & m_3(x_1,1) = \mu_{32}(1). \end{aligned} \tag{60}$$

Выражения (60) дают значения усилий и моментов на границе области V, т. е. такие получаются, если решение вида (57), (58).

Аналогично можно выписать значения смещений (57) на границе области V:

$$\begin{gathered} u_1(-1,x_2) = u_1(x_2), \quad u_2(-1,x_2) = u_2(-1); \quad u_1(1,x_2) = u_1(x_2), \quad u_2(1,x_2) = u_2(1); \\ u_1(x_1,-1) = u_1(-1), \quad u_2(x_1,-1) = u_2(x_1); \quad u_1(x_1,1) = u_1(1), \quad u_2(x_1,1) = u_2(x_1) \end{gathered} \tag{61}$$

и значения поворотов ω_3 [17, 18]. Координаты точек $a_i \in V_0$ тела до деформации определяются по формуле $a_i = x_i - u_i(x_s)$, $x_s \in V$ или в нашем случае

$$a_1 = x_1 - u_1(x_1,x_2), \quad a_2 = x_2 - u_2(x_1,x_2), \quad x_1, x_2 \in V. \tag{62}$$

Например, граница $x_1 = 1$ была до деформации линией

$$a_1 = 1 - u_1(1,x_2), \quad a_2 = x_2 - u_2(1,x_2), \quad x_1 = 1;$$

далее, учитывая (57), (61), получаем другие линии

$$\begin{gathered} a_1 = -1 - u_1(-1,x_2), \quad a_2 = x_2 - u_2(-1,x_2), \quad x_1 = -1, \\ a_1 = x_1 - u_1(x_1,1), \quad a_2 = 1 - u_2(x_1,1), \quad x_2 = 1, \\ a_1 = x_1 - u_1(x_1,-1), \quad a_2 = -1 - u_2(x_1,-1), \quad x_2 = -1. \end{gathered}$$

Как тело из начального состояния V_0 перешло в конечное состояние V, в рамках статики определить невозможно. Но в конечном состоянии V тело под действием усилий и моментов (60) находится в равновесии [19].

Если $u_2(x_1) = 0$, т. е. постоянные k_0, k_1, K_1, K_2 равны нулю, тогда из (62), (57) имеем

$$x_1 = a_1 + c_0 + c_1 a_2 + C_1 e^{\lambda_1 a_2} + C_2 e^{-\lambda_1 a_2}, \quad x_2 = a_2.$$

Последние формулы соответствуют простому сдвигу с добавлением слагаемых, учитывающих моментность.

Чтобы сравнить решение (57) с классическим решением без моментных напряжений, зададим краевые условия для квадрата V со стороной $l = 2$. Кроме условий (59) полагаем, что $u_2(x_1) = 0$ и $u_1(-x_2) = -u_1(x_2)$ (это условие тождественно выполняется в классическом решении), и задаём смещение в одной точке, например $u_1(1,1) = 0.1$, тем самым определяется постоянная c_1. Выполняя эти требования, получаем, что решение (57) принимает вид

$$u_1(x_2) = c_1 x_2 + \frac{c_1}{2\lambda_1}(e^{-\lambda_1 x_2} - e^{\lambda_1 x_2}) = c_1(x_2 - (1/\lambda_1)\operatorname{sh}(\lambda_1 x_2)), \quad c_1 = \frac{1}{10(1 - (1/\lambda_1)\operatorname{sh}\lambda_1)}, \tag{63}$$

а напряжения (58) будут следующие:

$$\mu_{32} = \frac{\mu c_1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 x_2} - e^{-\lambda_1 x_2}) = \frac{2\mu c_1}{\lambda_1}\operatorname{sh}(\lambda_1 x_2),$$
$$\sigma_{21}(x_2) = \mu c_1 - \frac{\mu c_1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 x_2} + e^{-\lambda_1 x_2}) = \mu c_1 - \frac{2\mu c_1}{\lambda_1}\operatorname{ch}(\lambda_1 x_2), \quad \sigma_{12}(x_1) = \mu c_1.$$

На рис. 1 приведены границы квадрата V в соответствии с решением (63) (сплошные линии) для различных значений λ_1. Пунктирные линии соответствуют классическому решению $u_1 = c_1 x_2$, $c_1 = 0.1$. При стремлении λ_1 к нулю решение (63) не сходится классическому решению, а стремится к кубической функции $u_1(x_2) = (1/10)x_2^3 + \ldots$. При больших λ_1 деформации локализуются вблизи верхней и нижней граней квадрата.

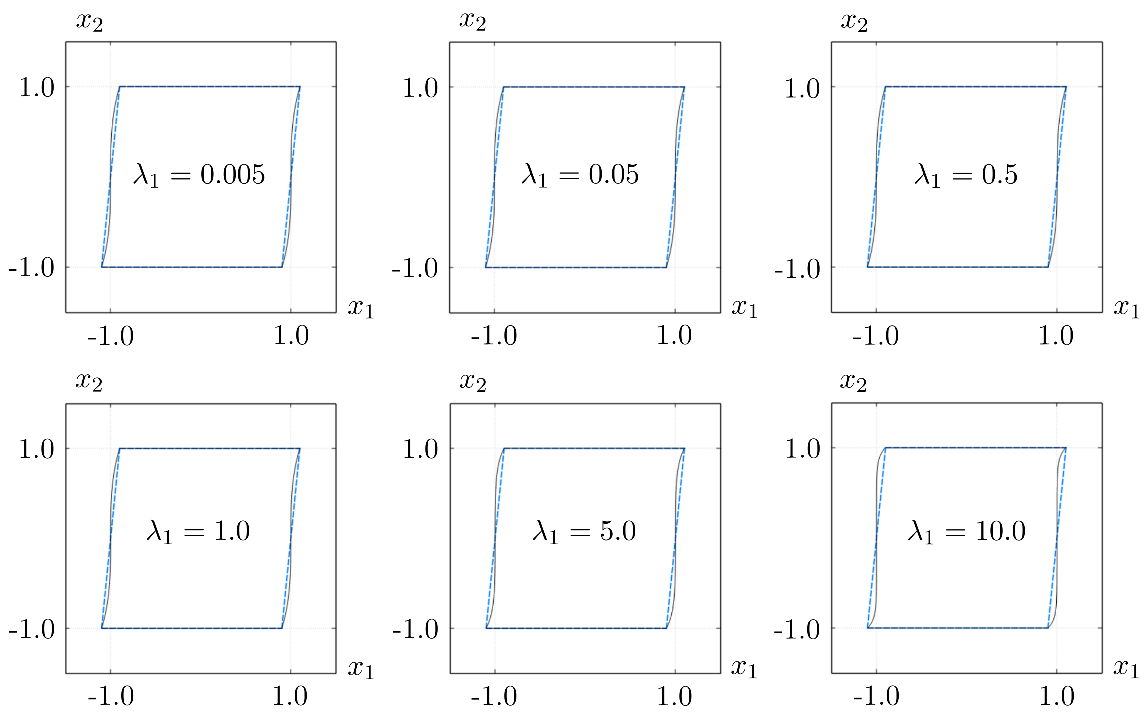


Рис. 1. Сравнение классического решения (пунктирная линия) с решениями (63) (сплошная линия) для различных значений λ_1

Кроме условий (59), для решения (57) можно с помощью краевых условий задавать пять постоянных вместо одной в классическом случае. Зададим, например, смещения в двух точках квадрата:

$$u_1(1,1) = 0.1, \quad u_2(1,1) = 0.1; \quad u_1(-1,-1) = 0.1, \quad u_2(-1,-1) = 0.1.$$

Выполняя эти условия для решения (57), получим постоянные

$$\begin{gathered} c_0 = k_0 = \frac{1}{10(1-\mathrm{ch}\lambda_1)}, \quad k_1 = c_1, \\ C_1 = K_1 = -\frac{1}{2}\Big(c_0 + \frac{c_1}{\mathrm{sh}\lambda_1}\Big), \quad C_2 = K_2 = \frac{1}{2}\Big(-c_0 + \frac{c_1}{\mathrm{sh}\lambda_1}\Big). \end{gathered} \tag{64}$$

Постоянная c_1 характеризует сдвиг и остаётся свободным параметром. Форма деформированного квадрата, соответствующая решению (57), (64), при $\lambda_1 = 1$ в зависимости от параметра $M = c_1/(e - e^{-1})$, приведена на рис. 2.

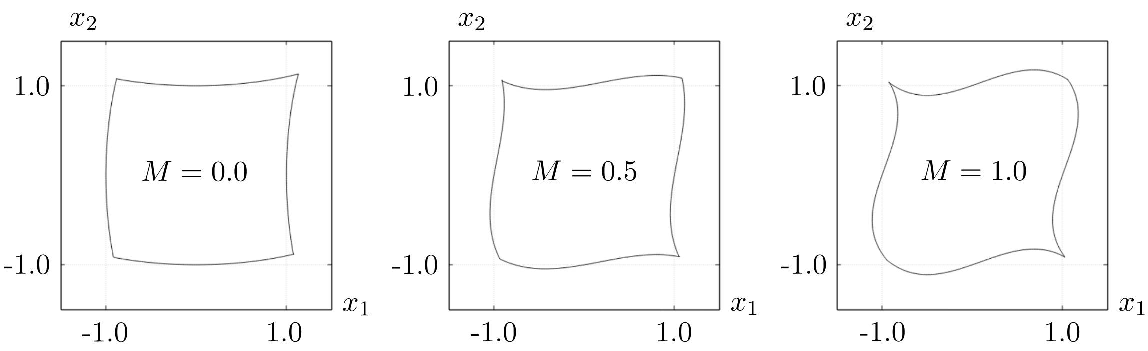


Рис. 2. Форма деформированного квадрата, соответствующая решению (57), (64)

Таким образом, в работе представлены уравнения линейной моментной теории упругости для случая произвольной анизотропии материальных тензоров четвёртого ранга. В определяющих соотношениях выделяются симметричные и кососимметричные составляющие. Рассмотрены некоторые упрощённые варианты линейных определяющих соотношений. Допускается возможность упругости по Коши, когда материальные тензоры четвёртого ранга не обладают главной симметрией. Для материальных тензоров, определяющих силовые и моментные напряжения, введены собственные модули и собственные состояния, которые являются инвариантными характеристиками упругой моментной среды. Для случая плоской деформации и стеснённого вращения приведён пример полного решения двумерной задачи, когда имеются только сдвиговые напряжения. Для анизотропной и изотропной упругих сред решения оказываются существенно различными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твёрд. тела. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–2409.
2. *Кувшинский Е.В., Аэро Э.Л.* Континуальная теория асимметричной упругости. Учёт «внутреннего» вращения // Физика твёрд. тела. 1963. Т. 5, № 9. С. 2591–2598.
3. *Койтер В.Т.* Моментные напряжения в теории упругости // Механика. 1965. № 3. С. 89–112.
4. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, № 3. С. 401–408.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.

6. *Купрадзе В.Д.* Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
7. *Победря Б.Е.* О теории определяющих соотношений в механике деформируемого твёрдого тела // Проблемы механики: К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 635–657.
8. *Победря Б.Е., Омаров С.Е.* Определяющие соотношения моментной теории упругости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 56–58.
9. *Никабадзе М.У.* К построению собственных тензорных столбцов в микрополярной линейной теории упругости // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2014. № 1. С. 30–39.
10. *Остросаблин Н.И.* Классы симметрии тензоров анизотропии и обобщение подхода Кельвина // Прикл. механика и техн. физика. 2017. Т. 58, № 3. С. 108–129.
11. *Остросаблин Н.И.* Общее решение двумерной системы статических уравнений Ламе линейной теории упругости с несимметричной матрицей модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 61–71.
12. *Емельянов А.Н.* Эффективные характеристики в моментной теории упругости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2016.
13. *Никабадзе М.У.* О связи тензоров напряжений и моментных напряжений в микроконтинуальной теории упругости. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2011. № 6. С. 59–62.
14. *Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И.* Анизотропия упругих свойств материалов // Прикл. механика и техн. физика. 2008. Т. 49, № 6. С. 131–151.
15. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твёрд. тела. 1964. Т. 6, № 9. С. 2689–2699.
16. *Никабадзе М.У.* О задаче на собственные значения некоторых применяемых в механике тензоров и о числе существенных условий совместности деформаций Сен-Венана // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 3. С. 54–58.
17. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: Изд-во Ленинград. гос. ун-та, 1978.
18. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
19. *Дуйшеналиев Т.Б.* Неклассические решения механики деформируемого тела. М.: Изд-во МЭИ, 2017.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3:517.958

DEFINING EQUATIONS OF THE ANISOTROPIC MOMENT LINEAR THEORY OF ELASTICITY AND THE TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF PURE SHEAR WITH CONSTRAINED ROTATION

© 2023 B. D. Annin[1,2a], N. I. Ostrosablin[1b], R. I. Ugryumov[1,2c]

[1]*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2]*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: [a]annin@hydro.nsc.ru, [b]o.n.i@ngs.ru, [c]riugryumov@mail.ru

Received 25.05.2022, revised 25.05.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. The paper presents the equations of the linear moment theory of elasticity for the case of arbitrary anisotropy of material tensors of the fourth rank. Symmetric and skew-symmetric components are distinguished in the defining relations. Some simplified variants of linear defining relations are considered. The possibility of Cauchy elasticity is allowed when material tensors of the fourth rank do not have the main symmetry. For material tensors that determine force and moment stresses, eigenmodulus and eigenstates are introduced, which are invariant characteristics of an elastic moment medium. For the case of plane deformation and constrained rotation, an example of a complete solution of a two-dimensional problem is given when there are only shear stresses. For anisotropic and isotropic elastic media, the solutions turn out to be significantly different.

Keywords: moment theory of elasticity, asymmetric stress tensors, defining equations, elastic modulus, fourth-rank tensors, pure shear, constrained rotation, two-dimensional problem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.101

REFERENCES

1. Aero E.L., Kuvshinskii E.V. Osnovnye uravneniya teorii uprugosti sred s vrashchatel'nym vzaimodeistviem chastits [Basic equations of the elasticity theory for media with rotatory interaction of particles]. *Fizika Tverd. Tela*, 1960, Vol. 2, No. 7, pp. 1399–2409 (in Russian).
2. Kuvshinskii E.V., Aero E.L. Kontinual'naya teoriya asimmetrichnoi uprugosti. Uchet «vnutrennego» vrashcheniya [Theory of continuum in the asymmetric elasticity. Considerations of the «internal» rotations]. *Fizika tverd. tela*, 1963, Vol. 5, No. 9, pp. 2591–2598 (in Russian).
3. Koiter V.T. Couple-stresses in the theory of elasticity. *Proc. Koninklijke Nederlandse Akad. van Wetenschappen*, 1964, B. 67, No. 1, pp. 17–44.
4. Pal'mov V.A. Fundamental equations of the theory of asymmetric elasticity. *J. Appl. Math. Mech.*, 1964, Vol. 28, No. 3, pp. 496–505.
5. Novatskii V. Teoria sprężystości. Warszawa, 1970, (in Polish).
6. Kupradze V.D. Three-Dimensional Problems of Elasticity and Thermoelasticity. Elsevier, 2012.
7. Pobedrya B.E. O teorii opredelyayushchikh sootnoshenii v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela [On constitutive relations theory in solid mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2003, pp. 635–657 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

8. Pobedrya B.E., Omarov S.E. Opredelyayushchie sootnosheniya momentnoi teorii uprugosti [Constitutive relations of the moment theory of elasticity]. *Vestn. MGU. Ser.* 1. *Matematika. Mekhanika*, 2007, No. 3, pp. 56–58 (in Russian).

9. Nikabadze M.U. K postroeniyu sobstvennykh tenzornykh stolbtsov v mikropolyarnoi lineinoi teorii uprugosti [Construction of eigentensor columns in the linear micropolar theory of elasticity]. *Vestn. MGU. Ser.* 1. *Matematika. Mekhanika*, 2014, No. 1, pp. 30–39 (in Russian).

10. Ostrosablin N.I. Symmetry classes of the anisotropy tensors of quasielastic materials and a generalized Kelvin approach. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, Vol. 58, No. 3, pp. 469–488.

11. Ostrosablin N.I. General solution for the two-dimensional system of static lame's equations with an asymmetric elasticity matrix. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 1, pp. 126–135.

12. Emel'yanov A.N. Effektivnye kharakteristiki v momentnoi teorii uprugosti: Dis. ... kand. fiz.-mat. naukv [Effective characteristics in the moment theory of elasticity: Dis. ... cand. phys. math. sci.]. Moscow, 2016 (in Russian).

13. Nikabadze M.U. Relation between the stress and couple-stress tensors in the microcontinuum theory of elasticity. *MGU. Mech. Bull.*, 2011, Vol. 66, No. 6, pp. 141–143.

14. Annin B.D., Ostrosablin N.I. Anisotropy of elastic properties of materials. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, Vol. 49, No. 6, pp. 998–1014.

15. Aero E.L., Kuvshinskii E.V. Kontinual'naya teoriya asimmetricheskoi uprugosti. Ravnovesie izotropnogo tela [Theory of continuum in the asymmetric elasticity. Equilibrium of an isotropic body]. *Fizika Tverd. Tela*, 1964, Vol. 6, No. 9, pp. 2689–2699.

16. Nikabadze M.U. An eigenvalue problem for tensors used in mechanics and the number of independent Saint-Venant strain compatibility conditions. *MGU. Mech. Bull.*, 2017, Vol. 72, No. 3, pp. 66–69.

17. Morozov N.F. Izbrannye dvumernye zadachi teorii uprugosti [Selected two-dimensional problems of elasticity theory]. Leningrad: Izd-vo Leningr. un-ta, 1978 (in Russian).

18. Morozov N.F. Matematicheskie voprosy teorii treshchin [Mathematical problems of fracture theory]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).

19. Duishenaliev T.B. Neklassicheskie resheniya mekhaniki deformiruemogo tela [Non-classical solutions of solid mechanics]. Moscow: MEI Pess, 2017.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2023. Т. 26, № 1. С. 20–32

УДК 64-6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ПОМЕЩЕНИИ С ГАЗОВЫМ ИНФРАКРАСНЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ, СИСТЕМОЙ ВОЗДУХООБМЕНА И ЛОКАЛЬНЫМ ОГРАЖДЕНИЕМ РАБОЧЕЙ ЗОНЫ

© 2023 Б. В. Борисов, А. В. Вяткин, Г. В. Кузнецов, В. И. Максимов[a], Т. А. Нагорнова

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, ул. Ленина, 30, г. Томск 634050, Россия

E-mail: elf@tpu.ru

Поступила в редакцию 08.08.2022 г.; после доработки 08.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Проведено математическое моделирование процессов теплопереноса в помещении с газовым инфракрасным излучателем, системой воздухообмена, горизонтальной панелью, имитирующей оборудование, и локальным ограждением. Решена система уравнений радиационного теплообмена, энергии и Навье — Стокса для воздуха и теплопроводности для твёрдых элементов. Полученные в результате моделирования поля температур и скоростей воздуха иллюстрируют возможность управления тепловым режимом локальной рабочей зоны при установке специального ограждения на её границе. Установлено, что изменяя высоту ограждения и материал, из которого он изготовлен, можно изменять локальные и средние температуры воздуха локальной рабочей зоны. Результаты выполненных численных исследований дают основания для вывода о том, что при варьировании параметров локальных ограждений возможно создание более комфортных температурных условий в локальной рабочей зоне при работе газовых инфракрасных излучателей в условиях достаточно интенсивного воздухообмена.

Ключевые слова: математическое моделирование, тепловой режим, газовый инфракрасный излучатель, объект теплоснабжения, конвективный теплоперенос.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.102

ВВЕДЕНИЕ

Созданию регламентных температурных условий в локальных рабочих зонах уделяется большое внимание во многих странах с достаточно разными климатическими условиями (см., например, [1, 2]). Набирают все большую популярность системы персонального комфорта [3, 4]. Индивидуальный обогрев может поддерживать или даже улучшать индивидуально воспринимаемый тепловой комфорт, в то же время обладая, что очень важно, значительным потенциалом энергосбережения [5]. Перспективны локальные обогреватели, в которых реализуются три механизма теплопереноса: кондуктивный, конвективный и лучистый нагревы [6]. Наиболее распространены конвективные и лучистые (инфракрасные) персональные обогреватели — нагнетатели тёплого воздуха и излучающие высокотемпературные поверхности [7, 8]. В качестве основных элементов в системах создания теплового комфорта в частично занятых производственных или крупногабаритных офисных помещениях несомненные преимущества имеют газовые инфракрасные излучатели (ГИИ) [9]. Но пока примеров создания эффективных систем управления тепловыми режимами локальных рабочих зон крупногабаритных произ-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-19-00226).

водственных помещений с использованием лучистой энергии известно немного (см., например, [10, 11]). Изучены достаточно детально только процессы переноса теплоты при работе систем лучистого нагрева (например, [12, 13]) в режиме естественной конвекции. Но использование ГИИ светлого типа, при работе которого в окружающую среду поступают продукты сгорания газа, требует использования системы воздухообмена, работа которой приводит к возникновению режима смешанной конвекции. Нагрев поверхностей теплоотвода обеспечивается главным образом лучистым переносом теплоты, источником которого является ГИИ [14]. Помещённое в зону влияния ГИИ оборудование также нагревается и вследствие конвективного теплообмена частично передаёт теплоту обтекающему его воздуху. Установлено [13], что при оценке параметров тепловых режимов локальных рабочих зон необходимо учитывать взаимное влияние сложных процессов радиационного теплопереноса и конвективного теплообмена, которые во многом оказывают существенное влияние на температурное поле объекта. Есть основания полагать, что, изменяя структуру конвективных потоков в помещении с локальной рабочей зоной, при дополнительных ограждениях можно изменять тепловой режим в такой зоне. Но выбор мест установки и основных характеристик таких дополнительных ограждений по результатам экспериментальных исследований очень трудоёмок и времязатратен. Предпочтительным является математическое моделирование процессов теплопереноса в такой сложной системе (основные ограждающие конструкции — газовый инфракрасный излучатель — оборудование — дополнительные ограждения) с целью анализа влияния дополнительных ограждений на характерные температуры локальной рабочей зоны. Пока таких моделей нет.

Целью работы является разработка математической модели и оценка по результатам математического моделирования масштабов влияния локального ограждения, расположенного в крупногабаритном помещении с работающим газовым инфракрасным излучателем и системой воздухообмена, на тепловой режим локальной рабочей зоны.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Математическое моделирование проводилось в рамках двухмерного приближения для области, схематично представленной на рис. 1. Рассматривалась замкнутая прямоугольная область, заполненная воздухом, с размещёнными в ней газовым инфракрасным излучателем, системой воздухообмена, горизонтальной панелью (имитирующей оборудование) и локальным ограждением (рис. 1).

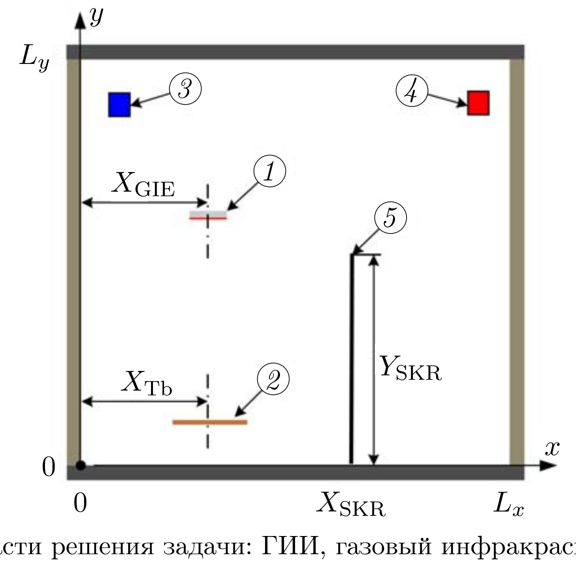


Рис. 1. Схема области решения задачи: ГИИ, газовый инфракрасный излучатель (*1*), панель (*2*), зона притока воздуха (*3*), зона оттока воздуха (*4*), локальное ограждение (*5*)

Обозначим через Lx_{corner}, Ly_{corner}, Lx_{size}, Ly_{size} координаты левого нижнего угла фигуры (прямоугольника) и её размеры по оси OX, OY соответственно. В табл. 1 приведены обозначения геометрических параметров.

Таблица 1

Обозначение геометрических параметров

Элементы системы	Lx_{corner}	Ly_{corner}	Lx_{size}	Ly_{size}
Пол	$-L_{\text{wall}}$	$-L_{\text{floor}}$	$Lx + 2 \cdot L_{\text{wall}}$	L_{floor}
Потолок	$-L_{\text{wall}}$	Ly	$Lx + 2 \cdot L_{\text{wall}}$	L_{ceiling}
Левая стена	$-L_{\text{wall}}$	0	L_{wall}	Ly
Правая стена	Lx	0	L_{wall}	Ly
ГИИ	$X_{\text{GIE}} - Lx_{\text{GIE}}/2$	Y_{GIE}	Lx_{GIE}	Ly_{GIE}
Горизонтальная панель	$X_{\text{Tb}} - Lx_{\text{Tb}}/2$	$Y_{\text{Tb}} - Ly_{\text{Tb}}$	Lx_{Tb}	Ly_{Tb}
Приточная вентиляция	X_{VL}	Y_{VL}	Lx_{VL}	Ly_{VL}
Вытяжная вентиляция	X_{VR}	Y_{VR}	Lx_{VR}	Ly_{VR}
Временное ограждение	X_{SKR}	Y_{SKR}	Lx_{SKR}	Ly_{SKR}

Конвективно-кондуктивный перенос теплоты в области, заполненной воздухом, описывался уравнением энергии [15]:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} + \rho c_p (\vec{u} \cdot \nabla) T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \tag{1}$$

$$-L_{\text{wall}} \leqslant x \leqslant L_x + L_{\text{wall}}, \quad -L_{\text{floor}} \leqslant y \leqslant L_y + L_{\text{ceiling}},$$

$$(x, y) \notin \{X_{\text{GIE}} - Lx_{\text{GIE}}/2 \leqslant x \leqslant X_{\text{GIE}} + Lx_{\text{GIE}}/2,\ Y_{\text{GIE}} \leqslant y \leqslant Y_{\text{GIE}} + Ly_{\text{GIE}}\},$$

$$(x, y) \notin \{X_{\text{VL}} \leqslant x \leqslant X_{\text{VL}} + Lx_{\text{VL}},\ Y_{\text{VL}} \leqslant y \leqslant Y_{\text{VL}} + Ly_{\text{VL}}\},$$

$$(x, y) \notin \{X_{\text{VR}} \leqslant x \leqslant X_{\text{VR}} + Lx_{\text{VR}},\ Y_{\text{VR}} \leqslant y \leqslant Y_{\text{VR}} + Ly_{\text{VR}}\},$$

где τ — время, ρ — плотность, T — температура, c_p — удельная изобарная теплоёмкость, κ — коэффициент теплопроводности.

Векторное поле скоростей воздуха $\vec{u}$ определялось из решения системы уравнений движения и неразрывности несжимаемого газа в приближении Буссинеска [16]:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \nabla \cdot [-p\vec{I} + \vec{K}] + (\rho - \rho_0)\vec{g}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \tag{3}$$

$$0 \leqslant x \leqslant L_x, \quad 0 \leqslant y \leqslant L_y,$$

$$(x, y) \notin \{X_{GIE} - Lx_{GIE}/2 \leqslant x \leqslant X_{GIE} + Lx_{GIE}/2,\ Y_{GIE} \leqslant y \leqslant Y_{GIE} + Ly_{GIE}\},$$

$$(x, y) \notin \{X_{Tb} - Lx_{Tb}/2 \leqslant x \leqslant X_{Tb} + Lx_{Tb}/2,\ Y_{Tb} - Ly_{Tb} \leqslant y \leqslant Y_{Tb}\},$$

$$(x, y) \notin \{X_{VL} \leqslant x \leqslant X_{VL} + Lx_{VL},\ Y_{VL} \leqslant y \leqslant Y_{VL} + Ly_{VL}\},$$

$$(x, y) \notin \{X_{VR} \leqslant x \leqslant X_{VR} + Lx_{VR},\ Y_{VR} \leqslant y \leqslant Y_{VR} + Ly_{VR}\},$$

$$(x, y) \notin \{X_{SKR} \leqslant x \leqslant X_{SKR} + Lx_{SKR},\ Y_{SKR} \leqslant y \leqslant Y_{SKR} + Ly_{SKR}\},$$

где p, $\vec{I}$ — давление и символ единичного тензора; ρ_0, $\vec{g}$ — начальная плотность и ускорение свободного падения;

$$\vec{K} = (\mu + \mu_{\text{T}})(\nabla \cdot \vec{u} + (\nabla \cdot \vec{u})^{\text{T}}) - 2/3(\mu + \mu_{\text{T}})(\nabla \cdot \vec{u})\vec{I} - 2/3\rho k \vec{I}$$

— тензор напряжений вязкого трения с учётом турбулентной (на что указывает индекс Т) составляющей; μ — коэффициент динамической вязкости. При моделировании турбулентного течения воздуха использовалась $k-\varepsilon$ модель, в которой кинетическая энергия турбулентности k и скорость диссипации турбулентности ε для той же области определения системы (2), (3) описывались уравнениями [17, 18]

$$\rho\frac{\partial k}{\partial\tau}+\rho(\vec{u}\cdot\nabla)k=\nabla\cdot\left[\left(\mu+\frac{\mu_{\mathrm{T}}}{\sigma_k}\right)(\nabla\cdot k)\right]+P_k-\rho\varepsilon, \tag{4}$$

$$\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}+\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon=\nabla\cdot\left[\left(\mu+\frac{\mu_{\mathrm{T}}}{\sigma_\varepsilon}\right)(\nabla\cdot k)\varepsilon\right]+C_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}P_k+C_{\varepsilon2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}. \tag{5}$$

Из решения уравнений (4), (5) определяем $\mu_{\mathrm{T}}=\rho C_\mu k^2/\varepsilon$. Оператор P_k, входящий в (4), (5), имеет вид

$$P_k=\mu_{\mathrm{T}}\left[\frac{\nabla\cdot\vec{u}}{\nabla\cdot\vec{u}+(\nabla\cdot\vec{u})^{\mathrm{T}}}-\frac{2(\nabla\cdot\vec{u})^2}{3}\right]-\frac{2\rho k\nabla\cdot\vec{u}}{3}.$$

В соответствии с общей теорией [17, 18] принимаем значения констант: $C_{\varepsilon1}=1.44$, $C_{\varepsilon2}=1.92$, $C_\mu=0.09$, $\sigma_k=1$, $\sigma_\varepsilon=1.3$.

Потоки излучения рассчитывались с использованием зональной модели [19] при прямом интегрировании потоков между всеми составляющими (Surface-to-Surface Radiation) замкнутой системы поверхностей при определяемых внутри этой системы угловых коэффициентах. Воздух считался диатермичной средой (абсолютно прозрачной для потока излучения) [19].

Локальное ограждение рассматривалось как плоскость, разделяющая область решения уравнений (1)–(5). Плотность кондуктивного теплового потока q_s определялась из системы уравнений [20]

$$\begin{gathered}
q_s(-k\nabla T)\,|_{x=X_{\mathrm{SCR}-}}=-k\frac{T\,|_{x=X_{SCR+}}-T\,|_{x=X_{\mathrm{SCR}-}}}{Lx_{\mathrm{SKR}}}=(-k\nabla T)\,|_{x=X_{\mathrm{SCR}+}},\\
q_r\,|_{x=X_{\mathrm{SCR}-}}=(1-\rho_r-\tau_r)G\,|_{x=X_{\mathrm{SCR}-}}-J\,|_{x=X_{\mathrm{SCR}-}},\\
q_r\,|_{x=X_{\mathrm{SCR}+}}=(1-\rho_r-\tau_r)G\,|_{x=X_{\mathrm{SCR}+}}-J\,|_{x=X_{\mathrm{SCR}+}},
\end{gathered}$$

где ρ_r и τ_r — коэффициенты отражения и пропускания полагались одинаковыми для обеих поверхностей. Интегральные плотности тепловых потоков падающего G и эффективного J связывались соотношением $J=\rho_r G+\varepsilon_r\sigma T^4$, где ρ_r, ε_r, σ — соответственно считающаяся одинаковой для обеих поверхностей степень черноты и постоянная Стефана — Больцмана [19, 20].

Принято, что в начальный момент времени по всей области решения температура равна T_0, а воздух неподвижен:

$$T(0,x,y)=T_0,\quad \vec{u}(0,x,y)=0,\quad -L_{\mathrm{wall}}\leqslant x\leqslant L_x+L_{\mathrm{wall}},\quad -L_{\mathrm{floor}}\leqslant y\leqslant L_y+L_{\mathrm{ceiling}}.$$

Температура на нижней (излучающей) поверхности ГИИ во всё время работы оставалась постоянной:

$$T(\tau,x,y)=T_{\mathrm{GIE}},\quad \tau\geqslant 0,\quad X_{\mathrm{GIE}}-Lx_{\mathrm{GIE}}/2\leqslant x\leqslant X_{\mathrm{GIE}}+Lx_{\mathrm{GIE}}/2,\quad y=Y_{\mathrm{GIE}}.$$

На боковых поверхностях ГИИ задавалась определённая в выполненных ранее экспериментах температура $T_{F\,\mathrm{GIE}}$: $T(\tau,x,y)=T_{F\,\mathrm{GIE}}$, $\tau\geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
(x,y)\in\{x=X_{\mathrm{GIE}}-Lx_{GIE}/2,\ Y_{\mathrm{GIE}}\leqslant y\leqslant Y_{\mathrm{GIE}}+Ly_{\mathrm{GIE}}\}&\\
\cup\{x=X_{\mathrm{GIE}}+Lx_{\mathrm{GIE}}/2,\ Y_{\mathrm{GIE}}\leqslant y\leqslant Y_{\mathrm{GIE}}+Ly_{\mathrm{GIE}}\}.&
\end{aligned}$$

В ходе экспериментальных исследований значение данной температуры практически не менялось и составляло в среднем $T_{F\,\mathrm{GIE}} = 315\,\mathrm{K}$.

На верхней границе ГИИ задавалась плотность теплового потока ($q_{F\,\mathrm{GIE}}$), учитывающая долю теплоты, полученной при сгорании газа $\nabla T(\tau, x, y) = -q_{F\,\mathrm{GIE}}/\lambda$, $\tau > 0$:

$$(x, y) \in \{X_{\mathrm{GIE}} - Lx_{\mathrm{GIE}}/2 \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{GIE}} + Lx_{\mathrm{GIE}}/2,\ y = Y_{\mathrm{GIE}} + Ly_{\mathrm{GIE}}\}.$$

Значение $q_{F\,\mathrm{GIE}}$ определялось по номинальной тепловой мощности ($Q_{V\,\mathrm{GIE}}$), лучистого КПД (η_{rad}) и площади верхней поверхности ГИИ ($F_{\mathrm{Up\,GIE}}$) в соответствии с соотношением $q_{F\,\mathrm{GIE}} = (1 - \eta_{\mathrm{rad}})Q_{V\,\mathrm{GIE}}/F_{\mathrm{Up\,GIE}}$.

Считалось, что за время работы ГИИ пол, потолок и стены не успевают прогреться на всю толщину, поверхности системы воздухообмена не участвуют в теплообмене, поэтому на перечисленных поверхностях для уравнения (1) использовано условие отсутствия теплообмена с внешней средой $\nabla T(\tau, x, y) = 0$, $\tau > 0$:

$$\begin{aligned}(x, y) \in {} & \{x = -L_{\mathrm{wall}},\ -L_{\mathrm{floor}} \leqslant y \leqslant L_y + L_{\mathrm{ceiling}}\} \cup \{x = -L_{\mathrm{wall}},\ -L_{\mathrm{floor}} \leqslant y \leqslant L_y + L_{\mathrm{ceiling}}\} \\ & \cup \{-L_{\mathrm{wall}} \leqslant x \leqslant L_x + L_{\mathrm{wall}},\ y = -L_{\mathrm{floor}}\} \cup \{-L_{\mathrm{wall}} \leqslant x \leqslant L_x + L_{\mathrm{wall}},\ y = L_y + L_{\mathrm{ceiling}}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x, y) \in {} & \{x = X_{\mathrm{VL}},\ Y_{\mathrm{VL}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{VL}} + Ly_{\mathrm{VL}}\} \cup \{x = X_{\mathrm{VL}} + Lx_{\mathrm{VL}},\ Y_{\mathrm{VL}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{VL}} + Ly_{\mathrm{VL}}\} \\ & \cup \{X_{\mathrm{VL}} \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{VL}} + Lx_{\mathrm{VL}},\ y = Y_{\mathrm{VL}}\} \cup \{X_{\mathrm{VL}} \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{VL}} + Lx_{\mathrm{VL}},\ y = Y_{\mathrm{VL}} + Ly_{\mathrm{VL}}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x, y) \in {} & \{x = X_{\mathrm{VR}},\ Y_{\mathrm{VR}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{VR}} + Ly_{\mathrm{VR}}\} \cup \{x = X_{\mathrm{VR}} + Lx_{\mathrm{VR}},\ Y_{\mathrm{VR}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{VR}} + Ly_{\mathrm{VR}}\} \\ & \cup \{X_{\mathrm{VR}} \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{VR}} + Lx_{\mathrm{VR}},\ y = Y_{\mathrm{VR}}\} \cup \{X_{\mathrm{VR}} \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{VR}} + Lx_{VR},\ y = Y_{\mathrm{VR}} + Ly_{\mathrm{VR}}\}.\end{aligned}$$

Плотность теплового потока к поверхности q_{sol} складывалась из плотности кондуктивно-конвективного теплового потока к этой поверхности q_{gas} и плотности радиационного теплового q_{rad} от всех излучающих поверхностей $q_{\mathrm{sol}} = q_{\mathrm{gas}} + q_{\mathrm{rad}}$, $\tau \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}(x, y) \in {} & \{x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant L_y\} \cup \{x = L_x,\ 0 \leqslant y \leqslant L_y\} \cup \{0 \leqslant x \leqslant L_x,\ y = 0\} \\ & \cup \{0 \leqslant x \leqslant L_x,\ y = L_y\} \cup \{x = X_{\mathrm{Tb}} - Lx_{\mathrm{Tb}}/2,\ Y_{\mathrm{Tb}} - Ly_{\mathrm{Tb}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{Tb}}\} \\ & \cup \{x = X_{\mathrm{Tb}} + Lx_{\mathrm{Tb}}/2,\ Y_{\mathrm{Tb}} - Ly_{\mathrm{Tb}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{Tb}}\} \\ & \cup \{X_{\mathrm{Tb}} - Lx_{\mathrm{Tb}}/2 \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{Tb}} + Lx_{\mathrm{Tb}}/2,\ y = Y_{\mathrm{Tb}} - Ly_{\mathrm{Tb}}\} \\ & \cup \{X_{\mathrm{Tb}} - Lx_{\mathrm{Tb}}/2 \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{Tb}} + Lx_{\mathrm{Tb}}/2,\ y = Y_{\mathrm{Tb}}\}.\end{aligned}$$

В качестве граничных условий для системы уравнений (2), (3) на границах раздела газ-твёрдая поверхность приняты условия прилипания [15–18] $\vec{u}(\tau, x, y) = 0$, $\tau \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}(x, y) \in {} & \{x = 0, 0 \leqslant y \leqslant L_y\} \cup \{x = L_x, 0 \leqslant y \leqslant L_y\} \\ & \cup \{0 \leqslant x \leqslant L_x, y = 0\} \cup \{0 \leqslant x \leqslant L_x, y = L_y\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x, y) \in {} & \{x = X_{\mathrm{Tb}} - Lx_{\mathrm{Tb}}/2,\ Y_{\mathrm{Tb}} - Ly_{\mathrm{Tb}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{Tb}}\} \\ & \cup \{x = X_{\mathrm{Tb}} + Lx_{\mathrm{Tb}}/2,\ Y_{\mathrm{Tb}} - Ly_{\mathrm{Tb}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{Tb}}\} \\ & \cup \{X_{\mathrm{Tb}} - Lx_{\mathrm{Tb}}/2 \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{Tb}} + Lx_{\mathrm{Tb}}/2,\ y = Y_{\mathrm{Tb}} - Ly_{\mathrm{Tb}}\} \\ & \cup \{X_{\mathrm{Tb}} - Lx_{\mathrm{Tb}}/2 \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{Tb}} + Lx_{\mathrm{Tb}}/2,\ y = Y_{\mathrm{Tb}}\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x, y) \in {} & \{x = X_{\mathrm{GIE}} - Lx_{\mathrm{GIE}}/2,\ Y_{\mathrm{GIE}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{GIE}} + Ly_{\mathrm{GIE}}\} \\ & \cup \{x = X_{\mathrm{GIE}} + Lx_{\mathrm{GIE}}/2,\ Y_{\mathrm{GIE}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{GIE}} + Ly_{\mathrm{GIE}}\}\end{aligned}$$

$$\cup \{X_{\mathrm{GIE}} - Lx_{\mathrm{GIE}}/2 \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{GIE}} + Lx_{\mathrm{GIE}}/2,\ y = Y_{\mathrm{GIE}} - Ly_{\mathrm{GIE}}\}$$
$$\cup \{X_{\mathrm{GIE}} - Lx_{\mathrm{GIE}}/2 \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{GIE}} + Lx_{\mathrm{GIE}}/2,\ y = Y_{\mathrm{GIE}}\},$$

$$(x,y) \in \{x = X_{\mathrm{VL}},\ Y_{\mathrm{VL}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{VL}} + Ly_{\mathrm{VL}}\} \cup \{X_{\mathrm{VL}} \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{VL}} + Lx_{\mathrm{VL}},\ y = Y_{\mathrm{VL}}\}$$
$$\cup \{X_{\mathrm{VL}} \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{VL}} + Lx_{\mathrm{VL}},\ y = Y_{\mathrm{VL}} + Ly_{\mathrm{VL}}\},$$

$$(x,y) \in \{x = X_{\mathrm{VR}} + Lx_{\mathrm{VR}},\ Y_{\mathrm{VR}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{VR}} + Ly_{\mathrm{VR}}\} \cup \{X_{\mathrm{VR}} \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{VR}} + Lx_{\mathrm{VR}},\ y = Y_{\mathrm{VR}}\}$$
$$\cup \{X_{\mathrm{VR}} \leqslant x \leqslant X_{\mathrm{VR}} + Lx_{\mathrm{VR}},\ y = Y_{\mathrm{VR}} + Ly_{\mathrm{VR}}\},$$

$$(x,y) \in \{x = X_{\mathrm{SKR}},\ 0 \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{SKR}}\}.$$

Вблизи твёрдых поверхностей, где вязкие эффекты превалируют над турбулентными, для (4), (5) применялся метод пристеночных функций [15–18].

В зоне притока воздуха

$$(x,y) \in \{x = X_{\mathrm{VL}} + Lx_{\mathrm{VL}},\ Y_{\mathrm{VL}} \leqslant y \leqslant Y_{\mathrm{VL}} + Ly_{\mathrm{VL}}\}$$

в соответствии с массовым расходом задавались нормальная составляющая скорости U_{VEN} и температура T_{VEN}, а в зоне оттока

$$(x,y) \in \{x = X_{VL} + Lx_{VL},\ Y_{VL} \leqslant y \leqslant Y_{VL} + Ly_{VL}\}$$

задавалось значение давления, равное значению внешней атмосферы p_{air}.

Система уравнений (1)–(5) решалась методом конечных элементов в рамках модулей «Heat Transfer in Fluids» и «Turbulent Flow, $k-\varepsilon$» программной среды COMSOL Multiphysics. Параметры радиационного теплового потока определялись модулем «Surface-to-Surface Radiation». Тепловые потоки через дополнительное ограждение моделировались в рамках раздела «Heat Transfer in Films».

Перед проведением численных исследований процессов теплообмена в помещении с работающей системой ГИИ и воздухообмена созданный в среде COMSOL Multiphysics программный продукт прошёл этап верификации путём сравнения температурных полей, полученных в результате математического моделирования, и проведённых ранее физических экспериментов [14]. Расхождение значений температур составило не более 1.5 градуса, что говорит об адекватности разработанной модели процессов тепломассопереноса.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование проведено при следующих основных геометрических и энергетических параметрах: $L_x = 5$ м, $L_y = 4.4$ м, $L_{\mathrm{wall}} = L_{\mathrm{floor}} = L_{\mathrm{ceiling}} = 0.1$ м, $T_0 = 283$ K, массовый расход воздуха в системе воздухообмена $G_{\mathrm{VEN}} = 2.22 \cdot 10^{-4}$ кг/(с·м^3), $T_{\mathrm{VEN}} = 280$ K, $Q_{V\,\mathrm{GIE}} = 5$ кВт, $\eta_{\mathrm{rad}} = 0.57$, $X_{\mathrm{GIE}} = 2.95$ м, $Lx_{\mathrm{GIE}} = 0.4$ м, $Ly_{\mathrm{GIE}} = 0.2$ м, $X_{\mathrm{Tb}} = 1.6$ м, $Y_{\mathrm{Tb}} = 0.735$ м, $Lx_{\mathrm{Tb}} = 1.2$ м, $Ly_{\mathrm{Tb}} = 0.02$ м, $Y_{\mathrm{VL}} = Y_{\mathrm{VR}} = 3.5$ м, $X_{\mathrm{SKR}} = 3$ м.

Для определения теплофизических параметров воздуха использовались аппроксимации из библиотеки материалов COMSOL Multiphysics, остальные соответствуют приведённым в табл. 2.

Математическое моделирование выполнено для нескольких вариантов геометрических размеров локального ограждения и отличающихся теплофизическими свойствами материала этого ограждения.

Варианты расчётов, результаты которых анализируются в статье, соответствуют табл. 3.

Типичные результаты расчётов представлены на рис. 2, 3. На этих рисунках два белых квадрата — это области ввода и вывода системы воздухообмена и один прямоугольник — это

Таблица 2

Теплофизические свойства материалов ограждающих конструкций и панели

Объект	Материал	Плотность (кг·м$^{-3}$)	Теплоёмкость (Дж·кг$^{-1}$·К$^{-1}$)	Теплопроводность (Вт·К$^{-1}$·м$^{-1}$)	Степень черноты
Пол, потолок, стены	Бетон	2500	2400	1.55	0.3
Горизонтальная панель: верхняя поверхность (a), торцевые и нижняя поверхности (b)	Сосна	520	2300	0.2	0.5^a, 0.95^b
Локальное ограждение	Пластмасса	970	2500	0.27	ε_r

Таблица 3

Варианты расчётов

№	1	2	3	4	5	6
Воздухообмен	отсутствует	есть	есть	есть	есть	есть
Y_{SKR}, м	отсутствует	есть	2	3	2	1
ε_r	отсутствует	есть	0.1	0.1	0.95	0.95

область излучателя (см. рис. 1). Эти области исключены из моделирования и соответственно на рисунках они белые (для них нет значений, и в цветовой палитре — это белый цвет).

При отсутствии воздухообмена и дополнительного ограждения формируется температурное поле (рис. 2(a)) с ярко выраженной линией раздела на уровне горизонтальной панели. Этому во многом способствуют восходящие потоки тёплого воздуха от горизонтальной панели и нисходящие вдоль стен потоки охлаждённого воздуха (рис. 2(b)), которые и образуют две основных зоны рециркуляционного течения.

Работа системы воздухообмена с притоком более холодного воздуха способствует общему снижению температуры в области (рис. 2(c)), а втекающая масса воздуха опускается ниже горизонтальной панели (рис. 2(d)) и частично выравнивает температурное поле в левом нижнем углу помещения. Присутствие в зоне течения относительно прозрачного для радиационного потока ($\varepsilon_r = 0.1$) локального ограждения не даёт возможность холодному потоку воздуха поступать в локальную рабочую зону и охлаждать её (рис. 2(e, f)).

При этом средняя температура воздуха в локальной области в зоне влияния ГИИ повышается (рис. 4(a)).

Увеличение степени черноты локального ограждения приводит к повышению температуры его поверхности. В результате температура воздуха вокруг ограждения также увеличивается (рис. 3(a, c)). Образуется устойчивый циркуляционный вихрь нагретого воздуха в локальной рабочей зоне (рис. 3(b, d)).

Нагнетаемый системой воздухообмена воздух, смешиваясь с нагретым от ГИИ воздухом, полностью оттесняется к левой ограждающей конструкции (рис. 3(b, f)). Формируется нисходящий поток вдоль слабо прогревающейся левой стены и пола. Этот воздух затем поступает в нижнюю область локальной рабочей зоны. Средняя температура воздуха и перепад по высоте в локальной рабочей зоне при этом существенно увеличиваются (на два–шесть градусов) (рис. 4).

Увеличение высоты локального ограждения практически не влияет на структуру тече-

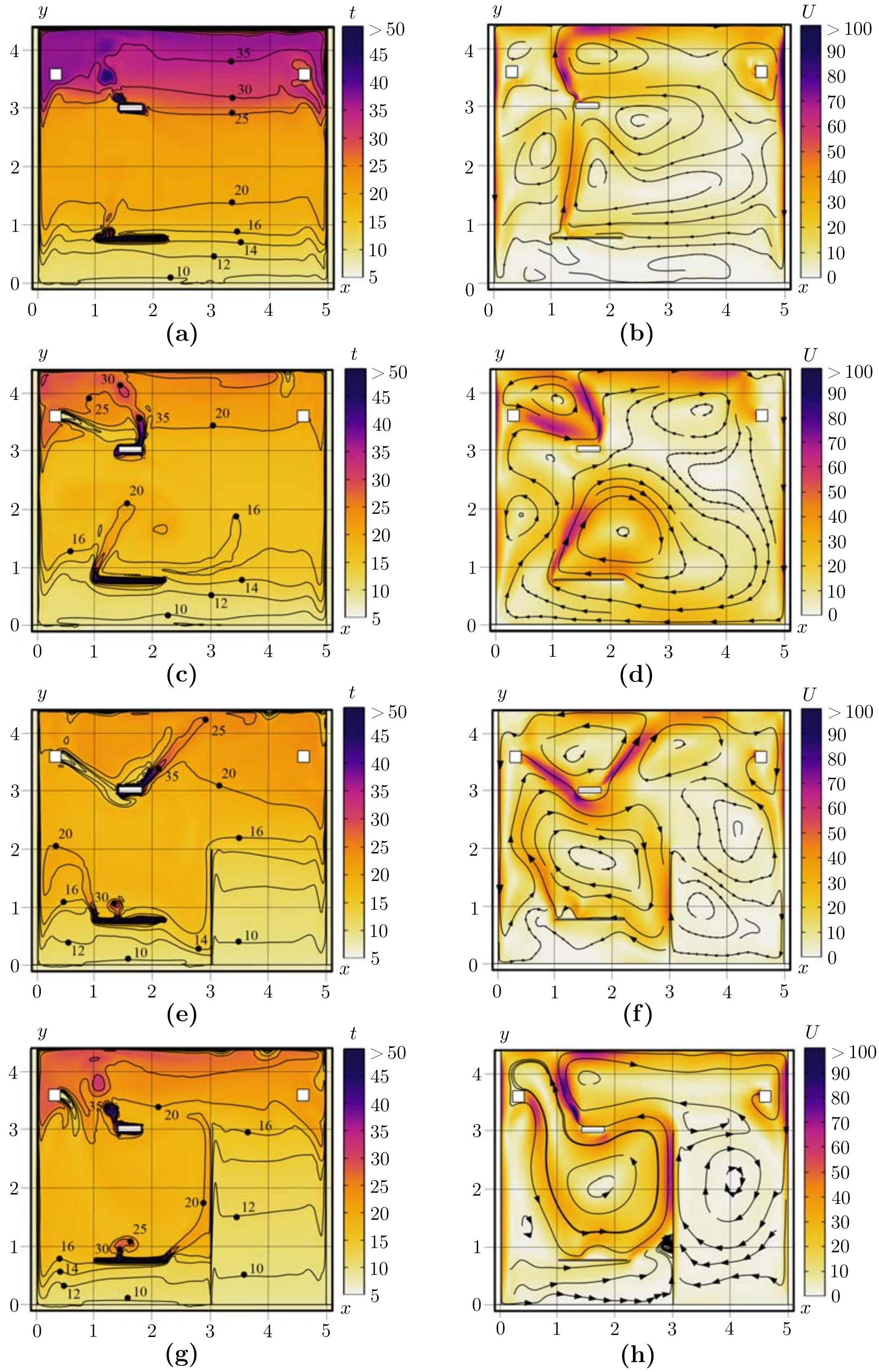


Рис. 2. Поля температур и скоростей при $\tau = 120$ м для различных вариантов исходных данных: вариант 1 (a, b), вариант 2 (c, d), вариант 3 (e, f), вариант 4 (g, h)

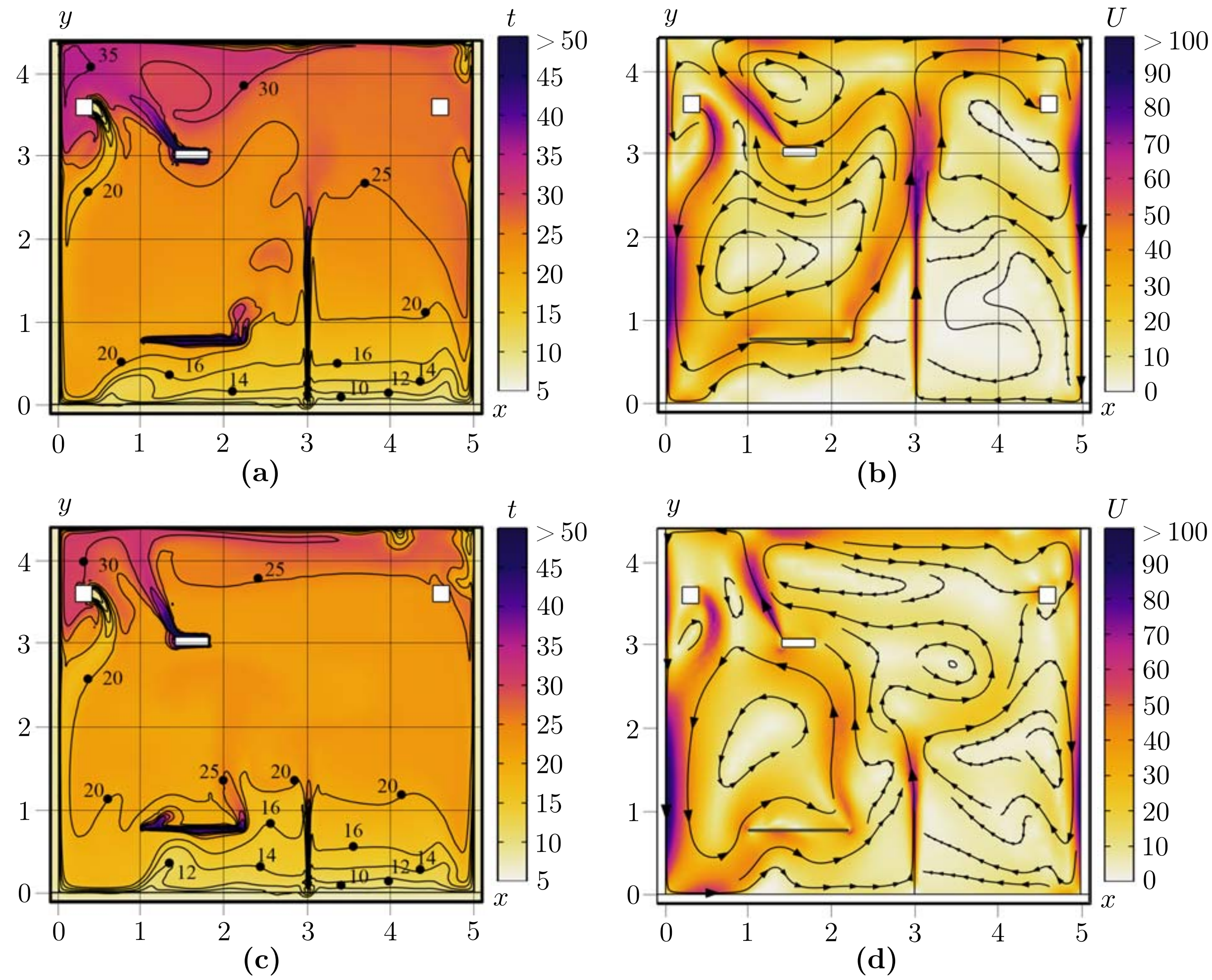


Рис. 3. Поля температур и скоростей при $\tau = 120$ м для различных вариантов исходных данных: вариант 5 (a, b); вариант 6 (c, d)

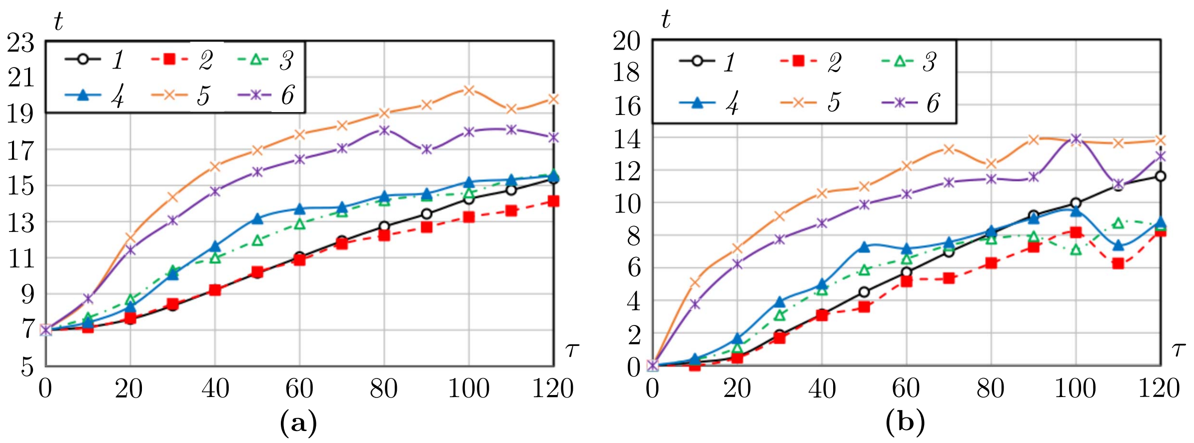


Рис. 4. Динамика изменения средней температуры (a) и перепада средних температур по высоте (b) в локальной рабочей зоне ($2.2 < x < 3.0$ м; $0.01 < y < 2.0$ м) во времени τ (кривые *1*–*6* соответствуют вариантам исходных данных в табл. 3)

ния воздуха в помещении (рис. 3(d)), но за счёт увеличения площади нагреваемой поверхности, находящейся в зоне влияния ГИИ, увеличивается (на два градуса) средняя температура в локальной рабочей зоне, а перепад средней температуры по высоте практически остаётся неизменным (менее одного градуса) (рис. 4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты проведённых численных исследований теплопереноса в помещении с газовым инфракрасным излучателем, системой воздухообмена и локальным ограждением показали, что при установке дополнительных ограждающих конструкций на границе локальной рабочей зоны и изменении радиационных параметров их поверхностей можно регулировать тепловой режим локальной рабочей зоны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zhang C., Pomianowski M., Heiselberg P.K., Yu T.* A review of integrated radiant heating/cooling with ventilation systems: Thermal comfort and indoor air quality // Energy and Buildings. 2020. V. 223. Article 110094; https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2020.110094
2. *Karmann C, Schiavon S, Bauman F.* Thermal comfort in buildings using radiant vs. all-air systems: A critical literature review // Building and Environment. 2017. V. 111. P. 123—31; https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2016.10.020
3. *Song W, Zhang Z, Chen Z, Wang F, Yang B.* Thermal comfort and energy performance of personal comfort systems (PCS): A systematic review and meta-analysis // Energy and Buildings. 2022. V. 256. Article 111747; https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2021.111747
4. *Wang H., Li W., Wang J., Xu M., Ge B.* Experimental study on local floor heating mats to improve thermal comfort of workers in cold environments // Building and Environment. 2021. V. 205. Article 108227; https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2021.108227
5. *Verhaart J., Vesely M., Zeiler W.* Personal heating: effectiveness and energy use // Building Research and Information. 2015. V. 43, Is. 3. P. 346–354; https://doi.org/10.1080/09613218.2015.1001606
6. *Tan J., Liu J., Liu W., Yu B., Zhang J.* Performance on heating human body of an optimised radiant-convective combined personal electric heater // Building and Environment. 2022. V. 214. Article 108882; https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2022.108882
7. *Du C., Liu H., Li C., Xiong J., Li B., Li G., Xi Z.* Demand and efficiency evaluations of local convective heating to human feet and low body parts in cold environments // Building and Environment. 2020. V. 171. Article 106662; https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2020.106662
8. *Oravec J., Sikula O., Krajcik M., Arici M., Mohapl M.* A comparative study on the applicability of six radiant floor, wall, and ceiling heating systems based on thermal performance analysis // J. Building Engrg. 2021. V. 36. Article 102133; https://doi.org/10.1016/j.jobe.2020.102133
9. *Maznoy A., Kirdyashkin A., Pichugin N., Zambalov S., Petrov D.* Development of a new infrared heater based on an annular cylindrical radiant burner for direct heating applications // Energy. 2020. V. 204. Article 117965; https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117965
10. *Kavga A., Karanastasi E., Konstas I., Panidis Th.* Performance of an infrared heating system in a production greenhouse // IFAC Proc. 2013. V. 46, Is. 18. P. 235–240; https://doi.org/10.3182/20130828-2-SF-3019.00017
11. *Dudkiewicz E., Szalanski P.* Overview of exhaust gas heat recovery technologies for radiant heating systems in large halls // Thermal Sci. Engrg. Progress. 2020. V. 18. Article 100522; https://doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100522
12. *Kuznetsov G.V., Kurilenko N.I., Maksimov V.I., Nagornova T.A.* Experimental and numerical study of heat transfer in production area heated by gas infrared source // Internat. J. Thermal Sci. 2020. V. 154. Article 106396; https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2020.106396
13. *Kuznetsov G.V., Maksimov V.I., Nagornova T.A., Voloshko I.V., Gutareva N.Y., Kurilenko N.I.* Experimental determination of the worker's clothing surface temperature during the ceramic gas heater operation // Thermal Sci. Engrg. Progress. 2021. V. 22. Article 100851; https://doi.org/10.1016/j.tsep.2021.100851

14. *Borisov B.V., Kuznetsov G.V., Maksimov V.I., Nagornova T.A., Gutareva N.Y.* Numerical simulation of heat transfer in a large room with a working gas infrared emitter // J. Phys. Conf. Ser. 2020. V. 1675. Article 012074; DOI: 10.1088/1742-6596/1675/1/012074
15. *Bird B., Stewart W.E., Lightfoot E.N.* Transport Phenomena. J. Wiley & Sons, 2007.
16. *Tritton D.J.* Physical Fluid Dynamics. Clarendon Press, 1988.
17. *Wilcox D.C.* Turbulence Modeling for CFD. DCW Ind., 1998.
18. *Kuzmin D., Mierka O., Turek S.* On the implementation of the $k-\varepsilon$ turbulence model in incompressible flow solvers based on a finite element discretization // Internat. J. Comput. Sci. Math. 2007. V. 1, N 2–4. P. 193–206; https://www.researchgate.net/publication/228529803
19. *Siegel R., Howell J.* Thermal Radiation Heat Transfer. N. Y.: Taylor & Francis, 2002.
20. *Haynes W.M.* Handbook of Chemistry and Physics 2015–2016. Boca Raton: Taylor & Francis, 2015.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 64-6

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT TRANSFER IN A ROOM WITH A GAS INFRARED HEATER, AIR EXCHANGE SYSTEM AND LOCAL FENCE OF THE WORKING AREA

© 2023 **B. V. Borisov, A. V. Vyatkin, G. V. Kuznetsov, V. I. Maksimov**[a], **T. A. Nagornova**

National Research Tomsk Polytechnic University, ul. Lenina 30, Tomsk 634050, Russia

E-mail: elf@tpu.ru

Received 08.08.2022, revised 08.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. Mathematical modeling of heat transfer processes in a room with a gas infrared heater, an air exchange system, a horizontal panel simulating equipment, and a local fence has been conducted. The system of equations of radiative heat transfer, energy and Navier—Stokes for air and thermal conductivity for solid elements were solved. The fields of temperatures and air velocities obtained as a result of modeling illustrate the possibility of controlling the thermal regime of a local working area when a special fence is installed at its border. It was found that by changing the height and the material of the fence, it is possible to change the local and average air temperatures of the local working area. The results give grounds for the conclusion that by varying the parameters of local fences, it is possible to create more comfortable temperature conditions in the local working area when gas infrared heaters operate under conditions of intense air exchange.

Keywords: mathematical modeling, thermal regime, gas infrared heater, heat supply object, convective heat transfer.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.102

REFERENCES

1. Zhang C., Pomianowski M., Heiselberg P.K., Yu T. A review of integrated radiant heating/cooling with ventilation systems: Thermal comfort and indoor air quality. *Energy and Buildings*, 2020, Vol. 223, article 110094; https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2020.110094
2. Karmann C, Schiavon S, Bauman F. Thermal comfort in buildings using radiant vs. all-air systems: A critical literature review. *Building and Environment*, 2017, Vol. 111, pp. 123—31; https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2016.10.020
3. Song W, Zhang Z, Chen Z, Wang F, Yang B. Thermal comfort and energy performance of personal comfort systems (PCS): A systematic review and meta-analysis. *Energy and Buildings*, 2022, Vol. 256, article 111747; https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2021.111747
4. Wang H., Li W., Wang J., Xu M., Ge B. Experimental study on local floor heating mats to improve thermal comfort of workers in cold environments. *Building and Environment*, 2021, Vol. 205, article 108227; https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2021.108227
5. Verhaart J., Vesely M., Zeiler W. Personal heating: effectiveness and energy use. *Building Research and Information*, 2015, Vol. 43, Is. 3, pp. 346–354; https://doi.org/10.1080/09613218.2015.1001606
6. Tan J., Liu J., Liu W., Yu B., Zhang J. Performance on heating human body of an optimised radiant-convective combined personal electric heater. *Building and Environment*, 2022, Vol. 214, article 108882; https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2022.108882

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

7. Du C., Liu H., Li C., Xiong J., Li B., Li G., Xi Z. Demand and efficiency evaluations of local convective heating to human feet and low body parts in cold environments. *Building and Environment*, 2020, Vol. 171, article 106662; https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2020.106662
8. Oravec J., Sikula O., Krajcik M., Arici M., Mohapl M. A comparative study on the applicability of six radiant floor, wall, and ceiling heating systems based on thermal performance analysis. *J. Building Engrg.*, 2021, Vol. 36, article 102133; https://doi.org/10.1016/j.jobe.2020.102133
9. Maznoy A., Kirdyashkin A., Pichugin N., Zambalov S., Petrov D. Development of a new infrared heater based on an annular cylindrical radiant burner for direct heating applications. *Energy*, 2020, Vol. 204, article 117965; https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117965
10. Kavga A., Karanastasi E., Konstas I., Panidis Th. Performance of an infrared heating system in a production greenhouse. *IFAC Proc.*, 2013, Vol. 46, Is. 18, pp. 235–240; https://doi.org/10.3182/20130828-2-SF-3019.00017
11. Dudkiewicz E., Szalanski P. Overview of exhaust gas heat recovery technologies for radiant heating systems in large halls. *Thermal Sci. Engrg. Progress*, 2020, Vol. 18, article 100522; https://doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100522
12. Kuznetsov G.V., Kurilenko N.I., Maksimov V.I., Nagornova T.A. Experimental and numerical study of heat transfer in production area heated by gas infrared source. *Internat. J. Thermal Sci.*, 2020, Vol. 154, article 106396; https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2020.106396
13. Kuznetsov G.V., Maksimov V.I., Nagornova T.A., Voloshko I.V., Gutareva N.Y., Kurilenko N.I. Experimental determination of the worker's clothing surface temperature during the ceramic gas heater operation. *Thermal Sci. Engrg. Progress*, 2021, Vol. 22, article 100851; https://doi.org/10.1016/j.tsep.2021.100851
14. Borisov B.V., Kuznetsov G.V., Maksimov V.I., Nagornova T.A., Gutareva N.Y. Numerical simulation of heat transfer in a large room with a working gas infrared emitter. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, Vol. 1675, article 012074; DOI: 10.1088/1742-6596/1675/1/012074
15. Bird B., Stewart W.E., Lightfoot E.N. Transport Phenomena. J. Wiley & Sons, 2007.
16. Tritton D.J. Physical Fluid Dynamics. Clarendon Press, 1988.
17. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. DCW Ind., 1998.
18. Kuzmin D., Mierka O., Turek S. On the implementation of the $k-\varepsilon$ turbulence model in incompressible flow solvers based on a finite element discretization. *Internat. J. Comput. Sci. Math.*, 2007, Vol. 1, No. 2–4, pp. 193—206; https://www.researchgate.net/publication/228529803
19. Siegel R., Howell J. Thermal Radiation Heat Transfer. N. Y.: Taylor & Francis, 2002.
20. Haynes W.M. Handbook of Chemistry and Physics 2015–2016. Boca Raton: Taylor & Francis, 2015.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2023. Т. 26, № 1. С. 33–46

УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИТОКА ВЫСОКОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В СКВАЖИНУ С ТРЕЩИНОЙ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А. Я. Давлетбаев[a], Л. А. Ковалева[b], З. С. Мухаметова[c]

Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32, г. Уфа 450076, Россия

E-mails: [a]DavletbaevAY@rambler.ru, [b]Liana-Kovaleva@yandex.ru,
[c]MuchametovaZ@mail.ru

Поступила в редакцию 22.08.2022 г.; после доработки 22.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Обсуждаются результаты математического моделирования процесса притока высоковязкой нефти к скважине с трещиной гидроразрыва пласта при поэтапном высокочастотном электромагнитном воздействии. Рассматривается элемент системы разработки с несколькими скважинами с трещинами гидроразрыва пласта. Трещины имеют одинаковую геометрию и фильтрационные свойства и направлены вдоль региональных напряжений. В постановке задачи учитываются эффекты термического расширения нефти, зависимость вязкости пластовой жидкости от температуры, влияние скважин окружения на нестационарные поля давлений и температуры вокруг добывающей скважины с тепловым воздействием. Выполнены численные расчёты притока жидкости в скважину с различными проводимостями трещины, исследованы процессы массо- и теплопереноса в призабойной зоне скважин с трещинами гидроразрыва пласта, а также проведены сопоставительные расчёты с «холодной» добычей пластовой жидкости.

Ключевые слова: трещина, гидравлический разрыв пласта, высокочастотное электромагнитное воздействие, элемент системы разработки, высоковязкая нефть.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.103

ВВЕДЕНИЕ

Особенности добычи тяжёлой нефти при электромагнитном (ЭМ) высокочастотном (ВЧ) воздействии обсуждаются в работах многих авторов [1–6]. В России исследования ВЧ ЭМ нагрева призабойной зоны продуктивного пласта связаны с разработкой месторождений в Башкирии и залежей битумов Татарстана [1]. Успешно реализовано ВЧ ЭМ воздействие и на месторождениях США, Канады, Венесуэлы [2, 3, 7]. Способ добычи полезных ископаемых с нагревом пласта ВЧ ЭМ полем посредством эксплуатационной скважины был предложен в 1956 г. [8], но наблюдались большие потери ЭМ энергии на нагрев труб, позже в работе [9] рассмотрено использование генератора ЭМ энергии на забое скважины. Моделирование добычи тяжёлой нефти с ЭМ воздействием показаны в работах [1, 10–12]. В настоящее время разработка большинства месторождений нефти и газа ведётся из низкопроницаемых коллекторов с применением гидравлического разрыва пласта (ГРП). Моделирование добычи тяжёлых углеводородов в скважине с одиночной трещиной ГРП и поэтапным действием ЭМ поля описано в [13], а в работе [14] обсуждаются результаты подобного моделирования в скважине с двумя перпендикулярными трещинами. В данной работе проведено численное моделирование добычи

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-20042).

высоковязкой нефти при поэтапном ВЧ ЭМ излучении на продуктивный пласт в элементе системы разработки. Предполагается, что во всех четырёх скважинах элемента системы разработки предварительно выполнена операция ГРП. Проводимость трещин ГРП существенно больше проводимости продуктивного пласта, так как трещины заполнены расклинивающим агентом — пропантом. Диэлектрические и тепловые свойства трещин и пласта полагаются одинаковыми. Тепловое воздействие осуществляется на одну из четырёх скважин в элементе разработки, в остальных трёх осуществляется «холодная» добыча высоковязкой нефти. Выполнены расчёты для трещин с различной проводимостью, во всех рассмотренных случаях проведены сопоставительные расчёты с технологией «холодной» добычи пластовой жидкости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается процесс фильтрации высоковязкой жидкости в четырёх скважинах с трещинами гидроразрыва пласта в элементе системы разработки. Схема модели элемента системы разработки приведена на рис. 1.

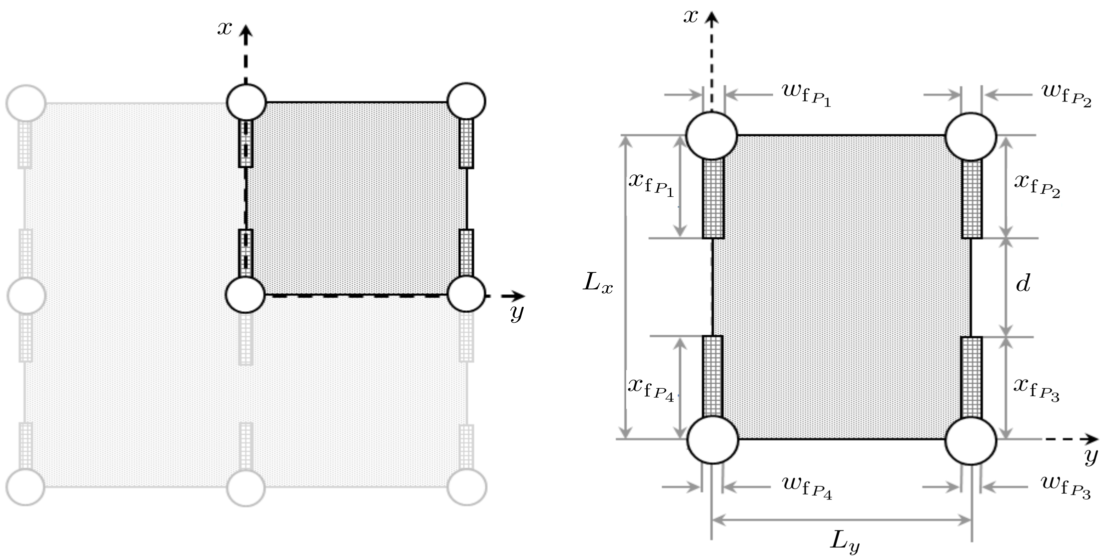


Рис. 1. Расчётная область

Ввиду симметрии задачи относительно осей OX и OY расчётная область представляет четверть элемента системы разработки. Полагается, что трещины во всех четырёх скважинах ориентированы вдоль региональных напряжений и имеют одинаковые полудлины x_{f_i} и безразмерные проводимости $F_{CD} = \dfrac{k_{\mathrm{f}_i}\omega_{\mathrm{f}_i}}{k_{\mathrm{m}}x_{\mathrm{f}_i}}$, где индексом $i = P1, P2, P3, P4$ обозначается скважина в элементе системы разработки. Тепловое воздействие осуществляется в скважине $i = P4$. В соответствии с работами [1, 10, 13] распределение давления P_{f} и температуры T_{f} в трещинах описывается одномерными уравнениями пьезопроводности и конвективной теплопроводности вдоль направления их развития, а распределение давления P_{m} и температуры T_{m} в продуктивном пласте — двухмерными уравнениями пьезопроводности и теплопроводности:

$$\phi_{\mathrm{f}}\beta_{\mathrm{f}\,t}\left(\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial t} - \frac{\delta_{\mathrm{o}}}{\beta_{\mathrm{o}}}\frac{\partial T_{\mathrm{f}}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_{\mathrm{f}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$\alpha_{\mathrm{f}t}\frac{\partial T_{\mathrm{f}}}{\partial t} - \phi_{\mathrm{f}}\eta_{\mathrm{o}}\rho_{\mathrm{f}}c_{\mathrm{o}}\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{\mathrm{f}t}\frac{\partial T_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right) - \rho_{\mathrm{o}}c_{\mathrm{o}}\upsilon_{\mathrm{f}}\frac{\partial T_{\mathrm{f}}}{\partial x} + q^{(E)}, \tag{2}$$

$$\phi_m\beta_{\mathrm{m}t}\left(\frac{\partial P_m}{\partial t} - \frac{\delta_{\mathrm{o}}}{\beta_{\mathrm{o}}}\frac{\partial T_{\mathrm{m}}}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k_{\mathrm{m}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k_{\mathrm{m}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right), \tag{3}$$

$$\alpha_{\mathrm{mt}}\frac{\partial T_m}{\partial t}-\phi_m\eta_{\mathrm{o}}\rho_{\mathrm{o}}c_{\mathrm{o}}\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{\mathrm{mt}}\frac{\partial T_{\mathrm{m}}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{\mathrm{mt}}\frac{\partial T_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right)-\rho_{\mathrm{o}}c_{\mathrm{o}}\left(\upsilon_{\mathrm{m}x}\frac{\partial T_{\mathrm{m}}}{\partial x}+\upsilon_{\mathrm{m}y}\frac{\partial T_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right)+q^{(E)},\quad (4)$$

где ϕ_{f}, ϕ_{m}, k_{f}, k_{m}— пористость и проницаемость трещины и пласта; $\beta_{\mathrm{f}t}$, $\beta_{\mathrm{m}t}$ — общая сжимаемость системы в трещине и пласте; ρ_{o} — плотность нефти; c_{o} — удельная теплоёмкость нефти; $\alpha_{\mathrm{f}t}, \alpha_{\mathrm{m}t}, \lambda_{\mathrm{f}t}, \lambda_{\mathrm{m}t}$ — объёмная теплоёмкость и теплопроводность в трещине и пласте; ω_{f} — раскрытие трещины; h и h_{f} — высоты продуктивного пласта и трещины гидроразрыва совпадают; индексы: f — трещина, m — продуктивный пласт (матрица), o — нефть. Предварительные вычислительные эксперименты показали, что можно пренебречь влиянием адиабатического эффекта ($\eta_{\mathrm{o}} = 0$ К/Па).

Скорость фильтрации в трещинах гидроразрыва пласта и продуктивном пласте описываются законом Дарси:

$$\upsilon_{\mathrm{f}}=\frac{k_{\mathrm{f}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial x},\quad \upsilon_{\mathrm{m}x}=\frac{k_{\mathrm{m}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial x},\quad \upsilon_{\mathrm{m}y}=\frac{k_{\mathrm{m}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial y}.\quad (5)$$

Вязкость нефти зависит от температуры и определяется выражением

$$\mu_{\mathrm{o}}=\mu_{\mathrm{o}\,0}\exp(-\gamma_{\mathrm{o}}(T-T_0)),\quad (6)$$

где $\mu_{\mathrm{o}\,0}$ — значение вязкости нефти при начальной температуре $T = T_0$, γ_{o} — коэффициент, учитывающий зависимость вязкости нефти от температуры.

Вследствие энергетического взаимодействия электромагнитных волн с пластовой жидкостью и пластом в околоскважинной области возникают источники тепла. Выражение для плотности источников тепла описано в работе [2]:

$$q^{(E)}=2J\alpha_d\frac{r_d}{r}\exp(-2\alpha_d(r-r_d)),\quad (7)$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$ — цилиндрические координаты, $J = N_0/S_d$ — интенсивность излучателя ЭМ волн. Полагается, что генератор ЭМ волн находится в интервале продуктивного пласта, поэтому его мощность равна мощности излучателя ЭМ волн $N_g = N_0$.

1.1. Технология воздействия

Технология многостадийной добычи с поэтапным электромагнитным воздействием предполагает, что на первом этапе во всех четырёх скважинах элемента системы разработки осуществляется непрерывная «холодная» добыча тяжёлой нефти ($N_g = 0$) при постоянном забойном давлении в скважинах. На втором этапе на одной из четырёх скважин $i = P4$ добыча продолжается с одновременным электромагнитным воздействием ($N_g = N_0$), остальные три скважины $i = P1, P2, P3$ эксплуатируются без теплового воздействия. На третьем этапе во всех четырёх скважинах добыча продолжается с выключенным генератором ЭМ волн ($N_g = 0$). После снижения температуры и дебита нефти в скважине $i = P4$ до первоначальных значений (до начала теплового воздействия) технология может повторяться циклично.

