

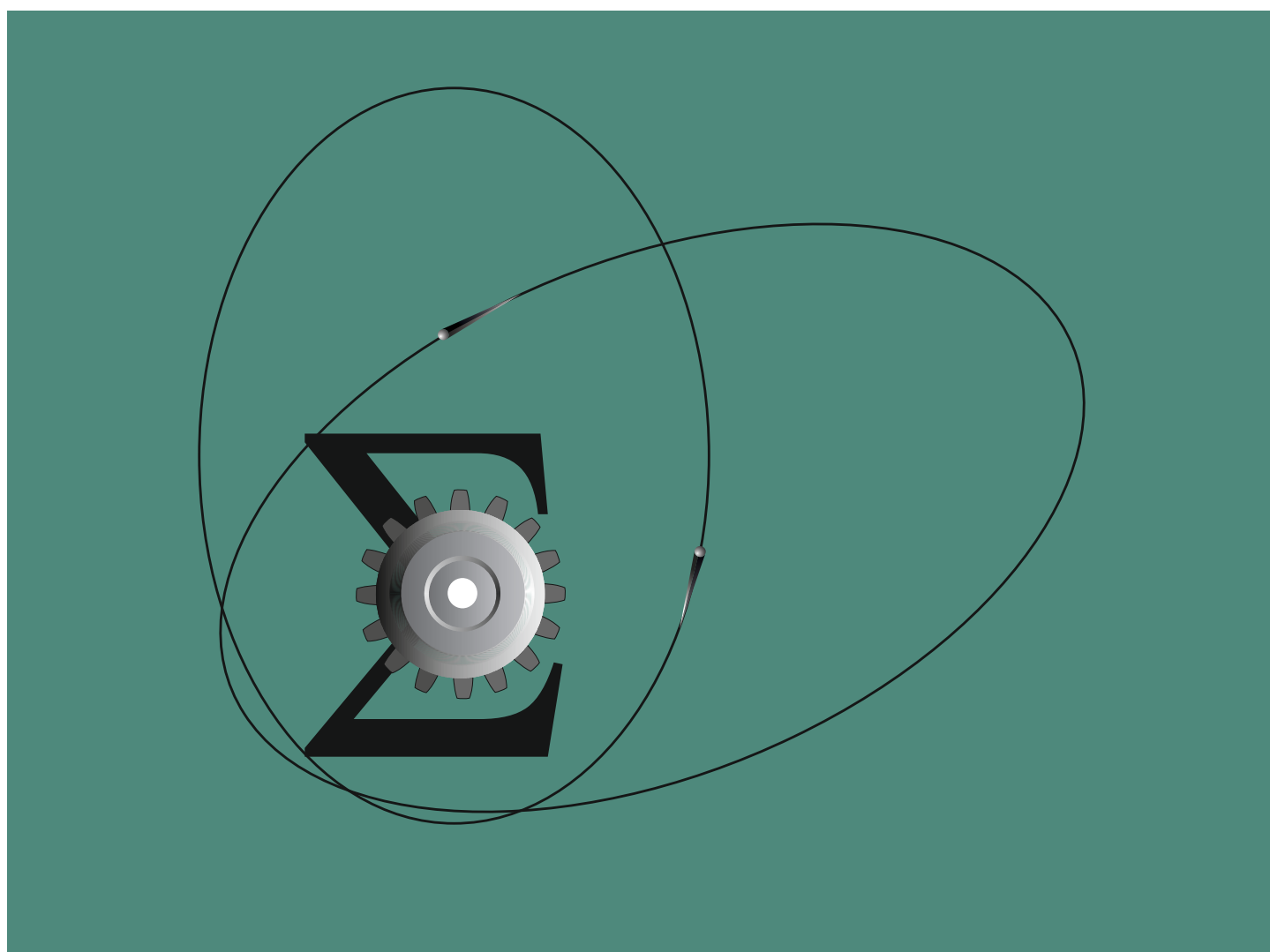
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 26

№ 2

2023



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	М. А. Шишленин
Отв. секретарь	В. А. Дедок

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	И. Б. Петров
Ю. С. Волков	П. И. Плотников
К. В. Воронцов	М. И. Протасов
А. В. Гасников	В. Г. Романов
М. А. Гузеев	Е. М. Рудой
В. П. Ильин	К. К. Сабельфельд
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. Н. Сидоров
А. Л. Карчевский	А. С. Терсенов
М. В. Клибанов	В. С. Тимофеев
С. С. Кутателадзе	В. В. Шайдуров
В. А. Левин	А. А. Шананин
Н. И. Макаренко	

Учредители журнала:

Сибирское отделение РАН

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году

Выходит 4 раза в год

Том 26, № 2(94)

Научный журнал

Апрель–июнь, 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Апостол Ю. С., Вожаков И. С. Численное моделирование турбулентного газового потока над волнистой поверхностью.....	5
Барсуков А. В., Терехов В. В., Терехов В. И. Численное исследование структуры турбулентного течения и теплообмена в плоском канале с гексагональными сотами различной глубины.....	14
Бобылева Т. Н., Шамаев А. С., Янцен О. В. Математическая модель фильтра для водоочистки с использованием биопленок.....	25
Бойко С. В., Ларичкин А. Ю. Обратная задача чистого изгиба балки в условиях ползучести.....	37
Двойнишников С. В., Куликов Д. В., Меледин В. Г., Рахманов В. В. Алгоритм расшифровки фазовых изображений для измерения трёхмерной геометрии динамичных объектов.....	53
Дурдиев У. Д., Бозоров З. Р. Нелокальная обратная задача по определению неизвестного коэффициента в уравнении колебания балки.....	60
Иващенко В. А., Лобанов П. Д., Яворский Н. И., Токарев М. П., Мулладжанов Р. И. Прямое численное моделирование периферийной и внутренней конфигураций модельной сборки твэлов.....	74
Огородников И. А. Неупругое столкновение резонансных солитонов в пузырьковой среде.....	81
Перцев Н. В., Топчий В. А., Логинов К. К. Стохастическое моделирование локальных по времени и местоположению контактов индивидуумов в эпидемическом процессе.....	94
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при степенной градиентной нелинейности в полулинейном волновом уравнении.....	113
Солнышкина О. А., Фаткуллина Н. Б., Булатова А. З. Трёхмерное моделирование однофазных и многофазных течений в микроканалах с неровностями.....	130
Сомванши П. М., Чеверда В. В., Кабов О. А. Взаимодействие капли жидкости с супергидрофобной поверхностью.....	142
Уринов А. К., Азизов М. С. О разрешимости начально-граничной задачи для уравнения высокого чётного порядка, вырождающегося на границе области.....	155

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Федюшкин А. И., Иванов К. А., Пунтус А. А. Эффективный многосеточный метод решения задач высокочастотной вибрационной конвекции	171
Хайретдинов М. С., Михайлов А. А., Ковалевский В. В., Пинигина Д. Л., Якименко А. А. Численно-аналитические методы расчёта волновых полей и восстановления скоростных характеристик неоднородных упругих сред Байкальской рифтовой зоны	188
Чупров П. А., Фортова С. В., Уткин П. С. Численное исследование взаимодействия взрывной волны со слоем жидкостной пены с учётом эффекта компактирования .	204
Шепелев В. В. Гидродинамическое моделирование индуцированных лазером ударных волн в алюминии в цилиндрически-симметричной постановке	215

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и промышленной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СибЖИМ
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
Телефон: +7 (383) 329-76-11
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998

4 issues per year

Vol. 26, No. 2(94)

Scientific journal

April–June, 2023

CONTENTS

Apostol Yu. S., Vozhakov I. S. Numerical simulation of turbulent gas flow over a wavy wall.....	5
Barsukov A. V., Terekhov V. V., Terekhov V. I. Numerical study of the structure of turbulent flow and heat transfer in a flat channel with hexagonal honeycombs of various depths.....	14
Bobyleva T. N., Shamaev A. S., Yantsen O. V. Mathematical model of the wastewater treatment process using biofilm	25
Boyko S. V., Larichkin A. Yu. Inverse problem of pure beam bending in creep conditions	37
Dvoynishnikov S. V., Kulikov D. V., Meledin V. G., Rakhmanov V. V. Algorithm for interpretation of phase images for measuring the three-dimensional geometry of dynamic objects.....	53
Durdiev U. D., Bozorov Z. R. Nonlocal inverse problem for determining the unknown coefficient in the beam vibration equation.....	60
Ivashchenko V. A., Lobanov P. D., Yavorsky N. I., Tokarev M. P., Mullyadzhyanov R. I. Direct numerical simulation of the peripheral and the internal configuration of the model fuel assembly	74
Ogorodnikov I. A. Inelastic collision of resonant solitons in a bubble medium	81
Pertsev N. V., Topchii V. A., Loginov K. K. Stochastic modeling of local by time and location contacts of individuals in the epidemic process	94
Romanov V. G., Bugueva T. V. The problem of determining the coefficient for power gradient nonlinearity in semilinear wave equation.....	113
Solnyshkina O. A., Fatkullina N. B., Bulatova A. Z. Three-dimensional simulation of single- and multiphase flow in roughness microchannels	130
Somwanshi P. M., Cheverda V. V., Kabov O. A. Impact of liquid drop over a superhydrophobic surface.....	142

NOVOSIBIRSK

SOBOLEV INSTITUTE PRESS

Urinov A. K., Azizov M. S. About an initial boundary problem for a degenerate higher even order partial differential equation	155
Fedyushkin A. I., Ivanov K. A., Puntus A. A. An effective multigrid method for solving problems of high frequency vibrational convection	171
Khairtdinov M. S., Mikhailov A. A., Kovalevsky V. V., Pinigina D. L., Yakimenko A. A. Numerical analytic methods for calculating wave fields and restoring the velocity characteristics of inhomogeneous elastic media in the baikal rift zone	188
Chuprov P. A., Fortova S. V., Utkin P. S. Numerical investigation of the interaction between shock wave and aqueous foam with compaction.....	204
Shepelev V. V. Hydrodynamic modeling of laser-induced shock waves in aluminum in a cylindrically-symmetric formulation.....	215

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:

SibJIM

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

pr. Akad. Koptyuga 4

Novosibirsk 630090, Russia

Phone: +7 (383) 329-76-11

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

© Siberian Branch of RAS, 2023

© Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2023

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ГАЗОВОГО ПОТОКА НАД ВОЛНИСТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2023 Ю. С. Апостол^{1,2a}, И. С. Вожаков^{1,2b}

¹Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,

²Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: ^ay.apostol@g.nsu.ru, ^bvozhakov@gmail.com

Поступила в редакцию 08.07.2022 г.; после доработки 14.11.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

С помощью пакета OpenFoam проведено численное исследование турбулентного потока над волнистой поверхностью при различных значениях амплитуды и длины волны возмущения стенки канала. Для описания турбулентных характеристик использованы модели RANS и LES. Число Рейнольдса в потоке составляло 20000. Получены средние профили скоростей и касательных напряжений на стенке канала. Рассчитаны значения амплитуды и сдвига фаз для возмущений касательного напряжения при различных геометрических параметрах канала. Проведено сравнение с теоретической моделью и экспериментальными результатами.

Ключевые слова: численное моделирование, турбулентность, RANS и LES модели, волнистая стенка, касательные напряжения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.201

ВВЕДЕНИЕ

Турбулентные течения над волнистыми поверхностями распространены как в природе, так и в различных отраслях промышленности. Таковыми течениями, например, являются потоки воздуха над сложными поверхностями рельефа. Они интересны в контексте моделирования распространения загрязняющих атмосферу веществ. Другим примером могут послужить потоки воздуха над океаном, поверхность которого изменяется в пространстве и во времени. При рассмотрении совместных газожидкостных потоков зачастую полагают, что скорость течения жидкости много меньше скорости газового потока. В таком случае можно считать, что газ обтекает квазистационарную волнистую поверхность раздела. Хотя во многих экспериментах и расчётах учитывались твёрдые волнистые стенки, результаты всё же представляют определённый интерес для течений газа над волнистыми жидкостями, поскольку газ ведёт себя похожим образом и при обтекании поверхности жидкости [1]. Также существуют плёночные течения, которые образуются, например, в теплообменниках. Такие течения увеличивают трение в каналах.

В литературе представлено большое количество исследований, посвящённых неотрывному обтеканию волнистых поверхностей. Например, в работе [2] проведены экспериментальные исследования, чтобы проверить применимость линейной теории для описания возмущений в потоке. В [3, 4] измерены возмущения напряжения сдвига, изменения давления и профилей скорости вдоль твёрдой волны. Авторы работ заметили, что переменные отклика всё больше

отличаются от гармонической формы с увеличением высоты волны и скорости потока, и пришли к выводу, что нелинейный отклик наблюдается для амплитуды волны обезразмеренной на толщину пограничного слоя больше 27.

В настоящей работе выполнено численное исследование турбулентного потока над волнистой поверхностью с использованием RANS (Reynolds Averaging Navier—Stocks) и LES (Large Eddy Simulation) методов. Метод RANS гораздо менее требователен к расчётной сетке. Кроме того, описание средних параметров течения позволяет упростить задачу до двумерной, что ещё больше уменьшает требования к вычислительным мощностям. Подход LES оказывается гораздо более требователен к расчётной сетке, особенно при высоких числах Рейнольдса, однако, как ожидается, он даёт более валидные результаты при моделировании турбулентных течений. Получены значения касательных напряжений на стенке и проведено сравнение с теоретическими и экспериментальными результатами. Результаты настоящей работы могут быть использованы для определения диапазона применимости существующих теоретических моделей, верификации результатов и их дальнейшей модификации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проведено моделирование турбулентного газового потока в плоском канале с волнистыми стенками. Схематичное изображение расчётной области представлено на рис. 1.

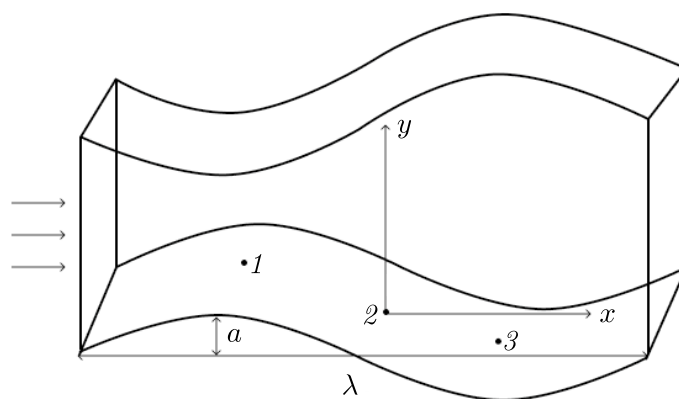


Рис. 1. Вид расчётной области

Моделирование выполнено с помощью уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости, имеющих вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) \right] + g_i, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

где u_i — i -я компонента поля скорости, ν — коэффициент кинематической вязкости, ν_T — коэффициент турбулентной кинематической вязкости, ρ — плотность, p — давление, g_i — i -я компонента внешней силы.

Расчёт проводился с использованием пакета с открытым исходным кодом OpenFOAM с помощью решателя для переходных процессов в несжимаемой жидкости PIMPLE. Моделирование турбулентных характеристик потока выполнено с использованием двух различных подходов: RANS и LES.

Расчётная сетка представляла собой канал поперечного сечения 10×10 см. На входе, выходе и боковых поверхностях поставлены циклические граничные условия. Верхние стенки представляли собой твёрдые поверхности, на которых выполнялось условие прилипания и непро-

текания. Движение потока в канале обеспечивалось постоянным градиентом давления, которое было выбрано таким, чтобы средняя скорость потока составляла 1 м/с. Число Рейнольдса, определяемое гидравлическим диаметром $D_h = 4S/P$ и средней скоростью потока \bar{u} , составляло $Re = \bar{u}D_h \nu = 20000$. Здесь S — площадь сечения, P — периметр стенок в сечении. Расчёты выполнены для различных значений амплитуды возмущения и длины волны возмущения λ .

Размер расчётной сетки варьировался в зависимости от используемой модели турбулентности и параметров расчётной области. Так, для RANS использована более грубая сетка, чем для LES. В случае LES сетка подбиралась таким образом, чтобы пристеночная ячейка имела размер, примерно равный толщине линейного подслоя для заданных параметров течения. В случае RANS сетка выбрана путём последовательного сгущения до момента, когда результаты расчёта более не зависели от размеров ячеек.

1.1. Метод RANS

Метод RANS основывается на решении уравнений Рейнольдса: поле скорости раскладывается на среднее по времени значение и флуктуации

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + U(x, t). \quad (3)$$

Тогда уравнения приобретают вид

$$\nabla \bar{u}(x, t) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = \nu \Delta \bar{u}_i - \frac{\partial \bar{U}_i \bar{U}_k}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}. \quad (5)$$

Таким образом, получается система незамкнутых уравнений Рейнольдса. Замыкание уравнений Рейнольдса производится с использованием полуэмпирических моделей турбулентности. В данной работе реализуется гибридная модель $k - \omega$ SST [5]: в пристенной области используется $k - \omega$ модель, во внешнем потоке используется $k - \varepsilon$ модель.

Уравнение переноса кинетической энергии имеет вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu + \sigma_k \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j}. \quad (6)$$

Здесь k — кинетическая энергия турбулентности, ω — удельная скорость диссипации кинетической энергии турбулентности, $P_k = \min \left(\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, 10 \beta^* k \omega \right)$.

Удельная скорость диссипации рассчитывается с использованием следующего уравнения:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu + \sigma_\omega \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \quad (7)$$

где $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$.

Константы $[\alpha, \beta, \sigma] = \phi$ изменяются в зависимости от расстояния от стенки:

$$\phi = \phi_1 F_1 + \phi_2 (1 - F_2), \quad (8)$$

где

$$F_1 = \tanh \left(\min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4 \sigma_{\omega_2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right]^4 \right),$$

$$F_2 = \tanh \left(\left[\max \left(\frac{2 \sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right),$$

$$CD_{k\omega} = \max \left(2 \rho \sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right).$$

Все значения констант взяты из работы [5]:

$$\alpha_1 = \frac{5}{9}, \quad \alpha_2 = 0,44, \quad \beta_1 = \frac{3}{40}, \quad \beta_2 = 0,0828,$$

$$\sigma_{k_1} = 0,85, \quad \sigma_{k_2} = 1, \quad \sigma_{\omega_1} = 0,5, \quad \sigma_{\omega_2} = 0,856, \quad \beta^* = \frac{9}{100}.$$

В итоге турбулентная вязкость рассчитывается следующим образом:

$$\nu_T = \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega, \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}F_2)}. \quad (9)$$

1.2. Метод LES

Подход основан на решении отфильтрованных уравнений Навье — Стокса, замкнутых с помощью подсеточных моделей турбулентности. Сначала выполняется фильтрация: разделение вихрей по масштабам. Далее уравнения приводятся к такому виду, чтобы крупные вихри, удовлетворяющие граничным условиям, решались точно. После применяется подсеточная модель, описывающая мелкие вихри, считающиеся изотропными, и их взаимодействие с крупными. Применение этого подхода обосновано при наличии двух предположений: а) эффекты крупных и мелких масштабов можно разделить; б) описание взаимодействия вихрей происходит только на крупном масштабе.

В модели WALE [6] подсеточная вязкость задаётся соотношением

$$\nu_{\text{sgs}} = (C_w \Delta)^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}, \quad (10)$$

где

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}, \quad C_w = 0.325.$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

В расчётах получены продольные и поперечные компоненты средней скорости в зависимости от поперечной координаты в волнистом канале. При этом использование RANS модели изначально предполагает расчёт средней скорости. В то же время LES моделирует движение крупных вихрей, а значит, и пульсаций скорости в канале. Поэтому для LES проведено осреднение мгновенных значений скорости на большом промежутке времени (приблизительно 50 с). Значения средней скорости вдоль линии, начинающейся в точке 2 (см. рис. 1), представлены на рис. 2. При увеличении амплитуды возмущения до 8 мм вблизи стенки возникают обратные потоки (продольная компонента скорости принимает отрицательные значения). Однако результаты по разным моделям турбулентности предсказывают существенно отличающиеся значения скорости. Так, при использовании LES наблюдается зона рециркуляции значительно большего размера. В модели RANS для амплитуды возмущения 8 мм и длины волны возмущения 16 см отрицательные значения скорости оказываются меньше на порядок. В то время как для длины возмущения 32 см зона рециркуляции отсутствует.

Одним из наиболее важных параметров, определяющих течение в волнистом канале, является касательное напряжение. Для его расчёта мы использовали полученные в расчёте осреднённые профили скорости:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial |\bar{u}|}{\partial \mathbf{n}}. \quad (11)$$

Здесь через $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ обозначена производная в нормальном направлении к стенке канала.

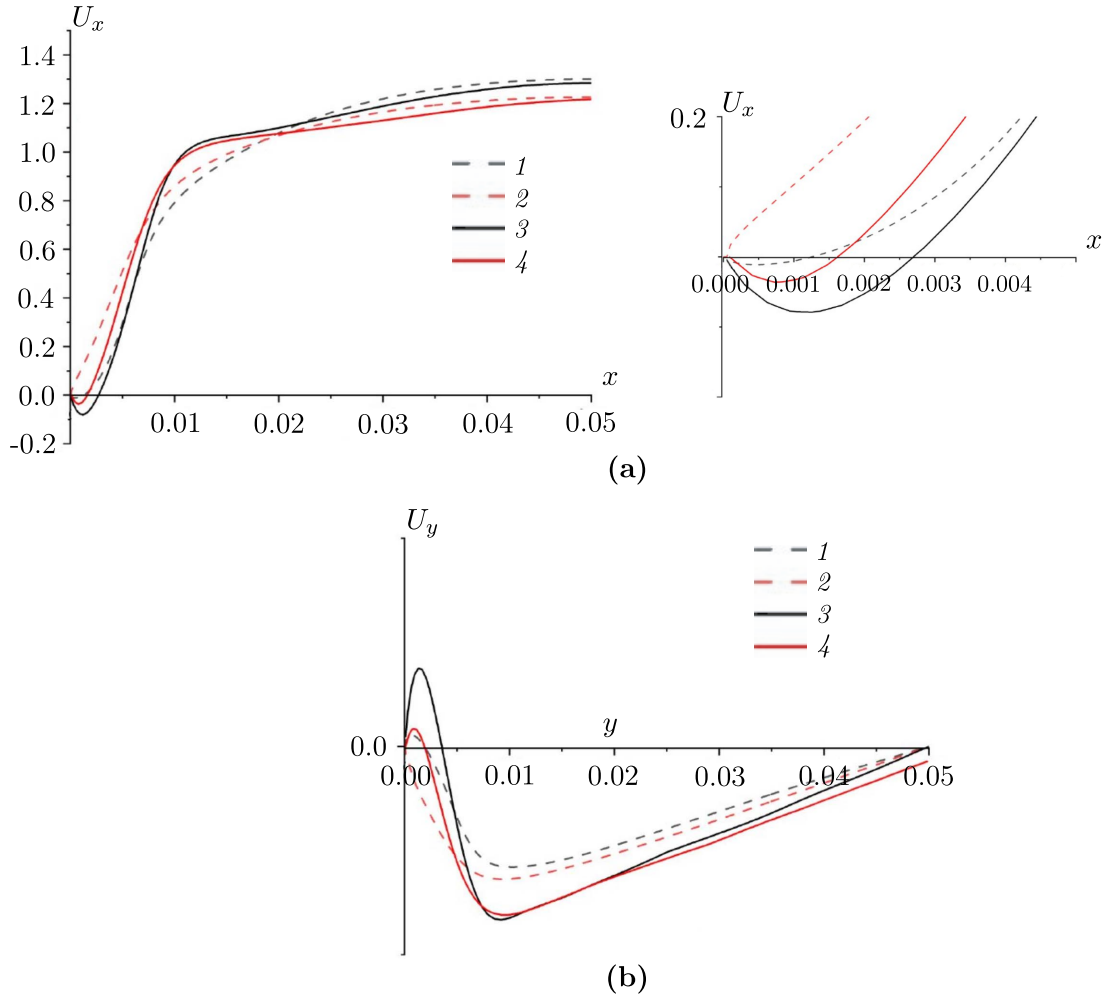


Рис. 2. Продольная (а) и поперечная (б) компоненты скорости в канале при различных значениях амплитуды и длины возмущения: RANS, $\lambda = 16$ см, $a = 8$ см (1); RANS, $\lambda = 32$ см, $a = 8$ см (2); LES, $\lambda = 16$ см, $a = 8$ см (3); LES, $\lambda = 32$ см, $a = 8$ см (4)

Далее напряжения на стенке обезразмеривали, а в качестве характерной величины использовано трение в плоском канале τ_0 , которое также получено в результате расчётов

$$\tau_w = \tau_0(1 + \tau(k, x)). \quad (12)$$

На рис. 3 представлены распределения трения вдоль канала. Можно заметить, что кривые имеют форму, близкую к синусоиде. При этом увеличение отношения амплитуды волны возмущения к длине волны возмущения приводит к более значительному отклонению от гармонической формы. Кроме того, наблюдается сдвиг фаз в результате несовпадения максимумов касательного напряжения и возмущения стенки канала.

Полагая возмущение поверхности в канале малыми, можно считать, что его влияние на параметры течения будет линейным, в том числе и на возмущения трения:

$$\tau_w = \tau_0 \left(1 + \frac{a}{\delta} \tau(k) \sin(kx + \phi) \right), \quad (13)$$

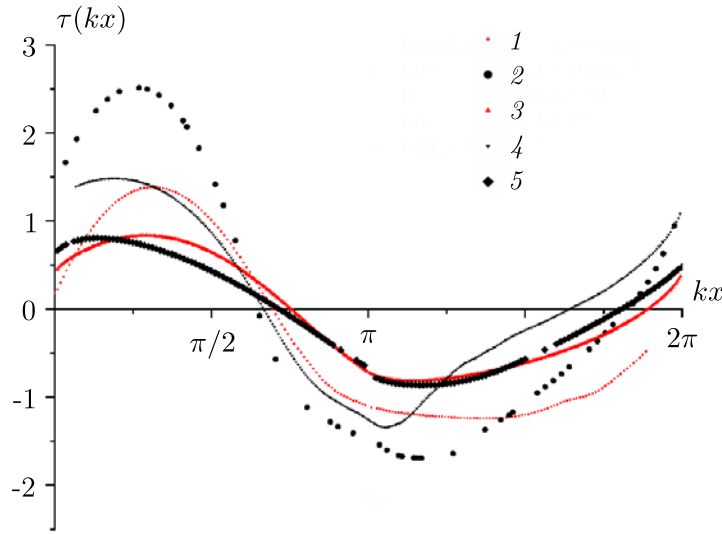


Рис. 3. Зависимость возмущения касательного напряжения от продольной координаты: RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (1); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (2); RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (3); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (4); LES, $a = 2$ мм, $\lambda = 16$ см (5)

где τ_0 — напряжение в канале без возмущений, a — амплитуда возмущения, δ — толщина вязкого подслоя, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, ϕ — сдвиг фазы относительно изначального возмущения.

Использование такого приближения позволило построить большое количество аналитических моделей для расчёта трения в волнистом канале. На рис. 4 представлены значения безразмерной амплитуды возмущения касательного напряжения $\tau(k)$ в сравнении с результатами, полученными по линейной модели [7]. Полученные результаты качественно согласуются с предсказаниями теоретической модели. При этом для значений, полученных с использованием модели LES, различия оказываются в два раза меньше в тех же условиях, что и для RANS модели.

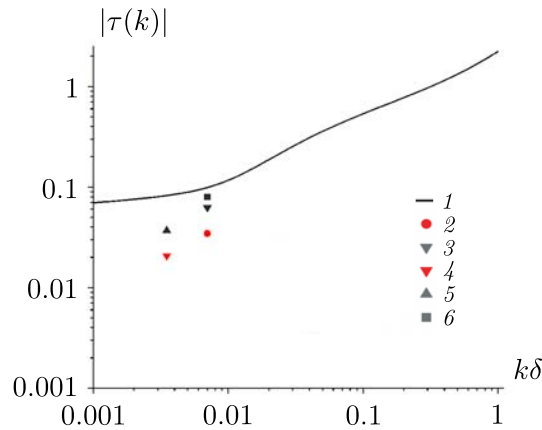


Рис. 4. Зависимость возмущения касательного напряжения от продольной координаты: см. [7] (1); RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (2); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (3); RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (4); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (5); LES, $a = 2$ мм, $\lambda = 16$ см (6)

На рис. 5 представлены значения сдвига фаз, рассчитанные по отклонению максимума возмущения трения относительно максимума возмущения поверхности. Также для сравнения приведены данные, полученные в экспериментальной работе [2].

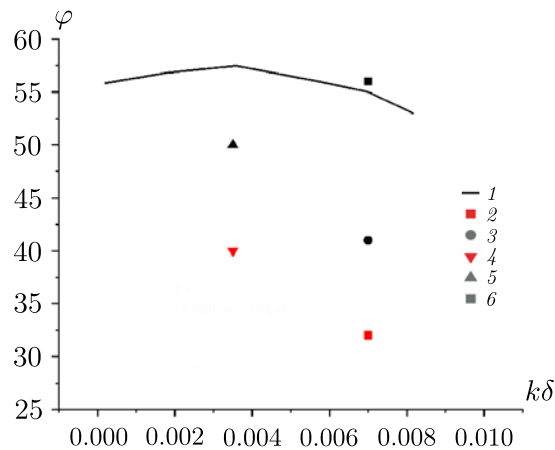


Рис. 5. Сдвиг фазы возмущения касательного напряжения:
 см. [2] (1); RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (2); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 16$ см (3);
 RANS, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (4); LES, $a = 8$ мм, $\lambda = 32$ см (5);
 LES, $a = 2$ мм, $\lambda = 16$ см (6)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнено численное моделирование турбулентного газового потока в плоском канале с волнистыми стенками. Расчёты проведены с помощью пакета OpenFoam. На входе, выходе и боковых поверхностях поставлены периодические граничные условия. Описание турбулентных эффектов в потоке газа выполнено с помощью двух различных моделей турбулентности: RANS и LES. Получены осреднённые профили скоростей для различных соотношений амплитуды возмущения и длины волны возмущения стенок канала. Показано, что между моделями RANS и LES наблюдаются качественные различия между профилями скорости в области расширения канала. Так, модель LES предсказывает возникновение более выраженной зоны рециркуляции около стенки в более широком диапазоне соотношений амплитуды и длины волны возмущения. С использованием полученных профилей средней скорости рассчитаны значения касательных напряжений на стенке. Показано, что с увеличением отношения амплитуды и длины волны возмущения наблюдаются увеличивающиеся отклонения от линейной модели. Проведено сравнение расчётных значений амплитуды и сдвига фазы касательных напряжений с теоретической моделью. Показано, что результаты, полученные по модели LES, находятся в лучшем согласии с предсказаниями теоретической модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Angelis V., Lombardi P., Banerjee S. Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall // Phys. Fluids. 1997. V. 9, N 8. P. 2429–2442.
2. Thorsness C.B., Morrisroe P.E., Hanratty T.J. A comparison of linear theory with measurements of the variation of shear stress along a solid wave // Chem. Engrg. Sci. 1978. V. 33, N 5. P. 579–592.
3. Zilker D.P., Cook G. W., Hanratty T.J. Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows // J. Fluid Mech. 1977. V. 82, N 1. P. 29–51.
4. Zilker D.P., Hanratty T.J. Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 2. Separated flows // J. Fluid Mech. 1979. V. 90, N 2. P. 257–271.
5. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model // Turbulence, Heat Mass Transfer. 2003. V. 4, N 1. P. 625–632.
6. Weickert M., Teike G., Schmidt O., Sommerfeld M. Investigation of the LES WALE turbulence model within the lattice Boltzmann framework // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59, N 7. P. 2200–2214.

7. Цвелодуб О.Ю., Архипов Д.Г., Вожаков И.С. Исследование волн на поверхности тонкой плёнки жидкости, увлекаемой турбулентным газовым потоком: моделирование вне рамок «квазиламинарного» приближения // Теплофизика и аэромеханика. 2021. Т. 28, № 2. С. 239–253.

UDC 519.6

**NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT GAS FLOW OVER
A WAVY WALL**© 2023 Yu. S. Apostol^{1,2a}, I. S. Vozhakov^{1,2b}¹*Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Novosibirsk State University,
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^ay.apostol@g.nsu.ru, ^bvozhakov@gmail.com

Received 08.07.2022, revised 14.11.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. Using the OpenFOAM open source software, a numerical study of the turbulent flow over a wavy surface was carried out for various values of the amplitude and wavelength of the disturbance of the channel wall. The RANS and LES models were used to describe the turbulent characteristics. The Reynolds number in the flow was 20000. Average profiles of velocities and shear stresses on the channel wall were obtained. The values of the amplitude and phase shift for disturbance of the shear stress were calculated for various geometrical parameters of the channel. The comparison was made with the theoretical model and experimental results.

Keywords: numerical simulation, turbulence, RANS and LES models, wavy wall, shear stresses.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.201

REFERENCES

1. De Angelis V., Lombardi P., Banerjee S. Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall. *Phys. Fluids*, 1997, Vol. 9, No. 8, pp. 2429–2442.
2. Thorsness C.B., Morrisroe P.E., Hanratty T.J. A comparison of linear theory with measurements of the variation of shear stress along a solid wave. *Chem. Engrg. Sci.*, 1978, Vol. 33, No. 5, pp. 579–592.
3. Zilker D.P., Cook G. W., Hanratty T.J. Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 1. Non-separated flows. *J. Fluid Mech.*, 1977, Vol. 82, No. 1, pp. 29–51.
4. Zilker D.P., Hanratty T.J. Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part 2. Separated flows. *J. Fluid Mech.*, 1979, Vol. 90, No. 2, pp. 257–271.
5. Menter F.R., Kuntz M., Langtry R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. *Turbulence, Heat Mass Transfer*, 2003, Vol. 4, No. 1, pp. 625–632.
6. Weickert M., Teike G., Schmidt O., Sommerfeld M. Investigation of the LES WALE turbulence model within the lattice Boltzmann framework. *Comput. Math. Appl.*, 2010, Vol. 59, No. 7, pp. 2200–2214.
7. Tselodub O. Y., Arkhipov D. G., Vozhakov I. S. Issledovanie voln na poverkhnosti tonkoi plenki zhidkosti, uvlekaemoi turbulentnym gazovym potokom: modelirovanie vne ramok «kvazilaminarnogo» priblizheniya [Investigation of waves on the surface of a thin film of liquid entrained by a turbulent gas flow: modeling outside the framework of the «quasi-laminar» approximation]. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2021, Vol. 28, No. 2, pp. 239–253.(in Russian).

УДК 536.24

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ГЕКСАГОНАЛЬНЫМИ СОТАМИ РАЗЛИЧНОЙ ГЛУБИНЫ

© 2023 А. В. Барсуков^a, В. В. Терехов^b, В. И. Терехов^c

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^aandreybarsukov96@gmail.com, ^bvt@itp.nsc.ru, ^cterekhov@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 09.08.2022 г.; после доработки 09.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Представлены результаты численного расчёта методом RANS отрывного течения в плоском канале при наличии сотовой поверхности. Расчёт выполнен при числах Рейнольдса ($14\,000 \leq Re \leq 28\,000$), определённых по среднemasсовой скорости и высоте канала. Получено распределение локального числа Нуссельта при различных числах Рейнольдса и глубине сот. Показано, что распределение числа Нуссельта на поверхности сильно неравномерное, в частности, максимальная величина теплоотдачи наблюдается вблизи верхней грани рёбер, в окрестности которой наблюдается наибольший градиент скорости.

Ключевые слова: интенсификация теплообмена, турбулентный поток, численное моделирование, гексагональные ячейки.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.202

ВВЕДЕНИЕ

Развитие технологий, способствующих интенсификации теплообмена энергетических установок в сферах авиа- и автомобилестроения, микроэлектроники, в холодильной и пищевой промышленности и пр., является одним из приоритетных направлений во всём мире. Важное место среди них занимают пассивные методы управления теплообменом с использованием эффекта отрыва потока: лунки [1–3], рёбра [4–6], уступы [7] и т. д. Большое количество экспериментальных и численных работ направлено на изучение потенциальных возможностей подобных методов, которые позволили бы интенсифицировать теплообмен при умеренных гидравлических потерях.

На теплообмен и структуру течения оказывает влияние большое количество геометрических и расходных параметров. Так, в работе [1] численно исследуется усиление теплообмена при ламинарном течении в межрёберном канале воздушного конденсатора. Высокая тепловая эффективность достигается в канале с однорядными овально-траншейными лунками, наклонёнными под углом 45° к набегающему потоку, при росте гидравлических потерь на 20% для числа Рейнольдса $Re = 103$.

Для более значительного повышения теплообмена могут использоваться компланарные каналы [8–11]. Один из способов управления течением в компланарном канале — это изменение зазора между ребрѐнными стенками, которое может улучшить теплообмен в некоторых случаях. Однако имеется лишь несколько работ, в которых решѐтка воздуховода сочетается с зазором. В работе [11] было проведено численное исследование для изучения влияния зазора между рѐбрами шероховатости на противоположных стенках и числа вращения на тепловые

характеристики и структуру потока. Угол между рёбрами составлял 45 градусов. Исследование показало, что появление зазора приводит к снижению напряжения сдвига стенки в 3.7 раза для статического случая, в то время как число Нуссельта уменьшается в 1.6 раза.

Большое количество работ посвящено теплообмену в канале при наличии рёбер. Варьированием межрёберного расстояния можно управлять теплообменом и структурой течения. Так, авторами работы [6] были показаны границы для структуры течения при наличии шероховатости k и d типа.

Рассматриваемая сотовая поверхность, которая является перспективной для теплозащиты различных технических приложений, имеет много общего с рассмотренными вихрегенераторами. В частности, на таких поверхностях при определённых условиях может возникать эффект проскальзывания [12, 13], который может достигать до 30% от значения скорости в ядре потока. Это обстоятельство даёт основание для использования подобного покрытия в качестве эффективного метода управления процессами турбулентного переноса. Так, в работе [14] был экспериментально изучен пограничный слой при обтекании сотовой поверхности. Показано, что в окрестности сот пограничный слой менее заполнен, но имеет более высокий уровень турбулентных пульсаций. Отмечается, что в отличие от профиля на гладкой стенке на сотовой поверхности практически отсутствует логарифмический участок. При этом для данной геометрии авторы не обнаружили эффекта скольжения на границе сотовой поверхности.

Данная работа посвящена численному исследованию газодинамики и теплообмена в плоском канале при наличии сотовой поверхности для различных чисел Рейнольдса и глубины сот. Данное направление имеет широкие потенциальные возможности, поскольку каналы такого рода активно используются для теплозащиты технических элементов, таких как лопатки турбин, охлаждающие рубашки для резервуаров, радиаторы автомобилей и т. д.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе представлены результаты трёхмерного численного моделирования отрывного потока в плоском канале при наличии гексагональной сотовой поверхности на нижней стенке канала. Число Рейнольдса рассчитывалось по высоте канала ($H/S = 4.2$) и среднерасходной скорости. Варьируемым параметром была глубина сот ($d/S = 0.1 \div 2.5$, где d — глубина сот, S — ширина). На рис. 1 представлена расчётная область.

Численное моделирование проводилось с помощью открытого пакета OpenFoam. Для этого решались усреднённые по времени уравнения Навье — Стокса и уравнение неразрывности:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u_i u_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} P + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2)$$

В полученной системе уравнений появилось слагаемое с корреляцией пульсации скорости. Для моделирования напряжений Рейнольдса используется гипотеза Буссинеска, согласно которой напряжения Рейнольдса можно связать с тензором деформации скорости:

$$-\overline{u_i u_j} = -\nu_T \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (3)$$

Интегрирование всех уравнений, входящих в математическую модель, проводилось с помощью метода контрольного объёма второго порядка точности по пространству в стационарной (итерационной) постановке с использованием решателя cyclicTemperaturePimpleFoam из пакета OpenFOAM. Использование этого решателя позволило в качестве расчётной области выбрать лишь часть сотовой поверхности. В качестве модели замыкания была выбрана $v_2 - f$

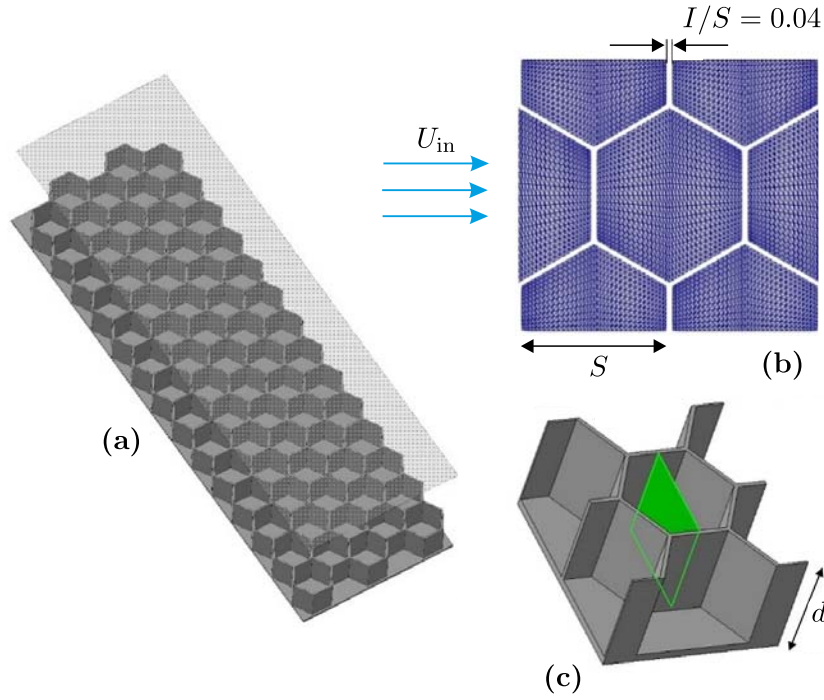


Рис. 1. Расчётная область:

- (a) плоский канал с сотовой поверхностью, (b) расчётная область канала (вид сверху),
(c) центральное сечение ячейки

модель [15], поскольку в одной из предыдущих работ [16] были проведены расчёты отрывного турбулентного течения в похожей геометрии. В результате наилучшим образом себя показала именно $v_2 - f$ модель:

$$nu_T^{v^2} = C_\mu v^2 T, \quad (4)$$

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P_k - \varepsilon, \quad (5)$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} P_k, \quad (6)$$

$$U_j \frac{\partial v^2}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial v^2}{\partial x_i} \right] + k f - \frac{v^2}{k} P_k \varepsilon, \quad (7)$$

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{C_1 - 1}{T_t} \left(\frac{v^2}{k} - \frac{2}{3} \right) - C_2 \frac{P_k}{\varepsilon}, \quad (8)$$

$$P_k = 2\nu_T S_{ij} S_{ij}, \quad (9)$$

$$L = C_L \max \left[\frac{k^{2/3}}{\varepsilon}, C_\eta \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right], \quad (10)$$

$$T_t = \max \left[\frac{k}{\varepsilon}, C_T \left(\frac{v}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right], \quad (11)$$

где (5) и (6) — стандартная $k - \varepsilon$ модель; (7) и (8) — дополнительные уравнения на функцию релаксации (f) и перенос турбулентных флуктуаций скорости в направлении по нормали к линиям тока (v^2); $C_\mu = 0.22$, $\sigma_k = 1$, $C_{\varepsilon_1} = 1.44$, $C_{\varepsilon_2} = 1.92$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $\sigma_{v^2} = 1$, $C_1 = 1.4$, $C_2 = 0.45$, $C_L = 0.25$, $C_\eta = 85$, $C_T = 6$; L и T_t — турбулентные масштабы длины и времени.

На всех стенках канала и рёбрах был задан постоянный тепловой поток. На входе и выходе в расчётную область были заданы циклические граничные условия. Ввиду симметрии задачи в неё входила одна полная ячейка, в которой и рассматривались структура течения и теплообмен. Для изученной в работе геометрии был проведён тщательный подбор вычислительной сетки. На рис. 2 представлено распределение поверхностного трения на нижней стенке сотовой ячейки в центральном сечении при $Re = 14\,000$, $d/S = 0.5$ для различного количества ячеек в сетке. В результате использования характерное число ячеек сетки составляло 162 000.

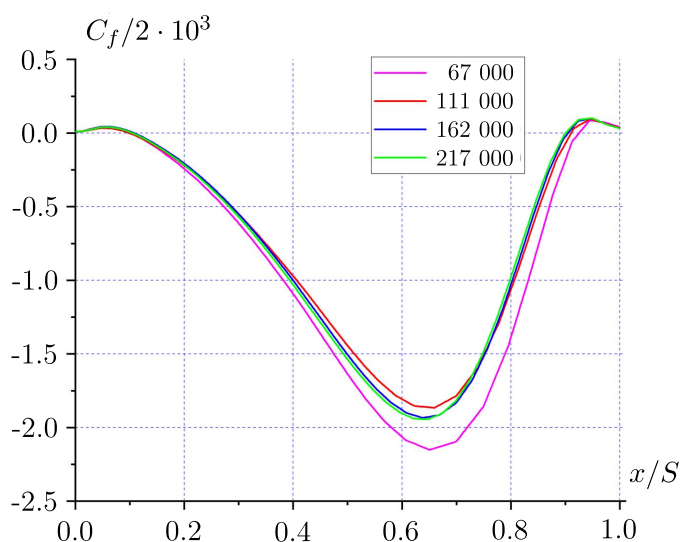


Рис. 2. Распределение поверхностного трения в центральном сечении ячейки при $Re = 14\,000$ и $d/S = 0.5$ для различного числа узлов расчётной сетки

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Были получены данные о структуре течения турбулентного течения воздуха в плоском канале при наличии сотовой поверхности на нижней стенке канала. На рис. 3 показано распределение продольной компоненты скорости в центральном сечении соты (рис. 1(с)) при варьировании глубины сот и числе Рейнольдса $Re = 14\,000$.

Из рисунка видно, что в случае малой глубины (рис. 3(а)) картина течения очень схожа со структурой течения за обратным уступом в плоском канале: непосредственно за ребром появляется отрывной поток, образующий рециркуляционную зону. Основная и наиболее интенсивная часть зоны рециркуляции находится сразу за уступом и так же, как и в случае внезапного расширения, при данных параметрах у зоны рециркуляции есть точка присоединения потока. В случае, когда глубина сот становится больше (рис. 3(б, в)) зона рециркуляции занимает большую часть пространства между стенками, в большей области ячейки течение стало более интенсивным. При дальнейшем увеличении глубины (рис. 3(д)) рециркуляционная зона смещается вниз ячейки. Основная часть зоны рециркуляции находится ближе к стенке, на которую набегаёт поток. При достижении глубины, равной ширине ячейки (рис. 3(е)), картина значительно изменяется. Наиболее интенсивная часть зоны рециркуляции находится ближе к нижней части ячейки, при этом обратный поток имеет протяжённость по диагонали ячейки. Далее, при увеличении глубины сот (рис. 3(е)) обратное течение не доходит до нижней стенки, занимая при данной глубине чуть более чем половину глубины ячейки, т. е. влияние основного течения на нижнюю стенку канала практически отсутствует.

На рис. 4 показано влияние числа Рейнольдса на структуру течения внутри сот. Для мелких сот ($d/s < 1$) размер и местоположение зоны рециркуляции практически не изменяется

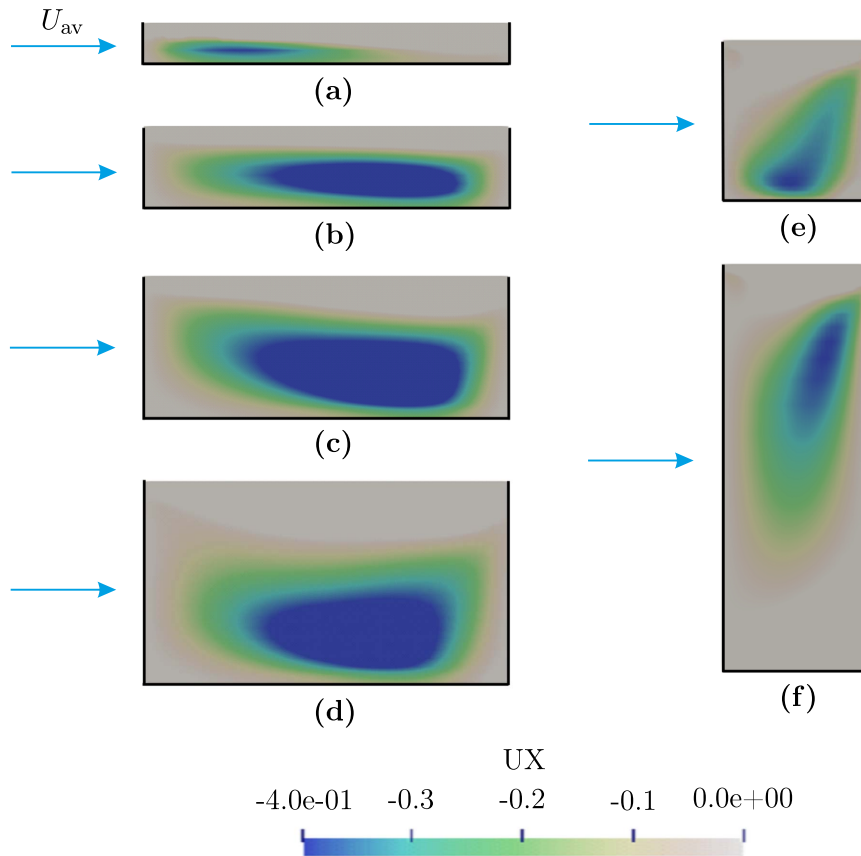


Рис. 3. Распределение продольной компоненты скорости в центральном сечении сот для d/S : 0.1 (a), 0.25 (b), 0.35 (c), 0.5 (d), 1 (e), 2.5 (f)

при вариации числа Рейнольдса. Изменяется при этом интенсивность возвратного течения, снижаясь с ростом числа Рейнольдса у сот с $d/s = 0.25$ и 0.5 и, наоборот, повышаясь для $d/s = 1$. При глубине сот, равной $d/s = 2.5$, можно отметить что увеличение числа Рейнольдса приводит к тому, что область зоны рециркуляции увеличивается вглубь ячейки и достигает нижней стенки. То есть увеличение числа Рейнольдса влияет на вертикально расположение рециркуляционной зоны, в то время как продольная структура не претерпевает существенных изменений.

На рис. 5 представлено распределение локального числа Нуссельта для различной глубины сот:

$$Nu = \frac{qH}{\lambda(T_w - T_{av})}, \quad T_{av} = \frac{\int TU dV}{\int U dV},$$

где Nu — значение локального числа Нуссельта, q — тепловой поток, λ — теплопроводность воздуха, H — ширина канала, T_{av} — средняя температура в объёме.

Видно, что распределение неравномерное, наибольшая величина теплоотдачи наблюдается на поверхности вблизи верхней грани ребер, поскольку здесь наблюдается наибольший градиент скорости, способствующий более интенсивному теплообмену. Наименьшее значение локального числа Нуссельта наблюдается в зонах стыка ребер сот и нижней части канала, в которых формируются застойные области. Увеличение числа Рейнольдса приводит к тому, что характер распределения локального числа Нуссельта не меняется, изменяется лишь интенсивность теплообмена. На нижней стенке канала распределение числа Нуссельта практически равномерное. При уменьшении глубины происходит значительное усиление теплообмена, оно

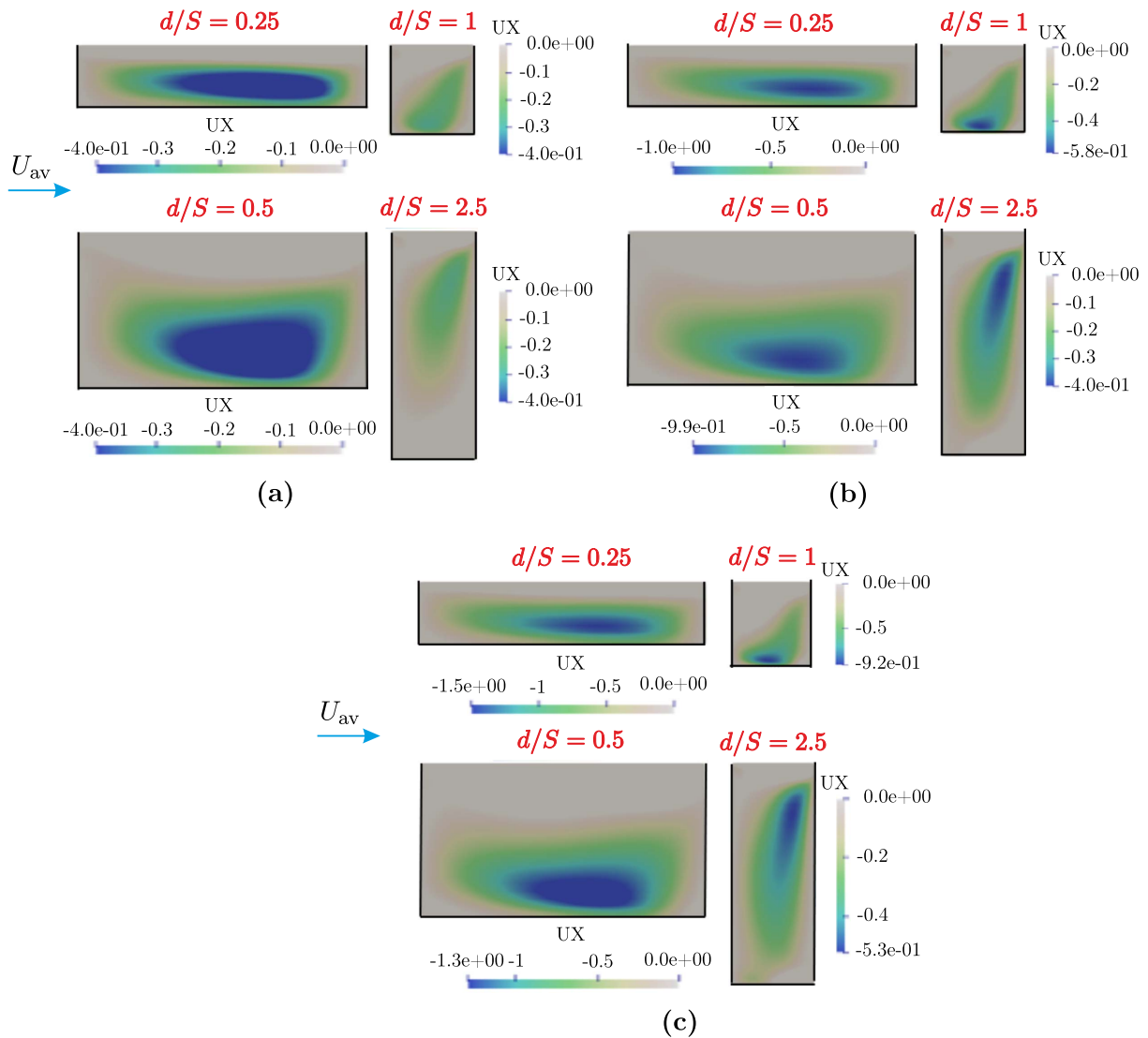


Рис. 4. Распределение продольной компоненты скорости в центральном сечении сот при вариации их глубины d/S и числа Рейнольдса: $Re = 14\,000$ (а), $Re = 21\,000$ (б), $Re = 28\,000$ (с); число Рейнольдса рассчитывалось по высоте канала $H/S = 4.2$ и среднерасходной скорости U_{av}

становится неоднородным. Наиболее интенсивными являются области центра ячейки, смещенные вверх по потоку.