1.2. Начальные и граничные условия

В начальный момент времени до запуска скважин и теплового воздействия предполагается, что в системе «скважины-трещины-продуктивный пласт» задаются постоянные начальные пластовое давление и температура:

$$P_m|_{t=0} = P_\mathrm{f}|_{t=0} = P_0, \quad T_m|_{t=0} = T_\mathrm{f}|_{t=0} = T_0. \tag{8}$$

На границе пласта и трещины поддерживаются условия равенства давлений, температур, а также равенство фильтрационных и тепловых потоков:

$$\begin{aligned}
P_m|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2} = P_\mathrm{f}|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2}, &\quad \frac{k_m}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{m}}{\partial y}\bigg|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2} = \frac{k_\mathrm{f}}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{f}}{\partial y}\bigg|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2},\\
P_m|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2} = P_\mathrm{f}|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2}, &\quad \frac{k_m}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{m}}{\partial y}\bigg|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2} = \frac{k_\mathrm{f}}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{f}}{\partial y}\bigg|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2},\\
P_m|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2} = P_\mathrm{f}|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2}, &\quad \frac{k_m}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{m}}{\partial y}\bigg|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2} = \frac{k_\mathrm{f}}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{f}}{\partial y}\bigg|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2},\\
P_m|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2} = P_\mathrm{f}|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2}, &\quad \frac{k_m}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{m}}{\partial y}\bigg|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2} = \frac{k_\mathrm{f}}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{f}}{\partial y}\bigg|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2},\\
T_m|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2} = T_\mathrm{f}|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2}, &\quad \lambda_\mathrm{mt}\frac{\partial T_\mathrm{m}}{\partial y}\bigg|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2} = \lambda_\mathrm{ft}\frac{\partial T_\mathrm{f}}{\partial y}\bigg|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2},\\
T_m|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2} = T_\mathrm{f}|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2}, &\quad \lambda_\mathrm{mt}\frac{\partial T_\mathrm{m}}{\partial y}\bigg|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2} = \lambda_\mathrm{ft}\frac{\partial T_\mathrm{f}}{\partial y}\bigg|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2},\\
T_m|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2} = T_\mathrm{f}|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2}, &\quad \lambda_\mathrm{mt}\frac{\partial T_\mathrm{m}}{\partial y}|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2} = \lambda_\mathrm{ft}\frac{\partial T_\mathrm{f}}{\partial y}\bigg|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2},\\
T_m|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2} = T_\mathrm{f}|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2}, &\quad \lambda_\mathrm{mt}\frac{\partial T_\mathrm{m}}{\partial y}\bigg|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2} = \lambda_\mathrm{ft}\frac{\partial T_\mathrm{f}}{\partial y}\bigg|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2},\\
P_m|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_1}} = P_\mathrm{f}|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_1}}, &\quad \frac{k_m}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{m}}{\partial x}\bigg|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_1}} = \frac{k_\mathrm{f}}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{f}}{\partial x}\bigg|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_1}},\\
P_m|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_4}} = P_\mathrm{f}|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_4}}, &\quad \frac{k_m}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{m}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_4}} = \frac{k_\mathrm{f}}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{f}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_4}},\\
P_m|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_2}} = P_\mathrm{f}|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_2}}, &\quad \frac{k_m}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{m}}{\partial x}\bigg|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_2}} = \frac{k_\mathrm{f}}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{f}}{\partial x}\bigg|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_2}},\\
P_m|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_3}} = P_\mathrm{f}|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_3}}, &\quad \frac{k_m}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{m}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_3}} = \frac{k_\mathrm{f}}{\mu_\mathrm{o}}\frac{\partial P_\mathrm{f}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_3}},\\
T_m|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_1}} = T_\mathrm{f}|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_1}}, &\quad \lambda_\mathrm{mt}\frac{\partial T_\mathrm{m}}{\partial x}\bigg|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_1}} = \lambda_\mathrm{ft}\frac{\partial T_\mathrm{f}}{\partial x}\bigg|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_1}},\\
T_m|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_4}} = T_\mathrm{f}|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_4}}, &\quad \lambda_\mathrm{mt}\frac{\partial T_\mathrm{m}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_4}} = \lambda_\mathrm{ft}\frac{\partial T_\mathrm{f}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_4}},\\
T_m|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_2}} = T_\mathrm{f}|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_2}}, &\quad \lambda_\mathrm{mt}\frac{\partial T_\mathrm{m}}{\partial x}\bigg|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_2}} = \lambda_\mathrm{ft}\frac{\partial T_\mathrm{f}}{\partial x}\bigg|_{x=L_x-x_{\mathrm{f}\,P_2}},\\
T_m|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_3}} = T_\mathrm{f}|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_3}}, &\quad \lambda_\mathrm{mt}\frac{\partial T_\mathrm{m}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_3}} = \lambda_\mathrm{ft}\frac{\partial T_\mathrm{f}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{\mathrm{f}\,P_3}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

На границах элемента системы разработки, в том числе вдоль длины трещин, задано условие симметрии по давлению и температуре:

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad \left.\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right|_{y=L_y}=\left.\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial y}\right|_{y=L_y}=0,\\
&\left.\frac{\partial T_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial T_{\mathrm{f}}}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \quad \left.\frac{\partial T_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right|_{y=L_y}=\left.\frac{\partial T_{\mathrm{f}}}{\partial y}\right|_{y=L_y}=0,\\
&\left.\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial x}\right|_{x=L_x}=\left.\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right|_{x=L_x}=0, \quad \left.\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\\
&\left.\frac{\partial T_{\mathrm{m}}}{\partial x}\right|_{x=L_x}=\left.\frac{\partial T_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right|_{x=L_x}=0, \quad \left.\frac{\partial T_{\mathrm{m}}}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial T_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right|_{x=0}=0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Во всех добывающих скважинах элемента системы разработки поддерживается одинаковое постоянное давление:

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{f}}|_{x=L_x,y=0}=P_0-\Delta P, \quad P_{\mathrm{f}}|_{x=L_x,y=L_y}=P_0-\Delta P,\\
P_{\mathrm{f}}|_{x=0,y=L_y}=P_0-\Delta P, \quad P_{\mathrm{f}}|_{x=0,y=0}=P_0-\Delta P.
\end{aligned} \tag{11}$$

Приток жидкости к скважинам можно рассчитать из выражений

$$\begin{aligned}
\frac{k_{\mathrm{f}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\left.\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right|_{x=L_x-\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2}+\frac{k_m}{\mu_{\mathrm{o}}}\left.\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_1}/2}=\frac{Q_{\omega P_1}B_{\mathrm{o}P_1}}{4h_{\mathrm{f}}},\\
\frac{k_{\mathrm{f}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\left.\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right|_{x=L_x-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2}+\frac{k_m}{\mu_{\mathrm{o}}}\left.\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_2}/2}=\frac{Q_{\omega P_2}B_{\mathrm{o}P_2}}{4h_{\mathrm{f}}},\\
\frac{k_{\mathrm{f}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\left.\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right|_{x=\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2}+\frac{k_{\mathrm{m}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\left.\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right|_{y=L_y-\omega_{\mathrm{f}\,P_3}/2}=\frac{Q_{\omega P_3}B_{\mathrm{o}P_3}}{4h_{\mathrm{f}}},\\
\frac{k_{\mathrm{f}}}{\mu_{\mathrm{o}}}\left.\frac{\partial P_{\mathrm{f}}}{\partial x}\right|_{x=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2}+\frac{k_m}{\mu_{\mathrm{o}}}\left.\frac{\partial P_{\mathrm{m}}}{\partial y}\right|_{y=\omega_{\mathrm{f}\,P_4}/2}=\frac{Q_{\omega P_4}B_{\mathrm{o}P_4}}{4h_{\mathrm{f}}},
\end{aligned} \tag{12}$$

где $Q_{\omega P_1}$, $Q_{\omega P_2}$, $Q_{\omega P_3}$, $Q_{\omega P_4}$ — величины притока жидкости в скважины.

Система уравнений (1)–(7) с краевыми условиями (8)–(12) решалась методом конечных разностей по итеративной схеме Ньютона. Вычисления проводились на неравномерной прямоугольной разностной сетке со сгущением около границ «трещина-пласт». Результаты численного решения для изотермической фильтрации в одиночной скважине с трещиной конечной проводимости в продуктивном пласте сверялись с аналитическим решением [15]. При моделировании постоянного притока жидкости к скважине с трещиной и количеством ячеек 120×120 максимальная разница в величинах давления составила менее 2 %. Конвективные члены уравнений (2) и (4) аппроксимировались с помощью конечно-разностной WENO-схемы пятого порядка [16, 17].

1.3. Анализ результатов моделирования. Влияние проводимости трещины и длительности теплового воздействия

При моделировании использовались данные, приведённые в таблице.

На рис. 2 приведены результаты расчётов для вариантов с «холодной» добычей и тепловым воздействием на добывающую скважину $i = P4$ при различных проницаемостях трещины гидроразрыва пласта: $k_{\mathrm{f}} = 5\cdot10^{-12}$ м^2, $F_{CD} = 0.05$ (кривые *1, 2*), $k_{\mathrm{f}} = 50\cdot10^{-12}$ м^2, $F_{CD} = 0.5$ (кривые *3, 4*), $k_{\mathrm{f}} = 500\cdot10^{-12}$ м^2, $F_{CD} = 5$ (кривые *5, 6*). Из рис. 2(а) видно, что на первом этапе (с начала добычи до момента времени 100 суток) кривые изменения притока в скважине

Исходные данные для моделирования

Символ	Параметр	Значение	Размерность
α_d	коэффициент затухания электромагнитных волн	0.02374	1/м
$\alpha_{\mathrm{f}t}$	объёмная теплоёмкость в трещинах	1487000	Дж/(м·К)
$\alpha_{\mathrm{m}t}$	объёмная теплоёмкость в пласте	1326000	Дж/(м·К)
$\beta_{\mathrm{f}t}$	общая сжимаемость в трещинах	$1.03 \cdot 10^{-8}$	1/Па
$\beta_{\mathrm{m}t}$	общая сжимаемость в пласте	$1.83 \cdot 10^{-9}$	1/Па
β_{o}	сжимаемость нефти	$1.40 \cdot 10^{-9}$	1/Па
c_{o}	удельная теплоёмкость нефти	2000	Дж/(кг·К)
k_{f_i}	проницаемость трещин	$5{\cdot}10^{-12}$, $50{\cdot}10^{-12}$, $500{\cdot}10^{-12}$	$м^2$
k_m	проницаемость пласта	$10 \cdot 10^{-15}$	$м^2$
h	высота трещин и пласта	15	м
μ_{o_0}	вязкость нефти при начальной температуре	1000	мПа· с
N_g	мощность генератора электромагнитных волн	100	кВт
L_x	расстояние до границы пласта по оси OX	150	м
L_y	расстояние до границы пласта по оси OY	50	м
P_0	начальное пластовое давление	25	МПа
T_0	начальная пластовая температура	40	°C
x_{f_i}	полудлины трещин	50	м
ω_{f_i}	раскрытие трещин	$5 \cdot 10^{-3}$	м
ϕ_{f_i}	пористость трещин	0.18	д.ед.
ϕ_m	пористость пласта	0.18	д.ед.
γ_{o}	коэффициент, учитывающий зависимость вязкости нефти от температуры	0.042	1/К
$\lambda_{\mathrm{f}t}$	теплопроводность насыщенной среды в трещинах	1.8274	Вт/(м·К)
$\lambda_{\mathrm{m}t}$	теплопроводность насыщенной среды в пласте	2.4852	Вт/(м·К)
ρ_{o}	плотность нефти	950	$кг/м^3$
ΔP	перепад давления между скважиной и пластом	5	МПа
η_{o}	адиабатический коэффициент нефти	0	К/Па
δ_{o}	коэффициент термического расширения нефти	$0.5 \cdot 10^{-4}$, $1.5 \cdot 10^{-4}$, $2.5 \cdot 10^{-4}$	1/К

для вариантов с одинаковыми проницаемостями трещин совпадают. На втором этапе (в период времени с 100 до 200 суток) осуществляется тепловое воздействие с мощностью генератора $N_g = 100$ кВт, которое сопровождается ростом температуры в скважине с 40 до 140–145 °C к моменту времени 200 суток (кривые *2, 4, 6* на рис. 2(b)). При этом отмечается увеличение притока жидкости в скважине в случае с тепловым воздействием по сравнению с «холодной» добычей. Чем ниже безразмерная проводимость (проницаемость) трещины, тем выше разница между величинами притока в скважину для «холодной» добычи и добычи с ВЧ ЭМ воздействием: при $F_{CD} = 0.05$ — приблизительно до шести раз (кривые *1, 2* на рис. 2(a)), при $F_{CD} = 0.5$ — приблизительно до трёх раз (кривые *3, 4* на рис. 2(a)), при $F_{CD} = 5$ — приблизительно до 1.7 раз (кривые *5, 6* на рис. 2(a)). При этом динамика изменения и абсолютные величины температуры в скважине существенно не отличаются для различных значений F_{CD} (кривые *2, 4, 6* на рис. 2(b)).

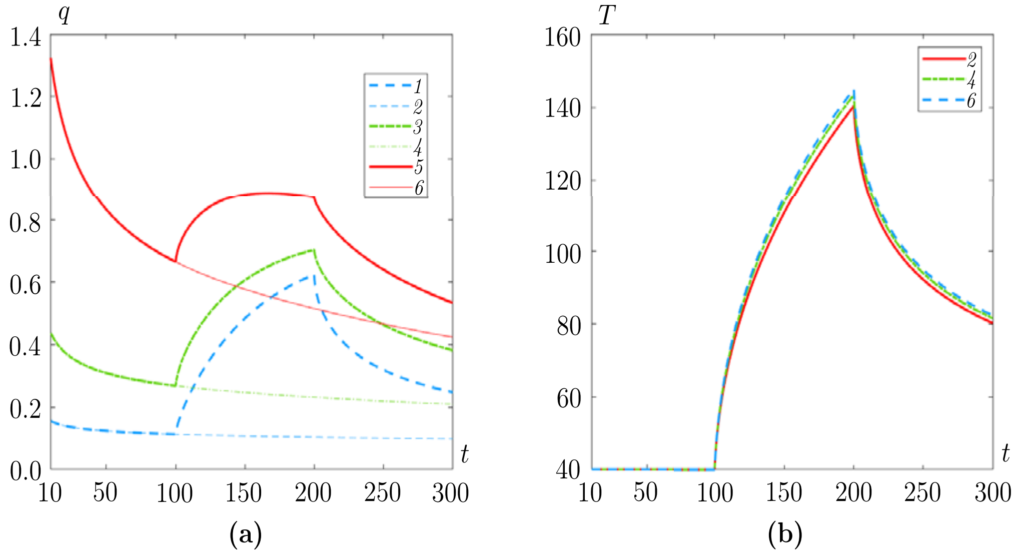


Рис. 2. Динамика притока жидкости q [м^3/сут] (a) и температуры T [°C] в скважине (b) при $x_\mathrm{f} = 50$ м, $k_m = 10 \cdot 10^{-15}$ м^2, $\delta_\mathrm{o} = 0$ 1/K, $N_g = 0$ кВт (кривые *1, 3, 5*) и $N_g = 100$ кВт (кривые *2, 4, 6*); $\Delta P = 5$ МПа, $k_\mathrm{f} = 10 \cdot 10^{-12}$ м^2, $F_{CD} = 0.05$ (кривые *1, 2*); $k_\mathrm{f} = 50 \cdot 10^{-12}$ м^2, $F_{CD} = 0.5$ (кривые *3, 4*); $k_\mathrm{f} = 500 \cdot 10^{-12}$ м^2, $F_{CD} = 5$ (кривые *5, 6*)

На третьем этапе с выключенным генератором ЭМ волн ($N_g = 0$) происходит снижение температуры в околоскважинной зоне (приблизительно до 80–82.5 °C) в связи с выносом тепла в скважину вместе с отобранной пластовой жидкостью. Однако значительная часть тепла, которая выделяется в пласте при тепловом воздействии, сохраняется в пласте и не выносится вместе с добываемой жидкостью. Сохранением тепла в околоскважинной области объясняется отличие величин притока в скважине для варианта с ВЧ ЭМ воздействием и «холодной» добычей: при $F_{CD} = 0.05$ — приблизительно до 2.54 раза (кривые *1, 2* на рис.2 (a)), при $F_{CD} = 0.5$ — приблизительно до 1.83 раза (кривые *3, 4* на рис. 2(a)), при $F_{CD} = 5$ — приблизительно до 1.26 раза (кривые *5, 6* на рис. 2(a)).

На рис. 3 приведены кривые распределения давления, температуры и вязкости вдоль трещин скважин $i = P1$ и $i = P4$ при различных значениях проницаемости (проводимости) трещин. Из рисунка видно, что для всех случаев в околоскважинной области отмечается увеличение температуры (приблизительно на 22 °C на расстоянии 10 м от скважины) и снижение вязкости пластовой жидкости (приблизительно в 2.6 раза). При этом профили давления вдоль трещины в отличие температуры и вязкости существенно отличаются. В случае трещины с проводимостью $F_{CD} = 0.05$ давление в скважине и на торце трещины ΔP_f отличается приблизительно на 4.98 МПа, градиент давления вдоль трещины в среднем составляет

$\Delta P_\mathrm{f}/\Delta x \sim 0.10$ МПа/м (кривая *1* на рис. 3(a)), при $F_{CD} = 0.5$ –ΔP_f — приблизительно на 4.54 МПа и $\Delta P_\mathrm{f}/\Delta x$ — приблизительно на 0.09 МПа/м (кривая *2* на рис. 3(a)), при $F_{CD} = 5$–ΔP_f — приблизительно на 1.61 МПа и $\Delta P_\mathrm{f}/\Delta x$ — приблизительно на 0.03 МПа/м (кривая *3* на рис. 3(a)). Стоит отметить, что распределение давления вдоль трещины с ВЧ ЭМ воздействием ($i = P4$) и трещины с «холодной» добычей жидкости ($i = P1$) отличаются вследствие снижения вязкости в околоскважинной зоне. В случае «холодной» добычи с $F_{CD} = 0.05$ разница давления между скважиной и расстоянием 10 м вдоль трещины составляет $\Delta P_\mathrm{f} \sim 3.78$ МПа, а в скважине с тепловым воздействием составляет $\Delta P_\mathrm{f} \sim 1.61$ МПа, т. е. перепады давления в околоскважинной зоне отличаются приблизительно в 2.35 раза (кривая *1* на рис. 3(a)); при $F_{CD} = 0.5 - \Delta P_\mathrm{f} \sim 2.26$ МПа к $\Delta P_\mathrm{f} \sim 0.74$ МПа (приблизительно в 3.05 раза); при $F_{CD} = 5 - \Delta P_\mathrm{f} \sim 0.70$ МПа к $\Delta P_\mathrm{f} \sim 0.17$ МПа (приблизительно в 4.12 раза). Таким образом, за счёт теплового воздействия происходит кратное снижение градиентов давления вдоль трещины, и эффект больше проявляется в скважинах с трещинами меньшей проводимости F_{CD}.

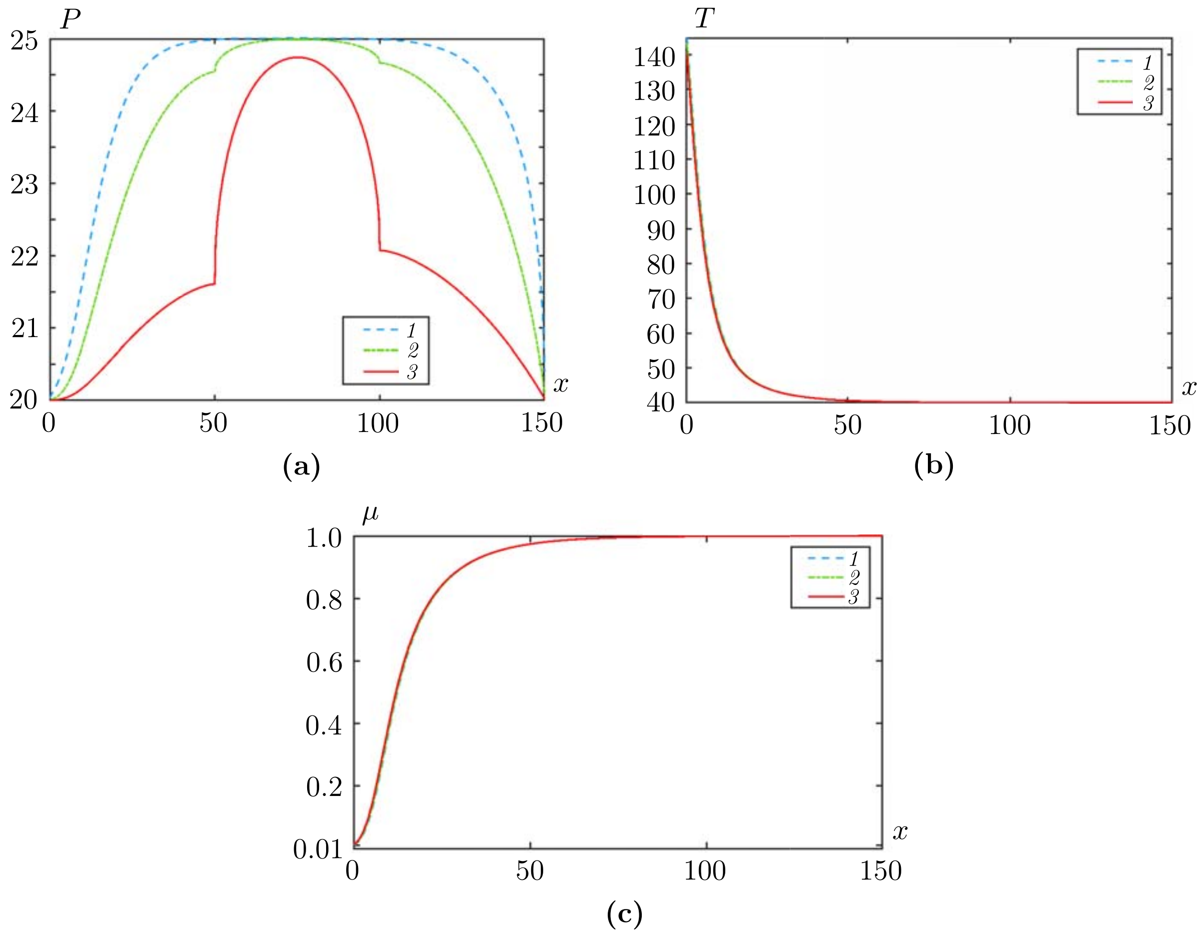


Рис. 3. Распределение давления P [МПа] (a), температуры T [°C] (b) и вязкости μ [Па·с] (c) вдоль трещины при $x_\mathrm{f} = 50$ м, $k_m = 10 \cdot 10^{-15}$ м^2, $N_g = 100$ кВт, $\Delta P = 5$ МПа, $t = 200$ сут.; $k_\mathrm{f} = 5 \cdot 10^{-12}$ м^2, $F_{CD} = 0.05$ (кривая *1*); $k_\mathrm{f} = 50 \cdot 10^{-12}$ м^2, $F_{CD} = 0.5$ (кривая *2*); $k_\mathrm{f} = 500 \cdot 10^{-12}$ м^2, $F_{CD} = 5$ (кривая *3*)

Разогрев пласта при ВЧ ЭМ воздействии с постоянным отбором нагретой пластовой жидкости происходит постепенно. Через десять суток с момента начала теплового воздействия температура в скважине возрастает приблизительно на 29.13 °C и это сопровождается снижением вязкости нефти приблизительно на 70% (кривые *2* на рис. 4). Спустя 100 суток ВЧ ЭМ воздействия с непрерывной добычей пластовой жидкости рост температуры в скважине составляет более 100 °C , рост вязкости жидкости снижается приблизительно в 68 раз в скважине и приблизительно на 40% на расстояниях 15 м в глубине пласта (кривые *4* на рис. 4).

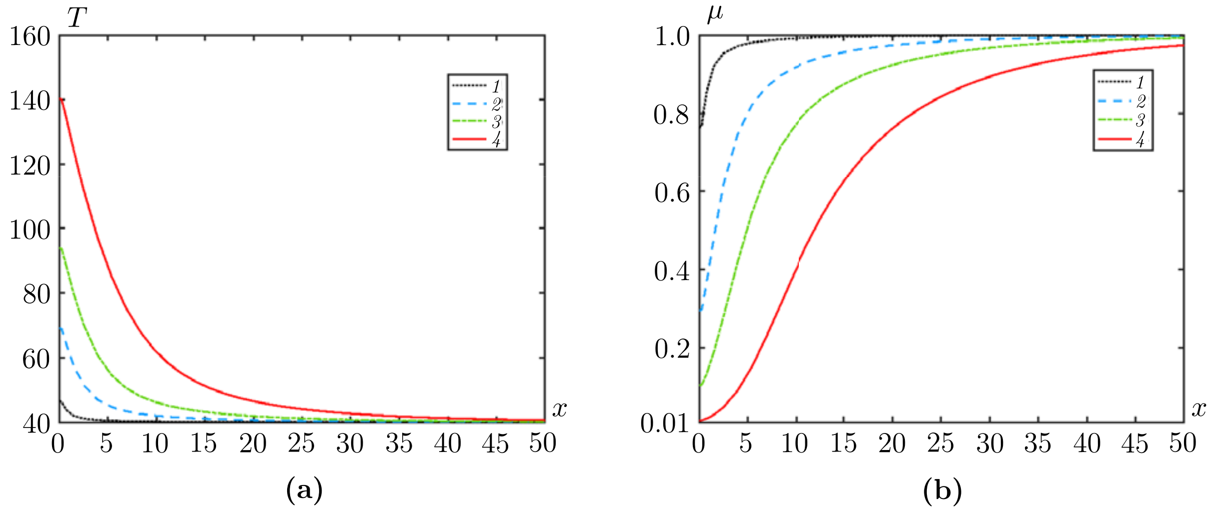


Рис. 4. Распределение температуры T [°C] (a) и вязкости жидкости μ [Па·с] (b) вдоль трещины при $x_\mathrm{f} = 50$ м, $k_m = 10 \cdot 10^{-15}$ м^2, $N_g = 100$ кВт, $k_\mathrm{f} = 500 \cdot 10^{-12}$ м^2, $\Delta P = 5$ МПа, $\Delta t_2 = 1$ сут. (кривая *1*), $\Delta t_2 = 10$ сут. (кривая *2*), $\Delta t_2 = 30$ сут. (кривая *3*), $\Delta t_2 = 100$ сут. (кривая *4*)

2. ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ НЕФТИ

Изменение температуры и величины притока жидкости в скважине ($i = P4$) для различных значений коэффициента термического расширения нефти приведены на рис. 5. На этапе воздействия генератором ВЧ ЭМ волн температура в скважине увеличивается приблизительно на 94.5–99.1 °C (кривые 1–3 на рис. 5(a)). Через 100 суток теплового воздействия на пласт с $\delta_\mathrm{o} = 0.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K отличие в величине притока жидкости в скважине от притока «холодной» жидкости составляет приблизительно 1.93 раза (кривая *1* на рис. 5(b)), при $\delta_\mathrm{o} = 1.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K приблизительно 2.37 раза (кривая *2* на рис. 5(b)), при $\delta_\mathrm{o} = 2.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K приблизительно 2.81 раза (кривая *3* на рис. 5(b)). Ещё через 100 суток на следующем этапе с выключенным генератором ЭМ волн ($N_g = 0$) температура в околоскважинной зоне сохраняется выше первоначальной приблизительно на 40 °C. Этим объясняется превышение величины притока жидкости в скважине ($i = P4$) приблизительно в 1.28–1.35 раза, чем в случае с «холодной» добычей.

Профили давления вдоль и поперёк трещин на рис. 6 свидетельствуют о заметном влиянии коэффициентов термического расширения нефти на градиенты давления в пласте и о меньшей степени влияния на градиенты давления в трещине. Через 100 суток теплового воздействия разница давления в скважине ($i = P4$) и в пласте (рис. 6(b)) составляет $\Delta P_\mathrm{m} \sim 3.37$ МПа ($\Delta P_m/\Delta y \sim 0.135$ МПа/м) для $\delta_\mathrm{o} = 0.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K, $\Delta P_m \sim 3.7$ МПа ($\Delta P_\mathrm{m}/\Delta y \sim 0.148$ МПа/м) для $\delta_\mathrm{o} = 1.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K, $\Delta P_\mathrm{m} \sim 4.04$ МПа ($\Delta P_\mathrm{m}/\Delta y \sim 0.162$ МПа/м) для $\delta_\mathrm{o} = 2.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K. При этом перепады давления ΔP_f в скважине $i = P4$ и на торце её трещины (рис. 6(a)) практически одинаковые и меняются в пределах приблизительно от 1.65 МПа ($\delta_\mathrm{o} = 0.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K) до 1.83 МПа ($\delta_\mathrm{o} = 2.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K), а градиенты давления вдоль трещины $\Delta P_\mathrm{f}/\Delta x$ меняются от 0.033 до 0.037 МПа/м. При этом в соседних скважинах $i = P1$ и $i = P3$, в которых не осуществляется тепловое воздействие, градиенты давления вдоль трещины практически одинаковые и составляют $\Delta P_\mathrm{f}/\Delta x \sim 0.042$ МПа/м.

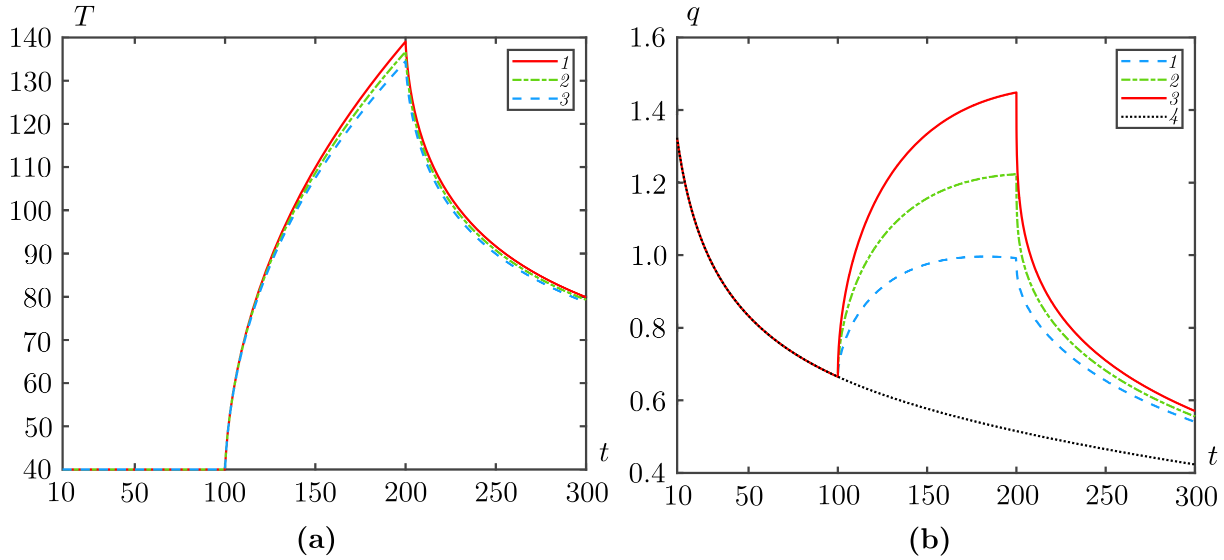


Рис. 5. Динамика температуры T [°C] в скважине (a)
и притока жидкости q [м^3/сут] в скважину (b)
при $x_\mathrm{f} = 50$ м, $k_m = 10 \cdot 10^{-15}$ м^2, $k_\mathrm{f} = 500 \cdot 10^{-12}$ м^2, $\Delta P = 5$ МПа,
$N_g = 100$ кВт (кривые *1, 2, 3*) и $N_g = 0$ кВт (кривая *4*), $\delta_\mathrm{o} = 0.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K (кривая *1*),
$\delta_\mathrm{o} = 1.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K (кривая *2*), $\delta_\mathrm{o} = 2.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K (кривая *3*)

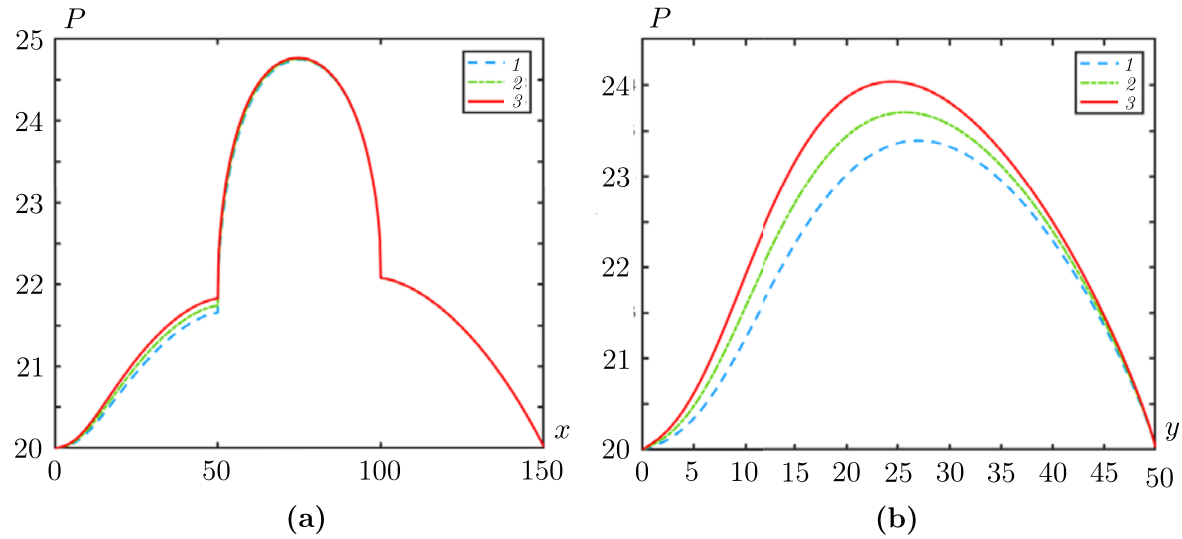


Рис. 6. Распределение давления P [МПа] вдоль (a) и поперёк (b) трещины при $x_f = 50$ м,
$k_m = 10 \cdot 10^{-15}$ м^2, $N_g = 100$ кВт, $k_f = 500 \cdot 10^{-12}$ м^2, $\Delta P = 5$ МПа,
$\delta_o = 0.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K (кривая *1*), $\delta_o = 1.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K (кривая *2*), $\delta_o = 2.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K (кривая *3*)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При моделировании процесса добычи высоковязкой нефти в элементе системы разработки, состоящем из четырёх скважин с трещинами гидроразрыва пласта, с поэтапным высокочастотным электромагнитным воздействием установлено, что чем меньше безразмерная проводимость трещины, тем выше кратность повышения (от 1.7 до 6 раз) величины притока жидкости в скважине с тепловым воздействием по сравнению с «холодной» добычей. Значительная часть тепла сохраняется в продуктивном пласте после теплового воздействия при осуществлении притока на этапе с выключенным генератором ЭМ волн и соответственно величины притока в скважине в этом случае выше случая с «холодной» добычей на 25–150 %.

Тепловое воздействие, благодаря возникновению в пласте распределённых объёмных тепловых источников, позволяет снизить вязкость пластовой жидкости до 2.6 раз, а также снизить градиенты давления от 2 до 4 раз вдоль трещины ГРП на расстояниях до 10 м от скважины. Термическое расширение нефти способствует увеличению величины притока жидкости в скважину при ВЧ ЭМ воздействии, а также после прекращения воздействия за счёт сохранения тепла в пласте. Для значений коэффициентов термического расширения нефти от $0.5 \cdot 10^{-4}$ до $2.5 \cdot 10^{-4}$ 1/K превышение притока нефти в скважину с электромагнитным воздействием над случаем с «холодной» добычей может составлять приблизительно 100–180 %. Эта разница в величине притока (приблизительно до 30 %) сохраняется, в том числе после отключения генератора ЭМ волн. При этом термическое расширение нефти оказывает влияние (приблизительно до 20 %) на градиенты давления в пласте и трещине.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саяхов Ф.Л.* Исследование термо- и гидродинамических процессов в многофазных средах в высокочастотном электромагнитном поле применительно к нефтедобыче: Дис.... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.05, 05.15.06. М., 1985. 449 с.
2. *Abernethy E.R.* Production increase of heavy oils by electromagnetic heatin. // J. Can. Petrol. Technol, 1976. V. 15, N 3. P. 91–97.
3. *Chakma A., Jha K.N.* Heavy-oil recovery from thin pay zones by electromagnetic heating // SPE 24817. 67 Annu. Tech. Conf. Exhib. Soc. Petr. Engrg. Washington, 1992. P. 525–534.
4. *Kovaleva L.A., Khaydar A.M.* Physical and rheological properties of petroleum fluids under the radiofrequency electromagnetic field effect and perspectives of technological solutions // Appl. Surf. Sci. J. 2004. V. 238. N 1–4. P. 475–479.
5. *Carrizales M.A., Larry W. Lake, Johns R.T* Production improvement of heavy-oil recovery by using electromagnetic heating // SPE Ann. Tech. Conf. Exhibition. Denver, Colorado, September 2008. Article SPE-115723-MS; https://doi.org/10.2118/115723-MS
6. *Davletbaev A., Kovaleva L., Babadagli T.* Mathematical modeling and field application of heavy oil recovery by Radio-Frequency electromagnetic simulation // J. Petrol. Sci. Engrg. 2011. V. 78, N 3–4. P. 646–653.
7. *Spencer H.L.*. Electric heat breaks paraffins boosts production // Enhanced Recovery Week, October 30, 1989. P. 1–2.
8. *Ritchey H.W* Radiation Heating System. US Patent 2757738, 1956.
9. *Jeambey C.G.* System for Recovery of Petroleum from Petroleum Impregnated Media. US Patent 4912971, 1990.
10. *Ковалева Л.А.* Тепло- и массоперенос многокомпонентных углеводородных систем в высокочастотном электромагнитном поле: Дисс.... д-ра техн. наук: 01.02.05. М., 1998. 224 с.
11. *Trautman M., Macfarlane B.* Experimental and numerical simulation results from a radio frequency heating test in native oil sands at the North // Paper WHOC14–301 presented in the 2014 World Heavy Oil Congress. New Orleans, Louisiana, 2014.
12. *Bogdanov I.I., Torres J.A., Corre B.* Numerical simulation of electromagnetic driven heavy oil recovery // SPE 154140-PP paper presented at the 18th SPE Improved Oil Recovery Symposium. Tulsa, Oklahoma, 2012.
13. *Davletbaev A., Kovaleva L., Babadagli T.* Heavy oil production by electromagnetic heating in hydraulically fractured wells // Energy Fuels. 2014. V. 28, N 9. P. 5737–5744.
14. *Davletbaev A.Y., Kovaleva L.A., Nasyrov N.M., Babadagli T.* Multi-stage hydraulic fracturing and radiofrequency electromagnetic radiation for heavy-oil production // J. Unconvent. Oil Gas Resources. 2015. V. 12. P. 15–22.
15. *Cinco-Ley H., Samaniego V.F.* Transient pressure analysis for fractured wells // J. Petr. Technology. 1981. P. 1749–1766.

16. *Shu C.W.* Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. NASA/CR-97-206253, 1997.

17. *Романьков А.С., Роменский Е.И.* Метод Рунге — Кутты/WENO для расчёта уравнения волн малой амплитуды в насыщенной упругой пористой среде // Сиб. журн. вычисл. математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 259–271.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 532.546

MATHEMATICAL MODELING OF THE HEAVY OIL PRODUCTION WITH HYDRAULIC FRACTURING AND RADIO-FREQUENCY ELECTROMAGNETIC RADIATION

© 2023 A. Y. Davletbaev[a], L. A. Kovaleva[b], Z. S. Mukhametova[c]

Ufa University of Science and Technologies,
ul. Zaki Validi 32, Ufa 450076, Russia

E-mails: [a]DavletbaevAY@rambler.ru, [b]Liana-Kovaleva@yandex.ru, [c]MuchametovaZ@mail.ru

Received 22.08.2022, revised 22.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The paper discusses the results of mathematical modeling of the flows of heavy oil to a fractured well a radio-frequency electromagnetic irradiation. An element of a development system with several fractured wells in which the fractures have the same geometry and properties, and are directed along regional stresses, is considered. The model takes into account the effects of thermal expansion of oil, the dependence of the viscosity of fluid on temperature, the influence of the surrounding wells on pressure and temperatures distribution around the producing well with thermal influence. Numerical calculations of variants with different fracture conductivities have been performed, the processes of mass and heat transfer in the around fractured well have been investigated, and comparative calculations with "cold" production have been performed.

Keywords: fracture, hydraulic fracturing, radio-frequency electromagnetic irradiation, element of the development system, heavy oil.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.103

REFERENCES

1. Sayakhov F.L. Issledovanie termo- i gidrodinamicheskikh protsessov v mnogofaznykh sredakh v vysokochastotnom elektromagnitnom pole primenitel'no k neftedobyche: Dis.... d-ra fiz.-mat. nauk: 01.02.05 [Investigation of thermo- and hydrodynamic processes in multiphase media in a high-frequency electromagnetic field in relation to oil production: Dis.... d-ra phys. math. sci.: 01.02.05, 05.15.06.]. Moscow, 1985. 449 pp.
2. Abernethy E.R. Production increase of heavy oils by electromagnetic heatin. *J. Can. Petrol. Technol*, 1976, Vol. 15, No. 3, pp. 91–97.
3. Chakma A., Jha K.N. Heavy-oil recovery from thin pay zones by electromagnetic heating. *SPE 24817. 67 Annu. Tech. Conf. Exhib. Soc. Petr. Engrg. Washington*, 1992, pp. 525–534.
4. Kovaleva L.A., Khaydar A.M. Physical and rheological properties of petroleum fluids under the radio-frequency electromagnetic field effect and perspectives of technological solutions. *Appl. Surf. Sci. J.*, 2004, Vol. 238, No. 1–4, pp. 475–479.
5. Carrizales M.A., Larry W. Lake, Johns R.T Production improvement of heavy-oil recovery by using electromagnetic heating. *SPE Ann. Tech. Conf. Exhibition.* Denver, Colorado, September 2008, article SPE-115723-MS; https://doi.org/10.2118/115723-MS
6. Davletbaev A., Kovaleva L., Babadagli T. Mathematical modeling and field application of heavy oil recovery by Radio-Frequency electromagnetic simulation. *J. Petrol. Sci. Engrg.*, 2011, Vol. 78, No. 3–4, pp. 646–653.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

7. Spencer H.L.. Electric heat breaks paraffins boosts production. *Enhanced Recovery Week, October 30*, 1989, pp. 1–2.
8. Ritchey H.W Radiation Heating System. US Patent 2757738, 1956.
9. Jeambey C.G. System for Recovery of Petroleum from Petroleum Impregnated Media. US Patent 4912971, 1990.
10. Kovaleva L.A. Teplo- i massoperenos mnogokomponentnykh uglevodorodnykh sistem v vysokochastotnom elektromagnitnom pole: Diss.... d-ra tekhn. nauk: 01.02.05 [Heat and mass transfer of multicomponent hydrocarbon systems in a high-frequency electromagnetic field: Diss.... d-ra tech. sci.: 01.02.05]. Moscow, 1998.
11. Trautman M., Macfarlane B. Experimental and numerical simulation results from a radio frequency heating test in native oil sands at the North. *Paper WHOC14–301 presented in the 2014 World Heavy Oil Congress*. New Orleans, Louisiana, 2014.
12. Bogdanov I.I., Torres J.A., Corre B. Numerical simulation of electromagnetic driven heavy oil recovery. *SPE 154140-PP paper presented at the 18th SPE Improved Oil Recovery Symposium*, Tulsa, Oklahoma, 2012.
13. Davletbaev A., Kovaleva L., Babadagli T. Heavy oil production by electromagnetic heating in hydraulically fractured wells. *Energy Fuels*, 2014, Vol. 28, No. 9, pp. 5737–5744.
14. Davletbaev A.Y., Kovaleva L.A., Nasyrov N.M., Babadagli T. Multi-stage hydraulic fracturing and radio-frequency electromagnetic radiation for heavy-oil production. *J. Unconvent. Oil Gas Resources*, 2015, Vol. 12, pp. 15–22.
15. Cinco-Ley H., Samaniego V.F. Transient pressure analysis for fractured wells. *J. Petr. Technology*, 1981, pp. 1749–1766.
16. Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. NASA/CR-97-206253, 1997.
17. Roman'kov A.S., Romenskii E.I. Metod Runge—Kutty/WENO dlya rascheta uravneniya voln maloi amplitudy v nasyshchennoi uprugoi poristoi srede. *Sib. Zhurn. Vychisl. Matematiki*, 2014, Vol. 17, No. 3, pp. 259–271.

УДК 681.786.4

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В УСЛОВИЯХ АДДИТИВНЫХ ПОМЕХ ФОТОПРИЁМНИКА В ЗАДАЧАХ ИЗМЕРЕНИЯ ТРЁХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ МЕТОДАМИ ФАЗОВОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

© 2023 С. В. Двойнишников[a], Г. В. Бакакин[b], В. О. Зуев[c], В. Г. Меледин[d]

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]dv.s@mail.ru, [b]bakakin@itp.nsc.ru, [c]vlad.zuev.0017@mail.ru, [d]meledin@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 31.08.2022 г.; после доработки 31.08.2022 г.; принята к публикации 29.09.2022 г.

Предложен адаптивный алгоритм обработки данных для измерения трёхмерного профиля методами фазовой триангуляции в условиях случайного аддитивного шума и ограниченного динамического диапазона фотоприёмника. Алгоритм основан на статистическом анализе распределения интенсивности в зарегистрированных фазовых изображениях и адаптивной фильтрации. Метод позволяет уменьшить погрешность измерения трёхмерной геометрии методами фазовой триангуляции и измерять трёхмерный профиль объектов сложного профиля с произвольными светорассеивающими свойствами. Метод перспективен для промышленного использования.

Ключевые слова: 3D-геометрия, фазовая триангуляция, динамический диапазон, статистический анализ.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.104

ВВЕДЕНИЕ

Задача измерения 3D-геометрии актуальна и востребована во многих областях науки и техники. Одними из активно развивающихся и широко применимых методов являются триангуляционные методы с использованием структурированного освещения [1]. Основным преимуществом методов триангуляции с использованием структурированного освещения является возможность быстрой трёхмерной реконструкции профиля поверхности объекта с высоким разрешением бесконтактным способом по видеоизображениям. Методы фазовой триангуляции [2] обладают наиболее высокой абсолютной точностью и это связано с устойчивостью методов фазовой триангуляции к расфокусировке оптической системы источника и приёмника излучения [3–4]. Интенсивное развитие методов фазовой триангуляции свидетельствует о перспективности и возможности их широкого применения на практике [5–8]. Авторы многих работ используют комбинации различных подходов для улучшения метрологических характеристик измерительных систем [9–11], например путём разработки оригинальных методов обработки фазовых изображений [12–14]. Существуют работы, описывающие измерения трёхмерного профиля динамических объектов [15], дорожного покрытия [16], обследуемых объектов при внедрении эндоскопических сканеров [17], изделий из листового металла [18], рельсов [19]. При измерениях в промышленных условиях важно согласовать параметры источника излучения, светорассеивающих свойств поверхности объекта и параметры фотоприёмника для исключения выхода из динамического диапазона фотоприёмника. Альтернативный подход может быть основан на применении устойчивого алгоритма расшифровки фазовых изображений с произвольными сдвигами [20]. Однако в случае аддитивных помех применение таких подходов приведёт к чрезмерному снижению динамического диапазона фотоприёмника для исключения выхода за пределы чувствительности фотоприёмника при наличии помех. В результате точность измерений будет существенно снижена. Данная работа нацелена на разработку адаптивного алгоритма расшифровки фазовых изображений в условиях случайных аддитивных помех на основе адаптивной статистической фильтрации исходных данных.

1. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм основан на динамической оценке среднеквадратичного отклонения колебаний зарегистрированной интенсивности на исходных экспериментальных данных при близких значениях начального фазового сдвига. В случае выхода из динамического диапазона фотоприёмника в заданной окрестности выполняется удаление экспериментальных данных для текущего значения сдвига в анализируемой точке на фазовом изображении. В результате формируется новый набор зарегистрированных интенсивностей, имеющих неэквидистантные начальные значения фазовых сдвигов, отличные для каждой точки на анализируемых фазовых изображениях. Учитывая ограниченность динамического диапазона фотоприёмника, интенсивность на принимаемых изображениях может выражаться в виде

$$I_{\mathrm{FR}}(x,y,i) = \begin{cases} I_{\max}, & \text{если} \quad I(x,y,i) > I_{\max}, \\ I(x,y,i), & \text{если} \quad I_{\min} \leqslant I(x,y,i) \leqslant I_{\max}, \\ I_{\min}, & \text{если} \quad I(x,y,i) < I_{\min}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $I_{\mathrm{FR}}(x,y,i)$ — регистрируемая фотоприёмником интенсивность, $I(x,y,i)$ — интенсивность, попадающая на фотоприёмник, $I_{\min}$ — минимальная регистрируемая интенсивность, $I_{\max}$ — максимальная регистрируемая интенсивность фотоприёмником.

При расшифровке фазовых изображений по массиву экспериментальных данных $I_{\mathrm{FR}}(x,y,i)$ будут наблюдаться искажения, вызванные нелинейными искажениями преобразования:

$$I(x,y,i) \to I_{\mathrm{FR}}(x,y,i). \tag{2}$$

Для исключения этих нелинейных искажений авторы предлагают следующий подход. Для каждого фазового сдвига $\delta(i)$ формировать структурированную засветку несколько раз и далее анализировать полученные распределения интенсивности. Обозначим такое распределение $R(I,j)$, $j = 0,\ldots,k-1$. Далее функции $I_{\mathrm{FR}}(x,y,i)$ добавлен ещё один параметр $I_{\mathrm{FR}}(x,y,i,j)$, характеризующий порядковый номер измерения в множестве $R(I,j)$. В случае отсутствия аддитивных помех либо при их постоянном характере значения $I_{\mathrm{FR}}(x,y,i,j)$ не будут зависеть от параметра j. При наличии случайных аддитивных помех значения $I_{\mathrm{FR}}(x,y,i,j)$ будут колебаться для каждого сочетания (x,y,i) в пределах амплитуды аддитивных помех, принимаемых фотоприёмником.

Значения $I_{\mathrm{FR}}(x,y,i,j)$ прореживаем по следующему алгоритму. Для каждой комбинации значений (x,y,i) определяем минимальное, максимальное и среднее значения интенсивности, зарегистрированные фотоприёмником:

$$I_{\mathrm{FR}}\max(x,y,i) = \max\{I_{\mathrm{FR}}(x,y,i,j)\}, \quad j = 0,\ldots,k-1, \tag{3}$$

$$I_{\mathrm{FR}}\min(x,y,i) = \min\{I_{\mathrm{FR}}(x,y,i,j)\}, \quad j = 0,\ldots,k-1, \tag{4}$$

$$I_{\mathrm{FR}}\,\mathrm{avg}(x,y,i) = \frac{\Sigma I_{\mathrm{FR}}(x,y,i,j)}{K}, \quad j = 0,\ldots,k-1. \tag{5}$$

Далее для обработки фазовых изображений будет использоваться многомерный массив данных $I^*_{\mathrm{FR}}(x,y,i)$ вместо $I_{\mathrm{FR}}(x,y,i)$, который формируется следующим образом: для всех (x,y,i) имеем

$$I_{\mathrm{FR}}\operatorname{avg}(x,y,i) \in \left\{I^*_{\mathrm{FR}}(x,y,i)\right\}, \quad \text{если} \quad (I_{\mathrm{FR}}\max(x,y,i) < I_{\max})\&(I_{\mathrm{FR}}\min(x,y,i) > I_{\min}). \quad (6)$$

Для расшифровки фазовых изображений можно применять устойчивый метод расшифровки фазовых изображений с произвольными сдвигами. Представленный подход позволяет исключить нелинейные искажения, вызванные пороговой фильтрацией экспериментальных данных из-за узкого динамического диапазона фотоприёмника. Кроме того, предложенный метод позволяет снизить уровень аддитивных помех на анализируемых в конечном итоге данных в $\sqrt{k}$ раз.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выполнены исследования погрешности метода расшифровки фазовых изображений на модельных данных в зависимости от количества фазовых сдвигов при постоянном уровне аддитивного шума. Для сравнения взят устойчивый метод расшифровки фазовых изображений с произвольным пошаговым сдвигом и предложенный метод на основе адаптивной фильтрации данных.

Количество фазовых изображений, принимаемых с одним значением начального фазового сдвига, равно 10. Всего количество фазовых сдвигов до фильтрации менялось в диапазоне 100–2000. В каждом эксперименте сделаны 50 повторений для оценки среднеквадратичного отклонения измеренной фазы.

На рис. 1 показаны результаты работы метода расшифровки фазовых изображений с пороговой фильтрацией и метода расшифровки с фильтрацией на основе статистического анализа в зависимости от количества фазовых сдвигов. На рис. 1(a, b) представлены зависимости среднего значения измеренной фазы от количества фазовых сдвигов. При этом на различных графиках показаны результаты работы алгоритмов при различных значениях уровня регистрируемой интенсивности. Аналогично на рис. 1(c, d) представлены зависимости среднеквадратичного отклонения измеренной фазы от количества фазовых сдвигов. Графики демонстрируют, что метод обработки фазовых изображений с применением статистической фильтрации исключает систематическую погрешность измерений даже при большом уровне амплитуды регистрируемого сигнала. Метод расшифровки фазовых изображений с пороговой фильтрацией показывает систематическую погрешность результатов измерения сдвига начальной фазы.

Представленные результаты демонстрируют, что устойчивый метод расшифровки фазовых изображений с пороговой фильтрацией данных, выходящих на пределы динамического диапазона, не гарантирует внесения систематической погрешности измерения начальной фазы. Погрешность обусловлена искажением сигнала вблизи порогового значения при наличии шума. Этого недостатка лишён предложенный метод расшифровки на основе устойчивого метода расшифровки фазовых изображений с фильтрацией на основе статистического анализа данных. Однако этот метод демонстрирует большую величину среднеквадратичного отклонения результатов измерения. По-видимому, это связано с тем, что операция фильтрации данных в этом случае отсеивает большее количество экспериментальных данных, что приводит к увеличению среднеквадратичного отклонения результатов измерения сдвига начальной фазы.

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Для демонстрации работоспособности предложенного метода выполнены измерения трёхмерного профиля модели лопасти гидротурбины с характерными размерами $20 \times 10 \times 10$ см (рис. 2). Измерительный комплекс содержит цифровую промышленную камеру DMK 72BUC02 с матрицей 5 мп, цифровой проектор, обеспечивающий разрешение 1024×768.

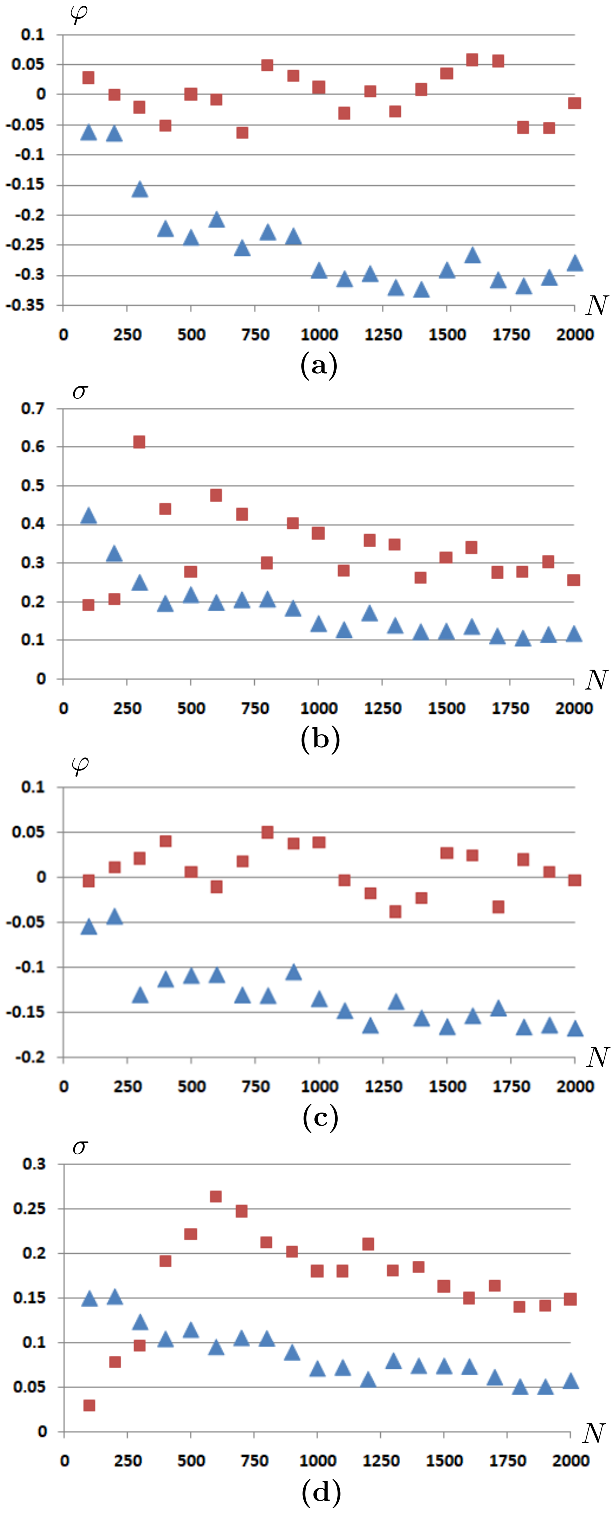


Рис. 1. Зависимость среднего значения (a, c) и среднеквадратичного отклонения измеренной фазы (b, d) от количества фазовых изображений при уровне шума 100, максимальной амплитуде регистрируемой интенсивности 255, амплитуде сигнала 300 (a, b) и 400 (c, d). Треугольные маркеры — устойчивый метод расшифровки фазовых изображений с пороговой фильтрацией, квадратные маркеры — устойчивый метод расшифровки фазовых изображений с фильтрацией на основе статистического анализа

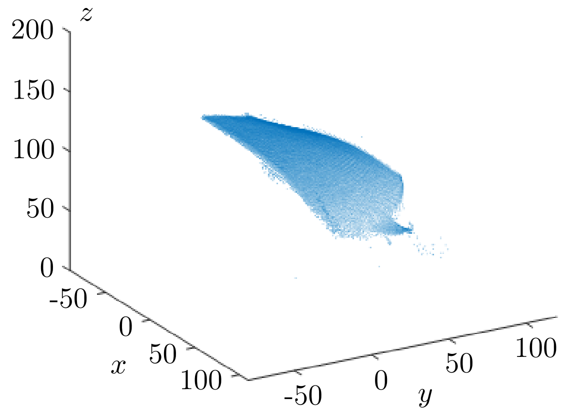


Рис. 2. Результат измерения профиля модели лопасти гидротурбины с характерными размерами $20 \times 10 \times 10$ см

Калибровка выполнялась с помощью плоской калибровочной мишени, параллельно сдвигаемой в направлении нормали к плоскости на равные расстояния. По итогам строилась регрессионная функция в виде многочлена второй степени, как показано в [21, 22]. Среднеквадратичное отклонение результатов измерения составлялось на уровне 10 мкм и оценивалось с помощью измерения плоской калибровочной мишени, размещённой в измерительном объёме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен адаптивный алгоритм обработки данных на основе статистической фильтрации для снижения погрешности измерения трёхмерных геометрических параметров методами фазовой триангуляции. Также показано, что предложенный алгоритм позволяет снизить погрешность измерения трёхмерного профиля на основе метода фазовых шагов и структурированного освещения. Показано, что предложенный алгоритм расшифровки на основе устойчивого метода расшифровки фазовых изображений с фильтрацией на основе статистического анализа данных обеспечивает измерение фазы без внесения систематических погрешностей, обусловленных ограниченным динамическим диапазоном фотоприёмника.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gorthi S.S., Rastogi P.* Fringe projection techniques: Whither we are? // Optics and Lasers Engrg. 2010. N 48. P. 133–140.

2. *Gruber M., Hausler G.* Simple, robust and accurate phase-measuring triangulation // Optik. 1992. N 3. P. 118–122.

3. *Двойнишников С.В., Меледин В.Г., Главный В.Г., Наумов И.В., Чубов А.С.* Оценка оптимальной частоты пространственной модуляции излучения 3D-измерений // Измерит. техника. 2015. № 5. С. 24–27.

4. *Dvoynishnikov S.V., Rakhmanov V.V., Kabardin I.K., Meledin V.G.* Phase triangulation method with spatial modulation frequency optimization // Measurement. 2019. V. 145. P. 63–70.

5. *Wankhede P., Kodey S., Kurra S, Radhika S.* A low cost surface strain measurement system using image processing for sheet metal forming applications // Measurement. 2022. V. 187. Article 110273; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110273

6. *Rudyk A., Semenov A., Kryvinska N., Semenova O.* Study of phase and amplitude-phase methods for measuring a reactive element quality factor // Measurement. 2022. V. 187. Article 110271; http://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110271

7. *Jiang Y., Wang S., Qin H., Li B., Li Q.* Similarity quantification of 3D surface topography measurements // Measurement. 2021. V. 186. Article 110207; https://doi.org/10.1088/1361-6501%2Fac1b41
8. *Dong Y., Li Z., Zhu L., Zhang X.* Topography measurement and reconstruction of inner surfaces based on white light interference // Measurement. 2021. V. 186. Article 110199; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110199
9. *Guo F., Yang B., Zheng W., Liu S.* Power frequency estimation using sine filtering of optimal initial phase // Measurement. 2021. V. 186. Article 110165; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110165
10. *Fan J., Feng Y., Mo J., Wang S. , Liang Q.* 3D reconstruction of non-textured surface by combining shape from shading and stereovision // Measurement. 2021. V. 185. Article 110029; http://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110029
11. *Wang H., Ma J., Yang H., Sun F., Wei Y., Wang L.* Development of three-dimensional pavement texture measurement technique using surface structured light projection // Measurement. 2021. V. 185. Article 110003; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110003
12. *Shi B., Ma Z., Ni X., Liu J., Liu H.* A phase unwrapping method suitable for high frequency fringe based on edge feature // Measurement. 2021. V. 185. Article 109938; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109938
13. *Zhang Y., Fan N., Wu Y., Wu G., Luo H., Yan J., Yang S., Liu F.* Four-pattern, phase-step non-sensitive phase shifting method based on Carre algorithm // Measurement. 2021. V. 171. Article 108762; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.108762
14. *Luhmann T.* Close range photogrammetry for industrial applications // J. Photogramm. Remote Sens. 2010. V. 65, N 6. P. 558–569; https://doi.org/10.1016/J.ISPRSJPRS.2010.06.003
15. *Li B., An Y., Capelleri D., Xu J., Zhang S.* High-accuracy, high-speed 3D structured light imaging techniques and potential applications to intelligent robotics // Internat. J. Intell. Robot. Appl. 2017. V. 1, N 1. P. 86–103; https://doi.org/10.1007/s41315-016-0001-7
16. *Matthias S., Kastner M., Reithmeier E.* Evaluation of system models for an endoscopic fringe projection system // Measurement. 2015. V. 73. P. 239–246; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.05.024
17. *Chu C., Yang H., Wang L.* Design of a pavement scanning system based on structured light of interference fringe // Measurement. 2019. V. 145. P. 410–418; https://doi.org/10.1016/J.measurement.2019.02.058
18. *Koutecky T., Palousek D., Brandejs J.* Sensor planning system for fringe projection scanning of sheet metal parts // Measurement. 2016. V. 94. P. 60–70; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2016.07.067
19. *Cao X., Xie W., Ahmed S.M., Li C.R.* Defect detection method for rail surface based on line-structured light // Measurement. 2020. V. 159. Article 107771; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.107771
20. *Двойнишников С.В.* Устойчивый метод расшифровки интерферограмм с пошаговым сдвигом // Компьют. оптика. 2007. Т. 31, № 2. С. 21–25.
21. *Двойнишников С.В., Меледин В.Г.* Способ бесконтактного измерения линейных размеров трёхмерных объектов. Патент РФ № 2433372, приоритет 10.11.11.
22. *Двойнишников С.В., Меледин В.Г.* Способ бесконтактного измерения геометрии трёхмерных объектов. Патент РФ № 2439489, приоритет 15.09.2010.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 681.786.4

ADAPTIVE DATA PROCESSING ALGORITHM UNDER THE CONDITIONS OF ADDITIVE PHOTODETECTOR INTERFERENCE IN THE PROBLEMS OF MEASURING THREE-DIMENSIONAL GEOMETRY BY PHASE TRIANGULATION METHODS

© 2023 **S. V. Dvoynishnikov[a], G. V. Bakakin[b], V. O. Zuev[c], V. G. Meledin[d]**

Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]dv.s@mail.ru, [b]bakakin@itp.nsc.ru, [c]vlad.zuev.0017@mail.ru, [d]meledin@itp.nsc.ru

Received 31.08.2022, revised 31.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The paper proposes an adaptive data processing algorithm for measuring a three-dimensional profile using phase triangulation methods under conditions of random additive noise and a limited dynamic range of a photodetector. The algorithm is based on a statistical analysis of the intensity distribution in the registered phase images and adaptive filtering. The method makes it possible to reduce the measurement error of three-dimensional geometry by phase triangulation methods and to measure the three-dimensional profile of complex profile objects with arbitrary light-scattering properties. The method is very promising for industrial use.

Keywords: 3D-geometry, phase triangulation, dynamic range, statistical analysis.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.104

REFERENCES

1. Gorthi S.S., Rastogi P. Fringe projection techniques: Whither we are? *Optics and Lasers Engrg.*, 2010, No. 48, pp. 133–140.
2. Gruber M., Hausler G. Simple, robust and accurate phase-measuring triangulation. *Optik*, 1992, No. 3, pp. 118–122.
3. Dvoinishnikov S.V., Meledin V.G., Glavnyi V.G., Naumov I.V., Chubov A.S. Otsenka optimal'noi chastoty prostranstvennoi modulyatsii izlucheniya 3D-izmerenii [Estimation of the optimal frequency of spatial modulation of 3D measurement radiation]. *Izmerit. Tekhnika*, 2015, No. 5, pp. 24–27.
4. Dvoynishnikov S.V., Rakhmanov V.V., Kabardin I.K., Meledin V.G. Phase triangulation method with spatial modulation frequency optimization. *Measurement*, 2019, Vol. 145, pp. 63–70.
5. Wankhede P., Kodey S., Kurra S, Radhika S. A low cost surface strain measurement system using image processing for sheet metal forming applications. *Measurement*, 2022, Vol. 187, article 110273; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110273
6. Rudyk A., Semenov A., Kryvinska N., Semenova O. Study of phase and amplitude-phase methods for measuring a reactive element quality factor. *Measurement*, 2022, Vol. 187, article 110271; http://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110271
7. Jiang Y., Wang S., Qin H., Li B., Li Q. Similarity quantification of 3D surface topography measurements. *Measurement*, 2021, Vol. 186, article 110207; https://doi.org/10.1088/1361-6501%2Fac1b41

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2022, Vol. 16, No. 4.

8. Dong Y., Li Z., Zhu L., Zhang X. Topography measurement and reconstruction of inner surfaces based on white light interference // Measurement. 2021. V. 186. Article 110199; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110199
9. Guo F., Yang B., Zheng W., Liu S. Power frequency estimation using sine filtering of optimal initial phase. *Measurement*, 2021, Vol. 186, article 110165; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110165
10. Fan J., Feng Y., Mo J., Wang S. , Liang Q. 3D reconstruction of non-textured surface by combining shape from shading and stereovision. *Measurement*, 2021, Vol. 185, article 110029; http://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110029
11. Wang H., Ma J., Yang H., Sun F., Wei Y., Wang L. Development of three-dimensional pavement texture measurement technique using surface structured light projection. *Measurement*, 2021, Vol. 185, article 110003; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.110003
12. Shi B., Ma Z., Ni X., Liu J., Liu H. A phase unwrapping method suitable for high frequency fringe based on edge feature. *Measurement*, 2021, Vol. 185, article 109938; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109938
13. Zhang Y., Fan N., Wu Y., Wu G., Luo H., Yan J., Yang S., Liu F. Four-pattern, phase-step non-sensitive phase shifting method based on Carre algorithm. *Measurement*, 2021, Vol. 171, article 108762; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.108762
14. Luhmann T. Close range photogrammetry for industrial applications. *J. Photogramm. Remote Sens.*, 2010, Vol. 65, No. 6, pp. 558–569; https://doi.org/10.1016/J.ISPRSJPRS.2010.06.003
15. Li B., An Y., Capelleri D., Xu J., Zhang S. High-accuracy, high-speed 3D structured light imaging techniques and potential applications to intelligent robotics. *Internat. J. Intell. Robot. Appl.*, 2017, Vol. 1, No. 1, pp. 86–103; https://doi.org/10.1007/s41315-016-0001-7
16. Matthias S., Kastner M., Reithmeier E. Evaluation of system models for an endoscopic fringe projection system. *Measurement*, 2015, Vol. 73, pp. 239–246; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.05.024
17. Chu C., Yang H., Wang L. Design of a pavement scanning system based on structured light of interference fringe. *Measurement*, 2019, Vol. 145, pp. 410–418; https://doi.org/10.1016/J.measurement.2019.02.058
18. Koutecky T., Palousek D., Brandejs J. Sensor planning system for fringe projection scanning of sheet metal parts. *Measurement*, 2016, Vol. 94, pp. 60–70; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2016.07.067
19. Cao X., Xie W., Ahmed S.M., Li C.R. Defect detection method for rail surface based on line-structured light. *Measurement*, 2020, Vol. 159, article 107771; https://doi.org/10.1016/j.measurement.2020.107771
20. Dvoinishnikov S.V. Ustoichivyi metod rasshifrovki interferogramm s poshagovym sdvigom [Stable method of decoding interferograms with step-by-step shift]. *Komp'yut. optika*, 2007, Vol. 31, No. 2, pp. 21–25.
21. Dvoinishnikov S.V., Meledin V.G. Sposob beskontaktnogo izmereniya lineinykh razmerov trekhmernykh ob'ektov [A method for non-contact measurement of linear dimensions of three-dimensional objects]. Russian Patent, No. 2433372, prioritet 10.11.11.
22. Dvoinishnikov S.V., Meledin V.G. Sposob beskontaktnogo izmereniya geometrii trekhmernykh ob'ektov [A method for non-contact measurement of the geometry of three-dimensional objects]. Russian Patent, No. 2439489, prioritet 15.09.2010.

УДК 532.5

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ДВУМЕРНОЙ ЯЧЕЙКЕ

© 2023 **В. В. Денисенко**[a], **С. В. Фортова**[b]

Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, г. Москва 123056, Россия

E-mails: [a]ned13@rambler.ru, [b]sfortova@mail.ru

Поступила в редакцию 22.08.2022 г.; после доработки 22.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Описана численная модель, аппроксимирующая систему уравнений вязкой жидкости с примесью полимерных молекул. Данная модель является гибридной и основана на применении годуновской линеаризованной и конечно-разностной схем. По этой схеме посчитана задача колмогоровского типа — вязкое течение в ограниченной области (квадратной ячейке) под действием внешней периодической силы. Сравнивается течение с примесью и без, изучено поведение полимерных молекул в различных областях потока. Получен некий переходной режим, характеризующийся практически полной растянутостью молекул в областях высокого градиента скорости.

Ключевые слова: численные методы в гидродинамике, эластическая турбулентность, гидродинамическая неустойчивость, неньютоновская жидкость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.105

ВВЕДЕНИЕ

Полимерные растворы привлекают большое внимание как экспериментаторов, так и теоретиков, что объясняется их захватывающим неньютоновским поведением [1]. Растворение даже небольших количеств полимеров в обычной жидкости может резко изменить её гидродинамические и реологические свойства из-за появления упругих степеней свободы. Одним из наиболее ярких проявлений неньютоновской динамики является хаотическое движение жидкости, которое наблюдается при низком числе Рейнольдса, проявляя три основные особенности [2–7]: выраженный рост сопротивления потоку, алгебраическое затухание спектров мощности скорости в широком диапазоне масштабов и на порядки более эффективное перемешивание, чем в упорядоченном потоке. Поскольку эти свойства аналогичны свойствам гидродинамической турбулентности, хаотическое состояние полимерного раствора было названо упругой турбулентностью. Несмотря на близкое сходство между гидродинамической турбулентностью и упругой турбулентностью, физические механизмы, лежащие в основе этих двух видов случайного движения, различны. Известно, что первое происходит при большом Re из–за неустойчивости, возникающей из-за нелинейного инерционного члена в уравнении Навье — Стокса. Напротив, упругая турбулентность имеет место при исчезающе малом Re, где эффекты инерции жидкости не играют никакой роли. Основным источником неустойчивости, приводящей к упругой турбулентности, является упругое напряжение, создаваемое растяжением полимера в потоке. Переход от ламинарного течения к упругой турбулентности контролируется так называемым числом Вайсенберга Wi, т. е. отношением времени линейной релаксации полимера

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект AAAA-A19-119041590048-0).

к характерному времени динамики потока. При больших значениях Wi большинство растворённых полимеров находятся выше перехода спираль-растяжение, что гарантирует их сильную обратную реакцию на движение жидкости при условии, что концентрация полимера достаточно высока [5, 8, 9, 10]. В первых экспериментах по упругой турбулентности использовались три геометрии потока с изогнутыми линиями тока [2–4]: закрученный поток фон Кармана между двумя дисками, поток Куэтта — Тейлора между цилиндрами и поток Дина в криволинейном канале. Недавно экспериментально наблюдались чисто упругие неустойчивости в прямом канале [11, 12], а упругая турбулентность была продемонстрирована численно для вязкоупругого потока Колмогорова [13, 14]. Хотя кривизна обтекаемой линии не является решающим компонентом, она позволяет нам уменьшить критическое число Вайсенберга для возникновения нестабильности. В каких аспектах упругая турбулентность значительно отличается от своего инерционного аналога из-за вышеупомянутого различия в источниках неустойчивости потока? Хотя о явлении упругой турбулентности известно уже два десятилетия, этот вопрос до сих пор остаётся малоизученным.

1. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Чтобы описать течение с полимерной компонентой, следует добавить к уравнениям вязкой гидродинамики (уравнениям Навье — Стокса) уравнения, описывающие данную компоненту [15]. Состояние полимерной примеси описывается вектором растяжения полимерной молекулы $\vec{R}$. В своём обычном состоянии (когда на молекулу не действует никаких внешних сил) полимер имеет сферическую форму. При воздействии на него внешней силы (потока жидкости например) он растягивается и степень его растяжения как раз и описывается вектором $\vec{R}$. Полимерная молекула, помещённая во внешнее неоднородное поле скорости, деформируется, поскольку её различные звенья движутся с различной скоростью. Выпишем определяющие уравнения нашей модели:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G\sin(ky) + \mu\Delta u + An\frac{\partial(\gamma(R)(R^x)^2)}{\partial x} + An\frac{\partial(\gamma(R)R^xR^y)}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y}& \\ = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho G\sin(kx) + \mu\Delta v &+ An\frac{\partial(\gamma(R)(R^y)^2)}{\partial y} + An\frac{\partial(\gamma(R)R^xR^y)}{\partial x},\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\rho(u^2+v^2)/2+\rho e)}{\partial t} &+ \frac{\partial[u(\rho(u^2+v^2)/2+\rho e+p)]}{\partial x} + \frac{\partial[v(\rho(u^2+v^2)/2+\rho e+p)]}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(u\Pi_{xx}+v\Pi_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\Pi_{xy}+v\Pi_{yy})}{\partial y} + u\rho G\sin(ky) + v\rho G\sin(kx),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial R^x}{\partial t} + u\frac{\partial R^x}{\partial x} + v\frac{\partial R^x}{\partial y} - R^x\frac{\partial u}{\partial x} - R^y\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(R)R^x = C_d\Delta R^x,$$

$$\frac{\partial R^y}{\partial t} + u\frac{\partial R^y}{\partial x} + v\frac{\partial R^y}{\partial y} - R^x\frac{\partial v}{\partial x} - R^y\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma(R)R^y = C_d\Delta R^y,$$

$$p = \sigma\rho e, \quad \sigma = 2/5,$$

$$\gamma(R) = \gamma_0/\big(1 - R^2/R_m^2\big).$$

Здесь последние два уравнения описывают эволюцию полимерной примеси в вязком потоке. Коэффициент An описывает концентрацию полимерных молекул в рассматриваемом растворе; $\gamma(R)$ — коэффициент релаксации, R_m — максимальное растяжение полимерной молекулы.

В процессе численного решения системы (1) обнаружилось, что решение является довольно неустойчивым [14]. Для частичной регуляризации (1) в правую часть уравнений примеси был введён диффузионный член с коэффициентом C_d. В феноменологических уравнениях на $\vec{R}$ в (1) члены $R^i\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}$ описывают деформацию полимерной молекулы неоднородным потоком, а последние члены в левой части описывают её релаксацию. При $\vec{V}=0$ полимер релаксирует к сферическому состоянию, которому соответствует $\vec{R}=0$. Имеются различные модели релаксаций полимерных молекул. Одна из наиболее популярных гласит, что [15]

$$\gamma(R) = \gamma_0/\big(1 - R^2/R_m^2\big), \tag{2}$$

где γ_0 — некоторая константа, а R_m — максимальная длина, до которой может быть растянута полимерная молекула, когда она вытягивается в струнку. Поскольку $\gamma(R)$ из (2) в этот момент обращается в бесконечность, то система уравнений на $\vec{R}$ в (1) не допускает растяжение полимерной молекулы до величины больше R_m, как и должно быть. При увеличении характерного градиента скорости происходит так называемый coil-stretch transition, когда полимерная молекула переходит в растянутое состояние. Этот переход происходит, когда градиент скорости становится порядка γ_0. При рассмотрении полимерных растворов применимо континуальное приближение, когда полимеры считаются непрерывно распределёнными в пространстве. Тогда и векторы растяжений этих полимеров также можно считать непрерывно распределёнными в пространстве. Другими словами, вектор растяжения $\vec{R}$ становится полем, т. е. является функцией не только времени, но и координат. Для описания упругих напряжений вводят упругий тензор напряжений $\Pi_{ik}^e = An\gamma R^i R^k$, где n — плотность полимеров, A — некоторая константа, которая зависит от вязкости раствора и степени полимеризации. Таким образом, в (1) общий тензор напряжений примет вид $\Pi_{ik} = \Pi_{ik}^e + \Pi_{ik}^\nu$ — сумма вязкого и упругого вкладов.

В качестве начальных данных бралась покоящаяся среда: $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $\rho_0 = 10^3$, $p_0 = 10^5$, $R_0^x = 10^{-3}$, $R_0^y = 10^3$. За величину максимального растяжения полимерной молекулы взята величина $R_m = 10^{-1}$. Эмпирически подобранный коэффициент диффузии $C_d = 10^{-4}$. Коэффициент релаксации полимеров $\gamma_0 = 10^{-4}$. Концентрация полимерной примеси An варьировалась в пределах величин от 100 до 5000. Вязкость моделируемого течения полагалась равной $\mu = 1$. Интенсивность накачки (внешней периодической силы) $G = 10^{-2}$, её частота $k = 3$. При этом значения чисел Рейнольдса и Вайсенберга $\mathrm{Re} = \rho u L/\mu \sim 10^3$, $\mathrm{Wi} = U/(\gamma_0 L) \sim 10^2$.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для численного решения системы (1) использовался гибридный метод второго порядка точности. Гиперболическая часть уравнений (уравнения Навье — Стокса) аппроксимировалась линеаризованным методом Годунова [16]. Уравнения полимерной примеси дискретизировались самым простым методом — конечных разностей. В дальнейшем планируется усовершенствовать данную модель путём включения полимерных уравнений в годуновскую методику и сделать сравнение с гибридной моделью. Линеаризованный метод Годунова основывается на том, что определённые величины, называемые инвариантами Римана, переносятся по характеристикам без изменений. Таким образом, расчёт потоков на гранях ячеек расчётной сетки основан на вычислении инвариантов Римана на предыдущем временном слое. Экспериментально показано [16], что данный вариант схемы обладает свойством гарантированного неубывания энтропии, что позволяет моделировать её рост на ударных волнах без каких-либо поправок и дополнительных условий. В расчётах использовалась схема второго порядка точности. За шаг по времени сначала решается система гидродинамических уравнений Навье — Стокса годуновской методикой, в результате чего получаются известными на следующем временном слое значения величин (ρ, u, v, p) . Затем решается система, описывающая эволюцию вектора растяжений полимерной примеси:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R^x}{\partial t} + u\frac{\partial R^x}{\partial x} + v\frac{\partial R^x}{\partial y} - R^x\frac{\partial u}{\partial x} - R^y\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(R)R^x = 0,\\ &\frac{\partial R^y}{\partial t} + u\frac{\partial R^y}{\partial x} + v\frac{\partial R^y}{\partial y} - R^x\frac{\partial v}{\partial x} - R^y\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma(R)R^y = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим шаг по времени $\tau^n = t^{n+1} - t^n$ и запишем простейшую конечно-разностную аппроксимацию системы (3):

$$\begin{aligned} (R^x)^{n+1}_{i,j} = (R^x)^n_{i,j} + \tau\bigg[&u^n_{i,j}\frac{(R^x)^n_{i-1,j} - (R^x)^n_{i+1,j}}{2\Delta x} + v^n_{i,j}\frac{(R^x)^n_{i,j-1} - (R^x)^n_{i,j+1}}{2\Delta y}\\ &- (R^x)^n_{i,j}\frac{u^n_{i-1,j} - u^n_{i+1,j}}{2\Delta x} - (R^y)^n_{i,j}\frac{u^n_{i,j-1} - u^n_{i,j+1}}{2\Delta y} - \gamma\big(R^n_{i,j}\big)(R^x)^n_{i,j}\bigg]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R^y)^{n+1}_{i,j} = (R^y)^n_{i,j} + \tau\bigg[&u^n_{i,j}\frac{(R^y)^n_{i-1,j} - (R^y)^n_{i+1,j}}{2\Delta x} + v^n_{i,j}\frac{(R^y)^n_{i,j-1} - (R^y)^n_{i,j+1}}{2\Delta y}\\ &- (R^x)^n_{i,j}\frac{v^n_{i-1,j} - v^n_{i+1,j}}{2\Delta x} - (R^y)^n_{i,j}\frac{v^n_{i,j-1} - v^n_{i,j+1}}{2\Delta y} - \gamma\big(R^n_{i,j}\big)(R^y)^n_{i,j}\bigg]. \end{aligned}$$

Здесь координаты центра ячейки вычислительной сетки обозначены как (i, j), $u^n_{i,j}$, $v^n_{i,j}$ — известные величины, полученные на этапе решения гидродинамической части. В результате получим полное решение системы (1) $(\rho, u, v, p, R^x, R^y)$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В процессе поиска турбулентного режима был обнаружен некий переходной режим, характеризующийся временной периодичностью параметров течения. На рис. 1 показано распределение завихренности данного переходного режима для значения концентрации полимерной примеси $An = 10^3$ и значения расчётного времени $t = 402$.

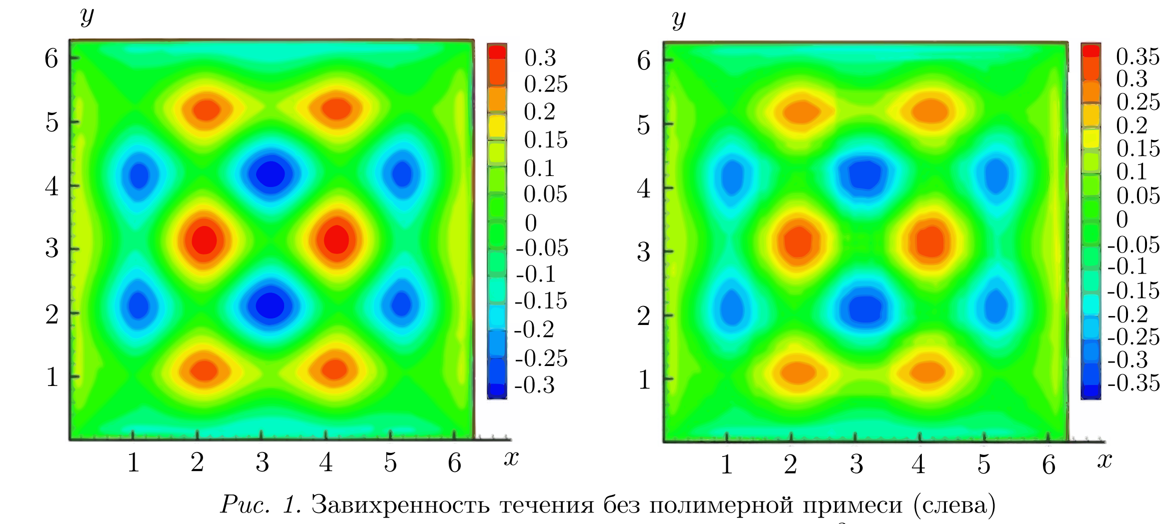


Рис. 1. Завихренность течения без полимерной примеси (слева) и с полимерной примесью (справа) для $An = 10^3$ и $t = 402$

Из данного рисунка видно, что течение имеет не совсем ламинарно-вихревой вид. Для сравнения на данном рисунке приведено течение с такими же параметрами, но без полимерной примеси. Как видно, при отсутствии полимеров течение носит ламинарный характер, с внесением же в течение полимеров оно переходит в некий периодический, переходной режим. Похожий результат был рассмотрен в [14].

На рис. 2 показаны зависимости нормированного растяжения полимерной молекулы $R/R_m(t)$ от времени в трёх различных точках расчётной области. На этом же рисунке изображено, где в расчётной области находятся эти точки.