Для непосредственной оценки эффективности теплообмена при вариации числа Рейнольдса и глубины ячейки на рис. 6 представлены значения среднего по всей поверхности межреберной ячейки (включая рёбра) числа Нуссельта:

$$Nu_{av} = \frac{1}{S} \int Nu(x, y, z) dS,$$

где $Nu(x, y, z)$ — значение локального числа Нуссельта, S — площадь поверхности, на которой задан постоянный тепловой поток. Для данной задачи это площадь всех рёбер и стенки канала.

Как видно, интенсивность теплообмена значительно снижается по сравнению с гладкой стенкой с увеличением глубины сотовой ячейки. И это происходит несмотря на увеличение площади теплообменной поверхности. Варьирование глубины ячейки от 0.25 до 2.5 приводит к тому, что среднее число Нуссельта уменьшается практически в два раза. При изменении

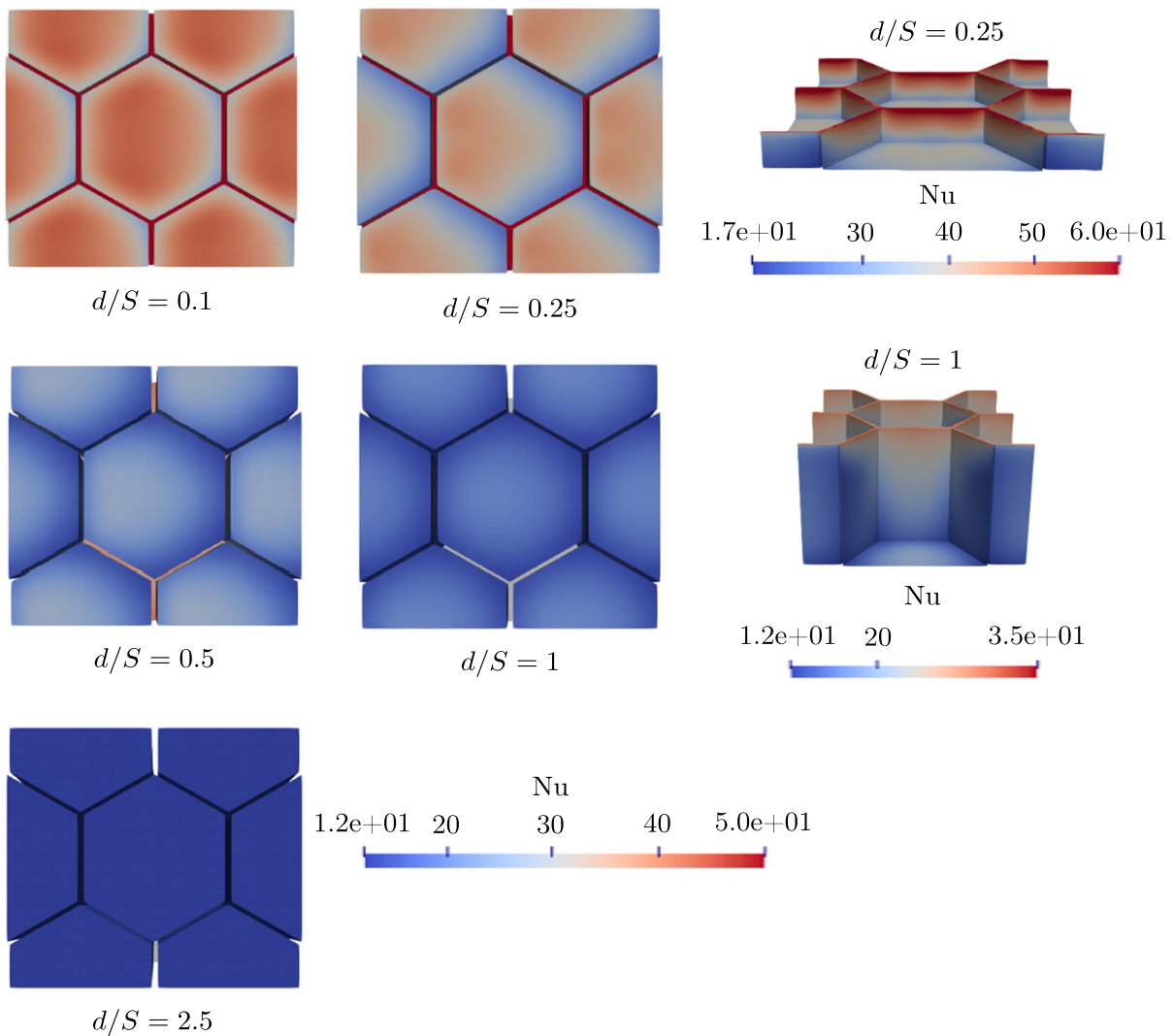


Рис. 5. Распределение локального числа Нуссельта по поверхности сот

числа Рейнольдса данная тенденция сохраняется, при этом значение среднего числа Нуссельта для числа Рейнольдса 28 000 практически в два раза больше, чем при числе Рейнольдса 14 000. Подобный характер изменения теплоотдачи имеет место и при обтекании двумерных прямоугольных траншей [17], каверн с наклонными стенками [18], а также полусферических лунок [1, 19]. Одним из возможных объяснений является затрудненное проникновения потока газа к дну ячейки по мере увеличения ее глубины. Таким образом, для целей интенсификации теплообмена более эффективными являются мелкие соты. Если плоские каналы с сотовой поверхностью используются для подавления турбулентного переноса, то ребра сот должны быть высокими.

Для непосредственной оценки эффективности теплообмена при вариации числа Рейнольдса и глубины ячейки на рис. 6 представлены значения среднего по всей поверхности межрёберной ячейки (включая рёбра) числа Нуссельта. Как видно, интенсивность теплообмена значительно снижается с увеличением глубины сотовой ячейки. Подобный характер изменения теплоотдачи имеет место и при обтекании двумерных прямоугольных траншей [17], каверн с наклонными стенками [18], а также полусферических лунок [1, 19]. Это объясняется затруднением проникновения потока к дну ячейки по мере увеличения её глубины. Таким образом, для целей интенсификации теплообмена более эффективными являются мелкие соты. Если сото-

вая поверхность используется для подавления турбулентного переноса, то рёбра сот должны быть высокими.

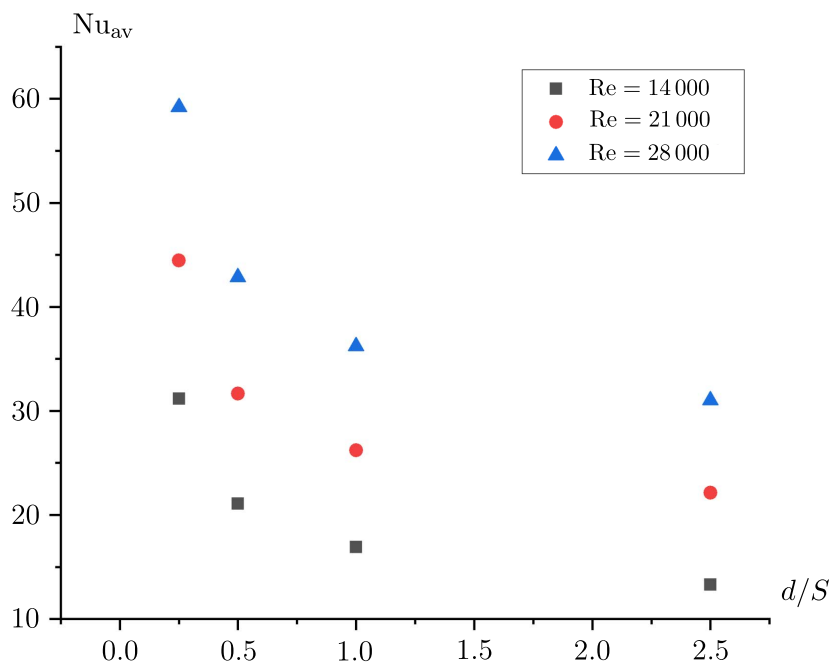


Рис. 6. Значение среднего по всей поверхности межрёберной ячейки числа Нуссельта

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено трёхмерное численное моделирование методом RANS отрывного течения в плоском канале при наличии гексагональной сотовой поверхности при числах Рейнольдса $Re=14000\text{--}28000$. Получены данные о структуре течения турбулентного течения воздуха в плоском канале. Показано, что для мелких сот ($d/s < 1$) размер и местоположение зоны рециркуляции практически не изменяется при вариации числа Рейнольдса. Изменяется при этом интенсивность возвратного течения, снижаясь с ростом числа Рейнольдса у сот с $d/s = 0.25$ и $d/s = 0.5$ и, наоборот, повышаясь для $d/s = 1$. При глубине сот, равной $d/s = 2.5$, можно отметить, что увеличение числа Рейнольдса приводит к тому, что область зоны рециркуляции увеличивается вглубь ячейки и достигает нижней стенки. Показано, что интенсивность теплообмена значительно снижается с увеличением глубины сотовой ячейки. Наибольшая величина теплоотдачи наблюдается на поверхности вблизи верхней грани рёбер. Подобный характер изменения теплоотдачи объясняется затруднением проникновения потока к дну ячейки по мере увеличения её глубины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Isaev S.A., Kornev N.V., Leontiev A.I., Hassel E. Influence of the Reynolds number and the spherical dimple depth on turbulent heat transfer and hydraulic loss in a narrow channel // *Internat. J. Heat Mass Transf.* 2019. V. 53. P. 178–197.
2. Wang S., Du W., Luo L., Qiu D., Zhang X., Li S. Flow structure and heat transfer characteristics of a dimpled wedge channel with a bleed hole in dimple at different orientations and locations // *Internat. J. Heat Mass Transf.* 2018. V. 117. P. 1216–1230.
3. Shen Z., Qu H., Zhang D., Xie Y. Effect of bleed hole on flow and heat transfer performance of U-shaped channel with dimple structure // *Internat. J. Heat Mass Transf.* 2013. V. 66. P. 10–22.

4. *Weihing P., Younis B.A., Weigand B.* Heat transfer enhancement in a ribbed channel: Development of turbulence closures // *Internat. J. Heat Mass Transf.* 2014. V. 76. P. 509–522.
5. *Motoki T., Ohno Y., Hishida M., Tanaka G.* Augmentation of heat transportation by an oscillatory flow in grooved ducts // *Heat Transfer — Asian Research.* 2008. V. 37, N 2. P. 68–85.
6. *Leonardi S., Orlandi P., Antonia R.A.* Properties of *d*- and *k*-type roughness in a turbulent channel flow // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19. P. 125101.
7. *Bogatko T., Terekhov V., Dyachenko A., Smulsky Ya.* Heat transfer behind the backward-facing step under the influence of longitudinal pressure gradient // *MATEC Web of Conf.* 2017. V. 92. Article 01030.
8. *Saha K., Acharya S., Nakamata C.* Heat transfer enhancement and thermal performance of lattice structures for internal cooling of airfoil trailing edges // *J. Thermal Sci. Engrg. Appl.* 2013. V. 5. Article 011001-1.
9. *Wong T.T., Leung C.W., Li Z.Y., Tao W.Q.* Turbulent convection of air-cooled rectangular duct with surface-mounted cross-ribs // *Internat. J. Heat Mass Transf.* 2003. V. 46. P. 4629–4638.
10. *Zimmerer C., Gschwind P., Gaiser G., Kottke V.* Comparison of heat and mass transfer in different heat exchanger geometries with corrugated walls // *Experiment. Thermal Fluid Sci.* 2002. V. 26. P. 269–273.
11. *Du W., Luo L., Wang S., Liu J., Sunden B.* Heat transfer and flow structure in a detached latticework duct // *Appl. Thermal Engrg.* 2019. V. 155. P. 24–39.
12. *Климов А.А., Трдатьян С. А.* Использование сотовой поверхности для управления пограничным слоем // *Теплофизика высоких температур.* 2003. Т. 155, № 6. С. 901–906.
13. *Ковальногов Н.Н.* Модель турбулентного переноса в пограничном слое на перфорированной поверхности с глухими демпфирующими полостями // *Изв. вузов. Проблемы энергетики.* 2003. № 5–6. С. 41–47.
14. *Терехов В.И., Смольский Я.И., Шаров К.А., Золотухин А.В.* Структура пограничного слоя при обтекании сотовой поверхности в плоском канале // *Теплофизика и аэромеханика.* 2014. Т. 21, № 6. С. 733–738.
15. *Durbin P.A.* Near-wall turbulence closure modeling without «damping function» // *Theor. Comput. Fluid Dynamics.* 1991. V. 3. P. 1–13.
16. *Barsukov A.V., Terekhov V.V., Terekhov V.I.* Numerical simulation of flow dynamics and heat transfer in a rectangular channel with periodic ribs on one of one of the walls // *J. Phys. Conf. Ser.* 2021. V. 2119. P. 012028.
17. *Terekhov V.I., Yarygina N.I.* Forced convection heat transfer from the bottom of trenches with rectangular or inclined walls // *Experiment. Heat Transfer.* 1996. V. 9. P. 133–148.
18. *Dyachenko A.Yu., Terekhov V.I., Yarygina N.I.* Vortex formation and heat transfer in turbulent flow past a transverse cavity with inclined frontal and rear walls // *Internat. J. Heat Mass Transf.* 2008. V. 51, N 13–14. P. 3275–3286.
19. *Terekhov V.I., Kalinina S.V., Mshvidobadze Yu.M.* Heat transfer coefficient and aerodynamical resistance on a surface with a single dimple // *Enhanced Heat Transf.* 1997. V. 4, N 2. P. 131–145.

UDC 536.24

**NUMERICAL STUDY OF THE STRUCTURE OF TURBULENT FLOW
AND HEAT TRANSFER IN A FLAT CHANNEL WITH HEXAGONAL
HONEYCOMBS OF VARIOUS DEPTHS**© 2023 A. V. Barsukov^a, V. V. Terekhov^b, V. I. Terekhov^c*Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^aandreybarsukov96@gmail.com, ^bvt@itp.nsc.ru, ^cterekhov@itp.nsc.ru

Received 09.08.2022, revised 09.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The results of a numerical simulation by the RANS method of a separated flow in a flat channel with honeycomb surface are presented. The simulation was performed at the Reynolds $Re = 14\,000 - 28\,000$ determined from the average mass velocity and channel height. The distribution of the local Nusselt number was obtained for various Reynolds numbers and honeycomb depths. It is shown that the distribution of the Nusselt number on the surface is highly non-uniform, in particular, the maximum heat transfer is observed near the upper edge of the ribs, in the vicinity of which the largest velocity gradient is observed.

Keywords: heat transfer enhancement, turbulent flow, numerical simulation, hexagonal cells.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.202

REFERENCES

1. Isaev S.A., Kornev N.V., Leontiev A.I., Hassel E. Influence of the Reynolds number and the spherical dimple depth on turbulent heat transfer and hydraulic loss in a narrow channel. *Internat. J. Heat Mass Transf.*, 2019, Vol. 53, pp. 178–197.
2. Wang S., Du W., Luo L., Qiu D., Zhang X., Li S. Flow structure and heat transfer characteristics of a dimpled wedge channel with a bleed hole in dimple at different orientations and locations. *Internat. J. Heat Mass Transf.*, 2018, Vol. 117, pp. 1216–1230.
3. Shen Z., Qu H., Zhang D., Xie Y. Effect of bleed hole on flow and heat transfer performance of U-shaped channel with dimple structure. *Internat. J. Heat Mass Transf.*, 2013, Vol. 66, pp. 10–22.
4. Weihing P., Younis B.A., Weigand B. Heat transfer enhancement in a ribbed channel: Development of turbulence closures. *Internat. J. Heat Mass Transf.*, 2014, Vol. 76, pp. 509–522.
5. Motoki T., Ohno Y., Hishida M., Tanaka G. Augmentation of heat transportation by an oscillatory flow in grooved ducts. *Heat Transfer – Asian Research*, 2008, Vol. 37, No. 2, pp. 68–85.
6. Leonardi S., Orlandi P., Antonia R.A. Properties of d - and k -type roughness in a turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 2007, Vol. 19, pp. 125101.
7. Bogatko T., Terekhov V., Dyachenko A., Smulsky Ya. Heat transfer behind the backward-facing step under the influence of longitudinal pressure gradient. *MATEC Web of Conf.*, 2017, Vol. 92, article 01030.
8. Saha K., Acharya S., Nakamata C. Heat transfer enhancement and thermal performance of lattice structures for internal cooling of airfoil trailing edges. *J. Thermal Sci. Engrg. Appl.*, 2013, Vol. 5, article 011001-1.
9. Wong T.T., Leung C.W., Li Z.Y., Tao W.Q. Turbulent convection of air-cooled rectangular duct with surface-mounted cross-ribs. *Internat. J. Heat Mass Transf.*, 2003, Vol. 46, pp. 4629–4638.

10. Zimmerer C., Gschwind P., Gaiser G., Kottke V. Comparison of heat and mass transfer in different heat exchanger geometries with corrugated walls. *Experiment. Thermal Fluid Sci.*, 2002, Vol. 26, pp. 269–273.
11. Du W., Luo L., Wang S., Liu J., Sunden B. Heat transfer and flow structure in a detached latticework duct. *Appl. Thermal Engrg.*, 2019, Vol. 155, pp. 24–39.
12. Klimov A.A., Trdatyan S.A. The use of a honeycomb surface for controlling the boundary layer. *High Temperature*, 2003, Vol. 41, pp. 801–806.
13. Koval'nogov H.H. Model' turbulentnogo perenosa v pogranichnom sloe na perforirovannoi poverkhnosti s glukhimi dempfiruyushchimi polostyami [Model' turbulentnogo perenosa v pogranichnom sloe na perforirovannoi poverkhnosti s glukhimi dempfiruyushchimi polostyami]. *Izv. Vuzov. Problemy Energetiki*, 2003, No. 5–6, pp. 41–47 (in Russian).
14. Terekhov V.I., Smulsky Ya.I., Sharov K.A., Zolotukhin A.V. Boundary-layer structure in the flow around the cellular surface in a flat channel. *Thermophysics and Aeromechanics*, 2014, Vol. 21, pp. 701–706.
15. Durbin P.A. Near-wall turbulence closure modeling without «damping function». *Theor. Comput. Fluid Dynamics*, 1991, Vol. 3, pp. 1–13.
16. Barsukov A.V., Terekhov V.V., Terekhov V.I. Numerical simulation of flow dynamics and heat transfer in a rectangular channel with periodic ribs on one of one of the walls. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, Vol. 2119, pp. 012028.
17. Terekhov V.I., Yarygina N.I. Forced convection heat transfer from the bottom of trenches with rectangular or inclined walls. *Experiment. Heat Transf.*, 1996, Vol. 9, pp. 133–148.
18. Dyachenko A.Yu., Terekhov V.I., Yarygina N.I. Vortex formation and heat transfer in turbulent flow past a transverse cavity with inclined frontal and rear walls. *Internat. J. Heat Mass Transf.*, 2008, Vol. 51, No. 13–14, pp. 3275–3286.
19. Terekhov V.I., Kalinina S.V., Mshvidobadze Yu.M. Heat transfer coefficient and aerodynamical resistance on a surface with a single dimple. *Enhanced Heat Transf.*, 1997, Vol. 4, No. 2, pp. 131–145.

УДК 628.35

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРА ДЛЯ ВОДООЧИСТКИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИОПЛЕНОК© 2023 Т. Н. Бобылева,^{1а}, А. С. Шамаев,^{2б}, О. В. Янцен^{3,4с}

¹Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет,
Ярославское шоссе, 26, г. Москва 129337, Россия,

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского,
просп. Вернадского, 101-1, г. Москва 119526, Россия,

³Научно-технический центр, ООО «ВТ Эксперт»,
ул. Саморы Машела, 2а, г. Москва 117198, Россия,

⁴Российский государственный геологоразведочный
университет им. С. Орджоникидзе,
ул. Миклухо-Маклая, 23, г. Москва 117485, Россия

E-mails: ^atatjana2211@outlook.com, ^bsham@rambler.ru, ^cyantsenov@bk.ru

Поступила в редакцию 26.08.2022 г.; после доработки 20.11.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Предложена математическая модель очистки сточных вод в фильтрах на основе использования биопленки, в которой микроорганизмы разрушают вредные примеси, содержащиеся в воде. Фильтр содержит большое количество элементов загрузки. Приведена система уравнений в частных производных с граничными условиями для одного элемента загрузки, представляющего собой цилиндрический стержень, поверхность которого покрыта биологически активной плёнкой. Эта система содержит параболическое уравнение в трёхмерной области и гиперболическое уравнение на части поверхности этой области, связанные друг с другом с помощью граничного условия и потенциала в гиперболическом уравнении. Проводится асимптотический анализ этой системы, позволяющий свести данную модель к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Используется математический метод построения асимптотики в так называемых тонких областях. Дается математическое обоснование предлагаемого метода. Метод представляет собой упрощение сложной комбинированной модели, основанной на законах гидродинамики и диффузии. На этой основе предлагается модель работы всего устройства очистки сточных вод, содержащего большое количество (миллионы) таких элементов.

Ключевые слова: водоочистка, биологически активный слой, асимптотический анализ решений в тонкой области, математическая модель очистки загрязнений, система дифференциальных уравнений смешанного типа.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.203

ВВЕДЕНИЕ

Очистка воды от нежелательных примесей имеет большое практическое значение [1, 2]. Математическое моделирование различных задач со сложными флюидами при биологической очистке приведено в [3–7]. В работе [8] рассматривается краевая задача с подвижной границей для биологического фильтра. В большинстве случаев такие задачи решаются численно. В [9]

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 075-15-2022-284) и Госзадания Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (проект АААА-А20-120011690138-6).

приведён пример численного решения задачи, моделирующей поведение взвешенных субстратов и биопленок. В данной работе представлена модель очистки сложной жидкости, например воды, содержащей различные жидкие и твёрдые добавки, органические загрязнения. Очистка осуществляется с помощью биологически активных плёнок, расположенных на поверхности элемента загрузки фильтра. В биопленках происходит процесс биоокисления микроорганизмами вредных веществ из жидкости. Лабораторная модель биофильтра этой задачи представляет собой цилиндрический контейнер высотой около метра и диаметром около 20 см. Внутри он имеет большое количество параллелепипедов, состоящих из спрессованных тонких полимерных волокон в виде цилиндрических стержней. Объём такого параллелепипеда около $15\text{--}20\text{ см}^3$, отдельные стержни имеют длину около 1 см. В процессе работы фильтра на поверхности каждого стержня появляется тонкая биопленка, толщиной около десятой доли миллиметра. Загрязнённая вода поступает в верхнюю часть биофильтра, затем капли воды стекают по стержням, смачивая биопленку. Нежелательные примеси проникают в плёнку и являются пищей для находящихся в ней бактерий. Интенсивность проникновения зависит как от концентрации микроорганизмов, так и от концентрации нежелательных примесей на границе плёнки. На скорость поглощения примесей влияет средняя скорость воды, которая просачивается по поверхности биопленки. Таким образом, указанный стержень является элементарным элементом водоочистного устройства. Таких элементов в биофильтре несколько миллионов. Это означает, что сначала нужно построить адекватную модель очистки воды (т. е. процесса поглощения примесей) для одного такого элемента, затем реализовать эту модель на компьютере. В результате можно смоделировать весь процесс очистки воды, количественно определив уменьшение загрязнения воды при прохождении через биофильтр. Подобные модели рассматривались в [10–13]. Опишем основные принципы нашей математической модели.

1. ПРИНЦИП ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Как указывалось ранее, в модели используется множество тонких цилиндрических стержней, покрытых очищающим слоем (биопленкой). Кроме того, к биопленке примыкает бесконечно тонкий слой, по которому движутся воздух и вода с нежелательными примесями. Микроорганизмы в биопленке поглощают вредные примеси из движущихся капель воды. Абсорбирующий очищающий слой (биопленка) принимает в свой объём примеси с прилегающей поверхности со скоростью, зависящей от концентрации микроорганизмов на поверхности биопленки и примесей в очищаемой жидкости на той же поверхности, например пропорциональной разнице концентраций в очищающем слое и на поверхности. В пределах рассматриваемого слоя уравнение, описывающее изменение концентрации биопленки во времени, представляет собой уравнение диффузии с нелинейным членом, который моделирует поглощение загрязняющих веществ микроорганизмами. Если концентрация загрязнений невелика, этот закон можно считать линейным; с увеличением концентрации зависимость скорости поглощения примесей стремится к постоянному значению, так как неограниченный рост невозможен из-за влияния микроорганизмов друг на друга при их высокой концентрации. Закон, математически описывающий такое поведение биопленки, называется законом Моно. Попадание нежелательных примесей моделируется условием контакта с поверхностью, прилегающей к биопленке, по которой вода с нежелательными примесями, смешанная с воздухом, транспортируется по очищающему слою. Скорость движения воды рассчитывается для каждого элемента очистки, исходя из общего расхода загрязнённой жидкости и наклона элемента к горизонтальной плоскости. Уравнение движения воды в смеси с вредными примесями и воздухом является уравнением переноса, т. е. уравнением гиперболического типа с потенциалом, зависящим как от концентрации примесей на поверхности, так и от концентрации бактерий внутри очищающего слоя. В нашей модели этот потенциал описывает интенсивность поступления вредных примесей в очищающий слой. Например, в простейшем случае величина потенциала пропорциональна разнице концентрации примесей на поверхности и в очищающем слое. Система,

описывающая поглощение вредных примесей, включает уравнение диффузии в трёхмерной области цилиндрического слоя и уравнение переноса на прилегающей цилиндрической поверхности. Аналитического решения этой задачи нет. Необходимо рассчитать степень поглощения вредных примесей в зависимости от их концентрации и скорости поступления, толщины очищающего слоя, закона поглощения вредных примесей микроорганизмами и зависимости выхода вредных примесей от разности концентраций в биопленке и на её поверхности. После такого расчёта степени поглощения одним очищающим элементом нетрудно построить модель всего фильтра, состоящего из тысяч или даже миллионов таких элементов. Самое сложное — построить модель и соответствующие программы расчёта для одного элемента. А затем весь цилиндрический резервуар разбивается на отдельные слои по высоте резервуара и строится расчётная программа, позволяющая рассчитать изменение концентрации на каждом из слоёв сверху вниз, используя модель элементарного элемента очистки.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Выбираем цилиндрическую систему координат (r, φ, x) . В нашей задаче концентрация микроорганизмов и концентрация примесей на границе биопленки зависят от радиальной переменной r и переменной x по длине стержня, но не зависят от угловой переменной φ . Пусть Ω_0^ε — один цилиндрический стержень диаметром $\varepsilon = 2r_0$, элемент загрузки; Ω_1^ε — поверхностный слой стержня толщиной h , т. е. биопленка; S_ε — часть боковой поверхности Ω_1^ε , не соприкасающаяся с Ω_0^ε ; Γ_ε — оставшая часть боковой границы Ω_1^ε (рис. 1); $C^\varepsilon(\vec{z}, t)$ — концентрация бактерий в Ω_1^ε ; $\vec{z} = (r, x)$; t — переменная времени; $M^\varepsilon(\vec{z}, t)$ — концентрация примесей на S_ε (на двумерной поверхности); $\vec{v}(\vec{z}, t)$ — вектор скорости, касательный к этой поверхности; D_1, D_2 — верхняя и нижняя плоские поверхности стержня Ω_0^ε соответственно.

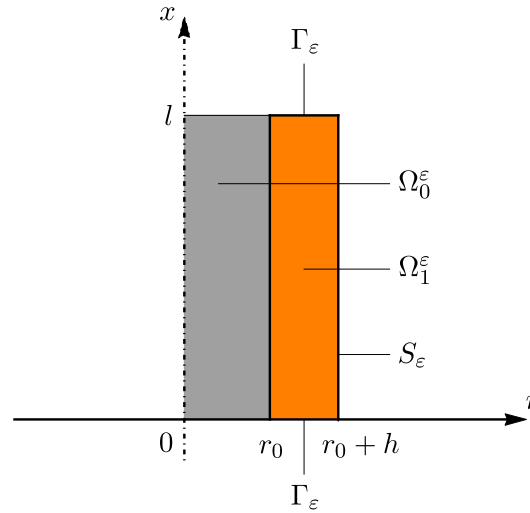


Рис. 1. Элемент загрузки Ω_0^ε с биопленкой Ω_1^ε

Функции $C^\varepsilon(\vec{z}, t)$ и $M^\varepsilon(\vec{z}, t)$ удовлетворяют в Ω_1^ε и на S_ε следующим уравнениям [10]:

$$\dot{C}^\varepsilon = D \cdot \Delta C^\varepsilon + F(t, C_\varepsilon) \quad \text{в } \Omega_1^\varepsilon, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma_\varepsilon} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_\varepsilon} + k_0 C_\varepsilon = -k_1 (M_\varepsilon - k_2 C_\varepsilon)|_{S_\varepsilon}, \quad C_\varepsilon|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Для краткости в (1) и (2) аргументы функций опущены. Кроме того, на D_1, D_2 также должно выполняться однородное условие Неймана. Уравнение (1) описывает диффузию бактерий в слое с учётом их гибели при увеличении концентрации. Оператор Δ — оператор Лапласа

в цилиндрических координатах; $F(t, C_\varepsilon)$ — нелинейная функция, отражающая влияние взаимодействия бактерий на их концентрацию; D — коэффициент диффузии; k_0, k_1, k_2 — постоянные; $\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial \mathbf{n}}$ — производная по внешней нормали \mathbf{n} к поверхности S_ε .

Следующая система описывает перенос примесей, количество которых мы хотим уменьшить с помощью биофильтра, по поверхности S_ε с переходом примесей в Ω_1^ε [10]:

$$\begin{aligned} \dot{M}_\varepsilon &= \vec{v} \cdot \nabla M_\varepsilon + k_3(C_\varepsilon - k_4 M_\varepsilon), \quad \nabla = \frac{d}{dx}, \\ M_\varepsilon|_{\partial S_\varepsilon} &= M_0(\vec{z}), \quad M_\varepsilon|_{t=0} = M_0; \end{aligned} \quad (3)$$

$\partial S'_\varepsilon$ — часть верхней торцевой кромки стержня, где поле $\vec{v}(\vec{z}, t)$ входит в неё. Здесь $\Delta M_\varepsilon = \frac{dM_\varepsilon}{dx}$, так как r постоянна на S_ε ; k_3, k_4, M_0 — константы.

Для поставленной краевой задачи (1)–(3) нетрудно построить прямую разностную схему. Однако здесь следует отметить, что эта задача состоит из двух уравнений в частных производных, первое из которых параболическое, а второе гиперболическое. Причём эти уравнения заданы в областях разной размерности, уравнение (1) в трёхмерной области, а уравнение (3) — в двумерной. Вообще говоря, система этих уравнений нелинейна, и её корректность вызывает вопросы. Это новый и довольно интересный математический объект. Можно предположить, что при больших значениях времени биофильтр будет работать в стационарном режиме. В этом случае решение задачи не зависит от начального распределения концентрации бактерий, а зависит от плотности примесей, поступающих в верхнюю часть биофильтра.

В нашей задаче зависимость, заданная в граничных условиях (2), носит линейный характер. В этом случае значение концентрации примеси можно исключить из системы, решив в явном виде линейное уравнение для концентрации примесей $M_\varepsilon(\vec{z}, t)$ при заданном значении концентрации $C_\varepsilon(\vec{z}, t)$ в биопленке и подставив полученное выражение в граничное условие для функции $C_\varepsilon(\vec{z}, t)$. Результатом является нелокальное условие последействия интегрального типа, поскольку на поток через границу будут влиять прошлые значения концентрации в различных точках пространства. Это интересная с математической точки зрения краевая задача с интегральным «последействием». В этом случае влияние «прошлого» в данной точке границы определяется «прошлыми» значениями неизвестных функций не в этой точке, а в точках некоторой фазовой кривой некоторой динамической системы на двумерной поверхности. В настоящее время такие задачи ещё мало изучены. Чтобы исключить эти математические сложности, упростим нашу модель, используя дополнительное допущение, а именно, пусть длина отдельного чистящего стержня будет значительно (примерно в 100 раз) больше толщины биологически активной плёнки. Для рассматриваемого нами в данной работе метода водоочистки это предположение действительно верно. Так в задаче появляется малый параметр h , h — толщина биопленки. Затем можно применить асимптотический метод анализа решений краевых задач в так называемых тонких областях [14]. В соответствии с этим методом мы переходим к пределу, когда толщина биопленки стремится к нулю. В результате размерность пространства независимых переменных уменьшается, и рассматриваемая нами краевая задача для стационарного режима распределения примеси сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Единственной независимой переменной в упрощённой модели является переменная x вдоль стержня. Такая упрощённая модель полностью описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и решение таких систем требует очень мало машинного времени при расчёте. Предлагаемая нами модель содержит миллионы описанных выше стержневых элементов водоочистки. Но даже несмотря на такое большое количество этих элементов расчёт в предлагаемой полной модели займёт несколько минут. Начальные условия для таких уравнений моделируются в зависимости от высотного слоя, на котором находится такой элемент. А именно, разделим весь биофильтр на горизонтальные

слои толщиной примерно один сантиметр в высоту. Начальные условия для уравнений, соответствующих элементам очистки воды в верхнем слое, определяются режимом поступления воды в биофильтр. Они устанавливаются заранее. Вода может течь неравномерно по площади поверхности. Исходным условием модели является распределение интенсивности поступления воды с примесями на верхнюю крышку биофильтра. Каждый элемент верхнего слоя передаёт частично очищенную жидкость на следующий слой. Эта жидкость распределяется между несколькими соседними точками входа элементов на следующий более высокий (нижний) слой. (Смежным элементом называется элемент, находящийся на некотором расстоянии, не превышающем заданного значения d .) Каждый элемент верхнего слоя делит определённым образом, например поровну, долю ещё не очищенных им примесей (а это и есть значения концентрации примесей на его нижнем конце) между входными верхними точками соседних элементов следующего (нижнего) слоя по высоте. Итак, очистка от примесей переходит на следующий по высоте слой. Наклоны элементов водоочистки (стержней) по отношению к вертикали можно моделировать как равномерно распределённые, а скорость движения смеси воды и воздуха через отдельные элементы выбирать в зависимости от наклона элемента к вертикальной оси.

Конечно, предложенный в данной работе метод моделирования процесса очистки воды далеко не единственный. Также возможно использование современных методов теории усреднения [15], с помощью которых можно описывать различные процессы в перфорированных (мелко вырезанных) областях посредством построения так называемых усреднённых или эффективных моделей. Уравнения для таких моделей задаются не в «мелко очерченной» области со сложной структурой, а в однородной области с простой структурой. Решения систем уравнений для усреднённой или эффективной моделей можно получить предельным переходом от решения для модели в перфорированной области по малому параметру, характеризующему размер микроструктуры перфорированной области. Также можно представить процесс водоочистки как случайное блуждание очень большого количества примесных частиц в перфорированной области. Сталкиваясь с границей, частицы примесей с некоторой вероятностью поглощаются, а также с некоторой вероятностью могут вновь появиться в водной среде. Работа над такими моделями сейчас ведётся, но требует анализа трёхмерных задач, что всегда представляет определённые трудности. В данной статье модель сводится к одномерным задачам, что значительно упрощает расчёты. Также возможно моделирование фильтрации водовоздушной смеси через пористую структуру путём построения усреднённой модели фильтрации. В результате следует рассчитать среднюю «эффективную» скорость фильтрации смеси вода с примесями-воздух. Однако создание и анализ такого рода не всегда оправданы с точки зрения построения полезной модели изучаемых процессов. Необходимо найти баланс между сложностью модели и её адекватностью. Предложенная в данной работе модель может, с нашей точки зрения, помочь в разработке фильтров на основе биологически активных плёнок, поскольку не требует решения сложных краевых задач в трёхмерных областях.

Опишем более подробно процедуру предельного перехода по толщине плёнки в исходной краевой задаче, приведённой в этом разделе, что упрощает модель за счёт сведения её к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД ПО ТОЛЩИНЕ ЭЛЕМЕНТА ВОДООЧИСТКИ

Для математического обоснования предлагаемого асимптотического метода разложения решения краевой задачи в тонкой области (см. рис. 2) нам потребуется следующая

Теорема. Пусть $Z_h = [r_0, r_0 + h] \times [0, l]$, $Z_h^\delta = Z_h \setminus \{(l - \delta, l) \cup (0, \delta)\} \times [r_0, r_0 + h]$; h, δ —

малые положительные постоянные; $C(x, r)$ — решение краевой задачи

$$\begin{aligned}
 LC = 0 \text{ в } Z_h, \quad L \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\equiv L_r + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\
 \left(\frac{\partial C}{\partial r} + k_0 C_0 \right)_{r=r_0+h} &= f(x), \\
 \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=l} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0} &= 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда в области Z_h^δ имеет место неравенство

$$\frac{1}{h} \left\| C(x, r) - \frac{f(x)}{k_0} \right\|_{L_2(Z_h^\delta)} \leq \text{const } h,$$

где $\text{const} > 0$ не зависит от h .

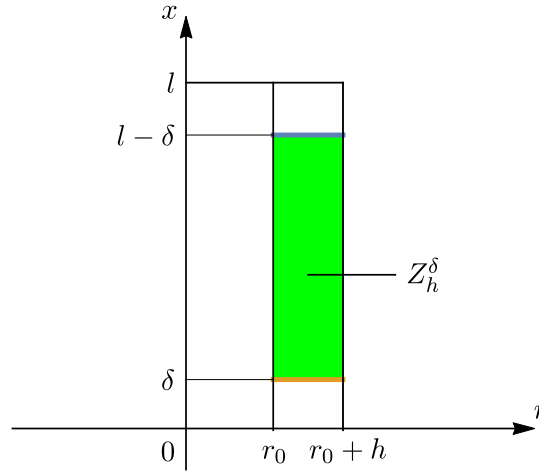


Рис. 2. Тонкая область зелёного цвета Z_h^δ

Доказательство. Задача (4) представляет собой смешанную краевую задачу для эллиптического уравнения в липшицевой области — прямоугольнике Z_h . Для оценки её решения и вопросов существования и единственности мы не можем непосредственно применить теорию эллиптических задач в области с гладкой границей. Однако в работе [16] построена теория таких краевых задач с липшицевыми границами области, доказаны существование и единственность решения, получены оценки решения через краевые условия. Из предложенного в [16] метода следует оценка решения смешанной краевой задачи через краевые условия в определённых функциональных пространствах. Исследуемая нами задача с условиями Неймана и смешанными граничными условиями тоже рассмотрена в [16].

Определим функцию

$$C^\delta(x, r) = C(x, r) - \frac{f(x)}{k_0} - \frac{f''(x)}{k_0} I(r),$$

где $I(r)$ — вспомогательная функция, удовлетворяющая условиям

$$L_r I(r) = 1, \quad I(r_0) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0,$$

здесь L_r — радиальная часть оператора Лапласа. Очевидно, что

$$I(r) \equiv \frac{r^2 - r_0^2}{4} - \frac{r_0^2}{2} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Простое вычисление показывает, что функция $C^\delta(x, r)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=l} = \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0} = O(1), \quad \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=r_0} = o(h), \quad \left(\frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} + k_0 C^\delta \right) \Big|_{r=r_0+h} = o(h).$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для функции $C^1(x, r)$ вида

$$\begin{aligned} LC^1(x, r) &= 0, \\ \frac{\partial C^1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=r_0} &= 0, \quad \frac{\partial C^1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial C^1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=l} = \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=l}, \\ \left(\frac{\partial C^1}{\partial \mathbf{n}} + k_0 C^1 \right) \Big|_{r=r_0+h} &= 0. \end{aligned}$$

Покажем, что функция $C^1(x, r)$ имеет вид функции пограничного слоя, сосредоточенной вблизи отрезков $\{l\} \times [r_0, r_0 + h]$, $\{0\} \times [r_0, r_0 + h]$, и в области Z_h^δ заведомо удовлетворяет оценке

$$\frac{1}{h} \|C^1(x, r)\|_{L_2(Z_h^\delta)} \leq C h^2,$$

где постоянная C не зависит от h . Введём для этого область $\tilde{Z}_h = [r_0, r_0 + h] \times (0, \infty)$ (рис. 3)

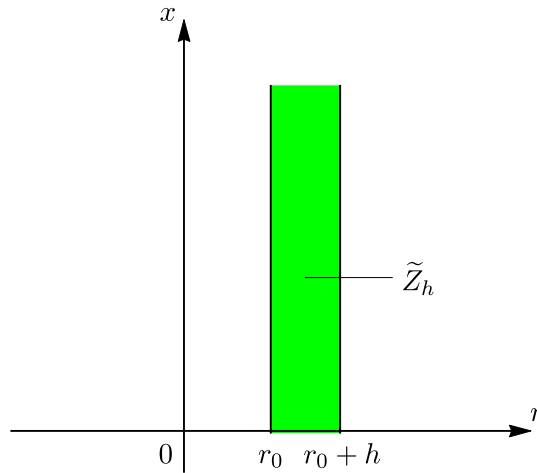


Рис. 3. Полубесконечная область \tilde{Z}_h

и рассмотрим в этой полубесконечной области краевую задачу

$$\begin{aligned} L_r U &= 0 \quad \text{в } \tilde{Z}_h, \\ \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + k_0 U \right) \Big|_{r=r_0+h} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{r=r_0} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial C^\delta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x=0}, \quad U \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Представим решение этой краевой задачи в виде ряда Фурье

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \varphi_n^h(r),$$

где $\{\varphi_n^h(r)\}$ — собственные функции оператора L_r на отрезке $[r_0, r_0 + h]$ с нулевыми краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial(\varphi_n^h(r))}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \left(\frac{\partial \varphi_n^h(r)}{\partial r} + k_0 \varphi_n^h(r) \right) \right|_{r=r_0+h} = 0,$$

нормированные в $L_2(r_0, r_0 + h)$.

Обозначим через $\{\lambda_n(h)\}$ соответствующие этим собственным функциям собственные значения. Используя хорошо известные результаты спектральной теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, можно показать, что $\lambda_n(h) \rightarrow -\infty$ при $h \rightarrow 0$ и $|\lambda_n(h)| \sim 1/h^2$ при $h \rightarrow 0$, поэтому $|v_n(x)| \leq c \exp(-\alpha x/h)$, $\alpha = \text{const} > 0$. Дифференциальное уравнение второго порядка для $v_n(x)$ имеет экспоненциально растущее и экспоненциально убывающее решения. Первое нам не подходит, так как возрастающее решение дифференциального уравнения для v_n противоречит условию $U \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что U имеет вид пограничного слоя, сосредоточенного вблизи отрезка $\{0\} \times [r_0, r_0 + h]$. Аналогичное рассуждение можно привести и для отрезка $\{l\} \times [r_0, r_0 + h]$. Здесь требуется построить пограничный слой V , стремящийся к нулю при $x \rightarrow -\infty$ в области $\tilde{Z}_h^1 = [r_0, r_0 + h] \times [-\infty, l]$ (рис. 4).

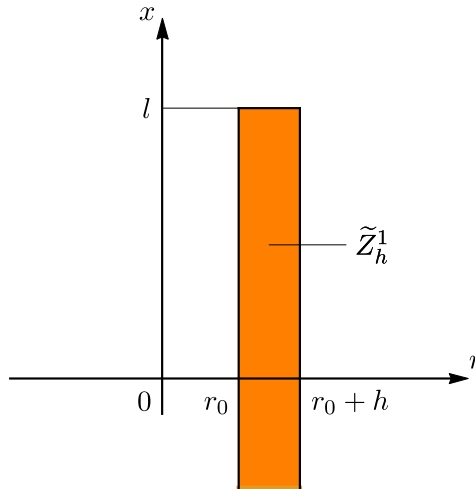


Рис. 4. Полубесконечная область \tilde{Z}_h^1

Тогда $\frac{1}{h} \|C^\delta - U - V\|_{L_2(Z_h^\delta)} \leq \text{const } h$ и, в силу погранслоевых оценок на U и V в Z_h^δ , $\frac{1}{h} \|C^\delta\|_{L_2(Z_h^\delta)} \leq \text{const } h$. Отсюда следует утверждение теоремы. \square

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Теперь, пользуясь утверждением теоремы, мы можем реализовать в стационарном случае асимптотический подход, существенно упрощающий решение исходной задачи. Оказывается, что первое приближение по параметру h построить несложно, для него несущественны величина диффузии и потенциал в (1), а основную роль играет граничное условие на поверхности.

Действительно, рассмотрим уравнение системы (1) в стационарном случае (когда производные по времени равны нулю) с граничным условием

$$\left(\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial r} + k_0 C_\varepsilon \right) \Big|_{r=r_0} = \Phi(x) \quad \text{на } S_\varepsilon.$$

Согласно теореме из разд. 3 для $C_\varepsilon(r, x)$ при $h \rightarrow 0$ имеет место следующее приближение:

$$C_\varepsilon^1(r, x) = \frac{\Phi(x)}{k_0} + \frac{\Phi''(x)}{k_0} I(r). \quad (5)$$

Заметим, что для приближения $C_\varepsilon^1(r, x)$ граничное условие на S_ε выполняется с точностью $O(h)$, условие на Γ_ε выполняется точно, условия на поверхностях D_1, D_2 не выполняются. Уравнение (1) для $C_\varepsilon^1(r, x)$ выполняется точно. (Для простоты мы здесь рассматриваем $F \equiv 0$, но нетрудно рассмотреть и более общий случай, когда функция F не равна тождественно нулю.) Слагаемое $\frac{\Phi''(x)}{k_0} I(r)$ в (5) имеет порядок $O(h^2)$, поэтому

$$C_\varepsilon^1(r, x) \sim \Phi(x)/k_0 \quad (6)$$

с точностью порядка $O(h)$ при $h \rightarrow 0$. Таким образом, если указанное приближённое значение для $C_\varepsilon(r, x)$ из (6) подставить в дифференциальное уравнение системы (3), то для предложенного приближения компоненты решения $M(x)$ из (3) при малом значении h получим простое обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dM(x)}{dx} = -v^{-1} g \left[M(x), f(M(x)) \right] \quad (7)$$

с начальным условием $M(0) = m_0$. Здесь f, g — явно заданные функции, конкретный вид которых определяется исходной постановкой задачи. Если f и g — линейные функции, то это уравнение (7) решается в явном виде, а если f и g — функции общего вида, то уравнение можно быстро и с высокой точностью решить на ЭВМ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы предлагаем модель процесса очистки воды с помощью биопленки, которая просто реализуется в виде вычислительной программы. Такая модель может быть использована в расчёте параметров фильтра водоочистки так, чтобы достигалась определённая производительность водоочистки и уровень вредных примесей в воде на выходе из фильтра не превышал заданного значения. Таким образом, данная модель может быть использована для решения оптимизационной задачи выбора различных параметров установки водоочистки с соответствующими ограничениями на производительность и качество очистки воды.

Авторы глубоко признательны профессору А. Л. Пятницкому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хенце М., Армоэс П., Ля-Кур-Янсен Й., Арван Э. Очистка сточных вод. М.: Мир, 2006.
2. Bitton G. Wastewater Microbiology. N. Y.: Wiley-Interscience, 2005.
3. D'Acunto B., Frunzo L., Mattei M. R. Continuum approach to mathematical modelling of multispecies biofilms // Ricerche di Matematica. 2017. V. 66. P. 153–169; <https://doi.org/10.1007/s11587-016-0294-8>
4. Boltz J. P., Mongenroth E., Sen D. Mathematical modelling of biofilms and biofilm reactors for engineering design // Water Sci. Technology. 2010. V. 62. P. 1821–1836; <https://doi.org/10.2166/wst.2010.076>

5. Guo C.M., Chen J.F., Zhang Z.Z., Zhao L.J. Mathematical model of biofilm reactor treating industrial wastewater – a review // *Adv. Materials Res.* 2011. V. 356-360. P. 1739–1742; <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.356-360.1739>
6. Wanner O., Reichert R. Mathematical modelling of mixed-culture biofilms // *Biotechnol. Bioengr.* 1996. V. 48. P. 172–184; [doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0290\(19960120\)49:2<172::AID-BIT6>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0290(19960120)49:2<172::AID-BIT6>3.0.CO;2-N)
7. Alpkvist E., Klapper I.Yu. A multidimensional multispecies continuum model for heterogeneous biofilm development // *Bull. Math. Biol.* 2007. V. 69, N 2. P. 765–789; <https://doi.org/10.1007/s11538-006-9168-7>
8. D’Acunto B., Frunzo L., Mattei M. R. Qualitative analysis of the moving boundary problem for a biofilm reactor model // *Math. Anal. Appl.* 2016. V. 438. P. 474–491; <https://doi.org/10.1016/J.JMAA.2016.02.008>
9. Masic A., Eberl H. J. A modeling and simulation study of the role of suspended microbial populations in nitrification in a biofilm reactor // *Bull. Math. Biol.* 2014. V. 76. P. 27–58; <https://doi.org/10.1007/s11538-013-9898-2>
10. Олейник А.Я., Василенко Т.В., Рыбаченко С.А., Хамад И.А. Моделирование процессов доочистки хозяйственно-бытовых сточных вод на фильтрах // *Проблемы водопостачання, водовидведення та гидравлики.* 2006. Т. 7. С. 85–97.
11. Christiansen R., Hollesen L., Harremoës R. Liquid film diffusion of reaction rate in submergen biofilters. // *Water Res.* 1995. V. 29, N 1. P. 947–952; [https://doi.org/10.1016/0043-1354\(94\)00206-m](https://doi.org/10.1016/0043-1354(94)00206-m)
12. Taylor S.V., Milly P.C.D., Jaffe P. R. Biofilm growth and the related changes in the physical properties of a porous medium // *Water Resources Res.* 1990. V. 26, N 9. P. 2161–2169; <https://doi.org/10.1029/WR026i009p02153>
13. Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука, 1983.
14. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Новосибирск: Научн. книга, 2002.
15. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
16. Агранович М.С. Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка // *Функц. анализ и его прил.* 2011. Т. 45, № 2. С. 1–22; <https://doi.org/10.4213/faa3039>

UDC 628.35

**MATHEMATICAL MODEL OF THE WASTEWATER TREATMENT
PROCESS USING BIOFILM**© 2023 T. N. Bobyleva,^{1a}, A. S. Shamaev,^{2b}, O. V. Yantsen^{3,4c}¹*Moscow State University of Civil Engineering,
Yaroslavskoye Shosse 26, Moscow 129337, Russia,*²*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS,
Pr. Vernadskogo 101-1, Moscow 119526, Russia,*³*Scientific and Technical Center, LLC «VT Expert»,
ul. Samora Mashela 2a, Moscow 117198, Russia,*⁴*Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting,
ul. Miklukho-Maklaya 23, Moscow, 117485, Russia*E-mails: ^atatyana2211@outlook.com, ^bsham@rambler.ru, ^cyantsenov@bk.ru

Received 26.08.2022, revised 20.11.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. The article proposes a mathematical model of wastewater treatment based on the use of biofilm; whose microorganisms destroy harmful impurities contained in water. For microorganisms, impurities are "food". A system of partial differential equations with boundary conditions is given. A system of partial differential equations with boundary conditions is given for one loading element, which is a cylindrical rod whose surface is covered with a biologically active film. This system includes a parabolic equation in a three-dimensional domain and a hyperbolic equation on a part of the surface of this domain connected to each other through a boundary condition and a potential in a hyperbolic equation. Further, an asymptotic analysis of this system is carried out, which makes it possible to reduce the model of an individual element to the solution of a simple ordinary differential equation, and a strict mathematical justification of this method is given. In this case, a mathematical method is used to construct asymptotics in the so-called «thin regions». The proposed method is a simplification of a complex combined model based on the laws of hydrodynamics and diffusion. On this basis, a model of the operation of the entire wastewater treatment device containing a large (millions) of such elements is proposed.

Keywords: water treatment, biologically active layer, asymptotic analysis of solutions in a thin region, mathematical model of impurity treatment, systems of partial differential equations of mixed type.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.203

REFERENCES

1. Henze M., Harremoës P., La Cour J.J., E. Arvin E. Wastewater Treatment. Biological and Chemical Processes. Berlin: Springer-Verl., 1997.
2. Bitton G. Wastewater Microbiology. N. Y.: Wiley-Interscience, 2005.
3. D'Acunto B., Frunzo L., Mattei M. R. Continuum approach to mathematical modelling of multispecies biofilms. *Ricerche di Matematica*, 2017, Vol. 66, pp. 153–169; <https://doi.org/10.1007/s11587-016-0294-8>
4. Boltz J. P., Mongenroth E., Sen D. Mathematical modelling of biofilms and biofilm reactors for engineering design. *Water Sci. Technology*, 2010, Vol. 62, pp. 1821–1836; <https://doi.org/10.2166/wst.2010.076>

5. Guo C.M., Chen J.F., Zhang Z.Z., Zhao L.J. Mathematical model of biofilm reactor treating industrial wastewater – a review. *Adv. Materials Res.*, 2011, Vol. 356-360, pp. 1739–1742; <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.356-360.1739>
6. Wanner O., Reichert R. Mathematical modelling of mixed-culture biofilms. *Biotechnol. Bioengr.*, 1996, Vol. 48, pp. 172–184; [doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0290\(19960120\)49:2<172::AID-BIT6>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0290(19960120)49:2<172::AID-BIT6>3.0.CO;2-N)
7. Alpkvist E., Klapper I.Yu. A multidimensional multispecies continuum model for heterogeneous biofilm development. *Bull. Math. Biol.*, 2007, Vol. 69, No. 2, pp. 765–789; <https://doi.org/10.1007/s11538-006-9168-7>
8. D’Acunto B., Frunzo L., Mattei M. R. Qualitative analysis of the moving boundary problem for a biofilm reactor model. *Math. Anal. Appl.*, 2016, Vol. 438, pp. 474–491; <https://doi.org/10.1016/J.JMAA.2016.02.008>
9. Masic A., Eberl H. J. A modeling and simulation study of the role of suspended microbial populations in nitrification in a biofilm reactor // *Bull. Math. Biol.* 2014. V. 76. P. 27–58; <https://doi.org/10.1007/s11538-013-9898-2>
10. Oleinik A.Ya., Vasilenko T.V., Rybachenko S.A., Khamad I.A. Modelirovanie protsessov doochistki khozyaistvenno-bytovykh stochnykh vod na fil'trakh [Modeling of post-treatment processes of household wastewater on filters]. *Probl. Vodopostachannya, Vodovidvedennya ta Gidravliki*, 2006, Vol. 7, pp. 85–97 (in Russian).
11. Christiansen R., Hollesen L., Harremoes R. Liquid film diffusion of reaction rate in submergen biofilters. *Water Res.*, 1995, Vol. 29, No. 1, pp. 947–952; [https://doi.org/10.1016/0043-1354\(94\)00206-m](https://doi.org/10.1016/0043-1354(94)00206-m)
12. Taylor S.V., Milly P.C.D., Jaffe P. R. Biofilm growth and the related changes in the physical properties of a porous medium. *Water Resources Res.*, 1990, Vol. 26, No. 9, pp. 2161–2169; <https://doi.org/10.1029/WR026i009p02153>
13. Vavilin V.A. Nelineinye modeli biologicheskoi ochistki i protsessov samoochishcheniya v rekakh [Nonlinear models of biological purification and self-purification processes in rivers]. Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
14. Nazarov S.A. Asimptoticheskaya teoriya tonkii plastin i sterzhnei [Asymptotic theory of thin plates and rods]. Novosibirsk: Nauchn. Kniga, 2002 (in Russian).
15. Oleinik O.A., Iosif’yan G.A., Shamaev A.S. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. North-Holland: Elsevier, 1992; eBook ISBN: 9780080875477
16. Agranovich M.S. Mixed problems in a Lipschitz domain for strongly elliptic second-order systems. *Funct. Anal. Appl.*, 2011, Vol. 45, No. 2, pp. 81–98; <https://doi.org/10.1007/s10688-011-0011-z>

УДК 539.376

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЧИСТОГО ИЗГИБА БАЛКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2023 С. В. Бойко^а, А. Ю. Ларичкин^б

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^аboykosv.hydro@gmail.com, ^бlarichking@gmail.com

Поступила в редакцию 03.05.2022 г.; после доработки 27.10.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Предложен алгоритм для решения обратной задачи формообразования элементов конструкций в условиях ползучести с применением метода оптимизации Нелдера — Мида. В рассмотренном методе исходная задача (поиск усилий, которые необходимо приложить, чтобы получить требуемую кривизну детали) сводится к последовательному решению вспомогательных прямых задач моделирования напряжённо-деформированного состояния чистого изгиба балок прямоугольного сечения. Модель, учитывающая различие свойств материала на растяжение и сжатие, наличие накопленных повреждений в материале в процессе ползучести, была проверена численными методами и внедрена в конечно-элементный пакет MSC.Marc.

Ключевые слова: прямоугольная балка, обратная задача, изгиб, ползучесть, разрушение, параметр поврежденности, разносопротивляемость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.204

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей в авиа-, машино- и кораблестроении является сохранение свойств материала на стадии изготовления элементов конструкций и их оптимизации — уменьшении веса при сохранении эксплуатационных характеристик. Оребрѐнные панели различной кривизны используются в технике из-за своих пониженных весовых характеристик при достаточной прочности конструкции [1, 2]. Панель имеет оребрение в виде двух пересекающихся систем рѐбер. Рѐбра изготавливаются при помощи механической обработки изначально сплошной плиты. Данную панель изготавливают при помощи фрезерования из толстых плит. Получение тонкостенных оребрѐнных панелей методами фрезерования может привести к деформации всей панели из-за действия остаточных сжимающих напряжений. Напряжения возникают по причине удаления фрезой металла с поверхностей плиты. В связи с этим возникает класс задач о создании упреждающей оснастки или приложения системы сил для придания изогнутой панели целевой формы.

Для панелей крыла летательных аппаратов и элементов фюзеляжа применяют процесс формообразования панелей в режиме ползучести при температуре старения [1]. Например, для получения элементов конструкций самолѐтов Airbus 330 и 340 [1] придавали кривизну стрингерам при помощи кручения и изгиба. После формовки в цилиндрическую поверхность прямоугольной пластины из алюминиевого сплава 7075 (аналог отечественного сплава В95 на базе Al-Cu-Mg) при температуре 180 °С, изготавливаемая деталь испытывала около 70% упругого возврата, который авторы работы связали с остаточными напряжениями. Авторы предложили метод для избежания больших упругих возвратов детали на габаритных изделиях сложной геометрии: отдельно формовать рѐбра и исходную безреберную панель, а затем соединять их между собой при помощи сварки.

Для моделирования в конечно-элементном пакете ABAQUS процесса формообразования вафельных и изогридных пластин из алюминиевого сплава AA2219 (аналог сплава 1201 на базе Al-Cu) при температуре старения 175 °С использовалась математическая модель с семью уравнениями состояния, имеющая 17 констант для описания поведения материала [3]. Закон ползучести приведён в виде гиперболического синуса. В работе использовался закон связи напряжений со скоростью деформаций ползучести в виде гиперболического синуса. Авторы установили, что в экспериментах деталь испытывает распухание от 12,2% (на изогридной пластине) и до 15,7% (на вафельной).

Получить оребрённую панель сложной геометрии можно при помощи формовки толстой плиты в режимах ползучести с помощью перестраиваемого стержневого пуансона (матрицы), который позволяет за один технологический цикл получать целевую форму из заготовки [4]. После формовки толстой плиты проводится её фрезерование для получения оребрённой панели. Для моделирования процесса формовки толстой плиты задаётся закон перемещения каждого стержня оснастки, чтобы получить упреждающую форму панели. Варьируя температурный режим формовки, свойства материала и способы деформирования, можно уменьшить величину отклонения панели при разгрузке. В [4] формулируется обратная задача формообразования для определения закона перемещения стержней перестраиваемого пуансона. Стержни задавали упреждающую кривизну матрицы для панели двойной кривизны центроплановой части самолёта. Авторами был построен итерационный метод решения задачи относительно неизвестных перемещений точек поверхности панели по целевой кривизне.

Расчёт напряжённо-деформированного состояния монолитных и оребрённых конструкций требует больших численных затрат ввиду сложности геометрии конструкции [5–7]. Для упрощения расчёта геометрии можно рассматривать отдельные части изделия и для каждой из них определять кривизны, после чего изгиб всей детали в целом [8]. В качестве методов исследования чаще всего используются приближённые, в которых учитываются геометрические данные образцов и свойства материалов, а также численные методы с использованием конечно-разностных схем и метода конечных элементов (МКЭ).

Для моделирования формовки сложных панелей в режимах ползучести нужно уметь использовать приближённые методы формообразования составляющих панелей элементов конструкции — балок и тавров [9]. Простейшая конструкция для исследования изгибных деформаций — балка [10–15]. Конструкционные материалы обладают различием в деформационных и прочностных свойствах при растяжении и сжатии. Параметры ползучести и длительность до разрушения могут различаться в несколько раз [12]. Численные расчёты на ползучесть и длительную прочность изгибаемого бруса прямоугольного сечения при установившейся стадии ползучести с учётом различных свойств при растяжении и сжатии материала сводятся к решению системы дифференциальных уравнений относительно деформации, работы рассеяния [12], а также поврежденности [15–19]. Использование модели ползучести для описания различных свойств на растяжение и сжатие позволяет добиться удовлетворительного соответствия расчётов и данных эксперимента [19]. В [19] авторами представлено решение трёхмерных задач для металлических пластин в условиях ползучести под действием постоянных сосредоточенных сил, приложенных в её углах. В работе предложен алгоритм определения компонент тензора напряжений, реализованный в конечно-элементном пакете PIONER (разработка ИГиЛ СО РАН) для определяющих соотношений ползучести с учётом разных свойств материала при растяжении и сжатии.

Для описания ползучести в качестве определяющих соотношений также используются дробно-степенные функции [20]. Авторами рассматривалась задача изгиба круглых балок в режимах ползучести [20] и проводилось сравнение с результатами расчёта изгиба прямоугольных балок. На эпюрах распределений безразмерных напряжений при различных значениях показателя ползучести установлено, что величина напряжений по абсолютному значению больше

для круглого сечения, так как основную часть нагрузки выдерживают волокна, наиболее удалённые от нейтральной плоскости.

Процедура численного расчёта упругой балки с асимметричным поперечным сечением рассмотрена в [21]. Балка таврового сечения подвергается изгибающему моменту. Материал балки подчиняется реологической модели упруго-линейного упрочнения. Деформации описываются как функция вращения и сдвига нейтральной оси и кривизны балки. В процессе изгиба учитывается влияние локальной нагрузки при монотонном её уменьшении. Результаты расчётов подтверждают сильное влияние нагрузки на конечное и упругое вращение нейтральной оси, её смещение и кривизну балки. Отметим, что свойства ползучести не учитываются.

Помимо процесса ползучести особую важность имеет повреждаемость материала, которая может существенно влиять на точность изготовления элементов конструкций. Используя теорию ползучести для случая одноосного напряжённого состояния, можно описать изменение структуры материала вследствие накопления в нём повреждений [8]. Этот подход позволяет оценивать поврежденность конструкции вплоть до разрушения. Распространён энергетический вариант [11, 12], в котором за меру интенсивности процесса ползучести принята величина мощности рассеяния, а за меру накопленных повреждений — работа рассеяния. Работа [15] является развитием энергетического варианта теории ползучести [11, 12]. Авторами предложена феноменологическая модель ползучести, виброползучести и длительной прочности энергетического типа. Рассмотрен общий случай реологического состояния материала, включающий деформации упругости, пластичности, ползучести, процессы рассеянного накопления поврежденности и разрушения. Также существует так называемая теория обобщённого континуума [13], в которой распределение повреждений в материале описывается либо при помощи скалярных параметров поврежденности, либо при помощи тензорных характеристик различного ранга.

Фундаментальное описание явления ползучести представлено в монографии [14]. В ней приведены решения задач изгиба балок, пластин, оболочек и представлены подходы к описанию ползучести и накопления повреждений при сложном напряжённом состоянии. В частности, получены решения задачи чистого изгиба балок в режимах ползучести с учётом различных свойств на растяжение и сжатие, а также повреждаемости материала. Зависимость скорости ползучести и скорости изменения сплошности от напряжений принимается в виде мелко-степенных функций. Приводится решение с учётом фронта разрушения.

Цель данной работы — показать учёт влияния свойств ползучести и поврежденности материала при моделировании процесса формообразования элементов конструкций, получить решение обратной задачи формообразования по определению изгибающих моментов, которые позволяют достигнуть целевую форму детали.

1. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

При решении обратной задачи формообразования элементов конструкций при чистом изгибе балки необходимо определить, какой изгибающий момент M прикладывать к балке во время процесса деформации в ползучести, чтобы при разгрузке в момент времени t получить целевую кривизну \varkappa . В настоящей статье решение этой задачи сводится к решению последовательных прямых задач формообразования.

Рассмотрим прямую задачу о деформировании и разрушении балки прямоугольного сечения с высотой h , шириной b и длиной l_0 в условиях действия изгибающего момента. Необходимо определить кривизну балки по заданному изгибающему моменту M . Момент M параллелен оси Ox .

Процесс ползучести материала описывается уравнением вида

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_+}{dt} &= (B_1|\sigma|^{n_1-1}\sigma)/(A_1^* - A)^{m_1}, \quad \sigma > 0 \quad (\text{при растяжении}); \\ \frac{d\varepsilon_-}{dt} &= (B_2|\sigma|^{n_2-1}\sigma)/(A_2^* - A)^{m_2}, \quad \sigma \leq 0 \quad (\text{при сжатии}).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(y, t)$ — деформации балки в момент времени t по высоте балки y ; $\sigma = \sigma(y, t)$ — напряжения в момент времени t по высоте балки y ; $B_1, n_1, A_1, A_1^*, m_1, B_2, n_2, A_2, m_2, A_2^*$ — характеристики материала в процессе ползучести.

Считая справедливой гипотезу плоских сечений и то, что в процессе ползучести изгибаемой балки происходит смещение нейтральной поверхности вследствие разнсопротивляемости материала растяжению и сжатию, имеем

$$\sigma(y, t)/E + \varepsilon(y, t) = \varkappa(y + \delta(t)),\tag{2}$$

где E — модуль упругости материала; $\delta(t)$ — расстояние между срединной поверхностью и нейтральной поверхностью в момент времени t ; y — координата по высоте балки с началом в срединной поверхности; $\varkappa = \varkappa(y, t)$ — кривизна балки в момент времени t .

Уравнения равновесия балки имеют вид

$$\int_{-h/2}^{h/2} b\sigma(y + \delta) dy = M, \quad \int_{-h/2}^{h/2} b\sigma dy = 0.\tag{3}$$

Из уравнения (3) с учётом (2) имеем выражения для определения кривизны и напряжений в балке:

$$\varkappa = M/(EJ_\delta) + \frac{1}{J_\delta} \int_{-h/2}^{h/2} b\varepsilon(y + \delta) dy, \quad \sigma = [M/J_\delta + (E/J_\delta)(b\varepsilon(y + \delta))](y + \delta) - E\varepsilon,$$

где $J_\delta = b(h^3/12 + h\delta^2)$ — момент инерции балки прямоугольного сечения.

Положение между срединной поверхностью и нейтральной поверхностью определяется из условия отсутствия нормальных усилий в сечении бруса (3): $\delta = -\frac{1}{\varkappa h} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon dy$.

Таким образом, решение системы (1) сводится к двум интегродифференциальным уравнениям относительно деформации ε и удельной работы рассеяния A .

В качестве начального напряжённо-деформированного состояния принимаем упругое. Значение деформации ε и работы рассеяния A в начальный момент в каждом волокне сечения принимаем нулевое.

1.1. Численный метод решения

Задача решается численным методом Рунге — Кутты — Мерсона [22]. Сечение балки разбивается на k равных интервалов, $i = 0, \dots, k$:

$$\begin{aligned}\frac{dA_{+i}}{dt} &= (B_1\sigma_i^{n_1})/(A_1^* - A_i)^{m_1}, \quad \sigma > 0 \quad (\text{при растяжении}); \\ \frac{dA_{-i}}{dt} &= (B_2\sigma_i^{n_2})/(A_2^* - A_i)^{m_2}, \quad \sigma \leq 0 \quad (\text{при сжатии}); \\ \frac{d\varepsilon_i}{dt} &= \frac{1}{\sigma_i} \left/ \frac{dA_i}{dt} \right.\end{aligned}\tag{4}$$

Заменяя интегралы конечными суммами по формуле Симпсона [23], получаем выражения для определения кривизны оси балки \varkappa и положения между срединной поверхностью и нейтральной поверхностью δ :

$$\varkappa = M/[EJ_\delta] + [(bd)/(3J_\delta)][\varepsilon_{k-1}(y_{k-1} + \delta) + 4\varepsilon_k(y_k + \delta) + \varepsilon_{k+1}(y_{k+1} + \delta)], \quad (5)$$

$$\delta = -\frac{d}{3\varkappa h}[\varepsilon_{k-1}(y_{k-1} + \delta) + 4\varepsilon_k(y_k + \delta) + \varepsilon_{k+1}(y_{k+1} + \delta)]. \quad (6)$$

Здесь d — длина интервала разбиения, y_i — значение высоты в i -й точке разбиения.

Алгоритм решения задачи определения напряжённо-деформированного состояния балок прямоугольного сечения для разносопротивляющегося материала с учётом повреждаемости $\omega = \varepsilon/\varepsilon_* = A/A_*$ реализован в виде программного модуля в пакете Visual Studio на языке C++.

1.2. Результаты численного расчёта для балки прямоугольного сечения

Моделирование процесса деформирования прямоугольной балки проводилось для алюминиевого сплава АК4-1 при температуре 200 °С под действием изгибающего момента $M = 154.94$ Нм. Материал изотропен. Его параметры упругости при растяжении и сжатии: $E = 70000$ МПа. Параметры материала в процессе ползучести приведены в таблице.

Характерной особенностью кривых ползучести для алюминиевого сплава АК4-1 является отсутствие первой стадии неустановившейся ползучести. С самого начала нагружения начинается накопление повреждений ω ($\omega(0) = 0$, $\omega(1) = 1$) в материале, скорость деформаций ползучести растёт в процессе испытания вплоть до разрушения образца.

Параметры материала АК4-1Т [24]

Вид испытаний	$B, (\text{МПа})^{m-n+1} \text{ч}^{-1}$	n	m	$A_*, \text{МДж/мм}^3$
Растяжение	$B_1 = 6.37 \cdot 10^{-13}$	$n_1 = 7$	$m_1 = 7$	$A_{*1} = 10$
Сжатие	$B_1 = 2.84 \cdot 10^{-15}$	$n_2 = 8$	$m_2 = 2$	$A_{*2} = 10$

На рис. 1 представлено распределение повреждений по сечению балки y . При $A_* = 10$ МДж/мм³ повреждаемость в крайнем волокне балки $\omega = A/A_* = 1$, т. е. процесс шёл вплоть до разрушения.

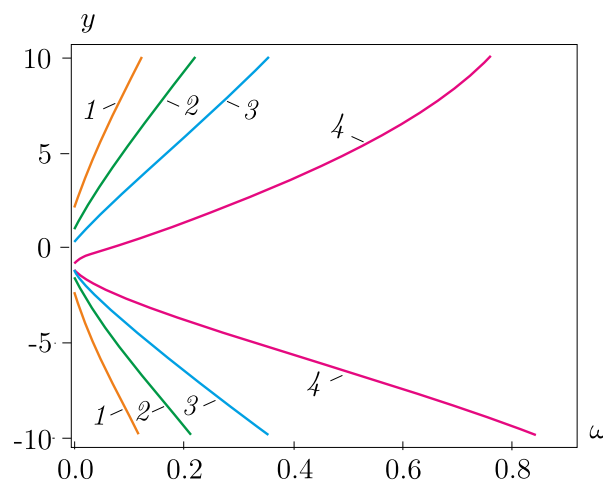


Рис. 1. Распределение повреждений по сечению балки y в различные моменты времени: $t = 136$ ч (кривая 1); $t = 272$ ч (кривая 2); $t = 408$ ч (кривая 3); $t = 544$ ч (кривая 4)

На рис. 2 показано распределение напряжений σ по сечению балки. На рис. 2(а) в качестве иллюстраций приведены эпюры распределения напряжения в различные моменты времени

$t = 0; 136; 410; 537; 547$ ч (кривые 1–5 соответственно). Имеет место смещение нейтральной поверхности — красные круги. Штрих-пунктирной окружностью обозначена координата характеристической точки на высоте балки, в которой не происходит перераспределение напряжений [24].

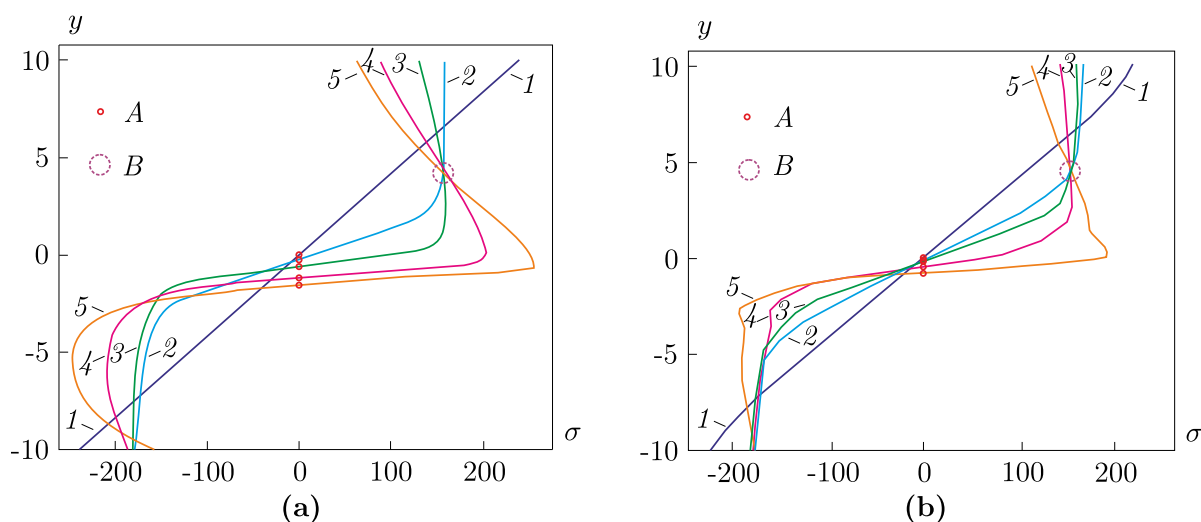


Рис. 2. Распределение напряжений σ по сечению балки в различные моменты времени;

(а): $t = 0$ ч (кривая 1); $t = 136$ ч (кривая 2); $t = 410$ ч (кривая 3);

$t = 537$ ч (кривая 4); $t = 547$ ч (кривая 5);

(б): $t = 1$ ч (кривая 1); $t = 49$ ч (кривая 2); $t = 101$ ч (кривая 3);

$t = 349$ ч (кривая 4); $t = 564$ ч (кривая 5);

A — координата нейтральной поверхности; B — характеристическая точка

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПАКЕТЕ MSC.MARC

2.1. Теория и алгоритмы решения

Для более полного анализа задачи о чистом изгибе балки рассматривается трёхмерная модель для формообразования балок прямоугольного сечения в процессе ползучести с использованием пакета MSC.Marc [25, 26].

При численном решении трёхмерных задач деформирования тел в режиме ползучести проводится пространственная дискретизация уравнений механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ) и их дискретизация по времени. Методом аппроксимации уравнений по пространственным координатам для произвольных форм является МКЭ, который основан на интегральной форме дифференциальных уравнений.

Вычисляя интегралы по областям, которые относятся к конечному элементу, необходимо определить компоненты тензора напряжений в точках интегрирования по квадратурным формулам Гаусса — Лежандра.

В данной работе представлены алгоритмы вычисления компонент тензора напряжений при развитии процесса во времени с использованием определяющих соотношений ползучести материалов, имеющих разные свойства при растяжении-сжатии [19] и с учётом повреждаемости материала. Все эти алгоритмы реализованы в пакете MSC.Marc в подпрограмме `srplaw.f`.

Для использования модели ползучести, где учитывается различие свойств материала на растяжение и сжатие, необходимо применять явную схему интегрирования уравнений ползучести, что влечёт ограничение на размер шага по времени [19].

Закон, связывающий компоненты приращения тензора деформаций ползучести e_{ij}^{cr} с компонентами тензора-девиатора напряжений $\Delta e_{ij}^{cr} = [(3\Delta \bar{e}^{cr}/2\sigma_e)]s_{ij}$, реализован в явной формулировке определения деформаций ползучести в пакете MSC.Marc при пошаговом интегрировании уравнений равновесия. Здесь $\sigma_e \equiv \sqrt{\frac{3}{2} \sum_{i,j=1}^3 s_{kl}s_{kl}}$ — эффективное напряжение, $s_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \right) \delta_{ij}$.

Требуется определить приращение эффективной деформации ползучести $\Delta \bar{e}^{cr}$ через известное решение задачи в момент времени t в некоторой точке интегрирования конечного элемента.

Вводится функциональная зависимость вида $\Delta \bar{e}^{cr} = f(\sigma_{ij})\Delta t$ [19, 27], где $f(\sigma_{ij})$ — заданная скалярная функция тензорного аргумента; Δt — шаг по времени.

В программе MSC.Marc в user subroutine crplaw.f [28] реализован следующий алгоритм [19]:

- 1) вводятся константы ползучести B_1, n_1, B_2, n_2 ;
- 2) определяется среднее напряжение $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$;
- 3) определяются компоненты тензора-девиатора напряжений $s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{12}, s_{13}, s_{23}$;
- 4) вычисляется эффективное напряжение;
- 5) определяется наличие или отсутствие деформаций ползучести: если $\sigma_e \leq 10^{-16}$, то деформации ползучести отсутствуют $\Delta \bar{e}^{cr} = 0$ и происходит выход из программы crplaw.f; если $\sigma_e > 10^{-16}$, то деформации ползучести присутствуют и продолжается вычисление $\Delta \bar{e}^{cr}$;
- 6) вычисляется третий инвариант тензора-девиатора напряжений

$$J_3(s_{ij}) = \det(s_{ij}) = s_{11}s_{22}s_{33} + 2s_{12}s_{13}s_{23} - s_{22}s_{13}^2 - s_{11}s_{23}^2 - s_{33}s_{12}^2;$$

- 7) находится величина $\sin(3\theta) = -\frac{27}{2}J_2(s_{ij})/(s_e^3(s_{ij}))$, где $J_2(s_{ij})$ — второй инвариант тензора-девиатора напряжений;
- 8) находится приращение эффективной деформации ползучести

$$\Delta \bar{e}^{cr} = \frac{1}{2} [B_1 \sigma_e^{n_1} (1 - \sin(3\theta)) + B_2 \sigma_e^{n_2} (1 + \sin(3\theta))] \Delta t.$$

Для интегрирования уравнения равновесия по времени используется пошаговая процедура. Полагая решение в момент времени t известным, линеаризуется уравнение баланса виртуальных работ относительно этого момента времени с учётом кинематических и определяющих соотношений упругопластического материала, учитывающего деформации ползучести. Пространственная дискретизация линеаризованного уравнения проводится с использованием МКЭ. В результате на каждом шаге по времени решается система линейных алгебраических уравнений: ${}^tK\Delta U = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F$, где tK — матрица касательной жёсткости, определённая в момент времени t ; $\Delta U = {}^{t+\Delta t}U - {}^tU$, ${}^{t+\Delta t}U$, tU — векторы перемещений ансамбля узловых точек в моменты времени $t + \Delta t$ и t соответственно; ${}^{t+\Delta t}R$ — вектор внешних сил в момент времени $t + \Delta t$; tF — вектор внутренних сил в момент времени t . Полученное решение ${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + \Delta U$ на каждом шаге по времени уточняется методом Ньютона — Рафсона [19, 27, 29].

2.2. Результаты трёхмерного компьютерного моделирования

Для трёхмерного компьютерного моделирования процесса формообразования прямоугольной балки в конечно-элементном пакете MSC.Marc 2014 задаются свойства материала АК4-1, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$ и её геометрические размеры: $b = 10$ мм, $h = 20$ мм, $l = 100$ мм.

Проводилось моделирование чистого изгиба половины балки в условиях ползучести. Для однозначного позиционирования половины балки в пространстве были введены два линейных балочных элемента (truss element) из упругого материала с малой жёсткостью: $E_{\text{truss}} = 3 \text{ МПа}$, $\nu = 0.45$. Такой элемент имеет один общий узел с изгибаемой балкой, а второй узел элемента жёстко фиксируется в пространстве (все перемещения и повороты равны нулю). На левом торце половины балки были заданы условия симметрии: запрещено движение по оси Z и поворот вокруг оси X . На расстоянии от правого торца к поперечному сечению балки был приложен постоянный момент $M = (154.94, 0, 0) \text{ Нм}$ параллельный оси X .

На рис. 3 показано изменение кривизны оси балки $\varkappa = 1/\rho$ по времени t . На рис. 3(a) показан график изменения кривизны балки в различные моменты времени. В условиях чистого изгиба кривизна в каждой точке балки одинакова. Точками обозначены экспериментальные значения для заданного момента времени [24]. Если проводить процесс моделирования деформирования балки с характеристиками ползучести на растяжение и поврежденностью (кривая 1), на сжатие с поврежденностью (кривая 2), то результат моделирования не согласуется с данными эксперимента. Кривая 3 — данные, полученные в работе [24]. Следует отметить, что по предложенной модели ползучести изгиба балки с учётом растяжения, сжатия и поврежденности материала (кривая 4) достаточно точно описывается процесс повреждений в балке вплоть до разрушения.

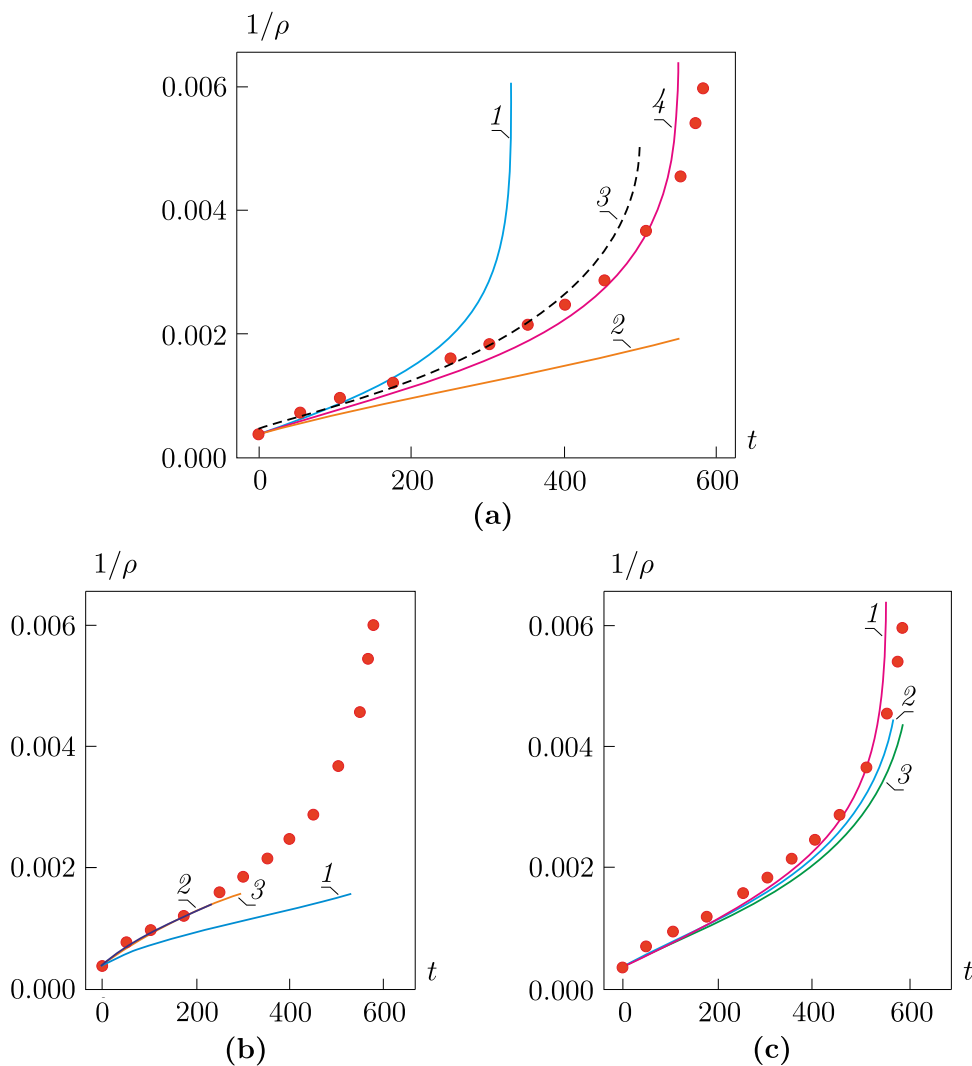


Рис. 3. Изменение кривизны оси балки $\varkappa = 1/\rho$ по времени t

На рис. 3(b) показаны линии кривизны от времени для разносопротивляющегося материала, полученные в расчётах с использованием равномерной сетки трёхмерных восьмиузловых гексогональных элементов (hex8) (кривая 1), двадцатиузловых гексогональных элементов (hex20) в общей лагранжевой формулировке (кривая 2) и текущей формулировки механики деформируемого твёрдого тела (кривая 3). Анализ показал, что для удовлетворительного описания процесса деформирования балки в процессе ползучести необходимо использовать в моделировании трёхмерные восьмиузловые гексогональные элементы и искать решение в текущей лагранжевой формулировке механики деформированного твёрдого тела [29, 30]. Однако учёт лишь одного различия свойств ползучести на растяжение и сжатие не даёт удовлетворительного описания процесса ползучести при изгибе балки, поскольку такой подход не улавливает увеличения скорости ползучести из-за роста поврежденности материала.

В данной работе для описания процесса деформирования балки вплоть до разрушения вводится скалярный параметр поврежденности $\omega = A/A_*$. Деформация в конечный момент времени $\varepsilon_* = 1/\sigma$, и в случае одноосных испытаний имеем, что $\omega = \bar{\varepsilon}^{cr} \cdot \sigma_e$. Таким образом, имеем следующий вид для определения приращения эффективной деформации ползучести:

$$\Delta \bar{\varepsilon}^{cr} = \frac{1}{2} [B_1 \sigma_e^{n_1} (1 - \sin(3\theta)) / (1 - \bar{\varepsilon}^{cr} \cdot \sigma_e)^{m_1} + B_2 \sigma_e^{n_2} (1 + \sin(3\theta)) / (1 - \bar{\varepsilon}^{cr} \cdot \sigma_e)^{m_2}] \Delta t.$$

С введением скалярного параметра поврежденности в пользовательскую подпрограмму `scrlaw.f` и проведения расчёта с адаптивным шагом по времени получены результаты с константами [24, 31], представленные на рис. 3(c). Кривая 1 получена в результате численного расчёта в программе Visual Studio, кривые 2 и 3 — результат компьютерного трёхмерного моделирования с учётом разносопротивляемости материала при ползучести при $n_1 \neq n_2$ [24] и $n_1 = n_2$ [31], а также с учётом поврежденности соответственно. Как видно, учёт разницы свойств ползучести-поврежденности даёт удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными. Также стоит отметить, что алгоритм учёта разносопротивляемости в пакете MSC.Marc чувствителен по времени расчёта процесса, что показано на рис. 39(b).

В результате конечно-элементного моделирования чистого изгиба балки в пакете MSC.Marc получено распределение деформаций ползучести (рис. 4(c)), распределение напряжений по высоте балке с учётом поврежденности материала (рис. 2(b)).

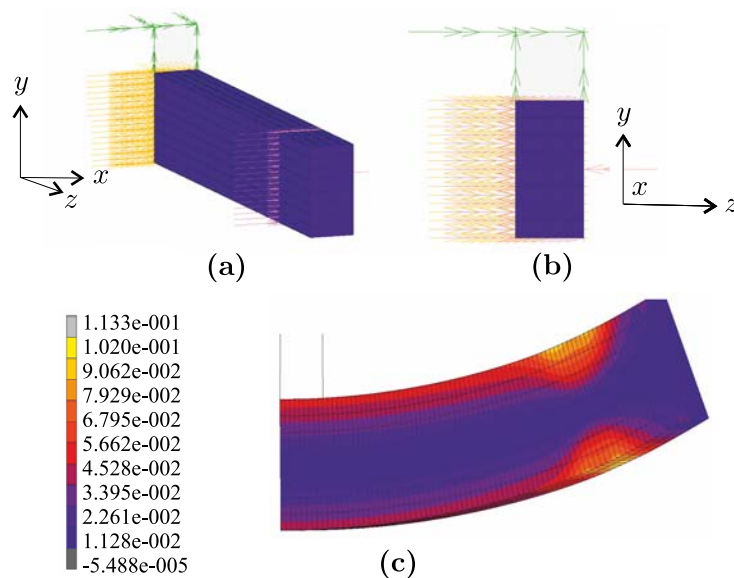


Рис. 4. Конечно-элементная модель заготовки

Видно, что так же происходит смещение нейтральной оси и алгоритм работает идентично реализованному численному методу в программе Visual Studio. Максимальное значение поврежденности в конечный момент времени достигло 0.86, что говорит о практическом разрушении материала в наиболее растянутом волокне при ползучести.

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

3.1. Постановка задачи

Перейдём к решению обратной задачи формообразования. Поиск момента, который необходимо приложить к балке в процессе деформирования для достижения целевой кривизны балки, проводится путём решения последовательности прямых задач чистого изгиба балок прямоугольного сечения. На каждом шаге производится сравнение полученных кривизн с целевым значением. Уточнение значений кривизн проводится с использованием метода оптимизации Нелдера — Мида [32, 33] с добавлением ограничений по времени формообразования элементов конструкций (рис. 5).

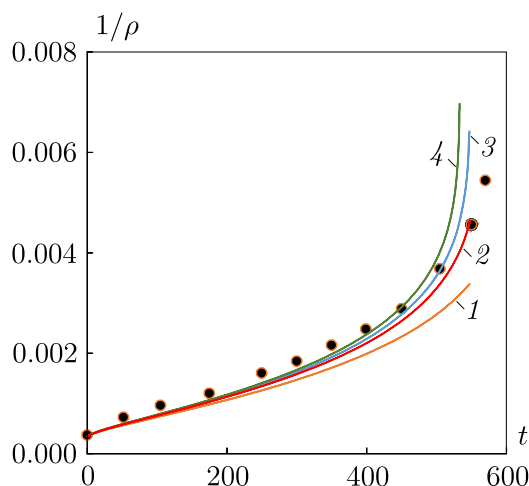


Рис. 5. Изменение кривизны балки $\varkappa = 1/\rho$ по времени t при различных изгибающих моментах M

Стоит отметить некоторые особенности реализованного метода. Метод Нелдера — Мида по сравнению с другими, более современными методами (например, алгоритм Левенберга — Марквардта, генетический алгоритм оптимизации) обладает следующими достоинствами: метод нулевого порядка — наиболее быстрый и надёжный из неградиентных методов оптимизации. Главный же его недостаток — отсутствие теории сходимости. Если рабочий симплекс находится далеко от оптимальной точки, а алгоритм производит большое число итераций, при этом мало изменяя значения функции, то решение этой проблемы заключается в запуске алгоритма несколько раз и ограничении числа итераций [32].

Рассмотрим этапы итераций алгоритма поиска значения изгибающего момента для достижения требуемой кривизны при формообразовании элементов конструкций. На первом этапе происходит подготовка данных: задаётся начальный симплекс метода Нелдера — Мида. Вершинами симплекса являются точки (M_i, χ_i) , отобранные по значениям интегрального квадратичного критерия. На втором этапе происходит сортировка данных. Из начального симплекса сортируются вершины, которым соответствуют три изгибающих момента M_i , полученные в ходе решения прямых задач чистого изгиба балок в условиях ползучести: момент M_1 с максимальным значением, M_2 со следующим значением и третий уже с наименьшим M_3 . Далее

определяется центр тяжести полученного многогранника. Затем проводится операция отражения: проектирование вершины симплекса с максимальным значением кривизны χ_i через центр тяжести. Далее проводится операция растяжения или сжатия многогранника. В случае сжатия добавляется новая точка. Итерационный процесс завершается после того, как получили требуемое значение кривизны χ прямоугольной балки. Алгоритм реализован в программном модуле на языке C++ в программе Visual Studio.

Рис. 5 представляет результаты действия алгоритма обратной задачи формообразования прямоугольной балки с учётом разницы свойств ползучести при растяжении и сжатии, а также поврежденности. Точками обозначены экспериментальные значения [24]. Кривая 1 отображает результаты при изгибающем моменте $M = 154.94$ Нм, кривая 2 — при $M = 156.41$ Нм, кривая 3 — при $M = 156.91$ Нм и кривая 4 — при $M = 158.87$ Нм. При решении данной задачи установлено, что для достижения требуемой целевой кривизны детали необходимо приложить изгибающий момент $M = 154.94$ Нм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено математическое моделирование прямой и обратной задач чистого изгиба балок из алюминиевого сплава АК4-1Т в процессе ползучести с учётом различия свойств при растяжении и сжатии и учётом поврежденности материала. Использовался скалярный параметр поврежденности, равный отношению текущей деформации к предельной при растяжении. Решение обратной задачи получено с использованием результатов решения последовательности прямых задач формообразования с применением метода оптимизации Нелдера — Мида. Учёт накопления повреждения в материале был добавлен в конечно-элементный пакет MSC.Marc, что позволило провести конечно-элементное моделирование чистого изгиба балок с удовлетворительной точностью. Предложенный подход можно применять не только для балок прямоугольного таврового сечения, но и для более сложных элементов конструкций, например для оребренных панелей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ribeiro F.C., Marinho E.P., Inforzato D.J., Costa P.R., Batalha G.F.* Creep age forming: a short review of fundamentals and applications // *J. Achiev. Mater. Manufactur. Engrg.* 2010. V. 43, N 1. P. 353–361.
2. *Luo H., Li W., Li Ch., Wan M.* Investigation of creep-age forming of aluminum lithium alloy stiffened panel with complex structures and variable curvature // *J. Adv. Manufactur. Technol.* 2017. V. 91, N 9–12. P. 3265–3271; <https://doi.org/10.1007/s00170-017-0004-z>
3. *Lam A.C.L., Shi Zh., Yang H., Li W., Davies C.M., Lin J., Zhou Sh.* Creep-age forming AA2219 plates with different stiffener designs and pre-form age conditions: experimental and finite element studies // *J. Mater. Process Technol.* 2015. V. 219. P. 155–163; <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2014.12.012>
4. *Бормотин К.С., Белых С.В., Вин Аунг.* Математическое моделирование обратных задач многоточечного формообразования в режиме ползучести с помощью реконфигурируемого устройства // *Вычисл. методы и программирование.* 2016. Т. 17. С. 258–267; <https://doi.org/10.26089/NumMet.v17r324>
5. *Горев Б.В., Панамарев В.А.* Метод интегральных характеристик для расчёта изгиба элементов конструкции // *Научно-техн. ведомости СПб. гос. политех. ун-та. Физ.-мат. науки.* 2013. № 177. С. 201–211.
6. *Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С.* Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолёта // *Прикл. математика и техн. физика.* 2010. Т. 51, № 4. С. 155–165.
7. *Zolochovsky A., Sklepus S., Hyde T. H., Becker A. A., Peravali S.* Numerical modeling of creep and creep damage in thin plates of arbitrary shape from materials with different behavior in tension and compression under plane stress conditions // *J. Numer. Meth. Engrg.* 2009. V. 80, N 11. P. 1406–1436; <https://doi.org/10.1002/nme.2663>

8. *Naumenko K., Altenbach H.* Modeling High Temperature Materials Behavior for Structural Analysis. Part I: Continuum Mechanics Foundations and Constitutive Models. London: Springer-Verl., 2016.
9. *Агапов В.П.* Моделирование стержней таврового сечения в расчётах строительных конструкций методом конечных элементов // Строит. механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 2. С. 55–59
10. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
11. *Никитенко А.Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: изд. ИГиЛ СО РАН, 1997.
12. *Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф.* Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: изд. ИГиЛ СО РАН, 1986.
13. *Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В.* Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // Физ. мезомеханика. 2015. Т. 18, № 4. С. 68–87.
14. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016.
15. *Радченко В.П., Кичаев П.Е.* Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов. Самара: изд. Самар. гос. техн. ун-та, 2011.
16. *Brovnan M.Ya.* Creep deformation of beams under compression and bending stresses // Mech. Solids. 2017. V. 52, N 1. P. 75–80; <https://doi.org/10.3103/S0025654417010095>
17. *Горев Б.В., Любашевская И.В., Панамарев В.А., Иявойнен С.В.* Описание процесса ползучести и разрушения современных конструкционных материалов с использованием кинетических уравнений в энергетической форме // Прикл. математика и техн. физика. 2014. Т. 55, № 6. С. 132–144.
18. *Кузнецов Е.Б., Леонов С.С.* Математическое моделирование чистого изгиба балки из разномодульного авиационного материала в условиях ползучести // Вестн. РУДН. Сер. Инж. исследования. 2015. № 1. С. 111–122.
19. *Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С.* Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и программирование. 2008. Т. 9. С. 346–365.
20. *Локощенко А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В.* Чистый изгиб балки в условиях ползучести из разносопротивляющегося материала // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 1(26). С. 66–73; <https://doi.org/10.14498/vsgtu1042>
21. *Sitar M., Kosel F., Brojan M.* Numerical and experimental analysis of elastic–plastic pure bending and spring back of beams of asymmetric cross-sections // J. Mech. Sci. 2015. V. 90. P. 77–88; <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.11.006>
22. *Merson R.H.* An operational methods for integration processes // Proc. Symp. on Data Processing. Salisbur: Weapons Research Establishment. 1957. P. 239–240.
23. *Мудров А.Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. Томск: РАСКО, 1991.
24. *Горев Б.В.* К расчёту на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса из материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды. 1973. № 14. С. 44–51.
25. MSC.Software Corporation // MSC. Marc Vol. A: Theory and User Information. 2014; <http://www.mssoftware.com/product/marc>
26. *Bathe K.J.* Finite Element Procedures in Engineering Analysis. N. Y.: Prentice-Hall, 1982.
27. *Бормотин К.С.* Итерационные численные методы компьютерного моделирования оптимальной формовки и клёпки тонкостенных панелей: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Комсомольск-на-Амуре. 2014.
28. MSC.Software Corporation // MSC. Marc Vol. D: User Subroutines and Special Routines. 2014; <http://www.mssoftware.com/product/marc>
29. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твёрдых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
30. *Рудаков К.Н.* UGS Femap 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. Киев: КПИ. 2011.

31. *Соснин О.В., Горев Б.В., Рубанов В.В.* Кручение квадратной пластинки из материала, разнотривляющегося растяжению и сжатию при ползучести // *Расчёты прочности судовых конструкций и механизмов.* 1976. № 117. С. 78–88.
32. *Nelder J. A., Mead R.* A simplex for function minimization // *Comput. J.* 1965. V. 7, N 4. P. 308–313.
33. *Городецкий С.Ю., Гришагин В.А.* Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация. Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 2007

UDC 539.376

**INVERSE PROBLEM OF PURE BEAM BENDING IN CREEP
CONDITIONS**© 2023 S. V. Boyko^a, A. Yu. Larichkin^b*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^aboykosv.hydro@gmail.com, ^blarichking@gmail.com

Received 03.05.2022, revised 27.10.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. The algorithm was proposed for solving the inverse problem of forming structural elements under creep conditions using the Nelder-Mead algorithm. The initial task of finding the forces that must be applied to obtain the required curvature of the part is reduced to a sequence of auxiliary direct problems of modeling the stress-strain state of pure bending of rectangular beams. This model, which takes into account the difference in the properties of the material in tension and compression, as well as the presence of accumulated damage in the material during creep, was verified by numerical methods and implemented in finite element program MSC Marc.

Keywords: rectangular beam, inverse problem, bending, creep, fracture, damage parameter, resistance to tension and compression.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.204

REFERENCES

1. Ribeiro F.C., Marinho E.P., Inforzato D.J., Costa P.R., Batalha G.F. Creep age forming: a short review of fundamentals and applications. *J. Achiev. Mater. Manufactur. Engrg.*, 2010, Vol. 43, No. 1, pp. 353–361.
2. Luo H., Li W., Li Ch., Wan M. Investigation of creep-age forming of aluminum lithium alloy stiffened panel with complex structures and variable curvature. *J. Adv. Manufactur. Technol.*, 2017, Vol. 91, No. 9-12, pp. 3265–3271; <https://doi.org/10.1007/s00170-017-0004-z>
3. Lam A.C.L., Shi Zh., Yang H., Li W., Davies C.M., Lin J., Zhou Sh. Creep-age forming AA2219 plates with different stiffener designs and pre-form age conditions: experimental and finite element studies. *J. Mater. Process Technol.*, 2015, Vol. 219, pp. 155–163; <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2014.12.012>
4. Bormotin K.S., Belykh S.V., Vin Aung. Matematicheskoe modelirovanie obratnykh zadach mnogotochechnogo formoobrazovaniya v rezhime polzuchesti s pomoshch'yu rekonfiguriruemogo ustroystva [Mathematical modeling of inverse multipoint forming problems in the creep mode using a reconfigurable tool]. *Vychisl. Metody i Program.*, 2016, Vol. 17, pp. 258–267 (in Russian); <https://doi.org/10.26089/NumMet.v17r324>
5. Gorev B. V., Panamarev V. A. The integrated characteristics method for calculation of a bend of design [The method of integral characteristics for calculating the bending of structural elements]. *Nauchno-Tekh. Ved. St-Peterburg. Gos. Politekh. Univ. Fiz.-mat. nauki*, 2013, No. 177, pp. 201–211 (in Russian).
6. Annin B. D., Oleinikov A. I., Bormotin K. S. Modeling of forming the wing panels the SSJ-100 aircraft. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2010, Vol. 51, No. 4, pp. 579–589.
7. Zolochovsky A., Sklepus S., Hyde T. H., Becker A. A., Peravali S. Numerical modeling of creep and creep damage in thin plates of arbitrary shape from materials with different behavior in tension and

- compression under plane stress conditions. *J. Numer. Meth. Engrg.*, 2009, Vol. 80, No. 11, pp. 1406–1436; <https://doi.org/10.1002/nme.2663>
8. Naumenko K., Altenbach H. Modeling High Temperature Materials Behavior for Structural Analysis. Part I: Continuum Mechanics Foundations and Constitutive Models. London: Springer-Verl., 2016.
 9. Agapov V.P. Modelirovanie sterzhnei tavorogo secheniya v raschetakh stroitel'nykh konstruksii metodom konechnykh elementov [Modeling of T-section rods in calculations of building structures by the finite element method]. *Stroit. Mekh. Inzhener. Konstruk. i Sooruzh.*, 2016, No. 2, pp. 55–59 (in Russian).
 10. Rabotnov Yu.N. Polzuchest' elementov konstruksii. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
 11. Nikitenko A.F. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskih materialov [Creep and long-term durability of metal materials]. Novosibirsk: Izd-vo Instituta Gidrodinamiki SO RAN, 1997 (in Russian).
 12. Sosnin O.V., Gorev B.V., Nikitenko A.F. Energeticheskii variant teorii polzuchesti [Energy variant of the creep theory]. Novosibirsk: Izd-vo Instituta Gidrodinamiki SO RAN, 1986 (in Russian).
 13. Volegov P.S., Gribov D.S., Trusov P.V. Povrezhdennost' i razrushenie: klassicheskie kontinual'nye teorii [Damage and destruction: classical continuum theories]. *Fiz. Mezomekh.*, 2015, Vol. 18, No. 4, pp. 68–87 (in Russian).
 14. Lokoshchenko A.M. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov [Creep and long-term strength of metals]. M.: Fizmatlit, 2016 (in Russian).
 15. Radchenko V.P., Kichaev P.E. Energeticheskaya kontseptsiya polzuchesti i vibropolzuchesti metallov [Energy concept of creep and vibration creep of metals]. Samara: Samar. Gos. Tekhn. Univ. Press, 2011 (in Russian).
 16. Brovman M.Ya. Creep deformation of beams under compression and bending stresses. *Mech. Solids*, 2017, Vol. 52, No. 1, pp. 75–80; <https://doi.org/10.3103/S0025654417010095>
 17. Gorev B.V., Lyubashevskaya I.V., Panamarev V.A., Iyavoynen S.V. Description of creep and fracture of modern construction materials using kinetic equations in energy form. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, Vol. 55, No. 6, pp. 1020–1030.
 18. Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Matematicheskoe modelirovanie chistogo izgiba balki iz raznomodul'nogo aviatsionnogo materiala v usloviyakh polzuchesti [Mathematical modeling of the net bending of a beam made of a multi-modulus aviation material under creep conditions]. *Vestn. RUDN. Ser. Inzh. Issled.*, 2015, No 1, pp. 111–122 (in Russian).
 19. Korobeinikov S.N., Oleinikov A.I., Gorev B.V., Bormotin K.S. Matematicheskoe modelirovanie protsessov polzuchesti metallicheskih izdelii iz materialov, imeyushchikh raznye svoystva pri rastyazhenii i szhatii [Mathematical modeling of creep processes of metal products made of materials having different properties under tension and compression]. *Vychisl. Metody i Program.*, 2008, Vol. 9, pp. 346–365 (in Russian).
 20. Lokoshchenko A.M., Agakhi K.A., Fomin L.V. Chisty izgib balki v usloviyakh polzuchesti iz raznosoprotivlyayushchegosya materiala [Net bending of a beam under creep conditions made of a highly resistant material]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, No. 1(26), pp. 66–73 (in Russian); <https://doi.org/10.14498/vsgtu1042>
 21. Sitar M., Kosel F., Brojan M. Numerical and experimental analysis of elastic–plastic pure bending and spring back of beams of asymmetric cross-sections. *J. Mech. Sci.*, 2015, Vol. 90, pp. 77–88; <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.11.006>
 22. Merson R.H. An operational methods for integration processes. Proc. Symp. on Data Processing. *Weapons Research Establishment*, 1957, pp. 239–240
 23. Mudrov A.E. Chislennye metody dlya PEVM na yazykakh Beisik, Fortran i Paskal' [Numerical methods for PCs in Basic, Fortran and Pascal languages.]. Tomsk: RASKO, 1991 (in Russian).
 24. Gorev B.V. K raschetu na neustanovivshuyusya polzuchest' izgibaemogo brusa iz materiala s raznymi kharakteristikami na rastyazhenie i szhatie [To calculate the unsteady creep of a bent beam made of a material with different tensile and compression characteristics]. *Dinamika Sploshnoi Sredy*, 1973, No. 14, pp. 44–51 (in Russian).

25. MSC. Software Corporation. *MSC. Marc Vol. A: Theory and User Information*, 2014; <http://www.mscsoftware.com/product/marc>
26. Bathe K.J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. N. Y.: Prentice-Hall, 1982.
27. Bormotin K.S. Iteratsionnye chislennyye metody komp'yuternogo modelirovaniya optimal'noi formovki i klepki tonkostennykh panelei: Dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk [Iterative numerical methods of computer modeling of optimal molding and riveting of thin-walled panels: Dis. ... doc. phys.-math. sci.]. Komsomol'sk-na-Amure, 2014 (in Russian).
28. MSC. Software Corporation. *MSC. Marc Vol. D: User Subroutines and Special Routines*, 2014; <http://www.mscsoftware.com/product/marc>
29. Korobeinikov S.N. Nelineinoe deformirovanie tverdykh tel [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2000 (in Russian).
30. Rudakov K.N. UGS Femap 10.2.0. Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruksii [Geometric and finite element modeling of structures]. Kiev: KPI, 2011 (in Russian).
31. Sosnin O.V., Gorev B.V., Rubanov V.V. Kruchenie kvadratnoi plastinki iz materiala, raznosoprotivlyayushchegosya rastyazheniyu i szhatiyu pri polzuchesti [Torsion of a square plate made of a material that resists stretching and compression during creep]. *Raschety Prochnosti Sudovykh Konstruksii i Mekhanizmov*, 1976, No. 117, pp. 78–88 (in Russian).
32. Nelder J. A., Mead R. A simplex for function minimization. *Comput. J.*, 1965, Vol. 7, No. 4, pp. 308–313.
33. Gorodetskii S.Yu., Grishagin V.A. Nelineinoe programmirovaniye i mnogoekstremal'naya optimizatsiya [Nonlinear programming and multi-extreme optimization]. N. Novgorod: NNGU Press, 2007 (in Russian).

УДК 681.786.4

АЛГОРИТМ РАСШИФРОВКИ ФАЗОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТРЁХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДИНАМИЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

© 2023 С. В. Двойнишников^a, Д. В. Куликов^b, В. Г. Меледин^c,
В. В. Рахманов^d

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^adv.s@mail.ru, ^bt913@yandex.ru, ^cmeledin@itp.nsc.ru,
^drahmanov@inbox.ru

Поступила в редакцию 31.08.2022 г.; после доработки 31.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Предложен алгоритм расшифровки фазовых изображений, обладающий алгоритмической сложностью $O(N \log N)$. Метод основан на итерационном поиске минимального отклонения модельной функции от результатов измерения. Применение алгоритма интервального поиска позволило существенно снизить вычислительную сложность алгоритма. Погрешность предложенного метода сравнима с погрешностью метода расшифровки фазовых изображений на основе аналитического решения системы уравнений, описывающих интенсивность на фазовых изображениях.

Ключевые слова: расшифровка фазовых изображений, трёхмерная геометрия, быстрый алгоритм.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.205

Задача расшифровки фазовых изображений актуальна для широкого спектра задач в области оптической диагностики трёхмерной геометрии объектов в теплофизических и гидрогазодинамических приложениях [1]. В системах на основе триангуляции и структурированного освещения либо интерферометрических системах по фазовым изображениям восстанавливают трёхмерный профиль измеряемого объекта [2]. Методы восстановления трёхмерного профиля на основе фазовой триангуляции активно развиваются и совершенствуются. Они основаны на формировании пространственно-модулированной засветки в виде параллельных полос с гармоническим изменением интенсивности и регистрации рассеянного излучения с направления, отличного от направления освещения. Наблюдаемые искажения в виде смещения фазы проецируемой гармонической засветки кодируют информацию о расстоянии до поверхности измеряемого объекта. Современное развитие методов фазовой триангуляции направлено на снижение времени измерения [3] для обеспечения возможности измерения геометрии движущихся объектов, разработки быстрых и удобных методов калибровки и увеличения точности измерения с использованием различных методов и подходов [4]. Вычисление начального фазового сдвига выполняют по набору изображений, между которыми вносится известный сдвиг фазы. При этом в случае, когда динамический диапазон фотоприёмника не согласован с источником освещения и светорассеивающими свойствами, часть фазовых сдвигов содержит недостоверные результаты и не может быть использована в вычислениях. Такая ситуация достаточно типична при измерении сложнопрофильных объектов с произвольными светорассеивающими свойствами поверхности [5]. При измерении сложнопрофильных объектов с меняющейся геометрией поверхности важно, с одной стороны, — максимально быстро выполнять измерения [6], а с другой — максимально быстро выполнять расшифровку полученных данных [7]. Как пра-

вило, данную задачу решают методами на основе гармонической регрессии либо на основе векторного представления системы трансцендентных уравнений, описывающих зависимость наблюдаемой интенсивности на фазовых изображениях. Тем не менее, такие подходы обладают рядом недостатков: Они показывают нестабильную работу в условиях случайных помех и требуют высоких вычислительных ресурсов, которые можно оценить как $O(N^2)$, где N — количество фазовых сдвигов. В данной работе предложен алгоритм расшифровки фазовых изображений, обладающий алгоритмической сложностью $O(N \log N)$, основанный на итерационном поиске минимального отклонения модельной функции от результатов измерения.

1. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Метод основан на итерационном поиске минимального отклонения модельной функции от результатов измерения. Экспериментальные данные, полученные в ходе измерения, имеют следующий вид:

$$I(x, y, i) = A(x, y) + V(x, y) \cos(\phi(x, y) + \delta(i)) + R(x, y), \quad i \in 1, \dots, N, \quad (1)$$

где $I(x, y, i)$ — распределение интенсивности на i -м изображении контролируемого объекта; $A(x, y)$ — распределение фоновой интенсивности; $V(x, y)$ — средняя видность; $\phi(x, y)$ — искомого распределение разности фаз, кодирующее информацию дальности объекта; $\delta(i)$ — вносимый сдвиг фазы между соседними изображениями структурированной засветки; $R(x, y)$ — интенсивность аддитивных шумов, регистрируемых фотоприёмником; N — число сдвигов. Значение фазы $\phi(x, y)$ требуется находить для каждого значения пары координат на изображении (x, y) . Для упрощения можно рассматривать значение интенсивности в одной точке с координатами (x, y) :

$$I(i) = A + V \cos(\phi + \delta(i)) + R, \quad i \in 1, \dots, N. \quad (2)$$

Значение фазы ϕ вычисляем с помощью следующего алгоритма. Ведём гармоническую функцию $G(i, \omega)$:

$$G(i, \omega) = \sin(\omega + \delta(i)), \quad i \in 1, \dots, N. \quad (3)$$

Строим дискретную функцию зависимости $G(I(i), \omega)$. Эта функция будет иметь форму эллипса и будет приближаться к прямой линии при $\omega \rightarrow \phi$. Следовательно, для вычисления ϕ нужно определить функционал, характеризующий отклонение функции $G(I(i), \omega)$ от прямой линии. Таким образом, для вычисления $\omega \rightarrow \phi$ нужно построить функционал $P(\omega) \rightarrow 0$:

$$P(\omega) = \sqrt{1/N \sum \left(Q(i, \omega) - \frac{\sum Q(i, \omega)}{N} \right)^2}, \quad (4)$$

$$Q(i, \omega) = I(i) - a(\omega) * G(i, \omega) - b(\omega), \quad (5)$$

$$a(\omega) = \frac{I(i_{\min}) - I(i_{\max})}{G(i_{\min}, \omega) - G(i_{\max}, \omega)}, \quad (6)$$

$$b(\omega) = I(i_{\min}) - a(\omega)G(i_{\min}, \omega), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} i_{\min} &= i, \text{ на котором достигается } \min\{I(i)\}, \\ i_{\max} &= i, \text{ на котором достигается } \max\{I(i)\}. \end{aligned} \quad (8)$$

В результате вычисляем значение ω , при котором функционал $P(\omega)$ принимает минимальное значение.

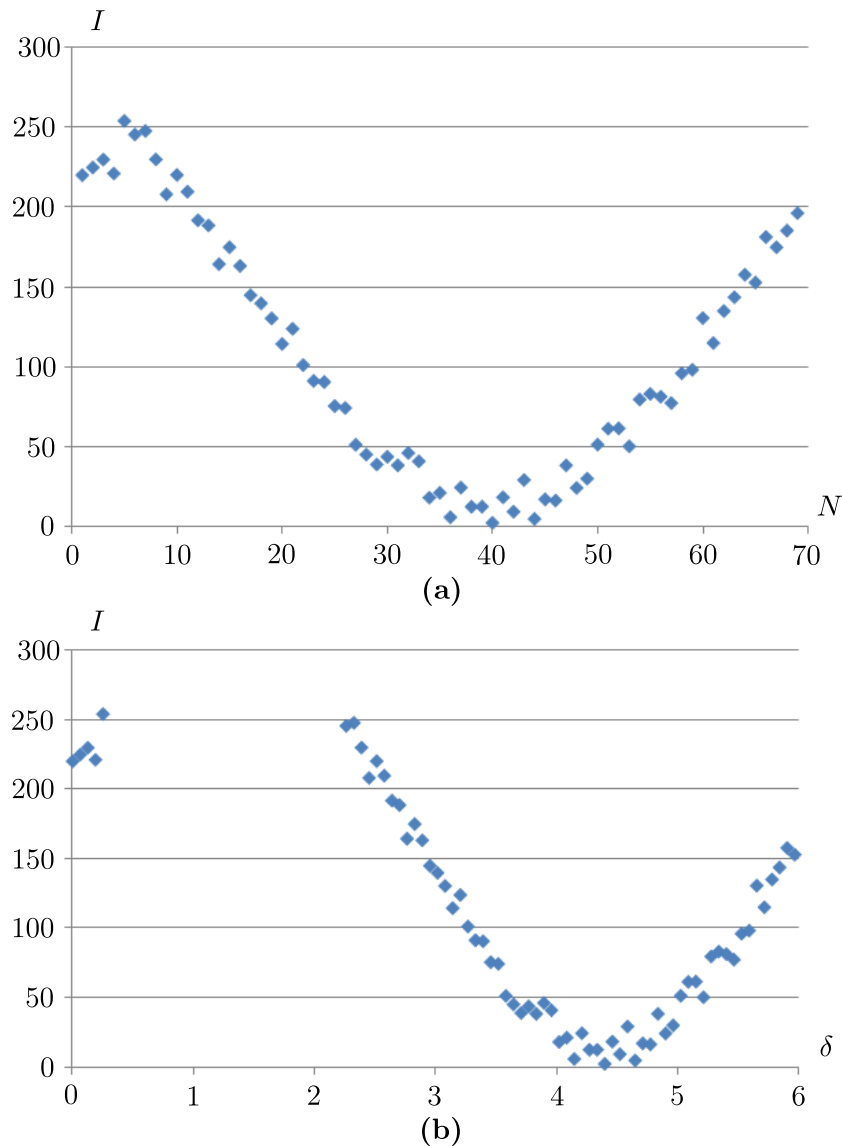


Рис. 1. Зависимость регистрируемой интенсивности от номера изображения (а) и от величины начального сдвига (б) после фильтрации изображений, значение интенсивности которых равно максимальному

Работа алгоритма показана на следующих рисунках. На рис. 1 представлены зависимости $I(i)$ и $I(\delta)$, на рис. 2 — зависимость $\delta(i)$. Рис. 3(а) и 3(б) показывают зависимость функции $G(I(i))$ при различных значениях ω . Если значение ω будет приближаться к значению начального сдвига фазы, функция $G(I(i))$ будет стремиться к прямой линии.

Физический смысл функции $P(\omega)$ — среднеквадратичное отклонение функции от прямой линии. Очевидно, что при совпадении ω с начальной фазой проецируемого гармонического сигнала величина $P(\omega)$ будет минимальна. На рис. 4 показана зависимость функции $P(\omega)$.

Из графика на рис. 4 видно, что функция $P(w)$ принимает минимальное значение при $w = 0.3$. Более того, учитывая, что функция $P(w)$ имеет непрерывную и гладкую форму, для поиска минимального значения можно использовать разновидность алгоритмов интервального поиска, что позволит существенно ускорить работу алгоритма.

Погрешность предложенного метода напрямую зависит от количества значений w , при которых будет вычисляться значения функции $P(w)$. Очевидно, что при реализации шага зна-

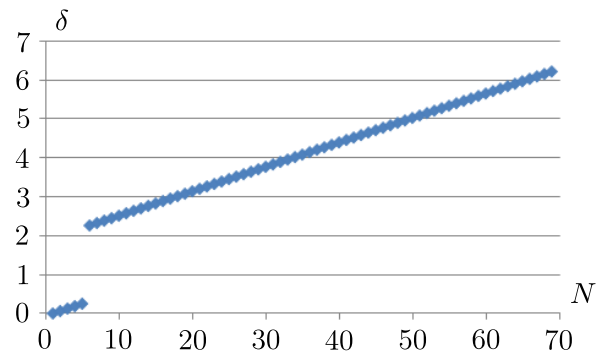


Рис. 2. Зависимость смещения начальной фазы проецируемого фазового изображения в зависимости от номера изображения

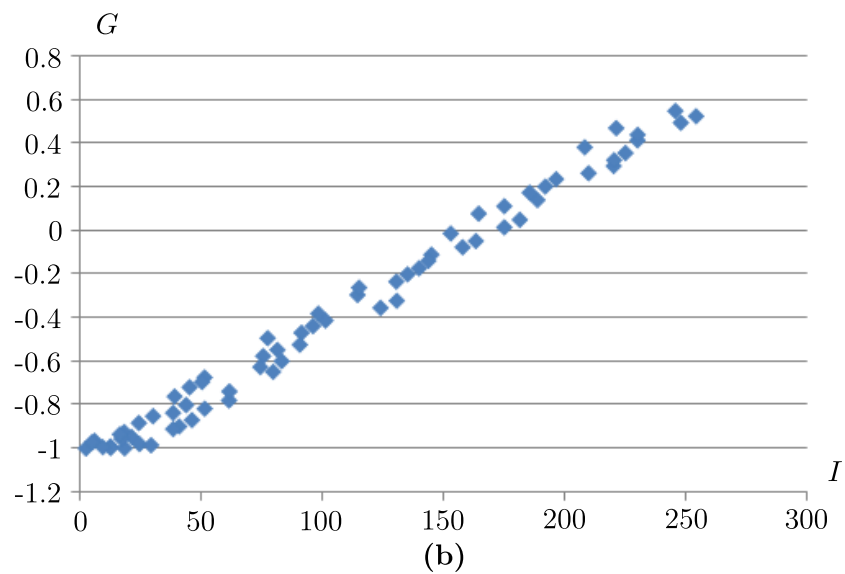
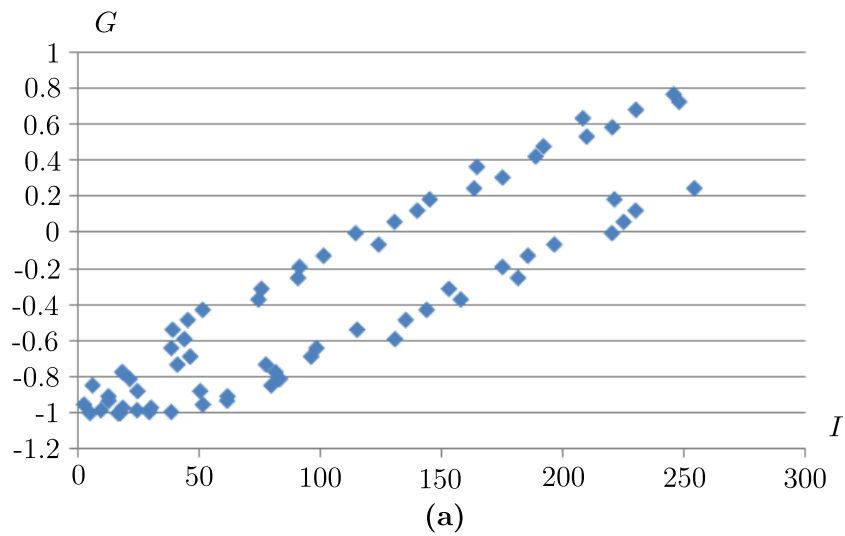


Рис. 3. Зависимость $G(I(i))$ при $w = 0$ (a) и $w = 0.3$ (b)

чений w меньше, чем погрешность измерения методом расшифровки фазовых изображений на основе аналитического решения системы уравнений, описывающих интенсивность на фазовых

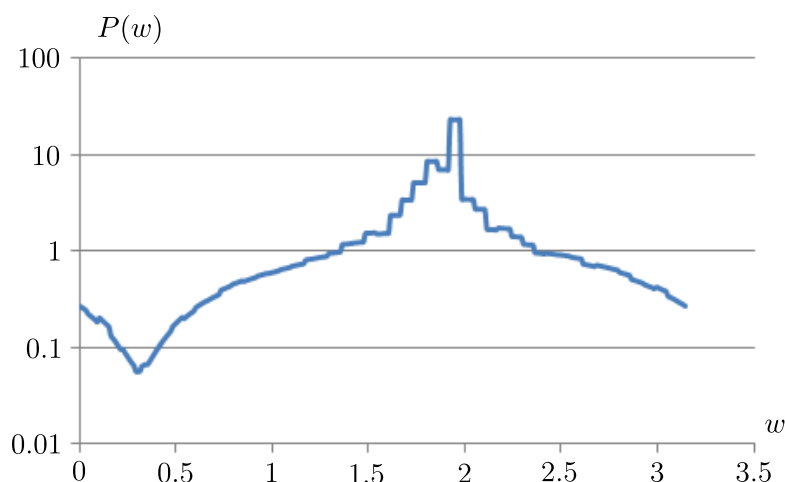


Рис. 4. Зависимость функции $P(w)$, которая принимает минимальное значение при $w = 0.3$ рад.

изображениях; итоговая погрешность предложенного метода будет на таком же уровне.

Предложен численный алгоритм быстрого поиска начального фазового сдвига на фазовых изображениях с произвольными межкадровыми сдвигами. Метод основан на итерационном поиске минимального отклонения модельной функции от результатов измерения. Применение алгоритма интервального поиска позволило существенно снизить вычислительную сложность алгоритма. Погрешность предложенного метода сравнима с погрешностью метода расшифровки фазовых изображений на основе аналитического решения системы уравнений, описывающих интенсивность на фазовых изображениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чугуй Ю.В. Фурье-оптика трёхмерных объектов постоянной толщины на основе дифракционных моделей // Автометрия. 2017. Т. 53, № 5. С. 90–105.
2. Zhang S. Recent progresses on real-time 3-D shape measurement using digital fringe projection techniques // Optics and Lasers Engrg. 2010. V. 48, N 2. P. 149–158.
3. Lohry W., Zhang S. High-speed absolute three-dimensional shape measurement using three binary dithered patterns // Optics Express. 2014. V. 22. P. 26752–26762.
4. Armangue X., Salvi J., Battle J. A comparative review of camera calibrating methods with accuracy evaluation // Pattern Recognition. 2002. V. 35, N 7. P. 1617–1635.
5. Двойнишников С.В., Куликов Д.В., Меледин В.Г. Оптоэлектронный метод бесконтактного восстановления профиля поверхности трёхмерных объектов сложной формы // Метрология. 2010. № 4. С. 15–27.
6. Zuo C., Tao T., Feng S., Huang L., Asundi A., Chen Q. Micro Fourier transform profilometry (μ FTP): 3D shape measurement at 10,000 frames per second // Optics and Lasers Engrg. 2018. V. 102. P. 70–91.
7. Двойнишников С.В., Меледин В.Г., Павлов В.А. Высокоскоростная обработка фазовых изображений с использованием параллельных вычислений // Автометрия. 2017. Т. 53, № 2. С. 56–62.

UDC 681.786.4

**ALGORITHM FOR INTERPRETATION OF PHASE IMAGES
FOR MEASURING THE THREE-DIMENSIONAL GEOMETRY
OF DYNAMIC OBJECTS****© 2023 S. V. Dvoynishnikov^a, D. V. Kulikov^b, V. G. Meledin^c,
V. V. Rakhmanov^d***Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^adv.s@mail.ru, ^bt913@yandex.ru, ^cmeledin@itp.nsc.ru,
^drahmanov@inbox.ru

Received 31.08.2022, revised 31.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The problem of decoding phase images is relevant for a wide range of problems in the field of optical diagnostics of three-dimensional geometry of objects in thermophysical and fluid dynamics applications. In systems based on triangulation and structured illumination or interferometric systems, a three-dimensional profile of the measured object is restored from phase images. When measuring complex-profile objects with varying surface geometry, it is important, on the one hand, to perform measurements as quickly as possible, and on the other hand, to decode the received data as quickly as possible. In this paper, we propose an algorithm for decoding phase images, which has an algorithmic complexity of $O(N \log N)$. The method is based on an iterative search for the minimum deviation of the model function from the measurement results. The use of the interval search algorithm made it possible to significantly reduce the computational complexity of the algorithm. The error of the proposed method is comparable to the error of the phase image decoding method based on the analytical solution of the system of equations describing the intensity in the phase images.

Keywords: decoding of phase images, three-dimensional geometry, fast algorithm.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.205

REFERENCES

1. Chugui Y.V. Fourier optics of constant-thickness three-dimensional objects on the basis of diffraction models. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2017, Vol. 53, No. 5, pp. 494–507; DOI: 10.3103/S8756699017050090
2. Zhang S. Recent progresses on real-time 3-D shape measurement using digital fringe projection techniques. *Optics and Lasers Engrg.*, 2010, Vol. 48, N 2, pp. 149–158.
3. Lohry W., Zhang S. High-speed absolute three-dimensional shape measurement using three binary dithered patterns. *Optics Express*, 2014, Vol. 22, pp. 26752–26762.
4. Armangue X., Salvi J., Battle J. A comparative review of camera calibrating methods with accuracy evaluation. *Pattern Recognition*, 2002, Vol. 35, No. 7, pp. 1617–1635.
5. Dvoynishnikov S.V., Kulikov D.V., Meledin V.G. Optoelectronic method of contactless reconstruction of the surface profile of complexly shaped three-dimensional objects. *Measurement Techniques*, 2010, Vol. 53, No. 6, pp. 648–656; DOI: 10.1007/s11018-010-9556-0
6. Zuo C., Tao T., Feng S., Huang L., Asundi A., Chen Q. Micro Fourier transform profilometry (μ FTP): 3D shape measurement at 10,000 frames per second. *Optics and Lasers Engrg.*, 2018, Vol. 102, pp. 70–91.

7. Dvoynishnikov S.V., Meledin V.G., Pavlov V.A. High-speed processing of phase images with parallel computations. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2017, Vol. 53, No. 2, p. 145–150; DOI: 10.3103/S8756699017020066

УДК 517.953:517.958:624.27

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

© 2023 У. Д. Дурдиев^{1,2,a,b}, З. Р. Бозоров^{2,c}

¹ Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, 11, г. Бухара 200117, Узбекистан,

² Бухарское отделение института математики им. В. И. Романовского,
ул. М. Икбол, 11, г. Бухара 200117, Узбекистан,

E-mails: ^aumidjan93@mail.ru, ^bu.d.durdiev@buxdu.uz,
^czavqiddinbozorov2011@mail.ru

Поступила в редакцию 22.10.2022 г.; после доработки 01.11.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Проведено исследование прямой задачи для колебания однородной балки конечной длины с нелокальными по времени условиями. Получены необходимые и достаточные условия существования решения прямой задачи. Изучается обратная задача по определению коэффициента, зависящего от времени при младшей производной. С помощью собственных чисел и собственных функций задача сводится к системе интегральных уравнений. С помощью принципа Банаха показаны существование и единственность решения обратных задач.

Ключевые слова: обратная задача, нелокальные условия, колебания балки, условие переопределения, собственные функции, существование, единственность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.206

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании и строительстве любых зданий важную роль отводят балкам. Этот конструктивный элемент отвечает за перераспределение нагрузок и предотвращение излома, растрескивания и разрушения отдельных частей сооружения. Поэтому ещё на стадии проектирования здания важно правильно подобрать балку, которая не только соответствует конкретным расчётным показателям, но и выдержит постоянное давление. Большинство задач о колебаниях стержней, балок и пластин играют важную роль в строительной механике, теории устойчивости ходовых валов и приводят к дифференциальным уравнениям высших порядков [1, 2].

В последние годы возрос интерес к исследованию прямых и обратных задач для уравнения колебаний балки. В работе [3] проведён анализ публикаций и полученных результатов в области динамического поведения неоднородных балок и стержней по материалам зарубежной печати. Для уравнения колебаний балки в работах [4–7] исследуются начальные прямые задачи с различными граничными условиями на концах. В [8] рассмотрена прямая начальная краевая задача и для неё изучается обратная задача по определению зависящего от времени коэффициента жёсткости балки. Численные решения уравнения поперечных колебаний балки приведены в работах [9–12]. В [13, 14] представлены приближённые методы решения прямых и обратных задач, описываемых неоднородным уравнением Бернулли — Эйлера колебаний

балки. В [15] получено аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида.

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики [16]. В [17, 18] рассматриваются задачи по определению одно- и двумерных ядер в интегродифференциальных уравнениях для вязкоупругих сред. Обратные задачи для интегродифференциальных уравнений в частных производных, связанные с восстановлением ядра (памяти) в интегральном члене этого уравнения, исследуются в работах [19–22]. Численные методы нахождения решения обратных динамических задач рассмотрены в [23–25].

В данной работе рассмотрены прямая задача с нелокальными по времени и обратная задача с интегральными условиями переопределения по определению коэффициента, зависящего от времени при младшей производной для уравнения колебания балки.

1. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Рассмотрим балку длиной l , опирающуюся на концы. Под действием внешней силы $G(x, t)$ вынужденные изгибные поперечные колебания балки описываются уравнением четвёртого порядка

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} + Q(t)u = G(x, t),$$

где ρ — плотность балки, S — площадь поперечного сечения балки, E — модуль упругости материала балки, J — момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси и по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жёсткости $Q(t)$.

Разделив на ρS , запишем это уравнение в следующем виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u = f(x, t), \quad (x, t) \in D, \quad (1)$$

где $a^2 = EJ/\rho S$, $q(t) = Q(t)/\rho S$ и $f(x, t) = G(x, t)/\rho S$. Уравнение (1) рассмотрим в прямоугольной области $D = \{(x, t) \mid 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$, $D_T := \bar{D}$, где l — длина балки, T — временной интервал с нелокальными начальными

$$u(x, 0) + \delta_1 u(x, T) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) + \delta_2 u_t(x, T) = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

граничными условиями

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и условиями согласования

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0, \quad \varphi(l) = \psi(l) = 0.$$

В прямой задаче требуется определить функцию

$$u(x, t) \in C(\bar{D}) \cap C_{x,t}^{4,2}(D), \quad (4)$$

удовлетворяющую равенствам (1)–(3), при положительных числах δ_1 , δ_2 и заданных числах a , l , T и достаточно гладких функциях $q(t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

В данной работе изучается следующая обратная задача: требуется найти коэффициент $q(t)$, $t \in [0, T]$, если известно условие переопределения:

$$\int_0^l h(x)u(x, t) dx = H(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где $h(x)$, $H(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие следующим условиям согласования:

$$\int_0^l h(x)\varphi(x) dx = H(0) + \delta_1 H(T), \quad \int_0^l h(x)\psi(x) dx = H'(0) + \delta_2 H'(T), \quad H(t) \neq 0. \quad (6)$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

В уравнении (1) перенесём слагаемое $q(t)u(x, t)$ в правую часть и введём обозначение $F(x, t) = f(x, t) - q(t)u(x, t)$. Таким образом получаем следующее уравнение $u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = F(x, t)$.

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad (7)$$

где

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x, t) \sin \mu_k x dx, \quad X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_k x, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}, \quad (8)$$

Применяя формальную схему метода Фурье и используя (1), (2), получим

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; q, u), \quad \lambda_k = a\mu_k^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad 0 < t \leq T, \quad (9)$$

$$u_k(0) + \delta_1 u_k(T) = \varphi_k, \quad u_k'(0) + \delta_2 u_k'(T) = \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где

$$F_k(t; q, u) = f_k(t) - q(t)u_k(t), \quad (11)$$

$$f_k(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x, t) \sin \mu_k x dx, \quad (12)$$

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \sin \mu_k x dx, \quad \psi_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \sin \mu_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Решение задачи (9), (10) можно представить в виде [26]

$$u_k(t) = \frac{1}{\rho_k(T)} \Phi_k(t) + \int_0^T G_k(t, s) F_k(s; q, u) ds, \quad (14)$$

где

$$\rho_k(T) = 1 + (\delta_1 + \delta_2) \cos \lambda_k T + \delta_1 \delta_2, \quad (15)$$

$$\Phi_k(t) = \varphi_k (\cos \lambda_k t + \delta_2 \cos \lambda_k (T - t)) + \frac{\psi_k}{\lambda_k} (\sin \lambda_k t - \delta_1 \sin \lambda_k (T - t)),$$

$$G_k(t, s) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_k \rho_k(T)} [\delta_1 \sin \lambda_k(T-t) \cos \lambda_k s + \delta_2 \cos \lambda_k(T-t) \sin \lambda_k s + \delta_1 \delta_2 \sin \lambda_k(s-t)], & s \in [0, t], \\ -\frac{1}{\lambda_k \rho_k(T)} [\delta_1 \sin \lambda_k(T-t) \cos \lambda_k s + \delta_2 \cos \lambda_k(T-t) \sin \lambda_k s + \delta_1 \delta_2 \sin \lambda_k(s-t)] + \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k(s-t), & s \in [t, T]. \end{cases} \quad (16)$$

Подставляя (14) в (7), получим

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho_k(T)} \Phi_k(t) + \int_0^T G_k(t, s) F_k(s; q, u) ds \right\} \sin \mu_k x. \quad (17)$$

На основании полноты системы $X_k(x)$ из (8) в пространстве $L_2[0, l]$ можно доказать единственность решения задачи (1)–(4). Действительно, пусть существуют различные функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – решения данной задачи. Тогда их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ есть решение однородной задачи (1)–(4), где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $F(x, t) \equiv 0$. Тогда $\varphi_n \equiv 0$, $\psi_n \equiv 0$, $F_n(t) \equiv 0$ и из (14) получим $u_k(t) \equiv 0$, что на основании (8) равносильно равенству

$$\int_0^l u(x, t) \sin \mu_k x dx = 0.$$

Отсюда $u(x, t) = 0$ почти всюду в $[0, l]$ и при любом $t \in [0, T]$. В силу условия (4) находим $u(x, t) \equiv 0$ на \bar{D} . Тем самым единственность решения задачи (1)–(4) доказана.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится

Теорема 1 [27, с. 44]. Пусть $A(t, s)$, $B(t, s)$ – функции из класса $C(D, R_+)$, неубывающие по $t \in [a, b]$ для каждого $s \in [a, b]$, и

$$u(t) \leq k + \int_a^t A(t, s) u(s) ds + \int_a^b B(t, s) u(s) ds, \quad t \in [a, b], \quad (18)$$

где k – положительная постоянная. Если

$$p(t) = \int_a^b B(t, s) \exp \left(\int_0^s A(s, \sigma) d\sigma \right) ds < 1, \quad t \in [a, b],$$

тогда

$$u(t) \leq \frac{k}{1 - p(t)} \exp \left(\int_a^t A(t, s) ds \right), \quad t \in [a, b]. \quad (19)$$

Подставляя функцию $F_k(t; q, u)$ из (11) в (14), получим

$$u_k(t) = \frac{1}{\rho_k(T)} \Phi_k(t) + \int_0^T f_k(s) G_k(t, s) ds - \int_0^T q(s) u_k(s) G_k(t, s) ds.$$

Оценивая функцию $u_k(t)$ при $t \in [0, T]$, получим следующее интегральное неравенство:

$$|u_k(t)| \leq \beta(1 + \delta_2)|\varphi_k| + \frac{\beta(1 + \delta_1)}{\lambda_k}|\psi_k| + \frac{\beta}{\lambda_k}\Delta_1 \int_0^T |f_k(s)| ds + \frac{\beta}{\lambda_k^2} \int_t^T |f_k(s)| ds \\ + \frac{\tilde{q}\beta}{\lambda_k}\Delta_1 \int_0^t |u_k(s)| ds + \frac{\tilde{q}\beta}{\lambda_k} \int_0^T (\Delta_1 + \frac{1}{\lambda_k})|u_k(s)| ds,$$

где $\Delta_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2$.

Применяя теорему 1 к этому соотношению, получим следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $0 < \frac{C_{2k}}{C_{1k}}(e^{C_{1k}T} - 1) < 1$, тогда справедлива оценка

$$|u_k(t)| \leq \lambda_k \tilde{C} g_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где

$$C_{1k} = \frac{\tilde{q}\beta}{\lambda_k}\Delta_1, \quad C_{2k} = \frac{\tilde{q}\beta}{\lambda_k}(\Delta_1 + 1/\lambda_k), \\ \tilde{C} = \frac{\Delta_1 l^2}{a\pi^2\Delta_1(2 - e^{C_{1k}T}) + e^{C_{1k}T} - 1}, \quad \tilde{q} = \max_{s \in [0, T]} |q(s)|, \quad k = 1, 2, \dots, \\ g_k = \beta(1 + \delta_2)|\varphi_k| + \frac{\beta(1 + \delta_1)}{\lambda_k}|\psi_k| + \frac{\beta}{\lambda_k} \left(\Delta_1 + \frac{l^2}{a\pi^2} \right) \int_0^T |f_k(s)| ds, \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Далее, учитывая (21), из оценки (20) получим

$$|u_k(t)| \leq \bar{C}_1(\lambda_k|\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|),$$

где $\|f_k\| = \max_{0 \leq t \leq T} |f_k(t)|$. Используя равенство (9), получим оценку для $u_k''(t)$:

$$|u_k''(t)| \leq \bar{C}_2(\lambda_k^3|\varphi_k| + \lambda_k^2|\psi_k| + \lambda_k^2\|f_k(t)\| + \tilde{q}|u_k|) \leq \bar{C}_2(\tilde{q} + \lambda_k^2)(\lambda_k|\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|).$$

Таким образом, доказали следующую лемму.

Лемма 2. При любом $t \in [0, T]$ и для достаточно больших k справедливы оценки

$$|u_k(t)| \leq \bar{C}_1(k^2|\varphi_k| + |\psi_k| + \|f_k(t)\|_C), \\ |u_k''(t)| \leq \bar{C}_2(k^6|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^4\|f_k(t)\|_C);$$

здесь и далее \bar{C}_i — положительные постоянные.

Формально из (7) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t) \sin \mu_k x, \quad (22)$$

$$u_{xxxx} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 u_k(t) \sin \mu_k x. \quad (23)$$

Ряды (7), (22) и (23) при любых $(x, t) \in \bar{D}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$\bar{C}_3 \sum_{k=1}^{\infty} (k^6|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^4\|f_k(t)\|_C). \quad (24)$$

Имеет место следующая

Лемма 3. *Если выполнены условия*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in C^6[0, l], \quad \varphi^{(7)}(x) \in L_2[0, l], \\ \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = \varphi^{(6)}(0) = \varphi^{(6)}(l) &= 0, \\ \psi(x) &\in C^4[0, l], \quad \psi^{(5)}(x) \in L_2[0, l], \\ \psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = \psi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(l) &= 0, \\ f(x, t) &\in C(\bar{D}) \cap C_x^4(D), \quad f_{xxxxx}^{(5)}(x, t) \in L_2(D), \\ f(0, t) = f(l, t) = f''_{xx}(0, t) = f''_{xx}(l, t) f_{xxxx}^{(4)}(0, t) = f_{xxxx}^{(4)}(l, t) &= 0, \end{aligned}$$

то имеют место равенства

$$\varphi_k = \frac{1}{\mu_k^7} \varphi_k^{(7)}, \quad \psi_k = \frac{1}{\mu_k^5} \psi_k^{(5)}, \quad f_k(t) = \frac{1}{\mu_k^5} f_k^{(5)}(t), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(7)} &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(7)}(x) \cos(\mu_k x) dx, \quad \psi_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(5)}(x) \cos(\mu_k x) dx, \\ f_k^{(5)}(t) &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_{xxxxx}^{(5)}(x, t) \cos(\mu_k x) dx, \end{aligned}$$

и справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_k^{(7)}|^2 &\leq \|\varphi^{(7)}\|_{L_2[0, l]}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_k^{(5)}|^2 \leq \|\psi^{(5)}\|_{L_2[0, l]}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} |f_k^{(5)}(t)|^2 &\leq \|f^{(5)}(t)\|_{L_2[0, l] \times C[0, T]}. \end{aligned} \quad (26)$$

Берём по частям интегралы в равенствах (12) и (13) несколько раз: интегралы, имеющие подынтегральные функции $f(x, t)$ и $\psi(x)$ — пять раз, интеграл, имеющий подынтегральную функцию $\varphi(x)$ — семь раз. Учитывая условия леммы 2, получим равенства (25). Неравенства (2) представляют собой неравенства Бесселя для коэффициентов разложений Фурье функций $\varphi_k^{(7)}$ и $\psi_k^{(5)}$ по системе косинусов $\{\sqrt{2/l} \cos(\mu_k x)\}$ на интервале $[0, l]$. Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, то в силу представлений (25) и (2) ряды (7), (22) и (23) сходятся равномерно в прямоугольнике \bar{D} . Следовательно, функция (17) удовлетворяет соотношениям (1)–(3).

3. ИССЛЕДОВАНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Умножив обе части уравнения (1) на $h(x)$ и проинтегрировав от 0 до l по x , с учётом условий (5) получим

$$q(t) = [H(t)]^{-1} \left\{ \int_0^l f(x, t) h(x) dx - H''(t) - a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 u_k(t) h_k \right\}, \quad (27)$$

где $u_k(t)$ определяется через (14), $h_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l h(x) \sin \mu_k x dx$ — коэффициент Фурье.

После подстановки (14) в (27), находим следующее интегральное уравнение относительно функции $q(t)$:

$$q(t) = [H(t)]^{-1} \left\{ \int_0^l f(x, t) h(x) dx - H''(t) - a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 h_k \left(\frac{\Phi_k(t)}{\rho_k(T)} + \int_0^T G_k(t, s) F_k(s; q, u) ds \right) \right\}. \quad (28)$$

Рассмотрим функциональное пространство $B_{2,T}^7$ [28], множество всех функций вида (7), рассматриваемых в D_T с нормой $\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^7} = J_T(u)$, где $u_k(t) \in C[0, T]$, и

$$J_T(u) \equiv \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} < +\infty.$$

В дальнейшем мы будем обозначать через E_T^7 топологическое произведение $B_{2,T}^7 \times C[0, T]$, где норма элемента $z = \{u, q\}$ определяется по формуле $\|z\|_{E_T^7} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^7} + \|q(t)\|_{C[0,T]}$. Известно, что пространства $B_{2,T}^7$ и E_T^7 являются банаховыми пространствами [29].

Теперь рассмотрим оператор $\Lambda(u, q) = \{\Lambda_1(u, q), \Lambda_2(u, q)\}$ в пространстве E_T^7 , где

$$\Lambda_1(u, q) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \sin \mu_k x, \quad \Lambda_2(u, q) = \tilde{q}(t),$$

и функции $\tilde{u}_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, и $\tilde{q}(t)$ равны правым частям равенств (14) и (28) соответственно.

Нетрудно видеть, что при условиях $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$, $1 + \delta_1 \delta_2 > \delta_1 + \delta_2$, имеем

$$\frac{1}{\rho_k(T)} \leq \frac{1}{1 - (\delta_1 + \delta_2) + \delta_1 \delta_2} \equiv \beta > 0.$$

Учитывая последнее соотношение, получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} &\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \beta (1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} \\ &+ \sqrt{\frac{2}{l}} \beta (1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{1/2} + \sqrt{\frac{2}{l}} \Delta_2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |f_k(s)|)^2 ds \right)^{1/2} \\ &+ \sqrt{\frac{2}{l}} \Delta_2 T \|q(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|[H(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| \int_0^l f(x, t) h(x) dx - H''(t) \right\|_{C[0,T]} \right. \\ &\left. + a^2 \sqrt{\frac{l}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} h_k^2 \right)^{1/2} \left[\beta (1 + \delta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta(1 + \delta_1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |\psi_k|)^2 \right)^{1/2} + \Delta_2 \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^5 |f_k(s)|)^2 ds \right)^{1/2} \\
 & \left. + \Delta_2 T \|q(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right\}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

где $\Delta_2 = 1 + 2\beta(\delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2)$. Тогда из (3) и (3) соответственно находим

$$\begin{aligned}
 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} & \leq \frac{2\beta}{l}(1 + \delta_2) \|\varphi^{(7)}(x)\|_{L_2[0,l]} + \frac{2\beta}{l}(1 + \delta_1) \|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2[0,l]} \\
 & + \frac{2\beta}{l} \Delta_2 \sqrt{\frac{2T}{l}} \|f_{xxxx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \sqrt{\frac{2}{l}} \Delta_2 T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} & \leq \| [H(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left\{ \left\| \int_0^l f(x, t) h(x) dx - H''(t) \right\|_{C[0,T]} \right. \\
 & + a^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} h_k^2 \right)^{1/2} \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{(7)}(x)\|_{L_2[0,l]} + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2[0,l]} \right. \\
 & \left. \left. + \Delta_2 \sqrt{\frac{2T}{l}} \|f_{xxxx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} + \sqrt{\frac{2}{l}} \Delta_2 T \|q(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

или

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k^7 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{1/2} \leq P_1(T) + Q_1(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (31)$$

$$\|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq P_2(T) + Q_2(T) \|q(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (32)$$

где

$$P_1(T) = \frac{2\beta}{l}(1 + \delta_2) \|\varphi^{(7)}(x)\|_{L_2[0,l]} + \frac{2\beta}{l}(1 + \delta_1) \|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2[0,l]} + \frac{2\beta}{l} \Delta_2 \sqrt{\frac{2T}{l}} \|f_{xxxx}(x, t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$Q_1(T) = \sqrt{\frac{2}{l}} \Delta_2 T,$$

$$\begin{aligned}
 P_2(T) = \| [H(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} & \left\{ \left\| \int_0^l f(x, t) h(x) dx - H''(t) \right\|_{C[0,T]} \right. \\
 & + a^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} h_k^2 \right)^{1/2} \left[\beta(1 + \delta_2) \|\varphi^{(7)}(x)\|_{L_2[0,l]} + \beta(1 + \delta_1) \|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2[0,l]} \right. \\
 & \left. \left. + \Delta_2 \sqrt{\frac{2T}{l}} \|f_{xxxx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$Q_2(T) = a^2 \| [H(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-6} h_k^2 \right)^{2/l} \sqrt{\frac{l}{2}} \Delta_2 T.$$

Из неравенств (31) и (32) получаем

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^7} + \|\tilde{q}(t)\|_{C[0,T]} \leq P(T) + Q(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^7(x,t)}, \quad (33)$$

где $P(T) = P_1(T) + P_2(T)$, $Q(T) = Q_1(T) + Q_2(T)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, леммы 2, равенство (6) и условие

$$(P(T) + 2)^2 Q(T) < 1, \quad (34)$$

тогда задача (1)–(5) имеет единственное решение в шаре $B = B_R(\|z\|_{E_{2,T}^7}) \leq R = P(T) + 2$.

Замечание. Неравенство (34) выполняется при достаточно малых значениях T .

Доказательство. Обозначим $z = (u(x, t), q(t))^*$ и запишем уравнения (17), (28) в операторном виде:

$$z = Az, \quad (35)$$

где $A = (A_1, A_2)^*$, $A_1(z)$ и $A_2(z)$ определяются правыми частями равенств (17), (28) соответственно.

Аналогично из (33) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in B_R$ справедливы следующие оценки:

$$\|Az\|_{E_{2,T}^7} \leq P(T) + Q(T)\|q(t)\|_{C[0,T]}\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^7} \leq P(T) + Q(T)(P(T) + 2)^2, \quad (36)$$

$$\|Az_1 - Az_2\|_{E_{2,T}^7} \leq Q(T)R(\|q_1(t) - q_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x, t) - u_2(x, t)\|_{B_{2,T}^7}). \quad (37)$$

Тогда в силу (34) из (36) и (37) следует, что оператор A действует в шаре $B = B_R$ и удовлетворяет условиям принципа сжимающего отображения. Следовательно, по теореме Банаха оператор A имеет единственную неподвижную точку $\{u, q\}$ в шаре $B = B_R$, являющуюся решением операторного уравнения(35). \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована однозначная разрешимость нелокальной по времени обратной краевой задачи для уравнения колебания балки с интегральным условием переопределения. Рассматриваемая задача в определённом смысле сведена к вспомогательной задаче, и с использованием принципа сжимающих отображений установлены единственные условия существования решения эквивалентной задачи. На основании эквивалентности этих задач доказывается теорема существования и единственности решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
2. Крылов А.Н. Вибрация судов. Л.; М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
3. Гусев Б.В., Саурин В.В. О колебаниях неоднородных балок // Инж. вестн. Дона. 2017; <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312>
4. Sabitov K.B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams // Differ. Equ. 2017. V. 53, N 1. P. 89–100; DOI: 10.1134/S0012266117010086
5. Sabitov K.B. Initial-boundary value problems for the beam vibration equation with allowance for its rotational motion under bending // Differ. Equ. 2021. V. 57, N 3. P. 342–352; DOI: 10.1134/S0012266121030071
6. Сабитов К.Б., Фадеева О.В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66; DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1845>

7. Baysal O., Hasanov A. Solvability of the clamped Euler–Bernoulli beam equation // Appl. Math. Lett. 2019. V. 93. P. 85–90; <https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.02.006>
8. Durdiev U.D. Inverse problem of determining an unknown coefficient in the beam vibration equation // Differ. Equ. 2022. V. 58, N 1. P. 37–44; DOI: 10.1134/S0012266122010050
9. Tan G., Shan J., Wu Ch., Wang W. Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions // Adv. Mech. Engrg. 2017. V. 9, N 11. P. 1–17; DOI: 10.1177/1687814017737261
10. Moaveni S., Hyde R. Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data // Inverse Probl. Sci. Engrg. 2016. V. 24, N 6. P. 990–1010; DOI: 10.1080/17415977.2015.1088539
11. Chang J.D., Guo B.Z. Identification of variable spacial coefficients for a beam equation from boundary measurements // Automatica. 2007. V. 43. P. 732–737; DOI: 10.1016/j.automatica.2006.11.002
12. Huang Ch.H., Shih Ch.Ch. An inverse problem in estimating simultaneously the time-dependent applied force and moment of an Euler–Bernoulli beam // CMES. 2007. V. 21, N 3. P. 239–254.
13. Maciag A., Pawinska A. Solution of the direct and inverse problems for beam // Comput. Appl. Math. 2016. V. 35. P. 187–201; DOI 10.1007/s40314-014-0189-9
14. Maciag A., Pawinska A. Solving direct and inverse problems of plate vibration by using the Trefftz functions // J. Theor. Appl. Mech. 2013. V. 51, N 3. P. 543–552.
15. Карчевский А.Л. Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 48–68; DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.404
16. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
17. Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 553–572; DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.307>
18. Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А. Задача об определении двумерного ядра в системе интегродифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80; DOI: <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2020.23.205>
19. Durdiev U.D. A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Euras. J. Math. Comput. Appl. 2019. V. 7, N 2. P. 4–19; DOI: 10.32523/2306-6172-2019-7-2-4-19
20. Durdiev U.D., Totieva Zh.D. A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Math. Meth. Appl. Sci. 2019. V. 42, N 18. P. 7440–7451; DOI: 10.1002/mma.5863
21. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor // Math. Meth. Appl. Sci. 2022. V. 45, N 14. P. 8374–8388; DOI: 10.1002/mma.7133
22. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain // Ukr. Math. J. 2022. V. 73, N 11. P. 1723–1740; DOI: 10.1007/s11253-022-02026-0
23. Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г. Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // Сиб. журн. вычисл. математики. 2001. Т. 4, № 3. С. 259–268.
24. Карчевский А.Л. Определение возможности горного удара в угольном пласте // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 35–43; DOI: <https://doi.org/10.17377/sibjim.2017.20.405>
25. Дурдиев У.Д. Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 179–189; DOI: 10.33048/semi.2020.17.013
26. Megraliev Ya.T., Azizbayov E.I. A time-nonlocal inverse problem for a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2021. N 28. P. 1–12; <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2021.1.28>

27. *Pachpette B.* Integral and Finite Difference Inequalities and Applications. Elsevier, 2006 (North-Holland Mathematics Studies).
28. *Худавердиев К.И., Велиев А. А.* Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыюглы, 2010.
29. *Tekin I., Mehraliyev Y. T., Ismailov M. I.* Existence and uniqueness of an inverse problem for nonlinear Klein–Gordon equation // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2019. V. 42, N 10. P. 3739–3753;
<https://doi.org/10.1002/mma.5609>

UDC 517.953:517.958:624.27

NONLOCAL INVERSE PROBLEM FOR DETERMINING THE UNKNOWN COEFFICIENT IN THE BEAM VIBRATION EQUATION

© 2023 U. D. Durdiev^{1,2a,b}, Z. R. Bozorov^{2c}¹*Bukhara State University,**ul. M. Ikbol 11, Bukhara 200117, Uzbekistan,*²*Bukhara Branch of Romanovskii Institute of Mathematics UAS,**ul. M. Ikbol 11, Bukhara 200117, Uzbekistan*E-mails: ^aumidjan93@mail.ru, ^bu.d.durdiev@buxdu.uz,
^czavqiddinbozorov2011@mail.ru

Received 22.10.2022, revised 01.11.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. The article is devoted to the study of the direct problem for the oscillation of a homogeneous beam of finite length with non-local time conditions. Necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the direct problem are obtained. For the direct problem, we study the inverse problem of determining the time-dependent coefficient at the lowest derivative. Using eigenvalues and eigenfunctions, the problem is reduced to a system of integral equations. With the help of the Banach principle, the existence and uniqueness of the solution of inverse problems are shown.

Keywords: inverse problem, non-local conditions, beam oscillations, redefinition condition, eigenfunctions, existence, uniqueness.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.206

REFERENCES

1. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics], Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
2. Krylov A.N. *Vibratsiya sudov* [Vibration of ships], Moscow: ONTI, 2012 (in Russian).
3. Gusev B.V., Saurin V.V. *O kolebaniyakh neodnorodnykh balok* [On vibrations of inhomogeneous beams]. *Engng. J. Don*, 2017 (in Russian); <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312>
4. Sabitov K.B. A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams. *Differ. Equ.*, 2017, Vol. 53, No. 1, pp. 89–100; DOI: 10.1134/S0012266117010086
5. Sabitov K.B. Initial-boundary value problems for the beam vibration equation with allowance for its rotational motion under bending. *Differ. Equ.*, 2021, Vol. 57, No. 3, pp. 342–352; DOI: 10.1134/S0012266121030071
6. Sabitov K.B., Fadeeva O.V. Nachal'no-granichnaya zadacha dlya uravneniya vynuzhdennykh kolebaniy konsol'noi balki [Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.], 2021, Vol. 25, No 1, pp. 51–66 (in Russian); DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1845>
7. Baysal O., Hasanov A. Solvability of the clamped Euler–Bernoulli beam equation. *Appl. Math. Lett.*, 2019, Vol. 93, pp. 85–90; <https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.02.006>
8. Durdiev U.D. Inverse problem of determining an unknown coefficient in the beam vibration equation. *Differ. Equ.*, 2022, Vol. 58, No. 1, pp. 37–44; DOI: 10.1134/S0012266122010050

9. Tan G., Shan J., Wu Ch., Wang W. Direct and inverse problems on free vibration of cracked multiple I-section beam with different boundary conditions. *Adv. Mech. Engrg.*, 2017, Vol. 9, No. 11, pp. 1–17; DOI: 10.1177/1687814017737261
10. Moaveni S., Hyde R. Reconstruction of the area-moment-of-inertia of a beam using a shifting load and the end-slope data. *Inverse Probl. Sci. Engrg.*, 2016, Vol. 24, No. 6, pp. 990–1010; DOI: 10.1080/17415977.2015.1088539
11. Chang J.D., Guo B.Z. Identification of variable spacial coefficients for a beam equation from boundary measurements. *Automatica*, 2007, Vol. 43, pp. 732–737; DOI: 10.1016/j.automatica.2006.11.002
12. Huang Ch.H., Shih Ch.Ch. An inverse problem in estimating simultaneously the time-dependent applied force and moment of an Euler–Bernoulli beam. *CMES*, 2007, Vol. 21, No. 3, pp. 239–254.
13. Maciag A., Pawinska A. Solution of the direct and inverse problems for beam. *Comput. Appl. Math.*, 2016, Vol. 35, pp. 187–201; DOI 10.1007/s40314-014-0189-9
14. Maciag A., Pawinska A. Solving direct and inverse problems of plate vibration by using the Trefftz functions. *J. Theor. Appl. Mech.*, 2013, Vol. 51, No. 3, pp. 543–552.
15. Karchevsky A.L. Analiticheskie resheniya differentsial'nogo uravneniya poperechnykh kolebaniy kusochno-odnorodnoi balki v chastotnoi oblasti dlya kraevykh uslovii lyubogo vida [Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 648–665 (in Russian); <https://doi.org/10.1134/S1990478920040043>
16. Romanov V.G. Inverse Problems of Mathematical Physics. Utrecht: VNU Science Press, 1987.
17. Durdiev D.K., Totieva Zh.D. The problem of determining the one-dimensional kernel of the electroviscoelasticity equation. *Sib. Math. J.*, 2017, Vol. 58, No. 3, pp. 427–444; DOI: 10.1134/S0037446617030077
18. Durdiev D.K., Rahmonov A.A. The problem of determining the 2D-kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium. *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 2, pp. 281–295; DOI: 10.1134/S1990478920020076
19. Durdiev U.D. A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. *Euras. J. Math. Comput. Appl.*, 2019, Vol. 7, No. 2, pp. 4–19; DOI: 10.32523/2306-6172-2019-7-2-4-19
20. Durdiev U.D., Totieva Zh.D. A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2019, Vol. 42, No. 18, pp. 7440–7451; DOI: 10.1002/mma.5863
21. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. Memory kernel reconstruction problems in the integro-differential equation of rigid heat conductor. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2022, Vol. 45, No. 14, pp. 8374–8388; DOI: 10.1002/mma.7133
22. Durdiev D.K., Zhumaev Zh.Zh. One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain. *Ukr. Math. J.*, 2022, Vol. 73, No. 11, pp. 1723–1740; DOI: 10.1007/s11253-022-02026-0
23. Karchevskii A.L., Fat'yanov A.G. Chislennoe reshenie obratnoi zadachi dlya sistemy uprugosti s posledeistviem dlya vertikal'no neodnorodnoi sredy [Numerical solution of the inverse problem for an elasticity system with aftereffect for a vertically inhomogeneous medium]. *Sib. Zhurn. Vychisl. Mat.*, 2001, Vol. 4, No. 3, pp. 259–268 (in Russian).
24. Karchevsky A.L. Determination the possibility of a rock burst in a coal seam. *J. Appl. Industr. Math.*, 2017, Vol. 11, No. 4, pp. 527–534; DOI: 10.1134/S199047891704010X
25. Durdiev U.D. Chislennoe opredelenie zavisimosti dielektricheskoi pronitsaemosti sloistoi sredy ot vremennoi chastoty [Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory]. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, Vol. 17, pp. 179–189 (in Russian); <https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.013>
26. Megraliev Ya.T., Azizbayov E.I. A time-nonlocal inverse problem for a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2021, No. 28, pp. 1–12; <https://doi.org/10.14232/ejqtde.2021.1.28>

27. Pachpette B. *Integral and Finite Difference Inequalities and Applications*. Elsevier, 2006 (North-Holland Math. Studies).
28. Khudaverdiev K.I., Veliyev A.A. *Issledovanie odnomernoi smeshannoi zadachi dlya odnogo klassa psevdogiperbolicheskikh uravnenii tret'ego poryadka s nelineinoi operatornoi pravoii chast'yu*. [Study of a one-dimensional mixed problem for a class of third-order pseudohyperbolic equations with a nonlinear operator right-hand side]. Baku: Chashyollu, 2010 (in Russian).
29. Tekin I., Mehraliyev Y. T., Ismailov M. I. Existence and uniqueness of an inverse problem for nonlinear Klein–Gordon equation. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2019, Vol. 42, No. 10, pp. 3739–3753; <https://doi.org/10.1002/mma.5609>

УДК 532.542.1

ПРЯМОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИФЕРИЙНОЙ И ВНУТРЕННЕЙ КОНФИГУРАЦИЙ МОДЕЛЬНОЙ СБОРКИ ТВЭЛОВ

© 2023 В. А. Иващенко^{1,2a}, П. Д. Лобанов¹, Н. И. Яворский¹,
М. П. Токарев^{1,2}, Р. И. Мулляджанов^{1,2}

¹*Институт теплофизики СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

²*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: ivashchenko@itp.nsc.ru

Поступила в редакцию 18.08.2022 г.; после доработки 18.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

В связи с активным развитием атомной энергетики в мире и в России все большее внимание уделяется вопросам энергоэффективности и безопасности ядерных реакторов. Несмотря на тот факт, что большинство работающих на сегодняшний день реакторов уже очень хорошо изучены, ряд гидродинамических вопросов, связанных с течением теплоносителя вдоль тепловыделяющих элементов, все ещё остаются открытыми. В частности, в данной работе рассматривается эквивалентность течения в периферийной и внутренних областях тепловыделяющей сборки.

Ключевые слова: прямое численное моделирование, гидродинамика, тепловыделяющая сборка.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.207

ВВЕДЕНИЕ

Атомная энергия на сегодняшний день играет важную роль в производстве электроэнергии по всему миру, при этом по оценкам Международного агентства по атомной энергии (МАГАТЭ) мировые мощности атомной энергетики могут увеличиться вдвое к 2050 году [1]. В России, по данным концерна «Росэнергоатома», в 2022 году доля атомной энергии составляет около 20% от всей вырабатываемой электроэнергии в стране. В то же время абсолютное большинство ядерных реакторов в мире является гетерогенными. Это означает, что ядерное горючее в них конструктивно отделяется от теплоносителя и находится в так называемых тепловыделяющих элементах (ТВЭЛх). Каждый такой элемент состоит из сердечника, в котором находится делящееся вещество, и оболочки.

ТВЭЛы собираются в тепловыделяющую сборку (ТВС), представляющую собой пучок стержней, которая помещается в активной зоне реактора. Производительность реактора зависит от достижения равномерного распределения температуры теплоносителя внутри ТВС. Важное значение в равномерном распределении температуры теплоносителя играет турбулентная структура течения, формирующегося при обтекании пучков ТВЭлов, в частности в межТВЭльных каналах. Исследованию течения в межТВЭльном канале посвящено множество работ, из которых известно, что на межканальный обмен значительное влияние оказывают

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-19-00587).
Разработка вычислительного кода выполнена в рамках госзадания Института теплофизики СО РАН.

вихревые структуры, формирующиеся при обтекании пучка ТВЭЛов [2]. Пространственные и временные масштабы данных вихревых структур находятся в зависимости от плотности упаковки ТВС, определяющей ширину межत्वэльного зазора. Внутри ТВС выделяют две формы межत्वэльного канала, относящиеся к внутренним и периферийным ячейкам (см. рис. 1). Внутренние ячейки образуются между рядом стоящими ТВЭЛами. Периферийные образуются между рядом ТВЭЛов и плоской стенкой чехла ТВС. В связи с простотой проведения экспериментов большинство исследований структуры турбулентного течения проведено в периферийных ячейках. Однако различие в геометрии межत्वэльных каналов внутренней и периферийной ячейки может сказываться на структуре турбулентного потока. Таким образом, для ряда задач при исследовании теплообмена необходимы обоснования использования данных, полученных в периферийных ячейках, для верификации результатов внутренних ячеек. В данной работе при помощи метода прямого численного моделирования (DNS, от англ. Direct Numerical Simulation) проводится исследование влияния формы геометрии межत्वэльных каналов, имитирующей внутреннюю и периферийную ячейку ТВС, на структуру турбулентного потока.

Стоит отметить, что с помощью DNS уже исследовались внутренние конфигурации подобных модельныхборок для различных чисел Рейнольдса [3], но в данной работе упор делается именно на сравнении течения с периферийной областью.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис. 1 показаны геометрические модели для расчёта двух типов ТВЭЛов: шести внутренних и трёх периферийных. Диаметр и шаг расположения ТВЭЛов в обоих случаях одинаковые.