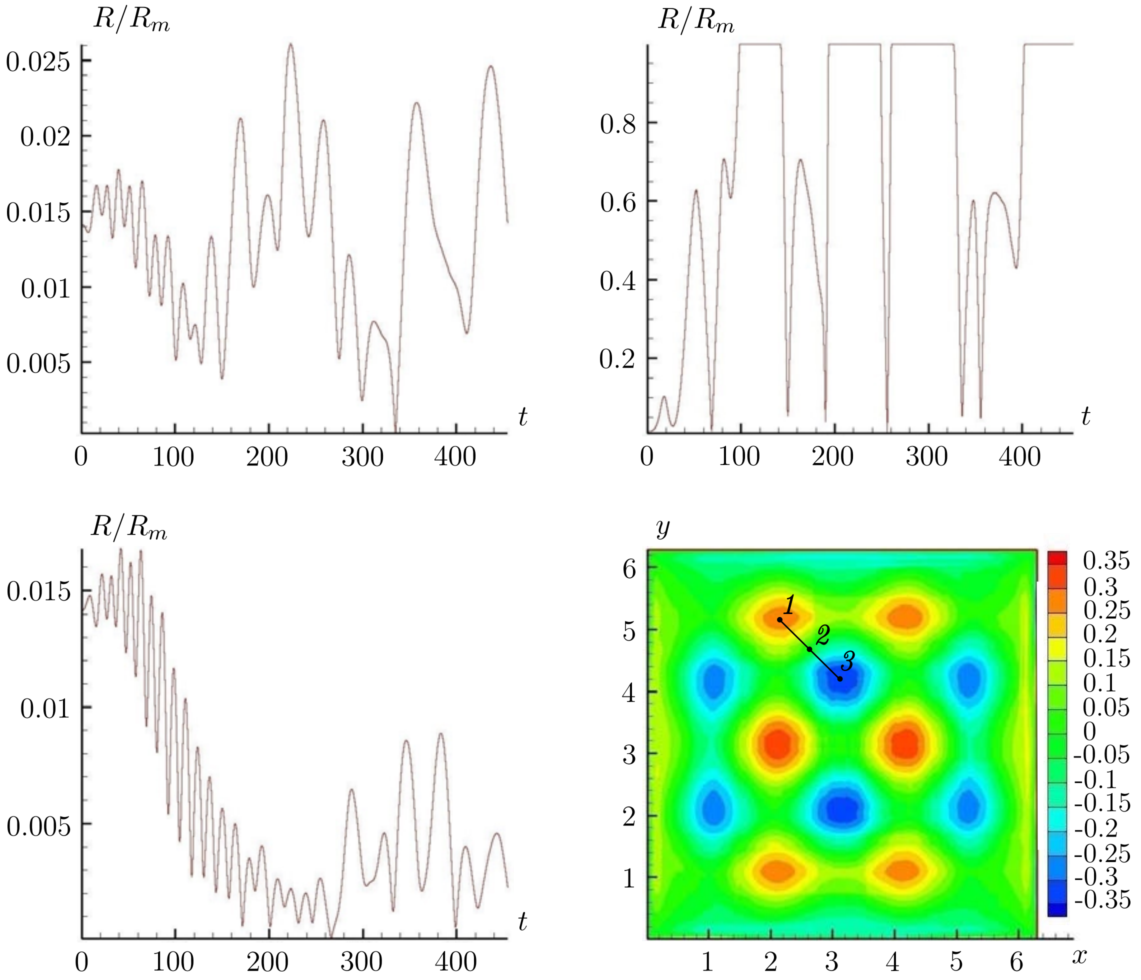


Рис. 2. Зависимости нормированного растяжения полимерной молекулы $R/R_m(t)$ от времени в трёх различных точках расчётной области; точки расчётной области *1, 2, 3* показаны схематически справа внизу на расчётной области

Как и следовало ожидать, в области, близкой к центру вихря, величина $R/R_m(t) \ll 1$. А в области больших градиентов скорости полимеры практически полностью растянуты, благодаря чему течение нарушает свою ламинарность, но этого всё ещё недостаточно для его сваливания в турбулентный режим. На рис. 3 изображена завихренность течения для значения концентрации примеси $An = 10^2$ и $An = 3 \times 10^3$ на один и тот же момент времени. Видно, что при увеличении концентрации примеси течение становится менее ламинарным, т. е. влияние полимеров на него увеличивается.

На рис. 4, 5 показана $R/R_m(t)$ для этих же значений концентрации примеси An. Из приведённых рисунков следует, что растянутость полимеров не сильно зависит от их концентрации в растворе. Концентрация в основном влияет на само течение, и при некоторой её величине возможно наблюдение перехода в эластическую турбулентность. Таким образом, An — один из параметров, влияющих на устойчивость полимерного потока.

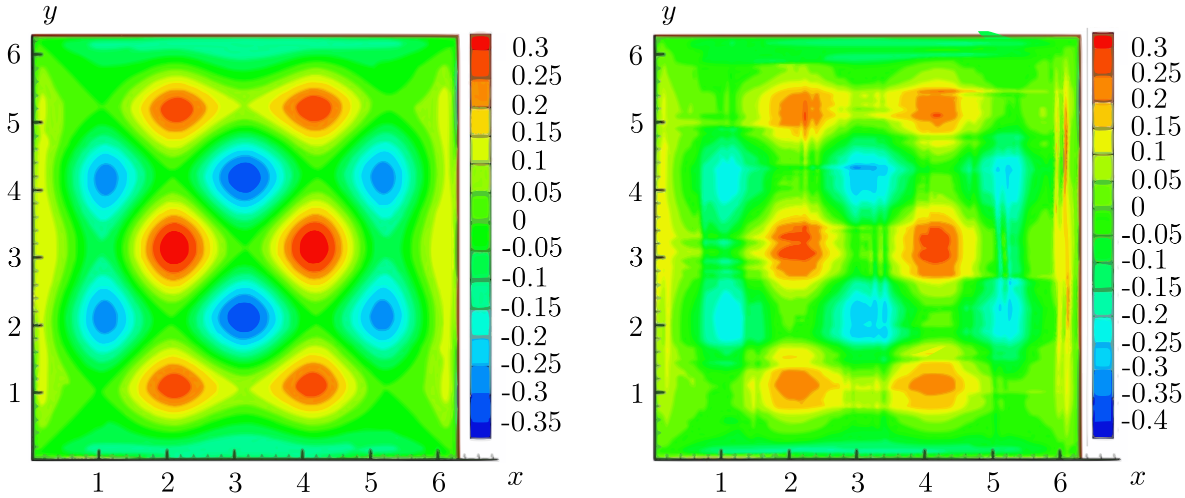


Рис. 3. Завихренность течения для значения концентрации примеси $An = 10^2$ (слева) и $An = 3 * 10^3$ (справа) на один и тот же момент времени

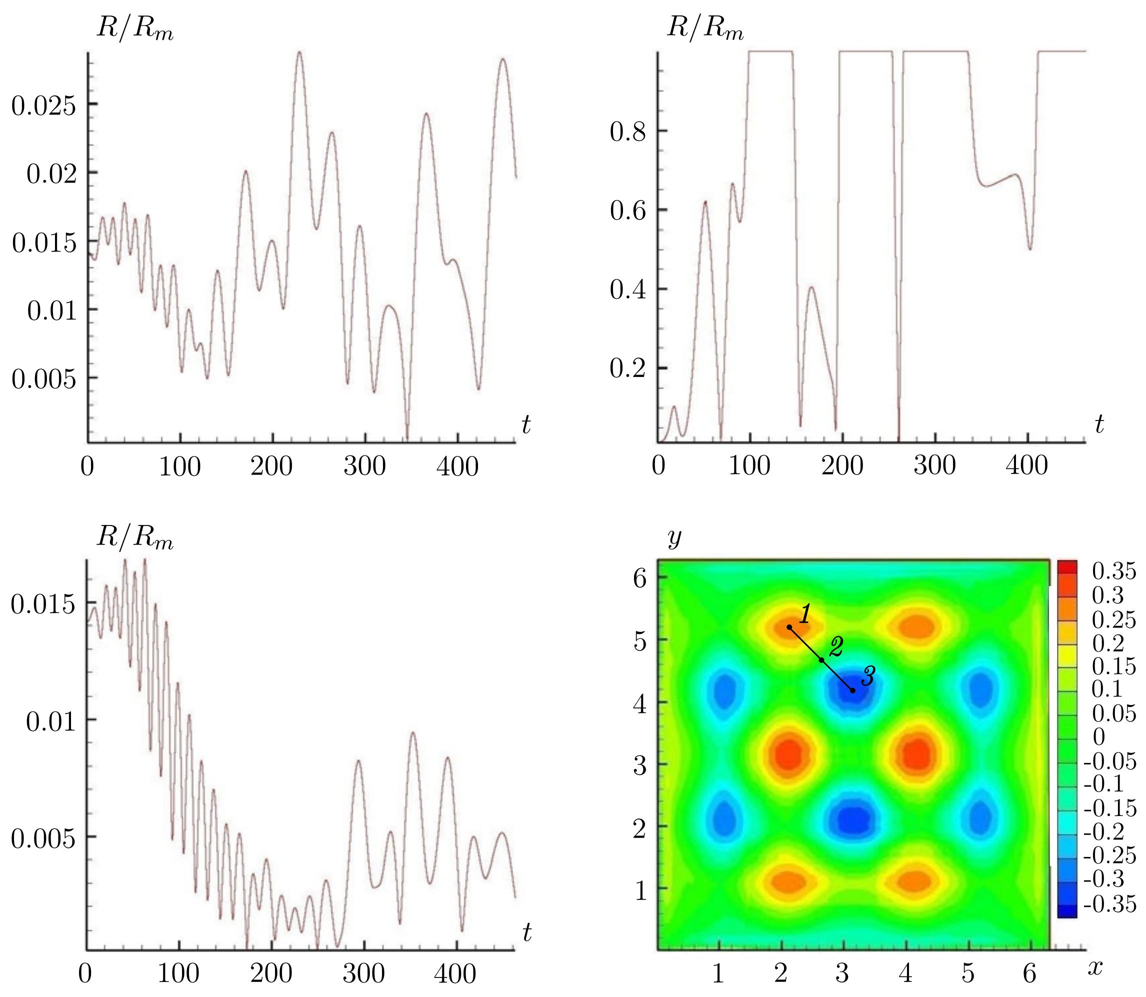


Рис. 4. Зависимости нормированного растяжения полимерной молекулы $R/R_m(t)$ от времени в трёх различных точках расчётной области для концентрации полимерной примеси $An = 10^2$

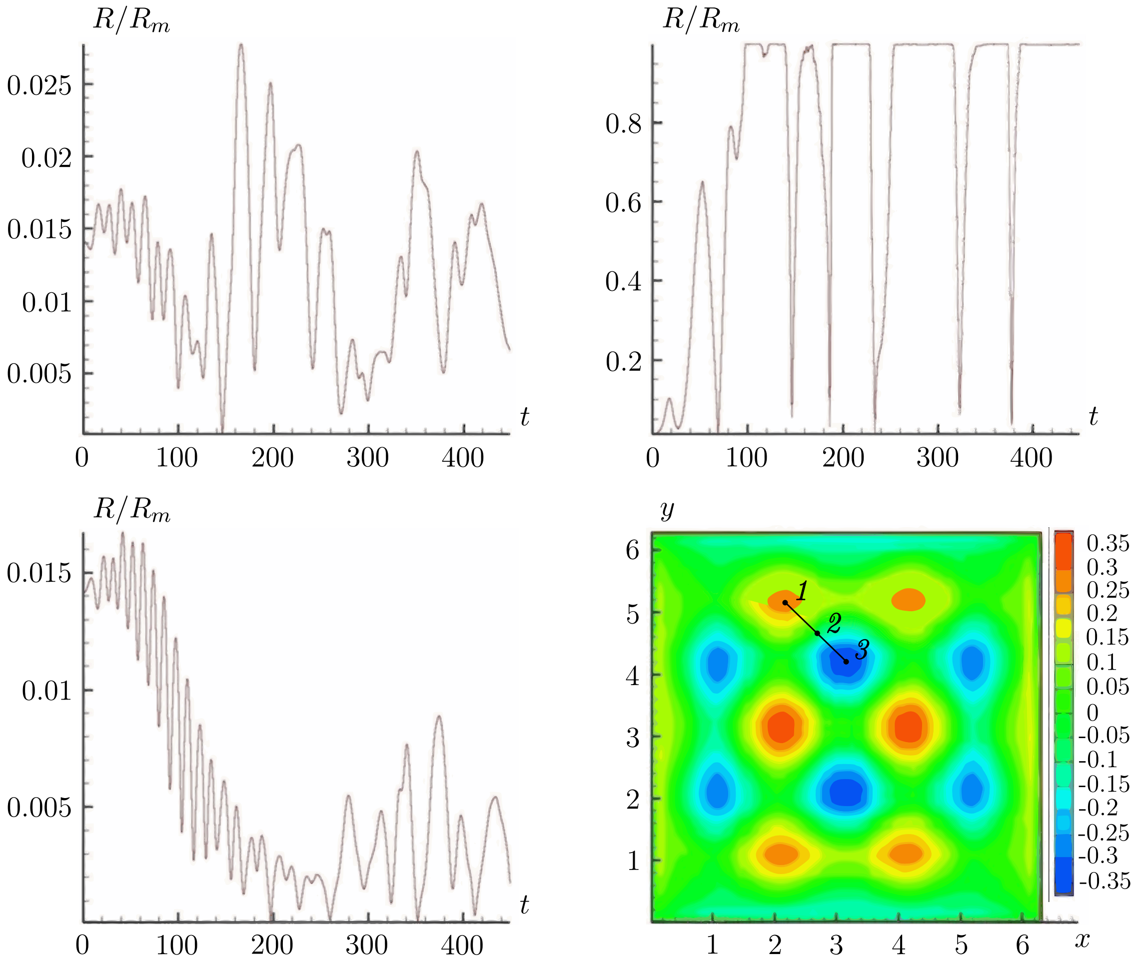


Рис. 5. Зависимости нормированного растяжения полимерной молекулы $R/R_m(t)$ от времени в трёх различных точках расчётной области для концентрации полимерной примеси $An = 3 \times 10^3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен простейший численный метод решения системы уравнений, описывающих динамику вязкой среды с полимерной примесью. Данный метод основан на гибридизации простейшей линеаризации Годунова и конечно-разностного подхода. Данная гибридизация заключается в том, что за шаг по времени численной схемы вначале решается система гидродинамических уравнений. Далее, зная гидродинамические параметры течения, решается система уравнений на поле растяжений полимерной молекулы. В итоге получаем решение полной системы уравнений, описывающих течение вязкой среды с полимерной примесью. Исследовано течение Колмогоровского типа — течение в ограниченной области под действием внешней периодической силы. Приведено сравнение течения (его завихренности) без примеси и с примесью на определённый момент времени. Течение без примеси в этот временной момент носит ламинарный характер, тогда как с примесью наблюдается некий переходной режим. В этом режиме в области сдвигового течения (между вихрями, которые создаются внешней силой) полимеры практически полностью растянуты. Внутри областей вихревого течения молекулы практически не растянуты. В дальнейшем планируется найти условия, при которых течение становится турбулентным — так называемая эластическая турбулентность. В численном плане данная задача является довольно сложной из-за обилия параметров, описывающих задачу, и возникающих схемных неустойчивостей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O.* Dynamics of Polymeric Liquids. Fluid Mechanics. V. 1. Wiley, 1977.
2. *Groisman A., Steinberg V.* Elastic turbulence in a polymer solution flow // Nature. 2000. N 405. P. 53–55.
3. *Groisman A., Steinberg V.* Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives // Nature. 2001. N 410. P. 905–908.
4. *Groisman A., Steinberg V.* Elastic turbulence in curvilinear flows of polymer solutions // New J. Phys. 2004. N 6. P. 29.
5. *Gerashchenko S., Chevallard C., Steinberg V.* Single-polymer dynamics: coil-stretch transition in a random flow // Europhys. Lett. 2005. N 71. P. 221—227.
6. *Burghelea T., Segre E., Steinberg V.* Role of elastic stress in statistical and scaling properties of elastic turbulence // Phys. Rev. Lett. 2006. N 96. Article 214502.
7. *Burghelea T., Segre E., Steinberg V.* Elastic turbulence in von Karman swirling flow between two disks // Phys. Fluids. 2007. N 19. Article 053104.
8. *Balkovsky E., Fouxon A., Lebedev A.* Turbulent dynamics of polymer solutions // Phys. Rev. Lett. 2000. N 84. P. 4765–4768.
9. *Chertkov M.* Polymer stretching by turbulence // Phys. Rev. Lett. 2000. N 84. P. 4761–4764.
10. *Fouxon A., Lebedev V.* Spectra of turbulence in dilute polymer solutions // Phys. Fluids. 2003. N 15. P. 2060–2072.
11. *Pan L., Morozov A., Wagner C., Arratia P. E.* Nonlinear elastic instability in channel flows at low Reynolds numbers // Phys. Rev. Lett. 2013. N 110. Article 174502.
12. *Bodiguel H., Beaumont J., Machado A., Martinie L., Kellay H.,Colin A.* Flow enhancement due to elastic turbulence in channel flows of shear thinning fluids // Phys. Rev. Lett. 2015. N 114. Article 028302.
13. *Berti S., Bistagnino A., Boffetta G., Celani A., Musacchio S.* Two-dimensional elastic turbulence // Phys. Rev. E. 2008. N 77. Article 055306(R).
14. *Berti S., Boffetta G.* Elastic waves and transition to elastic turbulence in a two-dimensional viscoelastic Kolmogorov flow // Phys. Rev. E. 2010. N 82. Article 036314.
15. *Anupam Gupta, Dario Vincenzi* Effect of polymer-stress diffusion in the numerical simulation of elastic turbulence // J. Fluid Mech. 2019. N 870. P. 405–418.
16. *Godunov S., Denisenko V., Klyuchinskiy D., Fortova S., Shepelev V.* Study of entropy properties of a linearized version of Godunov's method // Comput. Math. Math. Phys. 2020. V. 60, N 8. P. 628–640.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 532.5

NUMERICAL SIMULATION OF ELASTIC TURBULENCE IN A CONFINED TWO-DIMENSIONAL CELL

© 2023 **V. V. Denisenko**[a], **S. V. Fortova**[b]

Institute for Computer Aided Design RAS,
ul. 2-ya Brestckaya 19/18, Moscow 123056, Russia

E-mails: [a]ned13@rambler.ru, [b]sfortova@mail.ru

Received 22.08.2022, revised 22.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. A numerical model that approximates the system of equations of a viscous fluid with the use of polymeric molecules is described. This model is hybrid and is based on the application of Godunov linearized and finite-difference schemes. This scheme is used to calculate a Kolmogorov-type problem - a viscous flow in a confined area (a square cell) under the action of an external periodic force. The flow with and without impurity is compared, the behavior of polymer molecules in different flow regions is studied. A transition regime characterized by almost complete stretching of molecules in regions of high velocity gradient is obtained.

Keywords: numerical methods in hydrodynamics, elastic turbulence, hydrodynamic instability, non-Newtonian fluid, Kolmogorov's problem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.105

REFERENCES

1. Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids. Fluid Mechanics. V. 1. Wiley, 1977.
2. Groisman A., Steinberg V. Elastic turbulence in a polymer solution flow. *Nature*, 2000, No. 405, pp. 53–55.
3. Groisman A., Steinberg V. Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives. *Nature*, 2001, No. 410, pp. 905–908.
4. Groisman A., Steinberg V. Elastic turbulence in curvilinear flows of polymer solutions. *New J. Phys.*, 2004, No. 6, pp. 29.
5. Gerashchenko S., Chevallard C., Steinberg V. Single-polymer dynamics: coil-stretch transition in a random flow. *Europhys. Lett.*, 2005, No. 71, pp. 221–227.
6. Burghelea T., Segre E., Steinberg V. Role of elastic stress in statistical and scaling properties of elastic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, No. 96, article 214502.
7. Burghelea T., Segre E., Steinberg V. Elastic turbulence in von Karman swirling flow between two disks. *Phys. Fluids*, 2007, No. 19, article 053104.
8. Balkovsky E., Fouxon A., Lebedev A. Turbulent dynamics of polymer solutions. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, No. 84, pp. 4765–4768.
9. Chertkov M. Polymer stretching by turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, No. 84, pp. 4761–4764.
10. Fouxon A., Lebedev V. Spectra of turbulence in dilute polymer solutions. *Phys. Fluids*, 2003, No. 15, pp. 2060–2072.
11. Pan L., Morozov A., Wagner C., Arratia P. E. Nonlinear elastic instability in channel flows at low Reynolds numbers. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, No. 110, article 174502.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

12. Bodiguel H., Beaumont J., Machado A., Martinie L., Kellay H.,Colin A. Flow enhancement due to elastic turbulence in channel flows of shear thinning fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 2015, No. 114, article 028302.

13. Berti S., Bistagnino A., Boffetta G., Celani A., Musacchio S. Two-dimensional elastic turbulence. *Phys. Rev. E*, 2008, No. 77, article 055306(R).

14. Berti S., Boffetta G. Elastic waves and transition to elastic turbulence in a two-dimensional viscoelastic Kolmogorov flow. *Phys. Rev. E*, 2010, No. 82, article 036314.

15. Anupam Gupta, Dario Vincenzi Effect of polymer-stress diffusion in the numerical simulation of elastic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 2019, No. 870, pp. 405–418.

16. Godunov S., Denisenko V., Klyuchinskiy D., Fortova S., Shepelev V. Study of entropy properties of a linearized version of Godunov's method. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, Vol. 60, No. 8, pp. 628–640.

УДК 532.5.032:532.517.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАМКНУТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2023 А. Н. Долуденко[1a], И. В. Колоколов[2b], В. В. Лебедев[2c], С. В. Фортова[3d]

[1] *Объединённый институт высоких температур РАН, ул. Ижорская, 13, стр. 2, г. Москва 125412, Россия,*
[2] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, просп. Акад. Семенова, 1А, г. Москва 142432, Россия,*
[3] *Институт автоматизации проектирования РАН, ул. 2-я Брестская, 19/18, г. Москва 123056, Россия*

E-mails: [a]adoludenko@gmail.com, [b]igor.kolokolov@gmail.com, [c]lwlebede@gmail.com, [d]sfortova@mail.ru

Поступила в редакцию 22.08.2022 г.; после доработки 22.08.2022 г.; принята к публикации 29.09.2022 г.

Численно исследуется двумерное течение вязкой жидкости в ячейке конечного размера, возникающее в результате обратного каскада, поддерживаемого постоянной накачкой. Накачка осуществляется статической силой, периодической в пространстве по двум направлениям. Моделирование проводится для разных значений коэффициента трения о дно. Наблюдаются несколько различных режимов течения. В одном из них преобладает большой вихрь с чётко определённым средним профилем скорости. В другом состоянии возникают сильные хаотические течения с большим количеством вихрей различного размера и времени жизни. В третьем состоянии наблюдается ламинарное течение. Характер реализованного состояния зависит от коэффициента кинематической вязкости жидкости, величины волнового вектора внешней силы накачки и коэффициента трения о дно. При постоянных величинах кинематической вязкости и волнового вектора малое значение коэффициента трения приводит к возникновению первого состояния. При увеличении коэффициента трения о дно идёт переход от течения с одним крупным вихрем к ламинарному течению через ряд состояний с несколькими нестабильными вихрями, которые мы называем хаотическим движением. В работе представлены результаты численного моделирования течения слабо сжимаемой вязкой жидкости в замкнутой ячейке с граничными условиями прилипания на стенках.

Ключевые слова: двумерная турбулентность, вихрь, трение о дно.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.106

ВВЕДЕНИЕ

Хотя строго двумерных турбулентных течений в природе не существует, некоторые черты двумерной турбулентности проявляют многие крупномасштабные геофизические и астрофизические течения. В этих случаях обычно геометрические масштабы по одному из измерений на несколько порядков меньше, чем по оставшимся двум, и при этом говорят о квазидвумерной турбулентности.

В двумерной турбулентности Р. Крайчнаном теоретически предсказана возможность существования двух каскадов: прямого каскада энстрофии со степенной зависимостью спектра

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадания 075-01129-23-00, 075-15-2022-1099 и АААА-А19-119041590048-0).

от волнового числа $E(k) \sim k^{-3}$ при больших волновых числах k, превосходящих характерное волновое число накачки энергии k_f, и обратного каскада энергии, направленного в сторону меньших k, со спектром $E(k) \sim k^{-5/3}$ [1]. Из-за обратного каскада переноса энергии в замкнутой системе энергия должна конденсироваться на масштабе этой системы, при этом должны формироваться крупномасштабные вихревые течения. Это происходит потому, что вихри, создающиеся на масштабе накачки, в силу нелинейного взаимодействия с течением времени начинают объединяться с образованием всё бóльших и бóльших по размеру вихрей. При этом в ограниченной системе максимальный размер вихря не может превышать размера самой системы. Подобные структуры размером с систему впервые наблюдались экспериментально [2] и численно [3]. Таким образом, энергия переносится по обратному каскаду и диссипирует на крупных масштабах, для которых существенны потери энергии за счёт трения. Трение возникает как в вязком подслое вблизи боковых стенок, так и у дна. Именно здесь начинает проявляться квазидвумерность. Дело в том, что при постановке эксперимента по исследованию двумерной турбулентности, например в [4], всегда присутствует третье измерение и дно, ведь жидкость находится в специальной ячейке — кювете. При двумерном моделировании такого дна не существует, и оно вводится путём внесения дополнительного члена в уравнения Навье — Стокса. Влиянию трения о дно на характер формирования двумерного течения посвящена настоящая работа.

1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Моделирование было выполнено при помощи распараллеленного численного алгоритма, основанного на явной схеме метода Мак-Кормака [5]. На каждом временном шаге шаблон разностной схемы меняется четыре раза: разности «вперёд» и «назад» на шаге предиктора вдоль оси Ox, разности «вперёд» и «назад» на шаге предиктора вдоль оси Oy. На стадии корректора смена производится аналогично, за исключением того, что разность «вперёд» меняется на разность «назад» и, наоборот, разность «назад» меняется на разность «вперёд». Эти смены направления разностей циклически меняются с каждым временным шагом, обеспечивая «однородность» разностной схемы в пространстве. Такой подход был успешно использован в работах [6–8]. Этот метод хорошо зарекомендовал себя при решении гиперболических уравнений газо- и гидродинамики. В данном случае гиперболическая часть уравнений решается методом Мак-Кормака, а параболическая часть — с помощью стандартного конечно-разностного метода. Помимо этого, используется метод искусственной сжимаемости [9], при котором последняя является переменной и напрямую влияет на скорость распространения возмущения. Эта скорость должна быть больше, чем возможные максимальные скорости потока, появляющиеся при моделировании.

Рассматривается двумерное течение вязкой жидкости в замкнутой квадратной ячейке Ω, размер которой составляет $2\pi \times 2\pi$ вдоль осей Ox и Oy соответственно. В этой области решаются уравнения Навье — Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0,$$
$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u V) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + f_x - \zeta u,$$
$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v V) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v + f_y - \zeta v.$$

Здесь ρ — плотность жидкости; $V = (u, v)^T$ — вектор скорости, компоненты которого равны соответственно u и v; μ — динамическая вязкость жидкости; p — давление; ζ — коэффициент трения о дно; f_x и f_y — компоненты внешней силы:

$$f_x = \rho G \sin(k_f y), \quad f_y = -\rho G \sin(k_f x),$$

где G — амплитуда внешней силы, k_f — пространственная частота внешней силы. В моделировании было выбрано значение $k_f = 5$.

Для замыкания системы уравнений использовалось уравнение слабосжимаемости вида $dp = c^2 d\rho/\rho$, где c — скорость звука.

В качестве граничных условий на стенках рассматриваемой области Γ поставлены условия прилипания для вектора скорости $V|_{\partial\Gamma} = 0$, где $\partial\Gamma$ — граница расчётной области.

Скалярные величины на границе области $\partial\Gamma$ остаются неизменными:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma} = 0, \quad \left.\frac{\partial \rho}{\partial n}\right|_{\partial\Gamma} = 0,$$

где n — вектор нормали к границе $\partial\Gamma$.

Начальные условия и физические свойства жидкости: $p(t = 0) = p_0 = 10^5\,$Па, $\rho = 1000\,$кг/м^3, $\mu = 0,01\,$Па·с, $G = 0,05\,$Н/кг, $V(t = 0) = 0$ для всех x, y в пределах области Ω.

Вычисления были выполнены на сетках размером 128×128; 256×256; 512×512 ячеек. Качественно результаты всех расчётов приблизительно одинаковы, но количественно интегральные характеристики несколько отличаются. Были выполнены расчёты и для сетки размером 1024×1024, и оказалось, что количественные результаты близки к тем, что были получены на сетке размером 512×512 ячеек. В виду большого количества расчётов сначала проводилось качественное исследование течения на сетке 128×128 расчётных ячеек, а детальный анализ проводился на основе расчётов, проведённых на сетке 512×512 как компромиссной между точностью и временем расчётов.

Характер турбулентного течения определялся по времени жизни ведущего вихря (т. е. вихря с наибольшим значением завихренности). В фазе с когерентным вихрем (он же ведущий) его время жизни велико (бесконечно), а при переходе в хаотическую фазу время жизни ведущего вихря становится конечным.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

При малом коэффициенте трения о дно $\zeta = 0.0001$ реализуется сценарий с обратным каскадом, когда идёт передача кинетической энергии от вихрей меньших размеров к вихрям больших размеров. Мелкие вихри объединяются в одну крупную структуру. С течением времени возникает один крупный вихрь и четыре маленьких в углах ячейки, размеры которых ограничены размерами расчётной ячейки (см. рис. 1(a)). Наступает квазистационарный режим, при котором средние значения как энергии, так и энстрофии практически не меняются со временем. Это верно при рассмотрении нулевых граничных условий (т. е. условий с прилипанием к стенке), когда канал диссипации энергии связан в основном с боковыми стенками ячейки. Именно из-за создающегося вязкого пограничного слоя у боковых стенок прекращается рост энергии в системе и наступает баланс между генерацией и диссипацией. На рис. 2(a) можно видеть, что начиная с 450 секунды график кинетической энергией становится горизонтальным. Здесь кинетическая энергия определяется, как величина: $E = \sum\limits_{ij} \dfrac{u_{ij}^2 + v_{ij}^2}{2}$, где суммирование производится по всем расчётным ячейкам (ij) на текущем шаге по времени.

При увеличении коэффициента трения о дно до $\zeta = 0.025$ перенос энергии по обратному каскаду оказывается подавленным, энергия не доходит до больших масштабов и один большой квазистационарный вихрь не образуется. В течении возникает большое количество вихрей различного размера, которые быстро и хаотично перемещаются внутри расчётной ячейки, исчезают и образуются вновь (рис. 1(b)).

При дальнейшем увеличении коэффициента трения о дно до $\zeta = 0.1$ наблюдается ламинарное течение, которое может повторять начальное распределение вихрей. Также вихри

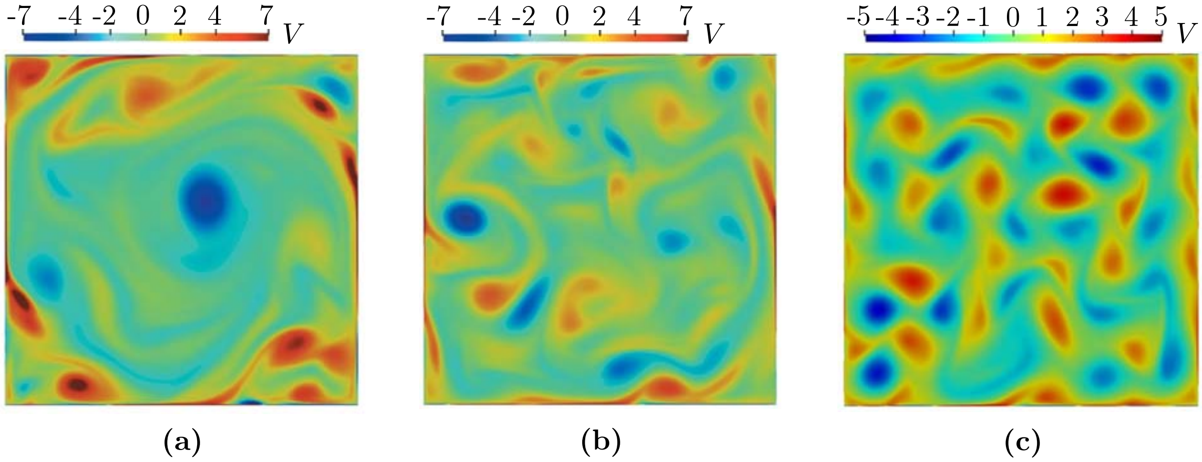


Рис. 1. Завихренность в различного типа течениях на момент времени 500 с: когерентный вихрь, $\zeta = 0,0001$ (a), хаотическое течение, $\zeta = 0,025$ (b), ламинарное течение, $\zeta = 0,1$ (c). Расчётная сетка имеет размеры 512×512 ячеек

могут медленно перемещаться недалеко от того местоположения, в котором они были на начальный момент времени (рис. 1(b)).

Как и при возникновении вихря, в хаотическом и ламинарном течениях может наблюдаться квазистационарное течение вследствие того, что величина закачиваемой энергии равна величине диссипируемой энергии. На рис. 2(a, b) показаны графики зависимости кинетической энергии и энстрофии от времени для систем с разной величиной коэффициента трения о дно. Здесь следует отметить, что энстрофия рассчитывается согласно следующему уравнению:

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{ij}\left(\frac{\partial v_{ij}}{\partial x} - \frac{\partial u_{ij}}{\partial y}\right)^2.$$

Из графиков видно, что с увеличением трения о дно уменьшается как интегральная энергия, так и интегральная энстрофия. При этом система «выходит» на стационарный режим, при котором средние значения величин практически не меняются от времени. При ламинарном течении отклонения энстрофии от среднего значения меньше, чем при хаотическом течении.

В развитом двумерном турбулентном движении присутствует обратный каскад, в котором зависимость кинетической энергии от скорости её диссипации и волнового вектора может быть представлена как [1]

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \tag{1}$$

где C — некая константа, ε — скорость диссипации кинетической энергии, k — волновое число, характеризующее масштаб образующихся вихрей.

В инерционном интервале зависимость $E(k)$ несколько иная:

$$E(k) = C_\Omega \varepsilon_\Omega^{2/3} k^{-3}, \tag{2}$$

здесь C_Ω — константа, отличная от C, а ε_Ω — скорость диссипации энстрофии.

На рис. 2(c) представлен спектр кинетической энергии в логарифмическом масштабе по обеим координатным осям.

Спектр был получен с усреднением по времени в 100 с. Помимо графиков, соответствующих нескольким величинам коэффициента трения о дно, показан спектр течения при отсутствии трения (линия *4*). Можно видеть, что спектр течения близок к спектру с малым коэффициентом трения о дно, за исключением того, что амплитуда спектра несколько больше. Таким

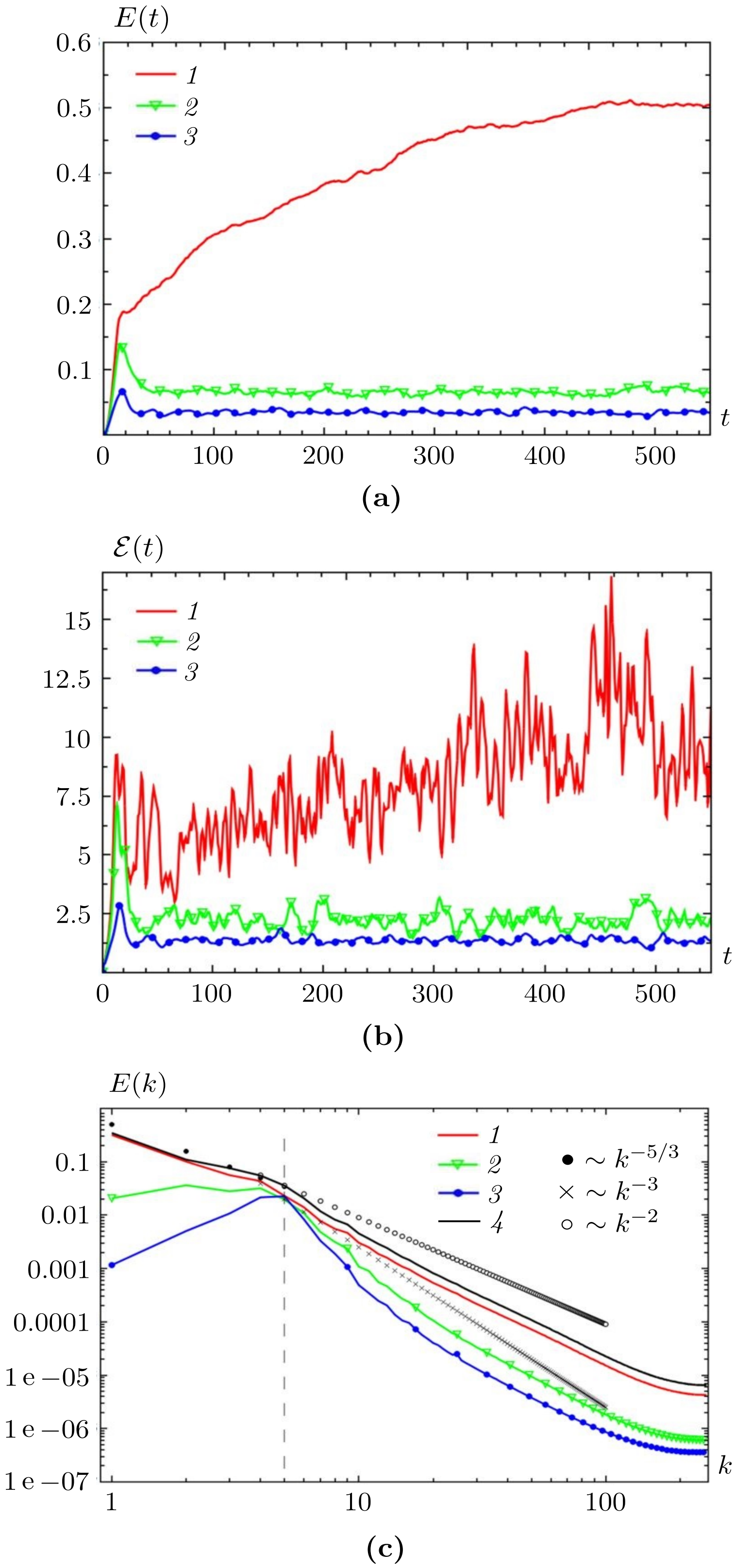


Рис. 2. Графики кинетической энергии (a), энстрофии (b)
и спектра кинетической энергии (c) при различных коэффициентах трения о дно:
$\zeta = 0,0001$ (*1*), $\zeta = 0,025$ (*2*), $\zeta = 0,1$ (*3*), $\zeta = 0$ (*4*)

образом, можно считать, что течение с малым коэффициентом трения о дно соответствует течению в отсутствие этого трения.

Вертикально пунктирной линией показано волновое число, соответствующее масштабу накачки внешней силы, $k_f = 5$. Слева от этой вертикальной линии должен наблюдаться обратный каскад энергии. При малом коэффициенте трения о дно (кривая *1*) видно, что этот участок зависимости хорошо согласуется с теоретической зависимостью (1), при которой энергия пропорциональна волновому числу с коэффициентом $-5/3$. Эта зависимость показана закрашенными кружками. При увеличении трения о дно зависимость (1) в области волновых чисел, меньших $k_f = 5$, перестаёт выполняться для кривых *2* и *3*, которые значительно отклоняются от прямой, соответствующей формуле (1). Это говорит об отсутствии обратного каскада для соответствующих коэффициентов трения о дно.

Справа от вертикальной пунктирной прямой должен наблюдаться инерционный интервал, соответствующий зависимости (2). Прямая, отображённая крестиками, отображает эту зависимость. Можно видеть, что инерционный интервал для кривой *1*, соответствующей развитому турбулентному течению только в начальной своей части, непосредственно после вертикальной прямой соответствует этой зависимости. Далее, после $k = 11$ коэффициент пропорциональности становится больше -3 и кривая начинает проходить между наклонной кривой с коэффициентом -3 и прямой с коэффициентом -2 (показана незакрашенными кружками). Для кривых *2* и *3* наблюдаются похожие зависимости за исключением того, что по величине энергия уменьшается с увеличением трения о дно. Небольшое отличие графиков на инерционном интервале связано с тем, что в данном интервале канал диссипации энстрофии не нарушен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При рассмотрении двумерного течения жидкости, в особенности если это касается сопоставления с экспериментом, необходимо учитывать условия, присущие трёхмерной геометрии. В первую очередь здесь подразумевается учёт влияния дна экспериментальной кюветы на течение жидкости, находящейся в ней. В двумерной расчётной системе это физическое дно учитывается добавлением диссипативного члена, связанного с ним, в уравнение сохранения импульса. Этот член прямо пропорционален скорости течения. Величина коэффициента пропорциональности, т. е. коэффициент трения о дно, определяет характер возникающего течения при неизменных остальных параметрах системы: амплитуда силы внешней накачки, её пространственная частота, кинематическая вязкость жидкости. При отсутствии трения о дно или его малой величине образуется один крупный вихрь в центре рассматриваемой ячейки и несколько более мелких, вращающихся в противоположную сторону в её углах. Рост энергии на масштабе ячейки ограничивается наличием вязкого пограничного слоя, в котором происходит диссипация энергии. Именно для этого типа течения спектр энергии является характерным для двумерной турбулентности с присутствием наклона $-5/3$ в области обратного каскада и наклона от -2 до -3 в области прямого каскада. С увеличением коэффициента трения последний начинает блокировать поток энергии по обратному каскаду, вследствие чего энергия не достигает крупных структур и распределяется на вихрях меньшего масштаба. На графике спектра кинетической энергии (рис. 2(c), кривые *2*, *3*) это наблюдается в виде другой зависимости наклона кривой или вообще отсутствия прямолинейного участка, отвечающего за обратный каскад. Инерционный интервал меняется не в столь сильной степени, поскольку он определяется скоростью диссипации энстрофии. При дальнейшем увеличении силы трения о дно она может полностью блокировать развитие вихревого неустойчивого движения вплоть до того, что его характер будет повторять пространственный характер внешней силы.

Если говорить об эксперименте, то трение о дно накладывает некоторые ограничения на его проведение. Для того чтобы наблюдалось выраженное турбулентное течение с образованием крупного вихря, трение о дно возможно, но коэффициент этого трения должен быть достаточно малым. Для уменьшения трения о дно необходимы специальные экспериментальные подходы. Вероятно, эффект исчезновения когерентного вихря при увеличении коэффициента трения о дно экспериментально наблюдался в работе [10].

Результатом численных экспериментов, представленных в данной работе, является определение роли величины коэффициента трения о дно при изучении различных режимов течения вязкой жидкости в двумерной ячейке с твёрдыми стенками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kraichnan R.H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1967. V. 10, N 7. P. 1417–1423; DOI: 10.1063/1.1762301
2. *Sommeria J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // J. Fluid Mech. 1986. V. 170, N 2. P. 139–168; DOI: 10.1017/S0022112086000836
3. *Boffetta G., Celani A., Vergassola M.* Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: deviations from Gaussian behavior // Phys. Rev. E. Stat. Physics, Plasmas, Fluids, Relat. Interdiscip. Top. 2000. V. 61, N 1; DOI: 10.1103/physreve.61.r29
4. *Orlov A.V., Brazhnikov M.Y., Levchenko A.A.* Large-Scale coherent vortex formation in two-dimensional turbulence // JETP Lett. 2018. V. 107, N 3. P. 157–162; DOI: 10.1134/S0021364018030128
5. *Maccormack R.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // 4 Aerodynamic Test. Conf. Cincinnati, 1969; DOI: 10.1134/S0021364018030128
6. *Apfelbaum M.S., Doludenko A.N.* Hydrodynamic characteristics of weakly conductive liquid media in the non-uniform electric field // Math. Montisnigri. 2019. V. 45. P. 74–84; DOI: 10.20948/mathmontis-2019-45-6
7. *Doludenko A.N., et al.* Numerical simulation of the Rayleigh—Taylor instability of inviscid and viscous fluid // Phys. Scripta. 2019. V. 94, N 9; DOI: 10.1615/ICHMT.2014.IntSympConvHeatMassTransf.1000
8. *Doludenko A.N., et al.* Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // Phys. Fluids. 2021. V. 33, N 1; DOI: 10.1063/5.0038863
9. *Anderson D., Tannehill J.C., Pletcher R.H.* Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Roca Raton, 2016.
10. *Xia H., et al.* Turbulence-condensate interaction in two dimensions // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101, N 19. Article 4504; DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.194504

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 532.5.032:532.517.3

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE VISCOUS TWO-DIMENSIONAL FLUID FLOW IN A CLOSED CELL

© 2023 **A. N. Doludenko[1a], I. V. Kolokolov[2b], V. V. Lebedev[2c], S. V. Fortova[3d]**

[1] *Joint Institute for High Temperatures RAS, ul. Izhorskaya 13, str. 2, Moscow 125412, Russia,*
[2] *Landau Institute for Theoretical Physics RAS, pr. Acad. Semenova 1a, Chernogolovka, Moscow 142432, Russia,*
[3] *Institute of Computer Aided Design RAS, ul. 2-ya Brestskaya 19/18, Moscow 123056, Russia*

E-mails: [a]adoludenko@gmail.com, [b]igor.kolokolov@gmail.com, [c]lwlebede@gmail.com, [d]sfortova@mail.ru

Received 22.08.2022, revised 22.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. A two-dimensional flow of a viscous fluid in a cell of finite size is studied numerically. The flow arises as a result of an inverse cascade, supported by a constant pumping. Several different states are observed. One of them is dominated by a large eddy with a well-defined average velocity profile. In the other state, strong chaotic large-scale fluctuations predominate. Laminar flow is observed in the third state. The nature of the definite state depends on the coefficient of the fluid kinematic viscosity, the magnitude of the external pumping force wave vector of the, and the value of the bottom friction factor. When the values of the kinematic viscosity and wave vector are fixed, a small value of the bottom friction factor leads to the appearance of the first state. As the coefficient of bottom friction factor increases, there is a transition from a flow with one large vortex to a laminar flow through a series of states with several unstable vortices, which we call chaotic motion. The paper presents the results of numerical simulation of the of a weakly compressible viscous fluid flow in a closed cell with no-slip boundary conditions on the walls. Pumping is carried out by a static force, periodic in space in two directions. The simulation is carried out for different values of the bottom friction factor.

Keywords: 2D turbulence, coherent vortex, bottom friction.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.106

REFERENCES

1. Kraichnan R.H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1967, Vol. 10, No. 7, pp. 1417–1423; DOI: 10.1063/1.1762301
2. Sommeria J. Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box. *J. Fluid Mech.*, 1986, Vol. 170, No. 2, pp. 139–168; DOI: 10.1017/S0022112086000836
3. Boffetta G., Celani A., Vergassola M. Inverse energy cascade in two-dimensional turbulence: deviations from Gaussian behavior. *Phys. Rev. E. Stat. Physics, Plasmas, Fluids, Relat. Interdiscip. Top.*, 2000, Vol. 61, No. 1; DOI: 10.1103/physreve.61.r29
4. Orlov A.V., Brazhnikov M.Y., Levchenko A.A. Large-Scale coherent vortex formation in two-dimensional turbulence. *JETP Lett.*, 2018, Vol. 107, No. 3, pp. 157–162; DOI: 10.1134/S0021364018030128

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

5. Maccormack R. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. 4 Aerodynamic Test. Conf. Cincinnati, 1969; DOI: 10.1134/S0021364018030128

6. Apfelbaum M.S., Doludenko A.N. Hydrodynamic characteristics of weakly conductive liquid media in the non-uniform electric field. *Math. Montisnigri*, 2019, Vol. 45, pp. 74–84; DOI: 10.20948/mathmontis-2019-45-6

7. Doludenko A.N., et al. Numerical simulation of the Rayleigh—Taylor instability of inviscid and viscous fluid. *Phys. Scripta*, 2019, Vol. 94, No. 9; DOI: 10.1615/ICHMT.2014.IntSympConvHeatMassTransf.1000

8. Doludenko A.N., et al. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction. *Phys. Fluids*, 2021, Vol. 33, No. 1; DOI: 10.1063/5.0038863

9. Anderson D., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Roca Raton, 2016.

10. Xia H., et al. Turbulence-condensate interaction in two dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, Vol. 101, No. 19, article 4504; DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.194504

УДК 532.542.1

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ RANS РАСЧЁТ КАВИТАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ КЛЕТКИ РЕГУЛИРУЮЩЕГО КЛАПАНА

© 2023 Е. И. Иващенко[1,2a], В. А. Иващенко[1,2], И. А. Плохих[1,2], А. Р. Марданов[3], И. А. Мелемчук[3], Н. К. Пименов[3], Р. И. Мулляджанов[1,2]

[1]*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[3]*ООО «Инженерно-производственный центр ОКАН», ул. Воздухоплавательная, 19а, г. Санкт-Петербург 196084, Россия*

E-mail: edauengauer@mail.ru

Поступила в редакцию 21.09.2022 г.; после доработки 21.09.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Исследовано кавитационное течение в канале, который является прототипом клетки регулирующего клапана. Средние поля скорости, давления и коэффициента паросодержания, полученные методом RANS в открытом вычислительном пакете OpenFOAM, хорошо совпадают с данными, полученными в закрытом пакете Ansys Fluent. Реализован компьютерный код, который позволил получить большое количество конфигураций геометрии клетки регулирующего клапана, для которых были проведены RANS расчёты с целью формирования обширной базы данных.

Ключевые слова: кавитация, RANS, клетка регулирующего клапана.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.107

ВВЕДЕНИЕ

Регулирующие клапаны, задачей которых является обеспечение определённого режима течения (перепада давления и расхода), являются неотъемлемой частью многих промышленных устройств. К примеру, такие клапаны используются в большинстве производственных процессов (в нефтегазовой отрасли, на атомных и тепловых станциях), где необходимо плавно снижать высокое входное давление. Характерный внешний вид этого устройства представлен на рис. 1(a). Основными действующими частями клапана являются золотник и клетка. Золотник регулирует сечение клетки, через которое проходит поток жидкости, а сама клетка является сопротивлением для потока. На характеристики потока можно влиять как с помощью изменения геометрии клетки, так и с помощью изменения эффективного сечения клетки опусканием или поднятием золотника.

Вследствие высокой значимости данных устройств и широкой области их применения в литературе имеются как экспериментальные [1, 2], так и численные [3, 4] исследования течения в регулирующих клапанах. Отдельное внимание при этом всегда уделяется структуре клетки клапана. Это объяснятся тем, что для конкретного класса задач подбирается соответствующий вид регулирующего клапана согласно эксплуатационным требованиям. Основной

Работа выполнена в рамках государственного задания ИТ СО РАН (проект 1022072300001-8-2.7.3) при поддержке молодёжного научного проекта ИТ СО РАН (проект 5.04/2022).

проблемой в таких клапанах является возникновение кавитации вследствие сильного локального падения давления в некоторых областях клетки, что приводит к её механическому разрушению и не прогнозируемым характеристикам течения внутри. Таким образом, становится понятно, что конкретные приложения требуют особого внимания при проектировании регулирующего клапана.

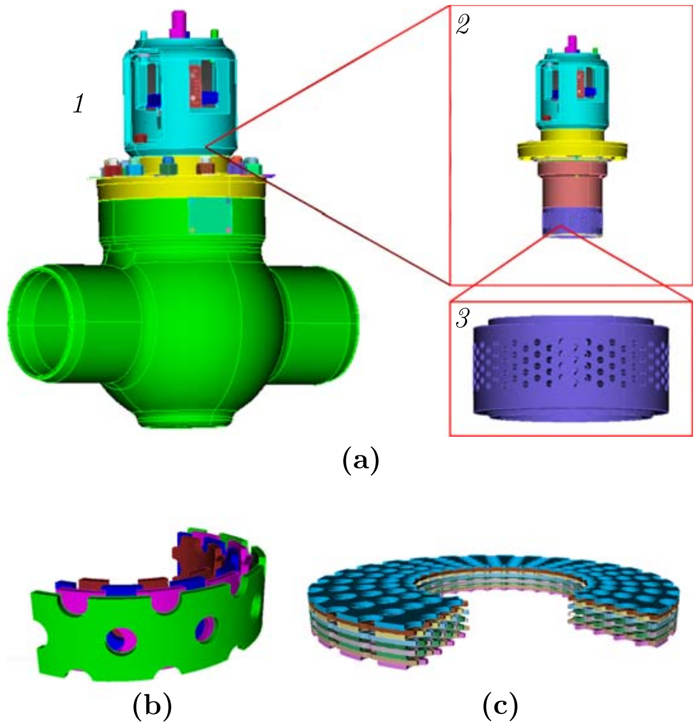


Рис. 1. Схема устройства регулирующего клапана (a):
общий вид клапана (*1*), внутреннее строение клапана (*2*), клетка (*3*);
клетка регулирующего клапана двух типов (b) и (c)

Обычно клетка регулирующего клапана состоит из нескольких цилиндров, вставленных друг в друга (см. рис. 1(b)). Жидкость перемещается от одного цилиндра к другому и постепенно сбрасывает давление в течение всего количества ступеней. При таком постепенном сбросе давления вероятность возникновения кавитации снижается. Встречаются и более сложные, но эффективные решения, которые представляют собой некое подобие лабиринтов, составленных из дисков (рис. 1(c)). При этом изменение радиуса отверстий, их положения или же толщины дисков позволяет получить различные варианты клетки. Чтобы оценить вклад различных геометрических особенностей клетки регулирующего клапана, необходимо провести анализ локального поля течения для различных конфигураций. Для решения данной задачи предлагается с помощью методов вычислительной гидродинамики и машинного обучения решить параметрическую задачу по поиску оптимальной геометрии клетки клапана, позволяющей поддерживать докавитационные режимы течения в рабочем диапазоне входного давления и расхода скорости.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

В рамках данной работы исследуется влияние геометрии клетки клапана на характеристики течения на примере некоторой модельной задачи (см. рис. 2), которая является прототипом структуры реальной клетки клапана и представляет собой четверть круглой трубы, через которую подаётся поток воды при заданной разнице давлений и попадает в область, состоящую из двух рядов цилиндров различного радиуса.

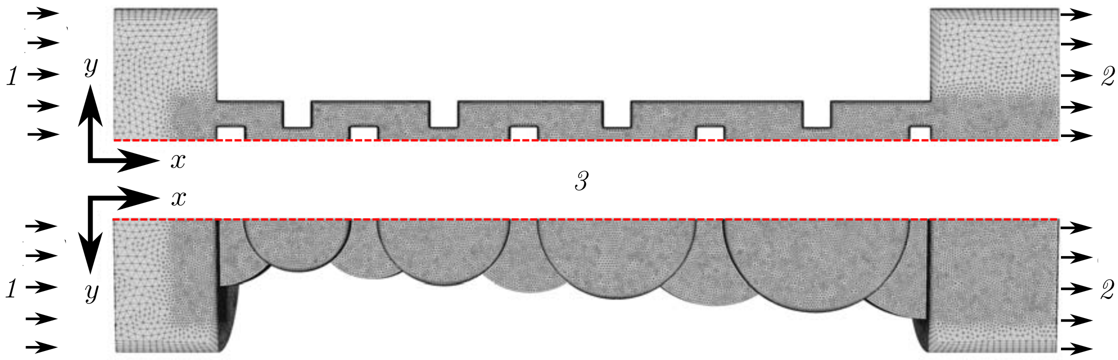


Рис. 2. Пример вычислительной области: вход (*1*), выход (*2*); красной пунктирной линией обозначены поверхности с условием симметрии (*3*)

Вариации геометрии были реализованы при помощи сеткопостроителя Gmsh [5], управляемого компьютерной программой, написанной на языке Python. При построении менялись следующие параметры цилиндров (см. рис. 3): высота канала H от 2 до 8 мм, радиус R_i от 3 до 80 мм, количество каналов и расстояние между ними от 2 до 4 мм. При этом соблюдались следующие технические ограничения: первое и последнее расстояние от круглого канала X_i не должно быть меньше 3 мм, радиус цилиндров всегда должен расти ($R_i < R_{i+1}$) и последний цилиндр должен пересекаться с круглой трубой не менее чем на $0.2R_{\text{last}}$. Полученный таким образом набор геометрий составил около 3500 экземпляров, что является достаточным количеством для реализации базы данных, представляющей собой результаты численного моделирования течения жидкости в тестовом канале. В дальнейшем с целью ускорения процесса решения задачи оптимизации геометрии полученная база данных будет использована для обучения нейронной сети [6, 7].

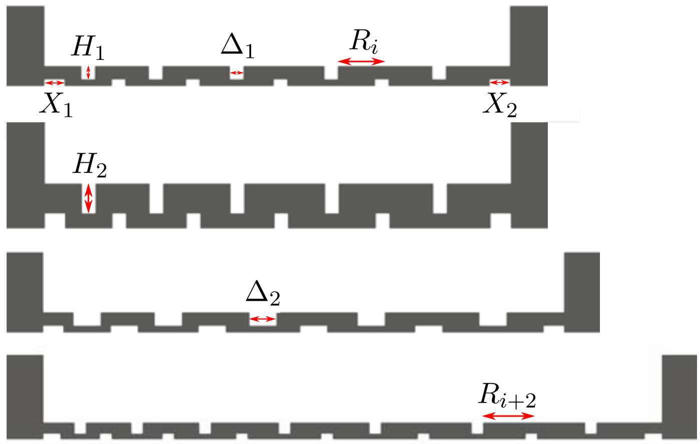


Рис. 3. Варианты геометрии клетки регулирующего клапана, демонстрирующие параметры, которые изменялись в ходе реализации базы данных

Для создания базы данных, обучающей нейросеть, решаются усреднённые по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса для случая переменной плотности в рамках метода объёма жидкости (VOF, от англ. Volume-of-fluid) согласно [8–10]:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\hat{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\hat{u}_i\hat{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial\hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial\hat{\tau}_{ij}}{\partial x_j}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\hat{u}_j)}{\partial x_j} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\rho_v\bar{\alpha})}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_v\bar{\alpha}\hat{u}_j)}{\partial x_j}=\overline{R}, \tag{3}$$

где уравнение

$$\hat{\sigma}_{ij}=\bar{\mu}\left(\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial\hat{u}_k}{\partial x_k}\right) \tag{4}$$

представляет собой тензор вязких напряжений, символ Кронекера δ_{ij}, символы ρ и μ обозначают плотность и динамическую вязкость, τ_{ij} — симметричный тензор второго ранга, который называется напряжением Рейнольдса, а $\overline{R}$ описывает фазовый переход. Давление p и три компоненты вектора скорости $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ зависят от времени t и пространственных координат $\mathbf{x}$. Символ $\bar{u}_i$ обозначает поле, усреднённое по Рейнольдсу (RANS, от англ. Reynolds-averaged Navier—Stokes equations). Идея данного подхода заключается в представлении поля скорости и давления в виде суммы усреднённой по ансамблю (отмечено линией сверху) и пульсационной компоненты (отмечено штрихом) [8]: $\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}+\mathbf{u}'$ и $p=\bar{p}+p'$. Символ $\hat{u}_i$ соответствует усреднённой по Фавру величине, т. е. $\hat{u}_i=\widetilde{\rho u_i}/\bar{\rho}$. Для замыкания уравнений используется гипотеза Буссинеска и улучшенная $k-\varepsilon$ модель (Realizable $k-\varepsilon$):

$$\bar{\tau}_{ij}-\frac{1}{3}\bar{\tau}_{kk}\delta_{ij}=-2\nu_t\overline{S}_{ij},\quad \nu_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon},\quad \overline{S}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\hat{u}_j}{\partial x_i}\right), \tag{5}$$

$$\frac{d(\rho k)}{dt}=\nabla\cdot(\rho D_k\nabla k)+P-\rho\varepsilon, \tag{6}$$

$$\frac{d(\rho\varepsilon)}{dt}=\nabla\cdot(\rho D_\varepsilon\nabla\varepsilon)+\frac{C_1\varepsilon}{k}P-C_2\rho\frac{\varepsilon^2}{k}, \tag{7}$$

где P — производство турбулентной кинетической энергии k, ε — скорость диссипации турбулентной кинетической энергии, ν_t — турбулентная вязкость, S_{ij} — тензор скоростей деформации, $D_k=\nu+\nu_t$ и $D_\varepsilon=\nu+\nu_t/\sigma_\varepsilon$ — коэффициенты диффузии, коэффициент $C_1=\max\{0.43,\eta/(\eta+5)\}$, при этом $\eta=Sk/\varepsilon$, $S=\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, а $C_\mu=0.09$, $C_2=1.92$ и $\sigma=1.3$ — эмпирические коэффициенты модели. Все предположения, упрощающие уравнения (1)–(3), подробно описаны в нашей недавней работе (см. [10]).

Согласно методу VOF предполагается, что жидкая фаза и пар, который присутствует в кавитационном пузыре, представляют собой однородную смесь:

$$\bar{\rho}=\bar{\alpha}\rho_v+(1-\bar{\alpha})\rho_l,\quad \bar{\mu}=\bar{\alpha}\mu_v+(1-\bar{\alpha})\mu_l, \tag{8}$$

где нижние индексы l и v обозначают жидкую и паровую фазы соответственно. Коэффициент объёмного паросодержания $\bar{\alpha}$ изменяется от нуля для жидкой фазы до единицы для пара. Для моделирования фазовых переходов член $\overline{R}$ выражается с помощью модели Шнерра — Сауэра [11]:

$$\overline{R}=\frac{\rho_v\rho_l}{\bar{\rho}}\bar{\alpha}(1-\bar{\alpha})\frac{3}{R_b}\operatorname{sign}(p_v-\bar{p})\sqrt{\frac{3}{2}\frac{|p_v-\bar{p}|}{\rho_l}}, \tag{9}$$

$$R_b=\left(\frac{3}{4\pi}\frac{1}{n_0}\frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}\right)^{1/3}, \tag{10}$$

где $n_0=1.0\times10^{11}$ — эмпирический параметр, соответствующий концентрации пузырьков в единице объёма жидкости, выбран в соответствии с режимом течения, R_b — характерный радиус пузыря, p — давление жидкой фазы на большом расстоянии от пузыря, p_v — давление насыщенного пара. Таким образом, источниковый член является положительным при $p>p_v$, что приводит к зарождению кавитации.

Для проведения RANS расчётов использовался вычислительный код OpenFOAM [12], основанный на методе конечных объёмов (FVM, от англ. Finite volume method). В основе этого метода лежит разбиение расчётной области на многогранники, при этом уравнения движения записываются в интегральной форме. Пространственная дискретизация диффузионного слагаемого в уравнении (1) осуществляется при помощи центрально-разностной схемы второго порядка. Конвективный член дискретизируется с использованием линейной противопоточной схемы второго порядка точности [13]. Для связи скорости и давления используется схема PISO, состоящая из предиктора и корректора [14–16].

Для верификации выбранных численных методов был проведён расчёт потока в тестовой конфигурации (см. рис. 2) при заданной разнице давлений $\Delta P = 172$ кПа, давлении насыщенных паров $P_{\text{vap}} = 470.331$ кПа, а также плотности $\rho_l = 916.79$ и $\rho_v = 2.669$ кг/м^3 (см. таблицу).

Параметры тестового режима течения

P_{in} [кПа]	P_{out} [кПа]	P_{vap} [кПа]	ρ_l [кг/м^3]	ρ_v [кг/м^3]
650	478	470.331	916.79	2.669

Длина всего канала составляет $130.75 \times H$, высота одного слоя цилиндров $H = 1$ мм, радиусы R_i цилиндров от 2.5 до 3.75 мм, расстояние между ними $\Delta = 1$ мм. Было проведено исследование сходимости решения для трёх вычислительных сеток: 0.8×10^6, 1.3×10^6, 1.5×10^6. На рис. 4 продемонстрированы профили продольной компоненты скорости, рассматриваемые в сечении $x = 0.026$ м.

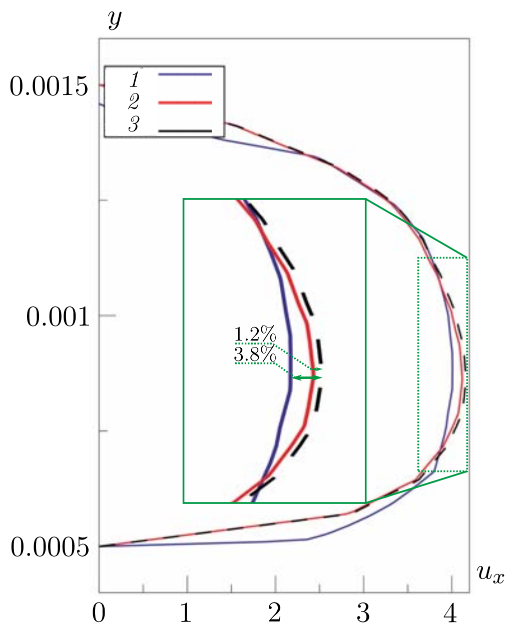


Рис. 4. Сравнение профилей продольной компоненты скорости u_x для трех вычислительных сеток: 0.8×10^6 (*1*), 1.3×10^6 (*2*), 1.5×10^6 (*3*), рассматриваемых в сечении $x = 0.026$ м

Проверка сеточной сходимости показала, что результаты для двух последних сеток различаются всего в 1.2 %, что является допустимым. Таким образом, вычислительная сетка состояла из 1.5×10^6 вычислительных узлов. Для скорости на стенках задавалось условие прилипания, для выходной поверхности — условие Неймана. На входной и выходной поверхностях, которые представляют собой четверть окружности, задавалось давление $P_{\text{in}} = 650$ кПа и $P_{\text{out}} = 478$ кПа соответственно. Скорость на входной поверхности задаётся согласно разнице давления ΔP. На нижней и боковой поверхностях задавалось условие симметрии.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 5 показано сравнение полученных в ходе RANS расчёта данных при помощи пакета OpenFOAM с данными такого же RANS расчёта, полученного при помощи пакета Ansys Fluent [17].

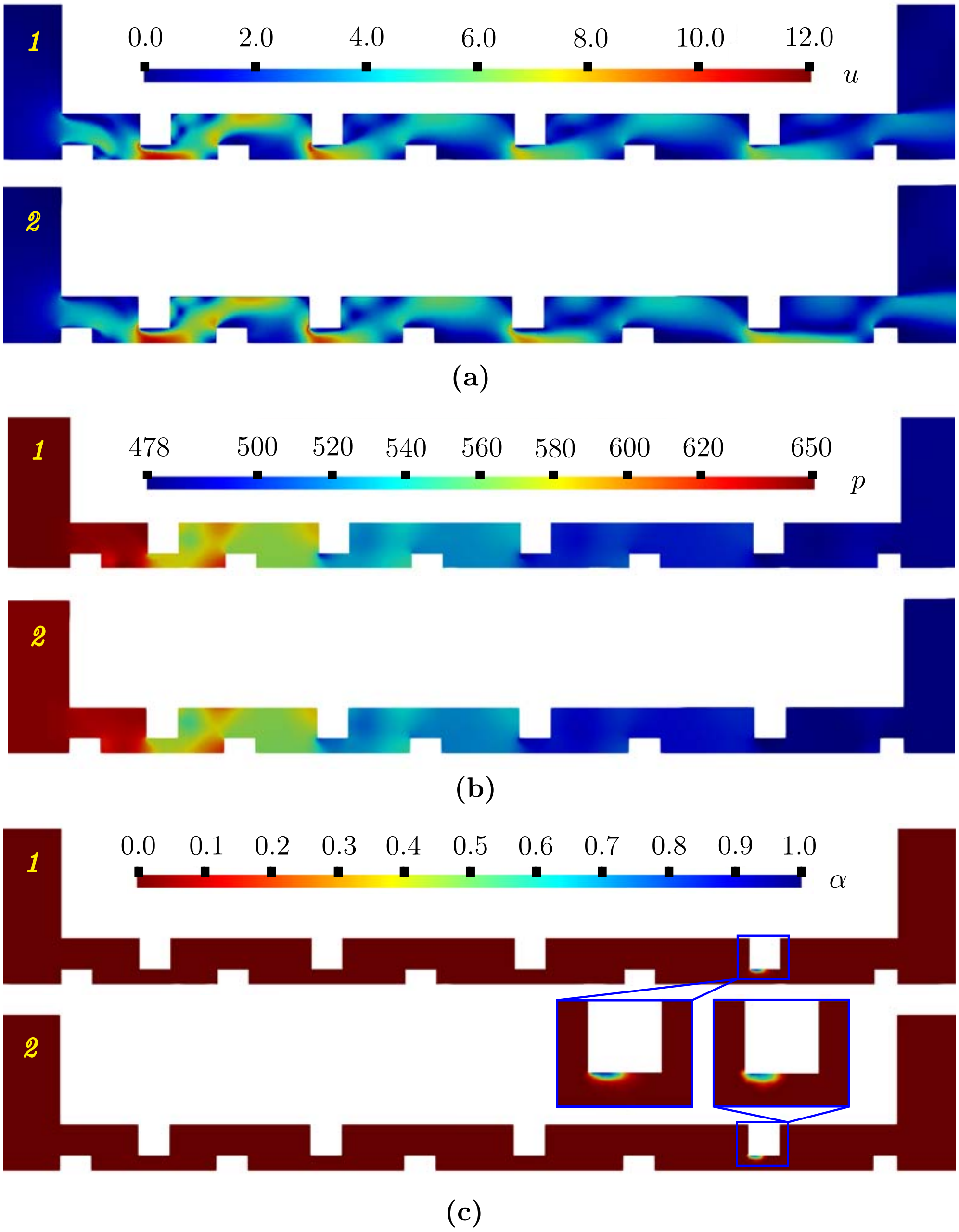


Рис. 5. Сравнение полей:
амплитуды скорости u, давления p, коэффициента паросодержания α,
полученных при помощи Ansys Fluent (*1*) и OpenFOAM (*2*)

Ansys Fluent представляет собой закрытый программный код, основанный на методе конечных элементов, который был верифицирован множеством авторов для большого класса задач [18–21], в том числе по кавитации [22, 23].

В ходе расчёта был получен массовый расход $Q = 0.006638$ кг/с, что соответствует среднерасходной скорости $U_0 = 0.37$ м/с и согласуется с результатом в Ansys Fluent. Однако на рис. 5(a) видно, что в некоторых областях имеется некоторая несогласованность поля амплитуды скорости, что объясняется небольшими различиями в реализации $k-\varepsilon$ модели для двух вычислительных пакетов. Амплитуда скорости жидкости увеличивается в областях сужения канала. При этом в этих областях наблюдается замедление потока при увеличении радиуса цилиндров. Это происходит потому, что поток жидкости, попадая в лабиринтный канал под высоким давлением, резко ускоряется, а давление впервые снижается за счёт значительного уменьшения высоты проточного канала. При прохождении потока через первый вертикальный участок возникает небольшая зона рециркуляции вблизи угла ступени. Образование вихревой структуры приводит к увеличению локальной потери энергии и, следовательно, снижению скорости. После зоны рециркуляции скорость основного потока значительно увеличивается, из чего можно заключить, что второй раз падение давления происходит из-за наличия рециркуляционной зоны. Аналогичным образом течение ведёт себя после каждого «выступа»: скорость основного потока растёт, а давление ещё больше снижается. В итоге скорость на выходе из лабиринта оказывается гораздо выше скорости на входе при значительном уменьшении давления (см. рис. 5(b)). В целом получено хорошее сравнение для полей амплитуды скорости и давления. Для распределения коэффициента паросодержания α, представленного на рис. 5(c), наблюдается наличие кавитационного пузыря в области, предшествующей последнему цилиндру в канале. Видно, что OpenFOAM предсказывает размер, интенсивность и положение пузыря аналогично Ansys Fluent, что говорит о разумном выборе численных методов.

На рис. 6 показано как изменяется коэффициент паросодержания α при варьировании высоты H цилиндров (рис. 6(a)) и положения верхнего ряда цилиндров (рис. 6(b)) при неизменных других характеристиках.

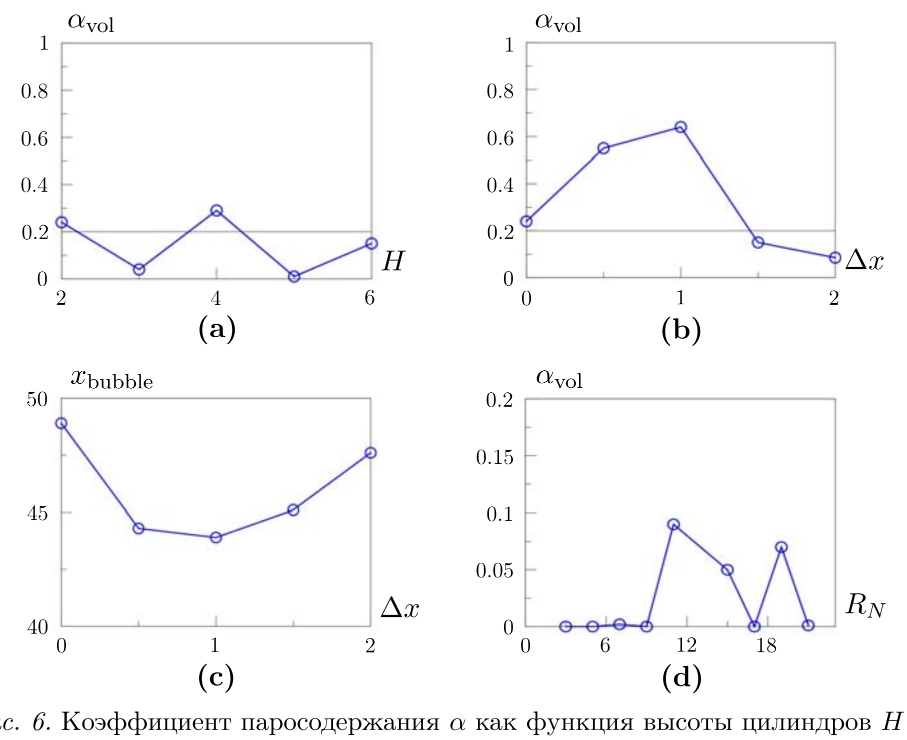


Рис. 6. Коэффициент паросодержания α как функция высоты цилиндров H (a) и положения цилиндров (b); координата кавитационного пузырька как функция положения цилиндров (c) и коэффициент паросодержания α в зависимости от количества цилиндров, расположенных по длине канала (d)

Значения $\alpha < 0.2$ расцениваются как незначительное содержание паровой фазы. Наблюдается заметное снижение паровой фазы при изменении положения цилиндров больше чем на 1 мм. Однако при изменении высоты цилиндров коэффициент паросодержания α то снижается почти до нуля, то вновь превышает пограничное значение 0.2. Так же для некоторых конфигураций не наблюдается образования кавитационных пузырей даже при увеличении количества цилиндров (рис. 6(c)), расположенных по длине канала. Более глубокий анализ взаимосвязи изменения этих параметров, а также остальных варьируемых параметров (см. рис. 3) планируется провести при помощи нейронной сети. Так же для каждой из геометрий определяется положение кавитационного пузырька (рис. 6(d)). По полученным зависимостям составлена обширная база данных, которая в дальнейшем будет использована для обучения нейронной сети решать задачу оптимизации геометрии с целью подавления кавитации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием RANS подхода проведён расчёт кавитационного течения в тестовом канале, являющемся прототипом клетки регулирующего клапана. Получено хорошее сравнение с верифицированным закрытым пакетом Ansys Fluent, что говорит о правильности выбранных численных методов. При помощи сеткопостроителя Gmsh реализовано большое количество конфигураций клетки регулирующего клапана, для которых численно решалась задача кавитационного течения. Продемонстрированы зависимости коэффициента паросодержания от изменения геометрических параметров конфигурации, таких как высота цилиндров, их положение и количество. На основе полученных данных собрана обширная база данных.

Авторы благодарны Институту теплофизики СО РАН и Новосибирскому государственному университету за предоставление вычислительных ресурсов суперкомпьютера «Каскад».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Charlton M.* Cost effective manufacturing and optimal design of X-stream trims for severe service control valves: Thes... dokt. math. Univ. Huddersfield, 2014.
2. *Wedzinga N.A.* Design and testing of a 6 inch control valve with a multi-stage anti-cavitation trim // Student Engrg. Fluid Dynamics Univ. of Twente. Enschede, Overijssel: Twente Univ. Publ., 2015.
3. *Asim T., Charlton M., Mishra R.* CFD based investigations for the design of severe service control valves used in energy systems // Energy Conversion and Management. 2017. V. 153. P. 288–303.
4. *Gao Z.X., Yue Y., Wu J.Y., Li J.Y., Wu H., Jin Z.J.* The flow and cavitation characteristics of cage-type control valves // Engrg. Appl. Comput. Fluid Mech. 2021. V. 15, N 1. P. 951–963.
5. Сайт проекта Gmsh: https://gmsh.info
6. *Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O.* Proximal policy optimization algorithms. arXiv. 2017.
7. *Fujimoto S., van Hoof H., Meger D.* Addressing function approximation error in actor-critic methods. arXiv. 2018.
8. *Pope S.* Turbulent Flows. Cambridge Univ. Press, 2000.
9. *Arabnejad M., Amini A., Farhat M., Bensow R.* Numerical and experimental investigation of shedding mechanisms from leading-edge cavitation // Internat. J. Multiphase Flow. 2019. V. 119. P. 123–143.
10. *Ivashchenko E., Hrebtov M., Timoshevskiy M., Pervunin K., Mullyadzhanov R.* Systematic validation study of an unsteady cavitating flow over a hydrofoil using conditional averaging: LES and PIV // J. Marine Sci. Engrg. 2021. V. 9, N 11. P. 1193.
11. *Schnerr G. H., Sauer J.* Physical and numerical modeling of unsteady cavitation dynamics // Proc. Fourth Internat. Conf. Multiphase Flow. V. 1. New Orleans, 2001. P. 1–12.
12. Сайт проекта OpenFOAM. https://www.openfoam.com.

13. *Warming R. F., Beam R. M.* Upwind second-order difference schemes and applications in aerodynamic flows // AIAA J. 1976. V. 14, N 9. P. 1241–1249.

14. *Jasak H.* Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows. London, 1996.

15. *Ferziger J.H., Perić M., Street R.L.* Computational Methods for Fluid Dynamics. V. 3. Springer-Verl., 2002. P. 196–200.

16. *Darwish M., Moukalled F.* The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: an Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab. Springer-Verl., 2021.

17. Сайт проекта Ansys Fluent: https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent

18. *Rybdylova O., Al Qubeissi M., Braun M., Crua C., Manin J., Pickett L. M., De Sercey G., Sazhina E. M., Sazhin S. S., Heikal M.* A model for droplet heating and its implementation into ANSYS Fluent // Internat. Comm. Heat and Mass Transfer. 2016. V. 76. P. 265–270.

19. *Borkowski D., Węgiel M., Ocłoń P., Węgiel T.* CFD model and experimental verification of water turbine integrated with electrical generator // Energy. 2019. V. 185. P. 875–883.

20. *Araghi A. H., Khiadani M., Sadafi M. H., Hooman K.* A numerical model and experimental verification for analysing a new vacuum spray flash desalinator utilising low grade energy // Desalination. 2017. V. 413. P. 109–118.

21. *Adhikari N., Alexeenko A.* Development and verification of nonequilibrium reacting airflow modeling in ANSYS fluent // J. Thermophys. Heat Transfer. 2022. V. 36, N 1. P. 118–128.

22. *Kumar A., Ghobadian A., Nouri J.* Numerical simulation and experimental validation of cavitating flow in a multi-hole diesel fuel injector // Internat. J. Engine Research. 2022. V. 23. N 6. P. 958–973.

23. *Long Y., Deng L. F., Zhang J. Q., Ji B., Long X. P.* A new method of LES verification and validation for attached turbulent cavitating flow // J. Hydrodynamics. 2021. V. 33, N 1. P. 170–174.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 532.542.1

PARAMETRIC RANS SIMULATION OF CAVITATION FLOW IN THE CHANNEL OF THE CONTROL VALVE CAGE

© 2023 **E. I. Ivashchenko[1,2a], V. A. Ivashchenko[1,2], I. A. Plokhikh[1,2], A. P. Mardanov[3], I. A. Melemchuk[3], N. K. Pimenov[3], R. I. Mullyadzhanov[1,2]**

[1] *Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,*
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia,
[2] *Novosibirsk State University,*
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia,
[3] *Engineering and production center OKAN,*
ul. Vozdukhoplavatelnaya 19A, Saint-Petersburg 196084, Russia

E-mail: edauengauer@mail.ru

Received 21.09.2022 , revised 21.09.2022 , accepted 29.09.2022

Abstract. The cavitation flow in the channel, which is the prototype of the control valve cage, has been studied. The average fields of velocity, pressure, and vapor volume fraction obtained by the RANS method by means of open source CFD software OpenFOAM are in good agreement with the data obtained in the other CFD solve — Ansys Fluent. A computer code was implemented that made it possible to obtain a large number of configurations of the geometry of the control valve cage, for which RANS calculations were carried out in order to form a comprehensive database.

Keywords: cavitation, RANS, control valve cage.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.107

REFERENCES

1. Charlton M. Cost effective manufacturing and optimal design of X-stream trims for severe service control valves: Thes... dokt. math. Univ. Huddersfield, 2014.
2. Wedzinga N.A. Design and testing of a 6 inch control valve with a multi-stage anti-cavitation trim. Student Engrg. Fluid Dynamics Univ. of Twente Enschede. Overijssel: Twente Univ. Publ., 2015.
3. Asim T., Charlton M., Mishra R. CFD based investigations for the design of severe service control valves used in energy systems. *Energy Conversion and Management*, 2017, Vol. 153, pp. 288–303.
4. Gao Z.X., Yue Y., Wu J.Y., Li J.Y., Wu H., Jin Z.J. The flow and cavitation characteristics of cage-type control valves. *Engrg. Appl. Comput. Fluid Mech.*, 2021, Vol. 15, No. 1, pp. 951–963.
5. Project website Gmsh: https://gmsh.info
6. Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O. Proximal policy optimization algorithms. arXiv. 2017.
7. Fujimoto S., van Hoof H., Meger D. Addressing function approximation error in actor-critic methods. arXiv. 2018.
8. Pope S. Turbulent Flows. Cambridge Univ. Press, 2000.
9. Arabnejad M., Amini A., Farhat M., Bensow R. Numerical and experimental investigation of shedding mechanisms from leading-edge cavitation. *Internat. J. Multiphase Flow*, 2019, Vol. 119, pp. 123–143.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

10. Ivashchenko E., Hrebtov M., Timoshevskiy M., Pervunin K., Mullyadzhanov R. Systematic validation study of an unsteady cavitating flow over a hydrofoil using conditional averaging: LES and PIV. *J. Marine Sci. Engrg.*, 2021, Vol. 9, No. 11, pp. 1193.

11. Schnerr G. H., Sauer J. Physical and numerical modeling of unsteady cavitation dynamics. *Proc. Fourth Internat. Conf. Multiphase Flow*, Vol. 1, New Orleans, 2001.

12. Project website OpenFOAM: https://www.openfoam.com.

13. Warming R. F., Beam R. M. Upwind second-order difference schemes and applications in aerodynamic flows. AIAA J., 1976, V. 14, No. 9, pp. 1241–1249.

14. Jasak H. Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows. London, 1996.

15. Ferziger J.H., Perić M., Street R.L. Computational Methods for Fluid Dynamics. V. 3. Springer-Verl., 2002. P. 196–200.

16. Darwish M., Moukalled F. The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: an Advanced Introduction with OpenFOAM and Matlab. Springer-Verl., 2021.

17. Project website Ansys Fluent: https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent

18. Rybdylova O., Al Qubeissi M., Braun M., Crua C., Manin J., Pickett L. M., De Sercey G., Sazhina E. M., Sazhin S. S., Heikal M. A model for droplet heating and its implementation into ANSYS Fluent. *Internat. Comm. Heat and Mass Transfer*, 2016, Vol. 76, pp. 265–270.

19. Borkowski D., Węgiel M., Ocłoń P., Węgiel T. CFD model and experimental verification of water turbine integrated with electrical generator. *Energy*, 2019, Vol. 185, pp. 875–883.

20. Araghi A. H., Khiadani M., Sadafi M. H., Hooman K. A numerical model and experimental verification for analysing a new vacuum spray flash desalinator utilising low grade energy. *Desalination*, 2017, Vol. 413, pp. 109–118.

21. Adhikari N., Alexeenko A. Development and verification of nonequilibrium reacting airflow modeling in ANSYS fluent. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 2022, Vol. 36, No. 1, pp. 118–128.

22. Kumar A., Ghobadian A., Nouri J. Numerical simulation and experimental validation of cavitating flow in a multi-hole diesel fuel injector. *Internat. J. Engine Research*, 2022, Vol. 23, No. 6, pp. 958–973.