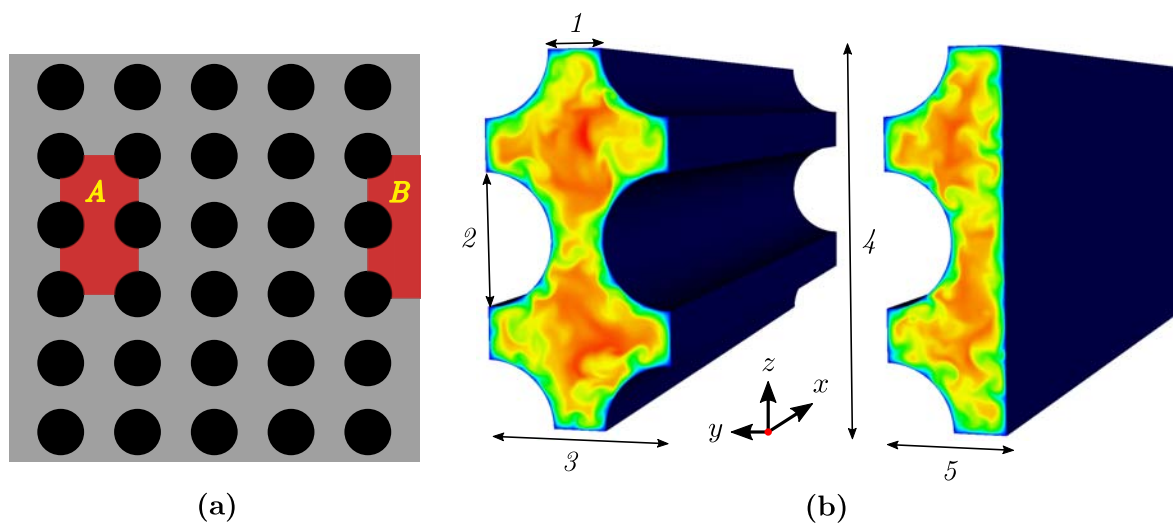


Рис. 1. Модель тепловыделяющей сборки:
 (а) чёрным цветом показаны ТВЭЛы, серым – теплоноситель;
 область типа *A* – внутренняя, типа *B* – периферийная;
 (б) геометрические размеры двух рассматриваемых типовборок:
 слева внутренней: *1* – 4 мм, *2* – диаметр 10 мм, *3* – 14 мм,
 справа периферийной: *4* – 28 мм, *5* – 9 мм

В дальнейшем условимся обозначать продольное, горизонтальное и вертикальное направления как (x, y, z) , соответственно. ТВЭЛы представляют собой цилиндры радиуса 5 мм с вертикальным и горизонтальным зазорами по 4 мм между собой. Размер в продольном направлении составляет 140 мм, так что продольные когерентные вихревые структуры целиком уместятся в рассматриваемой области. В дальнейшем все результаты приводятся в безразмерном

виде, где координаты нормированы на высоту модели ($H = 28$ мм), а скорость на среднерасходную скорость U_b .

1.1. Основные уравнения

В задаче рассматривается течение жидкости при фиксированном числе Рейнольдса $Re = 13000$, построенном по гидравлическому диаметру и среднерасходной скорости. Динамика течения полностью описывается уравнениями Навье — Стокса в несжимаемой постановке:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где u_i — i -я компонента вектора скорости ($i = 1, 2, 3$), x_j — j -я координата, $\tau_{ij} = \frac{u_i}{x_j} + \frac{u_j}{x_i}$ обозначает тензор вязких напряжений. Все величины обезразмерены на характерные значения, $Re = U_b D_h / \nu$ обозначает число Рейнольдса, построенное по среднерасходной скорости и гидравлическому диаметру.

Используется два типа граничных условий: стенка и периодическое направление. На стенках используется условие прилипания для поля скорости ($u_i = 0$), а также отсутствие поперечного градиента давления ($\frac{dp}{dn} = 0$). В продольном направлении используются периодические граничные условия для моделирования достаточно длинной ТВС.

1.2. Вычислительный код и методы дискретизации

Для численного решения уравнений (1) используется открытый вычислительный код Nek5000, разработанный Полом Фишером и др. [4]. Валидация численных алгоритмов была проведена нами ранее на примере различных задач гидродинамики [5–7]. В его основе лежит метод спектральных элементов (SEM, от англ. Spectral Element Method), по принципу работы схожий с широко известным методом конечных объёмов, но в котором решение и данные представлены в виде разложения по многочленам N -го порядка в каждом из E деформируемых гексагональных элементов [8]. Обычно N варьируется от 8 до 16, так как при использовании меньшего значения N не используются преимущества SEM, а большие значения использовать дорого с вычислительной точки зрения. В данной работе $N = 10$. SEM отличается малой величиной численной дисперсии и диссипации, что является важным при расчёте эволюции гидродинамических неустойчивостей, а также высоких числах Рейнольдса. Спектральная точность означает экспоненциальное уменьшение ошибки с ростом количества вычислительных узлов. Дискретизация по времени происходит при помощи формулы «дифференцирования назад» третьего порядка точности. В рамках пространственной дискретизации в каждом из E элементов переменные задачи раскладываются по базису ψ_i , состоящему из интерполяционных полиномов Лагранжа: $\psi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$, где ξ_i — точки, являющиеся

корнями уравнения $(1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} P_N(\xi) = 0$, в котором P_N — полиномы Лежандра порядка N .

Иными словами, ξ_i определяют положение точек сетки внутри спектрального элемента. Более подробно алгоритмы дискретизации и решения уравнений в коде Nek5000 ранее были описаны в [9]. Вычислительная сетка состоит из порядка 40 млн. узлов для внутренней и 18 млн. узлов для периферийной конфигураций (см. рис. 2). Дополнительно была проверена сеточная сходимость для уверенности в достоверности получаемых данных. Также была произведена оценка отношения наименьшего размера вихрей (колмогоровского масштаба) $\eta_k = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ к шагу сетки Δ ; здесь ν — кинематическая вязкость, ϵ — скорость диссипации. Минимальный шаг сетки оказался сопоставим с колмогоровским масштабом $\Delta_{\min} \approx \eta_k$, а максимальный шаг сетки превысил его всего лишь в три раза $\Delta_{\max} \approx 3\eta_k$, что является хорошим показателем качества вычислительной сетки.

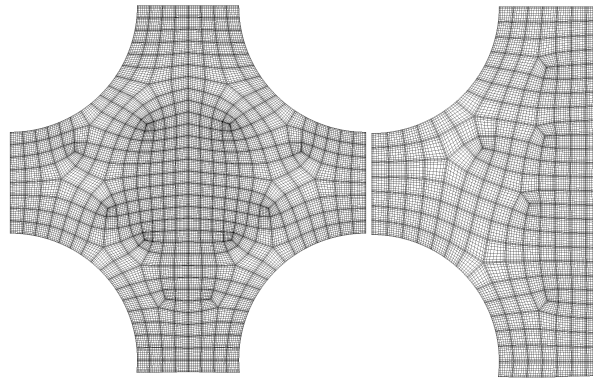


Рис. 2. Пример вычислительной сетки для поперечного сечения верхней половины геометрии

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 3 показано сравнение спектров турбулентной кинетической энергии продольной компоненты скорости $E_x(fH/U_b)$ в центральных точках обеих конфигураций (отмечены на рисунке). Турбулентная кинетическая энергия получается с помощью процедуры быстрого преобразования Фурье (FFT, от англ. Fast Fourier Transform): $E_x = |FFT(u'_x)|^2$, где $u'_x = u_x - \bar{u}_x$ — мгновенные пульсации продольной скорости, а \bar{u}_x — осреднённое по времени поле продольной скорости. В качестве аргумента используется безразмерная частота fH/U_b .

Стоит отметить, что в спектрах присутствуют несколько пиков, соответствующих выделенным частотам. Наличие выделенных частот в потоке соответствует поперечным колебаниям скорости в зазоре, которые связаны с развитием вихревых структур. Несмотря на то, что в обоих случаях наблюдаются близкие безразмерные частоты, в спектрах уровень кинетической турбулентной энергии выше в случае периферийной конфигурации. При этом на рис. 3 пунктирными линиями также показаны горизонтальное и вертикальное сечения, в которых проводилось сравнение профилей средней продольной скорости и ненулевых компонент тензора напряжений Рейнольдса, показанное на рис. 4.

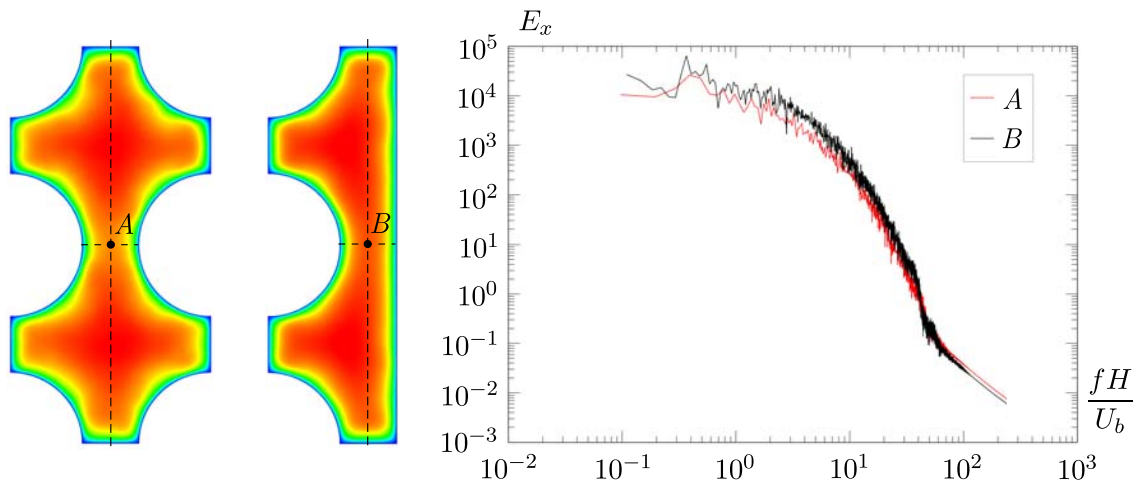


Рис. 3. Спектры турбулентной кинетической энергии для двух конфигураций. Пунктирными линиями показаны сечения, в которых сравниваются средние профили скорости и пульсаций на рис. 4

На рис. 4(а) и 4(б) приведён профиль продольной скорости вдоль горизонтального и вертикального сечений соответственно. Горизонтальная координата нормирована на ширину меж-

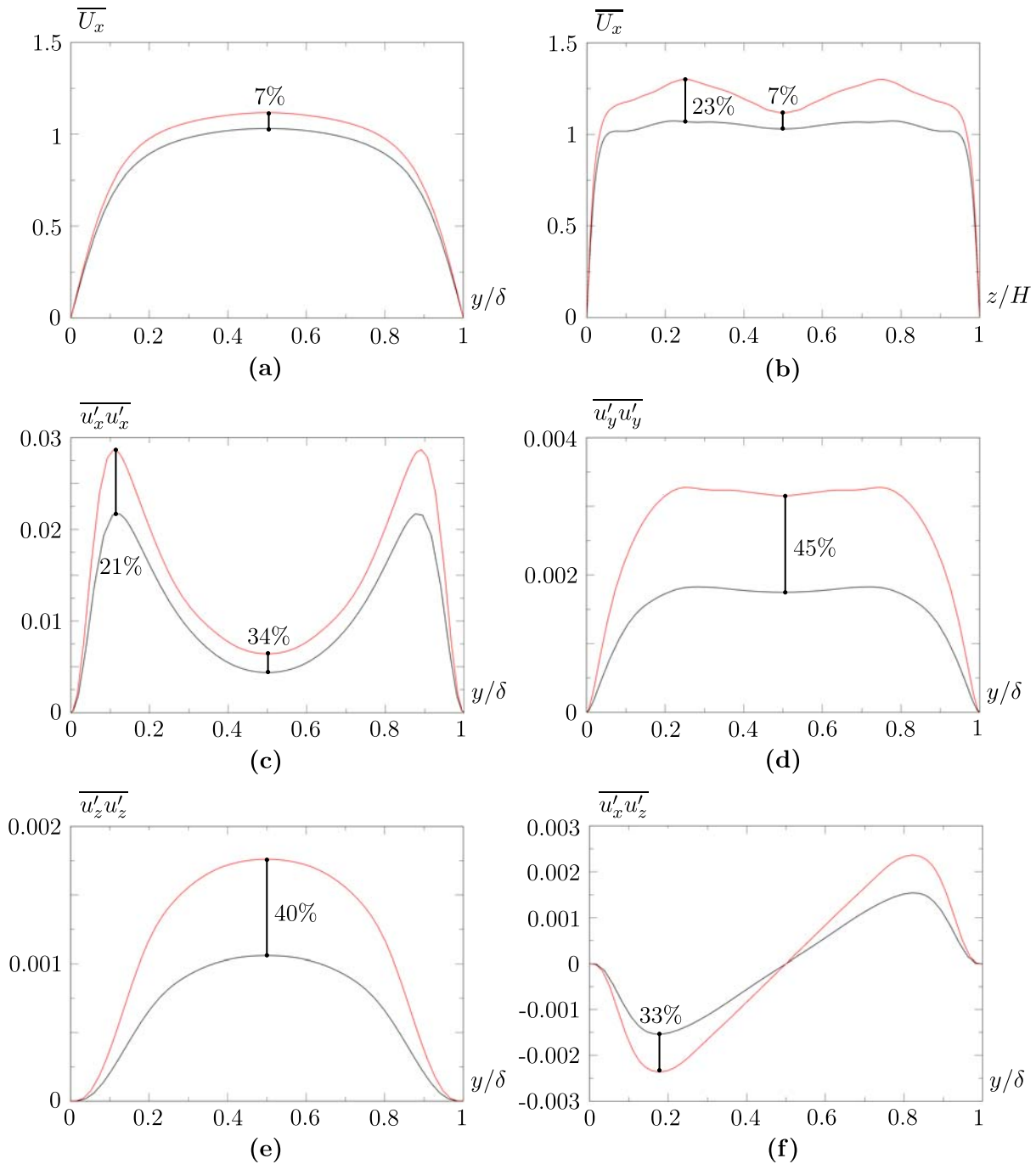


Рис. 4. Профили ненулевых компонент тензора напряжений Рейнольдса и средней продольной скорости для двух рассмотренных конфигураций.

Красным цветом показаны результаты для внутренней сборки, чёрным — для периферийной.

Горизонтальная ось соответствует расстоянию y/H вдоль пунктирной линии, показанной на рис. 3

твэльного пространства $\delta = 4$ мм, вертикальная — на высоту модели $H = 28$ мм. В межтвэльном пространстве наблюдается неплохое совпадение результатов (с точностью до 7%), хотя в точках $z/H = 0.25$ и $z/H = 0.75$ наблюдается наибольшее различие в графиках из-за наличия плоской стенки в периферийной конфигурации и, как следствие, изменения структу-

ры вторичных течений. На рис. 4(с)–4(f), несмотря на довольно высокое отклонение профилей друг от друга, наблюдается качественное совпадение профилей для обеих конфигураций. При этом стоит отметить, что наибольшие отклонения наблюдаются для наименее интенсивных компонент тензора напряжений Рейнольдса, которые вносят наименьший вклад в общую турбулентную кинетическую энергию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено прямое численное моделирование двух модельных областей сборки ТВЭЛов: внутренней и периферийной. Выявлено, что профили средней скорости, а также компонент тензора напряжений Рейнольдса имеют качественные сходства для обеих конфигураций. Наибольшие отклонения наблюдаются в наименее интенсивных компонентах тензора напряжений Рейнольдса, вследствие чего на спектре турбулентной кинетической энергии явных различий выявлено не было, что даёт возможность предполагать о незначительном влиянии плоской стенки на процессы переноса энергии в межтвэльном пространстве. При этом основные отличия между конфигурациями вызваны изменением структуры вторичных течений (для внутренней области они намного интенсивнее), что и приводит к изменению пульсационных характеристик. Таким образом, можно установить, что экспериментальные результаты при исследовании периферийной области сборки ТВЭЛов качественно отражают картину турбулентного течения и для внутренней части сборки, однако влияние найденных различий в профилях компонент тензора напряжений Рейнольдса на процессы теплопереноса требует дальнейшего детального изучения.

Авторы благодарны Институту теплофизики СО РАН и Новосибирскому государственному университету за предоставление вычислительных ресурсов суперкомпьютера «Каскад».

ЛИТЕРАТУРА

1. IAEA Energy, Electricity and Nuclear Power Estimates for the Period up to 2050. Internat. Atomic Energy Agency, 2021.
2. Meyer L. From discovery to recognition of periodic large scale vortices in rod bundles as source of natural mixing between subchannels — A review // Nuclear Engrg. Design. 2010. V. 240. P. 1575–1588.
3. Shams A., Kwiatkowski T. Towards the direct numerical simulation of a closely-spaced bare rod bundle // Ann. Nuclear Energy. 2018. V. 121. P. 146–161.
4. Nek5000 web page <https://nek5000.mcs.anl.gov/>
5. Ivashchenko V.A., Palkin E.V., Ryzhenkov V.O., Mullyadzhанov R.I. POD-analysis of the near field of a turbulent circular jet when mixing gases of different densities // Thermophysics and Aeromechanics. 2021. V. 28, N 1. P. 55–64.
6. Bobrov M., Hrebtov M., Ivashchenko V., Mullyadzhанov R., Seredkin A., Tokarev M., Zaripov D., Dulin V., Markovich D. Pressure evaluation from Lagrangian particle tracking data using a grid-free least-squares method // Measurement Sci. Technology. 2021. V. 32, N 8. Article 084014.
7. Zaripov D., Ivashchenko V., Mullyadzhанov R., Li R., Mikheev N., Kähler C. J. On a mechanism of near-wall reverse flow formation in a turbulent duct flow // J. Fluid Mech. 2021. V. 923. Article A20.
8. Patera A. T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion // J. Comput. Phys. 1984. V. 54, N 3. P. 468–488.
9. Hesthaven J. S., Gottlieb S., Gottlieb D. Spectral Methods for Time-Dependent Problems. V. 21. Cambridge: Univ. Press, 2007.

UDC 532.542.1

**DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF THE PERIPHERAL
AND THE INTERNAL CONFIGURATION OF THE MODEL FUEL
ASSEMBLY**

© 2023 V. A. Ivashchenko^{1a}, P. D. Lobanov¹, N. I. Yavorsky¹,
M. P. Tokarev^{1,2}, R. I. Mullyadzhyanov^{1,2}

¹*Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Novosibirsk State University,
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: ivashchenko@itp.nsc.ru

Received 18.08.2022, revised 18.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. Due to the active development of nuclear energy in the world and in Russia, more and more attention is paid to the issues of energy efficiency and safety of nuclear reactors. Despite the fact that most of the reactors operating today have already been well studied, some hydrodynamic questions related to the flow of the moderator along the fuel elements still remain open. In particular, this paper considers the equivalence of flow in the peripheral and internal regions of the fuel assembly.

Keywords: direct numerical simulation, fuel assembly.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.207

REFERENCES

1. IAEA Energy, Electricity and Nuclear Power Estimates for the Period up to 2050. Internat. Atomic Energy Agency, 2021.
2. Meyer L. From discovery to recognition of periodic large scale vortices in rod bundles as source of natural mixing between subchannels — A review. *Nuclear Engrg. Design.*, 2010, Vol. 240, pp. 1575–1588.
3. Shams A., Kwiatkowski T. Towards the direct numerical simulation of a closely-spaced bare rod bundle. *Ann. Nuclear Energy*, 2018, Vol. 121, pp. 146–161.
4. Nek5000 web page <https://nek5000.mcs.anl.gov/>
5. Ivashchenko V.A., Palkin E.V., Ryzhenkov V.O., Mullyadzhyanov R.I. POD-analysis of the near field of a turbulent circular jet when mixing gases of different densities. *Thermophys. Aeromech.*, 2021, Vol. 28, No. 1, pp. 55–64.
6. Bobrov M., Hrebtov M., Ivashchenko V., Mullyadzhyanov R., Seredkin A., Tokarev M., Zaripov D., Dulin V., Markovich D. Pressure evaluation from Lagrangian particle tracking data using a grid-free least-squares method. *Measurement Sci. Technology*, 2021, Vol. 32, No. 8, article 084014.
7. Zaripov D., Ivashchenko V., Mullyadzhyanov R., Li R., Mikheev N., Kähler C. J. On a mechanism of near-wall reverse flow formation in a turbulent duct flow. *J. Fluid Mech.*, 2021, Vol. 923, article A20.
8. Patera A. T. A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, 1984, Vol. 54, No. 3, pp. 468–488.
9. Hesthaven J. S., Gottlieb S., Gottlieb D. Spectral Methods for Time-Dependent Problems. Vol. 21. Cambridge: Univ. Press, 2007.

УДК 532.663:536.658

НЕУПРУГОЕ СТОЛКНОВЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ СОЛИТОНОВ В ПУЗЫРЬКОВОЙ СРЕДЕ

© 2023 И. А. Огородников

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: igoro47@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.09.2022 г.; после доработки 28.12.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Исследуется столкновение резонансных солитонов большой амплитуды в жидкости с пузырьками газа при встречном движении. Взаимодействие имеет неупругий характер. Амплитуда состояния при полном слиянии двух резонансных солитонов в три раза превышает их начальные амплитуды. При взаимодействии излучаются два интенсивных звуковых предвестника. После выхода солитонов из области взаимодействия в ней возникает ограниченная в пространстве долго живущая зона связанных пульсаций пузырьков. Эти процессы уменьшают энергию резонансных солитонов, и они не восстанавливаются до исходного состояния.

Ключевые слова: жидкость с пузырьками, резонансные солитоны большой амплитуды, неупругое взаимодействие, излучение звуковых предвестников.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.208

ВВЕДЕНИЕ

Исследования свойств солитонов и различных систем из них проводят на базе уравнения Кортевега — Де Вриза (КдВ), уравнения синус-Гордона, нелинейного уравнения Шрёдингера, их модификаций и других аналогичных уравнений [1–3]. Такие нелинейные волновые уравнения являются интегрируемыми. Их широкое применение обусловлено этим их свойством и множеством сред в области физики, астрофизики, гидродинамики, биологии и химии, в которых возможны внутренние колебательные процессы. В таких средах возникает эффект самовоздействия волн, заключающийся в изменении характеристик среды под их воздействием, и, как результат, возникновение уединённых волн.

В предположении малой нелинейности и дисперсии можно получить одно из указанных уравнений или его модификацию в разных типах сред. Большое количество теоретических исследований определяется тем, что даже слабая нелинейность и дисперсия позволяют предсказать некоторые нелинейные эффекты и определить области параметров возникновения уединённых волн. Эти исследования расширяют информацию о нелинейных волнах и упрощают экспериментальные исследования солитонов.

Ярким примером является уединённая волна, обнаруженная при изучении эффектов самоиндуцированной прозрачности в нелинейных кристаллах [4]. Эта уединённая волна получила название оптического солитона. Он представляет собой огибающую волнового пакета, несущая частота которого близка к одной из собственных частот квантовых переходов среды. Теоретические предсказания [5, 6] стимулировали экспериментальные исследования, которые привели к созданию устойчивых систем передачи данных с использованием оптических солитонов [7]. Термин «солитон» был впервые введён в [8] и закрепился именно за решениями указанных уравнений в виде уединённых волн.

Решения в виде солитонов являются математическими объектами. Количественные характеристики наблюдаемых солитонов они не описывают, но некоторые свойства уединённых волн решения этих уравнений качественно отображают, например множественное рождение солитонов из длинных начальных возмущений. Интересной особенностью солитонов является их сходство с частицами. После взаимодействия солитоны восстанавливаются до первоначальных параметров. Такое взаимодействие солитонов определяют как упругое. Уравнения с постоянными коэффициентами не допускают неупругого взаимодействия солитонов, что характерно для реальных взаимодействующих частиц. Аналог неупругого взаимодействия возникает в уравнениях с переменными коэффициентами при нелинейных и дисперсионных членах [9], но это не связано с изменением параметров среды под воздействием интенсивной волны.

Допущения, использованные при выводе уравнений, ограничивают их применение слабо нелинейными процессами в частотных диапазонах далеко от резонансной области. В этом приближении уравнения описывают только компоненты поля, но не описывают изменения структуры среды под воздействием волн.

Существуют волновые процессы в гетерогенных средах, когда изменением внутренних параметров среды под действием волн нельзя пренебречь. Наиболее сильно это проявляется в пузырьковых средах. Сжатие пузырьков в волнах большой амплитуды в газожидкостной среде настолько велики [10–13], что указанные уравнения принципиально нельзя применять. В экспериментах обнаружено, что длительность уединённых волн большой амплитуды сопоставима с временем схлопывания пустого пузырька в волне. Это означает, что солитоны формируются именно в резонансной области. У пузырьков в несколько раз уменьшается объём при сжатии и локальное давление в нём значительно превосходит давление в волне. Этот эффект возникает за счёт инерции присоединённой массы пузырька при сжатии. Эксперименты выявили наличие звукового предвестника при распространении волн в пузырьковой среде, фронт которого движется со скоростью звука в чистой жидкости. Скорость фронта предвестника не зависит от наличия в жидкости пузырьков. После воздействия звукового импульса в пузырьковой среде всегда существует зона возбуждённого состояния, время жизни которого много больше времени воздействия волны на среду. При увеличении амплитуды скорость звуковых импульсов стремится к скорости звука в чистой жидкости. Эти экспериментальные данные предъявляют требования к построению теоретических моделей и позволяют их верифицировать.

Для описания динамики гетерогенных сред традиционно используется гомогенный подход. Для величин, характеризующих гетерогенную среду, вводятся соответствующие осреднённые величины, затем из законов сохранения выводятся уравнения движения [14]. Осреднение искажает информацию о дисперсной и несущей фазах. Это приводит к нефизическим следствиям в области высоких частот. Например, скорость фронта звукового предвестника в этих моделях является функцией объёмного газосодержания, что противоречит экспериментальным данным. Это ограничивает применение гомогенных моделей для решения волновых задач низкочастотным диапазоном.

В работах [15–17] предложена микроскопическая модель динамики гетерогенной среды, которая свободна от указанного ограничения. Принципиальное отличие модели в том, что сплошная среда, жидкость или газ являются несущей фазой, а каждая частица дисперсной фазы — источник массы, импульса, момента импульса и энергии по отношению к несущей среде. В частом случае гетерогенная среда может состоять из несущей среды и одной частицы. Поведение каждой частицы описывается отдельным уравнением движения с учётом сил взаимодействия с несущей фазой. На этапе вывода уравнений из законов сохранения не требуется введение осреднённых величин. Осреднение для удобства вычислений может быть проведено в конечных уравнениях, в которых все члены, содержащие характеристики пузырьков, выносятся в правую часть уравнений и выполняют функцию источников. В этом случае операция сводится к осреднению свойств распределённого источника и не изменяет физические свойства несущей и дисперсной фаз.

На основе микроскопической модели получена волновая система уравнений для частного случая — жидкости с пузырьками. Эта система допускает описание волн большой амплитуды и нелинейной динамики пузырьков. Особенностью модели является возможность представлять пузырьковые области набором разных пузырьков, расположенных в произвольных точках и областях среды. В модели жидкость является несущей средой, а пузырьки источниками массы. Производительность источников и их знак определяются их расширением и сжатием. Интенсивными являются волны, в которых пузырьки совершают нелинейные пульсации с многократным изменением объёма. При таких давлениях диапазон амплитуд волн для жидкости лежит в области линейной акустики потому, что сжимаемость жидкости на несколько порядков меньше сжимаемости газа в пузырьках.

В [16] выполнена верификация волновой модели. Для этого использованы экспериментальные данные из [10, 13]. Выбор обусловлен полнотой описания условий экспериментов, методик измерений и данных о погрешностях. Это позволило сформулировать соответствующую экспериментам математическую постановку задачи. В первом сравнении использовалось прямое наложение формы импульса, полученного в эксперименте [11] и вычисленного на основе модели [16]. Сравнение показало, что решение полученной системы уравнений количественно отражает наблюдаемую в эксперименте структуру — наличие звукового предвестника и резонансного солитона.

Во втором случае сравнивалась зависимость скорости распространения импульса как функции амплитуды. Скорость измерялась в глицерине с мелкими воздушными пузырьками [13]. Точность сопоставления находится в пределах погрешности экспериментов.

Учитывая свойства уединённых волн в [15] введено понятие резонансный солитон. В пузырьковой среде это широкополосный одиночный импульс давления без несущей частоты, как в оптическом солитоне [4].

Резонансный солитон в пузырьковой среде характеризуются синфазным изменением давления и радиуса пузырьков. Сжимаясь, пузырёк накапливает энергию. При максимальном сжатии энергия равна потенциальной энергии сжатого газа в пузырьке. С падением давления пузырёк расширяется и отдаёт всю накопленную энергию в волну. Он увеличивается до первоначального размера и далее не пульсирует.

Эта динамическая система, движущаяся с постоянной скоростью в однородной пузырьковой среде, и является резонансным солитоном. Проходя по невозмущённой пузырьковой среде, солитон оставляет её в невозмущённом состоянии.

Резонансные солитоны устойчивы и в пузырьковых средах с полидисперсными пузырьками [18]. Благодаря этому их можно использовать для зондирования приповерхностного слоя океана на больших расстояниях, в котором из-за волнения всегда присутствуют мелкие пузырьки воздуха [19].

Дисперсионные свойства пузырьковой жидкости характерны для многих сред с осцилляторами. Результаты исследований помогут в изучении солитонов в других средах с близкими дисперсионными свойствами, где аналогичные волновые модели не построены. Поэтому изучение взаимодействия солитонов в пузырьковой среде — актуальная задача.

Цель работы — анализ механизма формирования резонансных солитонов в приграничной области и определение энергетических характеристик поля давления и распределения радиусов пузырьков при встречном столкновении двух резонансных солитонов большой амплитуды.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В пространстве, заполненном жидкостью, выделен слой шириной H . Внутри него сформирован однородный пузырьковый слой шириной h (рис. 1).

Все пузырьки одинаковые. Границы раздела пузырькового слоя и чистой жидкости плоские. На граничных плоскостях слоя в чистой жидкости, с двух сторон, синхронно генерируют-

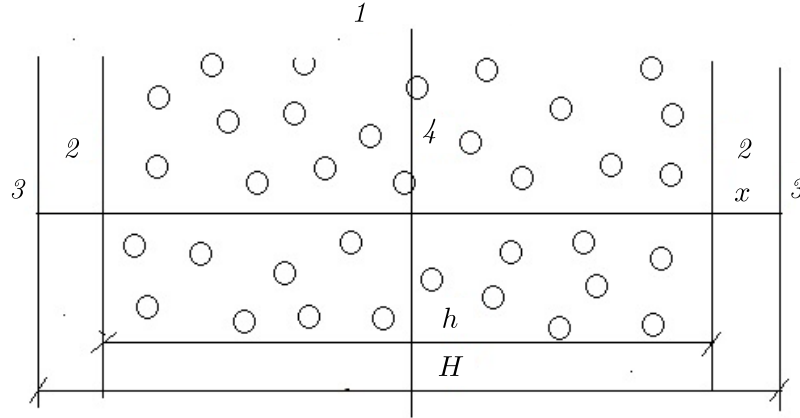


Рис. 1. Пузырьковый слой в чистой воде: 1 — пузырьковый слой, 2 — чистая вода, 3 — излучающие поверхности, 4 — плоскость симметрии; H — ширина слоя воды, h — ширина пузырькового слоя

ся одинаковые звуковые импульсы, движущиеся навстречу друг другу. Область исследования симметрична относительно центральной плоскости.

Предметом исследования является встречное столкновение резонансных солитонов и энергетические характеристики новых объектов, возникших внутри пузырькового слоя.

2. НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНОВАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Для решения задачи используется волновая модель [17] в одномерной постановке с осреднённым описанием распределения пузырьков как источников. Все величины — функции координаты x и времени t .

Запишем систему уравнений:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p(x, t)}{1 - \alpha(x, t)} \frac{\partial \alpha(x, t)}{\partial t} \right) \quad (1)$$

— неоднородное волновое уравнение;

$$R(x, t) \frac{d^2 R(x, t)}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR(x, t)}{dt} \right)^2 + \frac{4\mu}{R(x, t) \rho_0} \frac{dR(x, t)}{dt} + \frac{2\sigma}{R(x, t) \rho_0} = d_0 \left(\frac{R_0}{R(x, t)} \right)^{3\gamma} - \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{p(x, t)}{\rho_0}, \quad d_0 = \frac{1}{\rho_0} \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \quad (2)$$

— уравнение Рэлея;

$$\alpha(x, t) = \alpha_0 \frac{4}{3} \pi R^3(x, t) \quad (3)$$

— уравнение, связывающее объёмное газосодержание и радиус пузырьков;

$$p(x, t)|_{t=0} = P_0 \in [0, H], \quad (4)$$

$$R(x, t)|_{t=0} = R_0 \in [(H - h)/2, (H + h)/2], \quad (5)$$

$$\alpha(x, t)|_{t=0} = \alpha_0 \in [(H - h)/2, (H + h)/2] \quad (6)$$

— начальные условия;

$$p(x, t)|_{x=0} = P_w \exp(-bt^2)t^2, \quad p(x, t)|_{x=H} = P_w \exp(-bt^2)t^2 \quad (7)$$

— граничные импульсы;

$$p(x - ct)|_{x=0} = 0, \quad p(x + ct)|_{x=H} = 0 \quad (8)$$

— условия отсутствия отражения на границах жидкости.

Здесь $p(x, t)$ — отклонение давления от начального значения P_0 ; $R(x, t)$ — отклонение радиуса пузырька от начального значения R_0 ; $\alpha(x, t)$ — отклонение объёмного газосодержания от начального значения α_0 ; P_w — амплитуда начального импульса; H — ширина слоя жидкости; h — ширина пузырькового слоя; b — коэффициент, определяющий длительность начального импульса; c — скорость звука в жидкости; ρ_0 — плотность жидкости; σ — поверхностное натяжение жидкости; μ — вязкость жидкости; γ — показатель адиабаты газа в пузырьке; t — время; x — пространственная координата.

Поскольку резонансный солитон проявляет свойства частицы, его характеристики и характеристики продуктов взаимодействия будут представляться в энергетических единицах.

Энергия единичного объёма возбуждённой пузырьковой среды равна сумме энергии звуковой волны и энергии пузырьков. Жидкость занимает $(1 - \alpha(x, t))$ -ю часть единичного объёма. Её энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергии волны. Пузырьки занимают в нём часть $\alpha(x, t)$, и их энергия равна сумме кинетической энергии присоединённой массы пузырьков и потенциальной энергии газа в пузырьках. Полная энергия единичного объёма среды $E_{\text{tot}}(x, t)$ описывается следующими выражениями [20]:

$$E_{\text{tot}}(x, t) = \frac{\rho_0}{2} (1 - \alpha(x, t)) \left(u(x, t)^2 + c^2 \frac{\rho(x, t)^2}{\rho_0^2} \right) + \alpha(x, t) (T_b(x, t) + U_b(x, t)),$$

$$T_b(x, t) = 2\pi\rho_0 R(x, t)^3 \left(\frac{dR(x, t)}{dt} \right)^2,$$

$$U_b(x, t) = -\frac{P_0 + 2\sigma/R_0}{(1 - \gamma)} \left(\left(\frac{R(x, t)}{R_0} \right)^{3(\gamma-1)} - 1 \right) + P_0 \left(\left(\frac{R(x, t)}{R_0} \right)^3 - 1 \right) + 4\pi\sigma \left(R(x, t)^2 - R_0^2 \right),$$

$$p(x, t) = \rho(x, t)c^2;$$

$T_b(x, t)$ — кинетическая энергия присоединённой массы пузырьков, $U_b(x, t)$ — потенциальная энергия газа в пузырьках, $u(x, t)$ — скорость жидкости в волне, $\rho(x, t)$ — отклонение плотности жидкости от равновесного значения ρ_0 .

Система уравнений (1)–(8) обезразмерена с помощью соотношений

$$\delta R(x, t) = R(x, t)/R_0, \quad \delta p(x, t) = p(x, t)/P_w, \quad \delta \rho(x, t) = \rho(x, t)/\rho_0,$$

$$\delta t = t/(R_0\sqrt{\rho_0/P_w}), \quad \delta x = x/(cR_0\sqrt{\rho_0/P_w}).$$

В качестве жидкости выбрана вода, а газа — воздух. Амплитуда начальных звуковых импульсов в чистой воде $P_w = 0,3$ МПа. Равновесное давление в среде $P_0 = 0,1$ МПа. В начальный момент все пузырьки одинаковые. Радиус $R_0 = 0,03 \cdot 10^{-3}$ м; объёмное газосодержание $\alpha_0 = 10^{-3}$. Физические константы: показатель адиабаты воздуха в пузырьке $\gamma = 1,4$; плотность воды $\rho_0 = 1000$ кг/м; поверхностное натяжение $\sigma = 0,074$ Н/м; вязкость воды $\mu = 0,001$ Па·с, скорость звука = 1500 м/с.

Слой воды имеет ширину $H = 0,2$ м и включает две области чистой воды шириной 0,01 м около правой и левой границ. Пузырьковый слой шириной $h = 0,18$ м расположен между ними.

Временной масштаб определяется временем Рэлея $\tau = R_0\sqrt{\rho_0/P_w}$, равным времени схлопывания пустого пузырька в волне с амплитудой P_w . Пространственный масштаб определяется величиной $c\tau$.

При выбранных параметрах задачи $\tau = 0,17 \cdot 10^{-6}$ с, а пространственный масштаб равен $0,26 \cdot 10^{-3}$ м. В безразмерных величинах расстояние между излучающими плоскостями $\delta H = 182,2$, ширина пузырькового слоя $\delta h = 145,76$, длительность исходного сигнала $\delta T_{\text{pul}} = 22,56$.

Для численного решения волнового уравнения (1) использовалась разностная схема Кранка — Николсона второго порядка точности. Разностное уравнение решалось методом прогонки. Уравнение пульсаций пузырьков (2) решалось методом Рунге — Кутты [21]. Энергия резонансных солитонов и продуктов взаимодействия определялась интегрированием по их объёмам и представлена в размерных величинах.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Встречное столкновение резонансных солитонов в жидкости с пузырьками рассмотрено с помощью пространственных распределений давления и радиусов пузырьков.

Звуковые импульсы из чистой воды, достигнув слоя, частично отражаются от него как от мягкой границы. Из вошедших в пузырьковый слой импульсов, если они имеют достаточную длительность, формируются три типа волновых объектов: звуковые предвестники, резонансные солитоны и расширяющиеся от границы пузырькового слоя зоны возбуждения [15, 16]. Если импульс короче, чем период пульсаций пузырька, то в слое формируется только звуковой предвестник в виде волнового пакета и зона возбуждения.

Фронт предвестника движется со скоростью звука в чистой жидкости, затем следует резонансный солитон и фронт зоны возбуждения. Размеры звукового предвестника и зоны возбуждения изменяются при распространении в пузырьковой среде. Резонансный солитон формируется непосредственно около границы на расстоянии, равном своему размеру. При движении по однородной пузырьковой среде он не меняется.

Вариацией значения коэффициента b определена оптимальная длительность начального импульса $P_w \exp(-bt^2)t^2$, равная $16,5 \cdot 10^{-6}$ с. В этом случае энергия звукового предвестника и зоны возбуждения пузырьковой среды около границы минимальны. Из начального импульса формируется один резонансный солитон. Разность скоростей составляющих позволила подобрать ширину пузырькового слоя, чтобы резонансные солитоны сталкивались в невозмущённой среде и все продукты взаимодействия после столкновения находились в слабо возмущённой области.

На рис. 2 показана начальная фаза формирования волновой структуры. На этом и всех остальных графиках стрелками обозначено направление движения. Из чистой жидкости к слою двигались два одинаковых импульса с энергиями $E_{\text{in}} = 0,286$ Дж. Отражение произошло, как от мягкой границы, и отражённые волны с отрицательными амплитудами полностью сформировались. Энергия отражённых волн $E_{\text{ref}} = 0,072$ Дж, что составляет 0,25 от величины энергии начальных импульсов E_{in} . Энергия вошедших в слой импульсов $E_{\text{inc}} = 0,212$ Дж.

Структуры около двух границ одинаковые и представляют в текущий момент суперпозицию резонансного солитона, звукового предвестника и зоны возбуждения. Затем компоненты разделяются в пространстве из-за разницы скоростей и формируется три отдельных объекта с каждой внутренней стороны слоя (рис. 3).

Звуковой предвестник, обладая самой высокой скоростью распространения, первым уходит из приграничной области внутрь пузырькового слоя. Благодаря подбору длительности начального импульса, энергия предвестника имеет очень малую величину $E_p = 0,102 \cdot 10^{-7}$ Дж. При выбранном масштабе построения предвестник на графике не виден. В волновой составляющей поля давления содержится энергия $E_{pv} = 0,0535 \cdot 10^{-7}$ Дж, а в пузырьковой составляющей энергии меньше: $E_{pb} = 0,0402 \cdot 10^{-7}$ Дж.

Резонансный солитон содержит основную энергию $E_s = 0,195$ Дж. В волновой составляющей солитона энергия равна $E_{sv} = 0,109$ Дж, а в пузырьковой $E_{sb} = 0,086$ Дж.

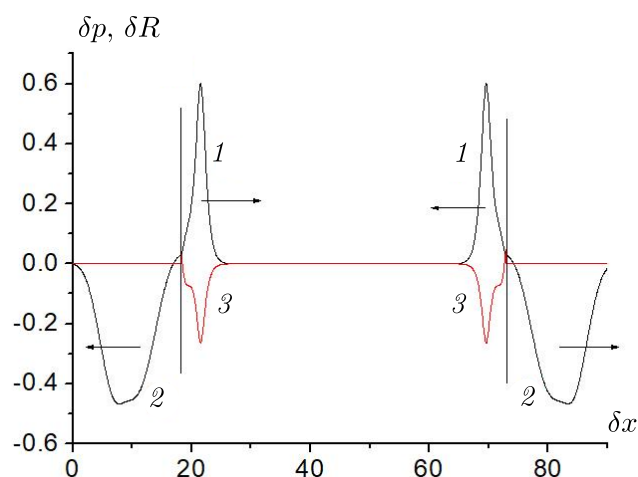


Рис. 2. Начальная фаза формирования резонансных солитонов: 1 — суперпозиция резонансного солитона, звукового предвестника и зоны возбуждения, 2 — отражённый от слоя импульс, 3 — изменение радиусов

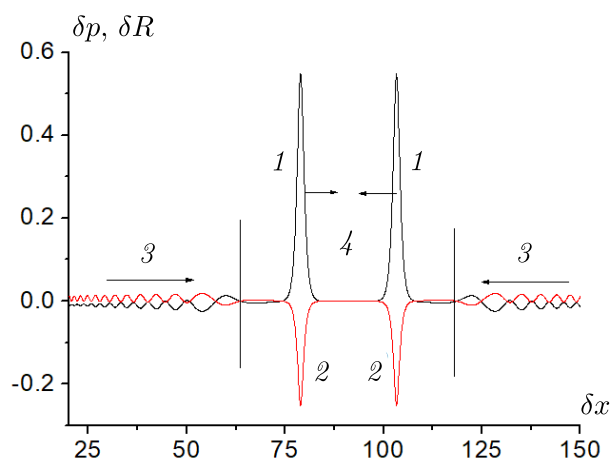


Рис. 3. Пространственное распределение давления и размеров радиусов пузырьков перед столкновением резонансных солитонов: 1 — резонансные солитоны, 2 — радиусы пузырьков, 3 — зона возбуждения, 4 — слабо возмущённая зона; вертикальные линии обозначают положение фронта зоны возбуждения

В резонансном солитоне и в звуковом предвестнике в волновой оставляющей энергии всегда больше, чем в пузырьковой, но в солитоне относительная доля энергии в пузырьковой составляющей больше, чем в предвестнике. Изменение давления и радиуса в этих волновых образованиях происходят синфазно, и увеличению давления в волне соответствует сжатие пузырька и наоборот.

Пузырьковый слой между солитонами возбуждают звуковые предвестники. Их общая энергия равна $0,204 \cdot 10^{-7}$ Дж. Это на семь порядков меньше энергии резонансных солитонов. Поэтому область между ними можно считать невозбуждённой.

Волновые структуры от границ пузырькового слоя до её фронтов, движущиеся за солитонами, представляют собой зоны возбуждения пузырьковой среды (рис. 3 и 4). Изменение давления в волне и пульсации пузырьков в отличие от звукового предвестника и резонансного солитона происходят в противофазе. В зоне возбуждения изменяется соотношение между волновой и пузырьковой составляющими энергии. В волновой составляющей содержится меньше энергии, чем в пузырьковой. Полная энергия зоны возбуждения $E_z = 0,0042$ Дж. В пузырьково-

вой составляющей энергия $E_{zb} = 0,003$ Дж, а в волновой $E_{zb} = 0,0014$ Дж. Зона возбуждения является областью, излучающей звуковую волну.

Скорость движения фронта зоны возбуждения составляет 0,72 от величины скорости резонансного солитона. Поэтому между фронтами зон возбуждения формируется достаточная по размеру область почти невозбуждённого пузырькового слоя, необходимая для анализа результатов взаимодействия солитонов. Амплитуда солитонов до столкновения равна $0,58 P_w$. Минимальное значение радиуса при максимальном давлении в резонансном солитоне и равно $0,84 R_0$. Энергия каждого солитона до взаимодействия $E_s = 0,195$ Дж.

На рис. 4 представлена структура поля давления и распределение радиусов пузырьков при слиянии солитонов. Полная энергия этого образования равна сумме энергий в двух резонансных солитонах до столкновения и составляет 0,39 Дж. Амплитуда при слиянии возрастает до величины 1,77, что в три раза больше амплитуд солитонов до столкновения. Радиус при максимальном сжатии равен $0,62 R_0$, а объёмное газосодержание уменьшается в пять раз. В решениях уравнения КдВ амплитуда только удваивается. При слиянии возникает ещё один эффект. Изменяется соотношение между волновой и пузырьковой составляющими полной энергии. В этот момент энергия в волновой компоненте $E_s = 0,11$ Дж, а в пузырьковой $E_b = 0,24$ Дж. В пузырьках накапливается энергии в 2,07 раза больше, чем в волне.

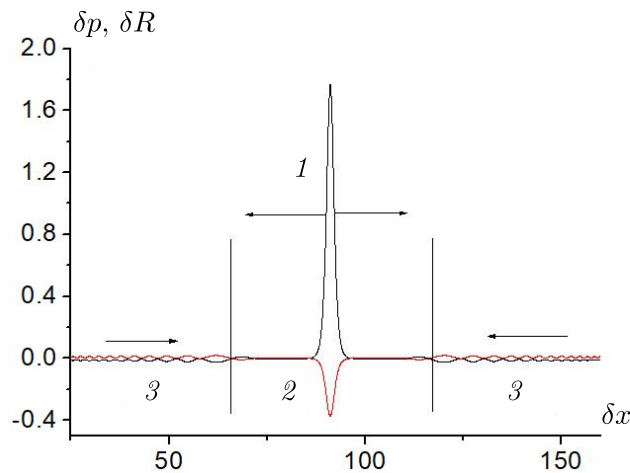


Рис. 4. Момент полного слияния резонансных солитонов:
1 — фаза полного слияния, 2 — изменение радиусов пузырьков, 3 — возбуждённая зона;
вертикальные линии обозначают положение фронта зоны возбуждения

На рис. 5 представлена структура поля давления и распределение радиусов пузырьков после взаимодействия, когда расстояние между солитонами равно их пространственному размеру в основании. В результате взаимодействия рождаются два дополнительных объекта. Первый — это звуковые предвестники, которые излучаются из области взаимодействия в обе стороны. Второй — возбуждённая зона между ними. Два солитона при удалении друг от друга совершают колебания как единая система. Это говорит об их связанности после слияния и наличии сильного взаимодействия между ними на этом расстоянии.

Пространство между солитонами можно представить как динамический резонатор с подвижными границами. Этими границами являются расходящиеся солитоны. Сила взаимодействия ослабевает с расстоянием и становится незаметной, когда солитоны расходятся на 10 своих пространственных размеров. На рис. 6 расстояние между ними равно шести собственным размерам и взаимодействие ещё сильное. Амплитуды резонансных солитонов уменьшаются до значения $0,44 P_w$, что соответствует уменьшению до величины 0,76 от значения амплитуд до взаимодействия. Минимальный размер радиуса внутри резонансного солитона увеличивается до $0,89 R_0$, а энергия солитона уменьшается до величины $E_s = 0,17$ Дж.

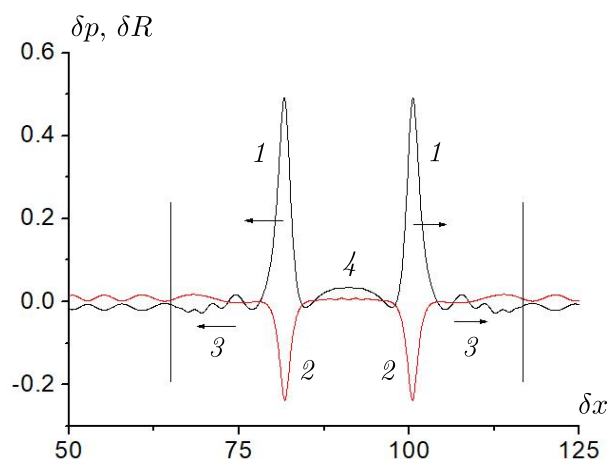


Рис. 5. Пространственное распределение давления и размеров радиусов пузырьков после столкновения резонансных солитонов:

1 — резонансный солитон, 2 — изменение радиусов пузырьков,
 3 — звуковой предвестник, излучённый при взаимодействии солитонов,
 4 — зона возбуждения между солитонами;
 вертикальные линии обозначают положение фронта излучённого предвестника

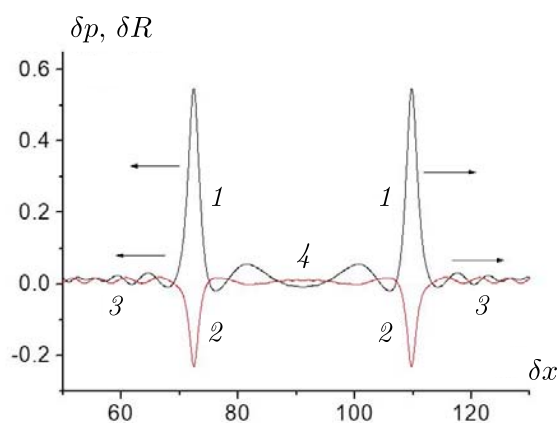


Рис. 6. Пространственное распределение давления и радиусов пузырьков на большом расстоянии после столкновения:

1 — резонансный солитон, 2 — изменение радиусов пузырьков,
 3 — звуковой предвестник, 4 — зона возбуждения между солитонами

После столкновения резонансные солитоны не восстанавливаются до параметров перед столкновением.

Область возбуждения между солитонами на рис. 6 представляет собой квазистационарную зону осцилляций пузырьковой среды. Её время жизни много больше времени взаимодействия солитонов. Эта область продолжает излучать звуковую волну после ухода из неё резонансных солитонов. Перечисленные эффекты показывают, что взаимодействие резонансных солитонов большой интенсивности в жидкости с пузырьками является неупругим.

Из невозмущённой области резонансные солитоны попадают в первичные зоны возбуждения пузырькового слоя. Взаимодействуя с ними, они продолжают излучать и доходят до границы пузырьковой среды с энергией $E_s = 0,166$ Дж и амплитудой, равной $0,38 P_w$.

Безразмерные частоты пульсаций давления и пузырька в центре симметрии столкновения совпадают и равны $\delta f = 0,33$. Частота свободных пульсаций пузырьков в пузырьково-

вом слое описывается формулой $f_{\text{res}} = 1/(2\pi R_0) \sqrt{3\gamma P_0/\rho_0}$. В безразмерном виде она равна $\delta f_{\text{res}} = 0,08$. Частота пульсаций пузырьков в сформированной между резонансными солитонами зоне возбуждения в 4,14 больше, чем свободных пульсаций в давлении P_0 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование показало, что при встречном столкновении резонансных солитонов большой амплитуды в жидкости с пузырьками газа взаимодействие носит неупругий характер.

Амплитуда при полном слиянии в три раза превышает начальные значения амплитуд резонансных солитонов. Взаимодействие сопровождается излучением интенсивных звуковых предвестников, амплитуда которых составляет около 0,05 от величины амплитуды солитонов до столкновения.

Резонансные солитоны сильно взаимодействуют между собой за счёт возникновения между ними интенсивной зоны возбуждения. Она действует как пружина, связывающая солитоны в единую осциллирующую систему. Взаимодействие сохраняется до расстояний 8–10 собственных размеров резонансных солитонов. После ухода солитонов из области взаимодействия в ней остаётся квазистационарная зона связанных пульсаций пузырьков. Её время жизни значительно больше времени взаимодействия солитонов. Частота пульсаций давления и пузырька в центральной точке столкновения в четыре раза выше собственных свободных пульсаций пузырька в нормальных условиях.

Столкновение резонансных солитонов большой интенсивности в жидкости с пузырьками отличается от столкновения солитонов, описываемых уравнениями со слабыми дисперсией и нелинейностью, и по свойствам, и по количественным параметрам.

Для количественного определения характеристик солитонов в средах с аналогичными дисперсионными свойствами необходимо формулировать модели, которые максимально точно описывают изменение полей и реакцию на них элементов микроструктуры.

Для экспериментальных исследований описанных процессов нужна небольшая по размеру установка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
2. Zakharov V.E. Kinetic equation for solitons // Experiment. Theor. Phys. 1971. V. 33, N 6. P. 538–541.
3. Didenkulova E.G., Kokorina A.V., Slyunyaev A.V. Numerical modeling of a gas of solitons in the framework of equations of the Korteweg-de Vries type // Comput. Technologies. 2019. V. 24, N 2. P. 52–66.
4. McCall S.L., Hahn E.L. Self-induced transparency by pulsed coherent light // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 18. P. 908–911.
5. Haus H.A., Wong W.S. Solitons in optical communications // Rev. Modern Phys. 1996. N 2. P. 423–444.
6. Buryaka A.V., Di Trapani P., Skryabin D.V., Trillod S. Optical solitons due to quadratic nonlinearities: from basic physics to futuristic applications // Phys. Rep. 2002. N 370. P. 63–235.
7. Слепов Н.Н. Солитонные сети // Сети. 1999. № 3. С. 90–96.
8. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15, N 6. P. 240–243.
9. Пластун А.С., Конюхов А.И., Мельников Л.А., Зарьков С.А. Неупругие взаимодействия оптических солитонов в рамках модели нелинейного уравнения Шрёдингера с переменными коэффициентами // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика. 2016. Т. 16, № 2. С. 81–86.
10. Malykh N.V., Ogorodnikov I.A. Structure of pressure pulses in liquids with gas bubbles // J. Phys. Colloques. 1979. V. 40. P. 300–305.
11. Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G., Shreiber I.R. Wave Dynamics of Gas and Vapor-Liquid Media. М.: Energoatomizdat, 1990.

12. Leroy V., Strybulevych A., Scanlon M.G., Page J.H. Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles // Eur. Phys. J. 2009. V. 29. P. 123–130.
13. Дружинин Г.А., Остроумов Г.А., Токман А.С. Нелинейное отражение ударных волн и ударные кривые жидкостей с пузырьками газа // Тр. Международ. конф. «Нелинейные волны деформации». Таллин, изд. Ин-та кибернетики, 1978. С. 66–69.
14. Островский Г.Н. Прикладная механика неоднородных сред. СПб.: Наука, 2000.
15. Ogorodnikov I.A. Resonance formation of solitary waves in a medium with structure. Novosibirsk, 1983. (Preprint/Institute of Thermal Physics SB USSR).
16. Borodulin V.Yu., Ogorodnikov I.A. Microscopic model of the dynamics of a heterogeneous medium. Interaction of acoustic waves with bubble layers // Fundament. Appl. Hydrophys. 2016. V. 9, N 2. P. 62–72.
17. Бородулин В.Ю., Огородников И.А. Дисперсионные свойства звуковых волн в жидкости с пузырьками газа // Всерос. конф. XXXI «Сибирский теплофизический семинар», 17–19 ноября 2014: Сб. трудов конф. Новосибирск, 2014. С. 197–202.
18. Ogorodnikov I. A. Resonant solitons in a polydisperse bubble medium // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 1105. Article 012088.
19. Akulichev V.A., Bulanov V.A. The bubble distribution and acoustic characteristics of the subsurface sea layer // Proc. Mtgs. Acoust. 2015. V. 24. Article 45003.
20. Borodulin V.Yu., Ogorodnikov I.A. Energy characteristics of a radiating thin layer of bubbles in a liquid // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1382. Article 012074.
21. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука. 1977.

UDC 532.663:536.658

INELASTIC COLLISION OF RESONANT SOLITONS IN A BUBBLE MEDIUM

© 2023 I. A. Ogorodnikov

*Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: igoro47@yandex.ru

Received 25.09.2022, revised 28.12.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. Collision of high-amplitude resonant solitons in a liquid with gas bubbles in the opposite motion is studied. The interaction has an inelastic character. The amplitude of the state of full merging is three times the initial. Two intense sonic precursors are emitted during the interaction. After the solitons leave the interaction region, a space-limited zone of coupled bubble pulsations arises in it. These processes, reduce the energy of solitons, and they are not restored to their original state.

Keywords: liquid with bubbles, resonant solitons of high intensity, inelastic interaction, emission of sound precursors.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.208

REFERENCES

1. Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskii L.P. Teoriya solitonov. Metod obratnoi zadachi [The theory of solitons. The method of the inverse problem.]. Moscow: Nauka, 1980 (in Russian).
2. Zakharov V.E. Kinetic equation for solitons. *Experiment. Theor. Phys.*, 1971, Vol. 33, No. 6, pp. 538–541.
3. Didenkulova E.G., Kokorina A.V., Slyunyaev A.V. Numerical modeling of a gas of solitons in the framework of equations of the Korteweg-de Vries type. *Comput. Technologies*, 2019, Vol. 24, No. 2, pp. 52–66.
4. McCall S.L., Hahn E.L. Self-induced transparency by pulsed coherent light. *Phys. Rev. Lett.*, 1967, Vol. 18, pp. 908–911.
5. Haus H.A., Wong W.S. Solitons in optical communications. *Rev. Modern Phys.*, 1996, No. 2, pp. 423–444.
6. Buryaka A.V., Di Trapanib P., Skryabinc D.V., Trillod S. Optical solitons due to quadratic nonlinearities: from basic physics to futuristic applications. *Phys. Rep.*, 2002, No. 370, pp. 63–235.
7. Slepov N.N. Solitonnye seti [Soliton networks]. *Seti [Networks]*, 1999, No. 3, pp. 90–96 (in Russian).
8. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 1965, Vol. 15, No. 6, pp. 240–243.
9. Plastun A.S., Konyukhov A.I., Melnikov L.A., Zarkov S.A. Neuprugie vzaimodeistviya opticheskikh solitonov v ramkakh modeli nelineinogo uravneniya Shrödingerera s peremennymi koeffitsientami [Inelastic interactions of optical solitons in the framework of the model of the nonlinear Schrodinger equation with variable coefficients]. *Izv. Sarat. Univ. New ser. Ser. Phys.*, 2016, Vol. 16, No. 2, pp. 81–86 (in Russian).
10. Malykh N.V., Ogorodnikov I.A. Structure of pressure pulses in liquids with gas bubbles. *J. Phys. Colloques*, 1979, Vol. 40, pp. 300–305.
11. Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G., Shreiber I.R. Wave Dynamics of Gas and Vapor-Liquid Media. Moscow: Energoatomizdat, 1990.

12. Leroy V., Strybulevych A., Scanlon M.G., Page J.H. Transmission of ultrasound through a single layer of bubbles. *Eur. Phys. J.*, 2009, Vol. 29, pp. 123–130.
13. Druzhinin G.A., Ostroumov G.A., Tokman A.S. Nelineinoe otrazhenie udarnykh voln i udarnye krivye zhidkosti s puzyr'kami gaza [Nonlinear reflection of shock waves and shock curves of liquids with gas bubbles]. Proc. Internat. conf. *Nonlinear deformation waves*, Tallin, izd. In-ta Kibernetiki, 1978, pp. 66–69 (in Russian).
14. Ostrovskii G.N. *Prikladnaya mekhanika neodnorodnykh sred* [Applied mechanics of inhomogeneous media]. St. Petersburg: Nauka, 2000 (in Russian).
15. Ogorodnikov I.A. Resonance formation of solitary waves in a medium with structure. Novosibirsk, 1983. (Preprint/Institute of Thermal Physics SB USSR).
16. Borodulin V.Yu., Ogorodnikov I.A. Microscopic model of the dynamics of a heterogeneous medium. Interaction of acoustic waves with bubble layers. *Fundament. Appl. Hydrophys.*, 2016, Vol. 9, No. 2, pp. 62–72.
17. Borodulin V.Yu., Ogorodnikov I.A. Dispersionnyye svoistva zvukovykh voln v zhidkosti s puzyr'kami gaza [Dispersion properties of sound waves in liquid with gas bubbles]. Vseros. konf. XXXI *Sibirskii teplofizicheskii seminar*, 17–19 November 2014. Sb. trudov konf. Novosibirsk, 2014, pp. 197–202 (in Russian).
18. Ogorodnikov I. A. Resonant solitons in a polydisperse bubble medium. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, Vol. 1105, article 012088.
19. Akulichev V.A., Bulanov V.A. The bubble distribution and acoustic characteristics of the subsurface sea layer. *Proc. Mtgs. Acoust.*, 2015, Vol. 24, article 45003.
20. Borodulin V.Yu., Ogorodnikov I.A. Energy characteristics of a radiating thin layer of bubbles in a liquid. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, Vol. 1382, article 012074.
21. Godunov S.K., Ryaben'kii V.S. *Raznostnye skhemy* [Difference schemes.]. Moscow: Nauka, 1977 (in Russian).

УДК 519.24:51–76

**СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ
ПО ВРЕМЕНИ И МЕСТОПОЛОЖЕНИЮ КОНТАКТОВ
ИНДИВИДУУМОВ В ЭПИДЕМИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ**© 2023 Н. В. Перцев^a, В. А. Топчий^b, К. К. Логинов^c¹*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*E-mails: ^ahomlab@ya.ru, ^btopchij@gmail.com, ^ckloginov85@mail.ruПоступила в редакцию 21.11.2022 г.; после доработки 21.11.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Представлена непрерывно-дискретная стохастическая модель, описывающая динамику численности восприимчивых и заразных индивидуумов, посещающих некоторый объект. Индивидуумы поступают на объект как по отдельности, так и в составе групп индивидуумов, объединённых по некоторым признакам. Длительности пребывания индивидуумов на территории объекта задаются с помощью распределений, отличных от экспоненциального. Индивидуумы, поступившие на объект в составе некоторой группы, покидают объект в составе этой же группы. Заразные индивидуумы распространяют вирусные частицы, содержащиеся в выделяемой ими воздушно-капельной смеси. Некоторое количество воздушно-капельной смеси, содержащей вирусные частицы, оседает на поверхности различных предметов в общедоступных для индивидуумов местах объекта. Площадь заражённой поверхности (поверхности, содержащей осевшую воздушно-капельную смесь с вирусными частицами) описывается с помощью линейного дифференциального уравнения со скачкообразно меняющейся правой частью и разрывными начальными данными. Контакты восприимчивых индивидуумов с заразными индивидуумами и с заражённой поверхностью могут приводить к их инфицированию. Приведена теоретико-вероятностная формализация модели и описан алгоритм численного моделирования динамики компонент построенного случайного процесса с помощью метода Монте-Карло. Представлены результаты численного исследования математических ожиданий случайных величин, описывающих число контактов восприимчивых индивидуумов с заразными индивидуумами и с заражённой поверхностью в расчёте на одного восприимчивого индивидуума за фиксированный промежуток времени.

Ключевые слова: случайный процесс, дифференциальное уравнение с разрывной правой частью, метод Монте-Карло, вычислительный эксперимент, эпидемиология.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.209

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья продолжает исследования [1–4], связанные с разработкой методов стохастического моделирования эпидемического процесса среди населения некоторого региона. Одним из основных путей, приводящих к развитию эпидемического процесса при острой респираторной вирусной инфекции, являются контакты восприимчивых и заразных индивидуумов, которые имеют локальный характер как по времени, так и по местам их совместного пребывания. В работе рассматривается модель, описывающая начальный этап формирования когорты латентно-инфицированных индивидуумов, возникающих из восприимчивых индиви-

Статья подготовлена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF–2022–0003).

дуумов, посещающих некоторый объект (магазин, спортивный клуб, учреждение культуры, кафе, офис и пр.) и находящихся на территории объекта некоторое ограниченное время.

Специфика модели состоит в учёте двух факторов. Первый фактор связан с описанием потока индивидуумов на объект. Принимаем, что индивидуумы поступают на объект как по отдельности, так и в составе группы, включающей не менее двух индивидуумов. Группа индивидуумов может состоять только из восприимчивых или только из заразных индивидуумов, но может включать одновременно и восприимчивых, и заразных индивидуумов. Индивидуумы, поступившие на объект в составе некоторой группы, покидают объект в составе этой же группы. Длительности пребывания на территории объекта отдельно поступивших индивидуумов и индивидуумов, поступивших в составе некоторой группы, задаются с помощью распределений, отличных от экспоненциального. Параметры указанных распределений могут зависеть от численности группы поступивших на объект индивидуумов. Перечисленные особенности формирования потока индивидуумов на объект используются впервые при разработке стохастической модели эпидемического процесса. Для описания потока индивидуумов на объект, длительности их пребывания на объекте и контактов индивидуумов между собой применяется подход, приведённый в [4].

Второй фактор обусловлен возможностью непосредственной и опосредованной передачи инфекции между индивидуумами. Полагаем, что за время своего пребывания на территории объекта заразные индивидуумы распространяют вирусные частицы, содержащиеся в выделяемой ими воздушно-капельной смеси. Некоторое количество этой воздушно-капельной смеси оседает на поверхности различных предметов в общедоступных для индивидуумов местах объекта. Этот процесс приводит к формированию заражённой поверхности, т. е. поверхности различных предметов, содержащей осевшую воздушно-капельную смесь с вирусными частицами. Восприимчивые индивидуумы, находящиеся достаточно близко к заразным индивидуумам либо касающиеся заражённой поверхности, могут быть подвержены инфицированию. Вирусные частицы, находящиеся на заражённой поверхности, погибают вследствие естественного распада и могут уничтожаться за счёт санитарной обработки. Для описания контактов индивидуумов с заражённой поверхностью применяется дифференциальное уравнение с разрывной правой частью и разрывными начальными данными. При разработке соответствующего фрагмента модели используется подход, предложенный в [5, 6].

Необходимость учёта указанных факторов возникает, например, при моделировании распространения эпидемии Ковид-19 (требования по сохранению дистанции между индивидуумами не менее 1.5 м, ношению масок и перчаток, регулярной санитарной обработки различных помещений и т. д.).

В рамках представленной ниже модели динамика численности восприимчивых и заразных индивидуумов изучается на относительно коротком промежутке времени: сутки или несколько часов. В связи с этим не учитываются процессы, обусловленные миграцией или естественной смертностью индивидуумов, а также не рассматриваются процессы, непосредственно описывающие формирование когорт латентно-инфицированных и заразных индивидуумов. В модели изучаются случайные величины, описывающие число контактов восприимчивых и заразных индивидуумов и число контактов восприимчивых индивидуумов с заражённой поверхностью. Под контактами восприимчивых и заразных индивидуумов понимается ситуация, при которой эти индивидуумы находятся в непосредственной близости друг от друга. Под контактами восприимчивых (и заразных) индивидуумов с поверхностью различных предметов понимается непосредственное касание индивидуумов той или иной поверхности.

В задачи работы входит: 1) вероятностная формализация модели, 2) разработка алгоритма численного моделирования на основе метода Монте-Карло, 3) исследование математических ожиданий случайных величин, описывающих число контактов восприимчивых индивидуумов с заразными индивидуумами и с заражённой поверхностью в расчёте на одного

восприимчивого индивидуума за фиксированный промежуток времени в зависимости от параметров модели.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТУЛАТЫ МОДЕЛИ

Пусть W — объект, который в течение определённого периода времени посещают восприимчивые индивидуумы, образующие когорту A_1 , и заразные индивидуумы, образующие когорту A_2 . Восприимчивые и заразные индивидуумы могут посещать объект W как по одному, так и в составе некоторой группы индивидуумов, объединённых по тому или иному признаку. Обозначим через γ_1, γ_2 целые неотрицательные константы или целочисленные неотрицательные случайные величины. Положим, что для фиксированных γ_1, γ_2 выражение $U_{\gamma_1, \gamma_2} = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2$ означает совокупность индивидуумов, состоящую из γ_1 индивидуумов когорты A_1 и γ_2 индивидуумов когорты A_2 . Совокупность U_{γ_1, γ_2} может включать от одного до нескольких индивидуумов когорт A_1, A_2 , и равенство $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ не допускается. Обозначим через C поверхность различных предметов в общедоступных местах объекта W , содержащую оседающую воздушно-капельную смесь с вирусными частицами, выделяемыми заразными индивидуумами.

Введём набор постулатов, определяющих динамику когорт A_1, A_2 , совокупностей U_{γ_1, γ_2} и площади поверхности C . Обозначим: $x_1(t), x_2(t)$ — численность когорт A_1, A_2 ; $x_3(t)$ — количество совокупностей U_{γ_1, γ_2} ; $c(t)$ — площадь поверхности C в момент времени t на объекте W . Принимаем, что для каждого фиксированного t переменные $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ — целочисленные неотрицательные случайные величины, переменная $c(t)$ — неотрицательная константа вещественного типа. Положим, что случай $c(t) = 0$ интерпретируется как отсутствие смеси, содержащей вирусные частицы на поверхности различных предметов в общедоступных для индивидуумов местах объекта W . В этом случае под C понимается поверхность C_0 , не содержащая вирусных частиц в составе смеси на поверхности различных предметов в общедоступных для индивидуумов местах объекта W .

Зафиксируем t и примем, что $x_1(t) = u_1, x_2(t) = u_2, x_3(t) = u_3$ — целочисленные неотрицательные константы, $c(t) = v$ — неотрицательная константа вещественного типа. Условимся, что каждое из событий, происходящих с произвольно выбранными индивидуумами когорт A_1, A_2 , выполняется независимо от поведения и свойств остальных индивидуумов этих когорт, присутствующих на объекте W , а также от площади поверхности C в момент времени t .

Полагаем, что при фиксированных u_1, u_2, u_3 приток новых индивидуумов на объект W не имеет ограничений по численности.

При отсутствии санитарной обработки поверхностей различных предметов в общедоступных местах объекта W динамика переменной $c(s)$ при $s > t$ определяется линейным дифференциальным уравнением с начальным условием $c(t) = v$, где v — вещественная неотрицательная константа. Правая часть дифференциального уравнения и решение $c(s)$ возникающей задачи Коши допускают разрывы первого рода, обусловленные последующими скачкообразными изменениями констант u_1, u_2, u_3, v , а также проведением санитарной обработки поверхностей различных предметов в общедоступных местах объекта W . Во всех приведённых ниже дифференциальных уравнениях производная от функции $c(s)$ при $s = t$ понимается как её правосторонняя производная.

Постулаты модели таковы.

Н1. В течение промежутка $(t; t+h)$ с вероятностью $\rho h + o(h)$ на объект W поступает совокупность индивидуумов U_{γ_1, γ_2} , состоящая из одного или нескольких индивидуумов когорт A_1 и (или) A_2 ; вероятность поступления на объект W более одной совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} равна $o(h)$; на объект W не поступает ни одной совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} с вероятностью $1 - \rho h + o(h)$, $h \rightarrow 0+$. Константа $\rho > 0$ задаёт интенсивность поступления индивидуумов на объект W . Полагаем, что количество индивидуумов когорт A_1, A_2 , поступивших

в некоторый момент времени t на объект W в составе совокупности U_{γ_1, γ_2} , описывается случайным вектором (γ_1, γ_2) , распределённым на множестве

$$\Gamma_{m,m} = \{0, 1, 2, \dots, m\} \times \{0, 1, 2, \dots, m\},$$

где $m \geq 1$ — целочисленная константа, а закон распределения имеет вид

$$P\{(\gamma_1, \gamma_2) = (i, j)\} = q_{i,j} \geq 0, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad q_{0,0} = 0, \quad \sum_{i,j=0}^m q_{i,j} = 1. \quad (1)$$

Если $(\gamma_1, \gamma_2) = (1, 0)$, $(\gamma_1, \gamma_2) = (0, 1)$, то на объект W поступает один индивидуум соответственно когорты A_1 , A_2 . Случаи $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (1, 0)$, $(\gamma_1, \gamma_2) \neq (0, 1)$ отражают ситуацию, когда на объект W одновременно поступает несколько индивидуумов когорты A_1 и (или) когорты A_2 .

Н2. Совокупность индивидуумов U_{γ_1, γ_2} , поступивших объект W в момент времени t_U , пребывает на этом объекте в течение промежутка времени $(t_U; t_U + \omega_{\gamma_1, \gamma_2})$ и в момент времени $t_U + \omega_{\gamma_1, \gamma_2}$ покидает объект W . Случайная величина $\omega_{\gamma_1, \gamma_2}$ задаёт длительность пребывания совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} на объекте W и имеет функцию распределения, параметрически зависящую от γ_1, γ_2 . Полагаем, что для фиксированных γ_1, γ_2 величина $\omega_{\gamma_1, \gamma_2}$ распределена на промежутке $[0; \hat{\omega}_{\gamma_1, \gamma_2}]$ с функцией распределения $F_{\gamma_1, \gamma_2}(a)$ такой, что $F_{\gamma_1, \gamma_2}(0) = 0$, $F_{\gamma_1, \gamma_2}(\hat{\omega}_{\gamma_1, \gamma_2}) = 1$, где константа $\hat{\omega}_{\gamma_1, \gamma_2} > 0$ задаёт максимально допустимую длительность пребывания совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} на объекте W , $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_{m,m}$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, множество $\Gamma_{m,m}$ указано в постулате Н1.

Н3. В течение промежутка $(t; t + h)$ с вероятностью $g(u_1, u_2)h + o(h)$ происходит контакт пары индивидуумов когорт A_1, A_2 , приводящий к возможному инфицированию индивидуума когорты A_1 (такой контакт назовём эффективным); вероятность осуществления указанных контактов двумя и более парами индивидуумов когорт A_1, A_2 за промежуток $(t; t + h)$, равна $o(h)$; с вероятностью $1 - g(u_1, u_2)h + o(h)$ эффективный контакт пары индивидуумов когорт A_1, A_2 за промежуток $(t; t + h)$ не происходит, $h \rightarrow 0+$. Индивидуумы когорт A_1, A_2 , принявшие участие в контакте между собой, выбираются равномерно из существующих в текущий момент времени индивидуумов этих когорт.

Вещественная функция $g(u_1, u_2) \geq 0$ от целочисленных аргументов $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ задаёт интенсивность эффективных контактов индивидуумов когорт A_1, A_2 . Полагаем, что $g(u_1, u_2)$ не убывает по u_1, u_2 и $g(u_1, u_2) = 0$, если $u_1 u_2 = 0$.

Н4. Пусть на некотором промежутке времени $[t; t + \xi)$, $\xi > 0$, численность индивидуумов когорты A_2 сохраняется неизменной и равной u_2 , в общедоступных местах индивидуумы когорт A_1, A_2 не контактируют с поверхностью C и не проводится санитарная обработка поверхности различных предметов в общедоступных местах объекта W . Полагаем, что функция $c(s)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dc(s)}{ds} = \sigma u_2 - \lambda c(s), \quad s \in [t; t + \xi), \quad (2)$$

$$c(t) = v. \quad (3)$$

В формуле (2) константа $\sigma > 0$ задаёт скорость увеличения площади поверхности C , на которую оседают вирусные частицы из воздушно-капельной смеси, выделяемой одним индивидуумом когорты A_2 . Константа $\lambda > 0$ задаёт интенсивность уменьшения площади поверхности C за счёт естественной гибели находящихся там вирусных частиц.

Пусть в момент времени $t + \xi$ проводится мгновенная санитарная обработка поверхности различных предметов в общедоступных местах объекта W . Тогда полагаем, что

$$c(t + \xi) = (1 - \delta)c(t + \xi - 0), \quad (4)$$

где $c(t + \xi - 0) = \lim_{s \rightarrow t + \xi - 0} c(s)$, $c(s)$ — решение задачи Коши (2), (3). В формуле (4) константа $0 < \delta \leq 1$ интерпретируется как доля поверхности C , уменьшаемой при однократной санитарной обработке.

Н5. В течение промежутка $(t; t + h)$ с вероятностью $\beta(u_1 + u_2)h + o(h)$ индивидуум когорты A_1 или когорты A_2 контактирует с поверхностью C ; вероятность контакта с поверхностью C двумя и более индивидуумами когорты A_1, A_2 за промежуток $(t; t + h)$ равна $o(h)$; индивидуумы когорты A_1, A_2 не контактируют с поверхностью C за промежуток $(t; t + h)$ с вероятностью $1 - \beta(u_1 + u_2)h + o(h)$, $h \rightarrow 0+$. Константа $\beta > 0$ означает интенсивность контактов индивидуумов когорты A_1, A_2 с поверхностью C , обусловленных перемещением индивидуумов по общедоступным местам объекта W . Индивидуумы когорты A_1, A_2 , принявшие участие в контакте с поверхностью C , выбираются равномерно из существующих в текущий момент времени индивидуумов этих когорты.

Пусть контакт индивидуума когорты A_1 или когорты A_2 с поверхностью C происходит в момент времени $t + \theta \in (t; t + \xi)$, где момент времени ξ указан в постулате Н4. Тогда соотношения (2), (3) заменяются на соотношения

$$\frac{dc(s)}{ds} = \sigma u_2 - \lambda c(s), \quad s \in [t; t + \theta), \quad (5)$$

$$c(t) = v, \quad (6)$$

$$\frac{dc(s)}{ds} = \sigma u_2 - \lambda c(s), \quad s \in [t + \theta; t + \xi), \quad (7)$$

$$c(t + \theta) = \max\{0, c(t + \theta - 0) - \varphi\}, \quad (8)$$

где $c(t + \theta - 0) = \lim_{s \rightarrow t + \theta - 0} c(s)$, $c(s)$ — решение задачи Коши (5), (6). Константа $\varphi > 0$, входящая в (8), отражает среднюю площадь ладони индивидуумов когорты A_1, A_2 . Принимаем, что константа φ многократно меньше максимально возможного значения $c(s)$ (площадь всех общедоступных для индивидуумов мест на объекте W). Введём константу $0 < \varphi_* < \varphi$, интерпретируемую следующим образом. Если $c(t + \theta - 0) \geq \varphi_*$, то полагаем, что контакт индивидуума когорты A_1 с поверхностью C может приводить к инфицированию этого индивидуума. (Такой контакт назовём эффективным.) Если $0 \leq c(t + \theta - 0) < \varphi_*$, то контакт индивидуума когорты A_1 с поверхностью C не приводит к инфицированию этого индивидуума. (Такой контакт назовём неэффективным.) Отметим, что в случае $c(t + \theta - 0) = 0$ индивидуум когорты A_1 или когорты A_2 контактирует с поверхностью $C \equiv C_0$, не содержащей вирусных частиц.

Из постулата Н1 следует, что когорты A_1, A_2 пополняются в некоторый момент времени одним или несколькими индивидуумами. Процесс пополнения когорты A_1, A_2 новыми индивидуумами задаётся пуассоновским потоком с интенсивностью $\rho > 0$. Вероятность совпадения моментов поступления на объект W очередных совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} равна нулю. В соответствии с постулатом Н2 процесс исключения индивидуумов из когорты A_1, A_2 обусловлен завершением пребывания на объекте W индивидуумов, поступивших на этот объект в составе некоторой совокупности.

Опираясь на постулаты Н1, Н2, будем говорить, что пара величин $(t_U, \omega_{\gamma_1, \gamma_2})$ понимается как уникальный тип совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} , поступивших на объект W в некоторый момент времени t_U и находящихся на этом объекте в течение времени $\omega_{\gamma_1, \gamma_2}$.

Для фиксированного момента времени t будем рассматривать совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} , уникальные типы которых удовлетворяют условию

$$t_U \leq t < t_U + \omega_{\gamma_1, \gamma_2}. \quad (9)$$

Соотношение (9) учитывает только тех индивидуумов, которые появились на объекте W до момента времени t (включительно) и покидают объект W в момент времени, следующий за t ,

т. е. всех тех индивидуумов, которые присутствуют на объекте W в момент времени t . Для фиксированного t количество совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} , удовлетворяющих соотношению (9), описывается переменной $x_3(t)$.

Пусть в момент времени t на объекте W имеется $x_3(t) = k \geq 1$ совокупностей U_{γ_1, γ_2} . Полагаем, что эти совокупности задаются семейством

$$\Omega(t) = \left\{ (t_U^{(1)}, \omega_{\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}}^{(1)}); \dots; (t_U^{(k)}, \omega_{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}}^{(k)}) \right\},$$

каждый элемент которого удовлетворяет соотношению (9), а именно:

$$t_U^{(1)} \leq t < t_U^{(1)} + \omega_{\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}}^{(1)}, \dots, t_U^{(k)} \leq t < t_U^{(k)} + \omega_{\gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}}^{(k)}. \quad (10)$$

Для фиксированного $1 \leq i \leq k$ элемент $(t_U^{(i)}, \omega_{\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}}^{(i)}) \in \Omega(t)$ содержит момент $t_U^{(i)}$ поступления на объект W очередной совокупности индивидуумов $U_{\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}}$, состоящей из $\gamma_1^{(i)}$ индивидуумов когорты A_1 , $\gamma_2^{(i)}$ индивидуумов когорты A_2 и находящихся на этом объекте в течение времени $\omega_{\gamma_1^{(i)}, \gamma_2^{(i)}}^{(i)}$. Отметим, что

$$\gamma_1^{(1)} + \dots + \gamma_1^{(k)} = x_1(t), \quad \gamma_2^{(1)} + \dots + \gamma_2^{(k)} = x_2(t).$$

Если в момент времени t на объекте W отсутствуют индивидуумы когорты A_1 , A_2 , т. е. $x_1(t) = x_2(t) = 0$, что равносильно соотношению $x_3(t) = 0$, то полагаем, что $\Omega(t) = \emptyset$.

Под решением задач Коши (2), (3); (5), (6); (7), (8) понимается функция $c(s)$, непрерывно дифференцируемая на соответствующих промежутках, удовлетворяющая последовательно дифференциальным уравнениям (2), (5), (7) и начальным данным (3), (6), (8). Решение каждой из перечисленных задач Коши существует, единственно, является неотрицательным и выписывается в явной форме.

Обозначим через $[0; T_{\text{mod}}]$ промежуток моделирования, где $T_{\text{mod}} > 0$ — некоторая константа. Для описания динамики когорты A_1 , A_2 , совокупностей U_{γ_1, γ_2} и площади поверхности C при $t \in [0; T_{\text{mod}}]$ используем случайный процесс

$$Z(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), c(t), \Omega(t)). \quad (11)$$

Полагаем, что

$$Z(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0), c(0), \Omega(0)) \quad (12)$$

состоит из заданных целочисленных констант $x_1(0) = x_1^0 \geq 0$, $x_2(0) = x_2^0 \geq 0$, $x_3(0) = x_3^0 \geq 0$, заданной вещественной константы $c(0) = c^0 \geq 0$ и фиксированного (неслучайного) множества $\Omega(0) = \Omega^{(0)}$. Если $x_3^0 = 0$, то $\Omega^{(0)} = \emptyset$.

В случае $x_3^0 = k \geq 1$ элементы непустого множества

$$\Omega^{(0)} = \left\{ (t_U^{(0,1)}, \omega_{\gamma_1^{(0,1)}, \gamma_2^{(0,1)}}^{(0,1)}); \dots; (t_U^{(0,k)}, \omega_{\gamma_1^{(0,k)}, \gamma_2^{(0,k)}}^{(0,k)}) \right\} \quad (13)$$

удовлетворяют соотношению (10) при $t = 0$ и условию последовательного поступления совокупностей индивидуумов на объект W до момента времени $t = 0$ (включительно), а именно:

$$t_U^{(0,1)} \leq 0 < t_U^{(0,1)} + \omega_{\gamma_1^{(0,1)}, \gamma_2^{(0,1)}}^{(0,1)}, \dots, t_U^{(0,k)} \leq 0 < t_U^{(0,k)} + \omega_{\gamma_1^{(0,k)}, \gamma_2^{(0,k)}}^{(0,k)}, \quad (14)$$

$$t_U^{(0,1)} < \dots < t_U^{(0,k)} \leq 0. \quad (15)$$

Отметим, что случай $c^0 = 0$ или $c(t) = 0$ для некоторых $t \in (0; T_{\text{mod}}]$ отражает отсутствие вирусных частиц на поверхности различных предметов в общедоступных для индивидуумов местах объекта W .

В дополнение к переменным (11) введём многомерный считающий случайный процесс:

$$K(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), \nu(t), \mu(t), \eta(t)), \quad t \in [0; T_{\text{mod}}]. \quad (16)$$

Для фиксированного $t \in [0; T_{\text{mod}}]$ компоненты $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$, $\nu(t)$, $\mu(t)$, $\eta(t)$ представляют собой неотрицательные дискретные случайные величины. Величины $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ означают количество индивидуумов когорты A_1 , A_2 и совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} , поступивших на объект W за период времени $[0; t]$. Величина $\nu(t)$ означает число эффективных контактов индивидуумов когорты A_1 с индивидуумами когорты A_2 , величина $\mu(t)$ — число эффективных контактов индивидуумов когорты A_1 с поверхностью C за период времени $[0; t]$. Величина $\eta(t)$ описывает число неэффективных контактов индивидуумов когорты A_1 с поверхностью C , а также число контактов индивидуумов когорты A_1 , A_2 с поверхностью, на которой отсутствуют (удалены) вирусные частицы ($C = C_0$), за период времени $[0; t]$. Полагаем, что $K(0)$ содержит нулевые константы, т. е.

$$K(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0), \nu(0), \mu(0), \eta(0)) = (0, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (17)$$

Тройка величин $y_1(T_{\text{mod}})$, $y_2(T_{\text{mod}})$, $y_3(T_{\text{mod}})$ означает количество индивидуумов когорты A_1 , A_2 и совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} , поступивших на объект W за весь период $[0; T_{\text{mod}}]$. Каждая из величин $\nu(T_{\text{mod}})$, $\mu(T_{\text{mod}})$ отражает потенциально возможное количество латентно-инфицированных индивидуумов, возникающих из индивидуумов когорты A_1 за период времени $[0; T_{\text{mod}}]$. Величина $\eta(T_{\text{mod}})$ отражает «качество» санитарной обработки поверхностей различных предметов в общедоступных местах объекта W за период времени $[0; T_{\text{mod}}]$.

Полагаем, что процесс санитарной обработки поверхностей различных предметов в общедоступных местах объекта W осуществляется в фиксированные моменты времени τ_j , $1 \leq j \leq \ell + 1$, такие, что

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_\ell < T_{\text{mod}} < \tau_{\ell+1}. \quad (18)$$

Константа $\tau_{\ell+1}$ задаёт момент санитарной обработки указанных поверхностей за границами промежутка моделирования.

Дополнительно отметим возможную интерпретацию моментов времени $t = 0$ и $t = T_{\text{mod}}$. Момент $t = 0$ может означать время открытия объекта W для посещения индивидуумов. Тогда принимаем, что в (12) все константы имеют нулевые значения и $\Omega^{(0)} = \emptyset$. Момент $t = T_{\text{mod}}$ может означать время закрытия объекта W для посещения индивидуумов. Тогда полагаем, что компоненты $Z(T_{\text{mod}})$ отражают всех посетителей, которые покидают объект W , независимо от их времени прихода на этот объект и планируемого времени пребывания на территории объекта.

2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

2.1. Закономерности изменения компонент случайного процесса $(Z(t), K(t))$ на промежутке времени $[0; T_{\text{mod}}]$ опишем с помощью последовательности

$$(t_n, Z(t_n), K(t_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t_n \leq T_{\text{mod}}.$$

Здесь $t_0 = 0$ — начальный момент времени, компоненты $Z(t_0)$, $K(t_0)$ заданы соотношениями (12)–(15), (17). Без ограничения общности примем, что при $x_3^0 \geq 1$ элементы множества (13) таковы, что $t_U^{(0,i)} + \omega_{\gamma_1^{(0,i)}, \gamma_2^{(0,i)}}^{(0,i)}$ не совпадают с элементами набора (18) и концом промежутка моделирования T_{mod} , $1 \leq i \leq x_3^0$.

Каждый последующий t_{n+1} , $n \geq 0$, означает момент времени, в который происходит скачкообразное изменение компонент процесса $(Z(t), K(t))$ от $(Z(t_n), K(t_n))$ до $(Z(t_{n+1}), K(t_{n+1}))$, обусловленных наступлением одного из событий, указанных в постулатах Н1–Н5.

2.2. Пусть $t = t_n \in [0; T_{\text{mod}})$ — заданный момент времени, $n = 0, 1, 2, \dots$, $t_0 = 0$. Примем, что значения компонент $Z(t_n)$, $K(t_n)$ фиксированы, а именно:

$$\begin{aligned} Z(t_n) &= (x_1(t_n), x_2(t_n), x_3(t_n), c(t_n), \Omega(t_n)), \\ K(t_n) &= (y_1(t_n), y_2(t_n), y_3(t_n), \nu(t_n), \mu(t_n), \eta(t_n)), \end{aligned} \quad (19)$$

где $x_1(t_n) \geq 0$, $x_2(t_n) \geq 0$, $x_3(t_n) \geq 0$, $y_1(t_n) \geq 0$, $y_2(t_n) \geq 0$, $y_3(t_n) \geq 0$, $\nu(t_n) \geq 0$, $\mu(t_n) \geq 0$, $\eta(t_n) \geq 0$ — некоторые целочисленные константы, $c(t_n) \geq 0$ — некоторая вещественная константа, $\Omega(t_n)$ — заданное семейство уникальных типов совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} такое, что

$$\text{если } x_3(t_n) = 0, \quad \text{то } \Omega(t_n) = \emptyset, \quad (20)$$

$$\text{если } x_3(t_n) = k \geq 1, \quad \text{то } \Omega(t_n) = \left\{ (t_U^{(n,1)}, \omega_{\gamma_1^{(n,1)}, \gamma_2^{(n,1)}}^{(n,1)}); \dots; (t_U^{(n,k)}, \omega_{\gamma_1^{(n,k)}, \gamma_2^{(n,k)}}^{(n,k)}) \right\}, \quad (21)$$

$$t_U^{(n,1)} \leq t_n < t_U^{(n,1)} + \omega_{\gamma_1^{(n,1)}, \gamma_2^{(n,1)}}^{(n,1)}, \dots, t_U^{(n,k)} \leq t_n < t_U^{(n,k)} + \omega_{\gamma_1^{(n,k)}, \gamma_2^{(n,k)}}^{(n,k)}, \quad (22)$$

$$t_U^{(n,1)} < \dots < t_U^{(n,k)} \leq t_n. \quad (23)$$

Опишем закон изменения $Z(t_n)$, $K(t_n)$, опираясь на постулаты Н1–Н5.

Обратимся к постулату Н2 без учёта постулатов Н1, Н3, Н4, Н5. Положим

$$\psi_n = \min_{1 \leq j \leq x_3(t_n)} \left\{ t_U^{(n,j)} + \omega_{\gamma_1^{(n,j)}, \gamma_2^{(n,j)}}^{(n,j)} \right\} = t_U^{(n,*)} + \omega_{\gamma_1^{(n,*)}, \gamma_2^{(n,*)}}^{(n,*)}, \quad \text{если } x_3(t_n) \neq 0, \quad (24)$$

$$\psi_n = +\infty, \quad \text{если } x_3(t_n) = 0. \quad (25)$$

В формуле (24) $(t_U^{(n,*)}, \omega_{\gamma_1^{(n,*)}, \gamma_2^{(n,*)}}^{(n,*)})$ означает единственный элемент из $\Omega(t_n)$, на котором достигается равенство $\psi_n = t_U^{(n,*)} + \omega_{\gamma_1^{(n,*)}, \gamma_2^{(n,*)}}^{(n,*)}$. Конечная величина ψ_n определяет ближайший к t_n (справа) момент времени, в который индивидуумы, входящие в совокупность $U_{\gamma_1^{(n,*)}, \gamma_2^{(n,*)}}$, покидают объект W . Это событие приводит к скачкообразному изменению некоторых из компонент $Z(t_n)$, $K(t_n)$, включая возможное изменение параметра u_2 дифференциального уравнения для переменной $c(s)$, описывающего динамику площади поверхности C . Если $\psi_n > T_{\text{mod}}$, то изменения некоторых из компонент $Z(t_n)$, $K(t_n)$ и параметра u_2 осуществляются за границами промежутка моделирования. Формула (25) соответствует случаю, когда на объекте W отсутствуют индивидуумы каждой из когорт A_1, A_2 .

Обратимся к постулату Н4 без учёта постулатов Н1, Н2, Н3, Н5. Рассмотрим последовательность $\{\tau_j\}$, представленную в (18). Пусть τ_{j_n} — элемент этой последовательности такой, что $\tau_{j_n-1} \leq t_n < \tau_{j_n}$, $j_n > 1$; при $j_n = 1$ используем неравенство $t_n < \tau_{j_n} = \tau_1$. Полагаем, что τ_{j_n} определяет момент времени, когда происходит первое скачкообразное изменение переменной $c(s)$, описывающей динамику площади поверхности C , считая от t_n , обусловленное проведением мгновенной санитарной обработки поверхности. Указанное изменение не затрагивает остальные компоненты $Z(t_n)$, $K(t_n)$, а также параметр u_2 , входящий в дифференциальное уравнение для переменной $c(s)$. Если $j_n = \ell + 1$, то $\tau_{j_n} > T_{\text{mod}}$ и мгновенная санитарная обработка поверхности осуществляется за границами промежутка моделирования.

Обратимся к постулатам Н1, Н3, Н5, используя соотношения (24), (25) (постулат Н2) и не учитывая постулат Н4. Зафиксируем промежуток $(t_n; \psi_n)$. Рассмотрим момент первого наступления одного из событий, указанных в постулатах Н1, Н3, Н5, полагая, что до этого

момента времени численности когорт A_1 , A_2 и совокупностей U_{γ_1, γ_2} таковы, что $x_1(t) = x_1(t_n)$, $x_2(t) = x_2(t_n)$, $x_3(t) = x_3(t_n)$ при всех $t \in (t_n; \psi_n)$. Обозначим через

$$\xi_n \sim \text{Exp}(Q(x_1(t_n), x_2(t_n))) \quad (26)$$

случайную величину с экспоненциальным распределением, где

$$Q(x_1(t_n), x_2(t_n)) = \rho + g(x_1(t_n), x_2(t_n)) + \beta(x_1(t_n) + x_2(t_n)).$$

Отметим, что $Q(x_1(t_n), x_2(t_n)) > 0$. Пусть $t_n + \xi_n < \psi_n$ и $t_n + \xi_n \leq T_{\text{mod}}$. Тогда $t_n + \xi_n$ — момент первого изменения некоторых из компонент $Z(t_n)$, $K(t_n)$, включая возможное изменение параметра u_2 дифференциального уравнения для переменной $c(s)$, описывающего динамику площади поверхности C . Если $t_n + \xi_n > T_{\text{mod}}$, то изменения некоторых из компонент $Z(t_n)$, $K(t_n)$ и возможное изменение параметра u_2 осуществляются за границами промежутка моделирования. Если $t_n + \xi_n \geq \psi_n$, то изменения некоторых из компонент $Z(t_n)$, $K(t_n)$ и возможное изменение параметра u_2 осуществляются в рамках соотношений, не входящих в постулаты Н1, Н3, Н5.

2.3. Используя (18)–(26), перейдём от момента времени t_n к моменту

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= \min\{T_{\text{mod}}, \tau_{j_n}, \psi_n, t_n + \xi_n\}, \quad \text{если } \psi_n < +\infty, \\ t_{n+1} &= \min\{T_{\text{mod}}, \tau_{j_n}, t_n + \xi_n\}, \quad \text{если } \psi_n = +\infty. \end{aligned} \quad (27)$$

Отметим, что соотношения (27) содержат случайную величину ξ_n с экспоненциальным распределением (распределение абсолютно-непрерывного типа). Поэтому для каждого фиксированного n вероятность совпадения $T_{\text{mod}}, \tau_{j_n}, \psi_n$ с $t_n + \xi_n$ равна нулю. Если $n = 0$, то в силу допущения из п. 2.1 ψ_0 не совпадает с T_{mod} и τ_{j_0} . Для каждого следующего $n \geq 1$ совпадение $T_{\text{mod}}, \tau_{j_n}, t_n + \xi_n$ с ψ_n невозможно в силу экспоненциальных законов распределения случайных величин $t_U^{(n,j)}$, определяющих ψ_n при $x_3(t_n) \neq 0$ (см. соотношения (24), (25) и (35)–(37)).

Формулы (27) определяют момент времени t_{n+1} , которому соответствуют следующие события.

Случай С1. Текущее время $t = t_{n+1} = T_{\text{mod}}$ достигает конца промежутка моделирования.

Случай С2. Текущее время $t = t_{n+1} = \tau_{j_n}$ соответствует очередной запланированной по времени (мгновенной) санитарной обработке поверхности различных предметов в общедоступных местах объекта W .

Случай С3. В момент времени $t = t_{n+1} = \psi_n$ некоторые отдельно взятые индивидуумы когорты A_1 или когорты A_2 либо несколько индивидуумов этих когорт завершают пребывание на объекте W .

Случай С4. В момент времени при $t = t_{n+1} = t_n + \xi_n$ осуществляется приток индивидуумов когорт A_1 , A_2 на объект W (по отдельности или несколько индивидуумов сразу) либо происходит контакт некоторой пары индивидуумов когорт A_1 , A_2 между собой, либо один из индивидуумов когорты A_1 или когорты A_2 контактирует с поверхностью C .

Введём функцию

$$c_n(s) = \left(c(t_n) - \frac{\sigma x_2(t_n)}{\lambda} \right) e^{-\lambda(s-t_n)} + \frac{\sigma x_2(t_n)}{\lambda}, \quad s \in [t_n; t_{n+1}), \quad (28)$$

которая при фиксированном t_{n+1} является решением задачи Коши

$$c_n(t_n) = c(t_n), \quad \frac{dc_n(s)}{ds} = \sigma x_2(t_n) - \lambda c_n(s), \quad s \in [t_n; t_{n+1}).$$

Производная функции $c_n(s)$ при $s = t_n$ понимается как правосторонняя производная. Из (28) находим, что для функции $c_n(s)$ существует

$$\lim_{s \rightarrow t_{n+1}-0} c_n(s) = \hat{c}_n(t_{n+1}) = \left(c(t_n) - \frac{\sigma x_2(t_n)}{\lambda} \right) e^{-\lambda(t_{n+1}-t_n)} + \frac{\sigma x_2(t_n)}{\lambda}.$$

Выражение для $\hat{c}_n(t_{n+1})$ используется в приведённых ниже соотношениях при различных t_{n+1} , указанных в (27).

Рассмотрим случай С1. Пусть в формуле (27)

$$t_{n+1} = T_{\text{mod}}. \quad (29)$$

Тогда все компоненты $Z(t_n)$, $K(t_n)$, за исключением $c(t_n)$, сохраняются неизменными до конца промежутка моделирования, т. е.

$$\begin{aligned} x_1(t_{n+1}) &= x_1(t_n), & x_2(t_{n+1}) &= x_2(t_n), & x_3(t_{n+1}) &= x_3(t_n), \\ c(t_{n+1}) &= \hat{c}_n(t_{n+1}), & \Omega(t_{n+1}) &= \Omega(t_n), \\ y_1(t_{n+1}) &= y_1(t_n), & y_2(t_{n+1}) &= y_2(t_n), & y_3(t_{n+1}) &= y_3(t_n), \\ \nu(t_{n+1}) &= \nu(t_n), & \mu(t_{n+1}) &= \mu(t_n), & \eta(t_{n+1}) &= \eta(t_n). \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим случай С2. Примем, что в формуле (27)

$$t_{n+1} = \tau_{j_n}. \quad (31)$$

Тогда среди компонент $Z(t_n)$, $K(t_n)$ изменяется только $c(t_n)$, а именно:

$$\begin{aligned} x_1(t_{n+1}) &= x_1(t_n), & x_2(t_{n+1}) &= x_2(t_n), & x_3(t_{n+1}) &= x_3(t_n), \\ c(t_{n+1}) &= (1 - \delta)\hat{c}_n(t_{n+1}), & \Omega(t_{n+1}) &= \Omega(t_n), \\ y_1(t_{n+1}) &= y_1(t_n), & y_2(t_{n+1}) &= y_2(t_n), & y_3(t_{n+1}) &= y_3(t_n), \\ \nu(t_{n+1}) &= \nu(t_n), & \mu(t_{n+1}) &= \mu(t_n), & \eta(t_{n+1}) &= \eta(t_n). \end{aligned} \quad (32)$$

Рассмотрим случай С3. Примем, что в формуле (27)

$$t_{n+1} = \psi_n. \quad (33)$$

Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x_1(t_{n+1}) &= x_1(t_n) - \gamma_1^{(n,*)}, & x_2(t_{n+1}) &= x_2(t_n) - \gamma_2^{(n,*)}, & x_3(t_{n+1}) &= x_3(t_n) - 1, \\ c(t_{n+1}) &= \hat{c}_n(t_{n+1}), & \Omega(t_{n+1}) &= \Omega(t_n) \setminus (t_U^{(n,*)}, \omega_{\gamma_1^{(n,*)}, \gamma_2^{(n,*)}}^{(n,*)}), \\ y_1(t_{n+1}) &= y_1(t_n), & y_2(t_{n+1}) &= y_2(t_n), & y_3(t_{n+1}) &= y_3(t_n), \\ \nu(t_{n+1}) &= \nu(t_n), & \mu(t_{n+1}) &= \mu(t_n), & \eta(t_{n+1}) &= \eta(t_n), \end{aligned} \quad (34)$$

где $(t_U^{(n,*)}, \omega_{\gamma_1^{(n,*)}, \gamma_2^{(n,*)}}^{(n,*)})$ — исключаемый из $\Omega(t_n)$ элемент, имеющий наименьшее значение $t_U^{(n,*)} + \omega_{\gamma_1^{(n,*)}, \gamma_2^{(n,*)}}^{(n,*)}$ (см. (24)). Если в формуле (27) $\psi_n = +\infty$, то соотношения (33), (34) не используются.

Рассмотрим случай С4. Примем, что в формуле (27)

$$t_{n+1} = t_n + \xi_n. \quad (35)$$

Тогда изменения компонент $Z(t_n)$, $K(t_n)$ задаются в соответствии с вероятностями, приведёнными ниже, а именно:

с вероятностью

$$\frac{\rho}{Q(x_1(t_n), x_2(t_n))} \quad (36)$$

имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x_1(t_{n+1}) &= x_1(t_n) + \gamma_1^{(n+1)}, & x_2(t_{n+1}) &= x_2(t_n) + \gamma_2^{(n+1)}, & x_3(t_{n+1}) &= x_3(t_n) + 1, \\ c(t_{n+1}) &= \hat{c}_n(t_{n+1}), & \Omega(t_{n+1}) &= \Omega(t_n) \cup (t_{n+1}, \omega_{\gamma_1^{(n+1)}, \gamma_2^{(n+1)}}^{(n+1)}), \\ y_1(t_{n+1}) &= y_1(t_n) + \gamma_1^{(n+1)}, & y_2(t_{n+1}) &= y_2(t_n) + \gamma_2^{(n+1)}, & y_3(t_{n+1}) &= y_3(t_n) + 1, \\ \nu(t_{n+1}) &= \nu(t_n), & \mu(t_{n+1}) &= \mu(t_n), & \eta(t_{n+1}) &= \eta(t_n), \end{aligned} \quad (37)$$

где $(t_{n+1}, \omega_{\gamma_1^{(n+1)}, \gamma_2^{(n+1)}}^{(n+1)})$ — новый элемент, пополняющий $\Omega(t_n)$, пара $(\gamma_1^{(n+1)}, \gamma_2^{(n+1)})$ распределена на множестве $\Gamma_{m,m}$ с вероятностями $q_{i,j}$, указанными в формуле (1), $\omega_{\gamma_1^{(n+1)}, \gamma_2^{(n+1)}}^{(n+1)}$ — случайная величина с функцией распределения $F_{\gamma_1, \gamma_2}(a)$ при фиксированных $\gamma_1 = \gamma_1^{(n+1)}$, $\gamma_2 = \gamma_2^{(n+1)}$ (см. постулат Н2);

с вероятностью

$$\frac{g(x_1(t_n), x_2(t_n))}{Q(x_1(t_n), x_2(t_n))} \quad (38)$$

имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x_1(t_{n+1}) &= x_1(t_n), & x_2(t_{n+1}) &= x_2(t_n), & x_3(t_{n+1}) &= x_3(t_n), \\ c(t_{n+1}) &= \hat{c}_n(t_{n+1}), & \Omega(t_{n+1}) &= \Omega(t_n), \\ y_1(t_{n+1}) &= y_1(t_n), & y_2(t_{n+1}) &= y_2(t_n), & y_3(t_{n+1}) &= y_3(t_n), \\ \nu(t_{n+1}) &= \nu(t_n) + 1, & \mu(t_{n+1}) &= \mu(t_n), & \eta(t_{n+1}) &= \eta(t_n); \end{aligned} \quad (39)$$

с вероятностью

$$\frac{\beta(x_1(t_n) + x_2(t_n))}{Q(x_1(t_n), x_2(t_n))} \quad (40)$$

имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x_1(t_{n+1}) &= x_1(t_n), & x_2(t_{n+1}) &= x_2(t_n), & x_3(t_{n+1}) &= x_3(t_n), \\ c(t_{n+1}) &= \max\{0, \hat{c}_n(t_{n+1}) - \varphi\}, & \Omega(t_{n+1}) &= \Omega(t_n), \\ y_1(t_{n+1}) &= y_1(t_n), & y_2(t_{n+1}) &= y_2(t_n), & y_3(t_{n+1}) &= y_3(t_n), & \nu(t_{n+1}) &= \nu(t_n), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{если } \hat{c}_n(t_{n+1}) < \varphi_*, \text{ то } \mu(t_{n+1}) = \mu(t_n), \quad \eta(t_{n+1}) = \eta(t_n) + 1, \quad (42)$$

$$\text{если } \hat{c}_n(t_{n+1}) \geq \varphi_*, \text{ то } \eta(t_{n+1}) = \eta(t_n), \quad (43)$$

$$\mu(t_{n+1}) = \mu(t_n) + 1 \quad \text{с вероятностью } \frac{x_1(t_n)}{x_1(t_n) + x_2(t_n)}, \quad (44)$$

$$\mu(t_{n+1}) = \mu(t_n) \quad \text{с вероятностью } \frac{x_2(t_n)}{x_1(t_n) + x_2(t_n)}. \quad (45)$$

2.4. В дополнение к (19)–(45) примем, что для $s \in [t_n; t_{n+1})$ все компоненты $Z(s)$, $K(s)$, за исключением $c(s)$, сохраняются неизменными. Функция $c(s)$ находится из (28). В итоге приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} x_1(s) &= x_1(t_n), & x_2(s) &= x_2(t_n), & x_3(s) &= x_3(t_n), & c(s) &= c_n(s), & \Omega(s) &= \Omega(t_n), \\ y_1(s) &= y_1(t_n), & y_2(s) &= y_2(t_n), & y_3(s) &= y_3(t_n), \\ \nu(s) &= \nu(t_n), & \mu(s) &= \mu(t_n), & \eta(s) &= \eta(t_n), & s &\in [t_n; t_{n+1}). \end{aligned} \quad (46)$$

Если выполнено соотношение (29), то завершаем описание процесса $Z(t), K(t)$. Если соотношение (29) не выполнено, то заменяем t_n на t_{n+1} , фиксируем компоненты $Z(t_{n+1}), K(t_{n+1})$, находим момент времени t_{n+2} , применяя формулы (31), (33), (35), и, используя $t_{n+2}, Z(t_{n+1}), K(t_{n+1})$, повторяем процедуру, заданную формулами (19)–(46).

Полагаем, что для $n = 0, 1, 2, \dots$, случайные векторы $(\gamma_1^{(n+1)}, \gamma_2^{(n+1)})$ и величины ξ_n являются независимыми в совокупности; случайные величины ξ_n и $\omega_{\gamma_1^{(n,j)}, \gamma_2^{(n,j)}}^{(n,j)}$, используемые в (24), независимы в совокупности; распределение случайных величин $\omega_{\gamma_1^{(n,j)}, \gamma_2^{(n,j)}}^{(n,j)}$ при фиксированном n зависит от пары $(\gamma_1^{(n,j)}, \gamma_2^{(n,j)})$.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Численное исследование модели основано на применении метод Монте-Карло. Для проведения вычислительных экспериментов и построения реализаций изучаемых переменных используется алгоритм, основанный на рекуррентных соотношениях, описанных в разд. 2. Для генерации возникающих в алгоритме случайных величин применяются формулы и датчики псевдослучайных чисел, описанные в работах [7-9].

Алгоритм моделирования одной реализации изучаемых переменных состоит из нескольких шагов.

ШАГ 0. Задаём значения параметров модели, константу T_{mod} , полагаем $t_0 = 0, n = 0$. Фиксируем начальное состояние переменных модели $Z(t_0), K(t_0)$. Задаём константу T_∞ такую, что $T_\infty > T_{\text{mod}}$. Переходим на шаг 1.

ШАГ 1. Для фиксированных n и t_n находим величину ψ_n , используя формулы (24), (25). Если окажется, что $\Omega(t_n) = \emptyset$, что равносильно равенству $x_3(t_n) = 0$, то в (25) полагаем, что $\psi_n = T_\infty$. Переходим на шаг 2.

ШАГ 2. Для фиксированных n и t_n находим элемент $\tau_j^{(n)}$ последовательности (18), удовлетворяющий соотношению $t_n < \tau_1$ или $\tau_{j-1}^{(n)} \leq t_n < \tau_j^{(n)}, j = 2, \dots, \ell + 1$. Переходим на шаг 3.

ШАГ 3. Для фиксированных $n, t_n, x_1(t_n), x_2(t_n)$ вычисляем константу $Q(x_1(t_n), x_2(t_n))$, входящую в формулу (26). Генерируем экспоненциально распределённую случайную величину ξ_n с параметром $Q(x_1(t_n), x_2(t_n))$. Переходим на шаг 4.

ШАГ 4. Вычисляем момент времени t_{n+1} по формуле (27). Если выполнено соотношение (29), то находим компоненты $Z(t_{n+1}), K(t_{n+1})$ по формуле (30) и переходим на шаг 8. Если соотношение (29) не выполнено, то при выполнении (31) переходим на шаг 5, при выполнении (33) — на шаг 6, при выполнении (35) — на шаг 7.