23. Long Y., Deng L. F., Zhang J. Q., Ji B., Long X. P. A new method of LES verification and validation for attached turbulent cavitating flow. *J. Hydrodynamics*, 2021, Vol. 33, No. 1, pp. 170–174.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2023. Т. 26, № 1. С. 85–97

УДК 519.63

ОБ ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЕ ТИПА ГОДУНОВА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГАЗОВОЙ И ПЫЛЕВОЙ КОМПОНЕНТ В ЗАДАЧАХ ЗВЕЗДООБРАЗОВАНИЯ

© 2023 И. М. Куликов[1a], И. Г. Черных[1b], А. Ф. Сапетина[1c], Э. И. Воробьёв[2d], В. Г. Элбакян[3e]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Институт астрономии, Университет города Вена, ул. Тюркеншанцштрассе, 17, г. Вена 1180, Австрия,*
[3]*НИИ физики Южного федерального университета, просп. Стачки, 194, г. Ростов-на-Дону 344090, Россия*

E-mails: [a]kulikov@ssd.sscc.ru, [b]chernykh@parbz.sscc.ru, [c]afsapetina@gmail.com, [d]eduard.vorobiev@univie.ac.at, [e]vgelbakyan@sfedu.ru

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.; после доработки 20.09.2022 г.; принята к публикации 29.09.2022 г.

Изложена одна конструкция метода типа Годунова на основе схемы разделения операторов, описывающих работу сил давления и адвективного переноса. Отдельный учёт адвективного переноса позволяет в рамках единой численной схемы описать движение как газовой, так и пылевой компонент. В случае описания динамики газа учёт работы сил давления производится на отдельном этапе независимо от переноса, что позволяет использовать численную схему при решении задач звездообразования, где приходится совместно решать уравнения гидродинамики и уравнения для движения пыли. Для уменьшения диссипации численного метода используется кусочно-параболическое представление физических переменных по всем направлениям. Численный метод верифицирован на задачах о распаде гидродинамического и пылевого разрывов, задаче Седова о точечном взрыве и задаче о коллапсе облака пыли, которые имеют аналитическое решение.

Ключевые слова: математическое моделирование, вычислительная астрофизика, схема Годунова.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.108

ВВЕДЕНИЕ

Звезды малой массы, примером которых является Солнце, образуются во время гравитационного коллапса плотных облаков газа и пыли. В ходе такого коллапса часть облака аккрецируется сначала на околозвёздный диск, а потом на зарождающуюся протозвезду. Этот механизм лежит в основе планетных систем. Изучение околозвёздных дисков является основным ключом к пониманию накопления звёздной массы, формирования планет и зарождения жизни [1–5]. Описание процессов звездообразования требует высокого пространственного разрешения и контраста плотности [6] газовой и пылевой компонент. В настоящей работе мы предлагаем единую численную методику для описания газовой и пылевой компонент. Предлагаемая схема во многом основана на методике из работы [7] с учётом точного решения для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-51-14002 АНФ_а) и Австрийского научного фонда (проект I4311-N27).

переноса пылевой компоненты, записанной в рамках единой процедуры решения задачи Римана.

Метод Годунова для численного решения уравнений гидродинамики разработан 70 лет назад [8]. Однако его исследование в части сходимости [9, 10], поведения энтропии [11–14] и модификации метода происходит до настоящего времени [15, 16]. Метод Годунова также был расширен на ряд математических моделей: радиационной гидродинамики [17], магнитной гидродинамики [18–20], специальной релятивистской [21] и магнитной релятивистской гидродинамики [22], упруго-пластических деформаций [23–25], уравнений Максвелла [26, 27], двухфазной модели [28] и медицинских приложений [29].

Во первом разделе мы приведём описание решаемых уравнений и конструкции численной схемы. Второй раздел посвящён верификации построенной численной схемы. В разделе 3 приведены модельные задачи, соответствующие астрофизическим приложениям.

1. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Численную схему рассмотрим сначала для уравнений гидродинамики, а затем для уравнения описания пыли, которая де-факто является гидродинамической моделью без давления. Для простоты изложения схемы рассмотрим одномерную запись уравнений, которая элементарно расширяется на многомерный случай.

1.1. Метод решения уравнений газовой динамики

Рассмотрим одномерную модель идеальной гидродинамики, записанную в векторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho E u+pu\end{pmatrix}=0, \tag{1}$$

где ρ — плотность, u — скорость, p — давление, γ — показатель адиабаты, $c=\sqrt{\gamma p/\rho}$ — скорость звука, $p=(\gamma-1)\rho\varepsilon$ — уравнение состояния, $\rho\varepsilon$ — плотность внутренней энергии, $\rho E=\rho\varepsilon+\rho u^2/2$ — полная механическая энергия. Для дискретизации расчётной области введём равномерную сетку с пространственным шагом h. Шаг по времени τ мы будем вычислять из условия Куранта $\dfrac{\tau(c+\max|u|)}{h}=\mathrm{CFL}<1$, где CFL — число Куранта. Значения консервативных и физических переменных определены в центрах ячеек с полуцелым индексом, значения потоков через границы ячеек определены в узлах с целым индексом. В этом случае схема Годунова записывается в виде

$$\frac{U^{n+1}_{i+1/2}-U^{n}_{i+1/2}}{\tau}+\frac{F^{n}_{i+1}-F^{n}_{i}}{h}=0, \tag{2}$$

где U и F — векторы консервативных и потока консервативных переменных, i — номер границы между ячейками, $i+1/2$ — номер ячейки, n — номер слоя по времени.

Для построения потока F (решения задачи Римана) рассмотрим две ячейки: левую L и правую R. Используя метод разделения операторов, рассмотрим решение двух систем уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\ p\\ pu\end{pmatrix}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2\\ \rho E u\end{pmatrix}=0. \tag{3}$$

Первое уравнение из (3) описывает работу сил давления, решение которого определяется значениями скорости и давления. Второе отвечает за адвективный перенос газа без давления, который зависит только от плотности и скорости. Тогда уравнения (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \rho^{-1}\\ \gamma p & 0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\p\end{pmatrix}=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2\end{pmatrix}=0. \tag{4}$$

Следуя выкладкам из работы [7], получим следующие значения для решения задачи Римана для первого уравнения из (4):

$$P=\frac{p_L+p_R}{2}+\frac{u_L-u_R}{2}\rho c,\quad U=\frac{u_L+u_R}{2}+\frac{p_L-p_R}{2}\frac{1}{\rho c}, \tag{5}$$

где

$$\rho=\sqrt{\rho_L\rho_R},\quad c=\frac{\sqrt{\rho_L}c_L+\sqrt{\rho_R}c_R}{\sqrt{\rho_L}+\sqrt{\rho_R}}.$$

Для второго уравнения из (4) точное решение для скорости переноса имеет вид

$$V=\frac{\sqrt{\rho_L}u_L+\sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L}+\sqrt{\rho_R}}. \tag{6}$$

Уравнения (5), (6) определяют решение задачи Римана на интерфейсе между левой и правой ячейками для полной системы уравнения (1), которое записывается в виде

$$F=\frac{V-|V|}{2}\begin{pmatrix}\rho_R\\ \rho_R u_R\\ \rho_R E_R\end{pmatrix}+\frac{V+|V|}{2}\begin{pmatrix}\rho_L\\ \rho_L u_L\\ \rho_L E_L\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ P\\ PU\end{pmatrix}.$$

Для повышения порядка точности используется кусочно-параболическая реконструкция физических переменных согласно работе [7].

1.2. Метод решения уравнений для описания динамики пыли

Для описания динамики пыли будем использовать модель гидродинамики без давления, которую также запишем в векторной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\end{pmatrix}+\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2\end{pmatrix}=0, \tag{7}$$

где ρ — плотность пыли и u — скорость пыли. Для разрешения уравнений (7) будем использовать схему Годунова (2), в которой задача Римана де-факто является разрешением адвективного переноса:

$$F=\frac{V-|V|}{2}\begin{pmatrix}\rho_R\\ \rho_R u_R\end{pmatrix}+\frac{V+|V|}{2}\begin{pmatrix}\rho_L\\ \rho_L u_L\end{pmatrix},$$

где V суть точное решение для скорости переноса: $V=\dfrac{\sqrt{\rho_L}u_L+\sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L}+\sqrt{\rho_R}}$. Для повышения порядка точности также используется кусочно-параболическая реконструкция физических переменных [7].

2. ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Для верификации численного метода в одномерной постановке рассмотрим три основные задачи о распаде гидродинамического разрыва и одну задачу о распаде разрыва газа без давления. Начальное состояние для задач приведено в таблице, где x_0 — начальная позиция разделителя между двумя соседними состояниями, а индексами L и R обозначены соответствующие физические величины слева и справа от разделителя.

Начальное состояние задач о распаде разрыва в модельных тестах

N	ρ_L	u_L	p_L	ρ_R	u_R	p_R	x_0	t
1	1	0.75	1	0.125	0	0.1	0.3	0.2
2	1	-2	0.4	1	2	0.4	0.5	0.15
3	1	0	1000	1	0	0.01	0.5	0.012

Первая задача преследует сразу несколько целей. Проверяется способность метода корректно воспроизводить ударную волну, контактный разрыв и волну разрежения. Воспроизведение волны разрежения усложняется наличием звуковой точки, которая в ряде методов, например в схеме Роу, даёт нефизический разрыв во всех функциях из-за наличия энтропийного следа в точке первоначального разрыва, который приходится примерно на середину волны разрежения. Результаты моделирования приведены на рис. 1. Для вычислительных экспериментов было использовано 200 расчётных ячеек.

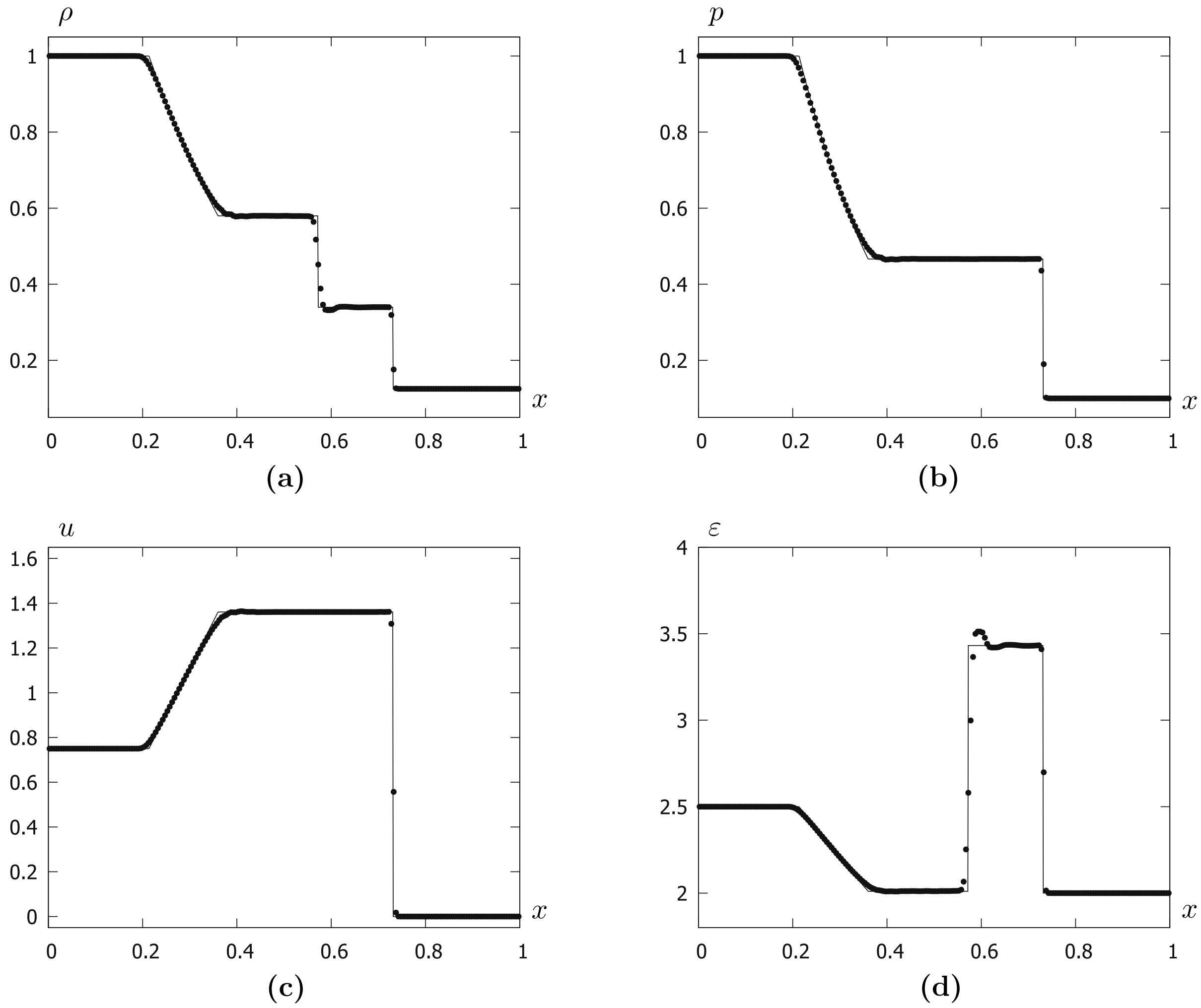


Рис. 1. Плотность (a), давление (b), скорость (c) и удельная энергия (d), полученные при решении первой задачи о распаде разрыва. Кружочками обозначено численное решение, сплошной линией — точное

Из рис. 1 видно, что ударная волна воспроизведена достаточно корректно, с диссипацией всего на две ячейки. На контактном разрыве имеет место остаток энтропийного следа в функции плотности, который распространяется также на внутреннюю энергию. В то же время функции давления и скорости воспроизводятся корректно в этой области. В целом решение воспроизведено корректно, с малой диссипацией и без лишних осцилляций.

Рассмотрим первую задачу при условии нулевого давления и с теми же значениями плотности и скорости по обе стороны от первоначального разрыва. Результаты моделирования приведены на рис. 2. Для вычислительных экспериментов было использовано 200 расчётных ячеек.

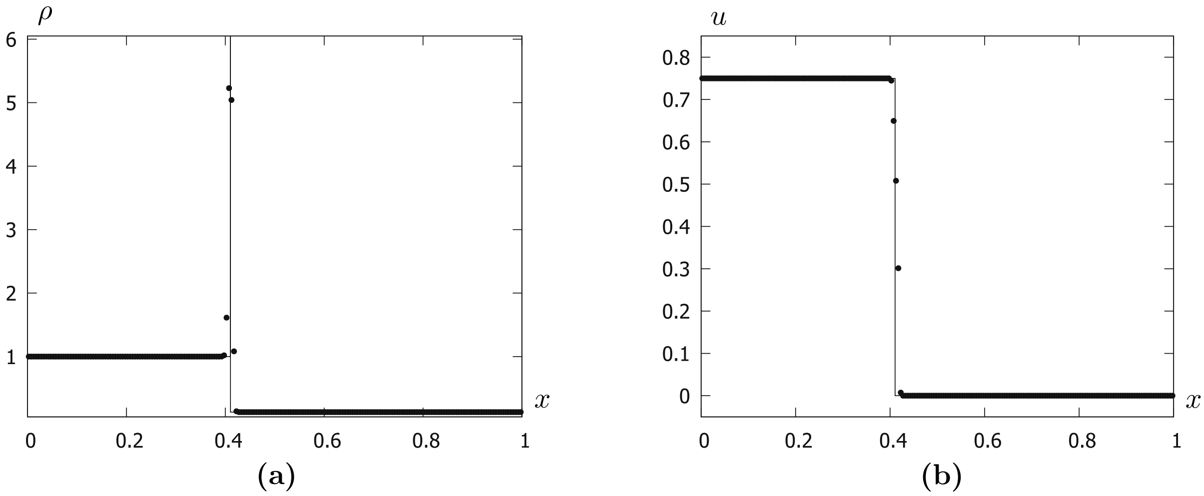


Рис. 2. Плотность (a) и скорость (b), полученные при решении задачи о распаде разрыва газа без давления. Кружочками обозначено численное решение, сплошной линией — точное

Из рис. 2 видно, что ударная волна воспроизведена с диссипацией всего на три ячейки, что связано с большей амплитудой разрыва по сравнению с гидродинамическим тестом. Также на три ячейки происходит диссипация дельта-функции в графике плотности. В целом решение воспроизведено с малой диссипацией решения.

Во второй задаче проверяется возможность численного метода воспроизводить область сильного разрежения при разлёте газа. Результаты моделирования приведены на рис. 3. Для вычислительных экспериментов было использовано 200 расчётных ячеек.

Из рис. 3 видно, что численный метод корректно воспроизводит графики плотности и давления. На графике скорости имеет место диссипация в области контактного разрыва, которая выражается также в виде энтропийного следа в графике внутренней энергии. Отметим монотонный характер численного решения.

В третьей задаче верифицируется устойчивость метода при воспроизведении сильного разрыва в давлении с образованием быстрых ударных волн. Результаты моделирования приведены на рис. 4. Для вычислительных экспериментов было использовано 200 расчётных ячеек.

Из рис. 4 видно, что численный метод с диссипацией всего на одну ячейку воспроизвёл ударную волну. Также на графике удельной внутренней энергии воспроизводится «ступенька-предшественник» с малой амплитудой. В целом метод корректно и с малой диссипацией воспроизвёл все компоненты решения.

3. АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим две задачи, которые имеют астрофизическое приложение. Первая – это задача Седова о точечном взрыве, которая является составной частью моделирования взрыва сверхновых. В этой работе мы не говорим об источнике взрыва. Им может быть поджиг углерода в белых карликах с последующим выделением энергии вследствие термоядерной реакции или коллапс ядра с образованием сильной ударной волны, идущей из центра массивной звезды. Вторая задача — это коллапс пылевого облака, который характерен для задач звездообразования. Несомненным достоинством обеих задач является аналитическое решение, которое

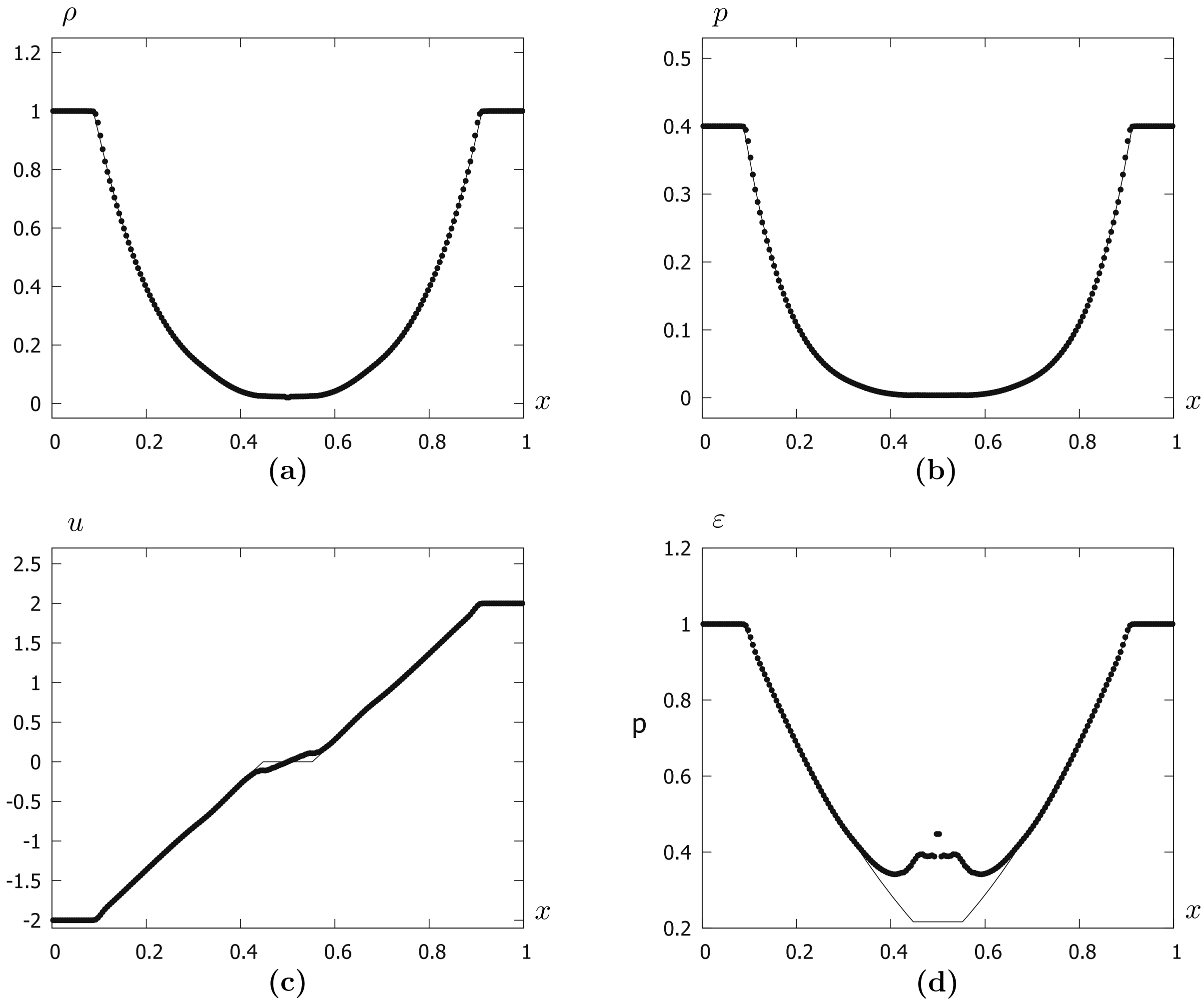


Рис. 3. Плотность (a), давление (b), скорость (c) и удельная энергия (d), полученные при решении второй задачи о распаде разрыва.
Кружочками обозначено численное решение, сплошной линией — точное

позволит оценить качество построенного численного метода. Для высокого пространственного разрешения мы будем использовать аппарат вложенных сеток, описанный в работе [30]. Также мы используем уже реализованный достаточно эффективный метод решения уравнения Пуассона [31].

3.1. Задача Седова о точечном взрыве

Задачу Седова будем рассматривать в безразмерных величинах. Для этого выберем область, ограниченную радиусом $R = 0.5$, заполненную газом с показателем адиабаты $\gamma = 5/3$, с начальной плотностью в области $\rho_0 = 1$ и начальным давлением $p_0 = 10^{-5}$. Величина инжектируемой энергии в начальный момент времени равна $E_0 = 0.6$. Область взрыва ограничена радиусом $r = 0.01$. Профили плотности и момента импульса на момент времени $t = 0.05$ изображены на рис. 5.

Тест Седова о точечном взрыве является стандартным тестом, проверяющим способность метода и его реализацию воспроизводить сильные ударные волны с большими числами Маха, что происходит при взрыве сферических объектов типа массивных звёзд. Скорость звука среды достаточно мала, поэтому число Маха достигает значения $\mathrm{M} \approx 1500$. Как видно, разработанный численный метод достаточно хорошо воспроизводит фронт ударной волны. Пик плотности из-за диссипации меньше максимального значения, в то же время график плотности

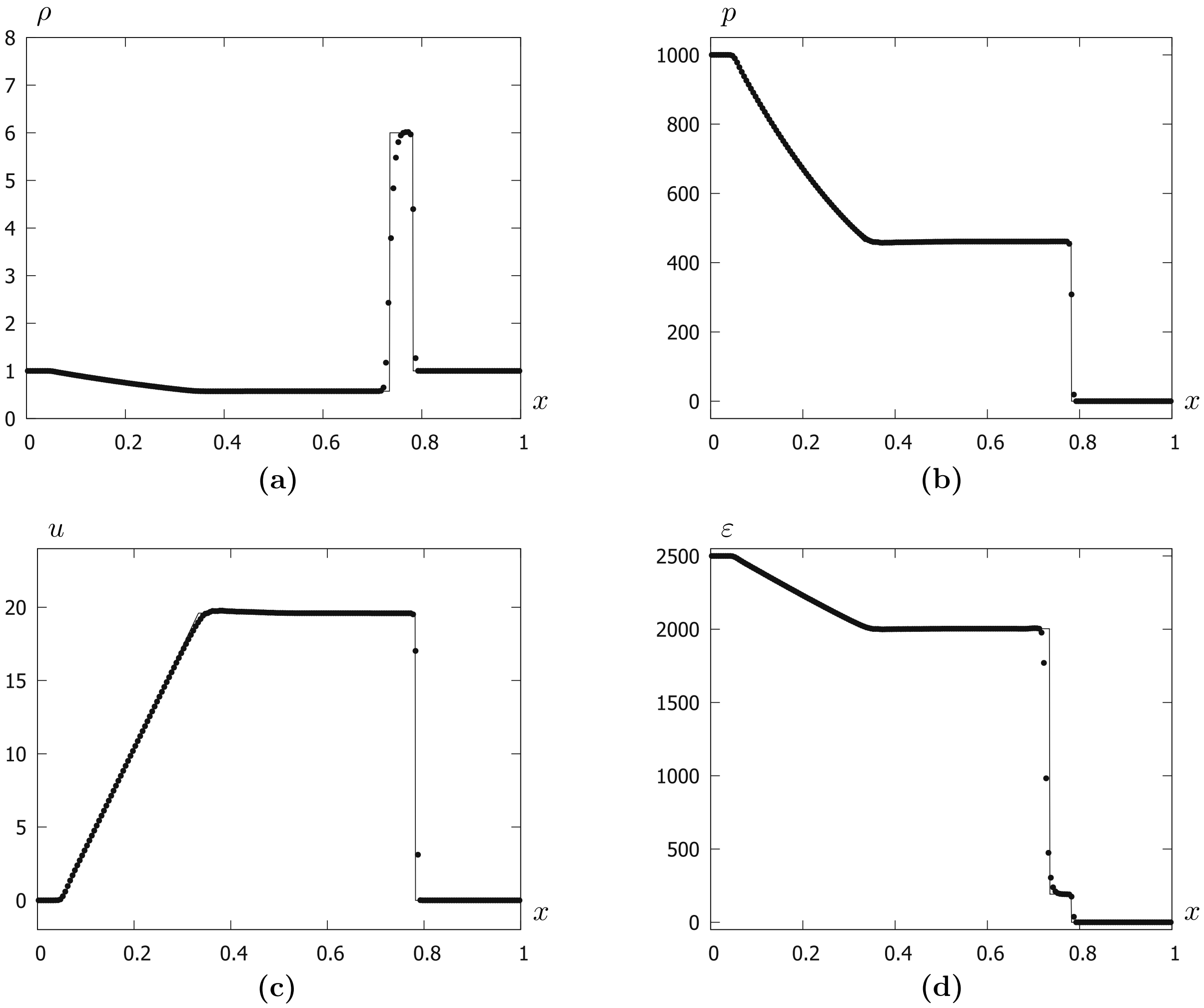


Рис. 4. Плотность (a), давление (b), скорость (c) и удельная энергия (d), полученные при решении третьей задачи о распаде разрыва.
Кружочками обозначено численное решение, сплошной линией — точное

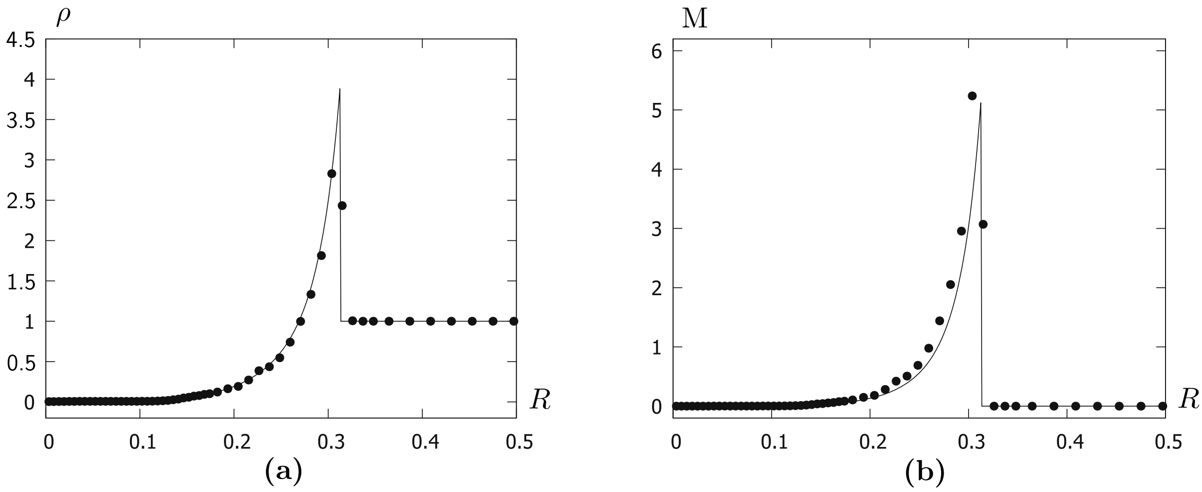


Рис. 5. Плотность (a) и момент импульса (b), полученные при численном решении задачи Седова о точечном взрыве (кружочки), сплошной линией изображено точное решение

восстановлен без спада за фронтом ударной волны, что имело место в работе [7]. Корректно воспроизведён график импульса с достижением характерного пика. Заметим, что диссипация численного решения на фронте ударной волны происходит всего на одну ячейку.

3.2. Коллапс пылевого облака

Задачу коллапса рассмотрим также в безразмерных величинах. Для этого выберем область, ограниченную радиусом $R = 1$, заполненную статичной пылью. Профиль плотности на момент времени $t = 0.535$ изображён на рис. 6.

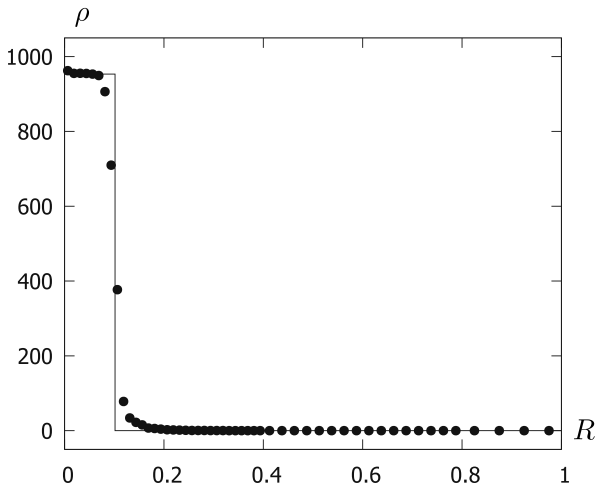


Рис. 6. Плотность, полученная при численном решении задачи коллапса пылевого облака (кружочки), сплошной линией изображено точное решение

Заметим, что имеет место диссипация численного решения на четыре ячейки при увеличении плотности на три порядка. Отметим, что пик плотности воспроизведён корректно, как и «хвост» пыли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена численная методика для описания эволюции газа и пыли в задачах звездообразования. Предложена новая схема типа Годунова на основе комбинации схемы разделения операторов и кусочно-параболического метода с учётом точного решения переноса пылевой компоненты. Метод детально верифицирован на задачах, допускающих аналитическое решение и имеющих астрофизические приложения. Основным преимуществом разработанного авторами численного метода является воспроизведение с малой диссипацией ударных волн в движущемся потоке газа. Такая особенность характерна для задач звездообразования, когда ударные волны и сверхзвуковые течения образуются в ходе эволюции газового облака, а не при задании начальных данных. Для этого был проведён первый тест в одномерной постановке с наличием «звуковой точки». Известно, что многие методы (например, схема Роу) не могут корректно воспроизвести это решение, оставляя на месте разрыва энтропийный след. При гравитации наличие такого следа приводит к образованию ряда артефактов, не имеющих физического обоснования. Воспроизведение таких течений авторским методом стало возможным благодаря разделению решения задачи Римана на учёт работы сил давления с использованием линеаризованной схемы и точным адвективным переносом вещества. Для уменьшения диссипации численного решения используется хорошо зарекомендовавшая себя кусочно-параболическая реконструкция физических переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vorobyov E.I.* Ejection of gaseous clumps from gravitationally unstable protostellar disks // Astron. Astrophys. 2016. V. 590. Article 115.

2. *Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Plunkett A.L., Dunham M.M., Audard M., Guedel M., Dionatos O.* Knotty protostellar jets as a signature of episodic protostellar accretion? // Astron. Astrophys. 2018. V. 613. Article 18.

3. *Vorobyov E.I., Akimkin V., Stoyanovskaya O.P., Pavlyuchenkov Y., Liu H.B.* Early evolution of viscous and self-gravitating circumstellar disks with a dust component // Astron. Astrophys. 2018. V. 614. Article 98.

4. *Vorobyov E.I., Elbakyan V.G.* Gravitational fragmentation and formation of giant protoplanets on orbits of tens of au // Astron. Astrophys. 2018. V. 618. Article 7.

5. *Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Omukai K., Hosokawa T., Matsukoba R., Guedel M.* Accretion bursts in low-metallicity protostellar disks // Astron. Astrophys. 2020. V. 641. Article 72.

6. *Bate M.* Collapse of a molecular cloud core to stellar densities: the formation and evolution of pre-stellar discs // Monthly Notices Royal Astron. Soc. 2011. V. 417. P. 2036–2056.

7. *Kulikov I., Vorobyov E.* Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // J. Comput. Phys. 2016. V. 317. P. 318–346.

8. *Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Т. 47(89), № 3. С. 271–306.

9. *Einfeldt D., Munz C., Roe P., Sjoegreen B.* On Godunov-type methods near low densities // J. Comput. Phys. 1991. V. 92. P. 273–295.

10. *Godunov S.K., Manuzina Y.D., Nazar'eva M.A.* Experimental analysis of convergence of the numerical solution to a generalized solution in fluid dynamics // Comput. Math. Math. Phys. 2011. V. 51. P. 88–95.

11. *Godunov S.K., Kulikov I.M.* Computation of discontinuous solutions of fluid dynamics equations with entropy nondecrease guarantee // Comput. Math. Math. Phys. 2014. V. 54, N 6. P. 1012–1024.

12. *Godunov S.K., Denisenko V.V., Klyuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V.* Study of entropy properties of a linearized version of Godunov's method // Comput. Math. Math. Phys. 2020. V. 60. P. 628–640.

13. *Gallice G., Chan A., Loubere R., Maire P.* Entropy stable and positivity preserving Godunov-type schemes for multidimensional hyperbolic systems on unstructured grid // J. Comput. Phys. 2022. V. 468. Article 111493.

14. *Dellacherie S.* Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. P. 978–1016.

15. *Godunov S.K., Klyuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V.* Experimental studies of difference gas dynamics models with shock waves // Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. P. 1201–1216.

16. *Chen S., Li J., Li Z., Yuan W., Gao Z.* Anti-dissipation pressure correction under low Mach numbers for Godunov-type schemes // J. Comput. Phys. 2022. V. 456. Article 111027.

17. *Sekora M., Stone J.* A hybrid Godunov method for radiation hydrodynamics // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. P. 6819–6852.

18. *Gardiner T., Stone J.* An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport // J. Comput. Phys. 2005. V. 205. P. 509–539.

19. *Gardiner T., Stone J.* An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport in three dimensions // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. P. 4123–4141.

20. *Mignone A., Tzeferacos P.* A second-order unsplit Godunov scheme for cell-centered MHD: The CTU-GLM scheme // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. P. 2117–2138.

21. *Kulikov I.M.* A low-dissipation numerical scheme based on a piecewise parabolic method on a local stencil for mathematical modeling of relativistic hydrodynamic flows // Numer. Anal. Appl. 2020. V. 13. P. 117–126.

22. *Kulikov I.M.* On a modification of the Rusanov solver for the equations of special relativistic magnetic hydrodynamics // J. Appl. Indust. Math. 2020. V. 14. P. 524–531.

23. *Godunov S.K., Kiselev S.P., Kulikov I.M., Mali V.I.* Numerical and experimental simulation of wave formation during explosion welding // Proc. Steklov Inst. Math. 2013. V. 281. P. 12–26.

24. *Aganin A.A., Khismatullina N.A.* UNO modifications of the Godunov method for calculating the dynamics of an elastic-plastic body // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 256–262.

25. *Khismatullina N.A.* Calculation of waves in an elastic-plastic body based on ENO modifications of the Godunov method // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. P. 1228–1234.

26. *Barbas A., Velarde P.* Development of a Godunov method for Maxwell's equations with adaptive mesh refinement // J. Comput. Phys. 2015. V. 300. P. 186–201.

27. *Moreno J., Oliva E., Velarde P.* EMcLAW: An unsplit Godunov method for Maxwell's equations including polarization, metals, divergence control and AMR // Comput. Phys. Comm. 2021. V. 260. Article 107268.

28. *Lei X., Li J.* A staggered-projection Godunov-type method for the Baer—Nunziato two-phase model // J. Comput. Phys. 2021. V. 437. Article 110312.

29. *Ghitti B., Berthon C., Hoang Le M., Toro E.* A fully well-balanced scheme for the 1D blood flow equations with friction source term // J. Comput. Phys. 2020. V. 421. Article 109750.

30. *Kulikov I.* Molecular cloud collapse to stellar densities: Models on moving geodesic vs. Unstructured tetrahedron vs. nested meshes // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 2028. Article 012001.

31. *Chernykh I., Vorobyov E., Elbakyan V., Kulikov I.* The impact of compiler level optimization on the performance of iterative Poisson solver for numerical modeling of protostellar disks // Comm. Comput. Inform. Sci. 2021. V. 1510. P. 415–426.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.63

ON A GODUNOV-TYPE NUMERICAL SCHEME FOR DESCRIBING THE GAS AND DUST COMPONENTS IN PROBLEMS OF STAR FORMATION

© 2023 I. M. Kulikov[1a], I. G. Chernykh[1b], A. F. Sapetina[1c], E. I. Vorobyov[2d], V. G. Elbakyan[3e]

[1]*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, pr. Akad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2]*Department of Astrophysics, University of Vienna, Tuerkenschanzstrasse 17, Vienna 1180, Austria,*
[3]*Research Institute of Physics, Southern Federal Univeristy, pr. Stachki 194, Rostov-on-Don 344090, Russia*

E-mails: [a]kulikov@ssd.sscc.ru, [b]chernykh@parbz.sscc.ru, [c]afsapetina@gmail.com, [d]eduard.vorobiev@univie.ac.at, [e]vgelbakyan@sfedu.ru

Received 16.08.2022, revised 20.09.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The paper presents one construction of the Godunov-type method based on the separation of operators describing the work of pressure forces and advective transfer. Separate consideration of advective transfer makes it possible to describe the motion of both gas and dust components within the framework of a single numerical scheme. In the case of describing gas dynamics, the work of pressure forces is taken into account at a separate stage, regardless of transfer. This makes it possible to use the numerical scheme in solving star formation problems, where it is necessary to jointly solve the equations of hydrodynamics and equations for dust motion. A piecewise parabolic representation of physical variables in all directions is used to reduce the dissipation of the numerical method. The numerical method has been verified on the Riemann problems for a hydrodynamic and dust discontinuity, the Sedov problem of point explosion, and the problem of dust cloud collapse, which have an analytical solution.

Keywords: numerical modeling, computational astrophysics, Godunov-type scheme.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.108

REFERENCES

1. Vorobyov E.I. Ejection of gaseous clumps from gravitationally unstable protostellar disks. *Astron. Astrophys.*, 2016, Vol. 590, article 115.
2. Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Plunkett A.L., Dunham M.M., Audard M., Guedel M., Dionatos O. Knotty protostellar jets as a signature of episodic protostellar accretion? *Astron. Astrophys.*, 2018, Vol. 613, article 18.
3. Vorobyov E.I., Akimkin V., Stoyanovskaya O.P., Pavlyuchenkov Y., Liu H.B. Early evolution of viscous and self-gravitating circumstellar disks with a dust component. *Astron. Astrophys.*, 2018, Vol. 614, article 98.
4. Vorobyov E.I., Elbakyan V.G. Gravitational fragmentation and formation of giant protoplanets on orbits of tens of au. *Astron. Astrophys.*, 2018. V. 618, article 7.
5. Vorobyov E.I., Elbakyan V.G., Omukai K., Hosokawa T., Matsukoba R., Guedel M. Accretion bursts in low-metallicity protostellar disks. *Astron. Astrophys.*, 2020. V. 641, article 72.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

6. Bate M. Collapse of a molecular cloud core to stellar densities: the formation and evolution of pre-stellar discs. *Monthly Notices Royal Astron. Soc.*, 2011, Vol. 417, pp. 2036–2056.

7. Kulikov I., Vorobyov E. Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows. *J. Comput. Phys.*, 2016, Vol. 317, pp. 318–346.

8. Годунов С.К. Raznostnyi metod chislennogo rascheta razryvnykh reshenii uravnenii gidrodinamiki [A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics], *Mat. Sb.*, 1959, Vol. 47(89), No. 3, pp. 271–306 (in Russian).

9. Einfeldt D., Munz C., Roe P., Sjoegreen B. On Godunov-type methods near low densities. *J. Comput. Phys.*, 1991, Vol. 92, pp. 273–295.

10. Godunov S.K., Manuzina Y.D., Nazar'eva M.A. Experimental analysis of convergence of the numerical solution to a generalized solution in fluid dynamics. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, Vol. 51, pp. 88–95.

11. Godunov S.K., Kulikov I.M. Computation of discontinuous solutions of fluid dynamics equations with entropy nondecrease guarantee. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, Vol. 54, No. 6, pp. 1012–1024.

12. Godunov S.K., Denisenko V.V., Klyuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V. Study of entropy properties of a linearized version of Godunov's method. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, Vol. 60, pp. 628–640.

13. Gallice G., Chan A., Loubere R., Maire P. Entropy stable and positivity preserving Godunov-type schemes for multidimensional hyperbolic systems on unstructured grid. *J. Comput. Phys.*, 2022, Vol. 468, article 111493.

14. Dellacherie S. Analysis of Godunov type schemes applied to the compressible Euler system at low Mach number. *J. Comput. Phys.*, 2010, Vol. 229, pp. 978–1016.

15. Godunov S.K., Klyuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V. Experimental studies of difference gas dynamics models with shock waves. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, Vol. 58, pp. 1201–1216.

16. Chen S., Li J., Li Z., Yuan W., Gao Z. Anti-dissipation pressure correction under low Mach numbers for Godunov-type schemes. *J. Comput. Phys.*, 2022, Vol. 456, article 111027.

17. Sekora M., Stone J. A hybrid Godunov method for radiation hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 2010, Vol. 229, pp. 6819–6852.

18. Gardiner T., Stone J. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport. *J. Comput. Phys.*, 2005, Vol. 205, pp. 509–539.

19. Gardiner T., Stone J. An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport in three dimensions. *J. Comput. Phys.*, 2008, Vol. 227, pp. 4123–4141.

20. Mignone A., Tzeferacos P. A second-order unsplit Godunov scheme for cell-centered MHD: The CTU-GLM scheme. *J. Comput. Phys.*, 2010, Vol. 229, pp. 2117–2138.

21. Kulikov I.M. A low-dissipation numerical scheme based on a piecewise parabolic method on a local stencil for mathematical modeling of relativistic hydrodynamic flows. *Numer. Anal. Appl.*, 2020, Vol. 13, pp. 117–126.

22. Kulikov I.M. On a modification of the Rusanov solver for the equations of special relativistic magnetic hydrodynamics. *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 14, pp. 524–531.

23. Godunov S.K., Kiselev S.P., Kulikov I.M., Mali V.I. Numerical and experimental simulation of wave formation during explosion welding. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, Vol. 281, pp. 12–26.

24. Aganin A.A., Khismatullina N.A. UNO modifications of the Godunov method for calculating the dynamics of an elastic-plastic body. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, Vol. 40, pp. 256–262.

25. Khismatullina N.A. Calculation of waves in an elastic-plastic body based on ENO modifications of the Godunov method. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, Vol. 41, pp. 1228–1234.

26. Barbas A., Velarde P. Development of a Godunov method for Maxwell's equations with adaptive mesh refinement. *J. Comput. Phys.*, 2015, Vol. 300, pp. 186–201.

27. Moreno J., Oliva E., Velarde P. EMcLAW: An unsplit Godunov method for Maxwell's equations including polarization, metals, divergence control and AMR. *Comput. Phys. Comm.*, 2021, Vol. 260, article 107268.

28. Lei X., Li J. A staggered-projection Godunov-type method for the Baer—Nunziato two-phase model. *J. Comput. Phys.*, 2021, Vol. 437, article 110312.

29. Ghitti B., Berthon C., Hoang Le M., Toro E. A fully well-balanced scheme for the 1D blood flow equations with friction source term. *J. Comput. Phys.*, 2020, Vol. 421, article 109750.

30. Kulikov I. Molecular cloud collapse to stellar densities: Models on moving geodesic vs. Unstructured tetrahedron vs. nested meshes. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, Vol. 2028, article 012001.

31. Chernykh I., Vorobyov E., Elbakyan V., Kulikov I. The impact of compiler level optimization on the performance of iterative Poisson solver for numerical modeling of protostellar disks. *Comm. Comput. Inform. Sci.*, 2021, Vol. 1510, pp. 415–426.

УДК 539.3

ПРОВЕДЕНИЕ ГОМОГЕНИЗАЦИИ В ВЯЗКОУПРУГИХ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕДАХ С УЧЁТОМ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЛИЯНИЯ ГРАНИЦ

© 2023 А. В. Мишин[1,2]

[1] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Поступила в редакцию 06.07.2022 г.; после доработки 16.09.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Получены эффективные коэффициенты вязкоупругости гетерогенной среды на основе формализма обобщённой производной, отображающей внутренние границы гетерогенной среды. Для найденного модифицированного оператора с учётом проведённого осреднения и его последующего анализа ищется решение на осреднённую функцию Грина. На основе полученного решения, выражающего решение задачи многих тел в гетерогенной среде, эффективные коэффициенты вязкоупругости интегрально учитывают микроструктуру системы (физические свойства и характерные размеры фаз) в явном виде.

Ключевые слова: гетерогенная среда, микроструктура, переходный слой, обобщённая производная, функция Грина, осреднение, вязкоупругость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.109

ВВЕДЕНИЕ

Концепция обобщённой производной впервые введена в рамках функционального анализа в работе [1]. Для аналитического моделирования гетерогенных сред обобщённая производная впервые введена в работе [2] для анализа упругих свойств. Обобщённая производная наличием сингулярной составляющей учитывает влияние конфигурации внутренних границ гетерогенной среды, разделяющих фазы с разными физическими свойствами, на распространение поля по ней. В существующих на сегодняшний момент подходах [3–21] по моделированию гетерогенных сред границы раздела фаз либо не учитываются, либо вводятся упрощённо (через феноменологические коэффициенты или периодическую структуру [18]). Это ограничивает анализ влияния коллективного взаимодействия фаз на распространяющееся по гетерогенной среде поле, что имеет отношение к задаче многих тел в гетерогенной среде и необходимо для отображения её микроструктуры (характерных размеров фаз в среде и их физических свойств). Формализм обобщённой производной претендует на математический аппарат, необходимый для формулирования задачи многих тел в гетерогенной среде. Данный математический аппарат принципиален для анализа новых создаваемых гетерогенных материалов [22–27], обладающих сложной микроструктурой, которая включает наномасштабные размеры фаз и геометрические особенности системы. Приведём также потенциально перспективные работы [28—30] для

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-19-00733).

аналитического исследования гетерогенных сред, основанные на вероятностном формализме, производящей функции и теории графов.

В работе [2] показано, что модифицированный обобщёнными производными оператор приводит к функции Грина, характеризующей микроструктурные особенности гетерогенной среды. В результате использования метода условных моментов, базирующегося на функции Грина, в итоговых эффективных коэффициентах упругости интегрально учитывается микроструктура системы. В данной работе предлагается найти осреднённую функцию Грина для оператора линейного вязкоупругого уравнения. Для этого предлагается сформулировать задачу многих тел для функции Грина в гетерогенной среде по аналогии с тем, как это делается в работе [31]. Построение решения интегродифференциального уравнения с разрывами (находящихся в интегралах по поверхности) основано на преобразовании соответствующего оператора [31]. Найденное решение используется для получения эффективных коэффициентов вязкоупругости, интегрально учитывающих микроструктуру системы в явном виде. Используемым подходом является метод условных моментов, базирующийся на формализме функций Грина, условном осреднении и преобразовании Фурье.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарное распределение упругого поля в микронеоднородной двухфазной среде в трёхмерном пространстве. Структуру среды считаем обладающей статистически однородными и изотропными свойствами и заполняющей всё пространство. В качестве исходной модели используем стационарную изотропную модель линейной теории упругости [2]:

$$\begin{gathered}\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta), \\ \nabla_j(\lambda_{ij\alpha\beta}\nabla_\beta u_\alpha) = 0, \\ \lambda_{ij\alpha\beta} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu I_{ij\alpha\beta}, \quad I_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}).\end{gathered} \tag{1}$$

Обобщение на распространение вязкоупругого поля по гетерогенной среде сделаем, базируясь на структурной идентичности уравнений линейной теории упругости и вязкоупругости [12]. На основе данной аналогии между упругими и вязкоупругими свойствами объёмный K и сдвиговый μ упругие модули системы должны быть заменены на $K \to K - i\omega\zeta$ и $\mu \to \mu - i\omega\eta$, где ζ и η являются объёмным и сдвиговым вязкими модулями системы соответственно, ω — частота, возникшая в результате преобразования Фурье, i — мнимая единица.

В системе (1) обычная производная заменена на обобщённую производную [2], выражение для которой имеет вид

$$\nabla_j u_i(\mathbf{r}) = \partial_j u_i(\mathbf{r}) + \sum_k \int\limits_{S_k} [u_i]_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) ds_j, \tag{2}$$

где запись $[u_i]_{\mathbf{x}}$ характеризует скачок смещений фаз на границе $[u_i]_{\mathbf{x}} = u_i(\mathbf{x}+\mathbf{0}) - u_i(\mathbf{x}-\mathbf{0})$. Сингулярная составляющая для обобщённой производной $\boldsymbol{\nabla}$ в (1) выражается в подынтегральном выражении конфигурацией дельта-функций на поверхностях разрыва.

Координатами в модели (1) выступают микроточки, в каждой из которых находится одна из фаз со своими физическими свойствами, т. е. объёмный $K(\mathbf{r})$ и сдвиговый $\mu(\mathbf{r})$ упругие модули системы являются функциями координат. Если в микроточке находится фаза 1 (с соответствующими ей упругими свойствами K_1, μ_1), то материальные коэффициенты упругости принимают значения $K = K_1$, $\mu = \mu_1$, аналогично и исследуемые поля смещений u_α, деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжений σ_{ij} при этом принимают значения, соответствующие фазе 1.

Уравнения (1) следует дополнить заданием граничных условий на внутренних границах: $[\sigma_{ij}] = 0$, $[u_i] = 0$ и внешней границе [2]. (Граничное условие для внешней границы отображает гипотезу эргодичности об эквивалентности статистического осреднения и осреднения по бесконечно удалённой внешней поверхности.)

Полученный модифицированный оператор в (1) учитывает конфигурацию областей и границ, разделяющих фазы, и определяет обобщённую производную. В работе [31] показано, что формула для обобщённой производной является следствием применения вариационного аппарата к функционалу энергии для гетерогенной среды с учётом индикаторной функции, характеризующей фазу в точке. Корректность уравнений (1) с модифицированным обобщённой производной оператором также обсуждается и доказывается в работах [2] и [31]. В [2] на основе формализма обобщённой производной получена пространственная теорема осреднения [17].

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ НА ОСРЕДНЁННУЮ ФУНКЦИЮ ГРИНА

Для нахождения эффективных коэффициентов упругости согласно работам [2, 31] следует знать вид осреднённой функции Грина $\langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$, где $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$ — координаты, возникшие в результате пространственного осреднения по координатам $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Поиск осреднённой функции Грина согласно работам [2, 3] осуществляется на основе преобразования уравнений (1) к виду

$$\lambda^*_{ij\alpha\beta}\nabla_j\nabla_\beta u_\alpha = -\nabla_j(\lambda_{ij\alpha\beta} - \lambda^*_{ij\alpha\beta})\nabla_\beta u_\alpha, \tag{3}$$

где добавляется и отнимается искомый эффективный тензор $\lambda^*_{ij\alpha\beta}$, входящий в осреднённый закон Гука и содержащий искомые эффективные сдвиговый μ^* и объёмный K^* коэффициенты линейной теории упругости. Правая часть уравнения (3) считается источником. Далее уравнения (3) осредняются по объёму. В результате чего оператором $\lambda^*_{ij\alpha\beta}\hat{A}\nabla_j\nabla_\beta$, где $\hat{A}$ — оператор пространственного осреднения, определяется искомая осреднённая функция Грина $\langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2)$ в уравнении, имеющем вид

$$\lambda^*_{ijml}\partial^{(1)}_j\partial^{(1)}_l\langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) + \lambda^*_{ijml}\sum_k \frac{1}{V}\int\limits_{S_k}\left[\partial^{(y)}_l G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\right]ds_j = \delta_{ip}\delta(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2), \tag{4}$$

где $\partial^{(1)}_i$ — обычная производная по координате $\boldsymbol{R}_1$, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ — объём осреднения. Осреднение произведено по обеим координатам $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. В подынтегральном выражении функция Грина осреднена по координате $\mathbf{r}_2$, вектор $\boldsymbol{y}$ выражает расстояние до поверхностей раздела фаз.

Для полной постановки задачи на осреднённую функцию Грина дополним уравнение (4) условиями на внутренних границах:

$$\left[\lambda_{ij\alpha\beta}\partial^{(y)}_\beta G_{\alpha p}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\right] = 0, \quad [G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)] = 0$$

и условием на бесконечности $\langle G_{mp}\rangle|_\infty = 0$. Условие $[G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)] = 0$ учтено при выводе уравнения (4).

Для построения решения интегродифференциального уравнения с разрывами (4) следует провести преобразование члена $\lambda^*_{ijml}\sum_k \frac{1}{V}\int\limits_{S_k}\left[\partial^{(y)}_l G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\right]ds_j$. В работе [31] применительно к исследованию электрических свойств гетерогенной среды представлен соответствующий алгоритм действий, основная идея в рамках которого заключается в переходе от суммы последовательности внутренних границ к интегралу.

Основываясь на работе [31], приведём итоговое дифференциальное уравнение на осреднённую функцию Грина:

$$\begin{gathered}\big(\lambda^*_{ijml} + D_{ijml}\big)\partial^{(1)}_j\partial^{(1)}_l \langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) - \rho D_{ilml}\langle G_{mp}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) = \delta_{ip}\delta(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2),\\ D_{ij\alpha\beta} = D_1\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + 2D_2 I_{ij\alpha\beta},\\ D_1 = \frac{\beta}{6\pi}\frac{a^2}{\Delta^3}\left(K^* - \frac{2}{3}\mu^*\right)\frac{(K_1 - K_2)(c_1 b K_1 - c_2 a K_2)}{K_1 K_2},\\ D_2 = \frac{\beta}{6\pi}\frac{a^2}{\Delta^3}\mu^*\frac{(\mu_1 - \mu_2)(c_1 b\mu_1 - c_2 a\mu_2)}{\mu_1\mu_2},\end{gathered} \tag{5}$$

где β — коэффициент формы (для половины поверхности сферы $\beta = 2\pi$), $\Delta = a + b$, b и a — характерные масштабы фаз 1 и 2 соответственно, $\rho = 3\varepsilon/\Delta^2$, ε — коэффициент [31], связанный с отношением масштаба Δ к масштабу пространственного осреднения R. Элементарным структурным элементом фазы 2 также является шар с радиусом a.

Проведённые операции по получению уравнения (5) концептуально идентичны работе [31]. Отличие технического плана связано с тензорным видом уравнения (5), что отражается при преобразовании члена $\lambda^*_{ijml}\big[\partial^{(y)}_l G_{mp}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\big]$ на основе граничного условия $\big[\lambda_{ij\alpha\beta}\partial^{(y)}_\beta G_{\alpha p}(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{R}_2)\big] = 0$.

Для нахождения решения уравнения (5) осреднённую функцию Грина полагаем статистически изотропной и однородной: $\langle G_{ip}\rangle(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2) = \langle G_{ip}\rangle(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2)$. Считам также, что выполняются неравенства

$$(\mu_1 - \mu_2)(b\mu_1 - a\mu_2) \geqslant 0, \quad (K_1 - K_2)(bK_1 - aK_2) \geqslant 0.$$

Решение уравнения (5) ищется с помощью преобразования Фурье и вычисления вычетов (первого порядка). Ответ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\langle G_{ip}\rangle(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta_{ip}}{\mu^* + D_2}\frac{e^{-\delta_1 r}}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\omega(D_1 + 4D_2)}\partial_i\partial_p\frac{e^{-\delta_1 r} - e^{-\delta_2 r}}{r},\\ \delta_1^2 = \frac{\omega(D_1 + 4D_2)}{\mu^* + D_2}, \quad \delta_2^2 = \frac{\omega(D_1 + 4D_2)}{K^* + \frac{4}{3}\mu^* + D_1 + 2D_2}.\end{gathered} \tag{6}$$

Решение (6) с входящими масштабами δ_1^{-1} и δ_2^{-1} является следствием модифицированного обобщённой производной оператора, характеризующего конфигурацию границ раздела фаз в гетерогенной среде (и обобщающего оператор работы [3]). Совокупность точек границ раздела фаз в гетерогенной среде в определении обобщённой производной выражена конфигурацией дельта-функций, которые фактически являются конфигурацией зарядов (при этом разные знаки зарядов вызваны чередующейся сменой фаз). С учётом указанного представления члены $e^{-\delta_1 r}/r$ и $e^{-\delta_2 r}/r$ имеют отношение к потенциалу Юкавы, выражающего переходный слой, вызванный экранированием конфигурации зарядов (внутренних границ). Наличие двух переходных масштабов δ_1^{-1} и δ_2^{-1} связано с продольными и поперечными деформациями. Присутствие данных масштабов в осреднённой функции Грина отображает разный вклад в отклик поля в среде на приложенное воздействие от продольных и поперечных воздействий. Коэффициенты D_1 и D_2 в знаменателях (6) также являются следствием конфигурации границ раздела фаз и с точки зрения зарядов ими выражается эффективный заряд. Таким образом, найденное на основе концепции обобщённой производной осреднённое решение описывает влияние конфигурации границ раздела фаз в гетерогенной среде на поведение поля в системе (т. е. отображает коллективное взаимодействие фаз при распространении поля по гетерогенной среде), что является следствием рассмотрения производных в обобщённом смысле.

Полученный результат на осреднённую функцию Грина является следствием нового подхода к конфигурации интегралов по поверхности. Анализ этих интегралов представляет основную проблему теории смесей [17].

3. НАХОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В работе [2] в рамках метода условных моментов [3] получены эффективные коэффициенты линейной теории упругости, учитывающие формализм обобщённой производной и интегрально отображающие микроструктуру гетерогенной системы. Для получения эффективных коэффициентов упругости используем основные выкладки работы [2].

Целью является получение из исходных уравнений (1) осреднённые, представимые в виде

$$\nabla_j\langle\sigma_{ij}\rangle = 0, \quad \langle\sigma_{ij}\rangle = \lambda^*_{ij\alpha\beta}\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle, \quad \lambda^*_{ij\alpha\beta}\nabla_j\nabla_\beta\langle u_\alpha\rangle = 0.$$

Тензоры $\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle$ и $\langle\sigma_{ij}\rangle$ являются осреднёнными тензорами деформаций и напряжений соответственно, $\langle\varepsilon_{\alpha\beta}\rangle = c_1\langle\varepsilon^1_{\alpha\beta}\rangle + c_2\langle\varepsilon^2_{\alpha\beta}\rangle$; c_1, c_2 — объёмные концентрации фаз, $c_1 = V_1/V$, $c_1 + c_2 = 1$. Необходимая информация о гетерогенной структуре располагается в эффективных коэффициентах K^*, μ^*, вид которых следует получить.

Итоговое выражение по вычислению эффективных коэффициентов упругости имеет вид

$$\begin{gathered}\lambda^*_{jk\alpha\beta} = \langle\lambda_{jk\alpha\beta}\rangle + c_1c_2\lambda'_{jkmn}\big(I_{\gamma\delta mn} + R_{\gamma\delta pq}\big(\lambda^*_{pqmn} - \lambda''_{pqmn}\big)\big)^{-1}R_{\gamma\delta r\nu}\lambda'_{r\nu\alpha\beta}, \\ \lambda'_{ij\alpha\beta} = \lambda^1_{ij\alpha\beta} - \lambda^2_{ij\alpha\beta}, \quad \lambda''_{ij\alpha\beta} = c_2\lambda^1_{ij\alpha\beta} + c_1\lambda^2_{ij\alpha\beta}.\end{gathered} \tag{7}$$

Интегралы R_{ijpq} вычисляются по формуле

$$R_{ijpq}(\boldsymbol{k}) = -\int \partial_q\partial_{(j}\langle G_{i)p}\rangle(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})e^{-i\boldsymbol{kr}}\,d\mathbf{r}$$

и при $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$ имеют итоговый вид

$$\begin{gathered}R_{jkpq} = -\frac{1}{3\gamma_2}\frac{1}{\mu^*}I_{jkpq} + \frac{1}{15\gamma_2}\frac{\gamma_1K^* + (\gamma_2 - \frac{2}{3}\gamma_1)\mu^*}{\mu^*(\gamma_1K^* + (2\gamma_2 - \frac{2}{3}\gamma_1)\mu^*)}(\delta_{jk}\delta_{pq} + 2I_{jkpq}), \\ \gamma_1 = 1 + \frac{\beta}{6\pi}\frac{a^2}{\Delta^3}\frac{(K_1 - K_2)(c_1bK_1 - c_2aK_2)}{K_1K_2}, \\ \gamma_2 = 1 + \frac{\beta}{6\pi}\frac{a^2}{\Delta^3}\frac{(\mu_1 - \mu_2)(c_1b\mu_1 - c_2a\mu_2)}{\mu_1\mu_2}.\end{gathered}$$

Функция $\varphi(\mathbf{r})$ при этом взята в виде $\varphi(\mathbf{r}) = e^{-r/(\alpha c_1 a)}$ [32], где α — некоторый структурный коэффициент, который для шара приближённо определим как $\alpha = \pi/2$. Вычисление результата действия вторых производных на осреднённую функцию Грина произведено с учётом приближения

$$\partial_i\partial_p\frac{e^{-\delta_1 r} - e^{-\delta_2 r}}{r} \cong \frac{1}{2}\big(\delta_1^2 - \delta_2^2\big)\partial_i\partial_p r,$$

характеризующего малость масштаба Δ относительно масштаба осреднения R.

Подставив вычисленные R_{jkpq} в формулу (7), получим модифицированные эффективные коэффициенты упругости

$$\begin{gathered}K^* = c_1K_1 + c_2K_2 - \frac{c_1c_2(K_1 - K_2)^2}{c_1K_2 + c_2K_1 + 4/3\gamma_2\mu^*}, \\ \mu^* = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 - \frac{c_1c_2(\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1\mu_2 + c_2\mu_1 + \gamma_2\frac{\mu^*(3/2\gamma_1K^* + (7/3\gamma_2 - \gamma_1)\mu^*)}{\gamma_1K^* + (8/3\gamma_2 - 2/3\gamma_1)\mu^*}}.\end{gathered} \tag{8}$$

В полученных коэффициентах (8) параметры γ_1 и γ_2 являются явно определёнными и интегрально учитывают микроструктуру среды: характерные размеры фаз неоднородной системы и их физические свойства. Эти коэффициенты характеризуют объёмные и сдвиговые свойства гетерогенной среды. В частном случае $\Delta \gg a, b$ или $\beta = 0$, параметры $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ и полученные эффективные коэффициенты согласуются с работами [3, 4, 7–9, 13, 16]. Этот частный случай характеризует пренебрежение границами раздела фаз (либо их влияние на поле интегрально зануляется). Отметим, что в работе [2] в эффективных коэффициентах упругости присутствует один параметр $\gamma \neq 1$, который интегрально учитывает микроструктуру среды.

Для перехода к вязкоупругим эффективным коэффициентам в формуле (8) следует провести следующие замены:

$$K^* \to K^* - i\omega\zeta^*, \quad \mu^* \to \mu^* - i\omega\eta^*, \quad K_\nu = K_\nu - i\omega\zeta_\nu, \quad \mu_\nu = \mu_\nu - i\omega\eta_\nu, \quad \nu = 1,\ 2,$$

где ζ^* и η^* — эффективные коэффициенты объёмной и сдвиговой вязкостей соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе модифицированного концепцией обобщённой производной оператора вязкоупругого линейного уравнения и проведённого осреднения сформулирована задача многих тел в гетерогенной среде для функции Грина. С учётом представленных гипотез найдено решение этой задачи, характеризующее переходный слой и отображающее коллективное взаимодействие фаз при распространении вязкоупругого поля по гетерогенной среде. С учётом найденного решения для осреднённой функции Грина в рамках метода условных моментов получены эффективные коэффициенты вязкоупругости, интегрально учитывающие микроструктуру системы (физические свойства и характерные размеры фаз) в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.
2. *Мишин А.В.* Обобщённая производная и её использование для анализа микроструктуры гетерогенной среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. V. 24, № 4. С. 79–96; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406
3. *Khoroshun L.P.* A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites // Mekh. Kompos. Mater. 1995. V. 31, N 3. P. 310–318.
4. *Khoroshun L.P.* Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // Appl. Mech. 2000. V. 30, N 10. P. 30–62.
5. *Hashin Z., Shtrikman S.* On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10, N 4. P. 335–342.
6. *Hashin Z., Shtrikman S.* A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11, N 2. P. 127–140.
7. *Hashin Z., Shtrikman S.* Conductivity of polycrystals // Phys. Rev. 1963. V. 130, N 129. P. 129–133.
8. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977.
9. *Bruggeman D.A.G.* Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielrkistallen der nichtregularen Systeme // Ann. Phys. 1936. Bd. 417, N 25. P. 645–672.
10. *Kroner E.* Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls // Z. Phys. 1958. Bd. 151, N 4. P. 504–518.
11. *Hill R.A.* Self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13, N 4. P. 213–222.
12. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. N. Y.: Acad. Press, 1982.
13. *Eshelby J.* Continuum Theory of Dislocations. N. Y.: Acad. Press, 1956.

14. *Khoroshun L.P.* Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media // Appl. Mech. 1978. V. 14. P. 3–17.
15. *Khoroshun L.P.* Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials // Appl. Mech. 1987. V. 23, N 10. P. 100–108.
16. *Болотин В.В., Москаленко В.Н.* Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. Т. 34, № 1. С. 66–72.
17. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
18. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
19. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Metall. 1973. V. 21. P. 571–574.
20. *Castaneda P.P., Willis J.R.* The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media // J. Mech. Phys. Solids. 1995. V. 43. P. 1919–1951; http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(95)00058-Q
21. *Fedotov A.* The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials // J. Mater. Sci. 2018. V. 53. P. 5092–5102.
22. *Chen L.Y. et al.* Processing and properties of magnesium containing a dense uniform dispersion of nanoparticles // Nature. 2015. V. 528. Article 7583.
23. *Morsi K., Patel V.V.* Processing and properties of titanium-titanium boride (TiBw) matrix composites // J. Mater. Sci. 2007. V. 42, N 6. P. 2037–2047.
24. *Mishin A.V., Fomin V.M.* Investigation of the elastic properties of the material obtained by the method of cold gas-dynamic spraying with laser treatment // Appl. Mech. Tech. Phys. 2021. N 6. P. 966–971.
25. *Fomin V.M. et al.* Deposition of cermet coatings on the basis of Ti, Ni, WC, and B4C by cold gas dynamic spraying with subsequent laser irradiation // Phys. Mesomech. 2020. V. 23, N 4. P. 291–300.
26. *An Q. et al.* Two-scale TiB/Ti64 composite coating fabricated by two-step process // J. Alloys Compd. 2018. V. 755. P. 29–40.
27. *Фомин В.М., Голышев А.А., Маликов А.Г. и др.* Создание функционально-градиентного материала методом аддитивного лазерного сплавления // Прикл. математика и теор. физика. 2020. Т. 61, № 5. С. 224–234.
28. *Gao J. et al.* Networks formed from interdependent networks // Nat. Phys. 2012. V. 8, N 1. P. 40–48.
29. *Huang X. et al.* Robustness of interdependent networks under targeted attack // Phys. Rev. E: Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys. 2011. V. 83, N 6. Article 065101; DOI:10.1103/PhysRevE.83.065101
30. *Gao J. et al.* Robustness of a network of networks // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107, N 19. Article number 195701; DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.195701.
31. *Мишин А.В.* Учёт обобщённой производной и коллективного влияния фаз на процесс гомогенизации // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. V. 25, № 4. С. 86–98.
32. *Khoroshun L.P.* Elastic properties of materials reinforced with unidirectional short fibers // Appl. Mech. 1972. V. 8, N 10. P. 1–7.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3

CARRYING OUT HOMOGENIZATION IN VISCOELASTIC HETEROGENEOUS MEDIA TAKING INTO ACCOUNT THE COLLECTIVE INFLUENCE OF BOUNDARIES

© 2023 **A. V. Mishin**[1,2]

[1]*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, ul. Institutskaya 4/1, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2]*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Received 06.07.2022, revised 16.09.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The effective coefficients of viscoelasticity of a heterogeneous medium are obtained on the basis of the generalized derivative formalism, which reflects the internal boundaries of a heterogeneous medium. A solution is sought for the averaged Green's function for the found modified operator, taking into account the averaging and subsequent analysis of the operator. The effective viscoelasticity coefficients integrally take into account the microstructure of the system (physical properties and characteristic phase sizes) in an explicit form, that is a consequence of the solution obtained, which expresses the solution of the many-body problem in a heterogeneous medium.

Keywords: heterogeneous medium, microstructure, transition layer, generalized derivative, Green's function, averaging, viscoelasticity.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.109

REFERENCES

1. Shvarts L. Matematicheskie metody dlya fizicheskikh nauk [Matematicheskie metody dlya fizicheskikh nauk]. Moscow: Mir, 1965 (in Russian).
2. Mishin A.V. Obobshchennaya proizvodnaya i ee ispol'zovanie dlya analiza mikrostruktury geterogennoi sredy. [Generalized derivative and its use for analysis of the microstructure of a heterogeneous medium]. *Siber. Zhurn. Indust. Mat.*, 2021, Vol. 24, No. 4, pp. 79–96 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406
3. Khoroshun L.P. A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites. *Mekh. Kompos. Mater.*, 1995, Vol. 31, No. 3, pp. 310–318.
4. Khoroshun L.P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites. *Appl. Mech.*, 2000, Vol. 30, No. 10, pp. 30–62.
5. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 1962, Vol. 10, No. 4, pp. 335–342.
6. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1963, Vol. 11, No. 2, pp. 127–140.
7. Hashin Z., Shtrikman S. Conductivity of polycrystals. *Phys. Rev.*, 1963, Vol. 130, No. 129, pp. 129–133.
8. Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Theory of elasticity of micro-homogeneous media]. Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

9. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielrkistallen der nichtregularen Systeme. *Ann. Phys.*, 1936, Bd. 417, No. 25, pp. 645–672.
10. Kroner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. *Z. Phys.*, 1958, Bd. 151, No. 4, pp. 504–518.
11. Hill R.A. Self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, Vol. 13, No. 4, pp. 213–222.
12. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. N. Y.: Acad. Press, 1982.
13. Eshelby J. Continuum Theory of Dislocations. N. Y.: Acad. Press, 1956.
14. Khoroshun L.P. Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media. *Appl. Mech.*, 1978, Vol. 14, pp. 3–17.
15. Khoroshun L.P. Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials. *Appl. Mech.*, 1987, Vol. 23, No. 10, pp. 100–108.
16. Bolotin V.V., Moskalenko V.N Zadacha ob opredelenii uprugikh postoyannykh mikroneodnorodnoi sredy [The problem of determining the elastic constants of a micro-homogeneous medium]. *Zhurn. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1968, Vol. 34, No. 1, pp. 66–72 (in Russian).
17. Nigmatulin R.I. Osnovy mekhaniki geterogennykh sred [Fundamentals of heterogeneous media mechanics]. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
18. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging of processes in periodic environments]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
19. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall*, 1973, Vol. 21, pp. 571–574.
20. Castaneda P.P., Willis J.R. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *J. Mech. Phys. Solids*, 1995, Vol. 43, pp. 1919–1951; http://dx.doi.org/10.1016/0022-5096(95)00058-Q
21. Fedotov A. The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials. *J. Mater. Sci.*, 2018, Vol. 53, pp. 5092–5102.
22. Chen L.Y. et al. Processing and properties of magnesium containing a dense uniform dispersion of nanoparticles. *Nature*, 2015, Vol. 528, article 7583.
23. Morsi K., Patel V.V. Processing and properties of titanium-titanium boride (TiBw) matrix composites. *J. Mater. Sci.*, 2007, Vol. 42, No. 6, pp. 2037–2047.
24. Mishin A.V., Fomin V.M. Investigation of the elastic properties of the material obtained by the method of cold gas-dynamic spraying with laser treatment. *Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, No. 6, pp. 966–971.
25. Fomin V.M. et al. Deposition of cermet coatings on the basis of Ti, Ni, WC, and B4C by cold gas dynamic spraying with subsequent laser irradiation. *Phys. Mesomech.*, 2020, Vol. 23, No. 4, pp. 291–300.
26. An Q. et al. Two-scale TiB/Ti64 composite coating fabricated by two-step process. *J. Alloys Compd.*, 2018, Vol. 755, pp. 29–40.
27. Fomin V.M., Golyshev A.A., Malikov A.G. i dr. Sozdanie funktsional'no-gradientnogo materiala metodom additivnogo lazernogo splavleniya [Creation of a functional gradient material by additive laser fusion]. *Prikl. Mat. Teor. Fiz.*, 2020, Vol. 61, No. 5, pp. 224–234 (in Russian).
28. Gao J. et al. Networks formed from interdependent networks. *Nat. Phys.*, 2012, Vol. 8, No. 1, pp. 40–48.
29. Huang X. et al. Robustness of interdependent networks under targeted attack. *Phys. Rev. E: Stat. Nonlinear, Soft Matter. Phys.*, 2011, Vol. 83, No. 6, article 065101; DOI:10.1103/PhysRevE.83.065101
30. Gao J. et al. Robustness of a network of networks.*Phys. Rev. Lett.*, 2011. Vol. 107, No. 19. article 195701; DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.195701.
31. Mishin A.V. Uchet obobshchennoi proizvodnoi i kollektivnogo vliyaniya faz na protsess gomogenizatsii [Taking into account the generalized derivative and the collective influence of phases on the homogenization process]. *Siber. Zhurn. Indust. Mat.*, 2022. Vol. 25, No. 4, pp. 86–98 (in Russian).

32. Khoroshun L.P. Elastic properties of materials reinforced with unidirectional short fibers. *Appl. Mech.*, 1972, Vol. 8, No. 10, pp. 1–7.

УДК 536.46

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ ПРОПАНО-ВОЗДУШНОЙ СМЕСИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

© 2023 **К. М. Моисеева**[a], **А. Ю. Крайнов**[b]

Томский государственный университет,
просп. Ленина, 36, г. Томск 634050, Россия,

E-mails: [a]MoiseevaKM@mail.tsu.ru, [b]akrainov@ftf.tsu.ru

Поступила в редакцию 01.08.2022 г.; после доработки 01.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Представлены результаты исследования горения пропано-воздушной смеси в цилиндрическом канале. Актуальность исследования связана с необходимостью изучения процессов распространения пламени в газовых смесях в условиях закрытых объёмов. Решение задачи выполнено численно для двухмерной осесимметричной постановки. Метод решения основан на методе Ван-Леера для расчёта потоков массы, импульса и энергии на гранях расчётных ячеек. Показано формирование тюльпанообразного пламени. Показано, что результаты численного исследования соответствуют данным эксперимента: формирование тюльпанообразного пламени возможно для смесей с составом, близким к стехиометрическому. Стадии формирования пламени соответствуют описаниям из литературы: расширяющееся в сторону боковой стенки пламя, вытянутое в осевом направлении пламя, пламя с «юбкой», тюльпанообразное пламя.

Ключевые слова: горение, математическое моделирование, газовая динамика, пропан.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.110

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию процессов зажигания и горения газовых смесей посвящено много работ и публикаций в научной литературе. В исследованиях горения газовых смесей основными вопросами являются определение критических условий зажигания с последующим выходом на устойчивый режим горения и определение скорости распространения пламени по газовой смеси.

Скорость горения газовых смесей, в частности, исследовалась в работах [1–8]. В [1–3] определено влияние состава газовой смеси на скорость её горения. В работе [1] использованы детальные кинетические механизмы [2, 3] и показано, что разбавление метано-воздушной смеси этано- или пропано-воздушной смесью приводит к увеличению скорости распространения пламени.

Экспериментальные исследования скорости распространения пламени водородо-воздушной и пропано-воздушной смеси приведены в [4]; в работе показано возникновение тюльпанообразного пламени и проанализированы поля давлений. Сделан вывод, что давление не является первопричиной возникновения искажённой формы пламени пропано-воздушной смеси. Особенностью работы [4] является получение экспериментальных результатов по тюльпанообразному пламени для пропановых смесей. Ранее утверждалось, что такого рода неустойчивость характерна для водородо-воздушной смеси.

В работе [5] представлены зависимости скорости распространения пламени пропано-воздушной смеси от состава. Результаты получены экспериментально.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-71-10034).

В [6, 7] решены задачи об искровом зажигании и горении пропано-воздушных смесей. Определена зависимость минимальной энергии искрового зажигания и нормальной скорости распространения пламени в смеси от состава. Сопоставление результатов расчёта с работами [5, 8] показывает хорошее согласие результатов с данными экспериментов [8] в диапазоне значений коэффициента избытка горючего от 0.8 до 1. Нижний предел воспламеняемости соответствует данным [5].

При распространении пламени в узком канале существенное влияние могут оказывать процессы газовой динамики. В частности, возникает тепловое расширение газа, и при распространении пламени в сторону стенок канала возникает поджатие смеси и ускорение пламени вдоль оси канала. Для водородо-воздушных и пропано-воздушных смесей возможно формирование тюльпанообразного пламени.

Представляет интерес исследование скорости распространения пламени в узком канале в зависимости от состава смеси и характеристик канала. Видимая скорость пламени определяется отношением площади фронта горения к площади канала. Искривление фронта горения приводит к существенному увеличению видимой скорости пламени. Целью настоящей работы является численное моделирование горения пропано-воздушной смеси в узком цилиндрическом канале, определение эволюции формы пламени в зависимости от ширины канала и коэффициента избытка горючего в газе.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решается задача воспламенения и горения пропано-воздушной смеси, записанная в цилиндрических координатах в двухмерной постановке. Цилиндрический канал имеет протяжённость L, радиус R. Очаг воспламенения расположен в области $0 \leqslant x \leqslant x_0$, $-r_0 \leqslant r \leqslant r_0$. В области очага задаётся повышенная температура газа при атмосферном давлении. В газе протекает экзотермическая химическая реакция второго порядка, первого по окислителю и по горючему. Теплоотдача излучением от продуктов сгорания не учитывается. Диссоциация молекул продуктов сгорания при высокой температуре также не учитывается. Коэффициенты диффузии и теплопроводности зависят от температуры, число Льюиса равно единице. Газ невязкий. Учитывается тепловое расширение и последующее движение газа. Рассматривается канал, закрытый с торцов, и канал с открытым справа торцом.

Система уравнений физико-математической модели представляет собой:

— уравнение сохранения массы газа

$$\frac{\partial r\rho_g}{\partial t} + \frac{\partial r\rho_g u_g}{\partial x} + \frac{\partial r\rho_g v_g}{\partial r} = 0; \tag{1}$$

— уравнения сохранения импульса газа

$$\frac{\partial r\rho_g u_g}{\partial t} + \frac{\partial r\left(p_g + \rho_g u_g^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial r\rho_g u_g v_g}{\partial r} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial r\rho_g v_g}{\partial t} + \frac{\partial r\rho_g u_g v_g}{\partial x} + \frac{\partial r\left(p_g + \rho_g v_g^2\right)}{\partial r} = p_g; \tag{3}$$

— уравнение баланса массы кислорода в газе

$$\frac{\partial r\rho_{\text{ox}}}{\partial t} + \frac{\partial r\rho_{\text{ox}} u_g}{\partial x} + \frac{\partial r\rho_{\text{ox}} v_g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(rD_g\rho_g\frac{\partial a_{\text{ox}}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(rD_g\rho_g\frac{\partial a_{\text{ox}}}{\partial r}\right) - r\alpha_{\text{ch}}W_{\text{ch}}; \tag{4}$$

— уравнение баланса массы горючего компонента в газе

$$\frac{\partial r\rho_f}{\partial t} + \frac{\partial r\rho_f u_g}{\partial x} + \frac{\partial r\rho_f v_g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(rD_g\rho_g\frac{\partial a_f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(rD_g\rho_g\frac{\partial a_f}{\partial r}\right) - rW_{\text{ch}}; \tag{5}$$

— уравнение энергии газа

$$\frac{\partial r E_g}{\partial t} + \frac{\partial r u_g (E_g + p_g)}{\partial x} + \frac{\partial r v_g (E_g + p_g)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(r\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_g \frac{\partial T_g}{\partial r}\right) + rQ_{\mathrm{ch}} W_{\mathrm{ch}}; \tag{6}$$

— уравнение состояния идеального газа

$$p_g = \rho_g T_g R_g. \tag{7}$$

Начальные условия:

$$u_g(x,r,0) = v_g(x,r,0) = 0, \quad p_g(x,r,0) = p_{gb},$$

$$T(x,r,0) = \begin{cases} T_h, & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \\ T_b, & 0 < x \leqslant L, \quad r_0 < r \leqslant R, \\ T_b, & x_0 < x \leqslant L, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\rho_g(x,r,0) = \frac{p_{gb}}{R_g T_g(x,r,0)}, \quad \rho_{\mathrm{ox}}(x,r,0) = a_{\mathrm{ox},b}\rho_g(x,r,0), \quad \rho_f(x,r,0) = a_{f,b}\,\rho_g(x,r,0).$$

Граничные условия на оси симметрии ($r = 0$):

$$\frac{\partial u_g(x,0,t)}{\partial r} = \frac{\partial v_g(x,0,t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_{\mathrm{ox}}(x,0,t)}{\partial r} = \frac{\partial T_g(x,0,t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_g(x,0,t)}{\partial r} = \frac{\partial \rho_f(x,0,t)}{\partial r} = 0. \tag{9}$$

Граничные условия при $x = 0$:

$$u_g(0,r,t) = \frac{\partial v_g(0,r,t)}{\partial x} = \frac{\partial T_g(0,r,t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho_g(0,r,t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho_f(0,r,t)}{\partial x} = \frac{\partial \rho_{\mathrm{ox}}(0,r,t)}{\partial x} = 0. \tag{10}$$

На стенке канала при $r = R$ задаются условия непротекания и адиабатики. При открытом справа канале при $x = L$ задаются атмосферное давление и температура. При закрытом справа канале при $x = L$ задаются условия, аналогичные (9).

В уравнениях (1)–(10) приняты следующие обозначения:

$$W_{\mathrm{ch}} = k_0 \rho_{\mathrm{ox}} \rho_f \exp(-E_a/(R_u T_g))$$

— скорость изменения массы компонентов смеси за счёт химического реагирования, α_{ch} — коэффициент расхода кислорода в реакции с пропаном,

$$E_g = \rho_g\bigl(p_g/(\rho_g(\gamma-1)) + 0.5\bigl(u_g^2 + v_g^2\bigr)\bigr)$$

— полная энергия газа, λ_g — коэффициент теплопроводности газа, ρ_g — плотность газа, ρ_{ox} — парциальная плотность кислорода в газе, ρ_f — парциальная плотность пропана в газе, D_g — коэффициент диффузии газа, E_a — энергия активации, k_0 — константа скорости химической реакции, v — скорость вдоль радиального направления, Q_{ch} — тепловой эффект реакции, R_u — универсальная газовая постоянная, r — координата вдоль радиального направления, T — температура, p — давление, t — время, u — скорость вдоль осевого направления, x — координата вдоль осевого направления. Индексом b отмечены начальные значения параметров состояния, g — параметры газа, ox – кислород, f — горючий газ (пропан).

Связь между относительной массовой концентрацией горючего компонента a_f и окислителя a_{ox} в газе и объёмным содержанием горючего компонента a_{vol} в смеси определяется из соотношений

$$a_{\mathrm{ox}} = \frac{0.23(100 - a_{\mathrm{vol}})\mu_{\mathrm{air}}}{(100 - a_{\mathrm{vol}})\mu_{\mathrm{air}} + a_{\mathrm{vol}}\mu_f}, \quad a_f = \frac{a_{\mathrm{vol}}\mu_f}{(100 - a_{\mathrm{vol}})\mu_{\mathrm{air}} + a_{\mathrm{vol}}\mu_f}.$$

Здесь a_{vol} — объёмная процентная концентрация пропана в смеси, μ_f — молярная масса пропана, μ_{air} — молярная масса воздуха.

Коэффициенты теплопроводности и диффузии газа (с учётом, что число Льюиса равно единице) определяются выражениями: $\lambda_g = \lambda_0 (T_g/T_{\ 0})^{2/3}$, $D_g = \lambda_g/(c_g \rho_g)$, где λ_0 — значение коэффициента теплопроводности при $T_g = 300$ К. Газовая постоянная R_g рассчитывалась в зависимости от состава смеси из соотношения $R_g = R_u/(a_{\mathrm{ox}}\mu_{\mathrm{ox}} + a_f \mu_f + (1 - a_{\mathrm{ox}} - a_f)\mu_{\mathrm{N2}})$, где μ_{N2}, μ_{ox} — молярная масса азота и окислителя. Коэффициент избытка горючего определялся из выражения $\varphi = \dfrac{\rho_{f,b}/\rho_{\mathrm{ox},b}}{\rho_{f,\mathrm{st}}/\rho_{\mathrm{ox,st}}}$.

Задача (1)–(10) решалась численно с использованием метода Ван-Леера [9]. Слагаемые в правых частях уравнений, описывающие процессы переноса за счёт теплопроводности и диффузии, аппроксимировались явно на трехточечном шаблоне. Шаг по пространству вдоль осевого и радиального направлений задавался постоянным и равным $\Delta h_x = \Delta h_r = 10^{-4}$ м. Величина шага по пространству выбиралась таким образом, чтобы схемная диффузия была много меньше диффузии в газе [7]. Шаг по времени определялся из условия устойчивости [10]:

$$\frac{1}{\Delta t} < \frac{1}{\Delta t_x} + \frac{1}{\Delta t_r}, \quad \Delta t_x = \frac{\Delta h_x}{\max\{|u_g| + c_g\}}, \quad \Delta t_r = \frac{\Delta h_r}{\max\{|v_g| + c_g\}},$$

где c_g — скорость звука в газе.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ И ОБСУЖДЕНИЯ

Расчёты проводились при следующих значениях размерных величин [6, 7]:

$$Q_{ch} = 42.45\,\text{МДж/кг}, \quad E_a = 171.16\,\text{кДж/моль}, \quad R_u = 8.31\,\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)},$$
$$r_0 = 2\cdot 10^{-3}\,\text{м}, \quad T_h = 1500\,\text{К}, \quad T_b = 300\,\text{К}, \quad p_{gb} = 0.1\,\text{МПа}, \quad \lambda_0 = 0.025\,\text{Вт/(м}\cdot\text{К)},$$
$$\mu_g = \left(\rho^0_{\mathrm{air}} a_{\mathrm{air},b} + \rho^0_f a_{f,b}\right)/\left(\rho^0_{\mathrm{air}} a_{\mathrm{air},b}/\mu_{\mathrm{air}} + \rho^0_f a_{f,b}/\mu_f\right),$$
$$\alpha_{\mathrm{ch}} = 3.64, \quad \mu_f = 44\cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}, \quad \rho^0_{\mathrm{air}} = 1.2\,\text{кг/м}^3,$$
$$\mu_{\mathrm{air}} = 29.04\cdot 10^{-3}\,\text{кг/моль}, \quad \rho^0_f = 1.83\,\text{кг/м}^3, \quad k_0 = 3.9\cdot 10^{11}\,\text{м}^3/(\text{кг}\cdot\text{с}).$$

Согласно работам [4, 11] для пропано-воздушного пламени могут наблюдаться режимы тюльпанообразного пламени при распространении пламени в закрытом канале. Для исследования была взята пропано-воздушная смесь с содержанием пропана 3–4 процента по объёму, что соответствует коэффициенту избытка горючего $\phi = 0.77 \div 1$. Режимы тюльпанообразного пламени в [4] наблюдались для смесей стехиометрического состава, $\phi = 1$.

На рис. 1 представлена динамика распространения волны горения пропано-воздушной смеси в закрытом канале радиусом 2.5 см, протяжённостью 20 см при горении стехиометрической пропано-воздушной смеси. На рисунке видны стадии развития горения, соответствующие описанию [4]. Вначале развивается пламя почти полусферической формы, когда пламя ещё не дошло до боковых стенок канала. Затем формируется вытянутый вдоль оси канала фронт пламени. Наблюдается быстрый рост видимой скорости пламени (моменты времени 1.1 и 1.4 мс). Далее возникает удлинённый фронт пламя с «юбкой», касающейся боковых стенок (момент времени 1.4 мс). На следующем этапе развивается форма пламени в виде «тюльпана». При этом последующая эволюция формы «тюльпана» сопровождалось быстрым догоранием языка свежей смеси на оси канала.

Для открытого канала характер перемещения фронта горения меняется. Отсутствуют отражённые волны давления, поджатия газа вблизи правой границы не происходит. Видимая скорость распространения пламени увеличивается. Распределения температуры газа в канале представлены на рис. 2.

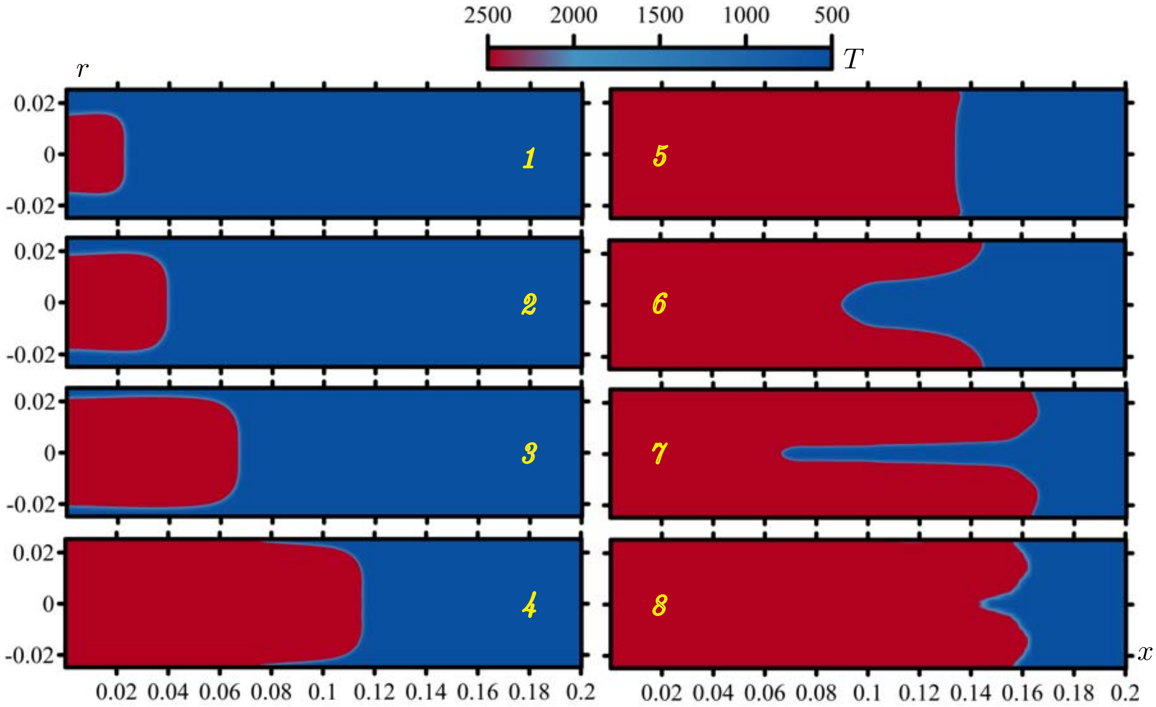


Рис. 1. Распределения температуры газа в закрытом канале при $\phi = 1$ в моменты времени: 0.5 мс (*1*), 0.8 мс (*2*), 1.1 мс (*3*), 1.4 мс (*4*), 1.7 мс (*5*), 2 мс (*6*), 2.3 мс (*7*), 2.4 мс (*8*)

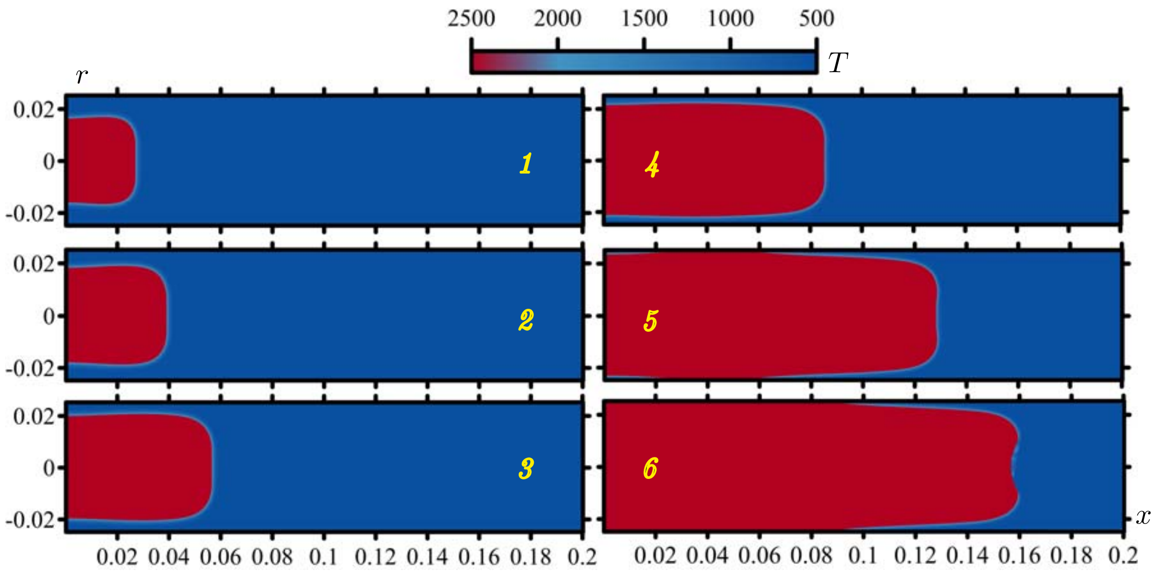


Рис. 2. Распределения температуры газа в открытом канале при $\phi = 1$ в моменты времени: 0.6 мс (*1*), 0.8 мс (*2*), 1.1 мс (*3*), 1.2 мс (*4*), 1.4 мс (*5*), 1.6 мс (*6*)

Из сравнения рис. 1 и рис. 2 видно, что видимая скорость распространения пламени в открытом канале выше скорости в закрытом канале. Кроме того, в открытом канале тюльпанообразное пламя не формируется. При приближении пламени к открытому торцу имеет место ускорение пламени.

Изменение радиуса канала также меняет характер распространения пламени. На рис. 3 представлены поля температуры газа при горении стехиометрической пропано-воздушной смеси в открытом справа канале радиусом 1.5 см. Из сравнения рис. 2 и 3, определяющих горение стехиометрической смеси в открытом узком канале различного радиуса, можно видеть, что сужение канала приводит к формированию тюльпанообразного пламени.

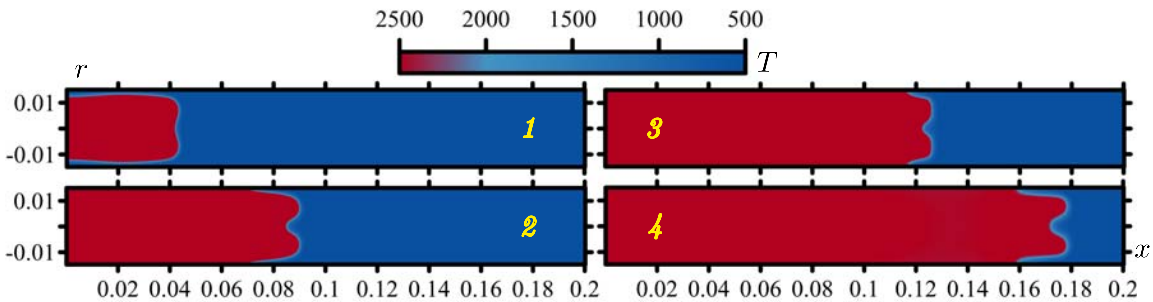


Рис. 3. Распределения температуры газа в открытом канале при $\phi = 1$ в моменты времени: 0.5 мс (*1*), 0.75 мс (*2*), 1 мс (*3*), 1.25 мс (*4*)

В закрытом узком канале (рис. 4) согласно результатам расчёта формировалась сложная структура пламени, в которой неоднородность температуры на фронте горения была выражена достаточно существенно. Качественно формирование «тюльпана» соответствовало результатам [4, 11]. Отметим, что фронт пламени перемещается по каналу с пульсирующей скоростью. Пульсации скорости объясняются тепловым расширением газа вдоль оси канала и действием отражённых от стенок канала волн давления.

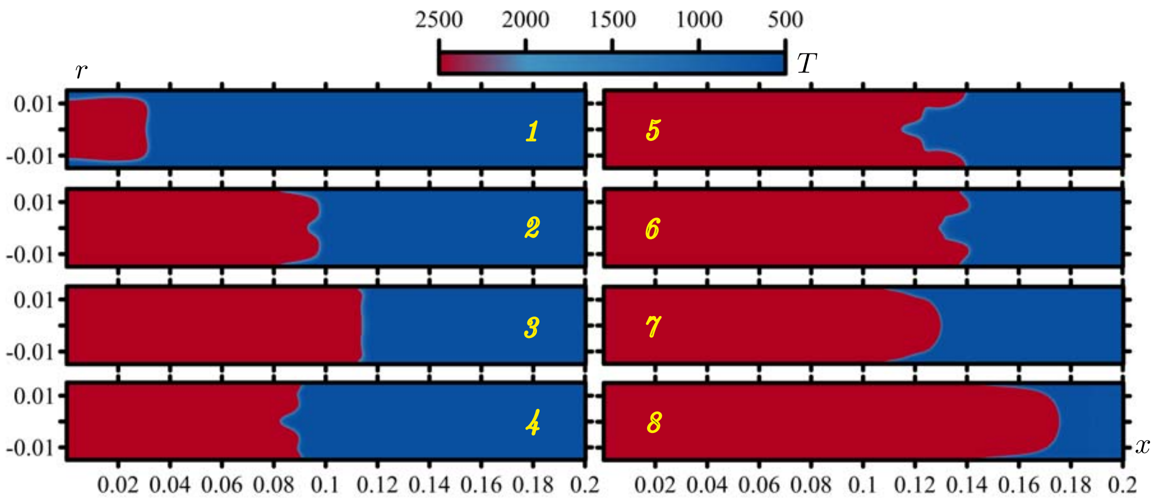


Рис. 4. Распределения температуры газа в закрытом канале при $\phi = 1$ в моменты времени: 0.4 мс (*1*), 0.8 мс (*2*), 1.2 мс (*3*), 1.4 мс (*4*), 1.6 мс (*5*), 1.8 мс (*6*), 2 мс (*7*), 2.2 мс (*8*)

Снижение доли горючего в газе приводит к уменьшению скорости распространения пламени. На рис. 5 представлено распределение температуры газа при горении смеси с коэффициентом избытка горючего 0.78 в закрытом канале радиусом 0.015 м, протяжённостью 0.3 м. В случае горения обеднённой пропано-воздушной смеси наблюдается неоднородность формы пламени вдоль радиуса на начальном этапе развития горения (2–8 мс). С течением времени фронт пламени выравнивается.

Можно заметить, что скорость распространения пламени на рис. 5 по мере продвижения фронта горения стремится к стационарному значению. Для коротких каналов пламя не успевало выйти на стационарный режим распространения (рис. 1, 4). В протяжённых каналах существует участок близи правого торца, где скорость пламени стремится к установившемуся значению.

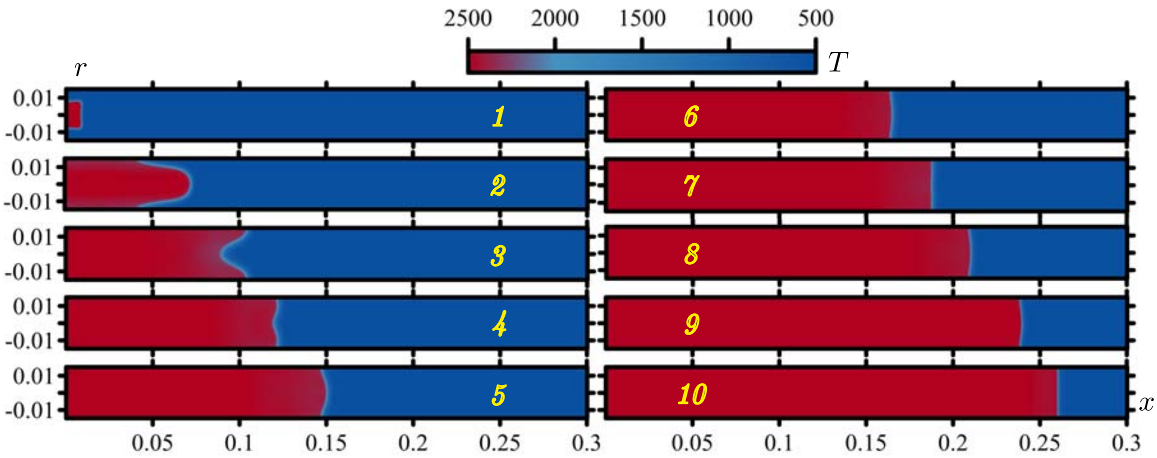


Рис. 5. Распределения температуры газа в закрытом канале при $\phi = 0.78$ в моменты времени: 0 мс (*1*), 2 мс (*2*), 4 мс (*3*), 6 мс (*4*), 8 мс (*5*), 10 мс (*6*), 12 мс (*7*), 14 мс (*8*), 16 мс (*9*), 18 мс (*10*)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено численное исследование закономерностей распространения пламени пропано-воздушной смеси в узком цилиндрическом канале. Показано формирование тюльпанообразного пламени при горении смесей с составом, близким к стехиометрическому. Результаты численного исследования качественно соответствуют данным эксперимента: формирование тюльпанообразного пламени возможно для смесей с составом, близким к стехиометрическому [4]. Стадии формирования пламени соответствуют наблюдениям из эксперимента: сперва реализуется расширяющееся в сторону боковой стенки пламя, далее пламя вытягивается вдоль оси канала, после формируется пламя с «юбкой», наконец неустойчивость приводит к формированию тюльпанообразного пламени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nilsson E.J.K, van Sprang A., Larfeldt J., Konnov A.A.* Effect of natural gas composition on the laminar burning velocities at elevated temperatures // Fuel. 2019. V. 253. P. 904–909.
2. *Li Y., Zhou C.-W., Somers K.P., et al.* The oxidation of 2-butene: a high pressure ignition delay, kinetic modeling study and reactivity comparison with isobutene and 1-butene // Proc. Combustion Institute. 2017. V. 36. P. 403–411.
3. *Konnov A.A.* Implementation of the NCN pathway of prompt-NO formation in the detailed reaction mechanism // Combustion and Flame. 2009. V. 156. P. 2093–2105.
4. *Shen X., He X., Sun J.* A comparative study on premixed hydrogen–air and propane–air flame propagations with tulip distortion in a closed duct // Fuel. 2015. V. 161. P. 248–253.
5. *Льюис Б., Эльбе Г.* Горение, пламя и взрывы в газах. М.: Мир, 1968.
6. *Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Krainov D.A.* Numerical investigation on burning rate of propane-air mixture // IOP Conf. Ser. Materials Sci. Engrg. 2019. V. 696. Article 012011.
7. *Моисеева К.М., Крайнов А.Ю.* Искровое зажигание горючих газов и газовзвесей. Томск: изд. STT, 2020.
8. *Щетинков Е.С.* Физика горения газов. М.: Наука, 1965.
9. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. Second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32, N 1. P. 101–136.
10. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

11. *Clanet C., Searby G.* On the «tulip flame» phenomenon // Combustion and Flame. 1996. V. 105. P. 225–238.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 536.46

REGULARITIES OF PROPANE-AIR MIXTURE FLAME PROPAGATION IN A CYLINDRICAL CHANNEL

© 2023 **K. M. Moiseeva[a], A. Yu. Krainov[b]**

Tomsk State University,
ul. Lenina 36, Tomsk 634050, Russia

E-mails: [a]MoiseevaKM@mail.tsu.ru, [b]akrainov@ftf.tsu.ru

Received 01.08.2022, revised 01.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The paper presents the results of a study of the combustion of a propane-air mixture in a cylindrical channel. The relevance of the study is related to the need to study the processes of flame propagation in gas mixtures in closed volumes. The problem is solved numerically for a two-dimensional axisymmetric formulation. The solution method is based on the Van Leer method for calculating mass, momentum, and energy fluxes on the faces of computational cells. The formation of a tulip-shaped flame is shown. It is shown that the results of the numerical study correspond to the experimental data - the formation of a tulip-shaped flame is possible for mixtures with a composition close to stoichiometric. The stages of flame formation correspond to the descriptions from the literature: a flame expanding towards the side wall, an axially elongated flame, a skirted flame, a tulip-shaped flame.

Keywords: combustion, mathematical modeling, gas dynamics, propane.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.110

REFERENCES

1. Nilsson E.J.K, van Sprang A., Larfeldt J., Konnov A.A. Effect of natural gas composition on the laminar burning velocities at elevated temperatures. *Fuel*, 2019, Vol. 253, pp. 904–909.
2. Li Y., Zhou C.-W., Somers K.P., et al. The oxidation of 2-butene: a high pressure ignition delay, kinetic modeling study and reactivity comparison with isobutene and 1-butene. *Proc. Combustion Institute*, 2017, Vol. 36, pp. 403–411.
3. Konnov A.A. Implementation of the NCN pathway of prompt-NO formation in the detailed reaction mechanism. *Combustion and Flame*, 2009, Vol. 156, pp. 2093–2105.
4. Shen X., He X., Sun J. A comparative study on premixed hydrogen–air and propane–air flame propagations with tulip distortion in a closed duct. *Fuel*, 2015, Vol. 161, pp. 248–253.
5. Lewis B., Von Elbe G. Gorenie, plamya i vzryvy v gazakh [Combustion, flames and explosions of gases]. Moscow: Mir, 1968 (in Russian).
6. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu., Krainov D.A. Numerical investigation on burning rate of propane-air mixture. *IOP Conf. Ser. Materials Sci. Engrg.*, 2019, Vol. 696, article 012011.
7. Moiseeva K.M., Krainov A.Yu. Iskrovoe zazhiganie goryuchikh gazov i gazovzvesei [Spark ignition of combustible gases and gas suspensions]. Tomsk: STT Press, 2020 (in Russian).
8. E. S. Shchetinkov Fizika goreniya gazov [The physics of the combustion of gases]. Moscow: Nauka, 1965 (in Russian).
9. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. Second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 1979, Vol. 32, No. 1, pp. 101–136.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

10. Godunov S.K. , Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., et al. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki [Numerical solution of multidimensional gas-dynamics problems]. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).

11. Clanet C., Searby G. On the «tulip flame» phenomenon. *Combustion and Flame*, 1996, Vol. 105, pp. 225–238.

УДК 519.634

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СХЛОПЫВАНИИ ПРИСОЕДИНЁННОЙ КАВЕРНЫ ПОСЛЕ КАВИТАЦИОННОГО УДАРА КРУГЛОГО ДИСКА

© 2023 М. В. Норкин[a]

Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук,
ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону 344090, Россия

E-mail: norkinmi@mail.ru

Поступила в редакцию 10.11.2021 г.; после доработки 08.12.2021 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Рассматривается осесимметричная задача о вертикальном отрывном ударе круглого диска, герметично закрывающего дно бассейна, имеющего форму слоя. После удара диск движется вдоль вектора силы тяжести (вне слоя) с постоянной скоростью. При этом предполагается, что диск скользит вдоль твёрдых цилиндрических стенок как поршень. Особенностью этой задачи является то, что после удара образуется присоединённая каверна и появляется новая внутренняя свободная граница жидкости. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения диска, которые соответствуют небольшим числам Фруда. В главном асимптотическом приближении формулируется задача с односторонними ограничениями, на основе которой определяется динамика линии отрыва и описывается процесс схлопывания каверны с учётом подъема внутренней свободной границы жидкости. При помощи метода разделения переменных в цилиндрических координатах и техники парных интегральных уравнений данная задача сводится к связанной нелинейной проблеме, включающей в себя трансцендентное уравнение для определения радиуса круговой линии отрыва и интегральное уравнение Фредгольма второго рода с гладким ядром. Показывается хорошее согласование аналитических результатов, полученных для большой толщины слоя, с прямыми численными расчётами.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, круглый диск, отрывной удар, аналитическое решение, динамика линии отрыва, схлопывание каверны, число Фруда, число кавитации.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.111

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование нестационарных кавитационных течений в идеальной несжимаемой жидкости приводит к динамическим смешанным задачам теории потенциала со свободными границами. При изучении кавитации, вызванной ударом плавающего тела, важную роль играет классическая модель удара с отрывом [1]. В момент удара положение системы не успевает измениться и образующаяся на поверхности тела зона отрыва характеризуется тем, что импульсивное давление в ней равняется нулю. В следующие после удара моменты времени внутренняя свободная граница отходит от поверхности тела и образуется присоединённая каверна, заполненная парами жидкости или газа (или газом при искусственной кавитации). Динамические задачи удара такого плана исследовались ранее в плоской постановке с помощью асимптотического анализа на малых временах (см. [2], где также приводится необходимая библиография). Такой подход позволяет определить форму каверны на некотором начальном этапе движения цилиндра. Дальнейшая динамика каверны изучалась только при малых скоростях движения цилиндра, которые соответствуют небольшим числам Фруда [3]. При этом учитывалась возможность искусственного поддува воздуха в каверну со стороны тела (искусственная кавитация). Интерес к малым скоростям обьясняется возможностью получить полное решение проблемы образования и схлопывания присоединённой каверны после кавитационного удара. С математической точки зрения данная проблема сводится к решению смешанной краевой задачи теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела. К настоящему времени разработаны эффективные численные методы решения таких задач. Однако при этом наблюдается большой дефицит в точных аналитических решениях. В динамической задаче о движении твёрдого тела в жидкости после кавитационного удара такие решения практически отсутствуют. Таким образом, важным является построение эффективного тестового примера, с помощью которого можно было наглядно разьяснить все тонкие моменты, возникающие при исследовании таких задач. К ним относятся вопросы, связанные с определением неизвестной априори линии отрыва, с формулировкой граничных условий типа неравенств и их равносильности условию Кутты — Жуковского, с работой специального итерационного метода, применяемого для решения задач со свободными границами, а также с нахождением формы внутренней свободной границы жидкости. Отметим, что при определении неизвестной априори зоны отрыва частиц жидкости и знака давления на смоченной поверхности тела весьма полезным оказывается вариационный принцип Огазо [4]. Такой подход стал активно использоваться в последнее время для решения плоских задач гидродинамического удара в классической постановке (см. [5], где также даны ссылки на предыдущие работы). Отметим, что интерес к этому принципу в предлагаемой статье вызван, в первую очередь, осесимметричностью и динамикой рассматриваемого процесса. Все эти вопросы обсуждаются в настоящей статье для специальной задачи такого плана, имеющей аналитическое решение. В центре внимания работы вертикальный и осесимметричный удар круглого диска, который герметично закрывает дно бассейна, имеющего форму слоя. Предполагается, что после удара диск движется вдоль вектора силы тяжести (вне слоя) с постоянной скоростью. В начальный момент времени (в момент, непосредственно следующий после удара) жидкость отрывается от диска сразу по всей его поверхности. После удара за диском образуется присоединённая каверна и вместе с ней появляется монотонно расширяющаяся кольцевая область контакта вблизи края диска (последнее равносильно монотонному уменьшению зоны отрыва). Требуется изучить процесс схлопывания каверны при медленных движениях диска после удара. Поставленная задача вначале сводится к смешанной краевой задаче теории потенциала с односторонними ограничениями на поверхности тела, а затем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, содержащему в качестве параметра неизвестный априори радиус круговой линии отрыва. В случае большой толщины слоя решение интегрального уравнения представляется в простой аналитической форме. В результате для определения искомого радиуса возникает трансцендентное уравнение, которое эффективно решается методом секущих. Отмечается хорошее согласование аналитических результатов с прямыми численными расчётами.

Обьясним, какое место занимает данная работа среди работ, близких к её тематике. Современные исследования по проблеме резко нестационарного взаимодействия твердых тел с жидкостью (удар, разгон, торможение) осуществляются по следующим основным направлениям. Во-первых, это задачи генерации волн движущимся в жидкости телом. Последние работы в этом направлении связаны с задачами разгона (движения тела в жидкости из состояния покоя с постоянным ускорением). Результаты исследований в этой области отражены в [6]. Как правило, задачи, связанные с генерацией волн, решаются без учета явления кавитации. Во-вторых, отметим задачи проникания твердых тел в жидкость с учетом явления отрыва частиц жидкости от их поверхностей. Подробный обзор работ по этой тематике дан в [7]. Третье направление связано с динамическими кавитационными задачами удара твердых тел, плавающих на поверхности жидкости или полностью в неё погруженных. Исследования этих задач были начаты в работе [8] и продолжены в работах автора (ссылки на предыдущие работы даны в [2, 3]). Настоящая работа является развитием идей предыдущих работ этого направления.

В ней впервые строится аналитическое решение динамической кавитационной задачи удара, которое является важным допонением к предыдущим численно-аналитическим исследованиям. Построенное аналитическое решение позволяет лучше понять процесс кавитации, который происходит после удара при малых числах Фруда. При больших числах Фруда динамическая кавитационная задача удара остается малоизученной и поэтому представляет интерес для дальнейших исследований.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается слой идеальной несжимаемой тяжёлой жидкости, в основание которого герметично вставлен круглый диск. После удара диск движется в вертикальном направлении (вне слоя) с постоянной скоростью. Предполагается, что образующаяся за диском область ограничена с боков твёрдыми цилиндрическими стенками (можно считать, что диск скользит вдоль стенок как поршень). Особенностью этой задачи является то, что в результате удара происходит отрыв частиц жидкости от твёрдой поверхности и образование присоединённой каверны за телом. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых скоростях движения диска, которые соответствуют небольшим числам Фруда. Существенно отметить, что первоначальная зона отрыва, которая определяется на основе классической модели удара [1], совпадает со всей поверхностью диска. Вследствие этого начальные условия в рассматриваемой динамической кавитационной задаче будут нулевыми. После удара вблизи края диска образуется монотонно расширяющаяся кольцевая область контакта, которая в момент схлопывания каверны совпадает со всей поверхностью диска. Такая модель схлопывания оправдывается при малом возмущении внутренней свободной границы жидкости и не очень большом давлении в каверне (порядка атмосферного). Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, связанной с диском (рис. 1), имеет вид

$$\Delta\varphi = 0, \quad R \in \Omega(t), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -1, \quad z = 0, \quad c(\varepsilon\tau) < r < 1, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 0.5\varepsilon^2(\nabla\varphi)^2 + z - \varepsilon^2\tau - H - 0.5\chi = 0, \quad R \in S_1(t), \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 1 = \frac{\partial\zeta}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial\zeta}{\partial\tau}, \quad R \in S_1(t), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \varepsilon^2\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 0.5\varepsilon^2(\nabla\varphi)^2 + \psi = 0, \quad R \in S_2(t), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \varepsilon^{-2}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \quad R \in S_2(t), \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0, \quad r = 1, \quad 0 < z < \varepsilon^2\tau, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad z = \varepsilon^2\tau, \quad r > 1, \tag{1.8}$$

$$\nabla\varphi \to 0, \quad r \to \infty, \tag{1.9}$$

$$\varphi(r, z, 0) = 0, \quad \zeta(r, 0) = 0, \quad \psi(r, 0) = 0. \tag{1.10}$$

В поставленной задаче используется растянутое время τ, связанное с безразмерным временем t равенством $\tau = \varepsilon^{-1}t$. Функции φ, ζ, ψ выражаются через потенциал скоростей Φ, а также возмущения внутренней и внешней свободных границ жидкости η и ξ по формулам

$$\varphi(r, z, \tau) = \varepsilon^{-1}\Phi(r, z, \varepsilon\tau), \quad \zeta(r, \tau) = \eta(r, \varepsilon\tau), \quad \psi(r, \tau) = \xi(r, \varepsilon\tau).$$

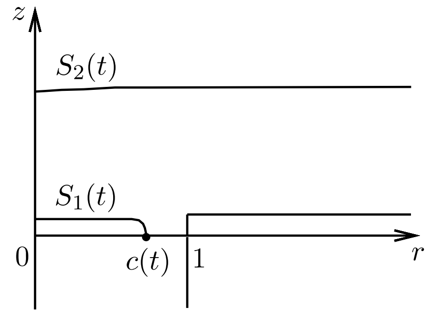


Рис. 1. Схема течения жидкости в меридиональной полуплоскости в момент времени t

Модель (1.1)–(1.10) содержит следующие характерные параметры:

$$\varepsilon = \mathrm{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2\frac{p_a - p_c}{\rho g a},$$

где Fr — число Фруда; χ — число кавитации (безразмерная разность давлений на внешней свободной поверхности и в каверне); p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность жидкости; v_0 — скорость диска, a — его радиус.

Безразмерные переменные вводятся по формулам

$$t' = \frac{a}{v}t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad z' = az, \quad \Phi' = av\Phi, \quad p' = \rho v^2 p,$$

где штрихами помечаются размерные величины, а характерная скорость $v = \sqrt{ga}$.

Связь неподвижных координат X, Y, Z с подвижными x, y, z устанавливается при помощи соотношений $X = x$, $Y = y$, $Z = z - v_0 t$. Предполагается, что ось z направлена против вектора силы тяжести, начало координат находится в центре диска.

В работе также применяются следующие обозначения: $\Omega(t)$ — область течения жидкости; $S_1(t)$ — внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ — внешняя свободная поверхность жидкости, которая до начала процесса была горизонтальной; $c(t)$ — радиус круговой линии отрыва, отделяющей в момент времени t область безотрывного обтекания от зоны отрыва; H — толщина невозмущённого слоя жидкости; R — радиус-вектор с координатами (r, z), где r, z — цилиндрические координаты.

На линии отрыва ставится условие Кутты — Жуковского, означающее, что скорость жидкости на ней должна быть конечной.

2. ГЛАВНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Так как в самом общем виде задача (1.1)–(1.10) является достаточно сложной, то вначале необходимо провести упрощение данных уравнений. Основные трудности, связанные с решением этой задачи, заключаются в том, что на неизвестных заранее свободных границах формулируются нелинейные краевые условия. Кроме этого неизвестной оказывается линия отрыва, отделяющая на поверхности тела область безотрывного обтекания от зоны отрыва. В настоящей работе упрощение проводится в предположении, что параметр ε является малой величиной. Решение поставленной задачи будем искать в виде следующих асимптотических разложений:

$$\varphi(r, z, \tau) = \varphi_1(r, z, \tau) + \ldots, \quad c(t) = c(\varepsilon\tau) = c_0(\tau) + \ldots, \tag{2.1}$$

$$\zeta(r, \tau) = \varepsilon^2\zeta_1(r, \tau) + \ldots, \quad \psi(r, \tau) = \varepsilon^2\psi_1(r, \tau) + \ldots, \tag{2.2}$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по ε.

Подставляя разложения (2.1)–(2.2) в уравнение и граничные условия задачи (1.1)–(1.10), осуществляя с помощью формулы Тейлора перенос краевых условий с возмущённых участков границы области $\Omega(t)$ на первоначально невозмущённый уровень, а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, придём в главном приближении к смешанной краевой задаче теории потенциала в области $\Omega(0)$. В предположении, что линия отрыва монотонно стягивается в точку, проинтегрируем динамическое условие в зоне отрыва по времени от 0 до τ при фиксированном $r \in (0, c_0(\tau))$. Интегрируя также динамическое условие на внешней свободной границе, придём к следующей задаче:

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad R \in \Omega(0), \tag{2.3}$$

$$\varphi_1 = (0.5\chi + H)\tau, \quad z = 0, \quad 0 < r < c_0(\tau), \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -1, \quad z = 0, \quad c_0(\tau) < r < 1, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad 1 < r < \infty, \tag{2.6}$$

$$\varphi_1 = 0, \quad z = H; \quad \nabla\varphi_1 \to 0, \quad r \to \infty. \tag{2.7}$$

Начальное условие для потенциала скорости будет выполнено, так как при $\tau = 0$ получается задача для уравнения Лапласа с нулевыми граничными условиями ($c_0(0) = 1$). В силу неизвестности $c_0(\tau)$ задача (2.3)–(2.7) является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Радиус круговой линии отрыва в каждый момент времени определяется из условия Кутты — Жуковского, которое оказывается равносильным системе неравенств

$$(0.5\chi + H)\tau - \varphi_1 \geqslant 0, \quad z = 0, \quad c_0(\tau) < r < 1, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \geqslant -1, \quad z = 0, \quad 0 < r < c_0(\tau). \tag{2.9}$$

Отметим, что условие Кутты — Жуковского удобно использовать при построении аналитического решения задачи, а систему неравенств (2.8)–(2.9) при решении задачи прямыми численными методами.

Неравенство (2.8) является следствием динамического условия $p \geqslant p_c$, говорящего о том, что давление в зоне контакта не может опускаться ниже давления в каверне (неравенство для давления интегрируется по времени от 0 до τ). Кинематическое условие (2.9) приближённо означает, что жидкие частицы не могут входить внутрь твёрдого тела.

Существенно отметить, что по своей структуре задача (2.3)–(2.9) совпадает с классической задачей об ударе с отрывом, для которой доказана теорема существования и единственности решения [9].

3. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Решение задачи (2.3)–(2.7) с дополнительным условием Кутты — Жуковского на круговой линии отрыва можно разделить на два основных этапа. Вначале строится решение линейной смешанной краевой задачи теории потенциала для слоя при любом фиксированном $c = c_0(\tau)$ ($0 < c < 1$). После этого неизвестная априори величина c находится из условия регулярности решения данной задачи на линии раздела краевых условий. Для решения первой задачи применяется метод парных интегральных уравнений [10–12]. Гармоническая функция φ_1, удовлетворяющая граничному условию при $z = H$ и условию на бесконечности, представляется в виде

$$\varphi_1(r, z, \tau) = \int\limits_0^\infty A(\lambda)\frac{\operatorname{sh}\lambda(H - z)}{\operatorname{ch}\lambda H} J_0(\lambda r)\, d\lambda,$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода, а неизвестная функция $A(\lambda)$ определяется из граничных условий (2.4)–(2.6). В результате возникает система парных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty A(\lambda)\,\mathrm{th}\,\lambda H J_0(\lambda r)\,d\lambda = (0.5\chi + H)\tau, \quad 0 < r < c,$$

$$\int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_0(\lambda r)\,d\lambda = f_0(r), \quad f_0(r) = 1, \quad c < r < 1; \quad f_0(r) = 0, \quad 1 < r < \infty.$$

Традиционными методами, с помощью разрывных интегралов Вебера — Шафхейтлина [10–13], показывается, что второму из парных уравнений можно удовлетворить, если представить функцию $A(\lambda)$ в виде интеграла:

$$A(\lambda) = \int_0^1 f(s)\cos\lambda s\,ds, \quad f(s) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-s^2}, \quad c \leqslant s \leqslant 1, \tag{3.1}$$

где функция $f(s)$ предполагается непрерывной при $0 \leqslant s \leqslant c$.

Подставляя далее этот интеграл в первое из парных уравнений, придём для определения функции $f(s)$ при $0 \leqslant s \leqslant c$ к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с гладким ядром ($0 \leqslant x \leqslant c$):

$$f(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^c K(x,s)f(s)\,ds = \frac{2}{\pi}(0.5\chi + H)\tau + \frac{2}{\pi^2}\int_c^1 K(x,s)\sqrt{1-s^2}\,ds, \tag{3.2}$$

$$K(x,s) = K(x-s) + K(x+s); \quad K(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda H}}{\mathrm{ch}\,\lambda H}\cos\lambda t\,d\lambda.$$

Отметим, что интегральное уравнение с похожим по структуре ядром возникает в классической задаче о безотрывном ударе круглого диска [14]. Однако существенное отличие состоит в том, что величина c, входящая в уравнение (3.2), априори неизвестна и подлежит определению вместе с решением данного уравнения. В результате возникает связанная нелинейная задача, которую предлагается решать асимптотически, при больших H. Заметим, что интегральный оператор в (3.2) будет сжимающим при достаточно больших H в соответствующем пространстве непрерывных функций. Это даёт возможность применить для решения интегрального уравнения метод последовательных приближений. Раскладывая полученные приближения в ряды по степеням H^{-1} и убеждаясь, что каждое следующее приближение добавляет в асимптотику функции $f(x)$ члены более высокого порядка малости, чем предыдущие, придём к асимптотике решения интегрального уравнения (3.2). Отметим, что зависимость величины c от H, в силу её ограниченности, можно не конкретизировать на данном этапе построения асимптотики (порядок малости остаточного члена не уменьшится). Для эффективной реализации указанного алгоритма необходимо вначале построить асимптотику ядра $K(x,s)$. С этой целью в интеграле $K(t)$ производится замена переменной ($\lambda H \to \lambda$), после которой функция $\cos(H^{-1}\lambda t)$ раскладывается по формуле Тейлора с последующим умножением на экспоненцально убывающую функцию и почленным интегрированием по t от 0 до ∞. Коэффициенты полученного разложения выражаются через произведение $\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$, $\alpha = 3, 5, 7, \ldots$, где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана. На основании полученного представления интеграла $K(t)$ выписывается асимптотика ядра $K(t,s)$, а после этого, по описанному выше алгоритму, находится асимптотика решения интегрального уравнения (3.2). Пренебрегая в ней членами порядка H^{-3} и выше, получим следующее приближённое равенство ($0 \leqslant x \leqslant c$):

$$
\begin{gathered}
f(x) = \frac{2}{\pi}(0.5\chi + H)\tau + \frac{4\ln 2}{\pi^2}\tau c + \frac{2\ln 2}{\pi^2} g H^{-1} + \left[\frac{4(\ln 2)^2}{\pi^3} cg - \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2}(x^2 + \frac{1}{3}c^2)\tau c\right] H^{-2}, \\
g = \left(\chi + \frac{4\ln 2}{\pi} c\right)\tau c + \frac{\pi}{2} - \arcsin c - c\sqrt{1-c^2}.
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

Обратим внимание на то, что в рассматриваемом приближении решение интегрального уравнения является квадратичной функцией по x, зависящей от параметра c сложным нелинейным образом.

Далее остановимся на вопросе определения величины c. Для этого найдём явное выражение для потенциала $\varphi_1(r, 0, \tau)$ при $c < r < 1$:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(r, 0, \tau) = {} & \int\limits_0^c \frac{f(s)\, ds}{\sqrt{r^2 - s^2}} + \frac{2}{\pi} \int\limits_c^r \frac{\sqrt{1-s^2}}{\sqrt{r^2-s^2}}\, ds \\
& - \frac{1}{\pi} \int\limits_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \int\limits_0^c K(t,s) f(s)\, ds - \frac{2}{\pi^2} \int\limits_0^r \frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \int\limits_c^1 K(t,s)\sqrt{1-s^2}\, ds.
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Делая во втором интеграле замену переменной $s = r\sin\varphi$, а в последних двух слагаемых производя разбиение промежутка интегрирования $[0, r]$ на два с помощью точки c и учитывая равенство (3.2), представим искомый потенциал в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(r, 0, \tau) = {} & \frac{2}{\pi}(0.5\chi + H)\tau \arcsin\frac{c}{r} + \frac{2}{\pi} \int\limits_{\arcsin(c/r)}^{\pi/2} \sqrt{1 - r^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \\
& - \frac{1}{\pi} \int\limits_c^r \frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \int\limits_0^c K(t,s) f(s)\, ds - \frac{2}{\pi^2} \int\limits_c^r \frac{dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \int\limits_c^1 K(t,s)\sqrt{1-s^2}\, ds.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

В общем случае (для произвольной c) производная функции φ_1 по r имеет при $r = c$ корневую особенность. Условие регулярности, обеспечивающее выполнение условия Куты — Жуковского, состоит в том, что коэффициент при указанной особенности должен стремиться к нулю при $r \to c + 0$. Дифференцируя равенство (3.5) по r (предварительно проведя в последних двух слагаемых интегрирование по частям), выделяя корневую особенность и используя формулу (3.2) при $x = c$, запишем искомое условие в виде

$$
f(c) - \frac{2}{\pi}\sqrt{1-c^2} = 0. \tag{3.6}
$$

Формула (3.6) представляет собой трансцендентное уравнение для определения величины c. Она позволяет по заданному τ определить радиус круговой линии отрыва $c = c_0(\tau)$ в главном приближении по ε. В дальнейшем, при численной реализации, величина $f(c)$ будет находиться с помощью приближённой формулы (3.3). Подчеркнём, что c входит в $f(c)$ и как аргумент ($x = c$), и как параметр.

Обратим внимание на то, что равенство (3.6) фактически является условием непрерывности функции $f(x)$ при $x = c$. Таким образом, условие регулярности решения краевой задачи на линии отрыва формулируется в терминах непрерывности функции $f(x)$. Такая формулировка получается благодаря представлению решения системы парных интегральных уравнений в форме (3.1). Если интеграл в (3.1) разбить на сумму двух интегралов (по промежуткам $[0, c]$ и [c,1]), то второе слагаемое будет занулять второе из парных уравнений. Последнее полностью соответствует традиционному подходу к решению таких систем. Однако отметим, что если сразу занулить второе из парных уравнений с помощью продолжения его правой части на промежуток $[0, c]$ и разложения в интеграл Фурье — Бесселя, то, вообще говоря, получится другая форма записи условия регулярности.

Отметим, что существует другой способ определения неизвестной априори зоны отрыва частиц жидкости, который основан на применении вариационного принципа Огазо [4]. Суть этого метода состоит в следующем. Рассмотрим решение линейной смешанной краевой задачи (2.3)–(2.7) в любой фиксированной точке $M(r, z) \in \Omega(0)$ (τ тоже фиксировано). При этом радиусу круговой линии раздела краевых условий будем придавать различные значения (вместо $c_0(\tau)$ будем писать c). Таким образом возникает функция $F(c)$, которая каждому $c \in (0, 1)$ ставит в соответствие решение данной линейной задачи в фиксированной точке $M(r, z)$. Согласно вариационному принципу Огазо, истинное течение жидкости, удовлетворяющее условию Кутты — Жуковского, соответствует экстремальному значению этой функции (в более общем случае — функционалу). Заметим, что в качестве фиксированной точки M можно взять любую точку на диске в зоне контакта (обосновывается с помощью предельного перехода). Чтобы применить этот принцип, нужно в формуле (3.4) зафиксировать переменную $r > c$ и продифференцировать функцию φ_1 по параметру c. Дифференцируя также интегральное уравнение (3.2) по этому параметру и используя полученное равенство, будем иметь:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial c} = \frac{f(c) - \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - c^2}}{\sqrt{r^2 - c^2}} + G(r, c) = 0,$$

где функция $G(r, c)$ стремится к нулю при $r \to c + 0$.

Отсюда, в силу произвольности r ($c < r < 1$), сразу следует формула (3.6). Отметим, что вариационный принцип Огазо оказывается здесь более эффективным, чем первый способ нахождения радиуса круговой линии отрыва.

Далее определим радиус круговой линии отрыва с помощью системы неравенств (2.8), (2.9). Используя точное решение задачи (2.3)–(2.7) при любом фиксированном $c = c_0(\tau)$, получим явные выражения для левых частей рассматриваемых неравенств. Первое из них приводит к соотношению $f(c) - \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - c^2} \geqslant 0$, а второе — к неравенству противоположного знака $f(c) - \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - c^2} \leqslant 0$. В результате получаем точное равенство, совпадающее с (3.6). Обьясним преобразования, связанные с первым неравенством (2.8). Делая в последних двух интегралах (3.5) замену переменной $t = r \sin\psi$, а затем применяя ко всем интегралам теорему о среднем, выделим в левой части (2.8) множитель $\pi/2 - \arcsin(r/c)$. После деления обеих частей неравенства на эту положительную величину, устремим $r \to c + 0$ и используем формулу (3.2) при $x = c$. В результате придём к искомому неравенству. Преобразования, связанные с неравенством (2.9), не вызывают никаких затруднений. Таким образом, подходы, основанные на применении условия Кутты — Жуковского и системы неравенств (2.8)–(2.9), приводят к одному и тому же уравнению для определения радиуса круговой линии отрыва. Если построено решение, удовлетворяющее системе неравенств, то условие (3.6), являющееся их прямым следствием, как раз и обеспечивает выполение условия Кутты — Жуковского (зануляется коэффициент при корневой особенности для производной). Обратное соответствие устанавливается при больших H, с помощью асимптотической (3.3). Таким образом, доказывается эквивалентность двух различных подходов.

На основании кинематического уравнения (1.4) получается явное выражение для возмущения внутренней свободной границы жидкости в главном приближении по ε. Оно находится по первой формуле (2.1), где функция $\zeta_1(r, \tau)$ для большой толщины слоя представляется в виде (используется асимптотическое разложение (3.3) до членов порядка H^{-1} включительно):

$$\zeta_1(r,\tau) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\tau \arcsin\sqrt{\frac{c_0^2(s)-r^2}{1-r^2}}\,ds, \quad 0 < r < c_0(\tau). \tag{3.7}$$

Здесь величина $c_0(s)$ (при каждом фиксированном s) определяется решением трансцендентного уравнения (3.6). Отметим, что несмотря на то, что возмущение внутренней свободной границы является малой величиной, совсем простой формулы для её определения не получается. Также обратим внимание на то, что формула (3.7) эффективна везде, за исключением маленькой окрестности линии отрыва (однородное граничное условие при $r = c_0(\tau)$ не выполняется).

В заключение этого раздела обсудим вопрос о корректности полученного решения. Наряду с условием Кутты — Жуковского должно также выполняться другое важное физическое условие — положительности давления на смоченной поверхности тела. При малых скоростях и искусственной кавитации требуется даже большее: чтобы давление в зоне контакта не опускалось ниже давления в каверне. Последнее приводит к следующему неравенству в главном асимптотическом приближении по ε:

$$(0.5\chi + H) - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} \geqslant 0, \quad z = 0, \quad c_0(\tau) < r < 1.$$

Учитывая, что решение задачи (2.3)–(2.9) зависит от τ и от $c = c_0(\tau)$, получим равенство

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau}\Big|_c + \frac{\partial\varphi_1}{\partial c}\Big|_\tau c_0'(\tau),$$

в котором производные по τ и c берутся при фиксированных c и τ соответственно.

Далее воспользуемся вариационным принципом Огазо [4], на основании которого можно утверждать, что второе слагаемое в последней формуле равно нулю. При этом первое слагаемое, представляющее собой производную функции φ_1 по τ при фиксированном c, определяется на основе решения линейной задачи. В результате производная функции φ_1 по τ будет определяться решением задачи (2.3)–(2.7), где в краевом условии (2.4) следует положить $\tau = 1$, а правую часть условия (2.5) нужно занулить. Так как $c_0(\tau)$ определяется на основе решения задачи со свободной границей (2.3)–(2.9), то нахождение производной по τ сводится к решению краевой задачи с уже известной линией раздела краевых условий. Это даёт возможнось провести качественный анализ задачи и показать, что при больших H выполняется сформулированное условие для давления.

4. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Трансцендентное уравнение (3.6) может быть эффективно решено численно с помощью метода секущих. Найденные приближённые значения величины $c_0(\tau)$ сравниваются с аналогичными результатами, полученными на основе специального итерационного метода, применяемого для решения задачи (2.3)–(2.9). В этом подходе последовательно уточняется неизвестная априори зона отрыва частиц жидкости, соответствующая фиксированному τ. В качестве начального приближения выбирается круг такого маленького радиуса, для которого нарушается динамическое условие в виде неравенства вблизи линии раздела краевых условий (формула (2.8)). Точка на смоченной поверхности тела, в которой левая часть неравенства (2.8) достигает отрицательного минимума, принимается за следующее приближение к величине $c_0(\tau)$ (в силу осевой симметрии можно считать, что точка меняется вдоль фиксированного радиус-вектора). Дальше процесс повторяется. Каждый следующий шаг итерационного процесса приводит к уменьшению зоны отрицательных значений данной функции. Процесс заканчивается, когда эта зона полностью исчезает. Отметим, что линейные задачи, возникающие на каждом шаге итерационного процесса, решаются численно, с помощью метода конечных элементов, с применением пакета FreeFem++ [15]. Подробное изложение этого метода даётся в работах, посвящённых начальному этапу движения твёрдых тел в жидкости с учётом явления кавитации (см., например, [2]).

В таблице приведены численные значения величины $c_0(\tau)$, полученные двумя различными способами (c_{anal} — аналитическое решение, c_{num} — численное). Параметры задачи выбраны следующим образом: $\chi = 0$, $H = 3$. При численной реализации учитываются боковые цилиндрические стенки, которые предполагаются удалёнными от диска на расстояние, которое в 100 раз больше его радиуса. При $\tau = 0.3$ зона отрыва практически уже не видна (происходит схлопывание тонкой каверны).

Сравнение численных и аналитических результатов

τ	c_{num}	c_{anal}
0.1	0.933	0.937
0.2	0.720	0.722
0.25	0.513	0.515
0.29	0.171	0.172

На рис. 2 показана динамика круговой линии отрыва с учётом подьема внутренней свободной границы жидкости. Для наглядности расчёты выполнены при $\varepsilon = 1$. Отметим, что на основе формулы (3.7) можно получить простую оценку для поперечного размера каверны в главном асимптотическом приближении: $0 < \zeta(r, \tau) \leqslant \varepsilon^2 \tau$. Таким образом, возмущение внутренней свободной границы жидкости будет оставаться малой величиной в широком диапазоне изменения параметра ε (в рассмотренном примере это возмущение будет совсем небольшим даже при $\varepsilon = 1$). Также обратим внимание на то, что, зная $c_0(\tau)$, можно определить зависимость радиуса круговой линии отрыва от безразмерного времени t с помощью элементарного пересчёта ($t = \varepsilon\tau$, $0 < \varepsilon < 1$).

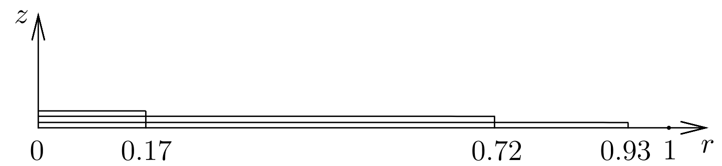


Рис. 2. Схлопывание каверны с учётом подьема внутренней свободной границы жидкости при $h = 3$; $\tau = 0.1,\ 0.2,\ 0.29$

Остановимся на определении времени схлопывания тонкой каверны τ_*, которое находится из условия $c_0(\tau_*) = 0$. Полагая в (3.6) $c = 0$ и используя (3.3), будем иметь:

$$\tau_* = (0.5\chi + H)^{-1}(1 - 0.5 \ln 2\, H^{-1}).$$

В рассмотренном выше примере время схлопывания, полученное на основании прямого численного решения задачи со свободной границей (2.3)–(2.9), принадлежит промежутку $(0.29, 0.3)$. Время схлопывания, найденное с помощью асимптотической формулы, приближённо равно 0.295. Аналогичные исследования были проведены при различных других H (с сохранением значений остальных параметров задачи). Так, например, при $H = 2$, $H = 1$ получаем соответствующие численные интервалы $(0.41, 0.42)$, $(0.67, 0.68)$ и моменты $\tau_* = 0.413, 0.653$, определяемые по приведённой выше асимптотической формуле. На основании проведённого сравнения можно сделать вывод о широком диапазоне применимости данной асимптотической формулы (даже при $H = 1$ погрешность составляет всего 4%).

Используя аналитическое решение, можно проанализировать работу специального итерационного метода и показать, что каждое следующее приближение определяется на основе решения трансцендентного уравнения. Действительно, пусть известно приближение c_n к радиусу круговой линии отрыва (в (2.3)–(2.7) вместо $c_0(\tau)$ пишем c_n). Тогда, при плавном увеличении r, $r > c_n$, левая часть неравенства (2.8) вначале убывает, достигает отрицательного минимума, а затем возрастает до положительных значений. Значение r, при котором достигается указанный минимум, как раз и соответствует следующему приближению для радиуса круговой линии отрыва. Дифференцируя формулу (3.5) по r (предварительно проведя в последних двух слагаемых интегрирование по частям), приравнивая эту производную нулю и полагая $r = c_{n+1}$, получим трансцендентное уравнение для определения следующего приближения. Если теперь n устремить к бесконечности, то в пределе получится уравнение для определения радиуса $c = c_0(\tau)$ круговой линии отрыва (формула (3.6)). Последнее обосновывается с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые проводились при определении зоны отрыва. Фактически нужно перейти к пределу в коэффициенте при главном члене асимптотики производной функции φ_1 по r (при $r \to c_n$), положив в этом коэффициенте $r = c_{n+1}$, и учесть, что c_n и c_{n+1} стремятся к одному пределу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована задача о кавитационном ударе круглого диска, герметично закрывающего дно бассейна, имеющего форму слоя. В случае медленных движений диска после удара найдено аналитическое решение задачи. Для определения радиуса круговой линии отрыва получено трансцендентное уравнение, которое решается совместно с интегральным уравнением Фредгольма второго рода. В случае большой толщины слоя решение интегрального уравнения представляется в простой аналитической форме и, таким образом, задача полностью сводится к решению трансцендентного уравнения. Обсуждаются разные подходы к определению неизвестной априори зоны отрыва частиц жидкости. Показывается, что радиус круговой линии отрыва можно определить с помощью условия Кутты — Жуковского, вариационного принципа Огазо, а также специальной системы неравенств, которые формулируются в зонах контакта и отрыва. Отмечается хорошее согласование аналитических результатов с прямыми численными расчётами. Также обсуждаются вопросы, связанные с работой специального итерационного метода, применяемого для решения задач со свободными границами, с определением формы каверны и корректностью полученного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. *Норкин М.В.* Движение прямоугольного цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 2. С. 106–118; doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.208
3. *Норкин М.В.* Динамика точек отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра // Прикл. механика и техн. физика. 2019. Т. 60, № 5. С. 19–27; doi.org/10.15372/PMTF20190503
4. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
5. *Поляков Н.В., Гоман О.Г., Катан В.А.* К вопросу об ударном взаимодействии тела и жидкости со свободной поверхностью при наличии отрыва // Докл. НАН Украины. 2016. № 8. С. 46–52; doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.046
6. *Голиков А.Е., Макаренко Н.И.* Гидродинамические нагрузки при разгоне цилиндра под свободной поверхностью // Прикл. механика и техн. физика. 2022. Т. 63, № 5. С. 89–99; DOI: 10.15372/PMTF20220509

7. *Reinhard M., Korobkin A.A., Cooker M.J.* Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration// J. Engrg. Math. 2016. V. 96, N 1. P. 155–174; doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8
8. *Norkin M., Korobkin A.* The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder// J. Engrg. Math. 2011. V. 70. P. 239-254; doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6
9. *Юдович В.И.* Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владикавказ. мат. журн. 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91; http://mi.mathnet.ru/vmj168
10. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977.
11. *Вирченко Н.А.* Парные (тройные) интегральные уравнения. Киев: Выща школа, 1989.
12. *Mandal B.N., Mandal N.* Advances in Dual Integral Equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 1999.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
14. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 4. С. 525–532.
15. *Жуков М.Ю., Ширяева Е.В.* Использование пакета конечных элеметов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2008.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.634

ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ON COLLAPSE OF AN ATTACHED CAVITY AFTER CAVITATION IMPACT OF A CIRCULAR DISK

© 2023 **M. V. Norkin**

Southern Federal University,
ul. Milchakov 8a, Rostov-on-Don 344090, Russia

E-mail: norkinmi@mail.ru

Received 10.11.2021, revised 08.12.2021, accepted 12.01.2023

Abstract. We consider the axisymmetric problem of the vertical separation impact of a circular disk that hermetically closes the bottom of a pool in the form of a layer. After the impact, the disk moves along the gravity vector (outside the layer) at a constant speed. In this case, it is assumed that the disc slides along the solid cylindrical walls like a piston. A feature of this problem is that after the impact, an attached cavity is formed and a new internal free boundary of the fluid appears. It is required to study the process of collapse of the cavity at low velocities of the disk, which correspond to small Froude numbers. In the leading asymptotic approximation, a problem with one-sided constraints is formulated, on the basis of which the dynamics of the separation line is determined and the process of collapse of the cavity is described taking into account the rise of the internal free boundary of the liquid. Using the method of separating variables in cylindrical coordinates and the technique of paired integral equations, this problem is reduced to a coupled nonlinear problem that includes a transcendental equation for determining the radius of a circular separation line and a Fredholm integral equation of the second kind with a smooth kernel. A good agreement of analytical results obtained for a large layer thickness with direct numerical calculations is shown.

Keywords: ideal incompressible fluid, round disk, separation impact, analytical solution, dynamics of the separation line, collapse of the cavity, Froude number, cavitation number.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.111

REFERENCES

1. Sedov L.I. Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki [Two-dimensional problems of hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
2. Norkin M.V. The movement of a rectangular cylinder in a liquid at short times after impact with formation of a cavity. *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 2, pp. 385–395; doi.org/10.1134/S1990478920020155
3. Norkin M.V. Dynamics of separation points upon impact of a floating circular cylinder. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, Vol. 60, No. 5, pp. 798–804; doi.org/10.1134/S0021894419050031
4. Lions J.L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi [Optimal control of systems described by partial differential equations]. Moscow: Mir, 1972 (in Russian).
5. Polyakov N.V., Goman O.G., Katan V.A. K voprosu ob udarnom vzaimodeistvii tela i zhidkosti so svobodnoi poverkhnost'yu pri nalichii otryva [Impact interaction of a solid and a fluid with a free surface in the presence of separation]. *Dokl. Nats. Akad. Nauk Ukrainy*, 2016, No. 8, pp. 46–52 (in Russian); doi.org/10.15407/dopovidi2016.08.046

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

6. Golikov A.E., Makarenko N.I. Gidrodinamicheskie nagruzki pri razgone tsilindra pod svobodnoi poverkhnost'yu [Hydrodynamic loads during cylinder acceleration under a free surface]. *Prikl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, Vol. 63, No. 5, pp. 89–99 (in Russian); DOI: 10.15372/PMTF20220509
7. Reinhard M., Korobkin A.A., Cooker M.J. Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration. *J. Engrg. Math.*, 2016, Vol. 96, No. 1, pp. 155–174; doi.org/10.1007/s10665-015-9788-8
8. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder. *J. Engrg. Math.*, 2011, Vol. 70, pp. 239-254; doi.org/10.1007/s10665-010-9416-6
9. Yudovoch V.I. Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость [One-valued solvability of a problem of a solid body impact on a inhomogeneous liquid]. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2005, Vol. 7, No. 3, pp. 79–91 (in Russian); http://mi.mathnet.ru/vmj168
10. Uflyand Ya.S. Metod parnykh uravnenii v zadachakh matematicheskoi fiziki [Method of pair equations in problems of mathematical physics]. Leningrad: Nauka, 1977 (in Russian).
11. Virchenko N.A. Parnye (troinye) integral'nye uravneniya [Double (triple) integral equations]. Kiev: Vyshcha Shkola, 1989 (in Russian).
12. Mandal B.N., Mandal N. Advances in Dual Integral Equations. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 1999.
13. Bateman H., Erdelyi A. Vysshie transtsendentnye funktsii [Higher transcendental functions]. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
14. Vorovich I.I., Yudovich V.I. Udar kruglogo diska o zhidkost' konechnoi glubiny [Impact round disc of finite depth fluid]. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1957, Vol. 21, No. 4, pp. 525–532 (in Russian).
15. Zhukov M.Yu., Shiryaeva E.V. Ispol'zovanie paketa konechnykh elemetov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii [Application of software package of finite elements Freefem++ for problems of hydrodynamics, electrophoresis, and biology]. Rostov-on-Don: Izd. Yuzhn. Federal. Univ., 2008 (in Russian).

УДК 533.17:532.517.4:53.082.56:532.574.7

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА В ОТСАСЫВАЮЩЕЙ ТРУБЕ МОДЕЛИ ГИДРОТУРБИНЫ

© 2023 **Е. В. Палкин[1a], М. Ю. Хребтов[1,2b], Р. И. Мулляджанов[1,2c], И. В. Литвинов[1,2d], С. В. Алексеенко[1,2e]**

[1]*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2]*Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]palkinev89@gmail.com, [b]weexov@yandex.by, [c]rustammul@gmail.com, [d]litv88@yandex.ru, [e]aleks@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 18.08.2022 г.; после доработки 18.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

При помощи метода крупных вихрей численно изучается гидродинамика в отсасывающей трубе модельной гидротурбины в условиях частичной нагрузки. Закрутка создаётся рабочим колесом, вращающимся с постоянной угловой скоростью. Сравниваются результаты численного моделирования с имеющимися экспериментальными данными, полученными методом цифровой трассерной визуализации и измерениями пульсаций давления для трёх режимов течения с различными объёмными расходами. Средние по времени поля скорости хорошо согласуются между экспериментальными и численными результатами. Для изучения динамических особенностей анализируются спектральные характеристики течения, которые имеют сильную когерентную составляющую. Эта вихревая структура соответствует прецессирующему вихревому ядру, меняющему форму и амплитуду с увеличением числа Рейнольдса.

Ключевые слова: гидротурбина, отсасывающая труба, закрученные течения, гидродинамическая неустойчивость, автоколебания, прецессирующее вихревое ядро, турбулентность, моделирование, метод крупных вихрей.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.112

ВВЕДЕНИЕ

Гидроэнергетика продолжает изменяться от постоянного до очень гибкого источника энергии. На режимах работы с частичными нагрузками угловой момент потока за рабочим колесом имеет значительную закрутку, что влияет на работу турбины, в том числе устойчивость течения. Когда интенсивность закрутки превышает критическое значение, развивается срыв спирального вихря [1]. Это явление также известно как прецессирующее вихревое ядро (ПВЯ) или вихревой жгут. ПВЯ возникает как в закрученных струях воздуха в камерах сгорания [2], так и в закрученных потоках воды в отсасывающих трубах [3].

При первых попытках физического описания ПВЯ в турбинах Фрэнсиса [4] наблюдалась генерация сильного вихря в условиях частичной нагрузки. Более поздние исследования подробно описывают ПВЯ на основе численных [5] и экспериментальных [6] данных. ПВЯ в целом можно описать как когерентную спиральную структуру, которая меандрирует вниз по

Численное моделирование выполнено в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-58-12012). Экспериментальные исследования выполнены в рамках гранта Российского научного фонда (проект 21-79-10080). Разработка вычислительного кода выполнена в рамках стипендии Президента РФ (проект СП-829.2021.1) и государственного задания ИТ СО РАН.

потоку, вращаясь в направлении закрутки среднего потока из-за гидродинамической неустойчивости. ПВЯ генерирует синхронные колебания давления (скачки давления) в отсасывающей трубе гидротурбины, что приводит к ограничению диапазона устойчивых режимов работы [3]. Во избежание повреждений и для повышения производительности гидротурбин для будущего энергетического рынка гидродинамические явления, происходящие в гидротурбинах, необходимо описать, понимать и уметь контролировать в различных режимах нагрузки.

Современные методы вычислительной гидродинамики представляют собой мощный инструмент для изучения сложных трёхмерных нестационарных течений в гидротурбинах (см. [7]). Эти методы, однако, требуют трудоёмкого шага валидации на подробных экспериментальных данных. Как правило, нестационарные усреднённые по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса (unsteady Reynolds-averaged Navier–Stokes, URANS [8, 9]) используются в практических приложениях для моделирования потоков в сложных геометриях. Однако вихреразрешающие методы, в том числе прямое численное моделирование (direct numerical simulation, DNS) и метод крупных вихрей (large-eddy simulation, LES [9]) обеспечивают более надёжные данные по сравнению с URANS.

В этой работе нестационарный закрученный поток в отсасывающей трубе модельной гидротурбины моделировался методом LES с использованием неконформных блоков вычислительной сетки. Полученные данные верифицируются на экспериментальных, полученных методом анемометрии по изображениям частиц (particle image velocimetry, PIV) и измеренным сигналам пульсаций давления на стенках конуса отсасывающей трубы модели гидротурбины. Геометрия отсасывающей трубы представляет собой уменьшенную геометрическую модель отсасывающей трубы Фрэнсиса-99 с входным диаметром $D = 100$ мм. Детальное описание аэродинамической установки и параметров методов измерения представлено в [10, 11]. Для моделирования распределения скорости входного потока за рабочим колесом реальной турбины на входе в гидротурбину используется пара завихрителей. Первый набор лопастей завихрителя стационарен, как и направляющий аппарат в реальной гидротурбине, а второй вращается по аналогии с рабочим колесом турбины [12]. Этот подход снижает общую сложность установки как в численном моделировании, так и в экспериментальных исследованиях. Далее будут описаны детали численного моделирования, проанализированы три режима течения с особым акцентом на этапе валидации и сделаны выводы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ДЕТАЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Для моделирования методом крупных вихрей используется открытый пакет OpenFOAM [13], основанный на методе конечных объёмов, с открытым исходным кодом для решения нестационарных трёхмерных отфильтрованных несжимаемых уравнений Навье — Стокса на неструктурированных объёмных сетках. В безразмерном виде эти уравнения записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re}\Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau},$$
$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0,$$

где p и u_i соответствуют полю давления и компонентам вектора скорости $\mathbf{u}$ жидкости, которые зависят от координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и времени t, $\boldsymbol{\tau}$ — тензор «подсеточных напряжений», а символ «тильда» обозначает пространственную фильтрацию, $\mathrm{Re} = U_b D/\nu$ — число Рейнольдса, ν и ρ — кинематическая вязкость и плотность среды соответственно. Подсеточные напряжения моделируются с помощью динамической модели Смагоринского без использования эмпирических констант, предложенной Германо [14], модифицированной Лилли [15], на основе стандартной модели Смагоринского [16]. Для дискретизации по времени используется неявная схема Кранка — Николсона второго порядка точности [17]. Для дискретизации конвективных слагаемых используется MUSCL TVD схема (total variation diminishing), дающая необходимый компромисс между численной устойчивостью и точностью [18]. Вязкие слагаемые дискретизуются методом центральных разностей. Для связи полей давления и скорости использовался алгоритм PIMPLE, являющийся комбинацией методов PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) [19] и SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) [20], позволяющий использовать бóльший шаг по времени Δt в течениях с движущейся сеткой [21].

На входе в трубу диаметра $D = 100$ мм [22] модельной гидротурбины (рис. 1) задаётся граничное условие Дирихле для скорости: $\tilde{\mathbf{u}}|_{\text{inf}} = (U_b, 0, 0)$ и условие Неймана для давления: $\left.\dfrac{\partial \tilde{p}}{\partial n}\right|_{\text{inf}} = 0.$

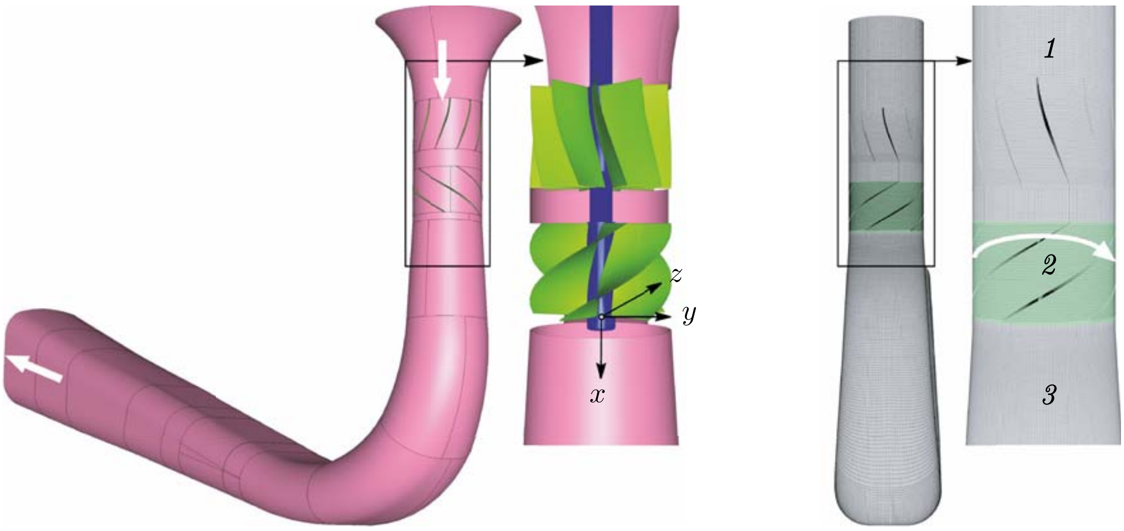


Рис. 1. Исследуемая геометрия модельной гидротурбины (a) и вычислительная сетка (b). На рис. (a) все поверхности соответствуют непроницаемым стенкам; также отмечены декартова система координат, вход (стационарный) и выход (вращающийся с постоянной угловой частотой 40.53 Гц; завихритель состоит из десяти и пяти лопаток соответственно). Стенки блоков 1 и 3 (b) стационарны, стенки блока 2 вращаются в указанном стрелкой направлении

Параметры однородного профиля скорости для рассматриваемых режимов описаны в таблице.

Рассматриваемые режимы течения и соответствующие им среднерасходняя входная скорость U_b, объёмный расход Q, число Рейнольса Re и нормированная угловая частота вращения рабочего колеса $f_r D/U_b$

	U_b, [м/с]	Q/Q_c, [-]	Re, [-]	$f_r D/U_b$, [-]
режим 1	1.85	0.30	11600	2.19
режим 2	3.08	0.50	19300	1.31
режим 3	4.01	0.65	25100	1.01

На выходной поверхности отсасывающей трубы ставится граничное условие Неймана для каждой компоненты скорости и условие Дирихле для давления ($\tilde{p}|_{\text{out}} = 0$). На остальных поверхностях, показанных на рис. 1, задаётся граничное условие прилипания, причём в блоке 2, соответствующем второму завихрителю, все стенки имеют ненулевую угловую скорость. В качестве начального распределения полей задавались нулевые значения скорости и давления во всём объёме.

Для проведения нестационарных расчётов методом крупным вихрей для модельной геометрии гидротурбины построена гексагональная вычислительная сетка, состоящая из трёх неконфорных блоков (см. рис. 1). Данная геометрия лопаток завихрителя выбрана исходя из критерия наибольшей эффективности гидротурбины при расходе $Q_c = 0.049\,\text{м}^3/\text{с}$ и угловой частотой вращения рабочего колеса 40.53 Гц [12]. Неподвижный входной блок 1 включает входную трубу и первый блок лопастей. Он имеет общую границу с вращающимся блоком 2, соответствующим рабочему колесу. Зачастую учёт вращения рабочего колеса осуществляется путём задания дополнительной азимутальной силы внутри рабочего колеса [23]. В этой работе используется динамическая сетка для точного воспроизведения эффекта вращающихся лопастей [24]. Между неконформными блоками поля скорости и давления консервативно интерполируются со вторым порядком точности [25]. Сетка в блоке 3 имеет многоблочную OH-топологию в поперечном сечении с равномерным распределением ячеек в направлении потока. Блоки 1–3 содержат 1.5×10^6, 0.45×10^6, 5.6×10^6 гексагональных ячеек соответственно. Недавние исследования гидротурбины Каплана показывают, что такое разрешение является достаточным [23]. Все расчёты были выполнены при частичной загрузке $Q < Q_c$, а именно при входном расходе $Q/Q_c = 0.30$, 0.5, 0.65 и отвечают числам Рейнольдса 11600, 19300, 25100 соответственно.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 2 показаны изоповерхности давления вместе с осевой скоростью в плоскости xOy для всех рассмотренных режимов, показывающих изменения в форме и амплитуде крупномасштабной когерентной вихревой структуры. Спиральный вихрь вращается вокруг оси симметрии и распространяется далеко вниз по потоку в отсасывающей трубе.

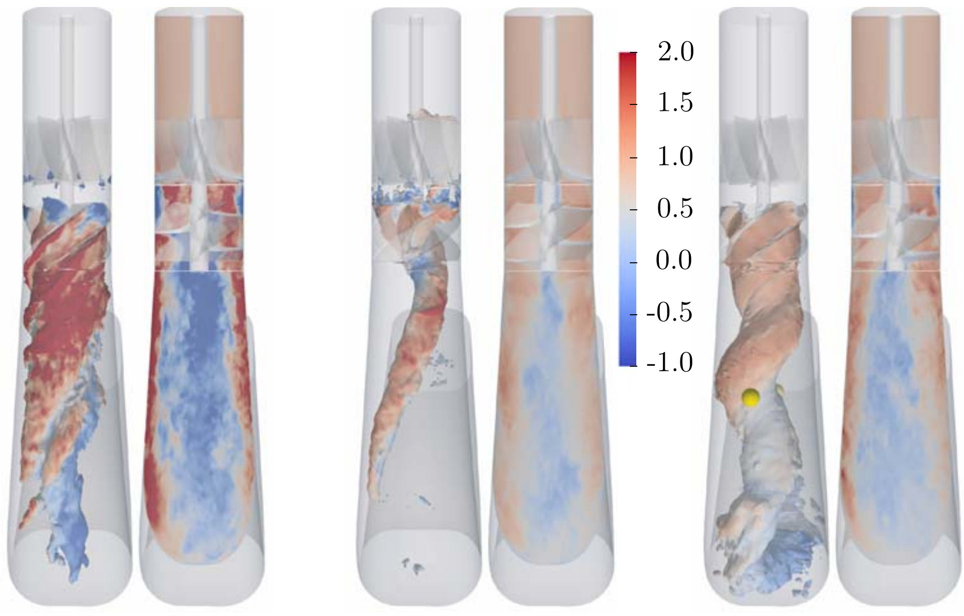
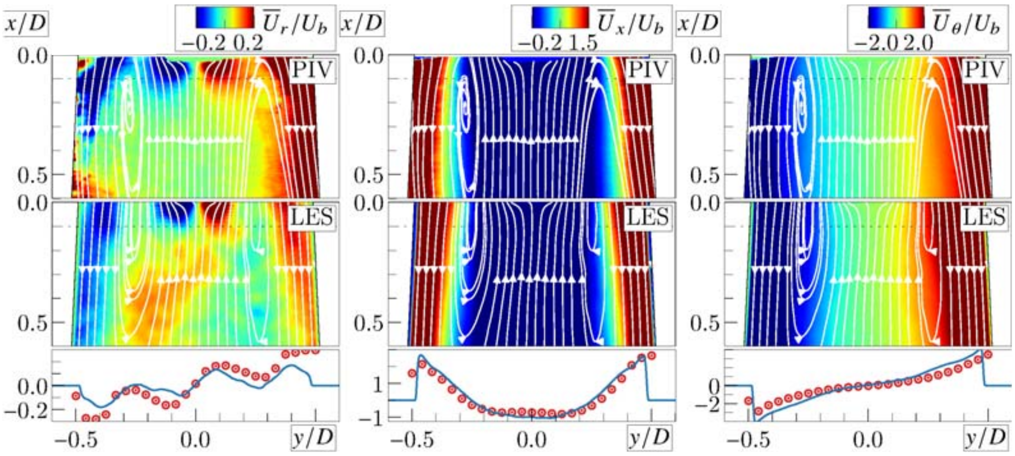
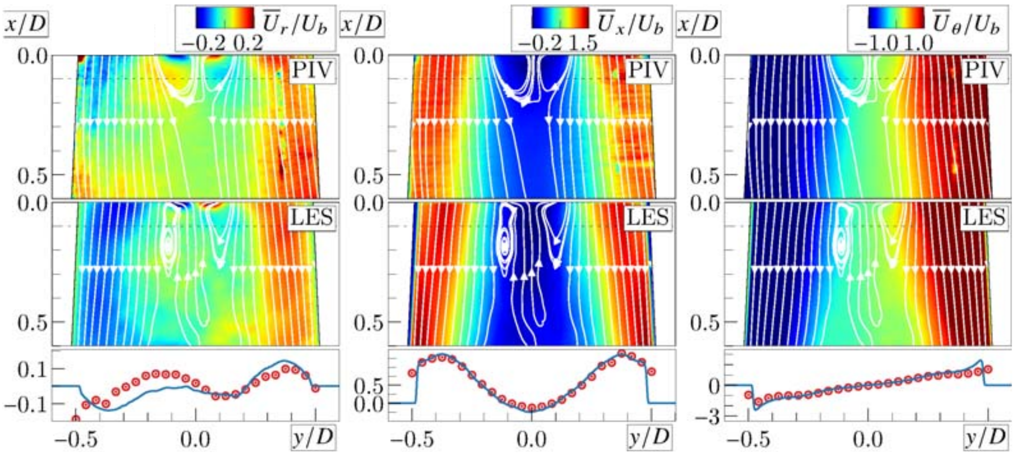


Рис. 2. Изоповерхность давления (цветом показана величина продольной скорости) и продольная компонента скорости в плоскости xOy. Справа жёлтыми точками показаны датчики, в которых рассматривалась величина давления

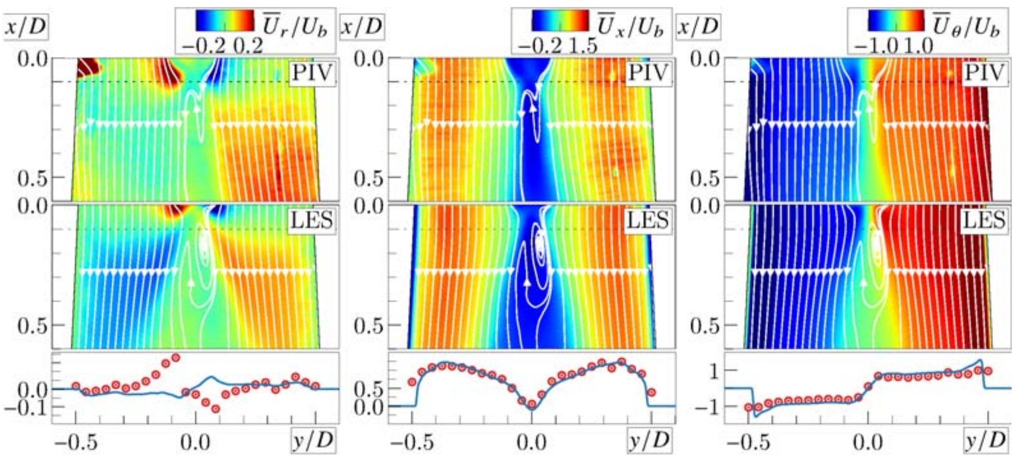
На рис. 3 показано сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными измерениями методом PIV, которое демонстрирует хорошее соответствие.



(a)



(b)



(c)

Рис. 3. Сравнение осреднённых по времени компонент скорости в плоскости xOy между LES и PIV для режимов: 1 (a), 2 (b), 3 (c) (см. таблицу); нижний ряд для каждого режима показывает соответствующий профиль на линии $x/D = 0.1$ (LES — сплошная линия, PIV — $\odot$ маркер)

Средние профили азимутальной и продольной скоростей хорошо согласованы, в то время как для профиля радиальной компоненты наблюдается большее отклонение из-за её малой амплитуды. Результаты по размеру рециркуляционной зоны, полученные методом LES, воспроизводят PIV данные. С увеличением расхода наблюдается уменьшение этой области. Можно заметить, что для $Q/Q_c = 0.30$ область возвратного течения проникает внутрь вращающегося завихрителя.