ШАГ 5. Находим компоненты $Z(t_{n+1}), K(t_{n+1})$, используя соотношения (32). Заменяем n на $n + 1$ и возвращаемся на шаг 1.

ШАГ 6. Находим компоненты $Z(t_{n+1}), K(t_{n+1})$, используя соотношения (34). Заменяем n на $n + 1$ и возвращаемся на шаг 1.

ШАГ 7. Находим компоненты $Z(t_{n+1}), K(t_{n+1})$, используя соотношения (36)–(45). Заменяем n на $n + 1$ и возвращаемся на шаг 1.

ШАГ 8. Запоминаем значения компонент $Z(T_{\text{mod}}), K(T_{\text{mod}})$ и завершаем моделирование.

Алгоритм моделирования реализован в виде консольной моделирующей программы, написанной на языке программирования C++ в интегрированной среде разработки Visual Studio 2008. Входные параметры считываются из специального конфигурационного файла. Результаты моделирования (реализации переменных модели) сохраняются в отдельный текстовый файл.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Целью вычислительных экспериментов является изучение математических ожиданий

$$E_{\nu/y_1} = \mathbf{E} \left(\frac{\nu(T_{\text{mod}})}{y_1(T_{\text{mod}})} \right), \quad (47)$$

$$E_{\mu/y_1} = \mathbf{E} \left(\frac{\mu(T_{\text{mod}})}{y_1(T_{\text{mod}})} \right) \quad (48)$$

случайных величин $\nu(T_{\text{mod}})/y_1(T_{\text{mod}})$, $\mu(T_{\text{mod}})/y_1(T_{\text{mod}})$ при условии $y_1(T_{\text{mod}}) > 0$. Величина $\nu(T_{\text{mod}})/y_1(T_{\text{mod}})$, входящая в (47), отражает число контактов индивидуумов когорты A_1 с индивидуумами когорты A_2 в расчёте на одного индивидуума когорты A_1 за период времени $[0; T_{\text{mod}}]$. Величина $\mu(T_{\text{mod}})/y_1(T_{\text{mod}})$, входящая в (48), задаёт число контактов индивидуумов когорты A_1 с заражённой поверхностью C в расчёте на одного индивидуума когорты A_1 за период времени $[0; T_{\text{mod}}]$. Отметим, что случай $y_1(T_{\text{mod}}) = 0$ теоретически возможен, но не имеет содержательной интерпретации, поскольку в этом случае ни один индивидуум не посетил объект W и выражения (47), (48) не имеют смысла.

При проведении вычислительных экспериментов примем, что размерная переменная $c(t)$ заменяется на безразмерную переменную $c(t)/\varphi$, что приводит к очевидным изменениям в записи формул, используемых в вычислительном алгоритме. Отсюда получаем, что вместо параметров σ и φ следует использовать их отношение σ/φ , а размерную константу φ следует заменить на безразмерную единицу. Кроме того, положим, что $g(u_1, u_2) = g_0 u_1 u_2 / (1 + u_1 + u_2)$, где константа $g_0 > 0$ и выражение в знаменателе отражают активность и доступность индивидуумов для парных контактов. В частности, при $u_1 = u_2 = 1$ константа $3/g_0$ задаёт среднее время до контакта только одной пары индивидуумов когорт A_1, A_2 , находящихся на объекте W (без учёта других событий, которые могут произойти с индивидуумами этой пары).

Математические ожидания (47), (48) рассмотрим в зависимости от вариации значений следующих параметров:

1) состава и максимальной длительности пребывания совокупностей индивидуумов U_{γ_1, γ_2} на объекте W , константы g_0 , отражающей интенсивность контактов индивидуумов когорт A_1, A_2 ;

2) константы β , задающей интенсивность контактов индивидуумов когорты A_1 с заражённой поверхностью C ;

3) периодичности τ_j и качества δ санитарной обработки поверхностей различных предметов в общедоступных местах объекта W .

Для всех вычислительных экспериментов $T_{\text{mod}} = 24$ ч. Математические ожидания (47), (48) оцениваются на основе обработки результатов моделирования по выборке из $n = 1000$ наблюдений с помощью интервальных оценок. Для построения интервальных оценок использованы формулы математической статистики для выборок большого объёма [10]. Интервальные оценки изучаемых математических ожиданий строятся на уровне доверия $P = 0.99$.

Эксперимент 1. Рассмотрим зависимость математических ожиданий (47), (48) от вариации параметров модели, описывающих состав совокупностей поступающих на объект индивидуумов и длительность их пребывания на объекте. Набор параметров модели (с учётом их размерности):

$$\begin{aligned} \rho &= 80, & \lambda &= 0.3, & g_0 &= 0.3, & \beta &= 10 \text{ ч}^{-1}, \\ \sigma &= 400 \text{ см}^2/\text{ч}, & \varphi &= 150, & \varphi_* &= 0.25 \varphi = 37.5 \text{ см}^2, \\ \tau_1 &= 7, & \tau_2 &= 14, & \tau_3 &= 24.5 \text{ ч}, & \delta &= 0.8. \end{aligned} \quad (49)$$

Распределение (1) поступивших на объект W индивидуумов когорт A_1, A_2 в составе совокупности U_{γ_1, γ_2} имеет вид

$$P\{(\gamma_1, \gamma_2) = (i, j)\} = q_{i,j} \geq 0, \quad i, j = 0, 1, 2, 3, \quad q_{0,0} = 0, \quad \sum_{i,j=0}^3 q_{i,j} = 1. \quad (50)$$

При проведении вычислений использованы пять вариантов значений $q_{i,j} > 0$, входящих в (50):

$$q_{1,0} = q_{0,1} = 0.3, \quad q_{2,0} = q_{0,2} = 0.15, \quad q_{1,1} = 0.1, \quad (51)$$

$$q_{1,0} = q_{0,1} = 0.2, \quad q_{2,0} = q_{0,2} = 0.2, \quad q_{1,1} = 0.2, \quad (52)$$

$$q_{1,0} = q_{0,1} = 0.15, \quad q_{2,0} = q_{0,2} = 0.15, \quad q_{1,1} = 0.15, \quad q_{2,1} = q_{1,2} = 0.1, \quad q_{2,2} = 0.05, \quad (53)$$

$$q_{1,0} = q_{0,1} = 0.1, \quad q_{2,0} = q_{0,2} = 0.15, \quad q_{1,1} = 0.15, \quad q_{2,1} = q_{1,2} = 0.15, \quad q_{2,2} = 0.05, \quad (54)$$

$$q_{1,0} = q_{0,1} = 0.15, \quad q_{2,0} = q_{0,2} = 0.1, \quad q_{1,1} = q_{2,1} = 0.05, \quad (55)$$

$$q_{1,2} = 0.1, \quad q_{2,2} = 0.05, \quad q_{1,3} = 0.1, \quad q_{3,1} = 0.15.$$

Вероятности $q_{i,j}$, не указанные в (51)–(55), приняты равными нулю.

Для фиксированных γ_1, γ_2 длительность $\omega_{\gamma_1, \gamma_2}$ пребывания совокупности индивидуумов U_{γ_1, γ_2} на объекте W распределена равномерно на промежутке $[0; \hat{\omega}_{\gamma_1, \gamma_2}]$. Для каждого из вариантов (51)–(55) соответствующие значения $\hat{\omega}_{\gamma_1, \gamma_2}$ выбираются из следующего набора:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{1,0} = \hat{\omega}_{0,1} = 1, \quad \hat{\omega}_{2,0} = \hat{\omega}_{0,2} = \hat{\omega}_{1,1} = 1.5 \text{ ч}, \\ \hat{\omega}_{2,1} = \hat{\omega}_{1,2} = 2, \quad \hat{\omega}_{2,2} = \hat{\omega}_{1,3} = \hat{\omega}_{3,1} = 2.5 \text{ ч}. \end{aligned} \quad (56)$$

В табл. 1 представлены интервальные оценки математических ожиданий $E_{\nu/y_1}, E_{\mu/y_1}$ для вариантов (51)–(55) и соответствующих значений $\hat{\omega}_{\gamma_1, \gamma_2}$ из (56).

Таблица 1

Интервальные оценки $E_{\nu/y_1}, E_{\mu/y_1}$ на уровне доверия $P = 0.99$ для эксперимента 1

Вариант	E_{ν/y_1}	E_{μ/y_1}
(51)	0.092 ± 0.00068	0.932 ± 0.00397
(52)	0.099 ± 0.00068	1.008 ± 0.00384
(53)	0.121 ± 0.00070	1.239 ± 0.00371
(54)	0.127 ± 0.00068	1.295 ± 0.00375
(55)	0.143 ± 0.00072	1.420 ± 0.00439

Из табл. 1 видно, что увеличение численного состава группы индивидуумов U_{γ_1, γ_2} и максимальной длительности $\hat{\omega}_{\gamma_1, \gamma_2}$ пребывания индивидуумов на объекте W приводит к монотонному возрастанию как E_{ν/y_1} , так и E_{μ/y_1} . Различия в значениях $E_{\nu/y_1}, E_{\mu/y_1}$ для каждого из пяти вариантов, приведённых в табл. 1, объясняются выбором значений параметров β и g_0 . Если принять, что $u_1 = u_2 = 1$, то $\beta/(g_0/3) = 100$. Последнее означает, что интенсивность контакта одного восприимчивого индивидуума с заражённой поверхностью в сто раз больше, чем интенсивность контакта с одним заразным индивидуумом. Приведённые соотношения между $E_{\nu/y_1}, E_{\mu/y_1}$ обусловлены нелинейностью выражения для функции $g(u_1, u_2)$, отражающей интенсивности эффективных контактов индивидуумов когорт A_1, A_2 , и нелинейностью описания эффективных контактов индивидуумов когорты A_1 с заражённой поверхностью S .

Рассмотрим вариант (55) с учётом (56), в котором значение $g_0 = 0.3 \text{ ч}^{-1}$ заменено на значения $g_0 = 0.15 \text{ час}^{-1}$ и $g_0 = 0.6 \text{ час}^{-1}$ (соответственно менее и более интенсивные контакты индивидуумов когорт A_1, A_2). Интервальные оценки $E_{\nu/y_1}, E_{\mu/y_1}$ на уровне доверия $P = 0.99$ таковы:

$$E_{\nu/y_1} = 0.072 \pm 0.00049, \quad E_{\mu/y_1} = 1.420 \pm 0.00419, \quad g_0 = 0.15 \text{ ч}^{-1}, \quad (57)$$

$$E_{\nu/y_1} = 0.285 \pm 0.00104, \quad E_{\mu/y_1} = 1.421 \pm 0.00414, \quad g_0 = 0.6 \text{ ч}^{-1}. \quad (58)$$

Из (57), (58) видно, что указанные изменения параметра g_0 приводят соответственно к уменьшению и увеличению E_{ν/y_1} , но не приводят к изменениям E_{μ/y_1} по сравнению с вариантом (55) из табл. 1.

Эксперимент 2. В этом эксперименте для параметров варианта (55) с учётом (56) (см. эксперимент 1) варьировались значения параметра β как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения от значения $\beta = 10 \text{ ч}^{-1}$. Изменение значений параметра β интерпретируется как описание возможного поведения индивидуумов когорт A_1, A_2 с точки зрения их контактов с поверхностями различных предметов, расположенных на объекте W . Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Интервальные оценки $E_{\nu/y_1}, E_{\mu/y_1}$
на уровне доверия $P = 0.99$ для эксперимента 2

$\beta (\text{ч}^{-1})$	E_{ν/y_1}	E_{μ/y_1}
4	0.143 ± 0.00068	1.892 ± 0.00385
6	0.142 ± 0.00070	1.868 ± 0.00419
8	0.142 ± 0.00068	1.679 ± 0.00430
12	0.143 ± 0.00070	1.159 ± 0.00396
14	0.143 ± 0.00068	0.919 ± 0.00372
16	0.142 ± 0.00070	0.714 ± 0.00322

Из табл. 2 видно, что вариация значений параметра β не приводит к значимым изменениям E_{ν/y_1} по сравнению с вариантом (55) из табл. 1. С другой стороны, возрастание значений параметра β от 4 ч^{-1} до 16 ч^{-1} ведёт к уменьшению значений E_{μ/y_1} . В случаях $\beta = 12, 14, 16 (\text{ч}^{-1})$ полученные значения E_{μ/y_1} меньше значения, приведённого для варианта (55) из табл. 1. Эффект уменьшения значений E_{μ/y_1} при возрастании значений β обусловлен нелинейным характером осуществления контактов индивидуумов когорт A_1, A_2 с заражённой поверхностью C . Из постулата Н4 следует, что интенсивность эффективных контактов индивидуумов когорты A_1 с заражённой поверхностью C возрастает при возрастании значений β при условии, что площадь заражённой поверхности C не меньше порогового значения φ_* . Вместе с тем, достаточно интенсивные контакты индивидуумов когорт A_1, A_2 с заражённой поверхностью C приводят к существенному снижению площади заражённой поверхности C (меньше φ_*) и, как следствие, к уменьшению E_{ν/y_1} .

Эксперимент 3. В данном эксперименте для параметров варианта (55) с учётом (56) (см. эксперимент 1) варьировались периодичность $\{\tau_j\}$ и параметр качества δ санитарной обработки поверхностей различных предметов в общедоступных местах объекта W . Принято, что санитарная обработка проводится через каждые два часа (вариант (59)) или каждые три

часа (вариант (60)):

$$\tau_j = 2j, \quad 1 \leq j \leq 11, \quad \tau_{12} = 24.5 \text{ ч}, \quad (59)$$

$$\tau_j = 3j, \quad 1 \leq j \leq 7, \quad \tau_8 = 24.5 \text{ ч}. \quad (60)$$

Каждый из вариантов (59), (60) рассматривался совместно с параметром δ , принимающим последовательно значения 0.8, 0.9, 1.0. Результаты вычислений показывают следующее. Для каждого из вариантов (59), (60) и для трёх указанных значений δ (всего шесть комбинаций) интервальные оценки E_{ν/y_1} , E_{μ/y_1} на уровне доверия $P = 0.99$ таковы:

$$E_{\nu/y_1} = 0.143 \pm 0.00068, \quad E_{\mu/y_1} = 1.420 \pm 0.00436. \quad (61)$$

Из (61) видно, что вариация параметров τ_j и δ практически не влияет на значения E_{ν/y_1} , E_{μ/y_1} по сравнению с вариантом (55) из табл. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен подход к разработке стохастической модели, описывающей локальные по времени и местоположению прямые и опосредованные контакты восприимчивых к инфекции индивидуумов и заразных индивидуумов.

Для оценки потенциальной численности возникающих на объекте новых инфицированных индивидуумов используются числовые характеристики E_{ν/y_1} , E_{μ/y_1} когорты восприимчивых к инфекции индивидуумов (см. формулы (47), (48)). Результаты эксперимента 1 показывают, что в рамках заданного набора параметров E_{ν/y_1} , E_{μ/y_1} зависят от вариации параметров, описывающих состав и длительности пребывания совокупностей U_{γ_1, γ_2} поступивших на объект индивидуумов. Кроме того, E_{ν/y_1} зависит от вариации параметра g_0 , отражающего интенсивность контактов индивидуумов когорт A_1 , A_2 . Установленная закономерность изменения E_{ν/y_1} , E_{μ/y_1} интерпретируется следующим образом. Заразных индивидуумов, поступающих на объект W в составе совокупности U_{γ_1, γ_2} при $\gamma_2 \geq 1$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 3, 4$ и их длительном пребывании на объекте W , можно рассматривать как суперраспространителей инфекции.

Результаты экспериментов 2, 3 показывают, что для выбранного набора параметров практически отсутствует зависимость E_{ν/y_1} от вариации параметра β , описывающего интенсивность контактов индивидуумов когорт A_1 , A_2 с заражённой вирусами поверхностью (см. эксперимент 2), и от вариации параметров $\{\tau_j\}$ и δ , отражающих периодичность и качество санитарной обработки заражённой вирусами поверхности (см. эксперимент 3). Вместе с тем, имеет место зависимость E_{μ/y_1} от вариации параметра β (см. эксперимент 2), но отсутствует зависимость E_{μ/y_1} от вариации параметров $\{\tau_j\}$ и δ (см. эксперимент 3).

Пусть p_{ν/y_1} , p_{μ/y_1} — вероятности инфицирования восприимчивого индивидуума при контакте соответственно с заразным индивидуумом и с заражённой вирусами поверхностью. Тогда если

$$p_{\nu/y_1} E_{\nu/y_1} \approx p_{\mu/y_1} E_{\mu/y_1}, \quad (62)$$

то можно говорить о том, что прямые и опосредованные контакты индивидуумов в среднем дают сопоставимый вклад в формирование когорты новых инфицированных индивидуумов. Используя (62), нетрудно оценить значения p_{μ/y_1} (по сравнению с p_{ν/y_1}), при которых контакт восприимчивого индивидуума с заражённой вирусами поверхностью будет иметь заметное влияние на появление новых инфицированных индивидуумов. В частности, из табл. 2 видно, что для указанных значений параметра β величина $d_\beta = \frac{E_{\nu/y_1}}{E_{\mu/y_1}}$ принимает значения, близкие соответственно к 0.0756, 0.0761, 0.0846, 0.1233, 0.1546, 0.1988 (с учётом округления до четвёртого десятичного знака). Следовательно, если для фиксированного β (из табл. 2)

принять, что $p_{\mu/y_1} \approx d_{\beta} p_{\nu/y_1}$, то в соответствии с (62) опосредованные контакты индивидуумов будут вносить приблизительно такой же вклад в процесс формирования когорты новых инфицированных индивидуумов, как и прямые контакты индивидуумов.

Достаточно малые значения p_{μ/y_1} (по сравнению с p_{ν/y_1}) будут говорить о том, что опосредованные контакты индивидуумов не являются существенным фактором для процесса формирования когорты новых инфицированных индивидуумов. Отметим, что малые значения p_{μ/y_1} могут быть обеспечены за счёт ношения перчаток, защищающих восприимчивых к инфекции индивидуумов от нежелательных контактов с заражённой вирусами поверхностью. Использование перчаток, по-видимому, целесообразно при очень высокой интенсивности контактов восприимчивых индивидуумов с заражённой вирусами поверхностью, формируемой при большой численности когорты заразных индивидуумов, например сотрудниками банков или офисов приёма платежей при обслуживании клиентов на фиксированном рабочем месте.

В завершение отметим, что модель допускает естественное развитие при рассмотрении нескольких объектов, которые индивидуумы могут посещать последовательно в течение определённого периода времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перцев Н.В., Логинов К.К., Топчий В.А. Анализ стадия-зависимой модели эпидемии, построенной на основе немарковского случайного процесса // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 3. С. 105–122.
2. Логинов К.К., Перцев Н.В. Прямое статистическое моделирование распространения эпидемии на основе стадия-зависимой стохастической модели // Мат. биология и биоинформатика. 2021. Т. 16, № 2. С. 169–200.
3. Перцев Н.В., Логинов К.К., Лукашев А.Н., Вакуленко Ю.А. Стохастическое моделирование динамики распространения Ковид-19 с учётом неоднородности населения по иммунологическим, клиническим и эпидемиологическим критериям // Мат. биология и биоинформатика. 2022. Т. 17, № 1. С. 43–81.
4. Перцев Н.В., Топчий В.А., Логинов К.К. Численное стохастическое моделирование динамики взаимодействующих популяций // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 3. С. 135–153.
5. Перцев Н.В., Пичугин Б.Ю., Логинов К.К. Статистическое моделирование динамики популяций, развивающихся в условиях воздействия токсичных веществ // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2. С. 84–94.
6. Перцев Н.В., Логинов К.К. Стохастическая модель динамики биологического сообщества в условиях потребления особями вредных пищевых ресурсов // Мат. биология и биоинформатика. 2011. Т. 6, № 1. С. 1–13.
7. Marchenko M. A., Mikhailov G. A. Parallel realization of statistical simulation and random number generators // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2002. V. 17. P. 113–124.
8. Marchenko M. PARMONC – a software library for massively parallel stochastic simulation // Parallel Comput. Technologies. 2011. V. 6873. P. 302–316. (Lecture Notes in Computer Science).
9. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.
10. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

UDC 519.24:51–76

**STOCHASTIC MODELING OF LOCAL BY TIME AND LOCATION
CONTACTS OF INDIVIDUALS IN THE EPIDEMIC PROCESS**© 2023 N. V. Pertsev^a, V. A. Topchii^b, K. K. Loginov^c*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^ahomlab@ya.ru, ^btopchij@gmail.com, ^ckloginov85@mail.ru

Received 21.11.2022, revised 21.11.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. A continuously discrete stochastic model describing the dynamics of the number of susceptible and contagious individuals visiting a certain object is presented. Individuals arrive at the facility both individually and as part of groups of individuals united by certain characteristics. The duration of the stay of individuals on the territory of the object is set using distributions other than exponential. Individuals who entered the facility as part of a certain group leave the facility as part of the same group. Contagious individuals spread viral particles contained in the airborne mixture they emit. A certain amount of an airborne mixture containing viral particles settles on the surface of various objects in places of the object that are publicly accessible to individuals. The area of the infected surface (a surface containing a settled airborne droplet mixture with viral particles) is described using a linear differential equation with a discontinuously changing right-hand side and discontinuous initial data. Contacts of susceptible individuals with infectious individuals and with an infected surface can lead to their infection. A probability-theoretic formalization of the model is given and an algorithm for numerical simulation of the dynamics of the components of a constructed random process using the Monte Carlo method is described. The results of a numerical study of mathematical expectations of random variables describing the number of contacts of susceptible individuals with infectious individuals and with an infected surface per susceptible individual for a fixed period of time are presented.

Keywords: random process, differential equation with discontinuous right-hand side, Monte Carlo method, computational experiment, epidemiology.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.209

REFERENCES

1. Pertsev N.V., Loginov K.K., Topchii V.A. Analysis of a stage-dependent epidemic model based on a non-markov random process. *J. Appl. Indust. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 3, pp. 566–580.
2. Loginov K.K., Pertsev N.V. Priamoe statisticheskoe modelirovanie rasprostraneniya epidemii na osnove stadia-zavisimoi stohasticheskoi modeli [Direct statistical modeling of epidemic spread based on a stage-dependent stochastic model]. *Mat. Biol. Bioinform.*, 2021, Vol. 16, No. 2, pp. 169–200 (in Russian).
3. Pertsev N.V., Loginov K.K., Lukashev A.N., Vakulenko Yu.A. Stokhasticheskoe modelirovanie dinamiki rasprostraneniya Kovid-19 s uchetom neodnorodnosti naseleniya po immunologicheskim, klinicheskim i epidemiologicheskim kriteriam [Stochastic modeling of dynamics of the spread of covid-19 infection taking into account the heterogeneity of population according to immunological, clinical and epidemiological criteria]. *Mat. Biol. Bioinform.*, 2022, Vol. 17, No. 1, pp. 43–81 (in Russian).
4. Pertsev N.V., Topchii V.A., Loginov K.K. Numerical Stochastic Modeling of Dynamics of Interacting Populations. *J. Appl. Indust. Math.*, 2022, Vol. 16, No. 3, pp. 524–539.

5. Pertsev N.V., Pichugin B.Yu., Loginov K.K. Statisticheskoe modelirovanie dinamiki populiacii, razvivajuschis'ia v usloviiax vozdeistvia toksichnyx veshtstv [Statistical modeling of the dynamics of populations developing under the influence of toxic substances]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2011, Vol. 14, No 2. pp. 84–94 (in Russian).
6. Pertsev N.V., Loginov K.K. Stokhasticheskaia model dinamiki biologicheskogo soobshchestva v usloviiax potrebleniia osobiyami vrednyx pischevyx resurov [Stochastic model of dynamics of biological community in conditions of consumption by individuals of harmful food resources]. *Mat. Biol. Bioinform.*, 2011, Vol. 6, No. 1, pp. 1–13 (in Russian).
7. Marchenko M.A., Mikhailov G.A. Parallel realization of statistical simulation and random number generators. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2002, Vol. 17, pp. 113–124.
8. Marchenko M. PARMONC — a software library for massively parallel stochastic simulation. *Parallel Comput. Technologies*, 2011, Vol. 6873, pp. 302–316. (Lecture Notes in Computer Science).
9. Mikhailov G.A., Voitishchek A.V. Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo [Numerical Statistical Modeling. Monte Carlo methods]. Moscow: Akademiya, 2006 (in Russian).
10. Kramer G. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton: Univ. Press, 1946.

УДК 517.956

**ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА
ПРИ СТЕПЕННОЙ ГРАДИЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ
В ПОЛУЛИНЕЙНОМ ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ**© 2023 В. Г. Романов^{1a}, Т. В. Бугуева^{1,2b}¹*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*²*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ruПоступила в редакцию 12.12.2022 г.; после доработки 14.12.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Рассматривается одномерная обратная задача определения коэффициента при степенной градиентной нелинейности в полулинейном волновом уравнении. Доказаны теоремы существования и единственности решения прямой задачи. Для обратной задачи установлена теорема о локальном существовании её решения и найдена оценка устойчивости решения.

Ключевые слова: полулинейное волновое уравнение, прямая задача, обратная задача, степенная градиентная нелинейность, существование, устойчивость, единственность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.210

В последние годы достигнут значительный прогресс в решении обратных задач для нелинейных гиперболических уравнений (см., например [1–16]). В [1] исследуется обратная краевая задача электромагнетизма в нелинейной среде Керра, устанавливается возможность определения параметров электромагнитного материала и параметров нелинейной восприимчивости среды путём проведения электромагнитных измерений на границе. В работе [2] изучаются обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений на глобально гиперболическом лоренцевом многообразии (M, g) , в частности, в ней показано, что семейство наборов наблюдений, соответствующее точечным источникам, однозначно определяет конформный тип неизвестного открытого, относительно компактного множества $W \subset M$. В [3] на лоренцевом многообразии рассматриваются нелинейные обратные задачи для волнового уравнения с оператором Лапласа — Бельтрами. В [4] изучаются обратные задачи для гиперболических уравнений и систем, основанные на фокусировке волн. В работе [5] для полулинейных волновых уравнений на лоренцевых многообразиях с нелинейностью вида квадратичной производной изучается обратная задача определения фоновой лоренцевой метрики. В [6] на времени-ориентированном лоренцевом многообразии $(M; g)$ с непустой границей, удовлетворяющей предположению выпуклости, показано, что топологические, дифференцируемые и конформные структуры соответствующих подмножеств $S \subset M$ источников однозначно определяются по результатам измерений пересечений будущих световых конусов из точки S с фиксированным открытым подмножеством границы M . В работе [7] показывается, что сингулярности образуются после взаимодействия трёх поперечных полулинейных конормальных волн. В [8] рассматривается обратная краевая задача для полулинейного волнового уравнения на зависящем от времени лоренцевом многообразии с временной границей. В [9] рассматривается обратная краевая задача для нелинейного уравнения упругой волны, показывается, что все параметры, фи-

гулирующие в уравнении, могут быть однозначно определены из граничных измерений при определённых геометрических предположениях. В [10] на лоренцевом многообразии $(M; g)$ с времени-подобной границей рассматривается полулинейное волновое уравнение и изучается задача восстановления метрики g и коэффициента при нелинейности четвёртой степени. В работе [11] для полулинейного волнового уравнения исследуется обратная задача восстановления коэффициента $\alpha(x)$ при гладкой нелинейности $|u|^m$ при чётном целом m . В [12] в двумерном и трёхмерном пространствах исследуется обратная задача восстановления коэффициента полулинейного волнового уравнения при кубической нелинейности и показывается, что с помощью преобразования Радона можно восстановить неизвестный коэффициент. В работе [13] рассмотрена обратная задача определения коэффициента при нелинейном члене уравнения, главная часть которого представляет собой волновой оператор. Изучены свойства решения прямой задачи, в частности, установлено существование и единственность ограниченного решения в окрестности характеристического конуса, выписана структура этого решения. Установлена единственность решения обратной задачи и предложен алгоритм восстановления искомой функции. В [14] рассматривается более общая нелинейность в волновом уравнении и источники типа плоских волн. Показано, что решение соответствующей прямой задачи для дифференциального уравнения ограничены в некоторой окрестности фронта волны, найдено асимптотическое разложение решения в этой окрестности. На основе этого разложения установлено, что задаваемая в обратной задаче информация позволяет свести проблему отыскания искомой функции к задаче рентгеновской томографии с неполными данными. Доказана теорема об однозначности решения обратной задачи. Показано, что в алгоритмическом отношении эта задача редуцируется к хорошо известной проблеме моментов. В [15] рассматривается полулинейное волновое уравнение, в котором нелинейное слагаемое $f(x, u)$ является гладкой функцией переменных x и u , финитной по x . Изучается задача об определении функции $f(x, u)$ по информации о решениях задач Коши для дифференциального уравнения. Проведено исследование прямой задачи и установлено существование ограниченного решения в окрестности фронта бегущей волны. Показано, что решение обратной задачи редуцируется к серии задач рентгеновской томографии. В [16] рассматривается волновое уравнение, содержащее нелинейность в виде полинома n -го порядка, изучена задача об определении всех коэффициентов этого полинома, зависящих от переменной $x \in \mathbb{R}^3$.

В настоящей работе рассматривается одномерная обратная задача определения коэффициента при степенной градиентной нелинейности в полулинейном волновом уравнении. Нам не известны другие работы по определению коэффициентов при градиентных неоднородностях в гиперболических уравнениях.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Прямая задача. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - q(x)(u_x)^m &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t < 0} &= -aH_1(t - x), \end{aligned} \quad (1)$$

в которой $a > 0$ и $m > 1$ — любые вещественные числа, $H_1(t) = tH(t)$ и $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $H(t) = 0$ для $t < 0$. Положим, что функция $q(x) = 0$ для $x < 0$ и непрерывна для $x \geq 0$. В точке $x = 0$ она может иметь конечный разрыв.

При заданной функции $q(x)$ задачу (1) назовём прямой задачей. Ниже мы исследуем её, а затем формулируем и рассматриваем обратную задачу об определении коэффициента $q(x)$ по следу решения задачи (1) на полуоси $x = 0$.

Достаточно очевидно, что в области $0 \leq t \leq |x|$ решение задачи (1) определяется формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} a(x - t), & 0 \leq t \leq -x, \quad x \leq 0, \\ 0, & 0 \leq t < x, \quad x > 0. \end{cases}$$

Используя формулу Даламбера, получим интегральное уравнение

$$u(x, t) = a(x - t) + \frac{1}{2} \int_0^{(x+t)/2} \int_{\xi}^{t-|x-\xi|} q(\xi) u_{\xi}^m(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad t \geq |x|. \quad (2)$$

Пусть $u_x(x, t) = v(x, t)$ и $u_t(x, t) = w(x, t)$. Тогда

$$v(x, t) = a - \frac{1}{2} \int_0^x q(\xi) v^m(\xi, t - x + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} q(\xi) v^m(\xi, t + x - \xi) d\xi, \quad t \geq |x|. \quad (3)$$

Функция $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$w(x, t) = -a + \frac{1}{2} \int_0^{(x+t)/2} q(\xi) v^m(\xi, t - |x - \xi|) d\xi, \quad t \geq |x|. \quad (4)$$

Введём ещё две функции:

$$v_t(x, t) = u_{xt}(x, t) \equiv \varphi(x, t), \quad w_t(x, t) = u_{tt}(x, t) \equiv \psi(x, t).$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & -\frac{m}{2} \int_0^x q(\xi) v^{m-1}(\xi, t - x + \xi) \varphi(\xi, t - x + \xi) d\xi \\ & + \frac{m}{2} \int_x^{(x+t)/2} q(\xi) v^{m-1}(\xi, t + x - \xi) \varphi(\xi, t + x - \xi) d\xi \\ & + \frac{1}{4} q\left(\frac{x+t}{2}\right) v^m\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right), \quad t \geq |x|. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & \frac{m}{2} \int_0^{(x+t)/2} q(\xi) v^{m-1}(\xi, t - |x - \xi|) \varphi(\xi, t - |x - \xi|) d\xi \\ & + \frac{1}{4} q\left(\frac{x+t}{2}\right) v^m\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right), \quad t \geq |x|. \end{aligned} \quad (6)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} D^-(T) &= \{(x, t) | 0 \leq -x \leq t \leq T + x\}, \quad D^+(T) = \{(x, t) | 0 \leq x \leq t \leq T - x\}, \\ D(T) &= D^-(T) \cup D^+(T). \end{aligned}$$

Определение 1. Будем говорить, что $q(x) \in \mathcal{Q}$, если функция $q \in C[0, T/2]$ и для неё выполнено неравенство

$$|q(x)| \leq Q, \quad x \in [0, T/2], \quad (7)$$

с некоторой постоянной $Q > 0$.

Теорема 1. Пусть $q \in \mathcal{Q}$ и выполнено неравенство

$$(m-1)a^{m-1}QT < 1 - 2^{-(m-1)\varepsilon}, \quad (8)$$

в котором $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда в области $D^+(T)$ существует единственное непрерывное решение уравнения (3) и для него справедлива оценка

$$0 < a(2 - 2^\varepsilon) \leq v(x, t) \leq \frac{a}{[1 - (m-1)a^{m-1}Qt]^{1/(m-1)}} < 2^\varepsilon a, \quad (x, t) \in D^+(T). \quad (9)$$

Доказательство. Получим вначале для решения уравнения (3) априорную оценку (9), полагая, что решение является непрерывным в $D^+(T)$ и неравенство (8) выполнено. Запишем уравнение (3), заменив в нём переменную интегрирования ξ на τ :

$$\begin{aligned} v(x, t) = a - \frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(\tau - t + x)v^m(\tau - t + x, \tau) d\tau \\ + \frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^t q(t + x - \tau)v^m(t + x - \tau, \tau) d\tau, \quad (x, t) \in D^+(T). \end{aligned} \quad (10)$$

Введём функцию $z(t)$:

$$z(t) = \begin{cases} \max_{x \in [0, t]} |v(x, t)|, & t \in [0, T/2], \\ \max_{x \in [0, T-t]} |v(x, t)|, & t \in [T/2, T]. \end{cases} \quad (11)$$

Тогда из (10) находим неравенство

$$z(t) \leq a + Q \int_0^t z^m(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (12)$$

Обозначим

$$z_1(t) = a + Q \int_0^t z^m(\tau) d\tau. \quad (13)$$

В силу (12) и (13) имеем

$$\frac{dz_1(t)}{dt} = Qz^m(t) \leq Qz_1^m(t), \quad z_1(0) = a.$$

Интегрируя полученное неравенство, находим, что

$$z_1^{1-m}(t) \geq a^{1-m} + (1-m)Qt, \quad t \in [0, T],$$

или

$$z_1^{m-1} \leq \frac{1}{[a^{1-m} + (1-m)Qt]} = \frac{a^{m-1}}{[1 - (m-1)a^{m-1}Qt]}, \quad t \in [0, T]. \quad (14)$$

Следовательно,

$$z(t) \leq z_1(t) \leq \frac{a}{[1 - (m-1)a^{m-1}Qt]^{1/(m-1)}} \leq \frac{a}{[1 - (m-1)a^{m-1}QT]^{1/(m-1)}} \leq 2^\varepsilon a, \quad t \in [0, T].$$

Из (11)–(14) вытекает оценка (9) для $v(x, t)$ сверху. С другой стороны,

$$\begin{aligned} v(x, t) &\geq a - Q \int_0^t z^m(\tau) d\tau \\ &\geq a - Q \int_0^t \frac{a^m}{[1 - (m-1)a^{m-1}Q\tau]^{m/(m-1)}} d\tau = a \left(2 - \frac{1}{[1 - (m-1)a^{m-1}Qt]^{1/(m-1)}} \right) \\ &\geq a \left(2 - \frac{1}{[1 - (m-1)a^{m-1}QT]^{1/(m-1)}} \right) \geq a(2 - 2^\varepsilon), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (15)$$

Покажем теперь, что при условии (8) существует непрерывное в $D^+(T)$ решение уравнения (10). Введём последовательные приближения, полагая, что

$$v_0(x, t) = a,$$

$$\begin{aligned} v_n(x, t) &= a - \frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(\tau - t + x) v_{n-1}^m(\tau - t + x, \tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^t q(t + x - \tau) v_{n-1}^m(t + x - \tau, \tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (x, t) \in D^+(T). \end{aligned} \quad (16)$$

Проверим, что

$$a(2 - 2^\varepsilon) \leq v_n(x, t) \leq \frac{a}{[1 - (m-1)a^{m-1}Qt]^{1/(m-1)}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (x, t) \in D^+(T). \quad (17)$$

В самом деле, при $n = 0$ неравенство

$$a(2 - 2^\varepsilon) \leq v_0(x, t) \leq \frac{a}{[1 - (m-1)a^{m-1}Qt]^{1/(m-1)}}$$

очевидно, так как по условию $m > 1$ и $\varepsilon \in (0, 1)$.

Используя метод математической индукции, предположим, что оно верно для всех $n \leq k$, $k \geq 1$, т. е.

$$a(2 - 2^\varepsilon) \leq v_k(x, t) \leq \frac{a}{[1 - (m-1)a^{m-1}Qt]^{1/(m-1)}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_{k+1}(x, t) &= a - \frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(\tau - t + x) v_k^m(\tau - t + x, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^t q(t + x - \tau) v_k^m(t + x - \tau, \tau) d\tau \\ &\leq a + \int_0^t \frac{Qa^m d\tau}{[1 - (m-1)a^{m-1}Q\tau]^{m/(m-1)}} = \frac{a}{[1 - (m-1)a^{m-1}Qt]^{1/(m-1)}}, \quad (x, t) \in D^+(T). \end{aligned} \quad (18)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} v_{k+1}(x, t) &\geq a - Q \int_0^t z^m(\tau) d\tau \geq a - Q \int_0^t \frac{a^m}{[1 - (m-1)a^{m-1}Q\tau]^{m/(m-1)}} d\tau \\ &= a \left(2 - \frac{1}{[1 - (m-1)a^{m-1}Qt]^{1/(m-1)}} \right) \geq a(2 - 2^\varepsilon), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Тем самым метод математической индукции оправдан и неравенство (17) имеет место. Рассмотрим разности

$$\bar{v}_n(x, y) = v_n(x, t) - v_{n-1}(x, t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из (16) находим, что

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= a, \\ \bar{v}_1(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(\tau - t + x) v_0^m(\tau - t + x, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^t q(t + x - \tau) v_0^m(t + x - \tau, \tau) d\tau, \\ \bar{v}_{n+1}(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(\tau - t + x) [v_n^m(\tau - t + x, \tau) - v_{n-1}^m(\tau - t + x, \tau)] d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{(x+t)/2}^t q(t + x - \tau) [v_n^m(t + x - \tau, \tau) - v_{n-1}^m(t + x - \tau, \tau)] d\tau, \quad (19) \\ n &= 1, 2, \dots, \quad (x, t) \in D^+(T). \end{aligned}$$

Представим разность $v_n^m(\xi, \tau) - v_{n-1}^m(\xi, \tau)$ в виде:

$$v_n^m(\xi, \tau) - v_{n-1}^m(\xi, \tau) = m \int_{v_{n-1}(\xi, \tau)}^{v_n(\xi, \tau)} r^{m-1} dr = \bar{v}_n(\xi, \tau) K_{n,m}(\xi, \tau), \quad (20)$$

где

$$K_{n,m}(\xi, \tau) = m \int_0^1 [s v_n(\xi, \tau) + (1-s) v_{n-1}(\xi, \tau)]^{m-1} ds. \quad (21)$$

В силу (17) очевидно, что

$$|q(\xi) K_{n,m}(\xi, \tau)| \leq \frac{a^{m-1} m Q}{1 - (m-1) a^{m-1} Q T} \equiv A_0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\xi, \tau) \in D^+(T). \quad (22)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\bar{v}_1(x, t)| &\leq a^m Q t, \\ |\bar{v}_{n+1}(x, t)| &\leq \frac{A_0}{2} \int_{t-x}^t |\bar{v}_n(\tau - t + x, \tau)| d\tau + \frac{A_0}{2} \int_{(x+t)/2}^t |\bar{v}_n(t + x - \tau, \tau)| d\tau, \quad (23) \\ n &= 1, 2, \dots, \quad (x, t) \in D^+(T). \end{aligned}$$

Введём функции $\bar{z}_n(t)$:

$$\bar{z}_n(t) = \begin{cases} \max_{x \in [0, t]} |\bar{v}_n(x, t)|, & t \in [0, T/2], \\ \max_{x \in [0, T-t]} |\bar{v}_n(x, t)|, & t \in [T/2, T], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Тогда неравенства (23) можно представить в виде

$$|\bar{z}_1(x, t)| \leq a^m Q t, \tag{25}$$

$$\bar{z}_{n+1}(t) \leq A_0 \int_0^t \bar{z}_n(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T].$$

Из (25) следует оценка

$$\bar{z}_n(t) \leq a^m Q \frac{A_0^{n-1} t^n}{n!} \leq a^m Q \frac{A_0^{n-1} T^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T]. \tag{26}$$

Из этой оценки следует, что последовательность непрерывных функций $v_n(x, t)$ равномерно сходится в области $D^+(T)$ и определяет непрерывное решение уравнения (3). Для этого решения выполнено неравенство (9). Единственность решения устанавливается стандартным методом. Теорема 1 доказана. \square

Теорема 2. *Решение прямой задачи существует, единственно и является функцией класса $C^1(D(T)) \cap (C^2(D^-(T)) \cup C^2(D^+(T)))$.*

Доказательство. Равенства (2)–(6) справедливы во всей области $D(T)$. В силу теоремы 1 равенство (3) определяет функцию $v(x, t)$ в области $D^-(T)$ через её значения в области $D^+(T)$ как непрерывную функцию переменных (x, t) . Далее, уравнения (2) и (4) определяют непрерывные в $D(T)$ функции $u(x, t)$ и $u_t(x, t) = w(x, t)$. Итак, $u \in C^1(D(T))$. Уравнение (5) при найденной функции $v(x, t) = u_x(x, t)$ и $(x, t) \in D(T)$ является интегральным уравнением Вольтерра относительно переменной t . Чтобы убедиться в этом, достаточно заменить в нём переменную интегрирования ξ на τ , как это уже было сделано для уравнения (3). Ядро этого уравнения и свободный член непрерывны в $D(T)$. Поэтому существует единственное непрерывное решение этого уравнения. Следовательно, производная $u_{xt}(x, t) = \varphi(x, t)$ является непрерывной в $D(T)$ функцией. Уравнение (6) определяет $u_{tt}(x, t) = \psi(x, t)$ как непрерывную в $D(T)$ функцию. Непрерывность производной $u_{xx}(x, t)$ в областях $D^-(T)$ и $D^+(T)$ следует непосредственно из уравнения (1). Однако эта производная имеет разрыв при $x = 0$, если $q(+0) \neq 0$. Таким образом, $u \in C^1(D(T))$ и $u \in C^2(D^-(T))$, $u \in C^2(D^+(T))$. Теорема 2 доказана. \square

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы 1 имеет место оценка*

$$|\varphi(x, t)| \leq \varphi_0 =: \frac{(2^\varepsilon a)^m Q}{4} \exp(m(2^\varepsilon a)^{m-1} Q T), \quad (x, t) \in D_+(T). \tag{27}$$

Доказательство. Запишем равенство (5), заменив в нём переменную интегрирования ξ на τ :

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = & -\frac{m}{2} \int_{t-x}^t q(\tau - t + x) v^{m-1}(\tau - t + x, t) \varphi(\tau - t + x, \tau) d\tau \\ & + \frac{m}{2} \int_{(x+t)/2}^t q(t + x - \tau) v^{m-1}(t + x - \tau, \tau) \varphi(t + x - \tau, \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4} q\left(\frac{x+t}{2}\right) v^m\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right), \quad t \geq |x|. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенствами (7), (9). Тогда получим, что

$$|\varphi(x, t)| \leq \frac{m}{2} (2^\varepsilon a)^{m-1} Q \int_{t-x}^t |\varphi(\tau - t + x, \tau)| d\tau + \frac{m}{2} (2^\varepsilon a)^{m-1} Q \int_{(x+t)/2}^t |\varphi(t + x - \tau, \tau)| d\tau + \frac{(2^\varepsilon a)^m Q}{4}, \quad t \geq |x|. \quad (28)$$

Введём функцию $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} \max_{x \in [0, t]} |\varphi(x, t)|, & t \in [0, T/2], \\ \max_{x \in [0, T-t]} |\varphi(x, t)|, & t \in [T/2, T]. \end{cases} \quad (29)$$

Тогда из (28) вытекает интегральное неравенство

$$y(t) \leq a_1 + Q_1 \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T], \quad (30)$$

в котором

$$a_1 = \frac{(2^\varepsilon a)^m Q}{4}, \quad Q_1 = m(2^\varepsilon a)^{m-1} Q.$$

Применяя к неравенству (30) лемму Гронуолла — Беллмана, находим, что

$$y(t) \leq a_1 \exp(Q_1 T). \quad (31)$$

Из (29)–(31) вытекает оценка (27). \square

Как уже отмечалось выше, $u(x, t) = a(x - t)$ для $0 \leq t \leq -x$. Так как, по предположению, $q(x) = 0$ для $x < 0$, то из уравнения (1) следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = -2a, \quad x < 0, \quad t \geq 0. \quad (32)$$

Пусть $(x, t) \in D^-(T)$ и T удовлетворяет условию (8). Тогда в области $D^-(T)$ имеет место равенство (32). Интегрируя его вдоль характеристики $t + x = \text{const}$, находим, что

$$u(x, t) = u(0, t + x) + 2ax, \quad (x, t) \in D^-(T). \quad (33)$$

Таким образом, задание решения на оси $t = 0$ определяет решение во всей области $D^-(T)$.

Дифференцируя (33) по переменной x получаем важное для дальнейшего равенство

$$v(x, t) = w(0, t + x) + 2a, \quad (x, t) \in D^-(T). \quad (34)$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Обратная задача. Пусть T — заданное положительное число, $f(t)$ — заданная функция для $t \in [0, T]$. Требуется определить неизвестную функцию $q(x)$, входящую в уравнение (1), по следу решения прямой задачи (1) на отрезке $[0, T]$ полуоси $t \geq 0$:

$$u(0, t) = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (35)$$

Из формулы (34) находим, что задание решения прямой задачи на отрезке $[0, T]$ полуоси $t \geq 0$ приводит к тому, что тогда на том же отрезке становится известна и производная по x решения:

$$u_x(0, t) = f'(t) + 2a, \quad t \in [0, T]. \quad (36)$$

Из теоремы 2 и равенств (2), (4), (34) и (36), вытекает

Следствие 1. Функция $f(t) = u(0, t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяет условиям

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = -a, \quad f'(t) + 2a > 0, \quad t \in [0, T]. \quad (37)$$

Условия (37) являются необходимыми, если $q \in \mathcal{Q}$ и T удовлетворяет условию (8). Величина T может меняться в обширном диапазоне в зависимости от изменения Q и m . При изучении обратной задачи мы знаем только T , а параметр Q нам неизвестен. Поэтому предположим, что для функции $f(t)$ условия (37) выполнены при заданном T . Так как функция $f'(t)$ является непрерывной, то сумма $f'(t) + 2a$ является не только положительной на замкнутом отрезке $[0, T]$, но и отделена от нуля некоторой положительной постоянной 2μ , причём $2\mu \leq a$, так как $f'(0) + 2a = a$. В связи с этим, ниже используем следующее определение класса данных обратной задачи.

Определение 2. Будем говорить, что $f(t) \in \mathcal{F}(T, \mu)$, если $f \in C^2[0, T]$, удовлетворяет условиям (37) и для неё выполнены неравенства

$$\|f\|_{C^2[0, T]} = \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} |f(t)|, \max_{t \in [0, T]} |f'(t)|, \max_{t \in [0, T]} |f''(t)| \right\} \leq F, \quad (38)$$

$$f'(t) + 2a \geq 2\mu > 0, \quad 2\mu \leq a, \quad t \in [0, T].$$

Пусть $f(t) \in \mathcal{F}(T, \mu)$. Из формул (35), (36) следует, что

$$u(0, t) = f(t), \quad u_x(0, t) = 2a + f'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (39)$$

Используя формулу Даламбера для уравнения (1) с данными Коши (39), находим, что

$$u(x, t) = f(t + x) + 2ax - \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q(\xi) v^m(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad (x, t) \in D^+(T). \quad (40)$$

Дифференцируя это равенство по переменной x , получаем, что

$$v(x, t) = f'(t + x) + 2a - \frac{1}{2} \int_0^x q(\xi) [v^m(\xi, t + x - \xi) + v^m(\xi, \xi + t - x)] d\xi, \quad (x, t) \in D^+(T). \quad (41)$$

Дифференцируя (41) по переменной t , получаем, что

$$\varphi(x, t) = f''(t + x) - \frac{m}{2} \int_0^x q(\xi) [v^{m-1}(\xi, t + x - \xi) \varphi(\xi, t + x - \xi) + v^{m-1}(\xi, \xi + t - x) \varphi(\xi, \xi + t - x)] d\xi, \quad (x, t) \in D^+(T). \quad (42)$$

Положим в равенстве (6) $x = 0$. Тогда получим равенство

$$f''(t) = \frac{m}{2} \int_0^{t/2} q(\xi) v^{m-1}(\xi, t - \xi) \varphi(\xi, t - \xi) d\xi + \frac{1}{4} q(t/2) v^m(t/2, t/2), \quad t \in [0, T]. \quad (43)$$

Заменим в нём t на $2x$. Тогда получим

$$f''(2x) = \frac{m}{2} \int_0^x q(\xi) v^{m-1}(\xi, 2x - \xi) \varphi(\xi, 2x - \xi) d\xi + \frac{1}{4} q(x) v^m(x, x), \quad x \in [0, T/2]. \quad (44)$$

Полагая, что $v(x, x) > 0$ (это мы должны впоследствии оправдать!), разделим равенство (44) на $v^m(x, x)/4$. В результате получим равенство

$$q(x) = \frac{4f''(2x)}{v^m(x, x)} - \frac{2m}{v^m(x, x)} \int_0^x q(\xi)v^{m-1}(\xi, 2x - \xi)\varphi(\xi, 2x - \xi)d\xi, \quad x \in [0, T/2]. \quad (45)$$

Заметим, что в этом равенстве $v(x, x)$ определяется правой частью (41) при $t = x$.

Система уравнений (41), (42), (45) является в области $D^+(T)$ системой нелинейных интегральных уравнений относительно функций $v(x, t)$, $\varphi(x, t)$ и $q(x)$. Запишем её в операторном виде

$$Z = A(Z), \quad (46)$$

в котором

$$Z = Z(x, t) = (v(x, t), \varphi(x, t), q(x)), \quad A(Z) = (A_1(Z), A_2(Z), A_3(Z))$$

и операторы $A_1(Z)$, $A_2(Z)$, $A_3(Z)$ определяются правыми частями уравнений (41), (42), (45), соответственно. Покажем, что оператор $A(Z)$ является сжимающим на подходящем множестве функций, если T мало.

Обозначим

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= f'(t+x) + 2a, & \varphi_0(x, t) &= f''(t+x), & (x, t) &\in D^+(T), \\ q_0(x) &= 4f''(2x)a^{-m}, & & & x &\in [0, T/2], \end{aligned} \quad (47)$$

и

$$Z^0(x, t) = (v_0(x, t), \varphi_0(x, t), q_0(x)). \quad (48)$$

Из (47) следует оценка

$$\begin{aligned} \|Z^0\|_{C(D^+(T))} &= \max \left\{ \max_{(x,t) \in D^+(T)} |v_0(x, t)|, \max_{(x,t) \in D^+(T)} |\varphi_0(x, t)|, \max_{x \in [0, T/2]} |q_0(x)| \right\} \\ &\leq \max\{F + 2a, 4Fa^{-m}\} =: M. \end{aligned} \quad (49)$$

Определение 3. Пусть $\mathcal{M}(T, \mu) = \{v(x, t), \varphi(x, t), q(x)\}$ — множество непрерывных в $D^+(T)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$\|Z - Z^0\|_{C(D^+(T))} \leq M, \quad v(x, t) \geq \mu, \quad (x, t) \in D_+(T). \quad (50)$$

Теорема 4. Пусть $f(t) \in \mathcal{F}(T, \mu)$. Тогда найдётся $T^* \in [0, T]$ такое, что уравнение (46) имеет на множестве $\mathcal{M}(T^*, \mu)$ единственное решение.

Доказательство. Покажем вначале, что при некотором $T_1 \in (0, T]$ оператор $A(Z)$ переводит множество $\mathcal{M}(T_1, \mu)$ в себя. Заметим для этого, что функции из $\mathcal{M}(T_1, \mu)$ удовлетворяют неравенствам

$$\|v\|_{C(D^+(T))} \leq 2M, \quad \|\varphi\|_{C(D^+(T))} \leq 2M, \quad \|q\|_{C[0, T/2]} \leq 2M. \quad (51)$$

Используя эти неравенства, находим, что

$$v(x, t) \geq 2\mu - \frac{1}{2} \int_0^x |q(\xi)| [|v|^m(\xi, t+x-\xi) + |v|^m(\xi, \xi+t-x)] d\xi \geq 2\mu - (2M)^{m+1}T/2, \quad (x, t) \in D^+(T).$$

Пусть T удовлетворяет условию $T < \frac{2\mu}{(2M)^{m+1}}$. Тогда $v(x, t) > \mu$ для $(x, t) \in D^+(T)$. Ниже, при оценке разностей $A_1(Z) - v_0$, $A_2(Z) - \varphi_0$, $A_3(Z) - q_0$, мы будем полагать, что возникшее условие на T выполнено.

Из равенств (41), (42), (45), (47) имеем

$$A_1(Z) - v_0(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x q(\xi) [v^m(\xi, t + x - \xi) + v^m(\xi, \xi + t - x)] d\xi, \quad (x, t) \in D^+(T), \quad (52)$$

$$A_2(Z) - \varphi_0(x, t) = -\frac{m}{2} \int_0^x q(\xi) [v^{m-1}(\xi, t + x - \xi) \varphi(\xi, t + x - \xi) + v^{m-1}(\xi, \xi + t - x) \varphi(\xi, \xi + t - x)] d\xi, \quad (x, t) \in D^+(T), \quad (53)$$

$$A_3(Z) - q_0(x) = 4f''(2x) \frac{a^m - v^m(x, x)}{a^m v^m(x, x)} - \frac{2m}{v^m(x, x)} \int_0^x q(\xi) v^{m-1}(\xi, 2x - \xi) \varphi(\xi, 2x - \xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2]. \quad (54)$$

Используем в последней формуле представление

$$v^m(x, x) - a^m = m \int_a^{v(x, x)} z^{m-1} dz = [v(x, x) - a] R_m(v(x, x)), \quad (55)$$

$$R_m(v(x, x)) = m \int_0^1 [sv(x, x) + (1-s)a]^{m-1} ds.$$

Тогда равенство (54) принимает вид

$$A_3(Z) - q_0(x) = -4f''(2x) \frac{[v(x, x) - a] R_m(v(x, x))}{a^m v^m(x, x)} - \frac{2m}{v^m(x, x)} \int_0^x q(\xi) v^{m-1}(\xi, 2x - \xi) \varphi(\xi, 2x - \xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2]. \quad (56)$$

Так как $\mu \leq v(x, x) \leq 2M$, $a = v(0, 0) \leq 2M$ и $|R_m(v(x, x))| \leq m(2M)^{m-1}$, то из уравнений (52), (53), (56) следуют оценки

$$\begin{aligned} |A_1(Z) - v_0(x, t)| &\leq (2M)^{m+1} T/2, \quad (x, t) \in D^+(T), \\ |A_2(Z) - \varphi_0(x, t)| &\leq m(2M)^{m+1} T/2, \quad (x, t) \in D^+(T), \\ |A_3(Z) - q_0(x)| &\leq m(2M)^{m+1} (a\mu)^{-m} (2F(2M)^{m-1} + a^m) T, \quad x \in [0, T/2]. \end{aligned}$$

При выводе последней оценки мы использовали, что

$$|v(x, x) - a| = |A_1(Z) - v_0(x, t)|_{t=x} \leq (2M)^{m+1} T/2, \quad (x, t) \in D^+(T).$$

Выберем $T_1 \in (0, T)$ из условий

$$T_1 < \frac{2\mu}{(2M)^{m+1}}, \quad m(2M)^{m+1}T_1/2 \leq M, \quad m(2M)^{m+1}(a\mu)^{-m}(2F(2M)^{m-1} + a^m)T_1 \leq M.$$

Тогда получим неравенства

$$\begin{aligned} v(x, t) \geq \mu, \quad |A_1(Z) - v_0(x, t)| \leq M, \quad |A_1(Z) - \varphi_0(x, t)| \leq M, \\ |A_3(Z) - q_0(x)| \leq M, \quad (x, t) \in D^+(T_1), \end{aligned}$$

из которых следует, что оператор $A(Z)$ переводит множество $\mathcal{M}(T_1)$ в себя.