Далее был проанализирован безразмерный сигнал разницы давления $\Delta p/\left(\rho U_b^2\right)$ в двух противоположных точках на стенке отсасывающей трубы гидротурбины в плоскости $x/D = 1.5$ и его спектральные характеристики (см. рис. 4). На рисунке отчётливо видны низкочастотные пульсации давления, вызванные ПВЯ. Характерная частота ПВЯ для входных расходов $Q/Q_c = 0.30, 0.50, 0.65$ равна $fD/U_b = 1.03, 0.54, 0.52$ соответственно. Для $Q/Q_c = 0.50$ было произведено сравнение частоты ПВЯ между численными и экспериментальными данными и получено хорошее согласие. Тем не менее, экспериментальные данные показывают характерный вторичный пик на более высокой частоте, что не было воспроизведено LES методом.

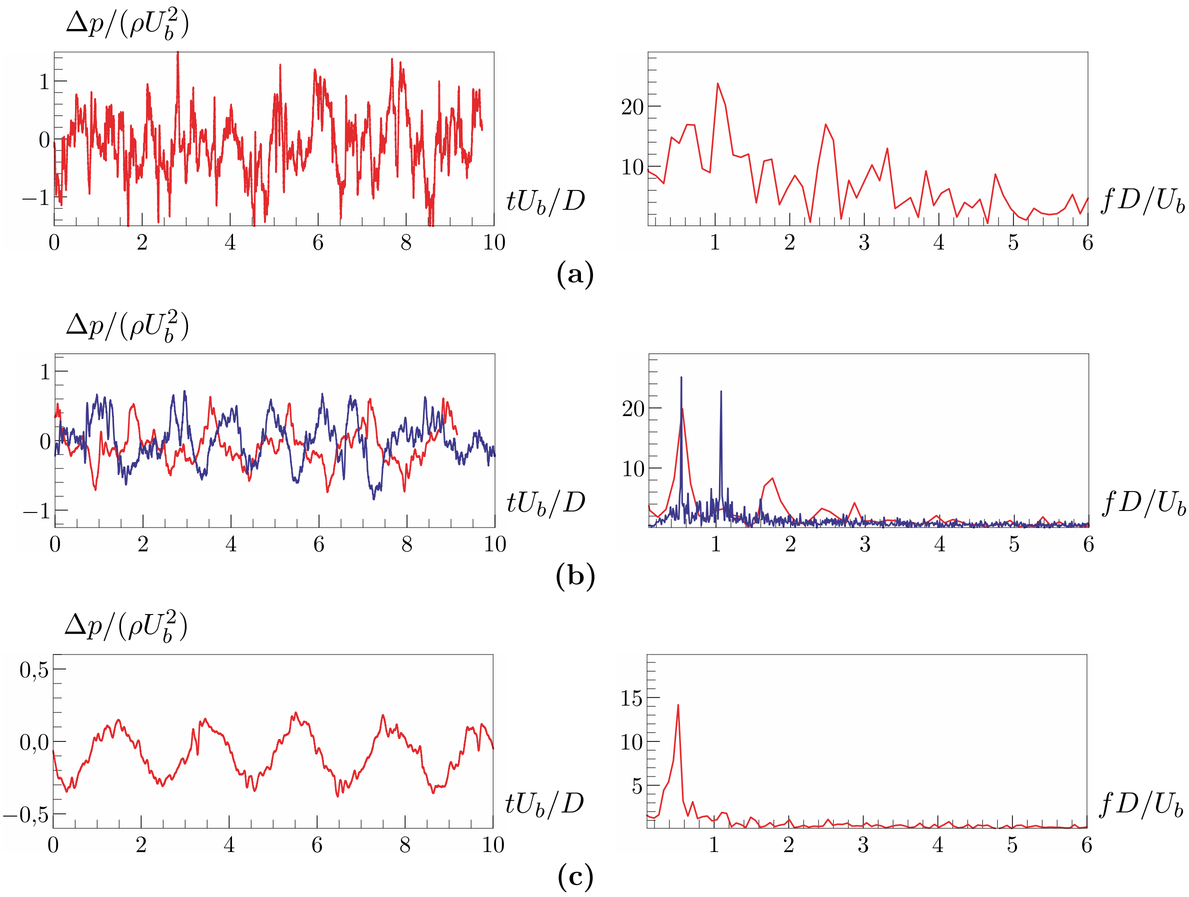


Рис. 4. Слева: сигнал разницы давления $\Delta p/\left(\rho U_b^2\right)$, измеренный в двух противоположных точках на стенке $x/D = 1.5$ (см. рис. 2) для режимов 1 (a), 2 (b), 3 (c); справа: Фурье-спектр сигнала слева; красная и синяя кривые отвечают численным и экспериментальным данным соответственно

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование закрученного потока методом крупных вихрей в отсасывающей трубе за модельной воздушной турбиной в условиях частичной нагрузки для трёх режимов течения, характеризующихся различными расходами воздуха. Моделирование включало вращающийся завихритель и неконформные сетки с динамической интерполяцией полей скорости и давления. Основное внимание уделялось этапу верификации на экспериментальных данных.

Между экспериментальными и численными результатами продемонстрировано хорошее соответствие, указывающее на то, что численное моделирование корректно фиксирует изменения размеров и амплитуды рециркуляционной области. Визуализация изоповерхностей показала наличие прецессирующего вихревого ядра, вращающегося вокруг оси. Анализ сигналов пульсаций давления и их Фурье-спектр подтвердил это и указал на согласие между расчётами и экспериментальными измерениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gallaire F., Ruith M., Meiburg E., Chomaz J.-M., Huerre P.* Spiral vortex breakdown as a global mode // J. Fluid Mech. 2006. V. 549. P. 71–80; DOI: 10.1017/S0022112005007834
2. *Syred N.* A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems // Prog. Energy Combust. Sci. 2006. V. 32. P. 93–161; DOI: 10.1016/j.pecs.2005.10.002
3. *Dörfler P., Sick M., Coutu A.* Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery: Engineer's Guidebook for Planning, Design and Troubleshooting. London: Springer-Verl., 2013.
4. *Nishi M., Kubota T., Matsunaga S., Senoo Y.* Study on swirl flow and surge in an elbow type draft tube // Proc. IAHR 10th Symp. 1980. V. 1. P. 557–568.
5. *Pasche S., Avellan F., Gallaire F.* Part load vortex rope as a global unstable mode // J. Fluids Engrg. 2017. V. 139, N 5; DOI: 10.1115/1.4035640
6. *Goyal R., Gandhi B. K., Cervantes M. J.* PIV measurements in francis turbine–a review and application to transient operations // Renew. Sust. Energ. Rev. 2018. V. 81. P. 2976–2991; DOI: 10.1115/1.4035640
7. *Tiwari G., Kumar J., Prasad V., Patel V. K.* Utility of CFD in the design and performance analysis of hydraulic turbines – A review // Energy Rep. 2020. V. 6. P. 2410–2429; DOI: 10.1016/j.egyr.2020.09.004
8. *Reynolds O.* On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Philos. Trans. Royal Soc. A. 1895. V. 186. P. 123–64.
9. *Ferziger J. H., Perić M., Street R.L.* Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verl., 2002.
10. *Litvinov I., Shtork S., Gorelikov E., Mitryakov A., Hanjalić K.* Unsteady regimes and pressure pulsations in draft tube of a model hydro turbine in a range of off-design conditions // Exp. Therm. Fluid Sci. 2018. V. 91. P. 410–422; DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2017.10.030
11. *Litvinov I., Sharaborin D., Gorelikov E., Dulin V., Shtork S., Alekseenko S., Oberleithner K.* Modal decomposition of precessing vortex core in a model hydro turbine // Appl. Sci. 2022. V. 12, N 10. Article 5127; DOI: 10.3390/app12105127
12. *Sonin V., Ustimenko A., Kuibin P., Litvinov I., Shtork S.* Study of the velocity distribution influence upon the pressure pulsations in draft tube model of hydro-turbine // IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci. 2016. V. 49. P. 82020; DOI: 10.1088/1755-1315/49/8/082020
13. OpenFOAM (Программный пакет CFD с открытым исходным кодом и широким набором функций для решения множества задач, от сложных потоков жидкости, включающих химические реакции, турбулентность и теплопередачу, до акустики, механики твёрдого тела и электромагнетизма). 2004; http://www.openfoam.com
14. *Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W.* A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // Phys. Fluids. A. Fluid Dynamics. 1991. V. 3, N 7. P. 1760–1765.
15. *Lilly D. K.* A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method // Phys. Fluids. A. Fluid Dynamics. 1992. V. 4, N 3. P. 633–635.
16. *Smagorinsky J.* General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment // Mon. Weather. Rev. 1963. V. 91, N 3. P. 99–164.
17. *Crank J., Nicolson P.* A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type // Math. Proc. Cambbridge Philos. Soc. 1947. V. 43, N 1. P. 50–67.

18. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov‘s method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32, N 1. P. 101–36.
19. *Issa R.I.* Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // J. Comput. Phys. 1986. V. 62, N 1. P. 40–65.
20. Numerical Prediction of Flow, Heat Transfer, Turbulence and Combustion. Elsevier, 1983.
21. *Holzmann T.* Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM(R). Loeben: Holzmann CFD, 2019.
22. *Cervantes M., Trivedi C. H., Dahlhaug O.-G., Nielsen T.* Francis-99 workshop 1: steady operation of Francis turbines // J. Phys. Conf. Ser. 2015. V. 579. Article 011001; DOI: 10.1088/1742-6596/579/1/011001
23. *Minakov A.V., Platonov D.V., Litvinov I.V., Shtork S.I., Hanjalić K.* Vortex ropes in draft tube of a laboratory Kaplan hydroturbine at low load: an experimental and les scrutiny of rans and des computational models // J. Hydraul. Res. 2017. V. 55, N 5. P. 668–685.
24. *Hrebtov M.Yu., Palkin E.V., Mullyadzhanov R.I.* Large-eddy simulation of a swirling flow in a model combustion chamber // J. Phys. Conf. Ser. 2020. V. 1677, N 1. Article 012012; DOI: 10.1088/1742-6596/1677/1/012012
25. *Farrell P.E., Maddison J.R.* Conservative interpolation between volume meshes by local Galerkin projection // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 2011. V. 200, N 1–4. P. 89–100.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 533.17:532.517.4:53.082.56:532.574.7

NUMERICAL SIMULATIONS OF A SWIRLING FLOW IN A FRANCIS DRAFT TUBE

E. V. Palkin[1a], **M. Yu. Hrebtov**[1,2b], **R. I. Mullyadzhanov**[1,2c], **I. V. Litvinov**[1,2d], **S. V. Alexeenko**[1,2e]

[1]*Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia,*
[2]*Novosibirsk State University, ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: [a]palkinev89@gmail.com, [b]weexov@yandex.by, [c]rustammul@gmail.com, [d]litv88@yandex.ru, [e]aleks@itp.nsc.ru

Received 18.08.2022, revised 18.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. We study the flow in a model Francis-99 draft tube for partial load conditions using Large-eddy simulations. The swirl is produced by the runner rotating with a constant angular velocity. Within the validation step we compare results of eddy-resolving simulations with our Particle image velocimetry (PIV) and pressure measurements for three flow cases with different incoming flow rates. The time-averaged velocity fields agree well in experiments and simulations. To study the dynamical features we analyze spectral characteristics of the flow featuring a strong coherent component. This vortical structure corresponds to the precessing vortex core (PVC) changing the shape and amplitude with the increase in the bulk velocity.

Keywords: hydroturbine, draft tube, swirling flows, hydrodynamics instability, self-oscillation, precessing vortex core, turbulence, simulation, large-eddy simulation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.112

REFERENCES

1. Gallaire F., Ruith M., Meiburg E., Chomaz J.-M., Huerre P. Spiral vortex breakdown as a global mode. *J. Fluid Mech.*, 2006, Vol. 549, pp. 71–80; DOI: 10.1017/S0022112005007834
2. Syred N. A review of oscillation mechanisms and the role of the precessing vortex core (PVC) in swirl combustion systems. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 2006. Vol. 32, pp. 93–161; DOI: 10.1016/j.pecs.2005.10.002
3. Dörfler P., Sick M., Coutu A. Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery: Engineer's Guidebook for Planning, Design and Troubleshooting. London: Springer-Verl., 2013.
4. Nishi M., Kubota T., Matsunaga S., Senoo Y. Study on swirl flow and surge in an elbow type draft tube. *Proc. IAHR 10th Symp.*, 1980, Vol. 1, pp. 557–568.
5. Pasche S., Avellan F., Gallaire F. Part load vortex rope as a global unstable mode. *J. Fluids Engrg.*, 2017, Vol. 139, No. 5; DOI: 10.1115/1.4035640
6. Goyal R., Gandhi B. K., Cervantes M. J. PIV measurements in francis turbine–a review and application to transient operations. *Renew. Sust. Energ. Rev.*, 2018, Vol. 81, pp. 2976–2991; DOI: 10.1115/1.4035640
7. Tiwari G., Kumar J., Prasad V., Patel V. K. Utility of CFD in the design and performance analysis of hydraulic turbines – A review. *Energy Rep.*, 2020, Vol. 6, pp. 2410–2429; DOI: 10.1016/j.egyr.2020.09.004
8. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. Royal Soc. A.*, 1895, Vol. 186, pp. 123–64.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

9. Ferziger J. H., Perić M., Street R.L. Computational Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer-Verl., 2002.
10. Litvinov I., Shtork S., Gorelikov E., Mitryakov A., Hanjalić K. Unsteady regimes and pressure pulsations in draft tube of a model hydro turbine in a range of off-design conditions. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 2018, Vol. 91, pp. 410–422; DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2017.10.030
11. Litvinov I., Sharaborin D., Gorelikov E., Dulin V., Shtork S., Alekseenko S., Oberleithner K. Modal decomposition of precessing vortex core in a model hydro turbine. *Appl. Sci.*, 2022, Vol. 12, No. 10, article 5127; DOI: 10.3390/app12105127
12. Sonin V., Ustimenko A., Kuibin P., Litvinov I., Shtork S. Study of the velocity distribution influence upon the pressure pulsations in draft tube model of hydro-turbine. *IOP Conf. Ser. Earth Environ. Sci.*, 2016, Vol. 49, pp. 82020; DOI: 10.1088/1755-1315/49/8/082020
13. Software OpenFOAM; http://www.openfoam.com
14. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids. A. Fluid Dynamics*, 1991, Vol. 3, No. 7, pp. 1760–1765.
15. Lilly D. K. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids. A. Fluid Dynamics*, 1992, Vol. 4, No. 3, pp. 633–635.
16. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: I. The basic experiment. *Mon. Weather. Rev.*, 1963, Vol. 91, No. 3, pp. 99–164.
17. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1947, Vol. 43, No. 1, pp. 50–67.
18. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.*, 1979, Vol. 32, No. 1, pp. 101–36.
19. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*, 1986, Vol. 62, No. 1, pp. 40–65.
20. Numerical Prediction of Flow, Heat Transfer, Turbulence and Combustion. Elsevier, 1983.
21. Holzmann T. Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM(R). Loeben: Holzmann CFD, 2019.
22. Cervantes M., Trivedi C. H., Dahlhaug O.-G., Nielsen T. Francis-99 workshop 1: steady operation of Francis turbines. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2015, Vol. 579, article 011001; DOI: 10.1088/1742-6596/579/1/011001
23. Minakov A.V., Platonov D.V., Litvinov I.V., Shtork S.I., Hanjalić K. Vortex ropes in draft tube of a laboratory Kaplan hydroturbine at low load: an experimental and les scrutiny of rans and des computational models. *J. Hydraul. Res.*, 2017, Vol. 55, No. 5, pp. 668–685.
24. Hrebtov M.Yu., Palkin E.V., Mullyadzhanov R.I. Large-eddy simulation of a swirling flow in a model combustion chamber. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, Vol. 1677, No. 1, article 012012; DOI: 10.1088/1742-6596/1677/1/012012
25. Farrell P.E., Maddison J.R. Conservative interpolation between volume meshes by local Galerkin projection. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 2011, Vol. 200, No. 1–4, pp. 89–100.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2023. Т. 26, № 1. С. 142–149

УДК 517.968

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2023 В. Г. Романов[1a], Т. В. Бугуева[1,2b]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]romanov@math.nsc.ru, [b]bugueva@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 31.10.2022 г.; после доработки 02.11.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Для волнового уравнения, содержащего нелинейность в виде полинома n-го порядка, изучается задача об определении коэффициентов полинома, зависящих от переменной $x \in \mathbb{R}^3$. Рассматриваются плоские волны с резким фронтом, распространяющиеся в однородной среде в направлении единичного вектора $\boldsymbol{\nu}$ и падающие на неоднородность, локализованную внутри некоторого шара $B(R)$. Предполагается, что решения задач могут быть измерены в точках границы этого шара в моменты времени, близкие к приходу фронта волны для всевозможных значений вектора $\boldsymbol{\nu}$. Показывается, что решение обратной задачи сводится к серии задач рентгеновской томографии.

Ключевые слова: полулинейное волновое уравнение, обратная задача, плоские волны, рентгеновская томография, единственность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.113

В последние годы появилось много работ, изучающих обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений. В работах [1–8] рассмотрены различные постановки обратных задач, связанных с определением метрики Лоренца или коэффициентов, входящих в эти уравнения. Так, в работе [1] изучаются обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений на глобально гиперболическом лоренцевом многообразии (M, g), в частности, в ней показано, что семейство наборов наблюдений, соответствующее точечным источникам, однозначно определяет конформный тип неизвестного открытого, относительно компактного множества $W \subset M$. В [2] на лоренцевом многообразии рассматриваются нелинейные обратные задачи для волнового уравнения с оператором Лапласа–Бельтрами. В [3] изучаются обратные задачи для гиперболических уравнений и систем, основанные на фокусировке волн. В работе [4] для полулинейных волновых уравнений на лоренцевых многообразиях с нелинейностью вида квадратичной производной изучается обратная задача определения фоновой лоренцевой метрики. В [5] на времени-ориентированном лоренцевом многообразии $(M; g)$ с непустой границей, удовлетворяющей предположению выпуклости, показано, что топологические, дифференцируемые и конформные структуры соответствующих подмножеств $S \subset M$ источников однозначно определяются по результатам измерений пересечений будущих световых конусов из точки S с фиксированным открытым подмножеством границы M. В работе [6] показывается, что сингулярности образуются после взаимодействия трёх поперечных полулинейных конормальных волн. В [7] рассматривается обратная краевая задача для нелинейного уравнения упругой волны; показывается, что все параметры, фигурирующие в уравнении, могут быть однозначно определены из граничных измерений при определённых геометрических предположениях.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

В [8] на лоренцевом многообразии $(M; g)$ с времени-подобной границей рассматривается полулинейное волновое уравнение и изучается восстановления метрики g и коэффициента a при нелинейности четвёртой степени. В работе [9] для полулинейного волнового уравнения исследуется обратная задача восстановления коэффициента $\alpha(x)$ при гладкой нелинейности $|u|^m$ при чётном целом m. В [10] в двумерном и трёхмерном пространствах исследуется обратная задача восстановления коэффициента полулинейного волнового уравнения при кубической нединейности и показывается, что с помощью преобразования Радона можно восстановить неизвестный коэффициент. В работе [11] рассматривается задача об определении коэффициента в полулинейном волновом уравнении при квадратичной нелинейности, а в работе [12] — при более общей нелинейности вида u^γ, $\gamma > 1$. При этом используется разложение решения прямой задачи по особенностям в окрестности фронта волны. В работе [13] для полулинейного волнового уравнения изучается задача об определении гладкой функции $f(x, u)$, финитной по x, по некоторой информации о решениях задач Коши для дифференциального уравнения. Показывается, что решение этой задачи сводится к серии задач рентгеновской томографии.

В настоящей работе мы используем результаты работы [13] для исследования задачи об определении коэффициентов волнового уравнения с полиномиальной нелинейностью. В рассматриваемой задаче определяются все коэффициенты полинома, зависящие от переменной $x \in \mathbb{R}^3$.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{gathered} u_{tt} - \Delta u - \sum_{k=1}^{n} q_k(x) u^k = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4, \\ u|_{t<0} = g(t - R - x\cdot\boldsymbol{\nu}), \end{gathered} \tag{1}$$

в которой $q_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, — непрерывные финитные функции переменной $x \in \mathbb{R}^3$, носители которых содержатся внутри шара $B(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R\}$, $R > 0$, а $g(t)$ является при $t = 0$ разрывной функцией, $g(+0) = \alpha > 0$ и $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Дополнительно предположим, что структура функции $g(t)$ такова: $g(t) = \alpha > 0$ для значений $t \in [0, \eta]$, где $\eta > 0$, а при $t > \eta$ произвольна (в частности, может быть $g(t) = 0$ при $t > \eta$). Параметр α может меняться, пробегая некоторое множество значений. В уравнении (1) $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — вектор, принадлежащий единичной сфере $\mathbb{S}^2$. Уравнение $u = g(t + t_0 - x\cdot\boldsymbol{\nu})$ описывает в однородном пространстве (т. е. при всех $q_k(x) \equiv 0$) плоскую волну, бегущую в направлении вектора $\boldsymbol{\nu}$. В момент времени $t = 0$ фронт этой волны касается в точке $x = -R\boldsymbol{\nu}$ области $B(R)$, в которой сосредоточена неоднородность.

В поставленной выше задаче $\boldsymbol{\nu}$ и α играют роль параметров. Поэтому её решение обозначим через $u(x, t, \alpha, \boldsymbol{\nu})$. Иногда, для краткости записи, зависимость решения от $\boldsymbol{\nu}$ и α будет опускаться.

В дальнейшем нас будет интересовать задача об определении функций $q_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, по некоторой информации о решениях задачи (1). Как уже было сказано выше, мы будем предполагать, что коэффициенты $q_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, являются непрерывными функциями всюду в $\mathbb{R}^3$ и равными нулю вне шара $B(R)$. Дополнительно предположим, что они ограничены некоторой положительной постоянной Q:

$$|q_k(x)| \leqslant Q, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Обозначим $S_+(R, \boldsymbol{\nu}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R,\ x\cdot\boldsymbol{\nu} > 0\}$.

Обратная задача. Найти функции $q_k(x)$ в области $B(R)$ по следующей информации о решениях задачи (1):

$$\begin{gathered} u(x, t, \boldsymbol{\nu}, \alpha_m) = h_m(x, t, \boldsymbol{\nu}), \quad 0 < \alpha_m < 1/2, \\ \text{для всех} \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2, \quad x \in S_+(R, \boldsymbol{\nu}), \quad t \in (0, R + x\cdot\boldsymbol{\nu} + \varepsilon), \quad m = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $h_m(x,t,\boldsymbol{\nu})$ — заданные функции и $\varepsilon \in (0,\eta)$ — произвольное малое положительное число.

При исследовании этой задачи мы используем результаты работы [13] о существовании и единственности ограниченного решения задачи (1) в некоторой окрестности фронта $t = R + x\cdot\boldsymbol{\nu}$ бегущей волны. Введём обозначения, соответствующие работе [13]. Обозначим $f(x,u) := \sum\limits_{k=1}^{n} q_k(x)u^k$. При сделанных выше предположениях относительно функций $q_k(x)$ носитель функции $f(x,u)$ при любом фиксированном значении $u > 0$ содержится в шаре $B(R)$. Для функции $f(x,u)$ справедливы оценки

$$|f(x,u)| \leqslant f_0(u) = Qnu, \quad |f_u(x,u)| \leqslant Qn^2 =: M(n), \quad (x,u) \in B(R)\times[0,1]. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $\nu \in S^2$, $\alpha \in (0,1/2)$, а функции $q_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, и $g(t)$ удовлетворяют сделанным выше предположениям. Тогда вблизи характеристической поверхности $t = R+x\cdot\boldsymbol{\nu}$ существует единственное обобщённое решение задачи* (1) *и оно представимо в виде*

$$u(x,t,\boldsymbol{\nu},\alpha) = \alpha H(t-R-x\cdot\boldsymbol{\nu}) + [\beta(x,\boldsymbol{\nu},\alpha) + \bar{u}(x,t)]H_1(t-R-x\cdot\boldsymbol{\nu}), \tag{5}$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 1$ для $t \geqslant 0$ и $H(t) = 0$ для $t < 0$ и $H_1(t) = tH(t)$, а функция $\beta(x,\boldsymbol{\nu},\alpha)$ вычисляется по формуле

$$\beta(x,\boldsymbol{\nu},\alpha) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty f(x-s\boldsymbol{\nu},\alpha)\,ds. \tag{6}$$

Здесь ds — элемент евклидовой длины, а функция $\bar{u}(x,t)$ в (5) *является непрерывной по своим аргументам и бесконечно малой при $t \to R + x\cdot\nu + 0$.*

Доказательство. Пусть $F(u)$ — первообразная для функции $1/f_0(u) = 1/(Qnu)$, определённая формулой

$$F(u) = \int\limits_1^u \frac{dt}{Qnt} = \frac{1}{Qn}\ln u, \quad u \in (0,1).$$

Обозначим $G(\boldsymbol{\nu},\eta) = \{(x,t) \mid 0 \leqslant t - R - x\cdot\boldsymbol{\nu} \leqslant \eta\}$ и положим

$$\eta \in R(0,(F(2\alpha)-F(\alpha))) = (0,\ln 2)R/(Qn).$$

Напомним, что мы предположили, что $g(t) = \alpha$ для $t \in [0,\eta]$ и $\alpha \in (0,1/2)$.

В однородной среде (т. е. при $f(x,u) \equiv 0$) решение задачи (1) имеет вид $u(x,t) = g(t-R-x\cdot\boldsymbol{\nu})$. Так как $g(t) = 0$ для $t < 0$, то решение задачи (1) равно нулю при $t < R+x\cdot\boldsymbol{\nu}$. Этим объясняется появление функции Хевисайда в формуле (5). Из формулы Кирхгофа для неоднородного волнового уравнения следует, что решение задачи (1) удовлетворяет в области $G(\boldsymbol{\nu},\eta)$ интегральному уравнению

$$u(x,t) = \alpha + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\xi-x|+\xi\cdot\boldsymbol{\nu}+R\leqslant t} \frac{f(\xi,u(\xi,t-|\xi-x|))}{|\xi-x|}\,d\xi, \quad (x,t)\in G(\boldsymbol{\nu},\eta). \tag{7}$$

В формуле (7) область интегрирования представляет собой внутренность парабалоида

$$P(x,t,\boldsymbol{\nu}) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 |\, \xi\cdot\boldsymbol{\nu} + |\xi-x| + R = t\}.$$

При $t \to R + x\cdot\boldsymbol{\nu} + 0$ этот параболоид стягивается к лучу $L(x,\boldsymbol{\nu}) = \{\xi\in\mathbb{R}^3 |\, \xi = x - s\boldsymbol{\nu}, s \geqslant 0\}$.

Для решения уравнения (7) в области $G(\boldsymbol{\nu},\eta)$ верна теорема 1 из [13], которая по формулировке совпадает с приведённой выше, причём для решения задачи (1) справедливо неравенство (см. неравенство (18) из работы [13]):

$$0 < u(x,t) \leqslant 2\alpha < 1, \ (x,t)\in G(\boldsymbol{\nu},\eta). \tag{8}$$

Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и в обратной задаче* $\alpha_m \in (0, 1/2)$, $m = \overline{1, n}$, *и, кроме того,* $\alpha_m \neq \alpha_k$, *если* $m \neq k$. *Тогда информация* (3) *однозначно определяет интегралы*

$$\int_0^\infty q_k(x - s\boldsymbol{\nu})ds = w_k(x, \boldsymbol{\nu}), \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2, \quad x \in S_+(R, \boldsymbol{\nu}), \quad k = 1, \dots, n. \tag{9}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 формулы (3), (6) приводят к равенствам

$$\begin{gathered}\int_0^\infty f(x - s \cdot \boldsymbol{\nu}, \alpha_m)\, ds = \sum_{k=1}^n \alpha_m^k \int_0^\infty q_k(x - s \cdot \boldsymbol{\nu})\, ds = 2\beta(x, \boldsymbol{\nu}, \alpha_m) =: \gamma(x, \boldsymbol{\nu}, \alpha_m), \\ m = \overline{1, n},\end{gathered} \tag{10}$$

в которых функции $\gamma_m(x, \boldsymbol{\nu})$ вычисляются по формуле

$$\gamma_m(x, \boldsymbol{\nu}) = 2 \lim_{t \to R + x\cdot\boldsymbol{\nu} + 0} \frac{\partial h_m}{\partial t}(x, t, \boldsymbol{\nu}) = 2 \frac{\partial h_m}{\partial t}(x, R + x \cdot \boldsymbol{\nu} + 0, \boldsymbol{\nu}).$$

Равенства (10) представляют собой систему линейных уравнений относительно интегралов от функций $q_k(x)$, $k = \overline{1, n}$. Определителем этой системы является определитель Вандермонда, который в силу условия теоремы 2 ($\alpha_m \neq \alpha_k$ при $m \neq k$) отличен от нуля. Решая систему (10), находим

$$\int_0^\infty q_k(x - s\boldsymbol{\nu})\, ds = w_k(x, \boldsymbol{\nu}), \quad \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2, \quad x \in S_+(R, \boldsymbol{\nu}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Теорема 2 доказана. □

Таким образом, обратная задача сводится к решению n интегральных уравнений (9). Каждое из них представляет собой задачу рентгеновской томографии (см., например, [14]). В самом деле, уравнение (9) означает, что для любого вектора $\boldsymbol{\nu}$ и любой точки x, принадлежащей полусфере $S^+(R, \boldsymbol{\nu})$, известен интеграл от функции $q_k(x)$ по лучу $L(x, \boldsymbol{\nu})$. С учётом того, что функция $q_k(x)$ равна нулю вне шара $B(R)$, получаем, что от $q_k(x)$ заданы интегралы по всевозможным прямым. Таким образом, надо найти функцию $q_k(x)$ через известные от неё интегралы по всем прямым. Это и есть задача рентгеновской томографии. Известно, что решение этой задачи единственно [14]. В связи с этим верна следующая теорема единственности.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда обратная задача может иметь только одно решение.*

Существует большое множество алгоритмом и программ, позволяющих успешно решать задачу томографии (см., например, [14–28]).

Замечание. Теорема единственности обратной задачи остаётся верной, если данные (3) заданы не для всех единичных векторов $\boldsymbol{\nu}$, а лишь для сравнительно небольшого множества. Достаточно, например, предположить, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ пробегает множество значений $\mathbb{S}^2(\boldsymbol{\nu}_0, \delta) = \{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{S}^2 \mid |\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}_0| < \delta\}$, где $\boldsymbol{\nu}_0 \in \mathbb{S}^2$ и $\delta > 0$ (см., даже более сильное утверждение в работе [28]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // Invent. Math. 2018. V. 212. P.781–857; arXiv:1405.3386v4 [math.DG] 20 Sep 2017

2. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // Commun. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609; arXiv:1606.06261v1 [math.AP] 20 Jun 2016
3. *Lassas M.* Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // Proc. Internat. Congress Math. 2018. V. 3. P. 3739–3760.
4. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equ. 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.
5. *Hintz P., Uhlmann G.* Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // Internat. Math. Res. Notices. 2019. V. 22. P. 6949–6987; arXiv:1705.01215v2 [math.DG] 27 May 2020
6. *Barreto A.S.* Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14, N 6. P. 1057–1105; arXiv:2001.11061v1 [math.AP] 29 Jan 2020
7. *Uhlmann G., Zhai J.* On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // J. Math. Pures Appl. 2021. V. 153. P. 114–136.
8. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation; arXiv:2107.08513v1 [math.AP] 18 Jul 2021
9. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai l J.* The Dirichlet-to-Neumann map for a semilinear wavevequation on Lorentzian manifolds; arXiv:2103.08110v1 [math.AP] 15 Mar 2021
10. *Barreto A.S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53; DOI: https://doi.org/10.1007/s00220-022-04359-0
11. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Обратная задача для нелинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 2. С. 83–100.
12. *Романов В.Г., Бугуева Т.В.* Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 3. С. 154–169.
13. *Романов В.Г.* Обратная задача для полулинейного волнового уравнения // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022, Т. 504, № 1. С. 36–41.
14. *Natterer F.* The Mathematics of Computerized Tomography. N. Y.: J. Wiley & Sons, 1986.
15. *Davison M.E.* A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidean space // Numer. Funct. Anal. Optimiz. 1981. V. 3. P. 321–340.
16. *Пикалов В.В., Преображенский Н.Г.* Вычислительная томография и физический эксперимент // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141, N 3. С. 469–498.
17. *Deans S.R.* The Radon Transform and Some of Its Applications. N. Y.: J. Wiley & Sons, 1983.
18. *Louis A.K.* Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15, N 3. P. 621–633.
19. *Louis A.K.* Incomplete data problems in x-ray computerized tomography // Numer. Math. 1986. V. 48, N 3. P. 251–262; https://doi.org/10.1007/BF01389474
20. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
21. *Michette A.G., Buckley C.J.* X-Ray Science and Technology. N. J.: Taylor & Francis, 1993.
22. *Бойко В.М., Оришич А.М., Павлов А.А., Пикалов В.В.* Методы оптической диагностики в аэрофизическом эксперименте. Новосибирск: изд. НГУ, 2009.
23. *Derevtsov E.Yu., Efimov A.V., Louis A.K., Schuster T.* Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 19, N 4–5. P. 689–715; DOI: 10.1515/jiip.2011.047
24. *Аниконов Д.С., Назаров В.Г., Прохоров И.В.* Интегродифференциальный индикатор для задачи однoракурсной томографии // Сиб. журн. индустр. матем. 2014. Т. 17, № 2. С. 3–10.
25. *Liu R., Yu H., Yu H.* Singular value decomposition-based 2D image reconstruction for computed tomography // J. XRay Sci. Technol. 2016. V. 25, N 1. P. 1–22; DOI: 10.3233/XST-16173
26. *Borg L., Frikel J., Orgensen J.S., Quinto E.T.* Analyzing reconstruction artifacts from arbitrary incomplete X-ray CT data; arXiv:1707.03055v4 [math.FA] 26 Jun 2018

27. *Xu Y., Yu H., Sushmit A., Lyu Q., Wang G., Li Y., CAO X., Maltz J.S.* Cardiac CT motion artifact grading via semi-automatic labeling and vessel tracking using synthetic image-augmented training data // J. XRay Sci. Technol. 2022. V. 30, N 3. P. 433–445; DOI: 10.3233/XST-211109

28. *Шарафутдинов В.А.* Об определении оптическогол тела, расположенного в однородной среде, по его изображениям // Математические методы для решения прямых и обратных задач геофизики. Новосибирск: изд. ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 123–148.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.968

INVERSE PROBLEM FOR WAVE EQUATION WITH POLYNOMIAL NONLINEARITY

© 2023 V. G. Romanov[1a], T. V. Bugueva[1,2b]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,*
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,
[2]*Novosibirsk State University,*
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]romanov@math.nsc.ru, [b]bugueva@math.nsc.ru

Received 31.10.2022, revised 02.11.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. For a wave equation containing nonlinearity in the form of a n-th order polynomial, the problem of determining the coefficients of the polynomial depending on the variable $x \in \mathbb{R}^3$ is studied. Plane waves propagating with a sharp front in a homogeneous medium in the direction of a unit vector $\boldsymbol{\nu}$ and falling on inhomogeneity localized inside some ball $B(R)$ are considered. It is assumed that the solutions of forward problems for all possible ν can be measured at points of the boundary of this ball at time close to the arrival of the wave front. It is shown that the solution of the inverse problem is reduced to a series of X-ray tomography problems.

Keywords: semilinear wave equation, inverse problem, plane waves, X-ray tomography, uniqueness.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.113

REFERENCES

1. Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G. Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations. *Invent. Math.*, 2018, Vol. 212, pp.781–857; arXiv:1405.3386v4 [math.DG] 20 Sep 2017
2. Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds. *Commun. Math. Phys.*, 2018, Vol. 360, pp. 555–609; arXiv:1606.06261v1 [math.AP] 20 Jun 2016
3. Lassas M. Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations. *Proc. Internat. Congress Math.*, 2018, Vol. 3, pp. 3739–3760.
4. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 2019, Vol. 44, No. 11, pp. 1140–1158.
5. Hintz P., Uhlmann G. Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets. *Internat. Math. Res. Notices*, 2019, Vol. 22, pp. 6949–6987; arXiv:1705.01215v2 [math.DG] 27 May 2020
6. Barreto A.S. Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions. *Inverse Probl. Imaging*, 2020, Vol. 14, No. 6, pp. 1057–1105; arXiv:2001.11061v1 [math.AP] 29 Jan 2020
7. Uhlmann G., Zhai J. On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation. *J. Math. Pures Appl.*, 2021, Vol. 153, pp. 114–136.
8. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation; arXiv:2107.08513v1 [math.AP] 18 Jul 2021
9. Hintz P., Uhlmann G., Zhai l J. The Dirichlet-to-Neumann map for a semilinear wavevequation on Lorentzian manifold; arXiv:2103.08110v1 [math.AP] 15 Mar 2021

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

10. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime. *Commun. Math. Phys.*, 2022, Vol. 392, pp. 25–53; DOI: https://doi.org/10.1007/s00220-022-04359-0
11. Romanov V. G., Bugueva T. V. Inverse problem for a nonlinear wave equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2022, Vol. 16, No. 2, pp. 333–348.
12. Romanov V. G., Bugueva T. V. The problem of determining the coefficient of the nonlinear term in a quasilinear wave equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2022, Vol. 16, No. 3, pp. 550–562.
13. Romanov V. G. An inverse problem for a semilinear wave equation. Doklady Math., 2022, Vol. 105, No. 3, pp. 166–170.
14. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. N. Y.: Wiley & Sons, 1986.
15. Davison M.E. A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidean space. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, 1981, Vol. 3, pp. 321–340.
16. Pikalov V.V., Preobrazhenskii N.G. Vychislitel'naya tomografiya i fizicheskii eksperiment [Computational tomography and physical experiment]. *Uspekhi Fiz. Nauk*, 1983, Vol. 141, No. 3, pp. 469–498 (in Russian).
17. Deans S.R. The Radon Transform and Some of Its Applications. N. Y.: J. Wiley & Sons, 1983.
18. Louis A.K. Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform. *SIAM J. Math. Anal.*, 1984, Vol. 15, No. 3, pp. 621–633.
19. Louis A.K. Incomplete data problems in x-ray computerized tomography. *Numer. Math.*, 1986, Vol. 48, No. 3, pp. 251–262; https://doi.org/10.1007/BF01389474
20. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya., Timonov A.A. Matematicheskie zadachi komp'yuternoi tomografii [Mathematical problems of computed tomography]. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
21. Michette A.G., Buckley C.J. X-Ray Science and Technology. N. J.: Taylor & Francis, 1993.
22. Boyko V.M., Orishich A.M., Pavlov A.A., Pikalov V.V. Методы оптической диагностики в аэрофизическом эксперименте [Methods of optical diagnostics in an aerophysical experiment]. Novosibirsk: izd. NSU, 2009 (in Russian).
23. Derevtsov E.Yu., Efimov A.V., Louis A.K., Schuster T. Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2011, Vol. 19, No. 4–5, pp. 689–715; DOI: 10.1515/jiip.2011.047
24. Anikonov D.S., Nazarov V.G., Prokhorov I.V. Integrodifferentsial'nyi indikator dlya zadachi odnorakursnoi tomografii [Integro-differential indicator for the problem of single-angle tomography]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2014, Vol. 17, No. 2, pp. 3–10 (in Russian).
25. Liu R., Yu H., Yu H. Singular value decomposition-based 2D image reconstruction for computed tomography. *J. XRay Sci. Technol.*, 2016, Vol. 25, No. 1, pp. 1–22; DOI: 10.3233/XST-16173
26. Borg L., Frikel J., Orgensen J.S., Quinto E.T. Analyzing reconstruction artifacts from arbitrary incomplete X-ray CT data; arXiv:1707.03055v4 [math.FA] 26 Jun 2018
27. Xu Y., Yu H., Sushmit A., Lyu Q., Wang G., Li Y., CAO X., Maltz J.S. Cardiac CT motion artifact grading via semi-automatic labeling and vessel tracking using synthetic image-augmented training data. *J. XRay Sci. Technol.*, 2022, Vol. 30, No. 3, pp. 433–445; DOI: 10.3233/XST-211109
28. Sharafutdinov V.A. Ob opredelenii opticheskogol tela, raspolozhennogo v odnorodnoi srede, po ego izobrazheniyam [On the determination of an optical body located in a homogeneous medium from its images]. Matematicheskie metody dlya resheniya pryamykh i obratnykh zadach geofiziki [Mathematical methods for solving direct and inverse problems of geophysics]. Novosibirsk: izd. VTs SO AN SSSR, 1981, pp. 123–148 (in Russian).

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2023. Т. 26, № 1. С. 150–160

УДК 524.5:519.677

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СОУДАРЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ОБЛАКОВ НА ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ

© 2023 Б. П. Рыбакин[1a], В. Д. Горячев[2b]

[1]*Научно-исследовательский институт системных исследований (ФНЦ НИИСИ РАН),*
Нахимовский просп., 36, корп. 1, г. Москва 117218, Россия,
[2]*Тверской государственный технический университет,*
набережн. А. Никитина, 22, г. Тверь 170026, Россия

E-mails: [a]rybakin@vip.niisi.ru, [b]gdv.vdg@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.08.2022 г.; после доработки 21.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Представлены результаты компьютерного моделирования процесса соударения вращающихся молекулярных облаков в межзвёздной среде. По мере сжатия вещества плотность газа в области их соударения увеличивается, что приводит к локальным изменениям формы и фрагментации облаков. Плотность газа в образующихся сгущениях увеличивается на много порядков, возникают гравитационно связанные области, где возможно образование звёздных скоплений. Процесс звездообразования сопровождается значительными пространственными и временными изменениями межзвёздного газа в этих областях, турбулентностью межзвёздной среды, гравитацией, резким изменением магнитных и радиационных полей на предзвездном этапе эволюции новых образований. Большое влияние на протекающие процессы оказывает вращение сталкивающихся молекулярных облаков. Эволюция вещества протозвёздных областей с момента, когда они начинают формироваться, до момента, когда оно достигают звёздной плотности, охватывает огромный диапазон масштабов. Моделирование таких астрофизических процессов на вычислительных сетках сверхбольшого разрешения требует значительного увеличения компьютерных мощностей, требуется оптимизация параллельных вычислений на гетерогенных вычислительных системах.

Ключевые слова: вычислительная астрофизика, столкновение молекулярных облаков, фрагментация новообразований, параллельное программирование.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.114

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных механизмов формирования зон звездообразования является локальное уплотнение и пространственная фрагментация межзвёздного газа в турбулизированных областях галактик [1]. При взаимном столкновении и обоюдном проникновении газовых галактических струй и потоков, в том числе молекулярных облаков, формируются ограниченные области — сгустки сильно сжатого газа. В результате ударного сжатия плотность газа на фронтах соударения повышается на несколько порядков и изменяется от начальной плотности порядка $\rho = 10^{-25}$ г/см^3 до величин порядка 10^{-19} г/см^3. Образуются гравитационно связанные сгустки молекулярного газа предзвездной плотности, в которых, при возникновении гравитационного коллапса вещества и при отсутствии внешних воздействий, могут возникать новые

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-29-09070 mk).

звёздные системы. Протекающие процессы сжатия газа динамически ускоряются при вращении туманностей. Взаимодействующие молекулярные облачные образования в различных галактиках, как правило, представляют собой вращающиеся объекты. Можно отметить, что количество вычислительных экспериментов по моделированию столкновения «облако-облако» (cloud-cloud collision, CCC) с учётом вращения облаков не слишком велико по сравнению со сценариями столкновения без вращения [2].

Моделирование фрагментации газа молекулярных облаков при их соударении и образование гравитационно связанных областей уплотнённого газа в деформируемых остатках выполняется, как правило, с использованием больших компьютерных мощностей. Сложность моделирования связана с существенными трудностями в создании параллельного программного обеспечения, значительными временными затратами на проведение расчётов на сетках сверхбольшого разрешения, трудоёмкой постобработкой гигантских объёмов полученной информации и интерпретацией результатов.

В последние годы резко увеличилось количество программных комплексов для решения задач гравитационной гидродинамики. В большинстве вычислительных программ используется алгоритмы частиц в ячейках (PIC), моделирование N тел, гидродинамика сглаженных частиц (SPH), совершенствуются методы на основе блочно-структурированных сеток, а также методы конечных объёмов. Подробный обзор программного обеспечения, используемого в этой области моделирования гигантских по пространственному и временному масштабу процессов во Вселенной, дан в работе [3]. Во многих программах используют технологию MPI для распараллеливания операций в алгоритмах численного решения дифференциальных уравнений в частных производных. В качестве примера решения крупномасштабных задач астрофизики можно отметить систему RAMSES [4], где используется адаптивное уточнение (AMR) расчётных сеток и применяется гибридный параллелизм MPI/OpenMP технологий. Использование AMR и SPH кодов с высокой степенью параллелизма вычислений является характерной особенностью современных программ для моделирования образования предзвездных зон в сильно сжатых гравитационно-связанных сгустках и филаментах, возникающих при столкновениях молекулярных облаков [5–7].

К настоящему времени появляются всё более подробные трёхмерные модели, которые учитывают эффекты взаимодействия вещества набегающих газовых потоков с взаимным проникновением гравитационно-связанных пространственных образований друг в друга. Изменение формы газово-пылевых образований при столкновениях сопровождается значительным вихреобразованием на границах деформируемых облаков. Во многих исследованиях турбулизация зон взаимодействия объясняется с привлечением эффектов влияния неустойчивостей Рихтмайера — Мешкова, Кельвина — Гельмгольца и NTSI, которые инициируются резкими изменениями скоростного поля и плотности газа в ядре столкновения облаков [8–11]. Результаты, полученные в цитируемых работах, использовались при анализе проведённого моделирования и динамики изменения форм дозвёздных образований при динамическом взаимодействии гиперзвуковых ударных потоков материи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Определяющие уравнения

Для моделирования соударения в данной работе используется система уравнений Эйлера, которая описывает законы сохранения плотности, количества движения и энергии:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

здесь $\mathbf{U} = (\rho, \rho_i, E)^T$ — вектор переменных; $\mathbf{F(U)}_i = (\rho u_i, \rho u^i u_j + P\delta_{ij}, u_i E + P\delta_{ij})^T$ — потоки основных переменных, $E = \rho\left(\frac{1}{2}\, u^i u_j + \frac{P}{(\gamma - 1)\rho}\right)$ — полная энергия.

Расчёты столкновения облаков первоначально сферической формы велись по разным сценариям. В этих расчётах облака имели различные массы и размеры, разное начальное распределение плотности газа. Облака сталкивались на встречной скорости в интервале от 5.32 до 11.77 км/с. Столкновение и взаимное проникновение молекулярных облаков со сверхзвуковыми скоростями предполагалось в пространственном объёме $40 \times 40 \times 40$ парсек. В расчётах с вращением облаков в разных направлениях угловая скорость $\Omega = 2.6 \times 10^{-15}\,\text{с}^{-1}$. Оси вращения облаков совпадали с линией их соударения.

Приведённые ниже результаты соответствуют сценариям соударения облаков с начальными диаметрами МО: 13.44 и 13.76 парсек. Соответствующие массы были равны 693 и 675 $M_\odot$ масс Солнца соответственно, эти значения характерны для нижней границы масс гигантских молекулярных облаков (GMC). В расчётах использовалась безразмерная величина $\chi = \rho_{\text{cl}}/\rho_{\text{ism}}$, которая характеризует отношение плотностей газа в среде облаков и фрагментов к плотности межзвёздного пространства $\rho_{\text{ism}} = 2.15 \times 10^{-25}\,\text{г/см}^3$. В начальный момент соударения облаков эта величина принималась $\chi = \rho_{\text{cl}}/\rho_{\text{ism}} = 500$.

1.2. Реализация параллельного алгоритма

Компьютерное моделирование крупномасштабных процессов формирования филамент и сверхплотных гравитационно-связанных сгустков при соударении молекулярных облаков велось на параллельных вычислительных кластерах с гибридной архитектурой. Для вычислений использовалась авторская программа DarkMatter, созданная с использованием гетерогенных технологий Coarray Fortran и OpenACC для GPU, в которых реализована эффективная параллелизация вычислений при решении систем уравнений Эйлера на регулярных вычислительных сетках большого объёма, с автоматически регулируемым блочным адаптивным уточнением AMR в областях с высокими градиентами изменения переменных.

В программе применяется гетерогенное распараллеливание вычислений на CPU и GPU. Для работы на графических процессорах используется технология OpenACC, на процессорах Intel Xeon — технология Coarray, что позволяет существенно сократить время выполнения команд программы. Расчёт газодинамических процессов осуществляется на CPU. Вычисление гравитационного потенциала может проводиться параллельно на GPU. С учётом возможностей современных процессоров CPU и графических процессоров GPU, в программу были внесены изменения для повышения производительности и уменьшения времени реализации команд. Эта модификация позволила сгладить проблему влияния размера кэша памяти в вычислительных потоках. Это целесообразно при реализации многосеточных алгоритмов, которые широко используются при решении задач гравитационной газовой динамики.

Оптимизация работы программы проводилась при решения уравнения Пуассона и системы уравнений Эйлера при моделировании гравитационного коллапса вещества в ограниченном объёме газа с использованием технологии и компиляторов [12, 13]. Моделирование столкновений облаков с вращением и без вращения выполнено с оптимизацией параллельного ускорения расчёта на компьютерах с многоядерными процессорами и графическими ускорителями. Серийные расчёты велись на кластере с процессорами Xeon E2630 и Xeon E5 2650 Ivy Bridge с разным количеством ядер. Эффективность распараллеливания анализировалась с помощью программы Intel VTune Amplifier XE. Для обработки результатов и создания иллюстраций использовалась авторизованная система постобработки HDVIS с распараллеливанием серийных операций анализа большого объёма выходных данных.

2. АНАЛИЗ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОУДАРЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНЫХ ОБЛАКОВ

Численное моделирование процесса соударения молекулярных облаков является продолжением исследований, отражённых в работах [14, 15]. В них анализировалось изменение формы и вихревой структуры ядра соударения молекулярных облаков в межзвёздном пространстве, где они сталкивались при лобовом ударе или взаимодействовали друг с другом в ситуации со смещением удара. Учёт вращения туманностей вокруг общей оси позволил выявить дополнительные эффекты роста фрагментации фрагментации остатков и образованных сгущений гигантских молекулярных облаков при столкновениях.

Можно выделить четыре основных временных этапа соударения молекулярных облаков: начальное сжатие газа в зоне удара; формирование линзообразного диска из сжатых газовых слоёв ядра; фрагментирование газовых образований в виде пространственно замкнутых уплотнённых сгустков; распад и затухание процесса взаимодействия вещества остаточных фрагментов. Основные моменты соударения облаков с появлением вихревых структур и турбулизацией встречных потоков газа показаны на рис. 1 и 2.

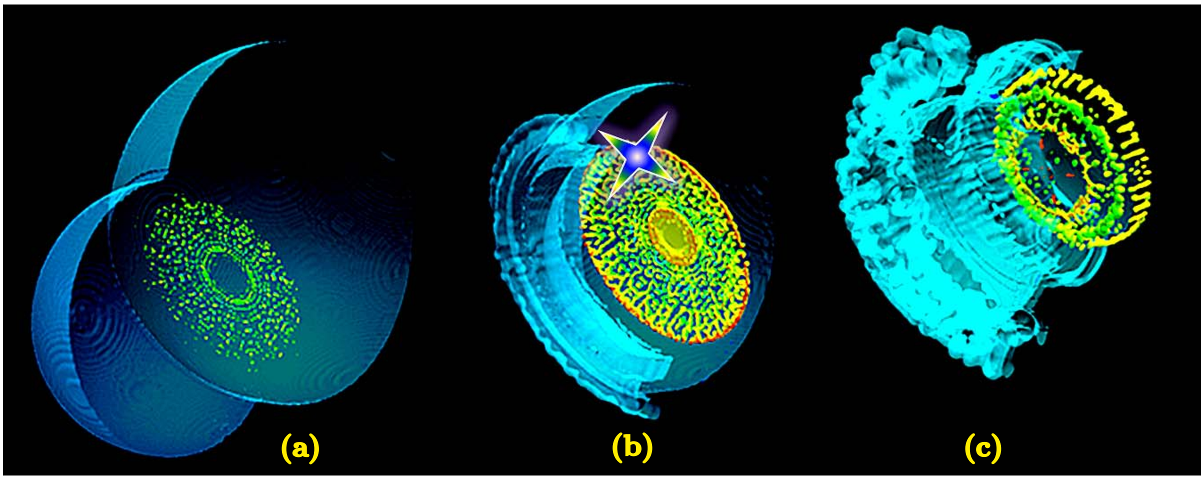


Рис. 1. Этапы процесса соударения молекулярных облаков: (a) начало взаимного проникновения облаков; (b) формирование сжатых слоёв и их фрагментирование в виде уплотнённых сгустков газа; (c) формирование возможных гравитационно-замкнутых предзвездных областей

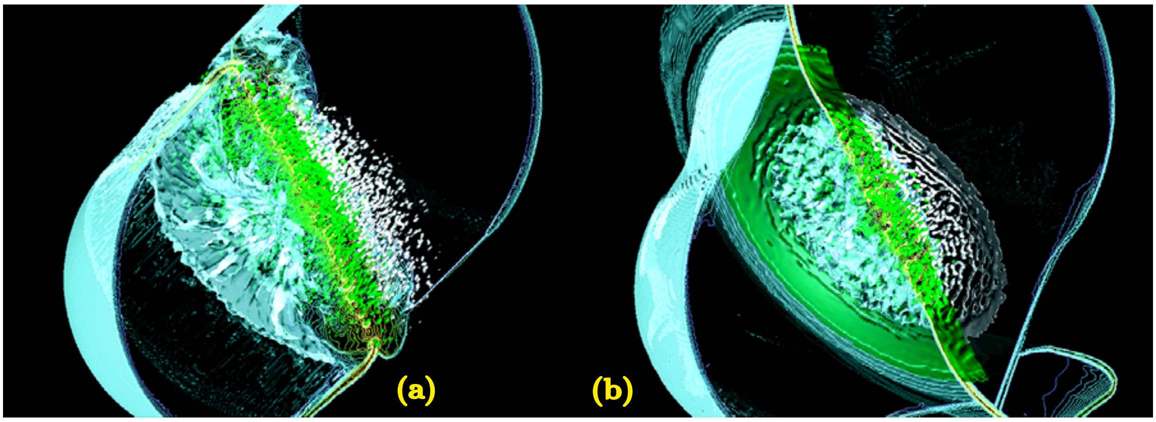


Рис. 2. Распределение контрастности плотности газа (изоповерхности $\chi = 2$ и 70000) в области контактной поверхности торможения ($|\mathrm{U}| = 0$):
(a) прямое соударение молекулярных облаков; (b) соударение вращающихся облаков.
Время эволюции — порядка полутора миллионов лет

На третьем этапе столкновения происходит формирование качественно новой структуры уплотнённого вихреобразования, с появлением в центральной зоне линзообразного ядра основного сжатия газа и большого количества сгустков и вытянутых филамент — газовых образований с наибольшей плотностью, достигаемой в процессе эволюции.

На этом этапе возникают наиболее уплотнённые зоны с потенциально возможным предзвездным состоянием вещества, с появлением наиболее плотных сгустков газа. В этих образованиях возможен непредсказуемый гравитационный коллапс газа — молекулярного водорода, с возможным зарождением звёзд. Временной промежуток третьего этапа составляет (оценочно) одну пятую от общего времени эволюции возникающих и изменяемых в пространстве вихревых газовых структур. На заключительном этапе идёт динамичное уменьшение плотности газа в остатках фрагментов облаков, которые уносятся расходящимися после удара потоками газа.

Возникающую структуру сгущений в ядре удара для критического момента третьего этапа можно увидеть на рис. 2, где приводится иллюстрация распределения полей плотности для случаев лобового удара молекулярных облаков без закрутки и с закруткой. Влияние вращения облаков на картину их соударения на разных этапах коллизии, при разных условиях, разнится в деталях. Общим является то, что крутка ведёт к увеличению диаметров условных внешних границ сталкивающихся облаков. В центре столкновительной зоны ядра уплотнённых образований формируются сгустки газа эллиптической формы. На некотором удалении от оси вращения возникают кольцеобразные зоны с филаментами, вытянутая форма которых повторяет формируемые спиралеобразные траектории потоков газа на поверхностях ядра столкновения. Сгущения и филаменты имеют противоположное направление движения при набегании встречных потоков, отражающее распределение тангенциальной компоненты скорости потоков газа вокруг оси вращения.

Характерным является различное распределение сгущений газа и филамент в линзоподобной области между набегающими туманностями. При вращении облаков эта зона более компактна. Величина газового уплотнения в сгустках, получивших вращательное движение, характеризуется несколько более высокими значениями плотности, чем в случае прямого соударения. Основной причиной локального повышения плотности в сгустках является осциллирующий характер изменения скоростных полей в зоне ударного контакта облаков. При внедрении вещества облаков друг в друга газовые потоки здесь получают скоростное и плотностное пространственное распределение волнобразного вида. На рис. 3 это характерное движение газа иллюстрируется показом локального обтекания возникающих сгустков газа в радиально расширяемых кольцевых областях.

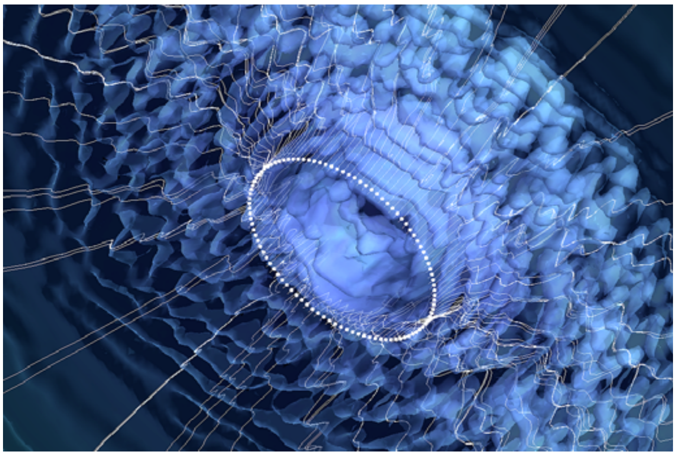


Рис. 3. Волнообразная структура распределения плотности газа и линии отмеченных частиц струйного течения внутри ядра соударения для вращающихся облаков на момент $t = 1.2$ миллиона лет

Характерно спиральное распространение газовых струй от облаков, набегающих слева и справа. В ядре столкновения возникает сложная ударно-волновая структура замкнутых сгущений газа, что в итоге приводит к возникновению резкого локального возрастания плотности молекулярного газа в зонах встречного течения в точках с максимальным локальным стоком газа.

Анализ полученных результатов моделирования показал, что в основном они хорошо коррелируют с результатами других работ в этой области вычислительной астрофизики. В частности, подобная схема начала формирования протозвёздных областей, как результата коллизии галактических объектов, обсуждалась в работах [16, 17], где дано детальное гидродинамическое описание этого процесса в двухмерном приближении, при других размерных значениях параметров. Эволюция и преобразование формы облаков в этих работах качественно совпадают с проведёнными исследованиями.

Вращение молекулярных облаков приводит к выносу газа на границы новых формообразований и одновременно к частичному радиальному смещению более уплотнённых сгустков в центральной зоне столкновения. Закрутка отражается в спиралевидном распределении новых уплотнённых фрагментов, формировании гофрированной структуры ядра и появлении стохастически распределённых колебаний плотности на внешних границах новообразований.

В расчётах соударений облаков по разным сценариям столкновения (с круткой и без неё) с центральным ударом и со смещением взаимодействия были выявлены различные вихревые и волнообразные образования во внутренних и внешних областях взаимопроникающих облаков. Эти особенности течений возникают при появлении нестабильности Кельвина — Гельмгольца (KHI) у внешних слоёв облаков при смешении пограничных слоёв газовых струй и в ядре столкновения облаков от возникающей нелинейной неустойчивости тонкой оболочки (NTSI) [9–11] в слоях с ударно-волновым разрывным изменением плотности газовых сгущений на внутренних границах.

На рис. 4 представлено одно из таких волновых вихреобразований, выявленное в одном из вариантов сценария центрального соударения облаков различного диаметра. Существование подобных волн на границах молекулярных облаков было проанализировано при обработке явлений галактического масштаба в [18, 19]. Авторы этих работ предполагают, что гидродинамическая нестабильность является причиной мелкомасштабной (порядка 0.1 парсека) турбулентности и хаотического перемешивания вещества в межзвёздной среде. Эти наблюдения волнообразной структуры в туманности Ориона были интерпретированы как признак KHI неустойчивости, возникающей во время расширения туманности, когда газ в облаке, нагретый и ионизированный массивными звёздами, обдувается ранее возникшим молекулярным газом.

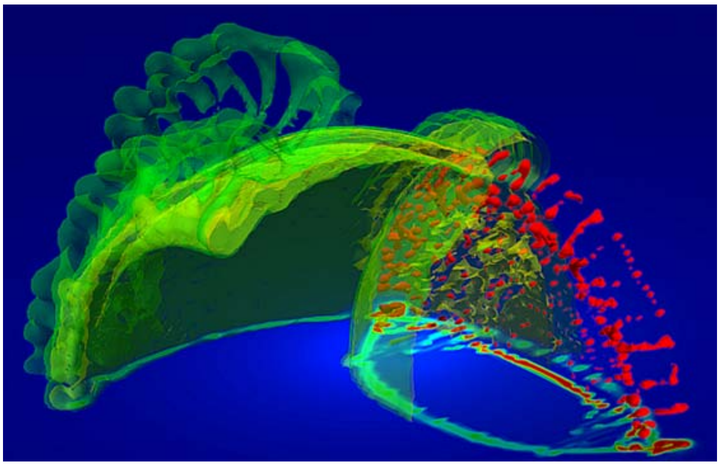


Рис. 4. Формирование волновых вихреобразований при изменении плотности и скорости газа сталкивающихся облаков на их границе с межзвёздным пространством; проявление KHI неустойчивости

Признаки NTSI неустойчивости в линзовидных ядрах соударения облаков наблюдались во всех расчётах проведённого вычислительного эксперимента. Наиболее ярко они проявлялись в расчётах соударения вращающихся молекулярных облаков.

Серия вычислений взаимного столкновения молекулярных облаков, как без вращения, так и с вращением, позволила определить условия достижения максимальной плотности газа в отдельных точках распадающегося ядра столкновения на этапе условного «разрыва» оболочки облака, приходящего справа, согласно приведённой на рис. 1 схемы. Эти сгущения могут находиться в разных местах, большая их часть находится в концентрических кольцевых образованиях в линзоподобном ядре столкновения.

Для выявления потенциальных областей с предзвездной высокой плотностью газа использовались предположения, что в этих зонах отрицательное значение дивергенции скоростного поля может быть связано с пространственным распределением массы газа и предельными значениями контраста плотности в ограниченных объёмах сгустков газа. В модификации вычислительной программы предусмотрено выделение таких областей и включённых сгущений в отдельные кластеры с проверкой, являются ли они гравитационно-связанными областями. Вычисляются масса, энергия и поле скоростей в окрестности выделенных сгущений. Проверяется выполнение критерия устойчивости Jeans и условий теорема вириала. При отсутствии достаточно сильных внешних воздействий полученные данные позволяют определить, смогут ли силы гравитации сжать эти газовые объекты и превратить их в звезду. Примером использования данного метода является вычислительный код SEREN [20], где для моделирования коллизий астрономических объектов, с учётом гравитационного взаимодействия, используется метод частиц SPH.

В настоящей работе методика определения потенциальных предзвездных зон проверялась на эмпирическом уровне при обработке данных в системе визуализации HDVIS. Иллюстрация обработки данных для одного из моментов развития коллизии сталкивающихся облаков с противоположной закруткой приводится на рис. 5. Границы образования возможной предзвездной зоны отмечены пунктиром. Проведённый расчёт данного варианта соударения молекулярных облаков показал, что в результате этой коллизии возможно образование зон с плотностью газа порядка $\rho = 10^{-20} - 10^{-19}$ г/см^3, что соответствует условиям начала образования протозвёздных зон.

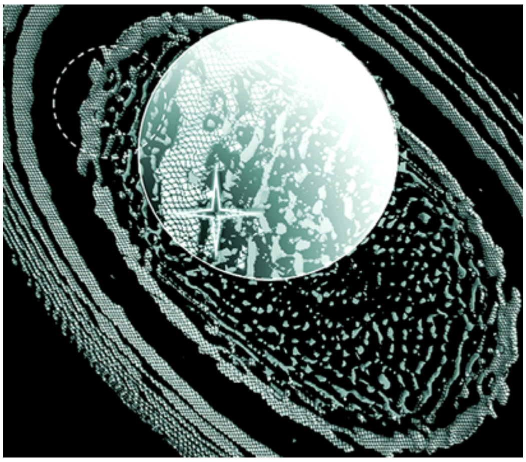


Рис. 5. Поиск расположения стоков течений газа по значениям дивергенции скоростного поля пространственных областей, содержащих сгущения газа с максимально наблюдаемой плотностью

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гетерогенные технологии OpenACC и Coarray Fortran, реализованные на вычислительных системах с CPU и GPU процессорами, были протестированы и проверены в вычислительном эксперименте при решении задач гравитационного коллапса и образования гравитационно связанных фрагментированных областей молекулярного газа, возникающих при столкновениях вращающихся молекулярных облаков в межзвёздной среде. Моделирование позволило уточнить динамику процессов турбулизации сталкивающихся туманностей и структурного изменения остатков сгустков вещества и филамент. Выявлены последствия влияния гидродинамической нестабильности NTSI и Кельвина — Гельмгольца на изменение формы и распределение сгустков и филамент на разных этапах эволюции облачных структур. Моделирование позволило проверить выполнение газодинамических условий достижения критической плотности газа во фрагментированных скоплениях, соответствующих уровню начала потенциальной дозвёздной консолидации межзвёздного вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dobbs C.L., Krumholz M.R., et al.* Formation of molecular clouds and global conditions for star formation // Protostars & Planets VI. 2014. P. 3–26.
2. *Li G.X., Wyrowski F., Menten K.* Revealing a spiral-shaped molecular cloud in our galaxy: Cloud fragmentation under rotation and gravity // Astronomy & Astrophysics. 2017. V. 598. Article 96.
3. *Skinner M.A., et al.* FORNAX: A flexible code for multiphysics astrophysical simulations astrophys // J. Suppl. Ser. 2019. N 241. P. 7.
4. RAMSES; https://www.ics.uzh.ch/ teyssier/ramses/RAMSES.html
5. *Vazquez-Semadeni E., at al.* Molecular cloud evolution. II. From cloud formation to the early stages of star formation in decaying conditions // Astrophys. J. 2007. N 657. P. 870-–883.
6. Star Formation Triggering by Cloud-Cloud Collision // Publ. Astronom. Soc. Japan. 2018. V. 70, N SP2.
7. *Parkin E.R., Pittard J.M.* Numerical heat conduction in hydrodynamical models of colliding hypersonic flows // Monthly Notices Royal Astronom. Soc. 2010. N 406. P. 2373–2385.
8. *Folini D., Walder R.* Supersonic turbulence in shock-bound interaction zones I. Symmetric settings // Astronomy & Astrophysics. 2006. N 459. P. 1—19.
9. *McLeod A.D., Whitworth A.P.* Simulations of the non-linear thin shell instability // Monthly Notices Royal Astronom. Soc. 2013. N 431. P. 710–721.
10. *Calderon D. et al.* Three-dimensional simulations of clump formation in stellar wind collision // Monthly Notices Royal Astronom. Soc. 2020. N 493. P. 447–467.
11. *Vishniac E.T.* Nonlinear instabilities in shock-bounded slabs // Astrophys. J. 1994. N 428. P. 186–208.
12. *Wolfe M.* The OpenACC applications programming interface. Version 2.0., PGInsider. Technical News from PGI, 2013.
13. Coarray FORTRAN documentation: https://software.intel.com/content/www/us/en/develop/documentation/fortran-compiler -coarray-tutorial/top.html
14. *Rybakin B., Goryachev V.* Modeling of density stratification and filamentous structure formation in molecular clouds after shock wave collision // Computers and Fluids. 2018. N 173. P. 189–194.
15. *Rybakin B., Goryachev V.* Parallel algorithms for astrophysics problems // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, N 4. P. 562-–570.
16. *Habe A., Ohta K.* Gravitational instability induced by a cloud-cloud collision: the case of head-on collision between clouds with different sizes and densities // Publ. Astronom. Soc. Japan. 1992. V. 44. P. 203—226.
17. *Kimura T., Tosa M.* Collision of clumpy molecular clouds // Astronomy & Astrophysics. 1996. N 308. P. 979–987.

18. *Berne O, Marcelino N., Cernicharo J.* Waves on the surface of the Orion molecular cloud // Nature Lett. 2010. V. 466, N 7309. P. 947–949.

19. *Berne O., Matsumoto Y.* The Kelvin—Helmholtz instability in Orion: A source of turbulence and chemical mixing // Astrophys. J. Lett. 2012. V. 761, N L4. P. 1–5.

20. *Hubber D., Batty C., McLeod A., Whitworth A.* SEREN — a new SPH code for star and planet formation simulations. Algorithms and test // Astronomy & Astrophysics. 2011. N 529. P. 1–27.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 524.5:519.677

SIMULATION OF THE COLLISION DYNAMICS OF MOLECULAR CLOUDS USING HETEROGENEOUS SYSTEMS

© 2023 B. P. Rybakin[1a], V. D. Goryachev[2b]

[1]*Scientific Research Institute for System Analysis (SRISA RAS), pr. Nachimovskij 36, Moscow 117218, Russia,*
[2]*Tver State Technical University, naberezhn. A. Nikitina 22, Tver 170026, Russia*

E-mails: [a]rybakin@vip.niisi.ru, [b]gdv.vdg@yandex.ru

Received 21.08.2022, revised 21.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The paper presents the results of computer simulation of the collision of rotating mo-lecular clouds in the interstellar medium. As the matter is compressed in the cloud collision region, the gas density increases here, the Jeans wavelength decreases, which leads to a change in the shape and fragmentation of clouds and their remnants. The density of gas in these clumps increases by many orders of magnitude, gravitationally bound regions arise with the possible formation of star clusters in these zones. The process of star origination is accompanied by complex spatial and temporal transformations of interstellar gas, determined by the nonlinear interaction of the turbulence of the medium, gravity, changes in the distribution of the magnetic field and radiation at the prestellar stage of evolution. The rotation of molecular clouds has a great influence on the ongoing processes. The effects of rotation in the modeling of collision processes began to be taken into account in simulation relatively recently. The evolution of pre-stellar regions, from the time they originate in high energy streams to the time they reach protostellar density, spans a huge range of scales, leading to a major computational problem in numerical simulation. Modeling of such astrophysical processes on ultra-high-resolution computa-tional grids requires a significant increase in computer power with the organization of parallel computing on heterogeneous systems.

Keywords: computational astrophysics, molecular cloud collision, fragmentation of new formations, parallel programming.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.114

REFERENCES

1. Dobbs C.L., Krumholz M.R., et al. Formation of molecular clouds and global conditions for star formation. *Protostars & Planets VI*, 2014, pp. 3–26.
2. Li G.X., Wyrowski F., Menten K. Revealing a spiral-shaped molecular cloud in our galaxy: Cloud fragmentation under rotation and gravity. *Astronomy & Astrophysics*, 2017, Vol. 598, article 96.
3. Skinner M.A., et al. FORNAX: A flexible code for multiphysics astrophysical simulations astrophys. *J. Suppl. Ser.*, 2019, No. 241, pp. 7.
4. RAMSES; https://www.ics.uzh.ch/ teyssier/ramses/RAMSES.html
5. Vazquez-Semadeni E., at al. Molecular cloud evolution. II. From cloud formation to the early stages of star formation in decaying conditions. *Astrophys. J.*, 2007, No. 657, pp. 870-–883.
6. Star Formation Triggering by Cloud-Cloud Collision. *Publ. Astronom. Soc. Japan*, 2018, Vol. 70, No. SP2.
7. Parkin E.R., Pittard J.M. Numerical heat conduction in hydrodynamical models of colliding hypersonic flows. *Monthly Notices Royal Astronom. Soc.*, 2010, No. 406, pp. 2373–2385.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

8. Folini D., Walder R. Supersonic turbulence in shock-bound interaction zones I. Symmetric settings. *Astronomy & Astrophysics*, 2006, No. 459, pp. 1—19.
9. McLeod A.D., Whitworth A.P. Simulations of the non-linear thin shell instability. *Monthly Notices Royal Astronom. Soc.*, 2013, No. 431, pp. 710–721.
10. Calderon D. et al. Three-dimensional simulations of clump formation in stellar wind collision. *Monthly Notices Royal Astronom. Soc.*, 2020, No. 493, pp. 447–467.
11. Vishniac E.T. Nonlinear instabilities in shock-bounded slabs. *Astrophys. J.*, 1994, No. 428, pp. 186–208.
12. Wolfe M. The OpenACC applications programming interface. Version 2.0., PGInsider. Technical News from PGI, 2013.
13. Coarray FORTRAN documentation: https://software.intel.com/content/www/us/en/develop/documentation/fortran-compiler -coarray-tutorial/top.html
14. Rybakin B., Goryachev V. Modeling of density stratification and filamentous structure formation in molecular clouds after shock wave collision. *Computers and Fluids*, 2018, No. 173, pp. 189–194.
15. Rybakin B., Goryachev V. Parallel algorithms for astrophysics problems. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, Vol. 39, No. 4, pp. 562-–570.
16. Habe A., Ohta K. Gravitational instability induced by a cloud-cloud collision: the case of head-on collision between clouds with different sizes and densities. *Publ. Astronom. Soc. Japan*, 1992, Vol. 44, pp. 203—226.
17. Kimura T., Tosa M. Collision of clumpy molecular clouds. *Astronomy* & *Astrophysics*, 1996, No. 308, pp. 979–987.
18. Berne O, Marcelino N., Cernicharo J. Waves on the surface of the Orion molecular cloud. *Nature Lett.*, 2010, Vol. 466, No. 7309, pp. 947–949.
19. Berne O., Matsumoto Y. The Kelvin—Helmholtz instability in Orion: A source of turbulence and chemical mixing. *Astrophys. J. Lett.*, 2012, Vol. 761, No. L4, pp. 1–5.
20. Hubber D., Batty C., McLeod A., Whitworth A. SEREN — a new SPH code for star and planet formation simulations. Algorithms and test. *Astronomy & Astrophysics*, 2011, No. 529, pp. 1–27.

УДК 517.983:514.8

РАЗЛОЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В $\mathbb{R}^3$

© 2023 **И. Е. Светов**[a], **А. П. Полякова**[b]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]apolyakova@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 19.05.2022 г.; после доработки 04.10.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Введены обобщения оператора ротора, действующие на трёхмерные симметричные m-тензорные поля, и установлены их свойства. Для пространств трёхмерных тензорных полей получены новые детальные разложения, каждое слагаемое в которых строится с использованием одной функции. Такого рода разложения играют важную роль, в частности при исследовании томографических интегральных операторов, действующих на симметричные m-тензорные поля, $m \geqslant 1$, и построении алгоритмов для решения возникающих обратных задач.

Ключевые слова: разложение симметричного тензорного поля, соленоидальное поле, потенциальное поле, потенциал, оператор ротора, компьютерная томография, лучевое преобразование, преобразование Радона.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.115

ВВЕДЕНИЕ

Задачи реконструкции векторных характеристик сред по данным томографического типа были сформулированы во второй половине прошлого века при исследовании течений жидкости и газа, кровотока в крупных сосудах (доплеровская томография), океанических течений. К настоящему времени томографические исследования векторных или тензорных характеристик сред интенсивно развиваются, а области их приложений очень широки. Математические постановки, основные результаты и ссылки на них изложены, например, в работах [1–5]. Статьи [6–10] посвящены вопросам обращения экспоненциальных лучевых преобразований векторных полей, исследованию их свойств и описанию образов. Постановки задач тензорной томографии связаны с изучением анизотропных сред. Математические аспекты задачи исследованы в [11]. Хорошо известны ее приложения в магнито-фотоупругости [12, 13], изучении тензорных полей напряжений и остаточных напряжений [14, 15], дифракционной томографии деформаций [16], поляризационной томографии квантового излучения [17] и др. Отметим работу [18], в которой приведен обзор важных приложений тензорной томографии в физических науках и медицине.

Томографические интегральные операторы, действующие на симметричные тензорные поля валентности $m \geqslant 1$, обладают ненулевыми ядрами (см., например, [11]). В связи с этим исследование этих операторов и построение алгоритмов для решения томографических обратных задач существенным образом опираются на известные разложения пространств симметричных m-тензорных полей. Таким образом, получение новых и более детальных разложений тензорных полей является отдельной важной задачей. Особенную роль при этом играют

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-51-12008-ННИО_а).

разложения, в которых каждое слагаемое строится с использованием только одной функции (метод потенциалов). В первую очередь это даёт возможность получить формулы обращения операторов [4, 11, 19], действующих на m-тензорные поля, используя известные формулы обращения операторов, действующих на функции. Метод потенциалов для построения базисных полей применяется, например, при использовании метода наименьших квадратов и метода усечённого сингулярного разложения. В данной работе вводятся новые операторы, являющиеся обобщением оператора ротора и действующие на трёхмерные симметричные m-тензорные поля. Проведено исследование свойств этих операторов и получены новые детальные разложения симметричных тензорных полей в $\mathbb{R}^3$.

Структура работы следующая. В данном разделе приведены определения используемых пространств и дифференциальных операторов. Разд. 1 посвящён обзору ранее полученных результатов о разложении m-тензорных полей (подробнее см. [19]) и их использовании при решении задач тензорной томографии в $\mathbb{R}^2$. В разд. 2 даны определения двух интегральных операторов, действующих на тензорные поля в $\mathbb{R}^3$, и описаны проблемы, возникающие при исследовании их свойств и решении задач по их обращению. Разд. 1 и 2 дают мотивировку для получения новых и более детальных разложений трёхмерных тензорных полей. В разд. 3 изложен основной результат статьи.

Некоторые определения и обозначения даны для произвольной размерности пространства n, но использоваться будут только $n = 2, 3$.

Замечание 1. При томографических исследованиях изучаемый объект находится внутри томографа и зачастую он отделён от источников излучения и приёмников. Исходя из физического смысла, мы рассматриваем тензорные поля, имеющие ограниченный носитель D, такой, что его замыкание $\overline{D}$ содержится в единичном шаре

$$B = \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} < 1\right\}$$

с границей ∂B, при этом считаем, что вне B поля тождественно равны нулю. Более того, исследуемые поля обладают необходимой гладкостью. Именно, потенциалы, поля и все необходимые производные непрерывны или могут иметь разрывы только первого рода. Ясно, что в качестве ограниченной области исследования может быть выбран не только единичный шар B.

Функции будем обозначать через $f(x)$, $g(x), \ldots$, а для потенциалов будем использовать обозначения $\phi(x)$, $\psi(x), \ldots$. Через $T^m(B)$ обозначается множество всех тензорных полей валентности m, компоненты которых определены в B. Через $S^m(B)$ обозначим подмножество множества $T^m(B)$, состоящее из симметричных тензорных полей валентности m, т. е. инвариантных относительно всех перестановок индексов. Для векторных и тензорных полей будем использовать обозначения $\mathbf{v}(x)$, $\mathbf{u}(x)$ и т. д., а для их компонент $v_i(x)$, $u_{ij}(x) = u_{ji}(x)$ и т. д. Скалярное произведение тензорных полей $\mathbf{v}(x)$ и $\mathbf{u}(x)$ в точке x определяется равенством

$$\langle \mathbf{v}(x), \mathbf{u}(x)\rangle = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} v_{i_1\ldots i_m}(x) u_{i_1\ldots i_m}(x).$$

С использованием скалярного произведения будем записывать умножение симметричного m-тензорного поля $\mathbf{u}(x)$ m-кратно на постоянный вектор ξ:

$$\langle \mathbf{v}(x), \xi^m\rangle = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} v_{i_1\ldots i_m}(x)\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_m}.$$

Функциональное пространство $L_2(S^m(B))$ состоит из симметричных m-тензорных полей с интегрируемыми в квадрате компонентами, определёнными в B. Пространства Соболева для симметричных m-тензорных полей обозначим через $H^k(S^m(B))$. Через $H^k_0(S^m(B))$ обозначим пространство симметричных m-тензорных полей из $H^k(S^m(B))$, обращающихся в нуль на границе области вместе со всеми своими производными вплоть до $(k-1)$-го порядка.

Нам потребуются следующие дифференциальные операторы в $\mathbb{R}^n$:

Оператор ковариантного дифференцирования $\nabla\colon H^k(T^m(B)) \to H^{k-1}(T^{m+1}(B))$, действующий на тензорное поле $\mathbf{u} \in H^k(T^m(B))$ по формуле

$$(\nabla \mathbf{u})_{i_1\ldots i_{m+1}}(x) = \frac{\partial u_{i_1\ldots i_m}}{\partial x_{i_{m+1}}}(x).$$

Оператор симметризации $\sigma\colon H^k(T^m(B)) \to H^k(S^m(B))$ действует по правилу

$$(\sigma \mathbf{u})_{i_1\ldots i_m}(x) = \frac{1}{m!}\sum_{\pi\in\Pi_m} u_{i_{\pi(1)}\ldots i_{\pi(m)}}(x),$$

где суммирование производится по группе Π_m всех перестановок множества $\{1,\ldots,m\}$.

Оператор внутреннего дифференцирования $\mathrm{d}\colon H^k(S^m(B)) \to H^{k-1}(S^{m+1}(B))$ определяется формулой $\mathrm{d}\mathbf{u}(x) = \sigma(\nabla\mathbf{u})(x)$ и действует, например, на функцию $\psi \in H^k(B)$ и векторное поле $\mathbf{v} \in H^k(S^1(B))$ по правилам

$$(\mathrm{d}\psi)_i(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x), \quad (\mathrm{d}\mathbf{v})_{ij}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)\right).$$

Оператор дивергенции $\operatorname{div}\colon H^k(S^{m+1}(B)) \to H^{k-1}(S^m(B))$ действует на симметричное тензорное поле $\mathbf{w}$ по правилу

$$(\operatorname{div}\mathbf{w})_{i_1\ldots i_m}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w_{i_1\ldots i_m j}}{\partial x_j}(x).$$

Оператор ротора rot: $H^k(S^1(B)) \to H^{k-1}(S^1(B))$ действует на трёхмерное векторное поле $\mathbf{v}$ по формуле

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^T.$$

Хорошо известно [11], что в n-мерном пространстве симметричное m-тензорное поле $\mathbf{w} \in H^k(S^m(B))$ единственным образом представимо в виде суммы потенциального $\mathrm{d}\mathbf{u}$ и соленоидального ${}^s\mathbf{w}$ ($\operatorname{div}{}^s\mathbf{w} = 0$) полей:

$$\mathbf{w} = {}^s\mathbf{w} + \mathrm{d}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}|_{\partial B} = 0. \tag{1}$$

Любое трёхмерное векторное поле $\mathbf{u}$ соленоидально тогда и только тогда, когда существует векторное поле $\mathbf{v}$ такое, что $\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ (см., например, [20]). Алгоритм построения потенциальных симметричных m-тензорных полей $\mathrm{d}\mathbf{u}$ следует из определения оператора d, в то время как вопрос о конструктивном алгоритме построения соленоидальных симметричных m-тензорных полей ${}^s\mathbf{w}$ в пространстве размерности $n > 2$ до настоящего времени оставался открытым.

1. О РАЗЛОЖЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В $\mathbb{R}^2$

Оператор $\perp$-ковариантного дифференцирования $\nabla^\perp\colon H^k(T^m(B)) \to H^{k-1}(T^{m+1}(B))$ действует на двумерное тензорное поле $\mathbf{u} \in H^k(T^m(B))$ по правилу

$$(\nabla^\perp \mathbf{u})_{i_1\ldots i_{m+1}}(x) = (-1)^{i_{m+1}} \frac{\partial u_{i_1\ldots i_m}}{\partial x_{3-i_{m+1}}}(x).$$

Оператор $\perp$-внутреннего дифференцирования $\mathrm{d}^{\perp}\colon H^k(T^m(B)) \to H^{k-1}(S^{m+1}(B))$, действующий на двумерные тензорные поля, определяется формулой

$$\mathrm{d}^{\perp}\mathbf{u}(x) = \sigma(\nabla^{\perp}\mathbf{u})(x).$$

Операторы d и $\mathrm{d}^{\perp}$ перестановочны, т. е. для любого симметричного m-тензорного поля $\mathbf{w} \in H^2(S^m(B))$ имеет место равенство $\mathrm{d}(\mathrm{d}^{\perp}\mathbf{w}) = \mathrm{d}^{\perp}(\mathrm{d}\mathbf{w})$. Следовательно, поле $\mathrm{d}^{\perp}(\mathrm{d}\mathbf{w})$ потенциальное. Поля вида $(\mathrm{d}^{\perp})^m\psi$, $\psi \in H^{m+1}(B)$, соленоиданые.

Используя операторы d и $\mathrm{d}^{\perp}$, была получена более детальная версия разложения (1) в пространстве $\mathbb{R}^2$ [19]. Именно, для любого поля $\mathbf{w} \in H^{k-m}(S^m(B))$ существуют потенциальные $\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^m \in H^{k-m}(S^m(B))$ и соленоидальное $\mathbf{v} \in H^{k-m}(S^m(B))$ симметричные m-тензорные поля, $k \geqslant m$, и порождающие их потенциалы $\psi^0, \ldots, \psi^m \in H^k(B)$ такие, что

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{u}^j \equiv (\mathrm{d}^{\perp})^m\psi^0 + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{d}^j(\mathrm{d}^{\perp})^{m-j}\psi^j. \tag{2}$$

Данное разложение будет единственным при наложении граничных условий на потенциалы, согласующихся с условиями в разложении (1). Здесь и далее верхние индексы используются для нумерации тензорных полей и потенциалов. Исходя из физического смысла (см. замечание 1), в приложении этого разложения к задачам компьютерной томографии на потенциалы можно наложить условие $\psi^0, \ldots, \psi^m \in H^k(B) \cap H_0^m(B)$.

Разложение (2) позволило описать ядра и образы лучевых преобразований, действующих на симметричные m-тензорные поля в $\mathbb{R}^2$, и установить их связь с преобразованием Радона. Отметим, что эта связь даёт способ построения формул обращения лучевых преобразований с использованием формул обращения для преобразования Радона. Полученные теоретические результаты легли в основу дальнейших исследований операторов лучевых преобразований и алгоритмов по численному решению задачи восстановления тензорных полей на плоскости по известным значениям лучевых преобразований (задача тензорной томографии).

1. Построены и численно реализованы алгоритмы решения задачи тензорной томографии, основанные на методе наименьших квадратов, с использованием полиномов [21, 22] и B-сплайнов [9, 23] для построения базисных полей.

2. Построены сингулярные разложения операторов лучевых преобразований, действующих на векторные [24] и симметричные 2-тензорные поля [25]. Построены и численно реализованы алгоритмы, основанные на методе усечённого сингулярного разложения, для восстановления векторных [24] и 2-тензорных полей [26].

3. Построены и численно реализованы алгоритмы, основанные на методе приближённого обращения, для восстановления векторных и 2-тензорных [27] и m-тензорных полей [28].

Таким образом, важность детальных разложений тензорных полей, каждое слагаемое в которых строится с использованием одной функции, не вызывает сомнений.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ В $\mathbb{R}^3$

Напомним определения и свойства важных томографических операторов, действующих на трёхмерные симметричные m-тензорные поля. Пусть единичный вектор ξ задаёт направление прямой, $x \in \mathbb{R}^3$ — точка, $\langle x, \xi\rangle = 0$ и $\mathbf{w}(x)$ — симметричное m-тензорное поле в $\mathbb{R}^3$. Тогда оператор лучевого преобразования действует на $\mathbf{w}(x)$ по формуле

$$[\mathcal{P}_m\mathbf{w}](\xi, x) = \int_{\mathbb{R}} \langle \mathbf{w}(x + t\xi), \xi^m\rangle\, dt.$$

Пусть $\mathbf{w} = {}^s\mathbf{w} + \mathrm{d}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\big|_{\partial B} = 0$. Лучевое преобразование потенциального поля $\mathrm{d}\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\big|_{\partial B} = 0$, тождественно равно нулю [11], т. е. имеет место равенство $[\mathcal{P}_m \mathbf{w}] = [\mathcal{P}_m\, {}^s\mathbf{w}]$. Поэтому по известным значениям лучевого преобразования $[\mathcal{P}_m \mathbf{w}]$ можно восстановить лишь соленоидальную часть ${}^s\mathbf{w}$ поля $\mathbf{w}$. Для разработки алгоритмов восстановления соленоидальной части трёхмерных симметричных m-тензорных полей, основанных на таких мощных подходах, как метод наименьших квадратов, метод усечённого сингулярного разложения, метод приближённого обращения и др., важно знать формулы для построения соленоидальных m-тензорных полей.

Плоскость $P_{\xi,s}$ в $\mathbb{R}^3$ задаётся нормальным уравнением $\langle \xi, x\rangle - s = 0$ для точек $x \in \mathbb{R}^3$. Здесь $|s|$ — расстояние от плоскости до начала координат, а ξ — нормальный вектор плоскости, $|\xi| = 1$. Преобразование Радона функции $f(x)$ задаётся формулой

$$[\mathcal{R}f](s,\xi) = \int\limits_{P_{\xi,s}} f(x)\, dx.$$

Нормальное преобразование Радона симметричного m-тензорного поля $\mathbf{u}(x)$ определяется формулой

$$\big[\mathcal{R}_m^{\perp}\mathbf{u}\big](s,\xi) = \int\limits_{P_{\xi,s}} \langle \mathbf{u}(x), \xi^m\rangle\, dx.$$

В отличие от преобразования Радона нормальные преобразования Радона векторных ($m = 1$) и симметричных 2-тензорных ($m = 2$) полей обладают ненулевыми ядрами. Соленоидальные векторные поля $\operatorname{rot}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in H_0^1(S^1(B))$, лежат в ядре нормального преобразования Радона: $\big[\mathcal{R}_1^{\perp} \operatorname{rot}\mathbf{u}\big](s,\xi) = 0$. Соленоидальные симметричные 2-тензорные поля $\mathbf{w}$, для компонент которых выполнено $(w_{1i}, w_{2i}, w_{3i})^T = \operatorname{rot}\mathbf{u}^i$, $\mathbf{u}^i \in H_0^1(S^1(B))$, $i = 1,2,3$, и потенциальные поля вида $\mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in H_0^1(S^1(B))$, лежат в ядре нормального преобразования Радона, т. е. имеют место равенства $\big[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{w}\big](s,\xi) = 0$ и $\big[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{u})\big](s,\xi) = 0$. Таким образом, по известным значениям нормального преобразования Радона векторного поля можно восстановить лишь его потенциальную часть $\mathrm{d}\phi$, $\phi \in H^1(B)$, а по известному нормальному преобразованию Радона симметричного 2-тензорного поля можно надеяться восстановить только потенциальную часть вида $\mathrm{d}^2\phi$, $\phi \in H^2(B)$. (Детали см. в работах [29–31], посвящённых исследованию свойств нормального преобразования Радона трёхмерных векторных и 2-тензорных полей и разработке алгоритмов его обращения.)

Есть основания предполагать, что по известному нормальному преобразованию Радона $\big[\mathcal{R}_m^{\perp}\mathbf{v}\big]$ симметричного m-тензорного поля $\mathbf{v}$ можно восстановить лишь его потенциальную часть вида $\mathrm{d}^m\phi$, $\phi \in H^m(B)$, в то время как потенциальные поля других типов и соленоидальные поля лежат в его ядре. Отсутствие представлений этих полей тормозит исследование ядра нормального преобразования Радона $\mathcal{R}_m^{\perp}$ при $m > 2$ и, следовательно, разработку численных подходов по восстановлению симметричных m-тензорных полей по известным значениям нормального преобразования Радона.

3. РАЗЛОЖЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ В $\mathbb{R}^3$

3.1. Векторные поля в $\mathbb{R}^3$

Используя оператор rot, разложение (1) для трёхмерного векторного поля $\mathbf{w} \in H^k(S^1(B))$ можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{w} = \operatorname{rot}\mathbf{v} + \mathrm{d}\psi, \quad \psi\big|_{\partial B} = 0. \tag{3}$$

Необходимо отметить, что единственность понимается в смысле слагаемых в сумме (3), в то время как векторное поле $\mathbf{v}$ определяется не единственным образом, так как для любого

$\phi \in H^2(B)$ имеет место равенство $\mathrm{rot}(\mathrm{d}\phi) = 0$. Отметим работы [20, 32–35], посвящённые исследованию пространства трёхмерных векторных полей и построению разложений для них. Упомянем работы [36, 37], посвящённые исследованию разложения соленоидального векторного поля $\mathbf{v}$ на тороидальную $\mathbf{t}$ и полоидальную $\mathbf{p}$ части:

$$\mathbf{v} = \mathbf{t} + \mathbf{p} = \mathrm{rot}(x_1 t, x_2 t, x_3 t)^T + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(x_1 p, x_2 p, x_3 p)^T,$$

где $t(x)$ и $p(x)$ — некоторые функции.

Введём операторы $\mathrm{rot}_i\colon H^k(B) \to H^{k-1}(S^1(B))$, $i = 1, 2, 3$, действующие на потенциал $\varphi \in H^k(B)$ по формулам

$$\mathrm{rot}_1 \varphi = \mathrm{rot}(\varphi, 0, 0)^T = \left(0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^T, \quad \mathrm{rot}_2 \varphi = \mathrm{rot}(0, \varphi, 0)^T = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^T,$$
$$\mathrm{rot}_3 \varphi = \mathrm{rot}(0, 0, \varphi)^T = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, 0\right)^T.$$

Общие формулы для компонент векторного поля $\mathrm{rot}_i \varphi$ следующие:

$$(\mathrm{rot}_i \varphi)_i = 0, \quad (\mathrm{rot}_i \varphi)_{i+1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i+2}}, \quad (\mathrm{rot}_i \varphi)_{i+2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i+1}}.$$

Здесь и далее индексы для операторов, компонент полей и переменных определены по модулю 3, т. е., например, при $i = 2$ имеем $i + 1 = 3$ и $i + 2 = 1$.

Для векторного поля $\mathbf{v}$ с компонентами $v_i = \psi^i$, $i = 1, 2, 3$, имеем

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{rot}_i \psi^i.$$

Поэтому, используя операторы rot_i, $i = 1, 2, 3$, разложение (3) для векторного поля $\mathbf{w} \in H^k(S^1(B))$ можно переписать в виде

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{rot}_i \psi^i + \mathrm{d}\psi^0, \quad \psi^i \in H^{k+1}(B), \quad i = 0, \ldots, 3, \quad \psi^0\big|_{\partial B} = 0. \tag{4}$$

Потенциалы в разложении (4) определяются не единственным образом. Поскольку $\mathrm{rot}(\mathrm{d}\varphi) = 0$, то к вектору $(\psi^1, \psi^2, \psi^3)^T$ можно добавить $\mathrm{d}\varphi$ с некоторым потенциалом φ так, чтобы $\psi^3 - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3} \equiv 0$. Таким образом, в разложении (4) можно положить $\psi^3 \equiv 0$. Поэтому в записи этого разложения можно использовать, например, только операторы rot_1 и rot_2:

$$\mathbf{w} = \mathrm{rot}_1 \psi^1 + \mathrm{rot}_2 \psi^2 + \mathrm{d}\psi^0, \quad \psi^i \in H^{k+1}(B), \quad i = 0, 1, 2, \quad \psi^0\big|_{\partial B} = 0. \tag{5}$$

Разложение соленоидальной части в разложении (5) определено неоднозначно. Именно, пусть $\mathrm{rot}_1 \psi^1 + \mathrm{rot}_2 \psi^2 = \mathrm{rot}_1 \widetilde{\psi}^1 + \mathrm{rot}_2 \widetilde{\psi}^2$, тогда имеет место система равенств

$$\frac{\partial \psi^1}{\partial x_3} = \frac{\partial \widetilde{\psi}^1}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \psi^2}{\partial x_3} = \frac{\partial \widetilde{\psi}^2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial \psi^2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi^1}{\partial x_2} = \frac{\partial \widetilde{\psi}^2}{\partial x_1} - \frac{\partial \widetilde{\psi}^1}{\partial x_2}.$$

Решая эту систему, приходим к выводу, что

$$\psi^1 = \widetilde{\psi}^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \quad \psi^2 = \widetilde{\psi}^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2},$$

где $\phi(x_1, x_2)$ — некоторая функция, не зависящая от x_3.

3.2. Симметричные 2-тензорные поля в $\mathbb{R}^3$

Используя разложения (1) и (3), нетрудно получить разложение для трёхмерного симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{u} \in H^k(S^2(B))$:

$$\mathbf{u} = {}^s\mathbf{u} + \mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) + \mathrm{d}^2\psi. \tag{6}$$

Соленоидальная часть ${}^s\mathbf{u}$ представима в виде

$${}^s\mathbf{u} = (\operatorname{rot}\mathbf{v}^1\ \operatorname{rot}\mathbf{v}^2\ \operatorname{rot}\mathbf{v}^3) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3^1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2^1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_3^2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2^2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_3^3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2^3}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial v_1^1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3^1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3^2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1^3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3^3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_2^1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1^1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2^2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2^3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1^3}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

для некоторых векторных полей $\mathbf{v}^j = (v_1^j, v_2^j, v_3^j)^T$, $j = 1, 2, 3$. В силу симметричности поля ${}^s\mathbf{u}$ (${}^su_{ij} = {}^su_{ji}$) на компоненты векторных полей $\mathbf{v}^j$, $j = 1, 2, 3$, налагаются условия:

$$\frac{\partial v_1^1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3^1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3^2}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2^2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial v_2^1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1^1}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3^3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2^3}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial v_2^2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1^2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_1^3}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3^3}{\partial x_1}.$$

Возникает вопрос: как конструировать произвольные соленоидальные симметричные 2-тензорные поля в $\mathbb{R}^3$?

Обобщим операторы rot_i на случай симметричных тензорных полей произвольной валентности $\operatorname{rot}_i\colon H^k(S^m(B)) \to H^{k-1}(S^{m+1}(B))$, $i = 1, 2, 3$. Они действуют на поле $\mathbf{u} \in H^k(S^m(B))$ по формулам

$$\operatorname{rot}_i \mathbf{u} = \sigma\mathbf{v}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где компоненты поля $\mathbf{v} \in H^{k-1}(T^{m+1}(B))$ определены формулами

$$v_{j_1\dots j_{m+1}} = (\operatorname{rot}_i(u_{j_1\dots j_m}))_{j_{m+1}}, \quad j_1, \dots, j_{m+1} = 1, 2, 3.$$

Пример. Поясним действие оператора rot_1 на простом примере. Найдём компоненты $\operatorname{rot}_1\mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \in H^1(S^1(B))$ — некоторое векторное поле:

$$\operatorname{rot}_1\mathbf{v} = \sigma\left(\operatorname{rot}_1 v_1\quad \operatorname{rot}_1 v_2\quad \operatorname{rot}_1 v_3\right) = \sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) & -\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. В приведённом примере у симметричного 2-тензорного поля $\mathrm{rot}_1\,\mathbf{v}$ компонента 11 равна нулю. Этим свойством обладают и остальные операторы rot_2 и rot_3. Именно, имеем $(\mathrm{rot}_i\,\mathbf{v})_{ii} = 0$ для всех $i = 1, 2, 3$. Аналогичное свойство имеет место и для симметричных тензорных полей произвольной валентности m. Действительно, применяя оператор rot_i к компонентам симметричного m-тензорного поля $\mathbf{u}$, имеем набор векторных полей $\mathrm{rot}_i(u_{i_1\ldots i_m})$, $i_1, \ldots, i_m = 1, 2, 3$, у каждого из которых i-я компонента равна нулю: $(\mathrm{rot}_i(u_{i_1\ldots i_m}))_i = 0$. Следовательно, после применения оператора симметризации имеем $(\mathrm{rot}_i\,\mathbf{u})_{\underbrace{i\ldots i}_{m+1}} = 0$.

Используя операторы rot_i, $i = 1, 2, 3$, введём операторы $\mathrm{rot}_{ij}\colon H^k(B) \to H^{k-2}(S^2(B))$, $i, j = 1, 2, 3$, переводящие функции в симметричные 2-тензорные поля по правилам $\mathrm{rot}_{ij}\,\varphi = \mathrm{rot}_i(\mathrm{rot}_j\,\varphi)$, $i, j = 1, 2, 3$. Компоненты полей $\mathrm{rot}_{ij}\,\varphi$, $i, j = 1, 2, 3$, вычисляются по формулам

$$\mathrm{rot}_{11}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} \\ 0 & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rot}_{12}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rot}_{22}\,\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} & 0 & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rot}_{23}\,\varphi = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rot}_{33}\,\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & 0 \\ -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rot}_{13}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем общие формулы для вычисления компонент полей $\mathrm{rot}_{ii}\,\varphi$ и $\mathrm{rot}_{i\,i+1}\,\varphi$, $i = 1, 2, 3$:

$$\mathrm{rot}_{ii}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} \\ 0 & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{rot}_{ii+1}\,\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{j+2}^2} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{j+1}\partial x_{j+2}} \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{j+2}^2} & 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_{j+2}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{j+1}\partial x_{j+2}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_{j+2}} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_{j+1}} \end{pmatrix}.$$

Здесь индекс $i=1,2,3$ указывает, что запись компонент симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{u}$ приводится в виде

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix} u_{ii} & u_{i\,i+1} & u_{i\,i+2}\\ u_{i+1\,i} & u_{i+1\,i+1} & u_{i+1\,i+2}\\ u_{i+2\,i} & u_{i+2\,i+1} & u_{i+2\,i+2}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Следующая теорема описывает свойства операторов rot_i, $i=1,2,3$, действующих на функции и векторные поля.

Теорема 1. *Имеют место следующие свойства.*

1. *Операторы* rot_i, $i=1,2,3$, *и* d *перестановочны, т. е. для* $\varphi\in H^2(B)$ *имеем* $\operatorname{rot}_i(\mathrm{d}\varphi)=\mathrm{d}(\operatorname{rot}_i\varphi)$, $i=1,2,3$. *Следовательно, поля* $\operatorname{rot}_i(\mathrm{d}\varphi)$, $i=1,2,3$, *потенциальные.*

2. *Операторы* rot_i, $i=1,2,3$, *перестановочны, т. е. для любого* $\varphi\in H^2(B)$ *выполнено*

$$\operatorname{rot}_i(\operatorname{rot}_{i+1}\varphi)=\operatorname{rot}_{i+1}(\operatorname{rot}_i\varphi),\quad i=1,2,3.$$

3. *Для произвольного векторного поля* $\mathbf{v}\in H^2(S^1(B))$ *выполнено*

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}_i\mathbf{v})=\frac{1}{2}\operatorname{rot}_i(\operatorname{div}\mathbf{v}),\quad i=1,2,3.$$

4. *Для произвольного* $\varphi\in H^3(B)$ *поля* $\operatorname{rot}_{ij}\varphi$, $i,j=1,2,3$, *соленоидальные, т. е. имеют место равенства* $\operatorname{div}(\operatorname{rot}_{ij}\varphi)=0$, $i,j=1,2,3$.

5. *Для произвольного* $\varphi\in H^3(B)$ *имеют место равенства*

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}_i(\mathrm{d}\varphi))=\frac{1}{2}\operatorname{rot}_i\Delta\varphi,\quad i=1,2,3,$$

где Δ *— оператор Лапласа.*

Доказательство. 1. Используя правило записи компонент (8) для $\operatorname{rot}_i(\mathrm{d}\varphi)$, имеем представление для $i=1,2,3$:

$$\operatorname{rot}_i(\mathrm{d}\varphi)=\sigma\left(\operatorname{rot}_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\quad \operatorname{rot}_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i+1}}\right)\quad \operatorname{rot}_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i+2}}\right)\right)$$

$$=\sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2}\\ -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+1}} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+2}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+1}}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2}-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2}\right)\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+1}} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2}-\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2}\right) & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}}\end{pmatrix}$$

$$=\sigma\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+2}} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_{i+1}}\\ 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}^2}\\ 0 & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+2}^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{i+1}\partial x_{i+2}}\end{pmatrix}$$

$$= \sigma \begin{pmatrix} \mathrm{d}(0) & \mathrm{d}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{i+2}}\right) & \mathrm{d}\left(-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{i+1}}\right)\end{pmatrix} = \mathrm{d}(\mathrm{rot}_i\,\varphi).$$

Пункт 2 устанавливается аналогично доказательству п. 1 с использованием правила записи компонент (8) для $\mathrm{rot}_i(\mathrm{rot}_{i+1}\,\varphi)$ и $\mathrm{rot}_{i+1}(\mathrm{rot}_i\,\varphi)$, $i = 1, 2, 3$.

3. Используя правило записи компонент (8) для $\mathrm{rot}_i\,\mathbf{v}$, имеем представление для $i = 1, 2, 3$:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}_i\,\mathbf{v}) = \mathrm{div}\,\sigma\begin{pmatrix}\mathrm{rot}_i\,v_i & \mathrm{rot}_i\,v_{i+1} & \mathrm{rot}_i\,v_{i+2}\end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{div}\,\sigma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+2}} \\ -\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+1}} & -\dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+1}} & -\dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+1}} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{div}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+2}} & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+1}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+2}} & \dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+2}} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+2}} - \dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+1}}\right) \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_{i+1}} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+2}} - \dfrac{\partial v_{i+1}}{\partial x_{i+1}}\right) & -\dfrac{\partial v_{i+2}}{\partial x_{i+1}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{i+2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{i+1}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\dfrac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}_i(\mathrm{div}\,\mathbf{v}).$$

Пункты 4, 5 следуют из п. 3 при $\mathbf{v} = \mathrm{rot}_j\,\varphi$, $j = 1, 2, 3$, и $\mathbf{v} = \mathrm{d}\varphi$ соответственно. □

Используя разложение (4) и операторы rot_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, мы можем переписать разложение (6) для трёхмерного симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w} \in H^k(S^2(B))$ в следующем виде:

$$\begin{gathered}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{3}(\mathrm{rot}_{ii}\,\psi^i + \mathrm{rot}_{i\,i+1}\,\psi^{i+3}) + \sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}(\mathrm{rot}_i\,\psi^{i+6}) + \mathrm{d}^2\psi^0, \\ \psi^i \in H^{k+2}(B), \quad i = 0, \ldots, 9.\end{gathered} \tag{9}$$

В частности, в разложении (9) соленоидального симметричного 2-тензорного поля участвуют только первые шесть слагаемых.

Теорема 2. *Пусть* $^s\mathbf{u} \in H^1(S^2(B))$ *— некоторое соленоидальное симметричное 2-тензорное поле. Тогда в его разложении* (9) *можно подобрать потенциалы таким образом, что из шести операторов* rot_{ii}, $\mathrm{rot}_{i\,i+1}$, $i = 1, 2, 3$, *будут участвовать только три такие, что ни одно из чисел 1, 2, 3 не участвует среди индексов сразу для всех трёх операторов.*

Доказательство. Получим один из возможных вариантов представления $^s\mathbf{u}$ с использованием трёх операторов. Другие варианты могут быть получены аналогичным путём. Положим в представлении (7) соленоидального поля $^s\mathbf{u}$ тождественно равными нулю v_1^1 и v_2^2 (см. пояснения к формуле (5)). Тогда получим

$$^s\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_3^1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial v_2^1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v_3^2}{\partial x_2} & {}^su_{13} \\ -\dfrac{\partial v_3^1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial v_3^2}{\partial x_1} & {}^su_{23} \\ \dfrac{\partial v_2^1}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial v_1^2}{\partial x_2} & {}^su_{33} \end{pmatrix},$$

где компоненты ${}^s u_{i3}$, $i = 1, 2, 3$, подлежат определению. В силу симметричности поля ${}^s\mathbf{u}$

$$-\frac{\partial v_3^1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3^2}{\partial x_2}, \quad {}^s u_{13} = \frac{\partial v_2^1}{\partial x_1}, \quad {}^s u_{23} = -\frac{\partial v_1^2}{\partial x_2}.$$

Из первого равенства следует, что существует некоторая функция $\varphi \in H^3(B)$ такая, что $v_3^1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, $v_3^2 = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}$. Определим компоненту ${}^s u_{33}$ из условия соленоидальности поля ${}^s\mathbf{u}$:

$$\frac{\partial\, {}^s u_{33}}{\partial x_3} = -\left(\frac{\partial^s u_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial^s u_{23}}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 v_2^1}{\partial x_1^2}.$$

Для некоторых функций $\psi, \chi \in H^3(B)$ выполнено $v_2^1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial x_3}$, $v_1^2 = \dfrac{\partial\chi}{\partial x_3}$ и, следовательно, ${}^s u_{33} = \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}$. Таким образом, мы получили представление произвольного соленоидального симметричного 2-тензорного поля ${}^s\mathbf{u}$ с использованием трёх функций:

$${}^s\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} & -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x_3^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x_2\partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_3} & -\dfrac{\partial^2\chi}{\partial x_2\partial x_3} & \dfrac{\partial^2\chi}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} = \mathrm{rot}_{11}\,\chi + \mathrm{rot}_{22}(-\psi) + \mathrm{rot}_{33}\,\varphi.$$

Дополнительное условие на операторы, для представимости любого симметричного 2-тензорного поля с использованием трёх операторов, связано со свойством операторов rot_i, $i = 1, 2, 3$, из замечания 2. Действительно, если, например, индекс 1 есть у всех операторов, тогда мы имеем сумму:

$$\mathrm{rot}_{11}\,\varphi^1 + \mathrm{rot}_{12}\,\varphi^2 + \mathrm{rot}_{13}\,\varphi^3 = \mathrm{rot}_1(\mathrm{rot}_1\,\varphi^1 + \mathrm{rot}_2\,\varphi^2 + \mathrm{rot}_3\,\varphi^3) = \mathrm{rot}_1\,\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = \mathrm{rot}_1\,\varphi^1 + \mathrm{rot}_2\,\varphi^2 + \mathrm{rot}_3\,\varphi^3$. Тогда у симметричного 2-тензорного поля $\mathrm{rot}_1\,\mathbf{v}$ компонента 11 равна нулю. Следовательно, с использованием операторов rot_{11}, rot_{12}, rot_{13} невозможно получить представление соленоидального поля ${}^s\mathbf{u}$, у которого ${}^s u_{11} \neq 0$. $\square$

Используя теорему 2 и разложение (5), разложение (9) для трёхмерного симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w} \in H^k(S^2(B))$ можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{w} = \mathrm{rot}_{11}\,\psi^1 + \mathrm{rot}_{12}\,\psi^2 + \mathrm{rot}_{22}\,\psi^3 + \mathrm{d}(\mathrm{rot}_1\,\psi^4) + \mathrm{d}(\mathrm{rot}_2\,\psi^5) + \mathrm{d}^2\psi^0, \tag{10}$$

где $\psi^i \in H^{k+2}(B)$, $i = 0, \ldots, 5$. Отметим, что представление соленоидальной части поля $\mathbf{w}$ только с использованием операторов rot_{11}, rot_{12} и rot_{22} можно получить, используя рассуждения доказательства теоремы 2 и положив $v_3^1 = v_3^2 = 0$.

Замечание 3. Количество потенциалов, участвующих в разложениях (5) и (10), совпадает с количеством различных компонент векторного и симметричного 2-тензорного полей соответственно.

3.3. Симметричные m-тензорные поля в $\mathbb{R}^3$

Введём операторы $\mathrm{rot}_{i_1\ldots i_m} : H^k(B) \to H^{k-m}(S^m(B))$, $i_1, \ldots, i_m = 1, 2, 3$, переводящие функции в симметричные m-тензорные поля по правилам

$$\mathrm{rot}_{i_1\ldots i_m}\,\varphi = \mathrm{rot}_{i_1}\big(\ldots\big(\mathrm{rot}_{i_m}\,\varphi\big)\big), \quad i_1, \ldots, i_m = 1, 2, 3.$$

Доказательства теорем для симметричных m-тензорных полей отличаются от доказательств аналогичных теорем для симметричных 2-тензорных полей лишь более трудоёмкими вычислениями чисто технического характера и поэтому не приводятся.

Теорема 3. *Имеют место следующие свойства.*

1. *Операторы* rot_i, $i = 1,2,3$, *и* d *перестановочны, т. е. для произвольного* $\mathbf{w} \in H^2(S^m(B))$, $m \geqslant 0$, *имеем* $\operatorname{rot}_i(\mathrm{d}\mathbf{w}) = \mathrm{d}(\operatorname{rot}_i \mathbf{w})$, $i = 1,2,3$. *Следовательно, поля* $\operatorname{rot}_i(\mathrm{d}\mathbf{w})$, $i = 1,2,3$ *потенциальные.*

2. *Операторы* rot_i, $i = 1,2,3$, *перестановочны, т. е. для любого* $\mathbf{w} \in H^2(S^m(B))$, $m \geqslant 0$, *выполнено*

$$\operatorname{rot}_i(\operatorname{rot}_{i+1} \mathbf{w}) = \operatorname{rot}_{i+1}(\operatorname{rot}_i \mathbf{w}), \quad i = 1,2,3.$$

3. *Для произвольного симметричного тензорного поля* $\mathbf{w} \in H^2(S^m(B))$, $m \geqslant 1$, *выполнено*

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}_i \mathbf{w}) = \left(\frac{m}{m+1}\right) \operatorname{rot}_i(\operatorname{div} \mathbf{w}), \quad i = 1,2,3.$$

4. *Для произвольного* $\varphi \in H^{m+1}(B)$ *поля* $\operatorname{rot}_{i_1 \dots i_m} \varphi$, $i_1, \dots, i_m = 1,2,3$, *соленоидальные, т. е. имеют место равенства* $\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}_{i_1 \dots i_m} \varphi\big) = 0$, $i_1, \dots, i_m = 1,2,3$.

5. *Для произвольного* $\mathbf{w} \in H^3(S^m(B))$, $m \geqslant 0$, *имеют место равенства*

$$\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}_i\big(\mathrm{d}\mathbf{w}\big)\big) = \left(\frac{m+1}{m+2}\right) \operatorname{rot}_i \triangle \mathbf{w}, \quad i = 1,2,3,$$

где оператор Лапласа Δ *применяется покомпонентно.*

Отметим, что коэффициенты в пп. 3 и 5 возникают вследствие того, что в левой и правой частях равенств оператор симметризации применяется к полям различной валентности.

Теорема 4. *Пусть* ${}^s\mathbf{u} \in H^1(S^m(B))$, $m \geqslant 1$, *— некоторое соленоидальное симметричное* m*-тензорное поле. Тогда в его разложении*

$${}^s\mathbf{u} = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant 3} \operatorname{rot}_{i_1 \dots i_m} \psi^{i_1 \dots i_m},$$

где $\psi^{i_1 \dots i_m} \in H^{m+1}(B)$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant 3$, *можно подобрать потенциалы таким образом, что не более* $m+1$ *из них будут отличны от нуля. При этом для любого поля* ${}^s\mathbf{u} \in H^1(S^m(B))$ *новое разложение на* $m+1$ *слагаемых будет иметь место, если ни одно из чисел* 1, 2, 3 *не участвует среди индексов сразу для всех* $m+1$ *операторов.*

Под условия теоремы 4 подходит, например, следующий вариант разложения соленоидального поля:

$${}^s\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{m} \operatorname{rot}_{\underbrace{1\dots1}_{m-k}\underbrace{2\dots2}_{k}} \psi^k, \quad \psi^k \in H^{m+1}(B), \quad k = 0, \dots, m.$$

Используя это разложение, получаем новое детальное разложение симметричного m-тензорного поля.

Теорема 5. *Любое трёхмерное тензорное поле* $\mathbf{w} \in H^k(S^m(B))$, $m \geqslant 1$, *можно представить в виде суммы*

$$\mathbf{w} = \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{d}^{m-n}(\operatorname{rot}_{\underbrace{1\dots1}_{n-k}\underbrace{2\dots2}_{k}} \psi^{i_{kn}}) + \mathrm{d}^m \psi^1, \quad i_{kn} = k + 1 + \frac{n(n+1)}{2}, \tag{11}$$

где $\psi^i \in H^{k+m}(B)$, $i = 1, \dots, \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Замечание 4. Количество потенциалов, участвующих в разложении (11), совпадает с количеством различных компонент симметричного m-тензорного поля, как в векторном и 2-тензорном случаях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введены новые дифференциальные операторы, являющиеся обобщением оператора ротора и действующие на трёхмерные симметричные m-тензорные поля. Проведено исследование свойств этих операторов и получены новые детальные разложения симметричных m-тензорных полей в $\mathbb{R}^3$. В частности, показано, что поля, участвующие в разложении любого симметричного m-тензорного поля, могут быть построены с использованием трёх операторов: оператора внутреннего дифференцирования d и, например, операторов rot_1, rot_2. При этом число потенциалов, участвующих в разложении, совпадает с количеством различных компонент симметричного m-тензорного поля. По своим свойствам операторы rot_i, $i = 1, 2, 3$, являются аналогами оператора $\mathrm{d}^{\perp}$, действующего на двумерные тензорные поля. Результаты, полученные в работе, представляют фундаментальный и прикладной интерес, в частности для дальнейшего изучения свойств продольного лучевого преобразования и нормального преобразования Радона, действующих на трёхмерные симметричные m-тензорные поля, и разработки алгоритмов численного решения задач по обращению этих операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Norton S.J.* Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging // Geophys. J. Internat. 1989. V. 97, N 1. P. 161–168; DOI:10.1111/j.1365-246X.1989.tb00491.x
2. *Braun H., Hauck A.* Tomographic reconstruction of vector fields // IEEE Trans. Signal Processing. 1991. V. 39, N 2. P. 464–471; DOI:10.1109/78.80830
3. *Sparr G., Strahlen K., Lindstrem K., Persson H. W.* Doppler tomography for vector fields // Inverse Problems. 1995. V. 11, N 5. P. 1051–1061; DOI:10.1088/0266-5611/11/5/009
4. *Defrise M., Gullberg G.T.* 3D reconstruction of tensors and vectors. Technical Report. N LBNL–54936. Berkeley: LBNL, 2005.
5. *Schuster T.* 20 years of imaging in vector field tomography: a review // Math. Meth. Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Dariation Therapy (IMRT). Basel: Birkhauser, 2008. P. 389–424.
6. *Kazantsev S.G., Bukhgeim A.A.* Inversion of the scalar and vector attenuated x-ray transforms in a unit disc // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2007. V. 15, N 7. P. 735–765; DOI:10.1515/jiip.2007.040
7. *Tamasan A.* Tomographic reconstruction of vector fields in variable background media // Inverse Problems. 2007. V. 23, N 5. P. 2197–2205; DOI:10.1088/0266-5611/23/5/022
8. *Ainsworth G.* The attenuated magnetic ray transform on surfaces // Inverse Probl. Imaging. 2013. V. 7, N 1. P. 27–46; DOI:10.3934/ipi.2013.7.27
9. *Svetov I. E., Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.* A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium // Math. Comput. Simul. 2014. V. 97. P. 207–223; DOI:10.1016/j.matcom.2013.10.002
10. *Monard F.* Inversion of the attenuated geodesic X-ray transform over functions and vector fields on simple surfaces // SIAM J. Math. Anal. 2016. V. 48, N 2. P. 1155–1177; DOI:10.1137/15M1016412
11. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.
12. *Puro A.* Magneto-photoelasticity as parametric tensor field tomography // Inverse Problems. 1998. V. 14, N 5. P. 1315–1330; DOI:10.1088/0266-5611/14/5/015
13. *Sharafutdinov V.* The linearized problem of magneto-photoelasticity // Inverse Probl. Imaging. 2014. V. 8, N 1. P. 247–257; DOI:10.3934/ipi.2014.8.247
14. *Aben H.K., Idnurm S.J., Josepson J., Kell K.-J. E., Puro A. E.* Optical tomography of stress tensor field // Analytical Meth. Optical Tomography. Proc. SPIE. 1991. V. 1843. P. 220–229; DOI:10.1117/12.131894

15. *Пуро А.Э., Каров Д.Д.* Тензорная томография остаточных напряжений // Оптика и спектроскопия. 2007. Т. 103, № 4. С. 698–703.

16. *Lionheart W., Withers P.* Diffraction tomography of strain // Inverse Problems. 2015. V. 31, N 4. Article 045005; DOI:10.1088/0266-5611/31/4/045005

17. *Карасев В.П.* Поляризационная томография квантового излучения: теоретические аспекты. Операторный подход // Теор. и мат. физика. 2005. Т. 145, № 3. С. 344–357; DOI:10.4213/tmf1904

18. *Tao W., Rohmer D., Gullberg G.T., Seo Y., Huang Q.* An Analytical Algorithm for Tensor Tomography From Projections Acquired About Three Axes // IEEE Trans. Medical Imaging. 2022. V. 41, N 11. P. 3454–3472. DOI: 10.1109/TMI.2022.3186983

19. *Derevtsov E.Yu., Svetov I.E.* Tomography of tensor fields in the plain // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 2. P. 24–68;

20. *Weyl H.* The method of ortogonal projection in potential theory // Duke Math. J. 1940. V. 7, N 1. P. 411–444; DOI:10.1215/S0012-7094-40-00725-6

21. *Деревцов Е.Ю., Кашина И.Г.* Численное решение задачи векторной томографии с помощью полиномиальных базисов // Сиб. журн. вычисл. мат. 2002. Т. 5, № 3. С. 233–254.

22. *Деревцов Е.Ю., Кашина И.Г.* Приближённое решение задачи реконструкции тензорного поля второй валентности с помощью полиномиальных базисов // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 1. С. 39–62.

23. *Светов И.Е., Полякова А.П.* Восстановление 2-тензорных полей, заданных в единичном круге, по их лучевым преобразованиям на основе МНК с использованием B-сплайнов // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 2. С. 183–199.

24. *Derevtsov E.Yu., Efimov A.V., Louis A.K., Schuster T.* Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 19, N 4–5. P. 689–715; DOI:10.1515/jiip.2011.047

25. *Деревцов Е.Ю., Полякова А.П.* Решение задачи интегральной геометрии 2-тензорных полей методом сингулярного разложения // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, № 3. С. 73–94.

26. *Светов И.Е., Полякова А.П.* Приближённое решение задачи двумерной 2-тензорной томографии с использованием усеченного сингулярного разложения // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 480–499. DOI:10.17377/semi.2015.12.041

27. *Derevtsov E.Yu., Louis A.K., Maltseva S.V., Polyakova A. P., Svetov I. E.* Numerical solvers based on the method of approximate inverse for 2D vector and 2-tensor tomography problems // Inverse Problems. 2017. V. 33, N 12. Article 124001; DOI:10.1088/1361-6420/aa8f5a

28. *Светов И.Е., Полякова А.П., Мальцева С.В.* Метод приближённого обращения для операторов лучевых преобразований, действующих на двумерные симметричные m-тензорные поля // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 1. С. 104–115; DOI:10.33048/sibjim.2019.22.110

29. *Полякова А.П.* Восстановление векторного поля в шаре по его нормальному преобразованию Радона // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, № 4. С. 119–142.

30. *Светов И.Е.* Метод приближённого обращения для операторов преобразования Радона функций и нормального преобразования Радона векторных и симметричных 2-тензорных полей в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 1073–1087; DOI:10.33048/semi.2020.17.081

31. *Polyakova A.P.* Singular value decomposition of a normal Radon transform operator acting on 3D symmetric 2-tensor fields // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 2. С. 1572–1595; DOI:10.33048/semi.2021.18.117

32. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.

33. *Быховский Э.Б., Смирнов Н.В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа // Тр. МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 5–36.

34. *Girault V., Raviart P.-A.* Finite Element Methods for Navier—Stokes Equations, Theory and Algorithms. Berlin: Springer-Verl., 1986; DOI:10.1007/978-3-642-61623-5

35. *Borchers W., Sohr H.* On the equations $\operatorname{rot} v = g$ and $\operatorname{div} u = f$ with zero boundary conditions // Hokkaido Math. J. 1990. V. 19. P. 67–87; DOI:10.14492/HOKMJ/1381517172

36. *Backus G.E.* Poloidal and toroidal fields in geomagnetic field modeling // Rev. Geophysics. 1986. V. 24, N 1. P. 75–109; DOI:10.1029/rg024i001p00075

37. *Казанцев С.Г., Кардаков В.Б.* Полоидально-тороидальное разложение соленоидальных векторных полей в шаре // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 74–95; DOI:10.33048/sibjim.2019.22.307

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.983:514.8

DECOMPOSITION OF SYMMETRIC TENSOR FIELDS IN $\mathbb{R}^3$

© 2023 **I. E. Svetov**[a], **A. P. Polyakova**[b]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]apolyakova@math.nsc.ru

Received 19.05.2022, revised 04.10.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. In the article, we introduce generalizations of the curl operator acting on three-dimensional symmetric m-tensor fields and establish properties of them. For the spaces of three-dimensional tensor fields, new detailed decompositions are obtained. Each term in the decompositions is constructed using of one function. Decompositions of this kind play a special role, in particular, in the study of tomographic integral operators acting on symmetric m-tensor fields, $m \geqslant 1$, and in the construction of algorithms for solving the emerging inverse problems.

Keywords: decomposition of symmetric tensor field, solenoidal field, potential field, potential, curl operator, computerized tomography, ray transform, Radon transform.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.115

REFERENCES

1. Norton S.J. Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging. *Geophys. J. Internat.*, 1989, Vol. 97, No. 1, pp. 161–168; DOI:10.1111/j.1365-246X.1989.tb00491.x
2. Braun H., Hauck A. Tomographic reconstruction of vector fields. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1991, Vol. 39, No. 2, pp. 464–471; DOI:10.1109/78.80830
3. Sparr G., Strahlen K., Lindstrem K., Persson H. W. Doppler tomography for vector fields. *Inverse Problems*, 1995, Vol. 11, No. 5, pp. 1051–1061; DOI:10.1088/0266-5611/11/5/009
4. Defrise M., Gullberg G.T. 3D reconstruction of tensors and vectors. Technical Report. N LBNL–54936. Berkeley: LBNL, 2005.
5. Schuster T. 20 years of imaging in vector field tomography: a review. *Math. Meth. Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Dariation Therapy (IMRT).* Basel: Birkhauser, 2008. P. 389–424.
6. Kazantsev S.G., Bukhgeim A.A. Inversion of the scalar and vector attenuated x-ray transforms in a unit disc. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2007, Vol. 15, No. 7, pp. 735–765; DOI:10.1515/jiip.2007.040
7. Tamasan A. Tomographic reconstruction of vector fields in variable background media. *Inverse Problems*, 2007, Vol. 23, No. 5, pp. 2197–2205; DOI:10.1088/0266-5611/23/5/022
8. Ainsworth G. The attenuated magnetic ray transform on surfaces. *Inverse Probl. Imaging*, 2013, Vol. 7, No. 1, pp. 27–46; DOI:10.3934/ipi.2013.7.27
9. Svetov I. E., Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T. A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium. *Math. Comput. Simul.*, 2014, Vol. 97, pp. 207–223; DOI:10.1016/j.matcom.2013.10.002
10. Monard F. Inversion of the attenuated geodesic X-ray transform over functions and vector fields on simple surfaces. *SIAM J. Math. Anal.*, 2016, Vol. 48, No. 2, pp. 1155–1177; DOI:10.1137/15M1016412
11. Sharafutdinov V. A. Integral Geometry of Tensor Fields. Utrecht: VSP, 1994; DOI:10.1515/9783110900095

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

12. Puro A. Magneto-photoelasticity as parametric tensor field tomography. *Inverse Problems*, 1998, Vol. 14, No. 5, pp. 1315–1330; DOI:10.1088/0266-5611/14/5/015
13. Sharafutdinov V. The linearized problem of magneto-photoelasticity. *Inverse Probl. Imaging*, 2014, Vol. 8, No. 1, pp. 247–257; DOI:10.3934/ipi.2014.8.247
14. Aben H.K., Idnurm S.J., Josepson J., Kell K.-J. E., Puro A. E. Optical tomography of stress tensor field. *Analytical Meth. Optical Tomography. Proc. SPIE*, 1991, Vol. 1843, pp. 220–229; DOI:10.1117/12.131894
15. Puro A. E., Karov D. D. Tensor field tomography of residual stresses. *Optics and Spectroscopy*, 2007, Vol. 103, No. 4, pp. 678–682; DOI:10.1134/S0030400X07100244
16. Lionheart W., Withers P. Diffraction tomography of strain. *Inverse Problems*, 2015, Vol. 31, No. 4, article 045005; DOI:10.1088/0266-5611/31/4/045005
17. Karassiov V. P. Polarization tomography of quantum radiation: theoretical aspects and operator approach. *Theor. Math. Phys.*, 2005, Vol. 145, No. 3, pp. 1666–1677; DOI:10.1007/s11232-005-0189-4
18. Tao W., Rohmer D., Gullberg G.T., Seo Y., Huang Q. An analytical algorithm for tensor tomography from projections acquired about three axes. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2022, Vol. 41, No. 11, pp. 3454–3472; DOI: 10.1109/TMI.2022.3186983
19. Derevtsov E.Yu., Svetov I.E. Tomography of tensor fields in the plain. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2015, Vol. 3, No. 2, pp. 24–68;
20. Weyl H. The method of ortogonal projection in potential theory. *Duke Math. J.*, 1940, Vol. 7, No. 1 pp. 411–444; DOI:10.1215/S0012-7094-40-00725-6
21. Derevtsov E.Yu., Kashina I.G. Chislennoe reshenie zadachi vektornoi tomografii s pomoshch'yu polinomial'nykh bazisov [Numerical solution of the vector tomography problem using polynomial bases]. *Sib. Zhurn. Vychisl. Mat.*, 2002, Vol. 5, No. 3, pp. 233–254 (in Russian).
22. Derevtsov E.Yu., Kashina I.G. Priblizhennoe reshenie zadachi rekonstruktsii tenzornogo polya vtoroi valentnosti s pomoshch'yu polinomial'nykh bazisov [Approximate solution of the problem of reconstruction of the tensor field of the second valence using polynomial bases]. Sib. Zhurn. Indust. Mat., 2002, Vol. 5, No. 1, pp. 39–62 (in Russian).
23. Svetov I.E., Polyakova A.P. Reconstruction of 2-tensor fields, given in a unit circle, by their ray transform based on LSM with B-splines. *Numer. Anal. Appl.*, 2010, Vol. 3, No. 2, pp. 151–164; DOI:10.1134/S1995423910020047
24. Derevtsov E.Yu., Efimov A.V., Louis A.K., Schuster T. Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2011, Vol. 19, No. 4–5, pp. 689–715; DOI:10.1515/jiip.2011.047
25. Derevtsov E.Yu., Polyakova A.P. An application of the SVD-method to the problem of integral geometry of 2-tensor fields. *J. Math. Sci.*, 2014, Vol. 202, No. 1, pp. 50–71; DOI:10.1007/s10958-014-2033-6
26. Svetov I.E., Polyakova A.P. Priblizhennoe reshenie zadachi dvumernoi 2-tenzornoi tomografii s ispol'zovaniem usechennogo singulyarnogo razlozheniya [Approximate solution of the problem of two-dimensional 2-tensor tomography using truncated singular decomposition]. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, Vol. 12, pp. 480–499 (in Russian); DOI:10.17377/semi.2015.12.041
27. Derevtsov E.Yu., Louis A.K., Maltseva S.V., Polyakova A. P., Svetov I. E. Numerical solvers based on the method of approximate inverse for 2D vector and 2-tensor tomography problems. *Inverse Problems*, 2017, Vol. 33, No. 12, article 124001; DOI:10.1088/1361-6420/aa8f5a
28. Svetov I.E., Polyakova A.P., Maltseva S.V. The method of approximate inverse for ray transform operators on two-dimensional symmetric m-tensor fields. *J. Appl. Indust. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 1, pp. 157–167; DOI:10.1134/S1990478919010162
29. Polyakova A.P. Reconstruction of a vector field in a ball from its normal Radon transform. *J. Math. Sci.*, 2015, Vol. 205, No. 3, pp. 418–439; DOI:10.1007/s10958-015-2256-1
30. Svetlov I.E. Metod priblizhennogo obrashcheniya dlya operatorov preobrazovaniya Radona funktsii i normal'nogo preobrazovaniya Radona vektornykh i simmetrichnykh 2-tenzornykh polei v $\mathbb{R}^3$ [Method of approximate inversion for Radon transformation operators of functions and normal Radon transformation of vector and symmetric 2-tensor fields in $\mathbb{R}^3$]. *Sibir. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, Vol. 17, pp. 1073–1087 (in Russian); DOI:10.33048/semi.2020.17.081

31. Polyakova A.P. Singular value decomposition of a normal Radon transform operator acting on 3D symmetric 2-tensor fields. *Sibir. Elektron. Mat. Izv.*, 2021, Vol. 18, No. 2, pp. 1572–1595; DOI:10.33048/semi.2021.18.117

32. Kochin N.E. Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischisleniya [Vector calculus and the beginnings of tensor calculus]. Moscow: Nauka, 1965 (in Russian).

33. Bykhovsky E.B., Smirnov N.V. Ob ortogonal'nom razlozhenii prostranstva vektor-funktsii, kvadratichno summiruemykh po zadannoi oblasti, i operatorakh vektornogo analiza [On the orthogonal decomposition of the space of vector functions, quadratically summable over a given domain, and vector analysis operators]. *Tr. MIAN SSSR*, 1960, Vol. 59, pp. 5–36 (in Russian).

34. Girault V., Raviart P.-A. Finite Element Methods for Navier—Stokes Equations, Theory and Algorithms. Berlin: Springer-Verl., 1986; DOI:10.1007/978-3-642-61623-5

35. Borchers W., Sohr H. On the equations $\operatorname{rot} v = g$ and $\operatorname{div} u = f$ with zero boundary conditions. *Hokkaido Math. J.*, 1990, Vol. 19, pp. 67–87; DOI:10.14492/HOKMJ/1381517172

36. Backus G.E. Poloidal and toroidal fields in geomagnetic field modeling. *Rev. Geophysics*, 1986, Vol. 24, No. 1, pp. 75–109; DOI:10.1029/rg024i001p00075

37. Kazantsev S. G., Kardakov V. B. Poloidal-toroidal decomposition of solenoidal vector fields in the ball. *J. Appl. Indust. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 3, pp. 480–499; DOI:10.1134/S1990478919030098

УДК 539.3;519.6

ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ИЗМЕНЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ ПРИ СПЕКАНИИ КЕРАМИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© 2023 О. А. Солнышкина[1,2a], Н. Б. Фаткуллина[1,2b], А. З. Булатова[1,2c], В. Н. Киреев[1,2d], А. Р. Билялов[1e], И. Ш. Ахатов[1f], В. Н. Павлов[1g]

[1]*Башкирский государственный медицинский университет, ул. Ленина, 3, г. Уфа 450008, Россия,*
[2]*Центр микро- и наномасштабной динамики дисперсных систем, Уфимский университет науки и технологий, ул. Заки Валиди, 32, г. Уфа 450076, Россия*

E-mails: [a]olgasolnyshkina@gmail.com, [b]nazgulbay@mail.ru, [c]bulatova29@yandex.ru, [d]kireev@anrb.ru, [e]azat.bilyalov@gmail.com, [f]iskander.akhatov@gmail.com, [g]rectorat@bashgmu.ru

Поступила в редакцию 04.08.2022 г.; после доработки 04.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

В рамках данной работы изучение процесса свободного спекания керамического изделия проводится с применением реологической теории спекания. Численное решение задачи в трёхмерном случае выполнено методом конечных элементов с помощью свободно распространяемого программного обеспечения FreeFem++. Для тестирования модели были реализованы эксперименты по спеканию образцов из керамической пасты на основе порошка оксида алюминия при различных температурных режимах. Валидация модели проведена путём сопоставления численных и экспериментальных данных по изменению пористости.

Ключевые слова: реологическая модель спекания, 3Д-печать, керамический порошок, оксид алюминия, численное моделирование, метод конечных элементов.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.116

ВВЕДЕНИЕ

Технологии и подходы аддитивного производства находят широкое применение в различных областях науки и промышленности, особенно в случаях, когда критически важным является изготовление сложных конструкций, мелкосерийное или индивидуальное производство [1]. В последние годы технологии 3D-печати применяются при изготовлении керамических имплантов в медицине [2], поскольку они обладают хорошей биосовместимостью. Процесс изготовления керамических имплантов с использованием технологии 3D-печати можно разделить на несколько стадий: проектирование трёхмерной компьютерной модели в CAD системах, непосредственно печать изделия, окончательный этап обработки, включающий в себя многостадийное спекание при различных условиях. Основной принцип процесса спекания заключается в консолидации рыхлых или слабосвязанных порошков при повышенных температурах, близких к температуре плавления, с и без применения внешних полей (электромагнитного, давления).

Работа выполнена в рамках гранта Республики Башкортостан для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных.

Процесс спекания обычно описывают в три стадии [3] (см. рис. 1). На ранней или начальной стадии между отдельными частицами образуются так называемые шейки (зона межзёренного контакта, обозначена на рис. 1), а уплотнение регулируется ростом шейки [4]. Частицы могут скользить и вращаться, образуя границы раздела с более низкой энергией, которые способствуют росту зёрен. По мере увеличения ширины шейки и усиления коалесценции частиц размеры пор уменьшаются. Миграция материала на свободные поверхности и обратно останавливается. Уплотнение в значительной степени ограничивается границами зёрен и диффузией. Эта фаза с ограниченной диффузией характерна для стадии промежуточного спекания, на которой поры остаются взаимосвязанными. На заключительном этапе спекания каналы между зёрнами закрываются и образуются изолированные поры. Кинетические явления на конечной стадии обычно моделируются как явления в объёмном материале. На всех трёх стадиях происходит уплотнение материала и, как следствие, существенное изменение объёма и формы образца, пористость которого уменьшается в среднем на 30–35%. И в этой связи особенно актуальной является задача более точного прогнозирования формы конечного керамического изделия.

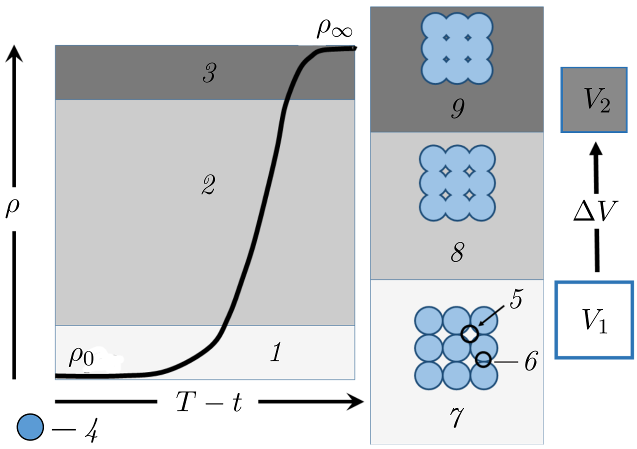


Рис. 1. Этапы спекания керамического порошка: начальная стадия (*1*), промежуточная стадия (*2*), финальная стадия (*3*), частицы керамического порошка (*4*), пора (*5*), «шея» (*6*), формирование зоны «шеи» (*7*), изолированные поры (*8*), связанные поры (*9*)

В зависимости от масштаба рассматриваемой среды подходы к моделированию спекания можно разделить на атомарные, микроструктурные и континуальные. Основным инструментом для получения фундаментальных характеристик процесса на нано- и микроуровне являются методы молекулярной динамики [5, 6]. Молекулярное динамическое моделирование успешно используется для исследования механизмов спекания и эволюции микроструктуры наноразмерных порошков [7], для расчёта коэффициента диффузии металлов и диффузии ионов в керамике. Тем не менее, моделирование на уровне частиц и тем более прогнозирование формы конечного изделия на макроуровне чаще всего осуществляется с помощью микромеханического и континуального подходов. Для моделирования кинетики роста зерна и изменения микроструктуры образца применяются методы дискретного элемента [8], кинетические методы Монте-Карло [9], метод фазовых полей [10], метод граничных элементов [1].

В большинстве моделей спекание рассматривалось как коллективный результат термически активируемых адгезионных процессов, приводящих к росту контактов между частицами и их коалесценции. Разработанные подходы в основном были направлены на изучение механизмов межчастичного взаимодействия, т. е. на исследование локальной кинетики процесса. Однако кинетика спекания реальных пористых тел определяется не только свойствами частиц порошка и характером их взаимодействия, но и макроскопическими факторами. К ним относятся кинематические ограничения (например, сцепление торца пористого образца с поверхностью печи), внешние приложенные силы, а также неоднородность свойств в исследуемом объёме. Указанные проблемы могут быть решены только в рамках макроскопического описания, которое должно основываться на понятиях, принципиально отличных от представлений локального анализа.

Перспективный подход для решения указанной проблемы связан с использованием идеологий из механики сплошных сред, успешно применяемых для описания уплотнения пористых тел и основанных на теориях пластической деформации пористых тел. Одно из наиболее характерных внешних проявлений процесса спекания пористого тела — изменение его линейных размеров (уменьшение). Это даёт возможность рассматривать спекание как некоторый макроскопический процесс деформации объёма и формы пористого тела, осуществляющейся путём течения вещества в твёрдой фазе. Поскольку внутренняя структура пористого пространства неоднородна, скорости течения вещества в микрообъёмах также неоднородны, причём локальные значения являются случайными величинами. В то же время поле макроскопически усреднённых скоростей течения во многих случаях может быть близким к однородному, например при спекании пористых тел с однородной макроскопической плотностью. В этом смысле спекание можно рассматривать как предмет реологического исследования [12]. Оптимизация процессов спекания реальных деталей на сегодняшний день возможна только с использованием макроскопического подхода, основанного на механике сплошных сред. Кроме того, континуальная теория спекания допускает обобщения, включая воздействие различных полей [4,13].

Одной из ключевых задач в развитии индустрии 3Д-печати из керамики является подбор корректной модели для прогнозирования поведения конкретного материала в процессе изготовления изделия. Целью данной работы является разработка математического подхода к трёхмерному моделированию изменения объёма и формы керамического изделия при спекании. Поскольку свойства и параметры каждого конкретного керамического порошка существенно влияют на кинетику процесса спекания и, как следствие, на изменение макроскопических параметров изделия, валидация модели производилась с использованием экспериментальных данных.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Представления макрореологии используются при формулировании закона поведения пористого тела под действием внешних сил, а также с учётом действием движущих сил спекания. Движущие силы спекания в реологической теории спекания связаны с действием давления Лапласа (потенциал спекания или напряжение спекания). Предполагается, что внешние взаимодействия и движущие силы вносят аддитивный вклад в поведение пористого тела, изменения формы и объёма необратимы.

Подробнее опишем основные уравнения подхода. Континуальная теория определяет поведение сжимаемой сплошной среды при спекании по аналогии с теорией упругости следующим уравнением, связывающим тензор напряжений σ_{ij} и тензор скоростей деформации ε_{ij}, которое в декартовой системе координат имеет вид [14, 15]

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma(W)}{W}\left[\varphi\varepsilon_{ij} + \left(\psi - \frac{1}{3}\varphi\right)\dot{\varepsilon}\delta_{ij}\right] + P_L\delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3, \tag{1}$$

где W и $\sigma(W)$ — эквивалентные скорость деформации и напряжение, соответствующие поведению плотной фазы, φ и ψ — сдвиговый и объёмный модули вязкости, δ_{ij} — символ Кронекера, $\dot{\varepsilon}$ — первый инвариант тензора скоростей деформации, т. е. сумма диагональных компонентов $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ (для трёхмерного случая). Физически $\dot{\varepsilon}$ отражает изменение объёма пористого тела.

Эффективный эквивалент скоростей деформации зависит от инвариантов тензора скоростей деформации следующим образом: $W = \dfrac{1}{\sqrt{1-\theta}}\sqrt{\varphi\dot{\gamma}^2 + \psi\dot{\varepsilon}^2}$, где $\dot{\gamma}$ — второй инвариант тензора скоростей деформаций, физический смысл которого заключается в скорости изменения формы пористого тела.

В данной работе рассматривается модель для описания изменения пористости керамических изделий при изготовлении с помощью 3Д-печати методом лазерной стереолитографии (SLA). В таком случае в технологическом плане процесс спекания происходит без приложения внешних полей и внешнего давления, так называемое свободное спекание. При спекании без давления возникают низкие напряжения и предполагается, что доминирующими механизмами переноса вещества являются диффузионные или вязкие механизмы. Эти механизмы линейны, и выполняется линейное соотношение [3]

$$\sigma(W) = 2\eta W, \tag{2}$$

где η — сдвиговая вязкость материала. Тогда с учётом (2) уравнение (1) можно переписать в виде

$$\sigma_{ij} = 2\eta\left[\varphi\varepsilon_{ij} + \left(\psi - \frac{1}{3}\varphi\right)\dot{\varepsilon}\delta_{ij}\right] + P_L\delta_{ij}. \tag{3}$$

Правая часть уравнения содержит слагаемое P_L, выражающее эффективное напряжение спекания, возникающее за счёт капиллярных сил, и рассчитывается по теоретической формуле, представленной в [12]:

$$P_L = \frac{3\gamma}{r}(1-\theta)^2, \tag{4}$$

где γ — коэффициент поверхностной энергии, r — средний радиус частиц керамического порошка. В некоторых модификациях к P_L также может быть добавлен член, учитывающий давление газа в порах [16] или влияние внешних полей.

В простейшем случае в соотношении (3) три основных параметра P_L, φ и ψ являются функциями пористости θ и в соответствии с реологической моделью [12, 14] могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\varphi = (1-\theta)^2, \quad \psi = \frac{2}{3}\frac{(1-\theta)^3}{\theta}. \tag{5}$$

Кроме того, в рамках модели для учёта изменения вязкости материала при изменении температуры используется соотношение типа Аррениуса [17, 18]:

$$\eta(T) = AT^n \exp(B/T), \tag{6}$$

где A, B и n — материальные константы, которые могут быть подобраны путём оптимизации модели с использованием экспериментальных данных для каждого конкретного материала.

Для расчёта изменения во времени пористости (относительной плотности) используется следующее уравнение сохранения массы:

$$\frac{\dot{\theta}}{1-\theta} = \dot{\varepsilon} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}. \tag{7}$$

В рамках данной работы решение уравнений (3)–(7) реализовано с использованием метода конечных элементов в случае свободного спекания без приложения внешних сил со следующими граничными и начальными условиями на поверхности S моделируемого параллелепипеда S: $\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$; S_1: $\mathbf{u} = 0$; $t = 0$: $\mathbf{u} = 0$, где S_1 — нижняя грань параллелепипеда. Выражение (3) представляет собой открытую структуру модели процесса спекания на макроуровне, позволяющую расширить базовую модель спекания для различных более сложных случаев [15], в том числе за счёт различных подходов учёта анизотропии.

Одним из основных практически значимых направлений развития континуальных моделей спекания является корректный учёт анизотропии при изменении формы изделия. В ряде экспериментальных работ наблюдалась анизотропия при спекании [19], и авторы связывают усадку с пространственным распределением удлинённых зёрен или пор во время начальных стадий обработки. В ряде работ предложены различные подходы к решению указанной проблемы. В [20] представлена микромеханическая модель, описывающая эволюцию микроструктуры при спекании порошкового компакта, состоящего из равномерно упакованных, ориентированных, вытянутых частиц с эллиптическими порами. Авторы вывели определяющие уравнения, описывающие усадку, используя тензор напряжений при спекании и тензор вязкости материала с учётом изменения формы пор вследствие диффузии по границам зёрен в двумерном случае. Тем не менее, при моделировании изменения формы реальных объектов достаточно проблематично учитывать микроструктуру образцов, в которых поры и зёрна по форме далеки от модельных приближений.

Ещё одна идеология учёта анизотропии при спекании представлена в [16]. В случае линейного уравнения спекания анизотропия может быть введена в соотношение для вязкости материала. Для трёхмерного осесимметричного случая в цилиндрической системе координат формулы имеют вид

$$2\eta(T)_r = \eta_{0r} T \exp(Q/RT), \quad 2\eta(T)_z = \eta_{0z} T \exp(Q/RT), \tag{8}$$

где $Q = 300.3$ кДж/моль — энергия активации процесса, $R = 8.314$ Дж/мольК — универсальная газовая постоянная, сдвиговая вязкость полностью плотного материала в различных направлениях; $\eta_{0z} = 3 \cdot 10^{-3}$ Па·с и η_{0r} определяется из соотношений, описанных ниже. Необходимые параметры для настройки модели можно найти из экспериментальных данных дилатометрических тестов образцов конкретных материалов.

Один из подходов учитывает давление газа в закрытых порах на заключительном этапе [16]. В правой части уравнения (3) P_L заменяется на $P_L - P_S$ для учёта внутрипорового давления газа P_S:

$$\frac{P_S}{\gamma} = \frac{\eta_0}{\gamma} \exp(Q/RT) \frac{T\psi\dot{\theta}}{(1-\theta)} + \frac{3(1-\theta)^2}{r}.$$

Модель учёта давления газа дополняется соотношением для сдвиговой вязкости

$$\eta_{0r} = \eta_{0z} + 0.001\theta^{2.5}.$$

Другой подход к моделированию заключается в использовании порогового закона для объяснения замедления спекания на конечной стадии при достижении критического значения пористости $\theta_c = 0.068$ вместо учёта давления захваченного газа в порах

$$\eta_{0r} = \eta_{0z} + 0.0021(\theta - \theta_c)^{2.7}.$$

В работе [16] моделирование спекания керамики на основе описанных вариантов модели проводилось с использованием метода конечных элементов в программном обеспечении COMSOL Multiphysics. Было показано хорошее совпадение результатов моделирования с экспериментальными данными.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Описанная модель вязкого спекания была решена численно в трёхмерном случае методом конечных элементов с помощью свободно распространяемого программного обеспечения FreeFem++. Для наиболее оптимальных результатов прогнозирования поведения материала при спекании корректировку параметров модели необходимо проводить на основе экспериментальных данных.

2.1. Экспериментальные данные

Образцы спечённых керамических изделий для экспериментального подтверждения результатов, полученных в процессе численных расчётов, были изготовлены с применением аддитивной технологической процедуры. Изготовление образцов проводилось из керамической пасты КП-Al2O3/01 (производство ООО «ВундерТех», г. Москва, Россия) на основе порошка оксида алюминия α-фазы, средний размер частиц порошка $r = 0.496 \cdot 10^{-6}$ м. Паста применялась в качестве исходного материала для 3D-печати 40 образцов в форме параллелепипедов, размером $45 \times 4 \times 3$ мм, в соответствии с ASTM C1161 [21]. Печать образцов выполнялась на керамическом 3D-принтере Ceramaker 900 (производство 3DCeram, Maison Rouge, France). После 3D-печати образцы очищались от неполимеризованной пасты и подвергались первичному отжигу органического связующего в печи Kittec CLL15 (производитель Kittec, Rosenheim, Germany). Отжиг проводился до полного удаления связующего при температурах ниже 800 °C. На финальной стадии отжига образцы нагревались до температуры 1000 °C и выдерживались в течение одного часа, что соответствует требованиям рекомендованной производителем процедуры термообработки. По окончании процедуры отжига образцы охлаждались в печи естественным образом. Геометрическая форма и размеры образцов после отжига соответствовали исходному зелёному телу. Отожжённые образцы разделялись на восемь групп, по пять образцов в группе. Семь групп образцов подвергались высокотемпературному спеканию при температурах 1100, 1200, 1300, 1400, 1500, 1600 и 1700 °C. Спекание проводилось в печи Kittec CLL15 для температур 1100–1300 °C ввиду ограничения на максимальную температуру данной печи. Спекание при температурах 1400–1700 °C проводилось в печи ThermConcept HTL 20/17 (производство ThermConcept, Bremen, Germany). Восьмая группа образцов спеканию не подвергалась. У всех сорока образцов до и после термообработки штангенциркулем измерялись геометрические размеры (длина, ширина, высота) и с помощью лабораторных весов измерялась масса. Рассчитывалась эффективная плотность образцов и с использованием известного значения идеальной плотности оксида алюминия α-фазы, равной 3.99 г/см^3, рассчитывалась остаточная пористость материала θ_{exp}. Результаты рассчитанных для каждой группы средних значений пористости и среднеквадратичного отклонения s представлены в таблице.

Экспериментальные результаты

T, °C	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700
$\theta_{\text{exp}}, \%$	44.91417	44.05613	44.55397	43.35036	40.22472	28.68234	5.4884
$s, \%$	0.4027	0.1658	0.2739	0.1616	0.7341	0.8808	0.9323

2.2. Численные результаты

Результаты численных исследований приведены на рис. 2–4.

Поскольку в рассмотренном экспериментальном случае изменения по всем осям происходят приблизительно одинаково, то в данной работе основное внимание уделено сопоставлению изменения пористости материала. Были проведены расчёты для образцов в форме параллелепипеда, исходные параметры соответствовали выбранным в экспериментах. В рамках работы рассматривалось два соотношения для изменения сдвиговой вязкости материала. Соотношение (6) со следующими значениями констант, подобранными для конкретного материала:

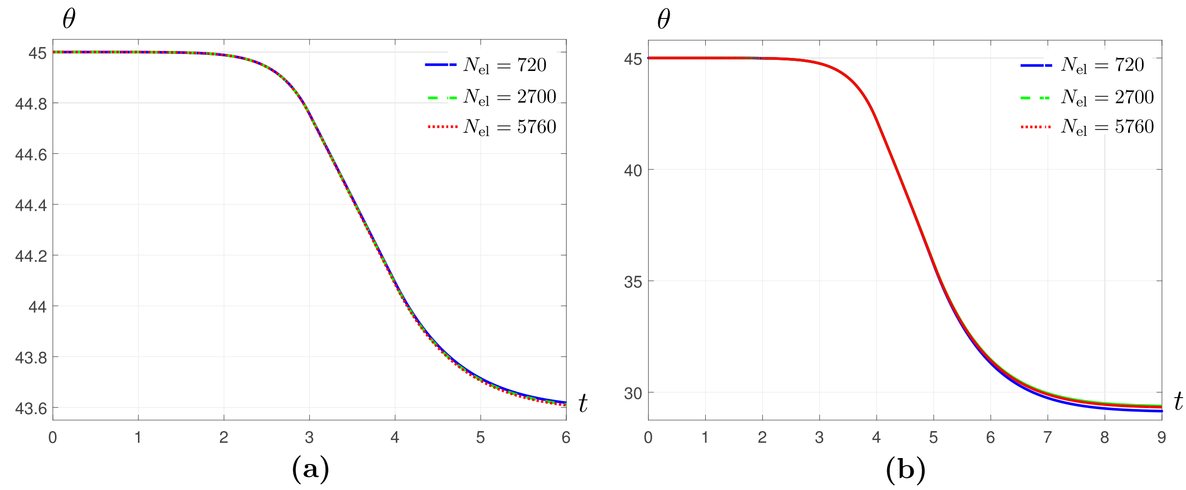


Рис. 2. Изменение пористости образца при спекании,
полученное на разных расчётных сетках при $T = 1400°$ C (a) и $T = 1600°$ C (b)

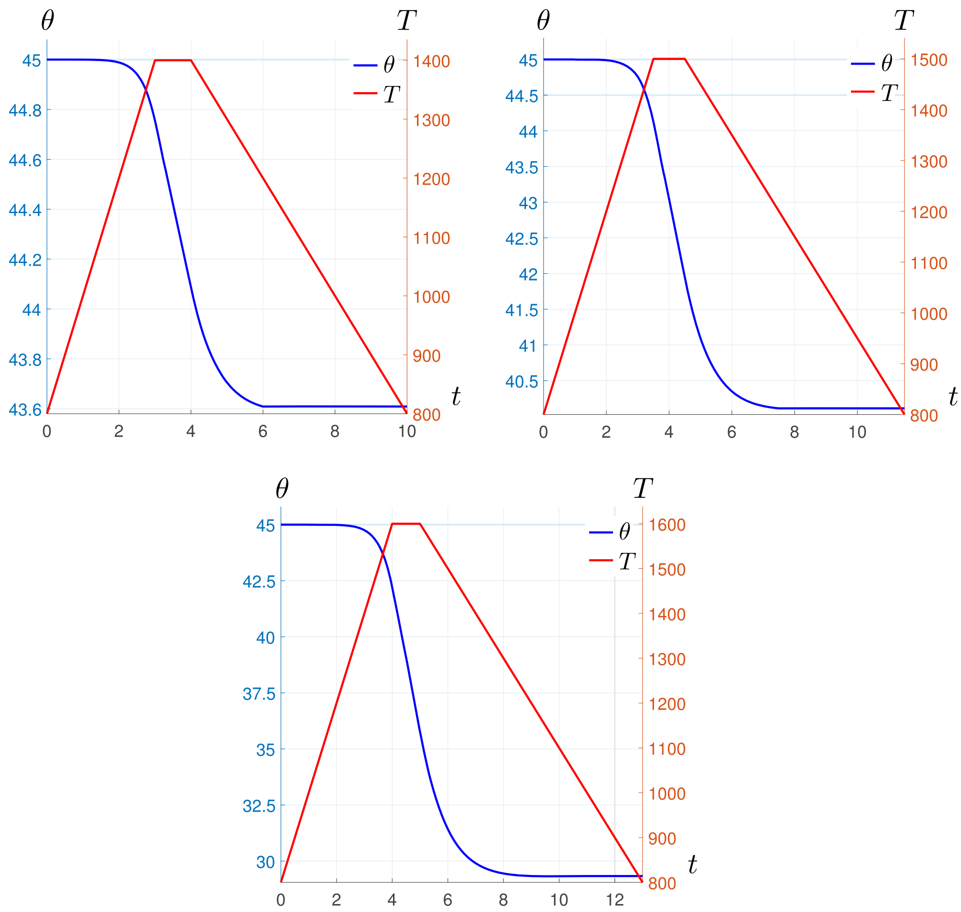


Рис. 3. Результаты расчёта изменения пористости образца в процессе спекания

$A = 1.5 \cdot 10^{-2}$, $B = 33300$ и $n = 1$ и соотношение (8) при $\eta_{0z} = \eta_{0r}$. При расчёте напряжения спекания (4) использовались значение коэффициента поверхностной энергии для Al_2O_3, $\gamma = 0.9$ [22] и средний размер частиц порошка $r = 0.496 \cdot 10^{-6}$ м. Расчёты проводились для трёх стадий нагрева: нагрев со скоростью 200 °C в час от начальной температуры 800 °C до 1200,

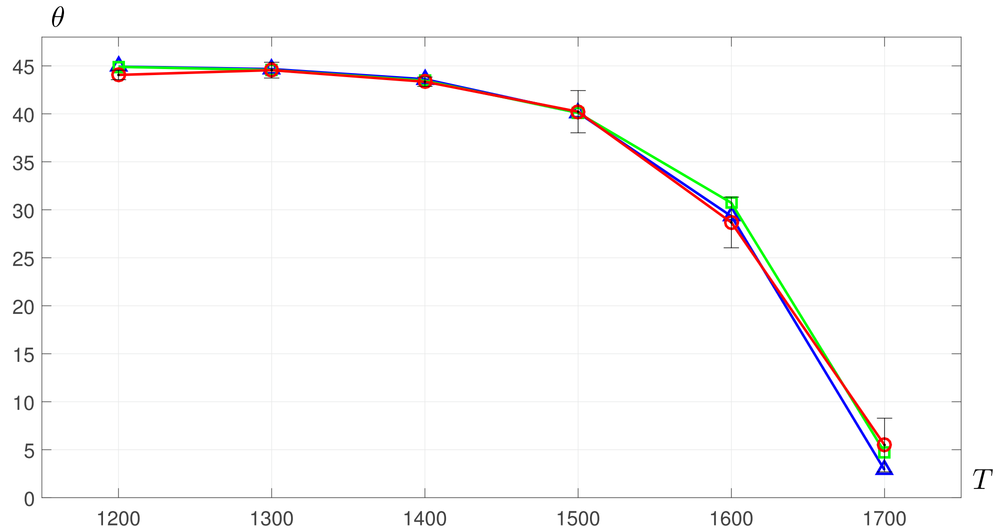


Рис. 4. Сравнение экспериментальных и рассчитанных значений пористости спечённого образца: ○ — эксперимент, △ — расчёты с использованием формулы (8), □ — расчёты с использованием формулы (6)

1300, 1400, 1500, 1600 и 1700 °C, далее выдержка в течение часа и остывание со скоростью 100 °C в час до температуры 800 °C. В соответствии с экспериментальными данными начальное значение пористости выбиралось равным $\theta = 45\%$.

В конфигурации модели, когда расчёт изменения вязкости производится по формуле (8), соотношение изменения модуля объёмной вязкости (5) было скорректировано с учётом пороговой пористости $\theta_c = 0.02$ на основе подхода, предложенного в [16]:

$$\psi = \frac{2}{3}\frac{(1-\theta)^3}{(\theta-\theta_c)}. \tag{9}$$

На рис. 2 приведены графики изменения пористости при нагреве до 1600° C, рассчитанные на трёх различных вариантах сетки с количеством конечных элементов $N_{\text{el}} = 720$, $N_{\text{el}} = 2700$ и $N_{\text{el}} = 5760$ с использованием соотношения (8). Наблюдается хорошая сеточная сходимость. При проведении дальнейших расчётов использовалась сетка с количеством элементов $N_{\text{el}} = 5760$. Шаг по времени выбирался равным $ht = 0.01$ с, что удовлетворяет условию Куранта.

Полученные результаты расчётов изменения пористости во времени для трёх стадийного режима нагрева до температур 1400, 1500, 1600 °C представлены на рис. 3. Видно, что кривые изменения θ для различных температур нагрева имеют схожий характер.

В рамках работы проведено сопоставление результатов расчёта пористости образца с полученными экспериментальными данными. На рис. 4 представлены два набора численных данных, полученных с использованием различных соотношений для изменения вязкости (6) и (8). Наибольшее расхождение в значениях пористости наблюдается при максимальной температуре спекания с моделью (8). В целом показано хорошее совпадение результатов, что подтверждает корректность выбранной модели для описания изменения пористости при спекании образцов из керамической пасты на основе порошка оксида алюминия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для развития индустрии 3D-печати из керамики необходимо иметь возможность качественного прогнозирования и контроля конечной формы изделия после спекания. В рамках работы рассмотрена модель вязкого спекания, численное решение которой реализовано методом конечных элементов в трёхмерном случае. Проведено тестирование модели путём сравнения с экспериментальными данными по спеканию образцов из керамического порошка оксида алюминия, изготовленных методом лазерной стереолитографии. Было рассмотрено два варианта расчёта изменения сдвиговой вязкости, подобраны материальные константы для рассматриваемого материала, показано хорошее совпадение результатов пористости спечённого образца. Таким образом, рассмотренная модель может быть выбрана за основу для дальнейшей разработки более комплексного подхода к моделированию процесса спекания, в том числе с учётом анизотропии и с возможностью прогнозирования изменения сложных форм изделий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gibson I., Rosen D., Stucker B., Khorasani M.* Additive Manufacturing Technologies. Springer Nature, 2021; https://doi.org/10.1007/978-3-030-56127-7
2. *Chen Z., Li Z., Li J., Liu Ch., Lao Ch., Fu Y, Liu Ch, Li Yang, Wang P., He Y.* 3D printing of ceramics: A review // J. Europ. Ceram. Soc. 2019. V. 39. P. 661–687; https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2018.11.013
3. *Rahaman M.N.* Sintering of Ceramics. Boca Raton: Taylor and Francis Group, 2008; https://doi.org/10.1201/b15869
4. *Jhabvala J., Boillat E., Glardon R.* Study of the inter-particle necks in selective laser sintering // Rapid Prototyping J. 2013. V. 19, N 2. P. 111-117; https://doi.org/10.1108/13552541311302969
5. *Kart H. H., Wang G., Karaman I., Cagin T.* Molecular dynamics study of the coalescence of equal and unequal sized Cu nanoparticles // Internat. J. Modern Phys. C. 2009. V. 20 (02). P. 179-196; https://doi.org/10.1142/S0129183109013534
6. *Singh R., Sharma V.* Nano tungsten carbide interactions and mechanical behaviour during sintering: A molecular dynamics study // Comput. Materials Sci. 2021. V. 197. Article 110653; https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2021.110653
7. *Liang A., Liu C., Branicio P. S.* Hot-press sintering of aluminum nitride nanoceramics // Phys. Rev. Materials. 2021. V 5. Article 096001; https://doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.5.096001
8. *Nosewicz S., Rojek J., Pietrzak K., Chmielewski M.* Viscoelastic discrete element model of powder sintering // Powder Technology. 2013. V. 246. P. 157–168; https://doi.org/10.1016/j.powtec.2013.05.020
9. *Sweidan F. B., Ryu H. J.* Kinetic Monte Carlo simulations of the sintering microstructural evolution in density graded stainless steel fabricated by SPS // Materials Today Communications. 2021. V. 26. Article 101863; https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.101863
10. *Liu Y., Militzer M., Perez M.* Phase field modelling of abnormal grain growth // Materials. 2019. V. 12. Article 4048; https://doi.org/10.3390/ma12244048
11. *Van de Vorst G. A. L., Mattheij R. M. M., Kuiken H. K.* A boundary element solution for two-dimensional viscous sintering // J. Comput. Phys. 1992. V. 100. P. 50–63; https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90309-M
12. *Skorohod V.V.* Rheological Basis of the Theory of Sintering. Kiev: Naukova Dumka, 1972; https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1998.tb02768.x
13. *Van der Laan A., Epherre R., Chevallier G., Beynet Y., Weibel A., Estourn C.* Fully coupled electrothermal and mechanical simulation of the production of complex shapes by spark plasma sintering // J. Europ. Ceram. Soc. 2021. V. 41, N 7. P. 4252-4263; https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2021.02.010
14. *Olevsky E.A.* Theory of sintering: from discrete to continuum // Mater. Sci. Engrg. R. Rep. 1998. V. 23. P. 41–100; https://doi.org/10.1016/S0927-796X(98)00009-6
15. *Olevsky E.A., Kandukuri S., Froyen L.* Consolidation enhancement in spark-plasma sintering: Impact of high heating rates // J. Appl. Phys. 2007. V. 102. Article 114913; https://doi.org/10.1063/1.2822189
16. *Maniere C., Harnois C., Marinel S.* 3D printing of porcelain and finite element simulation of sintering affected by final stage pore gas pressure // Materials Today Communications. 2021. V. 26. Article 102063; https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2021.102063

17. *German R.M.* Sintering Theory and Practice. Wiley, 1996.
18. *Safronov A., Chugunov S., Tikhonov A., Gusev M., Akhatov I.* Numerical simulation of sintering for 3D-printed ceramics via SOVS model // Ceram. Internat. 2019. V. 45. P. 19027–19035; https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2019.06.144
19. *Raj P.M., Cannon W.R.* Anisotropic shrinkage in tape-cast alumina: role of processing parameters and particle shape // J. Amer. Ceram. Soc. 1999. V. 82. Article 2619; https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1999.tb02132.x
20. *Olevsky E. A., Kushnarev B., Maximenko A., Tikare V., Braginsky M.* Modelling of anisotropic sintering in crystalline ceramics // Philosophical J. 2005. V. 85, N 9. P. 2123–2146; https://doi.org/10.1080/14786430412331331989
21. *ASTM Standard C1161-18* Standard test method for flexural strength of advanced ceramics at ambient temperature // ASTM Internat. 2018; DOI: 10.1520/C1161-18, www.astm.org
22. *Van N.C., Sistla S.K., Van K.S., Giang N.A., Bezold A., Broeckmann C., Lange F.* A comparative study of different sintering models for Al_2O_3 // J. Ceram. Soc. Japan. 2016. V. 124. P. 301-312; https://doi.org/10.2109/jcersj2.15257

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3:519.6

NUMERICAL APPROACH FOR SIMULATION OF GEOMETRY VARIATION DURING SINTERING OF CERAMICS BASED ON THE FINITE ELEMENT METHOD

O. A. Solnyshkina[1,2a], **N. B. Fatkullina**[1,2b], **A. Z. Bulatova**[1,2c], **V. N. Kireev**[1,2d], **A. R. Bilyalov**[1e], **I. Sh. Akhatov**[1f], **V. N. Pavlov**[1g]

[1]*Bashkir State Medical University,*
ul. Lenina 3, Ufa 450008, Russia,
[2]*Center for Micro- and Nanoscale Dynamics of Dispersed Systems,*
Bashkir State University,
ul. Zaki Validi 32, Ufa 450076, Russia

E-mails: [a]olgasolnyshkina@gmail.com, [b]nazgulbay@mail.ru, [c]bulatova29@yandex.ru, [d]kireev@anrb.ru, [e]azat.bilyalov@gmail.com, [f]iskander.akhatov@gmail.com, [g]rectorat@bashgmu.ru

Received 04.08.2022, revised 04.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. Sintering is a complex physical and mechanical process, which is one of the most important technological processes in powder metallurgy and ceramic industry. In this work, the study of free sintering of a ceramic object is carried out using the rheological theory of sintering. Numerical solution of the problem in the three-dimensional case was implemented using the Finite Element Method with the freely distributed FreeFem++ software. The experiments on sintering of aluminium oxide ceramic paste were conducted for several temperature regimes. The validation of the realized model is confirmed by comparing the numerical and experimental data of porosity evolution.