Покажем теперь, что оператор $A(Z)$ является при некотором $T^* \in (0, T_1]$ сжимающим на множестве $\mathcal{M}(T^*, \mu)$. Пусть $(v_1, \varphi_1, q_1) = Z^1$ и $(v_2, \varphi_2, q_2) = Z^2$ — два набора функций, принадлежащих $\mathcal{M}(T_1, \mu)$. Обозначим

$$\bar{v}(x, t) = v_2(x, t) - v_1(x, t), \quad \bar{\varphi}(x, t) = \varphi_2(x, t) - \varphi_1(x, t), \quad \bar{q}(x) = q_2(x) - q_1(x), \quad (57)$$

$$\|\bar{Z}\| = \|\bar{Z}\|_{C(D^+(T_1))} = \max\left(\max_{(x,t) \in D^+(T_1)} |\bar{v}(x, t)|, \max_{(x,t) \in D^+(T_1)} |\bar{\varphi}(x, t)|, \max_{x \in [0, T_1/2]} |\bar{q}(x)|\right). \quad (58)$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1(Z^2) - A_1(Z^1) = -\frac{1}{2} \int_0^x \{q_1(\xi) [R_{2,m}(\xi, t+x-\xi) + R_{2,m}(\xi, \xi+t-x)] \\ + \bar{q}(\xi) [v_2^m(\xi, t+x-\xi) + v_2^m(\xi, \xi+t-x)]\} d\xi, \quad (x, t) \in D^+(T_1), \quad (59) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2(Z^2) - A_2(Z^1) = \\ = -\frac{m}{2} \int_0^x q_1(\xi) [\bar{\varphi}(\xi, t+x-\xi) v_1^{m-1}(\xi, t+x-\xi) + R_{2,m-1}(\xi, t+x-\xi) \varphi_2(\xi, t+x-\xi)] \\ + \bar{\varphi}(\xi, \xi+t-x) v_1^{m-1}(\xi, \xi+t-x) + R_{2,m-1}(\xi, \xi+t-x) \varphi_2(\xi, \xi+t-x)] \\ + \bar{q}(\xi) [v_2^{m-1}(\xi, t+x-\xi) \varphi_2(\xi, t+x-\xi) + v_2^{m-1}(\xi, \xi+t-x) \varphi_2(\xi, \xi+t-x)] d\xi, \quad (60) \\ (x, t) \in D^+(T_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3(Z^2) - A_3(Z^1) = -\frac{4f''(2x)R_{2,m}(x, x)}{v_1^m(x, x)v_2^m(x, x)} + \frac{2mR_{2,m}(x, x)}{v_1^m(x, x)v_2^m(x, x)} \int_0^x q_2(\xi) v_2^{m-1}(\xi, 2x-\xi) \varphi_2(\xi, 2x-\xi) d\xi \\ - \frac{2m}{v_1^m(x, x)} \int_0^x [q_1(\xi) [v_1^{m-1}(\xi, 2x-\xi) \bar{\varphi}(\xi, 2x-\xi) + R_{2,m-1}(\xi, 2x-\xi) \varphi_2(\xi, 2x-\xi)] \\ + \bar{q}(\xi) v_2^{m-1}(\xi, 2x-\xi) \varphi_2(\xi, 2x-\xi)] d\xi, \quad x \in [0, T/2]. \quad (61) \end{aligned}$$

В этих равенствах $R_{2,k}(x, t) = v_2^k(x, t) - v_1^k(x, t)$ при $k = m$ или $k = m-1$. Преобразуем $R_{2,k}(x, t)$, используя формулу

$$R_{2,k} = k \int_{v_1}^{v_2} z^{k-1} dz = k(v_2 - v_1) \int_0^1 (sv_2 + (1-s)v_1)^{k-1} ds. \quad (62)$$

Тогда

$$|R_{2,k}(x, t)| \leq R_k^* |\bar{v}(x, t)|, \quad (x, t) \in D^+(T), \quad (63)$$

где

$$R_k^* = m \begin{cases} (2M)^{k-1}, & k \geq 1, \\ (\mu)^{k-1}, & k < 1. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой (63). Тогда из равенств (59)–(61) следуют оценки

$$|A_k(Z^1) - A_k(Z^2)| \leq C_k \|\bar{Z}\| T_1, \quad (x, t) \in D^+(T_1), \quad k = 1, 2, 3, \quad (64)$$

в которых

$$\begin{aligned} C_1 &= [2MR_m^* + (2M)^m]/2, & C_2 &= m[(2M)^m + R_{m-1}^*(2M)^2/2], \\ C_3 &= C_1 R_m^* \mu^{-2m} [4F + m(2M)^{m+1} T_1] + m\mu^{-m} [2(2M)^m + R_{m-1}^*(2M)^2]. \end{aligned} \quad (65)$$

Пусть $\rho \in (0, 1)$ и $T^* \in (0, T_1]$ удовлетворяют условиям $T^* \max\{C_1, C_2, C_3\} \leq \rho$. Тогда выполнены неравенства

$$\|A_k(Z^2) - A_k(Z^1)\| \leq \rho \|\bar{Z}\|, \quad k = 1, 2, 3, \quad (66)$$

которые означают, что $A(Z)$ является на множестве $\mathcal{M}(T^*, \mu)$ оператором сжатия. Ранее было показано, что оператор $A(Z)$ переводит множество $\mathcal{M}(T_1, \mu)$ в себя, следовательно, и множество $\mathcal{M}(T^*, \mu)$ в себя. Тогда из принципа Банаха следует, что операторное уравнение имеет на множестве $\mathcal{M}(T^*, \mu)$ решение, и притом только одно. Теорема 4 доказана. \square

Следствие 2. Если $f(t) \in \mathcal{F}(T, \mu)$, то решение обратной задачи локально существует и единственно.

Теорема 5. Пусть в области $D^+(T)$ существуют непрерывные решения (v_1, φ_1, q_1) и (v_2, φ_2, q_2) системы уравнений (41), (42), (45), отвечающие данным (2) с функциями $f_1 \in \mathcal{F}(T, \mu)$ и $f_2 \in \mathcal{F}(T, \mu)$ соответственно. Пусть, кроме того, $q_k \in \mathcal{Q}$, $k = 1, 2$, и выполнено неравенство (8). Тогда найдётся постоянная $C = C(a, m, Q, \varepsilon, F, T)$ такая, что имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|_{C(D^+(T))} &\leq C \|f_1 - f_2\|_{C^2[0, T]}, & \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{C(D^+(T))} &\leq C \|f_1 - f_2\|_{C^2[0, T]}, \\ \|q_1 - q_2\|_{C[0, T/2]} &\leq C \|f_1 - f_2\|_{C^2[0, T]}. \end{aligned} \quad (67)$$

Доказательство. Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, t) &= v_2(x, t) - v_1(x, t), & \bar{\varphi}(x, t) &= \varphi_2(x, t) - \varphi_1(x, t), \\ \bar{q}(x) &= q_2(x) - q_1(x), & \bar{f}(t) &= f_2(t) - f_1(t). \end{aligned}$$

Переходя в уравнениях (41), (42), (45) к разностям, получим

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, t) &= \bar{f}'(t+x) - \frac{1}{2} \int_0^x \{q_1(\xi) [R_{2,m}(\xi, t+x-\xi) + R_{2,m}(\xi, \xi+t-x)] \\ &\quad + \bar{q}(\xi) [v_2^m(\xi, t+x-\xi) + v_2^m(\xi, \xi+t-x)]\} d\xi, \quad (x, t) \in D^+(T); \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(x, t) = & \bar{f}''(t+x) - \frac{m}{2} \int_0^x q_1(\xi) [\bar{\varphi}(\xi, t+x-\xi) v_1^{m-1}(\xi, t+x-\xi) + R_{2,m-1}(\xi, t+x-\xi) \varphi_2(\xi, t+x-\xi)] \\ & + \bar{\varphi}(\xi, \xi+t-x) v_1^{m-1}(\xi, \xi+t-x) + R_{2,m-1}(\xi, \xi+t-x) \varphi_2(\xi, \xi+t-x)] \\ & + \bar{q}(\xi) [v_2^{m-1}(\xi, t+x-\xi) \varphi_2(\xi, t+x-\xi) + v_2^{m-1}(\xi, \xi+t-x) \varphi_2(\xi, \xi+t-x)] d\xi, \quad (69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{q}(x) = & \frac{4\bar{f}''(2x)}{v_2^m(x, x)} - \frac{4f''(2x)R_{2,m}(x, x)}{v_1^m(x, x)v_2^m(x, x)} + \frac{2mR_{2,m}(x, x)}{v_1^m(x, x)v_2^m(x, x)} \int_0^x q_2(\xi) v_2^{m-1}(\xi, 2x-\xi) \varphi_2(\xi, 2x-\xi) d\xi \\ & - \frac{2m}{v_1^m(x, x)} \int_0^x [\bar{q}(\xi) v_2^{m-1}(\xi, 2x-\xi) \varphi_2(\xi, 2x-\xi) \\ & + q_1(\xi) [R_{2,m-1}(\xi, 2x-\xi) \varphi_2(\xi, 2x-\xi) + v_1^{m-1}(\xi, 2x-\xi) \bar{\varphi}(\xi, 2x-\xi)]] d\xi. \quad (70) \end{aligned}$$

В этих формулах использовано обозначение, ранее введённое для $R_{2,k}(x, t)$, $k = m$ или $k = m - 1$.

Так как $q_k \in \mathcal{Q}$ и T удовлетворяет неравенству (8), то для $v_k(x)$, $k = 1, 2$, выполнена оценка (9) теоремы 1. Следовательно, оценки для функций $q_k(x)$, $v_k(x)$ даны неравенствами (7) и (9), соответственно. Неравенство (27) теоремы 3 даёт оценку функций $\varphi_k(x, t)$, $k = 1, 2$, через постоянную $\varphi_0 = \varphi_0(a, Q, \varepsilon, T)$. Пусть

$$\bar{z}(x) = \max \left\{ \max_{t \in [x, T-x]} |\bar{v}(x, t)|, \max_{t \in [x, T-x]} |\bar{\varphi}(x, t)|, |\bar{q}(x)| \right\}, \quad x \in [0, T/2].$$

Оценим $R_{2,k}(x, t)$. Из формул (62) и (9) следует, что

$$|R_{2,k}(x, t)| \leq R_k^{**} |\bar{v}(x, t)|, \quad (71)$$

где

$$R_k^{**} = k \begin{cases} (2^\varepsilon a)^{k-1}, & k \geq 1, \\ a^{m-1} (2 - 2^\varepsilon)^{k-1}, & k < 1. \end{cases}$$

Обозначим $\bar{f}(t) = f_2(t) - f_1(t)$. Из соотношений (68)–(70), (9) и (71) получаем оценки

$$|\bar{v}(x, t)| \leq \|\bar{f}\| + \hat{C}_1 \int_0^x \bar{z}(\xi) d\xi, \quad \hat{C}_1 = QR_m^{**} + (2^\varepsilon a)^m, \quad (72)$$

$$|\bar{\varphi}(x, t)| \leq \|\bar{f}\| + \hat{C}_2 \int_0^x \bar{z}(\xi) d\xi, \quad \hat{C}_2 = m[Q(2^\varepsilon a)^{m-1} + Q\varphi_0 R_{m-1}^{**} + \varphi_0 (2^\varepsilon a)^{m-1}], \quad (73)$$

$$|\bar{q}(x)| \leq C_0 \|\bar{f}\| + \hat{C}_3 \int_0^x \bar{z}(\xi) d\xi, \quad (74)$$

$$C_0 = \frac{1}{a^{2m}(2 - 2^\varepsilon)^{2m}} [4a^m (2 - 2^\varepsilon)^m + R_m^{**} [4F + m\varphi_0 QT (a2^\varepsilon)^{m-1}]];$$

$$C_3 = \frac{\hat{C}_1 R_m^{**} [4F + mTQ(2^\varepsilon)^{m-1} \varphi_0]}{a^{2m}(2 - 2^\varepsilon)^{2m}} + \frac{2m[(2^\varepsilon a)^{m-1}(\varphi_0 + Q) + QR_{m-1}^{**} \varphi_0]}{a^m(2 - 2^\varepsilon)^m}.$$

Обозначая

$$\bar{z}(0) = C^* \|f_1 - f_2\|_{C^2[0,T]}, \quad C^* = \max\{1, C_0\}, \quad C^{**} = \max(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2, \widehat{C}_3),$$

получим неравенство

$$\bar{z}(x) \leq C^* \bar{z}(0) + C^{**} \int_0^x \bar{z}(\xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2].$$

Используя неравенство Гронуолла — Беллмана, получаем оценку (67) с постоянной $C = C^* \exp(C^{**}T/2)$. Теорема 5 доказана. \square

Следствие 3. Если решение обратной задачи существует для некоторого коэффициента $q \in \mathcal{Q}$ и числа $T > 0$, удовлетворяющего неравенству (8), то оно единственно и условно устойчиво по данным обратной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Assylbekov Y.M., Zhou T. Direct and inverse problems for the nonlinear time-harmonic Maxwell equations in Kerr-type media // J. Spectral Theory. 2017; arXiv:1709.07767
2. Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G. Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // Invent. Math. 2018. V. 212. P.781–857; arXiv:1405.3386v4 [math.DG] 20 Sep 2017
3. Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // Commun. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609; arXiv:1606.06261v1 [math.AP] 20 Jun 2016
4. Lassas M. Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // Proc. Internat. Congress Math. 2018. V. 3. P. 3739–3760.
5. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equ. 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.
6. Hintz P., Uhlmann G. Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // Internat. Math. Res. Notices. 2019. V. 22. P. 6949–6987; arXiv:1705.01215v2 [math.DG] 27 May 2020
7. Barreto A.S. Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14, N 6. P. 1057–1105; arXiv:2001.11061v1 [math.AP] 29 Jan 2020
8. Hintz P., Uhlmann G., Zhai J. An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // Internat. Math. Res. Notices. 2021; arXiv:2005.10447
9. Uhlmann G., Zhai J. On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // J. Math. Pures Appl. 2021. V. 153. P. 114–136.
10. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation // Analysis of PDEs. 2021; arXiv:2107.08513v1 [math.AP] 18 Jul 2021
11. Hintz P., Uhlmann G., Zhai J. The Dirichlet-to-Neumann map for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // Analysis of PDEs. 2021; arXiv:2103.08110v1 [math.AP] 15 Mar 2021
12. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53; DOI: <https://doi.org/10.1007/s00220-022-04359-0>
13. Романов В.Г., Бугуева Т.В. Обратная задача для нелинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 2. С. 83–100.
14. Романов В.Г., Бугуева Т.В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 3. С. 154–169.
15. Романов В.Г. Обратная задача для полулинейного волнового уравнения // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления, 2022, Т. 504, № 1. С. 36–41.
16. Романов В.Г., Бугуева Т.В. Обратная задача для волнового уравнения с полиномиальной нелинейностью // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26, № 1. С. 142–149.

UDC 517.956

**THE PROBLEM OF DETERMINING THE COEFFICIENT
FOR POWER GRADIENT NONLINEARITY
IN SEMILINEAR WAVE EQUATION**

© 2023 V. G. Romanov^{1a}, T. V. Bugueva^{1,2b}

¹*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,*
²*Novosibirsk State University,
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ru

Received 12.12.2022, revised 14.12.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. An one-dimensional inverse problem of determining the coefficient for power gradient nonlinearity in a semilinear wave equation is considered. The existence and uniqueness theorems of the solution of a direct problem are proved. For the inverse problem the local existence theorem is stated and a stability estimate of the solution is found.

Keywords: semilinear wave equation, direct problem, inverse problem, power gradient nonlinearity, existence, stability, uniqueness.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.210

REFERENCES

1. Assylbekov Y.M., Zhou T. Direct and inverse problems for the nonlinear time-harmonic Maxwell equations in Kerr-type media. *J. Spectral Theory*, 2017; arXiv:1709.07767
2. Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G. Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations. *Invent. Math.*, 2018, Vol. 212, pp.781–857; arXiv:1405.3386v4 [math.DG] 20 Sep 2017
3. Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds. *Commun. Math. Phys.*, 2018, Vol. 360, pp. 555–609; arXiv:1606.06261v1 [math.AP] 20 Jun 2016
4. Lassas M. Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations. *Proc. Internat. Congress Math.*, 2018, Vol. 3, pp. 3739–3760.
5. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 2019, Vol. 44, No. 11, pp. 1140–1158.
6. Hintz P., Uhlmann G. Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets. *Internat. Math. Res. Notices*, 2019, Vol. 22, pp. 6949–6987; arXiv:1705.01215v2 [math.DG] 27 May 2020
7. Barreto A.S. Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions. *Inverse Probl. Imaging*, 2020, Vol. 14, No. 6, pp. 1057–1105; arXiv:2001.11061v1 [math.AP] 29 Jan 2020
8. Hintz P., Uhlmann G., Zhai J. An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds. *Internat. Math. Res. Notices*, 2021; arXiv:2005.10447
9. Uhlmann G., Zhai J. On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation. *J. Math. Pures Appl.*, 2021, Vol. 153, pp. 114–136.
10. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a general nonlinearity in the semilinear wave equation; *Analysis of PDEs*, 2021; arXiv:2107.08513v1 [math.AP] 18 Jul 2021

11. Hintz P., Uhlmann G., Zhai J. The Dirichlet-to-Neumann map for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds. *Analysis of PDEs*, 2021; arXiv:2103.08110v1 [math.AP] 15 Mar 2021
12. Barreto A.S., Stefanov P. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly non-linear regime. *Commun. Math. Phys.*, 2022, Vol. 392, pp. 25–53; <https://doi.org/10.1007/s00220-022-04359-0>
13. Romanov V.G., Bugueva T.V. Inverse problem for a nonlinear wave equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2022, Vol. 16, No. 2, pp. 333–348.
14. Romanov V.G., Bugueva T.V. The problem of determining the coefficient of the nonlinear term in a quasilinear wave equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2022, Vol. 16, No. 3, pp. 550–562.
15. Romanov V.G. An inverse problem for a semilinear wave equation. *Doklady Math.*, 2022, Vol. 105, No. 3, pp. 166–170.
16. Romanov V.G., Bugueva T.V. Inverse problem for wave equation with polynomial nonlinearity. *J. Appl. Indust. Math.*, 2023, Vol. 17, No. 1, pp. 163–167; DOI: 10.1134/S1990478923010180

УДК 532.5:519.6

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОФАЗНЫХ И МНОГОФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В МИКРОКАНАЛАХ С НЕРОВНОСТЯМИ

© 2023 О. А. Солнышкина^a, Н. Б. Фаткуллина^b, А. З. Булатова^c

*Уфимский университет науки и технологий,
ул. Заки Валиди, 32, г. Уфа 450076, Россия*

E-mails: ^aolgasolnyshkina@gmail.com, ^bnazgulbay@mail.ru, ^cbulatova29@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.07.2022 г.; после доработки 27.07.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Для прогнозирования поведения пластовых жидкостей в пористой среде и их исследования на макроуровне необходимо детальное изучение гидродинамических потоков в пористой среде в микромасштабе на уровне отдельных поровых пространств, принимая во внимание их структурные особенности. В рамках данной работы рассматривается периодическое течение вязкой несжимаемой жидкости и дисперсной системы в плоском канале прямоугольного сечения с неровными стенками при постоянном перепаде давления. С использованием эффективного численного подхода на основе трёхмерного метода граничных элементов, ускоренного быстрым методом мультиполей на гетерогенных вычислительных архитектурах, выполнены исследования влияния неровностей различного размера и формы на стенках микроканалов на гидродинамические потоки при течении вязкой жидкости и на динамику капель эмульсии в капиллярной микромодели пористой среды. Результаты работы могут быть полезны также при конструировании микрофлюидных устройств.

Ключевые слова: вычислительная гидродинамика, течение Стокса, неровные микроканалы, дисперсные системы, метод граничных элементов, быстрый метод мультиполей, графические процессоры.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.211

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование фильтрации флюидов в микромоделях пласта имеет практическое значение для разработки технологий увеличения нефтеотдачи, так как макроэффекты, возникающие при фильтрации нефти в пласте, во многом определяются особенностями динамики жидкости в поровых каналах. Использование таких подходов позволяет сократить число лабораторных и полевых экспериментов, оптимизировать существующие механизмы и стратегии добычи, а также оценить возможные риски. Поскольку поровые каналы обладают естественными неровностями различного масштаба, то неизбежно возникающие особенности на их поверхностях и отклонение формы от идеализированной цилиндрической или плоскопараллельной, рассматриваемой в большинстве работ, должны быть учтены и тщательно исследованы. Одной из общепринятых идеологий представления пористой среды является капиллярная модель, когда объём пористой среды рассматривается как сеть микроканалов сложных форм. Моделирование медленных течений в сложных трёхмерных областях имеет значение также для микрогидродинамики при создании лабораторий-на-чипе, применяющихся, к примеру, для изучения многостадийных биохимических процессов, в которых одним из управляющих механизмов является перемешивание реагентов. Производство микроустройств также ставит ряд

других актуальных промышленных задач, например конструирование микротеплообменников. Разработка эффективных подходов для проведения многопараметрических исследований описанных процессов в 3D является актуальной задачей.

Среди численных методов трёхмерного моделирования задач механики сплошных сред наиболее популярны конечно-разностные методы [1], метод конечных элементов, метод контрольного объёма [2] и метод граничных элементов (МГЭ) [3]. Перечисленные подходы различаются между собой способом представления расчётной области и математической основой. Для моделирования динамики дисперсных систем в областях со сложной геометрией в трёхмерном случае эффективным является МГЭ. Прямые расчёты методом граничных элементов динамики капель по большей части проводились для каналов симметричных форм или в двумерном случае [4–6]. Одна из причин этого связана с тем, что для решения трёхмерной несимметричной задачи, даже для относительно простых форм, расчётная сетка на поверхности канала содержит десятки тысяч граничных элементов. В настоящее время новые методы, основанные на алгоритмических и аппаратных ускорениях вычислений, способны решать такие вычислительно сложные задачи. Например, МГЭ может быть ускорен с применением быстрого метода мультиполей (БММ) [3, 7]. БММ является высокопараллелизуемым алгоритмом, допускающим возможность дополнительного ускорения за счёт использования гетерогенных вычислительных архитектур и кластеров [8].

Влияние неровности стенок на особенности гидродинамических потоков является предметом активного изучения. В [9] проведено численное моделирование течения в микроканалах с препятствиями треугольной формы, расположенными вдоль стенок каналов, чтобы исследовать влияние геометрии шероховатости и числа Рейнольдса на коэффициент трения. Было показано, что с увеличением размера неровностей перепад давления значительно меняется. В работе [10] приведены результаты численного моделирования динамики вязкой жидкости в микроканале с неровными стенками. При увеличении относительной шероховатости стенок авторы данной работы наблюдали резкое отклонение линий тока и образование вихрей. Однако точная природа влияния относительной шероховатости на поток жидкости до конца не изучена [11].

В данной работе применяется численный подход, основанный на МГЭ для трёхмерных задач, ускорение которого произведено как за счёт высокоэффективного масштабируемого алгоритма, так и за счёт распараллеливания на многоядерных CPUs и графических процессорах GPUs. Целью настоящей работы является применение подхода для изучения особенностей гидродинамических потоков и динамики деформируемых капель в пористых средах, представленных в виде каналов с неровными стенками на микроуровне.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

В работе рассматривается периодическое течение вязкой несжимаемой жидкости и дисперсной системы, состоящей из деформируемых капель вязкой несжимаемой жидкости в объёме жидкости, в канале сложной формы при постоянном перепаде давления. Поскольку рассматриваемые течения в микроканалах порового пространства достаточно медленные, то силы вязкости, возникающие при течении жидкости, гораздо значительнее сил инерции, связанных с ускорением или торможением частиц жидкости, что даёт возможность полностью пренебречь инерционными членами в расчётах. Все изучаемые процессы происходят в изотермических условиях, без учёта сил Ван-дер-Ваальса. Таким образом, течение жидкости может описываться уравнениями Стокса

$$-\nabla p_i + \mu_i \nabla^2 \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где \mathbf{u} — скорость; p — давление; индекс i обозначает рассматриваемую жидкость, $i = 1$ для несущей жидкости, $i = 2$ для жидкости внутри дисперсных включений.

Уравнения (1) дополняются граничными условиями в зависимости от задачи. Поверхность моделируемого канала S рассматривается как совокупность боковой поверхности S_{side} , входного S_{in} и выходного S_{out} сечений: $S = S_{\text{in}} \cup S_{\text{out}} \cup S_{\text{side}}$. Совокупность всех поверхностей дисперсных частиц обозначается S_d . Предполагается, что канал бесконечен, поверхность S_{side} , поток и распределение капель повторяются с периодом L по направлению оси x . Для течения однофазной жидкости в канале на боковой поверхности канала задаётся условие прилипания, которое дополняется условием периодичности течения

$$\mathbf{u}|_{x=0} = \mathbf{u}|_{x=L} = \mathbf{u}_s, \quad \mathbf{f}_1|_{x=L} = -\mathbf{f}_1|_{x=0} + \mathbf{f}_p = \mathbf{f}_s, \quad \mathbf{f}_p = \mathbf{i}_x \Delta p, \quad (2)$$

где Δp — заданный перепад давления для потока в канале; \mathbf{u}_s и \mathbf{f}_s — неизвестные функции; \mathbf{f}_1 — вектор напряжений в жидкости 1.

На межфазной границе S_d задаются следующие условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}, \quad \mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 = f \mathbf{n}, \\ f = \gamma(\nabla \cdot \mathbf{n}) + (\rho_1 - \rho_2)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_d, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений; \mathbf{n} — нормаль к поверхности, направленная в жидкость 1; γ — коэффициент поверхностного натяжения; ρ — плотность; \mathbf{x} — радиус-вектор рассматриваемой точки; \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения.

Движение дисперсных частиц описывается кинематическим условием

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — скорость на поверхности капель, определяемая из решения описанной эллиптической задачи.

Для решения задачи (1)–(4) применяется разработанный авторами подход на основе метода граничных элементов [12], который очень эффективен при решении задач в сложной геометрии и при описании динамики деформируемых объектов в 3D, поскольку все расчёты связаны только с границей. Гранично-интегральная формулировка, к которой сводятся обе из рассматриваемых задач, выводится из стандартной интегральной формы уравнений Стокса [13] для случая жидкости с вязкостью μ , занимающей объём V , ограниченный поверхностью S с нормальными $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, направленными вне объёма жидкости:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in V, \\ \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S, \\ - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \notin S \cup V, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$, \mathbf{G} и \mathbf{T} — тензоры второго и третьего ранга (фундаментальные решения уравнения Стокса), компоненты которых в прямоугольной декартовой системе координат имеют вид

$$G_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3} \right), \quad T_{ijk}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\frac{3}{4\pi} \frac{r_i r_j r_k}{r^5}, \quad r_i = y_i - x_i, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Для случая движения в канале капель другой жидкости в потоке несущей жидкости гранично-интегральная формулировка (5) может быть переписана.

Учитывая, что поверхность S контактирует только с жидкостью 1, а жидкость 2 ограничена поверхностью S_d , нормали к которой направлены в жидкость 1, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1 + \beta(\mathbf{y})\lambda}{2} \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \int_{S_d} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ = \frac{1}{\mu_1} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu_1} \int_{S_d} \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in S' = S \cup S_d, \\ \mathbf{u}(\mathbf{y}) - \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \int_{S_d} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ = \frac{1}{\mu_1} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu_1} \int_{S_d} \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in V_1. \\ \lambda \mathbf{u}(\mathbf{y}) + \int_S \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \int_{S_d} \mathbf{K}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ = \frac{1}{\mu_1} \int_S \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \frac{1}{\mu_1} \int_{S_d} \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in V_2, \end{aligned}$$

где $\beta = 1$, если $\mathbf{y} \in S_d$, и $\beta = 0$, если $\mathbf{y} \notin S_d$, $\lambda = \mu_2/\mu_1$ — соотношение вязкостей внутренней и внешней жидкостей.

Все рассматриваемые поверхности покрываются треугольной сеткой. Используя метод коллокаций в центрах треугольных элементов, уравнение относительно расчётных точек, находящихся на поверхности канала и капель, сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плотной несимметричной матрицей.

Интегрирование по времени проводится методом Адамса — Башфорта — Моултона (АБМ) шестого порядка (предиктор-корректор), для которого значения функции на начальном отрезке времени находятся методом Рунге — Кутты четвёртого порядка. Метод Адамса и связанный с ним метод АБМ обеспечивают высокую точность интегрирования и экономичны, поскольку требуют одной (Адамс) или двух (АБМ) оценок правой части на один шаг по времени.

Основная вычислительная сложность при решении полученной системы в виде нехватки памяти возникает, когда количество расчётных узлов существенно возрастает, что неизбежно при моделировании течений в сложных областях, поверхность которых должна быть покрыта достаточно подробной сеткой с десятками тысяч треугольных элементов. Указанная проблема может быть решена с использованием комплексного подхода, заключающегося в применении как алгоритмического ускорения, так и аппаратного. Прямой метод решения СЛАУ был заменён итерационным — методом обобщённых минимальных невязок [14], в котором модуль умножения матрицы на вектор реализуется с помощью БММ. БММ позволяет существенно снизить вычислительную сложность матрично-векторного произведения с квадратичной до линейной. Кроме того, часть модулей БММ была распараллелена на центральном процессоре с применением OpenMP, а часть была реализована на графических процессорах с применением технологии CUDA.

Подход разработан авторами для уравнений Стокса и успешно применён для моделирования большого количества капель эмульсии [3]. Было показано, что алгоритм имеет линейную сложность и вызов одного БММ для СЛАУ с $5.3 \cdot 10^6$ неизвестными занимал семь секунд без учёта времени, затрачиваемого на формирование структуры данных. Но, в отличие от задачи динамики капель в неограниченном объёме жидкости, в задаче о течении в каналах произвольных форм возникает также проблема с плохо обусловленной матрицей системы. В данной

работе используется модификация метода обобщённых минимальных невязок, в которой в качестве правого предобуславливателя используется нефиксированная матрица. Для этой цели применяется БММ пониженной точности, в то время как в глобальных итерациях применяется БММ повышенной точности. Этот подход был впервые применён для решения уравнений Стокса в [15]. В реализованном итерационном решателе, используемом в процедуре предобуславливания решения, также выбирается размер подпространства Крылова, варьируя который можно настраивать необходимую точность и время нахождения векторов.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

2.1. Сравнение с аналитическими решениями

Корректность выбранной математической модели и численного подхода была подтверждена путём сравнения с аналитическим решением для течения вязкой жидкости в гладком канале прямоугольного поперечного сечения с высотой H и шириной W .

Аналитическое решение для течения жидкости плоскости yz имеет вид [16]

$$\mathbf{u} = \frac{K}{2\mu} \left\{ \frac{H^2}{4} - z^2 + \frac{8}{H} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^3} \frac{\operatorname{ch}(my)}{\operatorname{ch}(mW/2)} \right\} \mathbf{i}_x, \quad K = -\Delta p/L, \quad m = \frac{\pi}{H}(2n-1). \quad (6)$$

Средняя скорость по сечению может быть найдена из соотношения

$$U_{\text{average}} = \frac{KH^2}{4\mu} \left[\frac{1}{3} - \frac{H}{W} \frac{64}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(mW/2)}{(2n-1)^5} \right].$$

Аналитическое решение для нахождения скорости в плоскости $y = 0$ имеет вид

$$\mathbf{u} = \frac{K}{2\mu} (zH - z^2) \mathbf{i}_x. \quad (7)$$

Рассчитанная скорость жидкости с помощью МГЭ осреднялась по средней скорости на входном сечении канала U_{average} и сравнивалась с аналитическими решениями, найденными по формулам (7) и (8). Количество треугольных элементов сетки на поверхности канала было равно $N_{\Delta} = 164000$. Расчёты проводились для числа Рейнольдса $\operatorname{Re} = 0.15$, $\operatorname{Re} = \rho U_{\max} d_h / \mu$, $d_h = 4HW/2(H+W)$ — гидродинамический диаметр. При сопоставлении скоростей в плоскости xz относительная погрешность составила 1.36%, а в плоскости yz — 2%, что вполне допустимо для МГЭ. На рис. 1 также представлено хорошее согласование результатов.

Кроме того, численный подход был протестирован для случая динамики капель в цилиндрическом канале [17]. Было показано хорошее согласование форм капель с экспериментальными результатами для нескольких значений соотношений вязкости внутренней и внешней жидкостей и нескольких соотношений характерных размеров капель и канала.

2.2. Течение однофазной жидкости в микроканалах

В рамках данной работы в первую очередь исследовалось влияние неровностей различного размера и формы на стенках микроканалов на гидродинамические потоки при течении вязкой жидкости. Была разработана качественная триангуляция четырёх вариантов конфигураций микроканалов с неровностями в форме квадратов и равносторонних треугольников. Геометрические параметры и схематическое изображение каналов представлены в таблице и на рис. 2, где W — ширина узкой части канала, W_r — ширина неровности, L_r — длина неровности. Расчёты высокой вычислительной сложности в выбранных каналах проводились при $\operatorname{Re} = 0.15$. Время выполнения одного матрично-векторного произведения с использованием БММ составило 0.2, 0.25, 0.24, 0.26 с и решения СЛАУ — 130.1, 127, 216, 224 с для каналов под

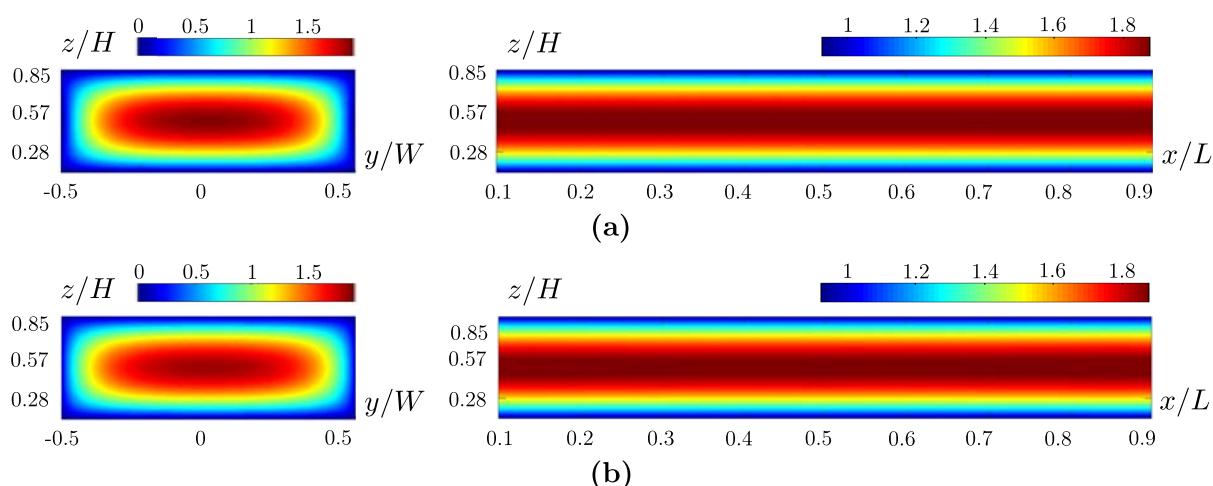


Рис. 1. Сравнение аналитического решения (а) и численных результатов (б) для осреднённого поля скорости в плоскости yOz (слева) и в плоскости xOz (справа)

Геометрические параметры микроканалов с неровностями

	L	H	W_r	L_r	N_Δ
1	$4W$	$0.35W$	$0.5W$	$0.5W$	58544
2	$4W$	$0.35W$	$0.5W$	$0.5W$	58256
3	$3W$	$0.35W$	$0.5W$	$0.5W$	71852
4	$3W$	$0.35W$	$0.5W$	$0.5W$	73464

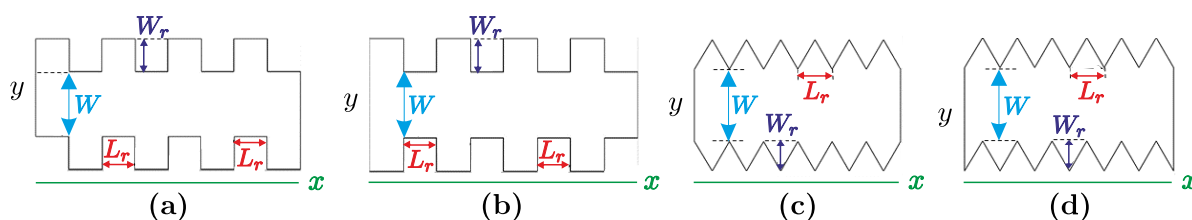


Рис. 2. Схематическое изображение вариантов геометрии микроканалов с неровностями: 1(а), 2(б), 3(с), 4(д)

номерами 1, 2, 3, 4 соответственно. Нужно отметить, что время расчёта существенно зависит от качества сетки на поверхности каналов.

В результате получены картины течения для всех вариантов конфигураций микроканалов в плоскости $z = H/2$. Визуализация продольной и поперечной компонент скорости представлена на рис. 3.

Показано, что на структуру потока влияет не только форма неровностей, но и их расположение относительно друг друга (наличие или отсутствие сдвига). Так, в случае с квадратными неровностями, находящимися напротив друг друга по длине канала, наблюдается значительное снижение максимальной скорости потока в области неровностей, в то время как для конфигурации с неровностями, расположенными со сдвигом относительно друг друга, наблюдается более равномерное распределение скорости. Для каналов с неровностями в форме равнобедренных треугольников этот эффект выражен гораздо слабее, что может являться следствием более значительного перераспределения потока внутри квадратов. Также был рассчитан профиль скорости внутри каналов в узких частях между ловушками в плоскости $y = 0$ по линии

пересечения с осевой линией в сравнении со случаем канала без неровностей (обозначен на рисунке индексом 0). На рис. 4 представлены полученные графики, показано, что максимальные значения скорости достигаются для случая гладкого канала. На профиль скорости для случая с треугольными неровностями сдвиг ловушек практически не оказывает влияния, в то время как для квадратных различие существенно.

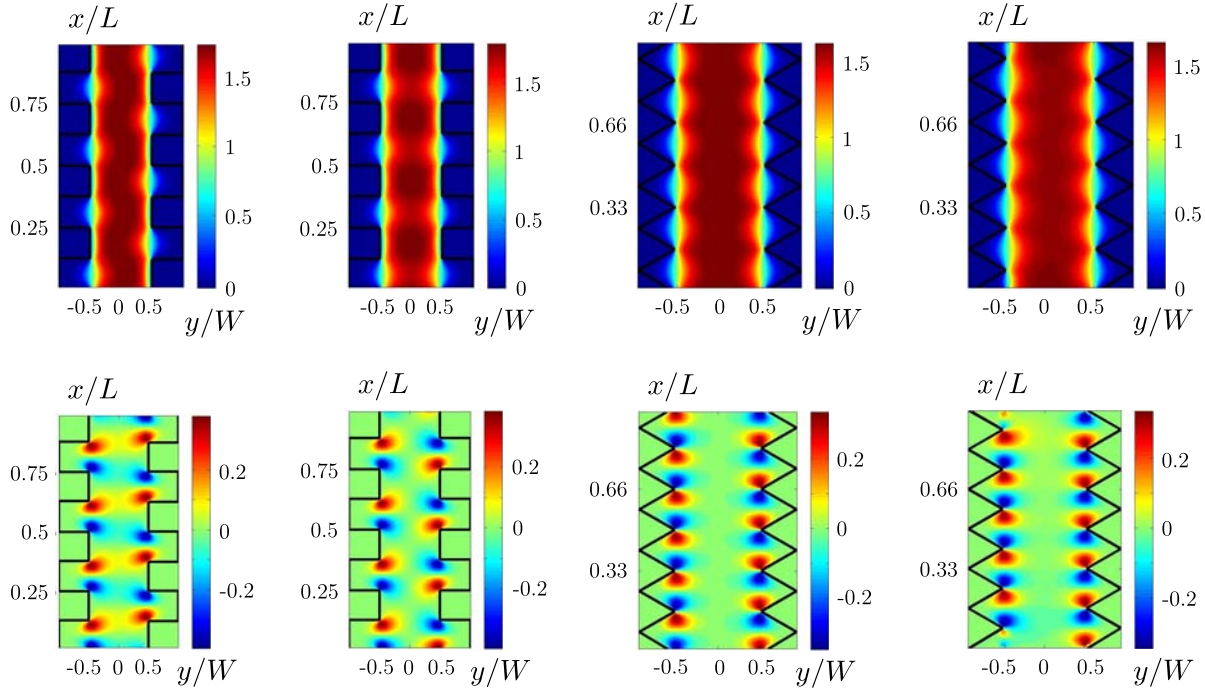


Рис. 3. Продольная u_x/U_{average} (верхний ряд) и поперечная u_y/U_{average} (нижний ряд) компоненты скорости в плоскости $z = H/2$; $Re = 0.15$

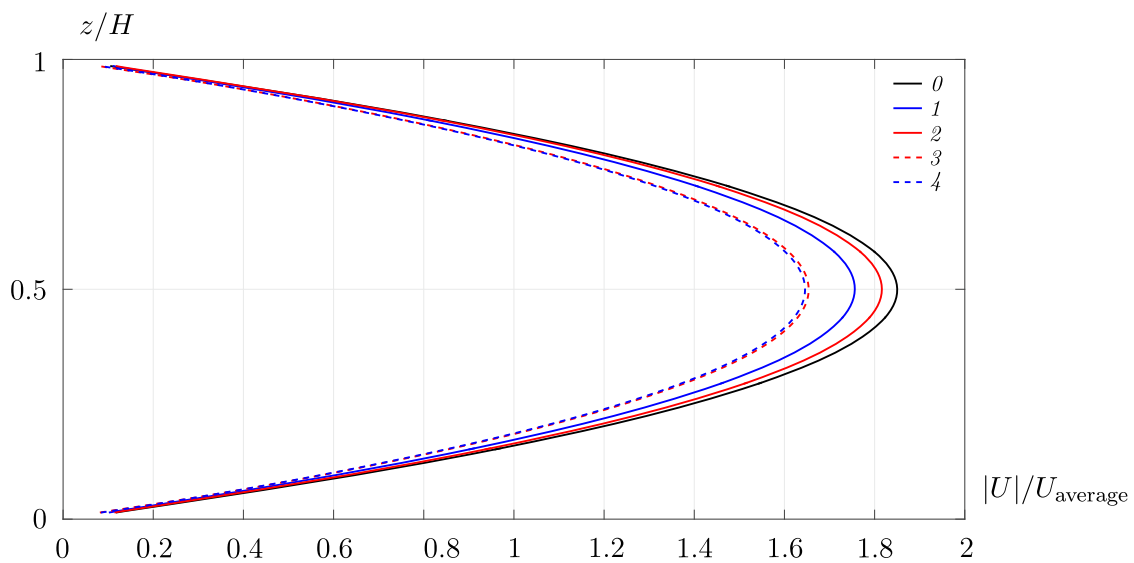


Рис. 4. Результаты расчёта скорости течения жидкости в плоскости $y = 0$ по линии между неровностями для различных вариантов микроканалов, $Re = 0.15$

2.3. Течение многофазной жидкости в микроканалах

Далее была рассмотрена динамика капель во всех вариантах микроканалов. Капли распределялись по ширине канала в плоскости $z = H/2$ на различном удалении от осевой линии канала в сторону боковой стенки: $y = 0$, $y = 0.125W$, $y = 0.25W$, $y = 0.375W$. Размер капель был выбран небольшим $a = 0.035W$, a — радиус капли, чтобы они не оказывали влияния на скорость друг друга. На рис. 5 представлены результаты расчёта скорости капель относительно средней скорости потока на входном сечении канала в сравнении с движением капель в гладком канале прямоугольного сечения.

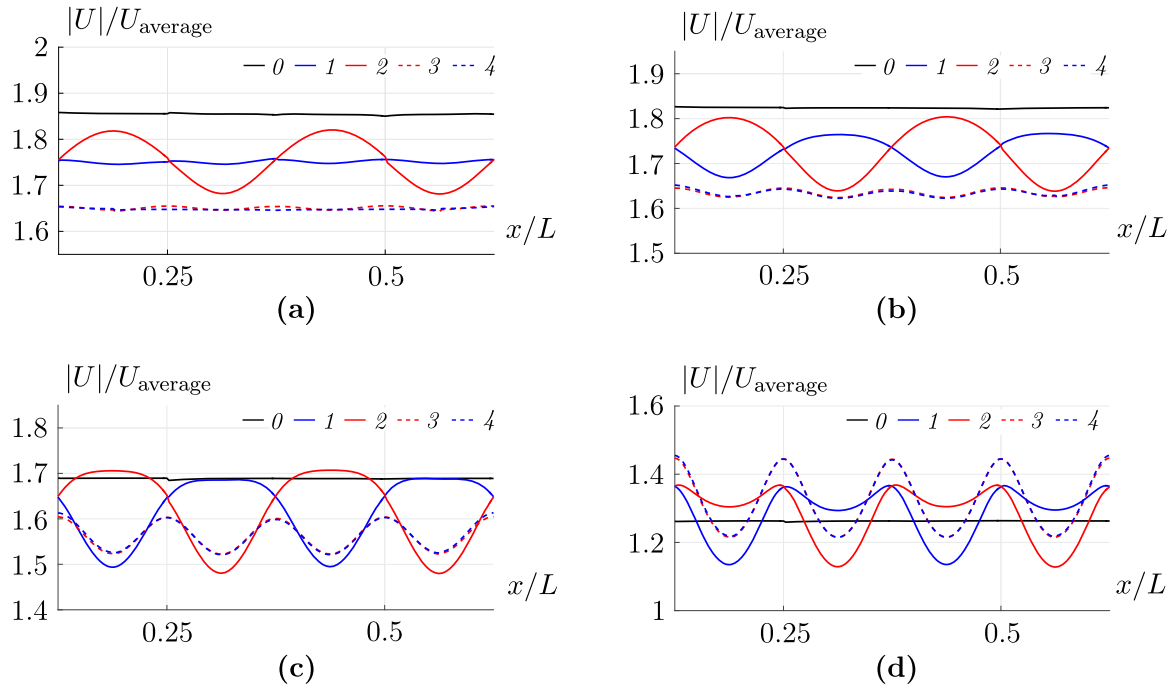


Рис. 5. Изменение относительной скорости движения капли $a = 0.035W$, $\lambda = 1$ с различным начальным положением относительно осевой линии в микроканалах: $y = 0$ (a), $y = 0.125W$ (b), $y = 0.25W$ (c), $y = 0.375W$ (d)

Изменение значений скорости по длине канала носит неравномерный характер для всех случаев расположения капель и сильно зависит от формы канала. Так, в случае треугольников сдвиг ловушек не оказывает существенного влияния на динамику капель даже в случае приближения к стенке канала, и графики скоростей капель практически совпадают. Для капель, находящихся на оси канала, максимальная скорость соответствует случаю прямого канала, а минимальная скорость соответствует каналу с неровностями в форме треугольников. Графики скорости имеют линейный характер для прямого канала и для каналов с равносторонними треугольниками, с квадратными ловушками со смещением, в то время как графики для каналов с квадратными ловушками без смещения имеют синусоидальный характер и существенно изменяются при прохождении каплями зоны с ловушками (достигают минимальных значений). При приближении капель к стенке канала графики относительной скорости для всех вариантов ловушек демонстрируют отклонение от прямолинейного характера, и максимумы скоростей существенно меняются в зависимости от типа конфигурации канала. В случае максимально близких к стенке канала капель наибольшие значения скорости наблюдаются в канале с прямоугольными треугольниками. Показано, что для всех случаев расположения капель графики распределения скорости по длине канала с ловушками в форме равносторонних треугольников со смещением и без смещения совпадают, т. е. сдвиг ловушек не оказывает существенного влияния на динамику капель даже в случае приближения к стенке канала.

Расчёты проводились на одной рабочей станции, оснащённой CPU Intel Xeon 5660, 2.8GHz, 12 GB RAM с 12 физическими и 12 виртуальными ядрами и GPU NVIDIA Tesla K20, 5GB глобальной памяти.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показана эффективность применения численного подхода, основанного на трёхмерном методе граничных элементов, ускоренном быстрым методом мультиполей на гетерогенных вычислительных архитектурах, для решения задач моделирования однофазных и многофазных течений в капиллярной микромодели порового пространства. Проведено исследование влияния формы и взаимного расположения неровностей микроканала на течение вязкой жидкости. Получены картины течения для всех вариантов конфигураций микроканалов в нескольких плоскостях сечения. Показано, что на структуру потока влияет не только форма неровностей, но их расположение друг относительно друга. Выявлено, что в случае с квадратными неровностями, расположенными друг напротив друга, поток отклоняется внутрь неровностей значительно. Проведено параметрическое исследование влияния геометрических особенностей микромоделей поровых каналов на динамику многофазных сред. Выявлено, что изменения значений относительной скорости капель по длине канала с ловушками носит неравномерный характер для всех случаев расположения капель и сильно зависит от формы ловушек. Предложенный метод позволяет напрямую рассчитывать динамику деформируемых дисперсных объектов в каналах сложных форм с высокой дискретизацией поверхности, геометрия которых соответствует микроканалам пористых сред. Многопараметрическое исследование характеристик потока жидкости и особенно дисперсных частиц в микроканалах имеет значение при разработке микрофлюидных устройств широкой области применения, а также для осуществления корректного управления микромеханическими и микрожидкостными устройствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kovaleva L.A., Musin A., Zinnatullin R.R., Akhatov I.Sh. Destruction of water-in-oil emulsions in electromagnetic fields // ASME 2011 Internat. Mech. Engrg. Congress and Exposition. IMECE, 2011. V. 6. P. 617–621; <https://doi.org/10.1115/imece2011-62935>
2. Kovaleva L.A., Musin A., Fatkhullina Yu.I. Microwave heating of an emulsion drop // High Temperature. 2018. V. 56, N 2. P. 234–238; <https://doi.org/10.1134/S0018151X18020141>
3. Abramova O.A., Pityuk Yu.A., Gumerov N.A., Akhatov I.S. An efficient method for simulation of the dynamics of a large number of deformable droplets in the stokes regime // Dokl. Phys. 2014. V. 59, N 5. P. 236–240; <https://doi.org/10.1134/S102833581405005X>
4. Roca J.F., Carvalho M.S. Flow of a drop through a constricted microcapillary // Comput. Fluids. 2013. V. 87. P. 50–56; <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.11.020>
5. Wrobel L.C., Soares D., Bhaumik C.L. Drop deformation in Stokes flow through converging channels // Engrg. Analysis with Boundary Elements. 2009. V. 33, N 7. P. 993–1000; <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2009.01.009>
6. Yin B., Luo H. Numerical simulation of drops inside an asymmetric microchannel with protrusions // Comput. Fluids. 2013. V. 82. P. 14–28; <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.05.005>
7. Сивак С.А., Рояк М.Э., Ступаков И.М. Использование метода быстрых мультиполей при оптимизации метода граничных элементов для решения уравнения Гельмгольца // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 3. С. 83–100; <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.307>
8. Gumerov N. A., Duraiswami R. Fast multipole methods on graphics processors // J. Comput. Phys. 2008. V. 227, N 18. P. 8290–8313; <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.05.023>
9. Rawool A., Mitra S.K., Kandlikar S.G. Numerical simulation of flow through microchannels with designed roughness // Microfluidics and Nanofluidics. 2006. V. 2, N 3. P. 215–221; <https://doi.org/10.1007/s10404-005-0064-5>

10. *Li Z., Wan J., Zhan H., He L., Huang K.* An energy perspective of pore scale simulation and experimental evidence of fluid flow in a rough conduit // *J. Hydrol.* 2020. V. 587. Article 125010; <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2020.125010>
11. *Taylor J.B., Carrano A.L., Kandlikar S.G.* Characterization of the effect of surface roughness and texture on fluid flow — past, present, and future // *Internat. J. Thermal Sci.* 2006. V. 45, N 10. P. 962–968; <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2006.01.004>
12. *Pozrikidis C.* *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow.* Cambridge: Univ. Press, 1992.
13. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
14. *Saad Y.* *Iterative Methods for Sparse Linear System.* Philadelphia: SIAM, 2000.
15. *Itkulova Y.A., Solnyshkina O.A., Gumerov N.A.* Toward large scale simulations of emulsion flows in microchannels using fast multipole and graphics processor accelerated boundary element method // *ASME 2012 Internat. Mech. Engrg. Congress and Exposition.* 2012. P. 873–881; <http://dx.doi.org/10.1115/IMECE2012-86238>
16. *Spurk J.H., Aksel H.* *Fluid Mechanics.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2008
17. *Solnyshkina O.A., Fatkullina N.B., Bulatova A.Z.* Three-dimensional simulation of drop motion in channels of different cross-sections // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. V. 1675. Article 012099; <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1675/1/012099>

UDC 532.5:519.6

**THREE-DIMENSIONAL SIMULATION OF SINGLE-
AND MULTIPHASE FLOW IN ROUGHNESS MICROCHANNELS**© 2023 O. A. Solnyshkina^a, N. B. Fatkullina^b, A. Z. Bulatova^c*Ufa University of Science and Technology,
ul. Zaki Validi 32, Ufa 450076, Russia*E-mails: ^aolgasolnyshkina@gmail.com, ^bnazgulbay@mail.ru, ^cbulatova29@yandex.ru

Received 27.07.2022, revised 27.07.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. To predict the behavior of reservoir fluids in porous media and their investigation at the macro level, it is necessary to study in details the hydrodynamic flows in porous media at the microscale from the point of view of the individual pore spaces, taking into account their structural features. This work is dedicated to the investigation of the periodic flow of a viscous incompressible fluid and dispersed systems in a flat channel of rectangular cross section with irregular side walls at a constant pressure drop. Using an efficient numerical approach based on the 3D boundary element method accelerated by the fast multipole method on heterogeneous computing architectures, the influence of irregularities of different sizes and shapes on the microchannel walls on the hydrodynamic flows of the viscous fluid flow and the emulsion droplet dynamics in a capillary micro-model of the porous medium has been studied. The results of this work can also be useful in the design of microfluidic devices.

Keywords: computational hydrodynamics, Stokes flow, roughness microchannels, dispersed systems, boundary element method, fast multipole method, GPU.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.211

REFERENCES

1. Kovaleva L.A., Musin A.,A., Zinnatullin R.R., Akhatov I.Sh. Destruction of water-in-oil emulsions in electromagnetic fields. *ASME 2011 Internat. Mech. Engrg. Congress and Exposition. IMECE*, 2011, Vol. 6, pp. 617–621; <https://doi.org/10.1115/imece2011-62935>
2. Kovaleva L.A