Keywords: rheological sintering model, 3D printing, ceramic powder, aluminium oxide, numerical simulation, finite element method.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.116

REFERENCES

1. Gibson I., Rosen D., Stucker B., Khorasani M. Additive Manufacturing Technologies. Springer Nature, 2021; https://doi.org/10.1007/978-3-030-56127-7
2. Chen Z., Li Z., Li J., Liu Ch., Lao Ch., Fu Y, Liu Ch, Li Yang, Wang P., He Y. 3D printing of ceramics: A review. *J. Europ. Ceram. Soc.*, 2019, Vol. 39 pp. 661–687; https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2018.11.013
3. Rahaman M.N. Sintering of Ceramics. Boca Raton: Taylor and Francis Group, 2008; https://doi.org/10.1201/b15869
4. Jhabvala J., Boillat E., Glardon R. Study of the inter-particle necks in selective laser sintering. *Rapid Prototyping J.*, 2013, Vol. 19, No. 2, pp. 111-117; https://doi.org/10.1108/13552541311302969
5. Kart H. H., Wang G., Karaman I., Cagin T. Molecular dynamics study of the coalescence of equal and unequal sized Cu nanoparticles. *Internat. J. Modern Phys. C*, 2009, Vol. 20 (02), pp. 179-196; https://doi.org/10.1142/S0129183109013534
6. Singh R., Sharma V. Nano tungsten carbide interactions and mechanical behaviour during sintering: A molecular dynamics study. *Comput. Materials Sci.*, 2021, Vol. 197, article 110653; https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2021.110653

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

7. Liang A., Liu C., Branicio P. S. Hot-press sintering of aluminum nitride nanoceramics. *Phys. Rev. Materials*, 2021, Vol 5, article 096001; https://doi.org/10.1103/PhysRevMaterials.5.096001
8. Nosewicz S., Rojek J., Pietrzak K., Chmielewski M. Viscoelastic discrete element model of powder sintering. *Powder Technology*, 2013, Vol. 246, pp. 157–168; https://doi.org/10.1016/j.powtec.2013.05.020
9. Sweidan F. B., Ryu H. J. Kinetic Monte Carlo simulations of the sintering microstructural evolution in density graded stainless steel fabricated by SPS. *Materials Today Communications*, 2021, Vol. 26, article 101863; https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.101863
10. Liu Y., Militzer M., Perez M. Phase field modelling of abnormal grain growth. *Materials*, 2019, Vol. 12, article 4048; https://doi.org/10.3390/ma12244048
11. Van de Vorst G. A. L., Mattheij R. M. M., Kuiken H. K. A boundary element solution for two-dimensional viscous sintering. *J. Comput. Phys.*, 1992, Vol. 100, pp. 50–63; https://doi.org/10.1016/0021-9991(92)90309-M
12. Skorohod V.V. Rheological Basis of the Theory of Sintering. Kiev: Naukova Dumka, 1972; https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1998.tb02768.x
13. Van der Laan A., Epherre R., Chevallier G., Beynet Y., Weibel A., Estourn C. Fully coupled electrothermal and mechanical simulation of the production of complex shapes by spark plasma sintering. *J. Europ. Ceram. Soc.*, 2021, Vol. 41, No. 7, pp. 4252-4263; https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2021.02.010
14. Olevsky E.A. Theory of sintering: from discrete to continuum. *Mater. Sci. Engrg. R. Rep.*, 1998, Vol. 23, pp. 41–100; https://doi.org/10.1016/S0927-796X(98)00009-6
15. Olevsky E.A., Kandukuri S., Froyen L. Consolidation enhancement in spark-plasma sintering: Impact of high heating rates. *J. Appl. Phys.*, 2007, Vol. 102, article 114913; https://doi.org/10.1063/1.2822189
16. Maniere C., Harnois C., Marinel S. 3D printing of porcelain and finite element simulation of sintering affected by final stage pore gas pressure. *Materials Today Communications*, 2021, Vol. 26, article 102063; https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2021.102063
17. German R.M. Sintering Theory and Practice. Wiley, 1996.
18. Safronov A., Chugunov S., Tikhonov A., Gusev M., Akhatov I. Numerical simulation of sintering for 3D-printed ceramics via SOVS model. *Ceram. Internat.*, 2019, Vol. 45, pp. 19027–19035; https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2019.06.144
19. Raj P.M., Cannon W.R. Anisotropic shrinkage in tape-cast alumina: role of processing parameters and particle shape. *J. Amer. Ceram. Soc.*, 1999, Vol. 82, article 2619; https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1999.tb02132.x
20. Olevsky E. A., Kushnarev B., Maximenko A., Tikare V., Braginsky M. Modelling of anisotropic sintering in crystalline ceramics. *Philosophical J.*, 2005, Vol. 85, No. 9, pp. 2123–2146; https://doi.org/10.1080/14786430412331331989
21. ASTM Standard C1161-18 Standard Test Method for Flexural Strength of Advanced Ceramics at Ambient Temperature. *ASTM Internat.*, 2018; DOI: 10.1520/C1161-18, www.astm.org
22. Van N.C., Sistla S.K., Van K.S., Giang N.A., Bezold A., Broeckmann C., Lange F. A comparative study of different sintering models for Al_2O_3. *J. Ceram. Soc. Japan*, 2016, Vol. 124, pp. 301-312; https://doi.org/10.2109/jcersj2.15257

УДК 536.248.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВСПЛЫТИЯ ОДИНОЧНОГО ПУЗЫРЯ МЕТОДОМ РЕШЁТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

© 2023 А. В. Федосеев[a], М. В. Сальников[b], А. Е. Остапченко[c]

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]fedoseev@itp.nsc.ru, [b]salnikovitsbras@gmail.com, [c]a.ostapchenko@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 12.08.2022 г.; после доработки 12.08.2022 г.; принята к публикации 29.09.2022 г.

Для исследования процесса кипения на поверхности твёрдого нагревателя представлена гибридная модель на основе метода решёточных уравнений Больцмана и уравнения теплопроводности. Исследовался процесс формирования и всплытия одиночного пузыря при кипении над одиночной лиофобной зоной, размещённой на гладкой лиофильной поверхности. Получены зависимости частоты отрыва и отрывного диаметра пузыря от ширины лиофобной зоны и теплового перегрева стенки. Показано, что отрывной диаметр пузыря растёт с размером ширины лиофобной зоны, а частота отрыва пузыря растёт с температурным перегревом. На основании полученных данных определён оптимальный размер лиофобной зоны на лиофильной поверхности с точки зрения интенсификации теплообмена.

Ключевые слова: интенсификация теплообмена при кипении, поверхности с контрастным смачиванием, метод решёточных уравнений Больцмана.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.117

ВВЕДЕНИЕ

Кипение широко используется в различных технических приложениях, связанных с тепло- и массообменном, так как является одним из наиболее эффективных механизмов отвода тепла от нагретой поверхности. Одним из современных направлений в области материаловедения в отношении интенсификации теплообмена при кипении является разработка бифильных поверхностей, т. е. поверхностей с контрастным смачиванием (лиофобные зоны на лиофильной поверхности). Как показал анализ недавних работ [1–8], использование бифильных поверхностей позволяет увеличить эффективность теплообмена за счёт снижения температурного порога зарождения паровой фазы и увеличения плотности центров парообразования и одновременно увеличить критический тепловой поток за счёт более эффективного смачивания сухих пятен в докризисных режимах.

Поиск оптимальной конфигурации бифильной поверхности (размер и плотность лиофобных зон на лиофильной поверхности) на основе экспериментальных исследований является достаточно трудоёмкой задачей. Использование стандартных методов вычислительной гидродинамики — хорошая альтернатива экспериментальным исследованиям. Обычно в них представлено численное решение уравнений Навье — Стокса в сочетании с дополнительным методом для отслеживания границы раздела фаз. Однако такой подход не позволяет моделировать процесс зарождения пузырей, который следует рассматривать на нано- и микромасштабе. Этот процесс очень важен для моделирования жизненного цикла паровых пузырей, в частности стадии ожидания зарождения пузыря, температуры начала кипения и плотности центров

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-01251).

парообразования. Для нано- и микромасштабных явлений хорошо применим метод молекулярной динамики, но на микро- и макромасштабах он имеет ограничения в вычислительной мощности.

Метод решёточных уравнений Больцмана предполагает другой подход к моделированию течения жидкости. В нём среда представляется в виде ансамблей псевдочастиц, для которых решается кинетическое уравнение в минимальной дискретной формулировке. Этот метод относится к мезоскопическим, он занимает промежуточное положение между микроскопическим методом молекулярной динамики и подходом сплошной среды. Метод решёточных уравнений Больцмана хорошо подходит для моделирования как однофазных, так и многофазных течений [9–14]. С помощью метода решёточных уравнений Больцмана авторы [12, 13] смоделировали процессы роста и отрыва одиночных пузырей при кипении жидкости. Была исследована зависимость диаметра и частоты отрыва пузырей от краевого угла смачивания и числа Якоба. В [13, 14] представлены работы по моделированию методом решёточных уравнений Больцмана процессов теплообмена при кипении на поверхностях с контрастным смачиванием.

Целью данной работы является исследование динамики образования и всплытия одиночного пузыря на гладкой лиофильной поверхности с одиночной лиофобной зоной в широком диапазоне тепловых перегревов и определение оптимальных параметров поверхности с контрастной смачиваемостью для эффективного теплообмена с помощью метода решёточных уравнений Больцмана.

1. МЕТОД РЕШЁТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА КИПЕНИЯ

В целях моделирования процессов кипения на твёрдой поверхности с контрастной смачиваемостью используется модель, основанная на решении системы дискретных уравнений Больцмана и уравнения теплопроводности. В общем виде система дискретных уравнений Больцмана определяется как

$$f_i(\vec{x}+\vec{c}_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i(\vec{x},t) + \Omega_i(\vec{x},t) + S_i(\vec{x},t), \tag{1}$$

где f_i — функция распределения скорости частицы жидкости, в которой индекс i отвечает за направление движения частиц, Ω_i — оператор столкновений, S_i — источник сил. Смысл функции $f_i(\vec{x},t)$ — плотность частиц, обладающих скоростью $\vec{c}$ в точке (x, y, z) в момент времени t. Количество дискретных уравнений определяется выбранным набором дискретных скоростей, который обозначаются как $DdQq$ [15–19]. В данной модели выбран набор $D2Q9$, который отвечает двумерной задаче, в которой частицы жидкости могут двигаться по девяти дискретным направлениям. Из набора f_i можно определить моменты функции распределения в заданной точке пространства, которые в отсутствие внешних сил равны

$$\rho(\vec{x},t) = \sum_i f_i(\vec{x},t), \quad \rho\vec{u}(\vec{x},t) = \sum_i \vec{c} f_i(\vec{x},t). \tag{2}$$

В качестве оператора столкновений выбрано приближение Бхатнагара — Гросса — Крука (Bhatnagar — Gross — Krook, BGK) [20, 21]:

$$\Omega_i(\vec{x},t) = -\frac{f_i - f_i^{eq}}{\tau}. \tag{3}$$

Источник сил S_i в данной модели выбран в качестве [9]

$$S_i = f_i^{eq}(\rho, \vec{u}+\Delta\vec{u}) - f_i^{eq}(\rho, \vec{u}), \tag{4}$$

где f_i^{eq} — равновесная функция распределения:

$$f_i^{eq}(\rho, \vec{u}) = w_i \rho \left(1 + \frac{\vec{c_i}\vec{u}}{c_s^2} + \frac{(\vec{c_i}\vec{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\vec{u}^2}{2c_s^2} \right). \tag{5}$$

Здесь w_i — дискретная весовая функция, определяемая набором скоростей, $c_s^2 = \dfrac{\Delta x^2}{3\Delta t^2}$ — скорость звука. Добавка к скорости $\Delta\vec{u}$, которая появляется в формуле (4), возникает вследствие действия объёмной силы $\vec{F}$:

$$\Delta\vec{u} = \tau\vec{F}/\rho. \tag{6}$$

В данной модели рассматривается процесс кипения, который инициируется на поверхности структурированного нагревателя. В процессе нагрева возникает разделение жидкой и газообразной фаз. Взаимодействие этих фаз определяется межфазной силой взаимодействия [9, 10, 22–26]:

$$\vec{F}_{SC}(\vec{x}) = -\beta\psi(\vec{x}) \sum_{\vec{x}'} G(\vec{x}, \vec{x}')\psi(\vec{x}')(\vec{x}' - \vec{x}) - \frac{1-\beta}{2} \sum_{\vec{x}'} G(\vec{x}, \vec{x}')\psi^2(\vec{x}')(\vec{x}' - \vec{x}), \tag{7}$$

где

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \begin{cases} g, & |\vec{x}' - \vec{x}| > 0, \\ 0, & |\vec{x}' - \vec{x}| = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Функция $\psi(\vec{x})$ называется псевдопотенциалом, который в текущем исследовании определяется по формуле [27]

$$\psi(\vec{x}) = \sqrt{\frac{2(p_{\mathrm{EOS}}(\vec{x}) - \rho c_s^2(\vec{x}))}{g}}. \tag{9}$$

Здесь $p_{\mathrm{EOS}}(\vec{x})$ — давление, которое рассчитывается на каждом шаге вычислений согласно уравнению состояния Пенга — Робинсона [28]:

$$p_{\mathrm{EOS}} = \frac{\rho RT}{1 - b\rho} - \frac{a\phi(T)\rho^2}{1 + 2b\rho - b^2\rho^2}, \tag{10}$$

$$\phi(T) = (1 + (0.37 + 1.54\omega - 0.27\omega^2)(1 - \sqrt{T/T_c}))^2, \tag{11}$$

где $a = 0.457235\, R^2 T_c^2 / P_c$, $b = 0.077796\, RT_c/P_c$ и $\omega = 0.344$ — ацентрический фактор, а параметры подобраны для свойств воды. Величины давления P, температуры T и плотности ρ выражены в единицах P_c, T_c и ρ_c, соответствующих параметрам рассматриваемого вещества в критической точке.

Граничные условия в модели выбраны следующие. По оси абсцисс задавалось периодическое граничное условие на функции распределения f_i. На твердотельном нагревателе и твёрдой верхней стенке задавались условия непротекания, которые определялись согласно подходу Bounce — Back. Этот подход состоит в применении вблизи стенок операции отражения на часть функций распределения, векторы дискретных скоростей которых распространяют функции распределения в направлении твёрдых стенок:

$$f_{\bar{i}}(\vec{x_b}, t + \Delta t) = f_i^*(\vec{x_b}, t), \tag{12}$$

где дискретные скорости функций распределения $f_{\bar{i}}$ и f_i^* удовлетворяют соотношениям $\vec{c}_i = -\vec{c}_{\bar{i}}$.

Граничное условие также применялось на псевдопотенциал (9), которое заключалось в том, что $\psi(\vec{x})$ внутри нагревателя симметричен $\psi(\vec{x})$ в жидкости, находящейся на том же расстоянии от границы, что и рассматриваемая точка твёрдого тела. Такое условие гарантирует возникновение контактного угла $\theta = 90°$ между жидкой средой и твёрдым нагревателем в случае химической нейтральности последнего.

Контактный угол смачивания поверхности твёрдого нагревателя определяется возникновением у его поверхности дополнительной силы:

$$\vec{F}_{\text{solid}}(\vec{x}) = -\psi(\vec{x}) G_s \sum_{\vec{x}'} \psi(\vec{x}')(\vec{x}' - \vec{x}), \tag{13}$$

где G_s — коэффициент взаимодействия твёрдого тела с жидкостью. В данной работе для моделирования лиофобной зоны использовалось значение $G_s = 0.05$, а для лиофильной зоны $G_s = -0.05$.

Для определения температуры, сопряжённо с дискретными уравнениями Больцмана, решалось уравнение теплопроводности [11]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}_f \vec{\nabla} T = \frac{1}{\rho c_v} \vec{\nabla}(\lambda \vec{\nabla} T) - \frac{T}{\rho c_v} \left(\frac{\partial p_{EOS}}{\partial T} \right)_{\rho} \vec{\nabla} \vec{u}_f, \tag{14}$$

где $\vec{u}_f$ — физическая скорость жидкости, определяемая следующим образом:

$$\Delta \vec{u} = \vec{u} + \tau \vec{F}/2\rho. \tag{15}$$

Решение уравнения (14) находилось с помощью итерационной схемы Рунге — Кутты четвёртого порядка. Начальные условия (плотности жидкой и паровой фаз) в этой задаче определялись на основе правила построения площадей Максвелла [29]. Оно постулирует, что для данной температуры T сосуществование жидкости и газа происходит при таком давлении p_0, что

$$\int\limits_{\rho_l}^{\rho_g} (p_0 - p_b(\rho, T)) \frac{d\rho}{\rho^2} = 0. \tag{16}$$

Алгоритм решения данной модели состоит из итеративного поочерёдного расчёта дискретных уравнений Больцмана и уравнения теплопроводности. Его можно подразделить на следующие шаги.

0. Определение начальных условий: задаются параметры жидкости, которые входят в уравнение состояния (10), задаются её начальные температура, скорость и плотность в расчётной области. Начальная плотность в данной модели устанавливается как плотность жидкости, получаемая из формулы (10). Согласно выбранным параметрам определяются начальные функции распределения по формуле (5).

1. В каждой ячейке пространства определяются псевдопотенциал $\psi(\vec{x})$ (9) и межфазная сила $\vec{F}_{\text{SC}}(\vec{x})$ (7), к которым также добавляется сила у твёрдого нагревателя $\vec{F}_{\text{solid}}(\vec{x})$ (13). Суммарная сила затем определяет S_i (4).

2. Производится расчёт функции распределения следующего итеративного шага f_i (1).

3. Применяются граничные условия на функции распределения (12).

4. Исходя из определённых сил и функций распределений находится физическая скорость жидкости $\vec{u}_f$ (15).

5. В системе определяется пространственное распределение температуры (14).

6. Переход к шагу 1.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ КИПЕНИЯ

Расчётная область состоит из среды жидкость/пар и металлического нагревателя (см. рис. 1). Пространственный и временной шаги равны $h = 20 \times 10^{-6}$ м и $\Delta t = 2.5 \times 10^{-6}$ соответственно. Размер расчётной области составлял 400 ячеек по горизонтали (8 мм) и 500 ячеек по вертикали (10 мм). Ширина лиофобной зоны изменялась в диапазоне $d = 0.2 - 4$ мм. Металлический нагреватель толщиной $n_h = 30$ пространственных ячеек расположен в нижней части расчётной области. В модели используются безразмерные величины, а для обезразмеривания используются решёточные единицы, указанные выше. На левой и правой границах расчётной области используются периодические условия. На верхней границе задаются постоянными температура $T_0 = 0.9T_c$ и соответствующее ей давление P_0. Внутри металлического нагревателя уравнение теплопроводности (14) рассчитывается только с диффузионной частью. На нижней границе нагревателя задана постоянная температура T_h. Расчёты проводились для различных температурных перегревов ΔT, т. е. разницы температуры на верхней и нижней границах области, $\Delta T = T_h - T_0$. Коэффициент теплопроводности и теплоёмкость металлического нагревателя равны $\lambda_h = 20$ Вт/м/К и $c_h = 3 \times 10^6$ Дж/м^3 соответственно. Термодинамические параметры среды, такие как теплоёмкость, теплопроводность и вязкость, вычислялись в соответствии с соотношением плотностей среды жидкость/пар. На рис.1 представлена фазовая диаграмма для среды жидкость/пар в момент отрыва пузыря от поверхности. Области с газовой фазой представлены голубым цветом, а жидкости — красным.

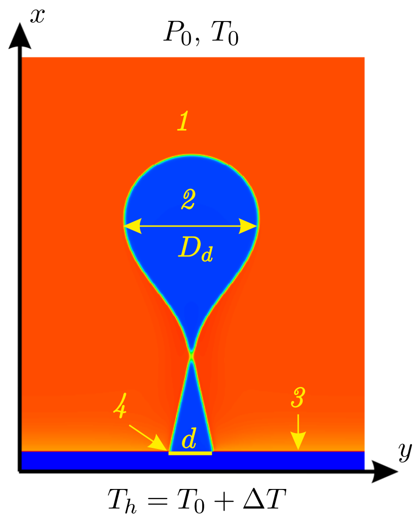


Рис. 1. Расчётная область и граничные условия:
жидкая фаза (*1*), газовая фаза (*2*), металлический нагреватель (*3*), лиофобная зона (*4*);
d — ширина лиофобной зоны, D_d — отрывной диаметр пузыря,
T_h — температура поверхности нагревателя,
T_0, P_0 — температура и давление насыщенных паров

В работе проведено моделирование процесса роста и отрыва одиночного парового пузыря над одиночной лиофобной зоной (контактный угол смачивания $\theta = 110°$), расположенной в центре гладкой лиофильной поверхности нагревателя ($\theta = 67°$). Изучена динамика роста и отрыва пузыря, измерен отрывной диаметр D_d и частота отрыва ν_d пузырей в зависимости от ширины лиофобной зоны d и перегрева ΔT. Временная эволюция динамики отрыва одиночного пузыря представлена на рис. 2. В данных расчётах ширина лиофобной зоны $d = 1$ мм, температура поверхности нагревателя $T_h = 0.95T_c$. Образование паровой фазы над лиофобной поверхностью и рост пузыря до момента отрыва от поверхности происходят за время порядка $t_1 \approx 1.45$ с (рис. 2(а)). После отрыва пузыря на поверхности нагревателя над лиофобной зоной остаётся паровая фаза (рис. 2(b)). Время между отрывами пузыря (рис. 2(d) и рис. 2(a)) составляет примерно $t_d \approx 0.27$ с, что соответствует частоте отрыва пузыря $\nu_d \approx 3.7$ Гц.

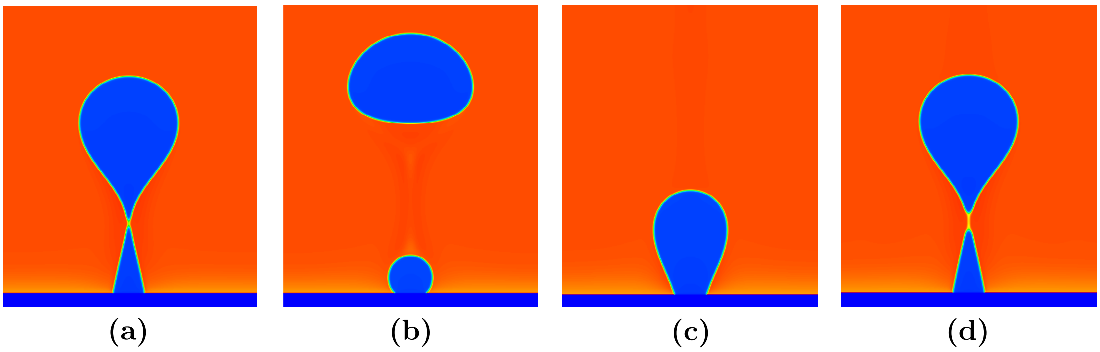


Рис. 2. Временная эволюция динамики отрыва одиночного пузыря:
(a) $t_a = 1.45$ с, (b) $t_a = 1.49$ с, (c) $t_a = 1.6$ с, (d) $ta = 1.72$ с;
ширина лиофобной зоны $d = 1$ мм, температура поверхности нагревателя $T_h = 0.95T_c$

Зависимости величины отрывного диаметра пузыря D_d от ширины лиофобной зоны d при фиксированных значениях перегрева $\Delta T = 0.04\,T_c, 0.05\,T_c, 0.06\,T_c$ представлены на рис. 3(a). Видно, что величина отрывного диаметра пузыря D_d монотонно растёт (2.8–3.5 мм) с увеличением ширины лиофобной зоны d. Также видно, что величина отрывного диаметра пузыря D_d растёт с температурным перегревом поверхности нагревателя ΔT.

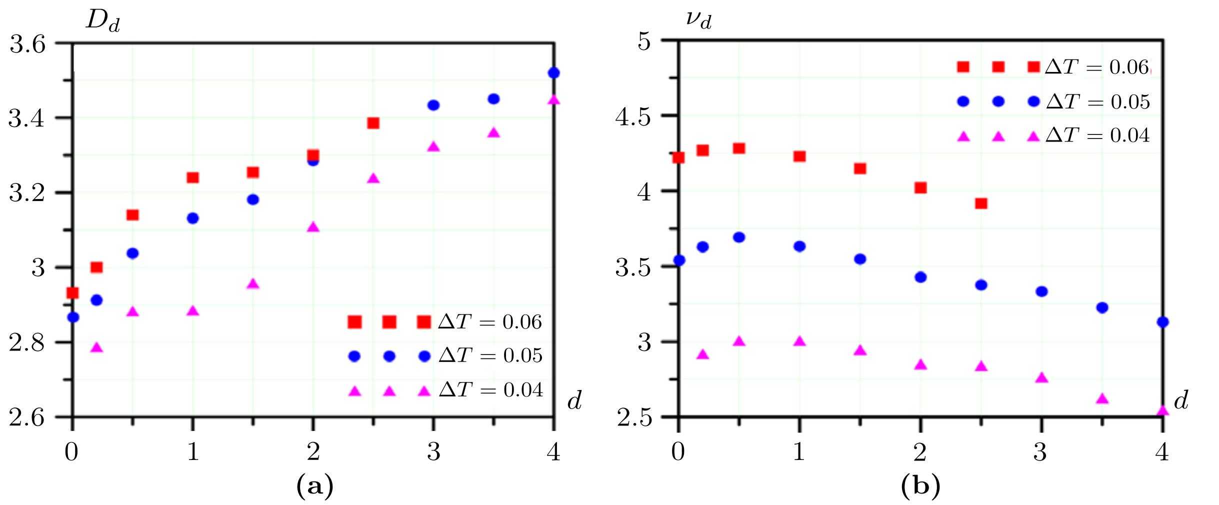


Рис. 3. Зависимости: (a) отрывного диаметра пузыря D_d [мм];
(b) частоты отрыва одиночного пузыря ν_d [Гц] от ширины лиофобной зоны d [мм]
при различных температурных перегревах ΔT

Зависимости частоты отрыва пузыря ν_d от ширины лиофобной зоны d при фиксированных значениях перегрева $\Delta T = 0.04\,T_c, 0.05\,T_c, 0.06\,T_c$ представлены на рисунке рис. 3(b). Видно, что частота отрыва пузырей ν_d растёт с величиной температурного перегрева ΔT. В зависимостях частоты отрыва пузырей от ширины лиофобной зоны ν_d (d) наблюдается наличие максимума при значениях ширины лиофобной зоны $d = 500$ мкм. При ширине лиофобной зоны $d > 0.5$ мм частота отрыва пузырей ν_d уменьшается с увеличением ширины лиофобной зоны d. На основе полученных данных был определён оптимальный размер лиофобной зоны ($d = 0.5$ мм) на лиофильной поверхности с точки зрения интенсификации теплообмена.

Для выбранных параметров проведена оценка капиллярной постоянной λ и числа Бонда Bo. Величина капиллярной постоянной получается равной $\lambda \approx 1.3$ мм. Отрывной диаметр пузыря в этом режиме составляет $D_d \approx 3.05$ мм (см. рис. 3(a)), а значит, $D_d/\lambda \approx 2.34$. Число Бонда получается равным $Bo \approx 2.02$, что также соответствует экспериментальным данным по кипению жидкостей широкого класса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделируется процесс роста и отрыва одиночного парового пузыря над одиночной лиофобной зоной (краевой угол смачивания $\theta = 110°$), помещённой в центр лиофильного нагревателя ($\theta = 67°$). Ширина лиофобной зоны варьировалась в пределах 0.2–8 мм. Исследовалась динамика роста и отрыва одиночного пузыря, рассчитывались зависимости отрывного диаметра и частоты отрыва пузыря от ширины лиофобной зоны и температурного перегрева.

По полученным расчётным данным можно сделать вывод, что метод решёточных уравнений Больцмана хорошо подходит для моделирования динамики одиночного пузыря при кипении на поверхностях с контрастной смачиваемостью. Полученные расчётные данные хорошо согласуются с результатами предыдущих работ [12, 13]. На основании полученных данных определён оптимальный размер лиофобной зоны (0.5 мм) на лиофильной поверхности с точки зрения интенсификации теплообмена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liang G., Mudawar I.* Review of pool boiling enhancement by surface modification // Internat. J. Heat Mass Transfer. 2019. V. 128. P. 892–933.
2. *Nam Y., Wu J., Warrier G., Sungtaek Y.* Experimental and numerical study of single bubble dynamics on a hydrophobic surface // J. Heat Transfer. 2009. V. 131, N 12. Article 121004.
3. *Phan H.T., Caney N., Marty P., Colasson S., Gavillet J.* Surface wettability controlled by nanocoating: the effects on pool boiling heat transfer and nucleation mechanism // Internat. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 5459–5471.
4. *Li Y., Zhanga K., Lu M.C., Duan C.* Single bubble dynamics on superheated superhydropho-bic surfaces // Internat. J. Heat Mass Transfer. 2016. V. 99. P. 521–531.
5. *Teodori E., Valente T., Malavasi I., Moita A.S., Marengo M., Moreira A.L.N.* Effect of extreme wetting scenarios on pool boiling conditions // Appl. Thermal Engrg. 2017. V. 115. P. 1424–1437.
6. *Bourdon B., Rioboo R., Marengo M., Gosselin E., De Coninck J.* Influence of the wettability on the boiling onset // Langmuir. 2012. V. 28, N 2. P. 1618–1624.
7. *Betz A. R., Jenkins J., Kim C.J., Attinger D.* Boiling heat transfer on superhydrophilic, superhydrophobic, and superbiphilic surfaces // Internat. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 57, N 2. P. 733–741.
8. *Kim S. H., Lee G.C., Kang J.Y., Moriyama K., Park H. S., Kim M. H.* The role of surface energy in heterogeneous bubble growth on ideal surface // Internat. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 108. P. 1901–1909.
9. *Kupershtokh A.L., Medvedev D.A., Karpov D.I.* On equations of state in a lattice Boltzmann method // Comput. Math. Appl. 2009. V. 58, N 5. P. 965–974.
10. *Gong S., Cheng P.* Numerical investigation of droplet motion and coalescence by an improved lattice Boltzmann model for phase transitions and multiphase flows // Comput. Fluids. 2012. V. 53. P. 93–104.
11. *Li Q., Kang Q.J., Francois M.M., He Y.L., and Luo K.H.* Lattice Boltzmann modeling of boiling heat transfer: The boiling curve and the effects of wettability // Internat. J. Heat Mass Transfer. 2015. V. 85. P. 787–796.
12. *Gong S., Cheng P.* Lattice Boltzmann simulation of periodic bubble nucleation, growth and departure from a heated surface in pool boiling // Internat. J. Heat Mass Transfer. 2013. V. 64. P. 122–132.

13. *Fedoseev A.V., Surtaev A.S., Moiseev M.I., Ostapchenko A.E.* Lattice Boltzmann simulation of bubble evolution at boiling on surfaces with different wettability // J. Phys. Conf. Series. 2020. V. 1677. Article 012085.

14. *Li Q., Yu Y., Zhou P., Yan H.J.* Enhancement of boiling heat transfer using hydrophilic-hydrophobic mixed surfaces: A lattice Boltzmann study // Appl. Thermal Engrg. 2018. V. 132. P. 490-–499.

15. *Wolf-Gladrow D.A.* Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models. N. Y.: Springer-Verl., 2005.

16. *He X., Luo L.S.* Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation // Phys. Rev. E. 1997. V. 56, N 6. Article 6811.

17. *Shan X., Yuan X.F., Chen H.* Kinetic theory representation of hydrodynamics: a way beyond the Navier—Stokes equation // J. Fluid Mech. 2006. V. 550. Article 413.

18. *Qian Y.H., d'Humieres D., Lallemand P.* Lattice BGK models for Navier—Stokes equation // Europhys. Lett. 1992 V. 17, N 6. Article 479.

19. *Succi S.* The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Oxford: Univ. Press, 2001.

20. *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.* A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 511–525.

21. *Chen H., Chen S., Matthaeus W.H.* Recovery of the Navier—Stokes equation using a lattice-gas Boltzmann method // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. R5339–R5342.

22. *Куперштох А.Л.* Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость-пар методом решёточных уравнений Больцмана // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 29–42.

23. *Куперштох А.Л.* Моделирование двухфазных течений жидкость-пар методом решёточных уравнений Больцмана // Сб. трудов Всероссийской конф. «28 Сибирский теплофизический семинар». Новосибирск, 2005. С. 1–22.

24. *Kupershtokh A.L., Stamatelatos C., Agoris D.P.* Stochastic model of partial discharge activity in liquid and solid dielectrics // Proc. 15 IEEE Internat. Conf. Dielectric Liquids. Coimbra, 2005. P. 135–138.

25. *Kupershtokh A.L., Karpov D.I., Medvedev D.A., Stamatelatos C.P., Charalambakos V.P., Pyrgioti E.C., and Agoris D.P.* Stochastic models of partial discharge activity in solid and liquid dielectrics // IET Sci. Meas. Technol., 2007, Vol. 1, N 6. P. 303–311.

26. *Kupershtokh A.L., Karpov D.I., Medvedev D.A., Stamatelatos C.P., Charalambakos V.P., Pyrgioti E.C., Agoris D.P.* Stochastic models of partial discharge activity in solid and liquid dielectrics // IET Sci. Meas. Technol. 2007. V. 1, N 6. P. 303–311.

27. *Yuan P., Schaefer L.* Equations of state in a lattice Boltzmann model // Phys. Fluids. 2006. V. 18. Article 042101.

28. *Peng D.Y. and Robinson, D.B.A* New two-constant equation of state // Indust. Engrg. Chemistry. Fundamentals. 1976. V. 15. P. 59–64.

29. *Blundell S., Blundell K.M.* Concepts in Thermal Physics. Oxford: Univ. Press, 2006.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 536.248.2

MODELING OF A SINGLE BUBBLE DYNAMICS AT BOILING BY LATTICE BOLTZMANN METHOD

© 2023 **A. V. Fedoseev**[a], **M. V. Salnikov**[b], **A. E. Ostapchenko**[c]

Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
pr. Acad. Lavrentieva 1, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: [a]fedoseev@itp.nsc.ru, [b]salnikovitsbras@gmail.com,
[c]a.ostapchenko@g.nsu.ru

Received 12.08.2022, revised 12.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. To study the process of boiling on a solid heater surface, a hybrid model based on lattice Boltzmann method (LBM) and heat transfer equation is presented. The process of formation and rise of a single bubble during boiling over a single lyophobic zone located on a smooth lyophilic surface was studied. Dependences of the bubble detachment frequency and bubble detachment diameter on the width of the lyophobic zone and the wall superheat were obtained. It is shown that the bubble detachment diameter increases with the width of the lyophobic zone, and the frequency of bubble detachment increases with the wall superheat. Based on the obtained data, the optimal size of the lyophobic zone on the lyophilic surface was determined from the point of view of heat transfer enhancement.

Keywords: enhancement of heat transfer at boiling, biphilic surfaces, lattice Boltzmann method.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.117

REFERENCES

1. Liang G., Mudawar I. Review of pool boiling enhancement by surface modification. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2019, Vol. 128, pp. 892–933.
2. Nam Y., Wu J., Warrier G., Sungtaek Y. Experimental and numerical study of single bubble dynamics on a hydrophobic surface. *J. Heat Transfer*, 2009, Vol. 131, No. 12, article 121004.
3. Phan H.T., Caney N., Marty P., Colasson S., Gavillet J. Surface wettability controlled by nanocoating: the effects on pool boiling heat transfer and nucleation mechanism. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2009, Vol. 52, pp. 5459–5471.
4. Li Y., Zhanga K., Lu M.C., Duan C. Single bubble dynamics on superheated superhydropho-bic surfaces. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2016, Vol. 99, pp. 521–531.
5. Teodori E., Valente T., Malavasi I., Moita A.S., Marengo M., Moreira A.L.N. Effect of extreme wetting scenarios on pool boiling conditions. *Appl. Thermal Engrg.*, 2017, Vol. 115, pp. 1424–1437.
6. Bourdon B., Rioboo R., Marengo M., Gosselin E., De Coninck J. Influence of the wettability on the boiling onset. *Langmuir*, 2012, Vol. 28, No. 2, pp. 1618–1624.
7. Betz A. R., Jenkins J., Kim C.J., Attinger D. Boiling heat transfer on superhydrophilic, superhydrophobic, and superbiphilic surfaces. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2013, Vol. 57, No. 2, pp. 733–741.
8. Kim S. H., Lee G.C., Kang J.Y., Moriyama K., Park H. S., Kim M. H. The role of surface energy in heterogeneous bubble growth on ideal surface. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2017, Vol. 108, pp. 1901–1909.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

9. Kupershtokh A.L., Medvedev D.A., Karpov D.I. On equations of state in a lattice Boltzmann method. *Comput. Math. Appl.*, 2009, Vol. 58, No. 5, pp. 965–974.
10. Gong S., Cheng P. Numerical investigation of droplet motion and coalescence by an improved lattice Boltzmann model for phase transitions and multiphase flows. *Comput. Fluids*, 2012, Vol. 53, pp. 93–104.
11. Li Q., Kang Q.J., Francois M.M., He Y.L., and Luo K.H. Lattice Boltzmann modeling of boiling heat transfer: The boiling curve and the effects of wettability. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2015, Vol. 85, pp. 787–796.
12. Gong S., Cheng P. Lattice Boltzmann simulation of periodic bubble nucleation, growth and departure from a heated surface in pool boiling. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2013, Vol. 64, pp. 122–132.
13. Fedoseev A.V., Surtaev A.S., Moiseev M.I., Ostapchenko A.E. Lattice Boltzmann simulation of bubble evolution at boiling on surfaces with different wettability. *J. Phys. Conf. Series*, 2020, Vol. 1677, article 012085.
14. Li Q., Yu Y., Zhou P., Yan H.J. Enhancement of boiling heat transfer using hydrophilic-hydrophobic mixed surfaces: A lattice Boltzmann study. *Appl. Thermal Engrg.*, 2018, Vol. 132, pp. 490-–499.
15. Wolf-Gladrow D.A. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models. N. Y.: Springer-Verl., 2005.
16. He X., Luo L.S. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. *Phys. Rev. E*, 1997, Vol. 56, No. 6, article 6811.
17. Shan X., Yuan X.F., Chen H. Kinetic theory representation of hydrodynamics: a way beyond the Navier—Stokes equation. *J. Fluid Mech.*, 2006, Vol. 550, article 413.
18. Qian Y.H., d'Humieres D., Lallemand P. Lattice BGK Models for Navier—Stokes Equation. *Europhys. Lett.*, 1992, Vol. 17, No. 6, article 479.
19. Succi S. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Oxford: Univ. Press, 2001.
20. Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys. Rev.*, 1954, Vol. 94, pp. 511–525.
21. Chen H., Chen S., Matthaeus W.H. Recovery of the Navier—Stokes equation using a lattice-gas Boltzmann method. *Phys. Rev. A*, 1992, Vol. 45, pp. R5339–R5342.
22. Kuperstokh A.L. Modelirovanie techenii s granitsami razdela faz zhidkost'-par metodom reshetochnykh uravnenii Bol'tsmana [Modeling of flows with liquid-vapor phase boundaries by the method of lattice Boltzmann equations]. *Vestn. NGU. Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika*, 2005, Vol. 5, No. 3, pp. 29–42 (in Russian).
23. Kuperstokh A.L. Modelirovanie dvukhfaznykh techenii zhidkost'-par metodom reshetochnykh uravnenii Bol'tsmana [Modeling of two-phase liquid-vapor flows by the method of lattice Boltzmann equations]. Sb. trudov Vserossiiskoi konf. «28 Sibirskii teplofizicheskii seminar», Novosibirsk, 2005, pp. 1–22 (in Russian).
24. Kupershtokh A.L., Stamatelatos C., Agoris D.P. Stochastic model of partial discharge activity in liquid and solid dielectrics. *Proc. 15 IEEE Internat. Conf. Dielectric Liquids*, Coimbra, 2005, pp. 135–138.
25. Kupershtokh A.L., Karpov D.I., Medvedev D.A., Stamatelatos C.P., Charalambakos V.P., Pyrgioti E.C., and Agoris D.P. Stochastic models of partial discharge activity in solid and liquid dielectrics. *IET Sci. Meas. Technol.*, 2007, Vol. 1, No. 6, pp. 303–311.
26. Kupershtokh A.L., Karpov D.I., Medvedev D.A., Stamatelatos C.P., Charalambakos V.P., Pyrgioti E.C., Agoris D.P. Stochastic models of partial discharge activity in solid and liquid dielectrics. *IET Sci. Meas. Technol.*, 2007, Vol. 1, No. 6, pp. 303–311.
27. Yuan P., Schaefer L. Equations of state in a lattice Boltzmann model. *Phys. Fluids*, 2006, Vol. 18, article 042101.
28. Peng D.Y., Robinson, D.B.A New two-constant equation of state. *Indust. Engrg. Chemistry. Fundamentals*, 1976, Vol. 15, pp. 59–64.
29. Blundell S., Blundell K.M. Concepts in Thermal Physics. Oxford: Univ. Press, 2006.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2023. Т. 26, № 1. С. 201–211

УДК 532.54

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СУСПЕНЗИИ В СИСТЕМЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ТРЕЩИН

Р. Р. Юлмухаметова[a], **А. А. Мусин**[b], **В. И. Валиуллина**[c], **Л. А. Ковалева**[d]

Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32, г. Уфа 450076, Россия

E-mails: [a]Regina.you@mail.ru, [b]mus-airat@yandex.ru, [c]vilenches@gmail.com, [d]liana-kovaleva@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.07.2022 г.; после доработки 29.07.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Проводится математическое моделирование течения суспензии в сложной системе трещин, когда основную пересекает вторичная. Математическая модель процесса построена в одножидкостном приближении и включает уравнение неразрывности для суспензии, систему уравнений движения суспензии, уравнение сохранения массы в виде конвективно-диффузионного уравнения переноса для объёмной концентрации частиц. Решение задачи в трёхмерной постановке реализовано в программном пакете OpenFOAM. Проведены исследования динамики распределения твёрдых сферических частиц в сети трещин в зависимости от соотношения характерных чисел Рейнольдса для течения и частиц, а также от соотношения длины основной и вторичной трещин.

Ключевые слова: течение суспензии, пересекающиеся трещины, математическое моделирование, одножидкостная модель, твёрдые сферические частицы.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.118

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование процессов переноса твёрдых частиц в жидкостях привлекает внимание широкого круга исследователей, что обусловлено прежде всего потребностями практики [1]. Особое внимание уделяется течению суспензий в каналах, которое имеет отношение ко многим природным и промышленным процессам, например при применении гидравлического разрыва пласта (ГРП), ставшего на сегодняшний день одним из популярнейших методов интенсификации добычи углеводородов. Технология проведения ГРП заключается в закачке жидкости под высоким давлением для образования трещин с целью увеличения проницаемости пласта, а для поддержания трещины в открытом состоянии используется расклинивающий агент — проппант (твёрдые частицы). Моделирование процесса ГРП подразделяется на исследование геомеханики распространения трещин, отслеживание транспортировки и размещения проппанта внутри трещины. Так как каждое месторождение обладает своей собственной уникальной сетью естественных трещин и разломов, трещины, образовавшиеся вследствие ГРП, имеют сложную геометрию. И в процессе закачки могут возникнуть неожиданные результаты, например нежелательное оседание твёрдых частиц в прискважинной зоне [2].

Лабораторные эксперименты транспортировки твёрдых частиц в плоских трещинах проводятся уже несколько десятилетий. Исследователи выявили и разработали множество основных выводов и теорий, касающихся осаждения и переноса проппанта. Однако в реальности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-31-90157).

трещины не всегда представляют собой плоские и линейные каналы. Активно ведутся разработки методов исследования транспортировки частиц в каналах сложной геометрии. Наиболее широко применяются модели, в которых основную трещину пересекают вторичные. Эффективность прохождения проппанта через вторичные трещины связана с расходом жидкости, концентрацией и размером [3]. При этом чем ближе к стволу скважины расположены вторичные трещины, тем более значительное влияние они оказывают на миграцию проппанта [4].

Наряду с экспериментальными исследованиями численное моделирование транспортировки частиц также эволюционировало от простой геометрии к более сложной. Исследователи рассматривают транспортировку проппанта в трещинах в виде течения суспензии в каналах различной геометрии. Среди методов математического моделирования динамики дисперсных систем можно выделить два подхода: одножидкостный и двухконтинуальный [5–10]. При одножидкостном подходе (диффузионное приближение) несущая жидкость и взвешенная в ней фаза рассматриваются как единое целое, а при двухконтинуальном подходе решается полная система двухскоростной модели. Однако для большинства практических целей последнее требует больших вычислительных затрат. В то же время одножидкостная модель, несмотря на свою кажущуюся простоту, позволяет провести технические расчёты с достаточно высокой достоверностью без привлечения больших вычислительных мощностей. Это объясняет широкое применение данного подхода как отечественными, так и зарубежными исследователями.

Авторы на основе модели многофазного потока Эйлера — Эйлера выявили, что ширина трещины и вязкость жидкости оказывают наиболее существенное влияние на окончательное размещение проппанта в сети трещин, а их размер и плотность являются второстепенными факторами [11]. В работе [12] проведено численное моделирование переноса проппанта в плоских, Т-образных и крестообразных трещинах. Авторами показано, что чем больше угол пересечения трещины крестообразной формы, тем сложнее проппанту проникнуть в естественные трещины. Равновесная высота слоя осевшего проппанта и отношение массы проппанта во вторичной трещине к массе во всей сети поперечных трещин используются в работе [13] для описания движения и оседания проппанта в поперечных трещинах.

Существует много предположений относительно того, насколько эффективно проппант транспортируется из первичной трещины в пересекающие. Сеть трещин может иметь сложную форму и неопределённости на реальном месторождении, такие как изменение угла и ширины, что создаёт трудности при моделировании. Лучшее понимание движения частиц в сложных сетях трещин может помочь усовершенствовать схемы проведения гидроразрыва пласта, сосредоточив внимание на параметрах, которые усиливают транспорт во вспомогательных трещинах. Таким образом, прогнозирование и оптимизация размещения расклинивающего наполнителя в сложных системах трещин остаётся актуальной проблемой. Данная работа посвящена исследованию транспорта жидкости и проппанта в сети трещин, представленных в виде двух пересекающихся каналов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

1.1. Постановка задачи

Рассматривается нестационарное течение суспензии в системе двух пересекающихся трещин. Такой случай возможен, например, когда трещину гидроразрыва (основная) пересекает естественная (вторичная) трещина. Расчётная область представляет собой крестообразный канал (рис. 1, вид сверху), в котором основная трещина моделируется в виде плоского тупикового или сквозного канала, а естественная трещина — в виде вторичного сквозного канала, который пересекает основной на расстоянии m от входа. Считается, что слева в основной канал закачивается концентрированная суспензия с заданным объёмным содержанием твёрдых частиц C_0. Ширина основного и вторичного каналов равны. Рассматриваются варианты, когда торцы каналов проницаемы для несущей жидкости (непрерывная фаза), но не для частиц (твёрдая фаза), а также случай, когда основной канал тупиковый.

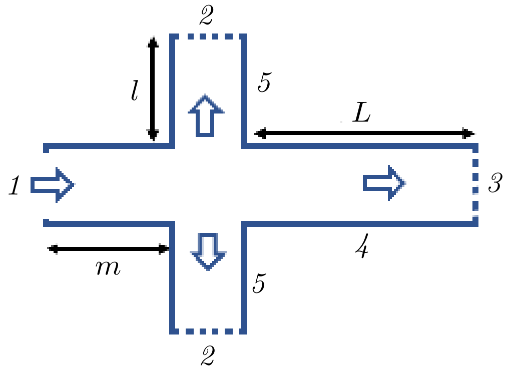


Рис. 1. Схема расчётной области:
вход (*1*), выход (*2*), выход или тупик (*3*), основной канал (*4*), вторичный канал (*5*)

1.2. Математическая модель

Математическая модель процесса построена в одножидкостном приближении и включает уравнение неразрывности для суспензии, систему уравнений движения суспензии, уравнение сохранения массы частиц:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}\vec{u}) = -\nabla p + \rho \vec{g} + \nabla \cdot \Sigma - \nabla \cdot \left(\frac{\rho_\mathrm{p} \rho_f}{\rho} (1 - C) C \vec{u}_r \vec{u}_r \right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \vec{u}) = -\nabla \cdot (C(1 - f_\mathrm{p}) \vec{u}_r), \tag{3}$$

где $\rho = \rho_\mathrm{p} C + \rho_\mathrm{f}(1 - C)$ — плотность суспензии; $\vec{u}$ — среднемассовая скорость суспензии; p — среднее давление суспензии; C — объёмная концентрация твёрдых частиц; $f_\mathrm{p} = \rho_\mathrm{p} C/\rho$ — массовая доля дисперсной фазы; $\vec{g}$ — ускорение свободного падения; $\Sigma = \mu[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - 2/3(\nabla \cdot \vec{u})I]$ — тензор напряжения в суспензии; $\vec{u_r}$ — относительная скорость между фазами; μ — коэффициент эффективной вязкости суспензии; I — единичная матрица. Здесь и далее индекс p обозначает параметры, относящиеся к твёрдой фазе, f — к жидкой фазе.

Эффективный коэффициент вязкости суспензии рассчитывается согласно эмпирической зависимости, предложенной Кригером [14]:

$$\mu = \mu_\mathrm{f} \left(1 - \frac{C}{C_{\max}} \right)^{-\beta}, \tag{4}$$

где μ_f — коэффициент динамической вязкости несущей фазы; $C_{\max}$ — максимальная плотность упаковки частиц; β — эмпирический коэффициент.

Относительная скорость между жидкой и твёрдой фазами определяется по формуле, учитывающей гравитационные силы при различной плотности частиц и несущей фазы, и силы, связанной с изменением сдвиговых напряжений в рассматриваемой системе при движении в канале [8]:

$$\vec{u}_r = f^h \left(\vec{u}_{st} - \frac{d^2(\rho_\mathrm{p} - \rho_\mathrm{f})}{18\mu_\mathrm{f}} \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d^2}{18\mu_\mathrm{f} C} \nabla \cdot \Sigma_\mathrm{p} \right), \tag{5}$$

$$\vec{u}_{st} = \frac{d^2(\rho_\mathrm{p} - \rho_\mathrm{f})\vec{g}}{18\mu_\mathrm{f}}, \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \Sigma_\mathrm{p} = -\gamma \nabla(\mu_\mathrm{f} a_n) - K_\gamma \mu_\mathrm{f} a_n \nabla \gamma, \tag{7}$$

$$K_\gamma = \left(2 - \frac{K_\eta}{K_c}\right)\left(1 - \frac{C}{C_{\max}}\right)^p + \frac{K_\eta}{K_c}, \tag{8}$$

$$f^h = (1-C)\frac{\mu_{\mathrm{f}}}{\mu}\left(1 - \left(\frac{C}{C_{\max}}\right)^2\right), \tag{9}$$

где $\vec{u}_{\mathrm{st}}$ — скорость осаждения частиц по Стоксу; f^h – функция стеснённого осаждения; d — диаметр частиц; Σ_{p} — тензор напряжений в среде частиц; γ — скорость сдвига потока суспензии; a_n — эмпирическая безразмерная функция, описывающая межчастичное взаимодействие; K_c, K_η — эмпирические коэффициенты.

Из совокупности различных вариантов записи эмпирической функции a_n в данной работе принята зависимость [15]

$$a_n = 0,75\left(\frac{C}{C_{\max}}\right)^2\left(1 - \frac{C}{C_{\max}}\right)^{-2}. \tag{10}$$

Для течения концентрированных суспензий соотношение коэффициентов K_η и K_c в зависимости от концентрации частиц определяется по следующей формуле [16]:

$$K_c/K_\eta = 1.042C + 0.1142. \tag{11}$$

Для сведения задачи к диффузионному типу из выражения (5) для скорости относительного движения фаз выделяется диффузионная часть. Эффективный коэффициент диффузии определяется согласно выражению

$$D = (1 - f_{\mathrm{p}})\frac{d^2\rho_{\mathrm{p}} f^h}{18(1-C)}\gamma\frac{da_n}{dC}. \tag{12}$$

Считается, что в начальный момент времени канал заполнен несущей фазой, система находится в покое:

$$C(x,y,z,t=0) = 0, \tag{13}$$

$$\vec{u}(x,y,z,t=0) = 0. \tag{14}$$

Граничные условия. На входе в основной канал задаются объёмная концентрация частиц и скорость потока суспензии:

$$C(x=0,y,z,t) = C_{\mathrm{in}}, \tag{15}$$

$$\vec{u}(x=0,y,z,t) = \vec{u}_{\mathrm{in}}. \tag{16}$$

На всех остальных поверхностях канала для объёмной концентрации твёрдой фазы ставится условие отсутствия потока:

$$D\frac{\partial C}{\partial n} - \rho_{\mathrm{p}} C(\vec{u} + (1 - f_{\mathrm{p}})\vec{u}_{rg}) = 0, \tag{17}$$

где $\vec{u}_{rg}$ — скорость относительного движения фаз за вычетом диффузионного слагаемого.

Для касательной к стенке компоненты скорости суспензии задаётся условие частичного скольжения на стенке [17]:

$$\beta_w d\left(1 - \frac{C}{C_{\max}}\right)C\frac{\mu}{\mu_{\mathrm{f}}}\frac{\partial u}{\partial n} = u, \tag{18}$$

где β_w — коэффициент проскальзывания, зависящий от радиуса частиц.

Для нормальной к стенке компоненты скорости суспензии задаётся условие непротекания на твёрдой стенке:

$$\vec{u}\cdot\vec{n}_w = 0, \tag{19}$$

где $\vec{n}_w$ — нормаль к поверхности стенки.

На выходах из вторичного канала задано условие протекания:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = 0. \tag{20}$$

В первом случае предполагается, что основной канал является тупиковым, и утечка жидкости происходит только из торцов вторичного канала:

$$\vec{u} = 0. \tag{21}$$

Во втором случае торец основного канала проницаем для несущей жидкости:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = 0. \tag{22}$$

В обоих рассматриваемых случаях твёрдые сферические частицы не вытекают из каналов. При записи системы уравнений сделаны следующие допущения и предположения: жидкость несжимаема; твёрдые сферические частицы одинакового размера; числа Стокса и Рейнольдса относительного движения частиц малы.

2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Система уравнений (1)–(3) с замыкающими соотношениями (4)–(12) и краевыми условиями (13)–(22) решается методом контрольного объёма в трёхмерной постановке в программном пакете OpenFOAM. Результаты валидации программного кода приведены в работах [18, 19].

Моделируется процесс закачки суспензии воды в основной канал через прямоугольное сечение входного отверстия. Рассчитывается случай со следующими параметрами: диаметр частиц $d = 5 \cdot 10^{-4}$ м; плотность частиц $\rho_{\mathrm{p}} = 2650$ кг/м^3; плотность несущей жидкости $\rho_{\mathrm{f}} = 1000$ кг/м^3; вязкость $\mu_{\mathrm{f}} = 1$ мПа· с; объёмная доля частиц на входе $C_{\mathrm{in}} = 0.3$. Размеры основного канала $0.5 \times 0,04 \times 0.002$ м, вторичного $0,3 \times 0,04 \times 0,002$ м. Вторичный канал пересекает основной на расстоянии $m = 0.2$ м от входа. Очевидно, что на распределение частиц в потоке будет оказывать взаимное влияние процессов вынужденного течения суспензии вдоль канала и относительного движения частиц в несущей жидкости. В качестве безразмерного параметра, характеризующего отношение сил инерции, действующих в потоке, к силам вязкости, выступает число Рейнольдса (Re). Число Re для течения суспензии определяется как $\mathrm{Re} = (u d_g \rho_{\mathrm{f}})/\mu_{\mathrm{f}}$, где d_g — гидравлический диаметр основного канала. Число $\mathrm{Re_p}$ для частиц составляет $\mathrm{Re_p} = (u_{\mathrm{st}} d \rho_{\mathrm{f}})/\mu_{\mathrm{f}}$.

Проведены исследования динамики распределения твёрдых сферических частиц в сети каналов в зависимости от соотношения характерных чисел $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p}$ и соотношения длин L и l основного и вторичного каналов: $\alpha = 2l/L$. Анализируется процесс заполнения каналов твёрдой фазой в зависимости от значений безразмерных параметров. Рассмотрены соотношения чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p}$=1; 2.5; 5; 7.5 и 10.

На рис. 2–4 представлены результаты численного моделирования, полученные при нагнетании 30% суспензии в канал при соотношении чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 1$ и $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 10$. Соотношение размеров основного и вторичного каналов равно α=1. На рис. 2 показано распределение частиц в основном и вторичном каналах для случая, когда основной канал является тупиковым.

Из рис. 2(а) видно, что при $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 1$ вдоль основного канала образуется равномерно растянутый на всю длину канала слой из осевших частиц, концентрация которых близка к предельной. Это объясняется тем, что ламинарный поток суспензии в основном канале разделяется на три составляющие, одна из которых обеспечивает миграцию частиц вдоль основного канала преимущественно по его нижней части, две другие — миграцию частиц во вторичный

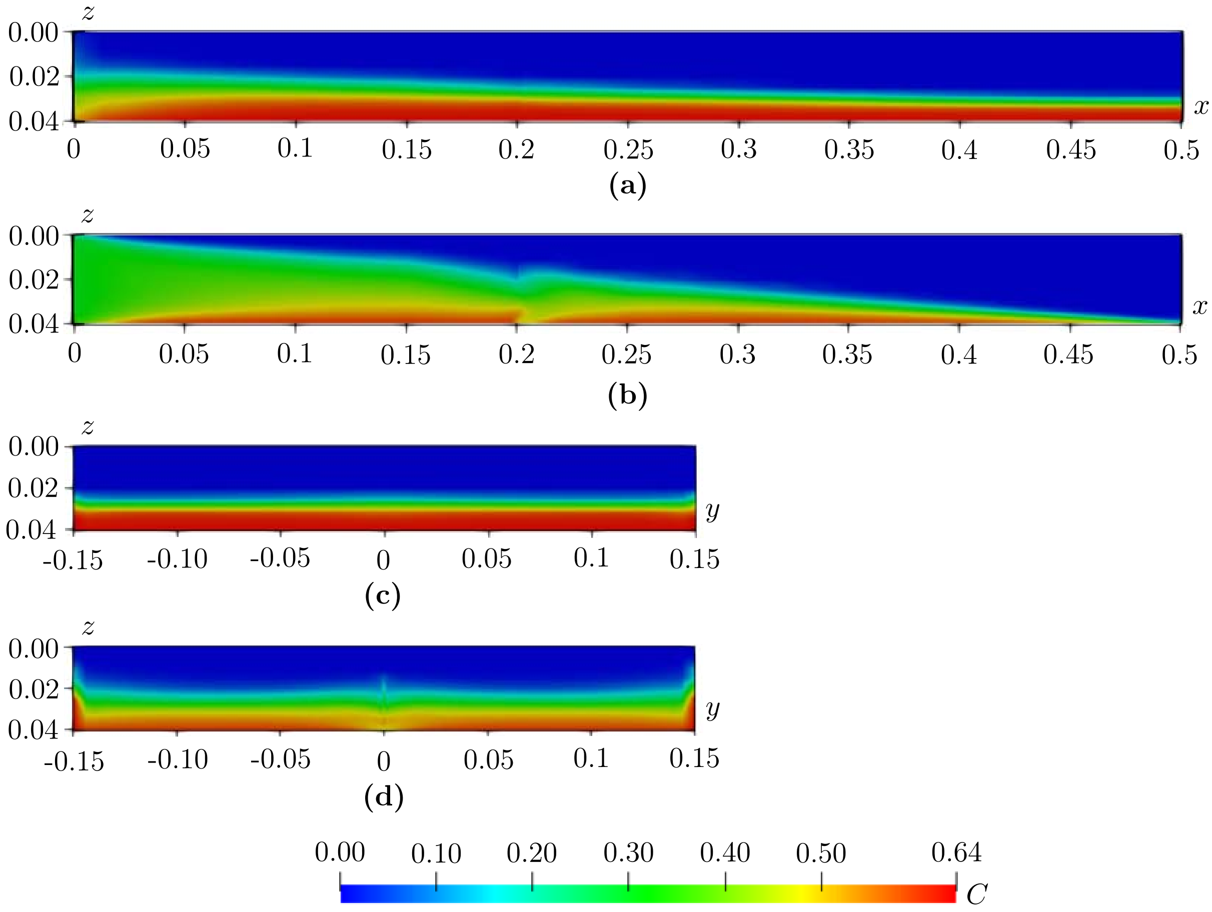


Рис. 2. Распределение частиц в вертикальном сечении вдоль оси основного (a, b) и вторичного (c, d) каналов (основной канал тупиковый): $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 1$ (a, c); $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 10$ (b, d); C — объёмная концентрация твёрдых частиц

канал (рис. 2(c)). Далее, в связи с тем, что рассматривается случай тупикового канала, свободная от частиц несущая фаза по верхней части основного канала возвращается обратно и вытекает через вторичный канал.

Увеличение соотношения чисел Рейнольдса приводит к тому, что основная масса частиц находится во взвешенном состоянии в области до пересекающего канала и большая часть частиц уносится потоком во вторичный канал. В частности, при $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 10$ лишь малая часть частиц успевает осесть (рис. 2(b)). В результате в правой части основного канала количество частиц заметно меньше, чем при $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 1$. Вал частиц, образующийся на дне канала, имеет разрыв в области пересечения каналов, где суспензия с высокой скоростью устремляется во вторичный канал (рис 2(d)). Кроме того, при $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 1$ (рис. 2(c)) наблюдается равномерное заполнение вторичного канала, тогда как при увеличении этого соотношения до 10 у выхода из канала образуется область повышенной концентрации частиц, которая со временем уплотняется (рис. 2(d)). Это приводит к существенному снижению пропускной способности вторичного канала, что провоцирует прекращение течения суспензии, сопровождающееся скачком давления в системе.

Результаты моделирования для случая, когда торец основного канала открыт, приведены на рис. 3. Стоит отметить, что в начальный момент времени распределение частиц в основном и вторичном каналах практически идентичны случаю с закрытым торцом. Отличия появляются, когда вал частиц достигает правого торца основного канала, и оно тем больше, чем больше отношение $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p}$. При этом заполнение основного и вторичного каналов у их выходов увеличивается настолько быстро, что в некоторый момент времени течение суспензии практически прекращается (рис. 3(d)). Однако в связи с тем, что в случае открытого основного канала обратного потока жидкости, который бы препятствовал миграции частиц, не возникает, процесс резкого снижения пропускной способности канала происходит значительно позже, чем в закрытом канале. Это приводит к тому, что при больших значениях $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p}$ происходит неполное и неравномерное заполнение основного канала, но степень заполнения канала твёрдой фазой в случае с открытым концом значительно выше, чем в канале с закрытым концом. В частности, при $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 10$ этот показатель равен 49 и 31%, соответственно для канала с открытым и закрытым торцом.

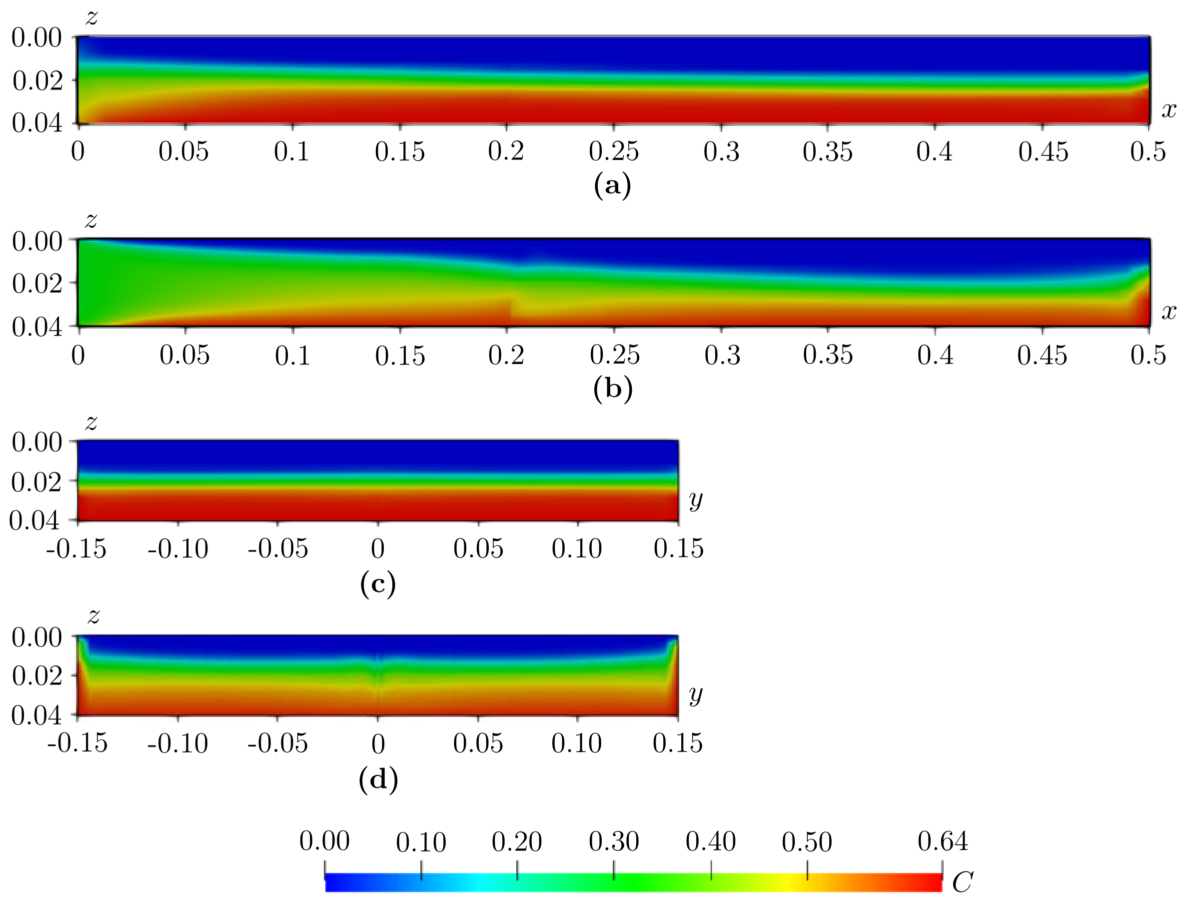


Рис. 3. Распределение частиц в вертикальном сечении вдоль оси основного (a, b) и вторичного (c, d) каналов (основной канал сквозной): $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 1$ (a, c); $\mathrm{Re}/\mathrm{Re_p} = 10$ (b, d); C — объёмная концентрация твёрдых частиц

Кроме того, в ходе расчётных исследований было отмечено, что время снижения пропускной способности и степень заполнения основного канала зависят от соотношения размеров каналов. На основе многопараметрических расчётов были построены кривые эффективности заполнения основного канала для различных случаев в зависимости от соотношения чисел Рейнольдса (рис. 4).

Получено, что для любого соотношения размеров каналов вне зависимости от того, открыт или закрыт торец основного канала, с ростом соотношения чисел Рейнольдса эффективность заполнения канала снижается. При увеличении длины вторичного канала эффективность заполнения основного канала увеличивается (кривые *1, 3* на рис. 4). Для основного

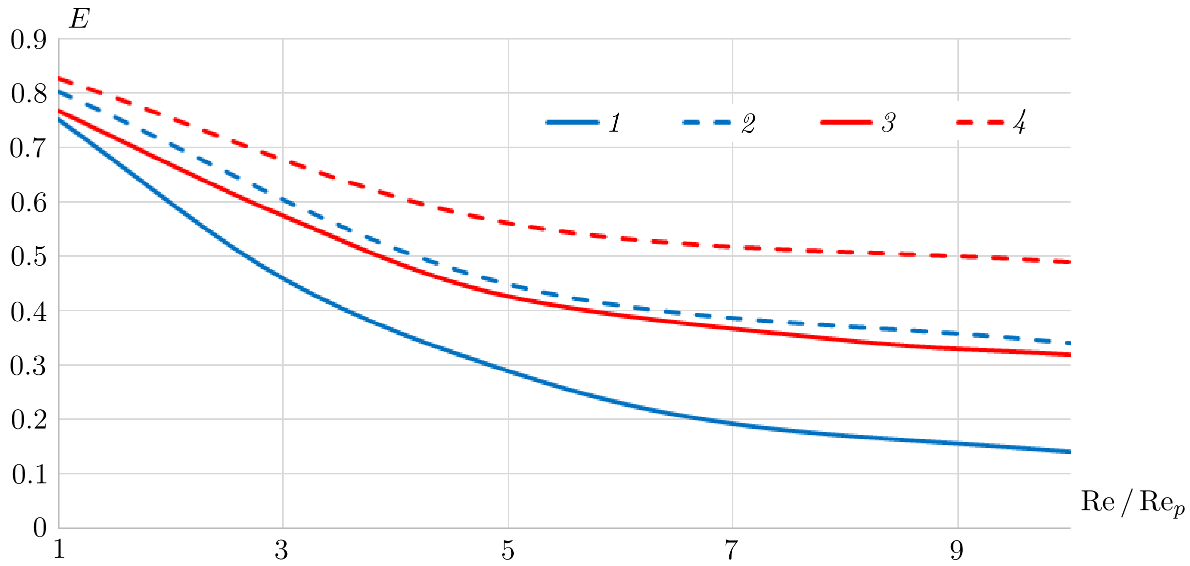


Рис. 4. Эффективность заполнения основной трещины в зависимости от соотношения чисел Рейнольдса для тупикового и сквозного основного каналов: $\alpha = 0.5$ тупиковый (*1*); $\alpha = 0.5$ сквозной (*2*); $\alpha = 1$ тупиковый (*3*); $\alpha = 1$ сквозной (*4*)

канала с открытым торцом эффективность заполнения канала при прочих равных условиях оказывается выше, чем для канала с закрытым торцом (кривые *1, 2* на рис. 4). Разница становится существенной при увеличении соотношения чисел Рейнольдса, что объясняется большей миграцией частиц во взвешенном состоянии к торцу основного канала в случае, когда он открыт (рис. 3(b)). В частности, замечено, что при соотношении размеров каналов $\alpha = 1$ для случая канала с закрытым торцом и при $\alpha = 0,5$ для случая канала с открытым торцом эффективность заполнения каналов практически идентична (кривые *2, 3* на рис. 4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено математическое моделирование динамики распределения твёрдых сферических частиц в системе пересекающихся каналов в зависимости от отношения характерного числа Рейнольдса для течения суспензии и числа Рейнольдса для частиц, а также соотношения длины основного канала с открытым или закрытым торцом и вторичного канала с отрытыми торцами.

Выявлено, что снижения пропускной способности канала в случае открытого торца основного канала происходит заметно позже, чем канала с закрытым торцом, что приводит к повышению степени заполнения канала твёрдыми частицами в канале с открытым торцом. Получено, что для любого соотношения размеров канала и независимо от того, открыт или закрыт торец основного канала, с ростом соотношения чисел Рейнольдса эффективность заполнения канала снижается. При увеличении длины вторичного канала эффективность заполнения основного канала увеличивается. Для основного канала с открытым торцом эффективность заполнения канала при прочих равных условиях оказывается выше, чем для канала с закрытым торцом.

Таким образом, наличие вторичной трещины, её размеры и режим закачки суспензии, а также пропускная способность трещины ГРП оказывают существенное влияние на эффективность её заполнения проппантом, что важно в плане практического применения полученных результатов при проектировании и реализации технологии гидравлического разрыва пласта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Зикиряев Ш.Х.* Перенос загрязняющих веществ в водоносных пластах с учётом двухместной адсорбции // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 127–139.
2. *Osiptsov A.A.* Fluid mechanics of hydraulic fracturing: A review // J. Petrol. Sci. Engrg. 2017. V. 156. P. 513–535; DOI: 10.1016/j.petrol.2017.05.019
3. *Sahai R., Moghanloo R.G.* Proppant transport in complex fracture networks: A review // J. Petroleum Sci. Engrg. 2019; DOI: 10.1016/ j.petrol.2019.106199
4. *Wen Q., Wang S., Duan X., Wang F., Jin X.* Experimental investigation of proppant settling in complex hydraulic-natural fracture system in shale reservoirs // J. Natural Gas Sci. Engrg. 2016. V. 33. P. 70–80; DOI: 10.1016/j.jngse.2016.05.010
5. *Головин С.В., Казакова М.Ю.* Одномерная модель вытеснения двухфазной жидкости в щели с проницаемыми стенками // Прикл. механика и техн. физика. 2017. Т. 58, № 1. С. 22–36.
6. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1, 2.
7. *Боронин С.А., Осипцов А.А.* Двухконтинуальная модель течения суспензии в трещине гидроразрыва // Докл. АН. 2010. Т. 431, № 6. С. 758–761.
8. *Гаврилов А.А., Шебелев А.В.* Одножидкостная модель смеси для ламинарных течений высококонцентрированных суспензий // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 2. С. 84–98.
9. *Pityuk Y.A., Abramova O.A., Fatkullina N.B., Bulatova A.Z.* BEM based numerical approach for the study of the dispersed systems rheological properties // Studies in Systems, Decision and Control. 2019. V. 199. P. 338–352.
10. *Iulmukhametova R.R., Musin A.A., Kovaleva L.A.* Mathematical modelling of a laminar suspension flow in the flat inclined channel // J. Physics. Conf. Ser. 2021. Article 012044; DOI: 10.1088/1742-6596/2057/1/012044
11. *Kong X., McAndrew J.* A computational fluid dynamics study of proppant placement in hydraulic fracture networks // SPE Unconventional Resources Conf. 2017. Calgary, Alberta, Canada, 15–16 February 2017. SPE-185083-MS; DOI: 10.2118/185083-MS
12. *Wang H., Wang M., Yang B., Lu Q., Zheng Y., Zhao H.* Numerical study of supercritical CO_2 and proppant transport in different geometrical fractures // Greenhouse Gases. Sci. Technol. 2018. V. 8; DOI:10.1002/ghg.1803
13. *Zhang Y., Lu X., Zhang X., Li P.* Proppant transportation in cross fractures: some findings and suggestions for field engineering // Energies. 2020. V. 13. Article 4912; DOI:10.3390/en13184912
14. *Krieger I.M.* Rheology of monodisperse lattice // Adv. Colloid Interface Sci. 1972. V. 3. P. 111–136.
15. *Morris J.F., Boulay F.* Curvilinear flows of non-colloidal suspensions: the role of normal stresses // J. Rheol. 1999. V. 43. P. 1213–1237.
16. *Tetlow N., Graham A.L., Ingber M.S., Subia S.R., Mondy L.A., Altobelli S.A.* Particle migration in a Couette apparatus: experiment and modeling // J. Rheol. 1998. V. 42. P. 307–327.
17. *Ingber M.S., Graham A.L., Mondy L.A., Fang Z.* An improved constitutive model for concentrated suspensions accounting for shear-induced particle migration rate dependence on particle radius // Internat. J. Multiphase Flow. 2009. V. 35. P. 270–276.
18. *Юлмухаметова Р.Р., Мусин А.А., Ковалева Л.А.* Численное моделирование ламинарного течения суспензии в плоском канале // Вестн. Башкир. ун-та. 2021. Т. 26, № 2. С. 281–286; DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.2.2
19. *Iulmukhametova R.R., Musin A.A., Kovaleva L.A.* Mathematical modeling of the flow of viscous incompressible fluid with suspended particles in flat inclined channel // Adv. Probl. Mech. II. 2020. (Lecture Notes Mech. Engrg. 2022); DOI: 10.1007/978-3-030-92144-6_3

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 532.54

MATHEMATICAL MODELING OF SUSPENSION FLOW IN A SYSTEM OF INTERSECTING FRACTURES

© 2023 R. R. Iulmukhametova[a], A. A. Musin[b], V. I. Valiullina[c], L. A. Kovaleva[d]

Bashkir State University,
ul. Zaki Validi 32, Ufa 450076, Russia

E-mails: [a]Regina.you@mail.ru, [b]mus-airat@yandex.ru, [c]vilenches@gmail.com, [d]liana-kovaleva@yandex.ru

Received 29.07.2022, revised 29.07.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. In this paper, mathematical modeling of the suspension flow in a complex system of fractures is carried out, when the main fracture is crossed by secondary fracture. The mathematical model of the process is built in the one-fluid approximation and includes the continuity equation for the suspension, the system of equations of suspension motion, the mass conservation equation in the form of a convective-diffusion transfer equation for the volume concentration of particles. The solution of the problem in a 3D formulation is implemented in the OpenFOAM software package. The dynamics of the distribution of solid spherical particles in a network of fractures was studied depending on the ratio of the characteristic Reynolds numbers for the flow and particles, as well as on the ratio of the length of the main and secondary fractures.

Keywords: suspension flow, intersecting fractures, mathematical modeling, one-fluid model, solid spherical particles.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.118

REFERENCES

1. Khuzhayorov B. Kh., Makhmudov Zh. M., Zikiryayev Sh. Kh. Perenos zagryaznyayushchikh veshchestv v vodonosnykh plastakh s uchetom dvukhmestnoi adsorbtsii [Pollutant transfer in water-bearing strata with accounting for two-site adsorption]. *Sib. Zhurn. Industr. Math.*, 2011, Vol. 14, No. 1, pp. 127–139 (in Russian).
2. Osiptsov A.A. Fluid mechanics of hydraulic fracturing: A review. *J. Petrol. Sci. Engrg.*, 2017, Vol. 156, pp. 513–535; DOI: 10.1016/j.petrol.2017.05.019
3. Sahai R., Moghanloo R.G. Proppant transport in complex fracture networks:A review. *J. Petroleum Sci. Engrg.*, 2019; DOI: 10.1016/ j.petrol.2019.106199
4. Wen Q., Wang S., Duan X., Wang F., Jin X. Experimental investigation of proppant settling in complex hydraulic-natural fracture system in shale reservoirs. *J. Natural Gas Sci. Engrg.*, 2016, Vol. 33, pp. 70–80; DOI: 10.1016/j.jngse.2016.05.010
5. Golovin S. V., Kazakova M. Yu. One-dimensional model of two-phase fluid displacement in a slot with permeable walls. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, Vol. 58, No. 1, pp. 17–30.
6. Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznykh sred [Dynamics of multiphase media]. Moscow: Nauka, 1987, Vol. 1, 2 (in Russian).
7. Boronin S. A., Osiptsov A. A. Two-continua model of suspension flow in a hydraulic fracture. *Dokl. Phys.*, 2010, Vol. 55, No. 4, pp. 199–202.

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 1.

8. Gavrilov A. A., Shebelev A. V. Single-fluid model of a mixture for laminar flows of highly concentrated suspension. *Fluid Dynamics*, 2018, Vol. 53, No. 2, pp. 255–269.

9. Pityuk Y.A., Abramova O.A., Fatkullina N.B., Bulatova A.Z. BEM based numerical approach for the study of the dispersed systems rheological properties. *Studies in Systems, Decision and Control*, 2019, Vol. 199, pp. 338–352.

10. Iulmukhametova R.R., Musin A.A., Kovaleva L.A. Mathematical modelling of a laminar suspension flow in the flat inclined channel. *J. Physics. Conf. Ser.*, 2021, article 012044; DOI: 10.1088/1742-6596/2057/1/012044

11. Kong X., McAndrew J. A computational fluid dynamics study of proppant placement in hydraulic fracture networks. *SPE Unconventional Resources Conf.*, Calgary, Alberta, Canada, 15–16 February 2017, SPE-185083-MS; DOI: 10.2118/185083-MS

12. Wang H., Wang M., Yang B., Lu Q., Zheng Y., Zhao H. Numerical study of supercritical CO_2 and proppant transport in different geometrical fractures. *Greenhouse Gases. Sci. Technol.*, 2018, Vol. 8; DOI:10.1002/ghg.1803

13. Zhang Y., Lu X., Zhang X., Li P. Proppant transportation in cross fractures: some findings and suggestions for field engineering. *Energies*, 2020, Vol. 13, article 4912; DOI:10.3390/en13184912

14. Krieger I.M. Rheology of monodisperse lattice. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 1972, Vol. 3, pp. 111–136.

15. Morris J.F., Boulay F. Curvilinear flows of non-colloidal suspensions: the role of normal stresses. *J. Rheol.*, 1999, Vol. 43, pp. 1213–1237.

16. Tetlow N., Graham A.L., Ingber M.S., Subia S.R., Mondy L.A., Altobelli S.A. Particle migration in a Couette apparatus: experiment and modeling. *J. Rheol.*, 1998, Vol. 42, pp. 307–327.

17. Ingber M.S., Graham A.L., Mondy L.A., Fang Z. An improved constitutive model for concentrated suspensions accounting for shear-induced particle migration rate dependence on particle radius. *Internat. J. Multiphase Flow*, 2009, Vol. 35, pp. 270–276.

18. Iulmukhametova R. R., Musin A. A., Kovaleva L. A. Chislennoe modelirovanie laminarnogo techeniya suspenzii v ploskom kanale [Numerical simulation of a laminar suspension flow in a flat channel]. *Vestnik Bashkir. Univ.*, 2021, Vol. 26, No. 2, pp. 281–286 (in Russian); DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2021.2.2

19. Iulmukhametova R.R., Musin A.A., Kovaleva L.A. Mathematical modeling of the flow of viscous incompressible fluid with suspended particles in flat inclined channel. *Adv. Probl. Mech.* II. 2020. (*Lecture Notes Mech. Engrg.*, 2022); DOI: 10.1007/978-3-030-92144-6_3

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2023. Том 26, № 1

Зав. редакцией Т. А. Звонарева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 07.11.2023 г.
Формат $60 \times 84\,{}^1\!/_8$. Усл. печ. л. 24,6.
Объём $19,3$ МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия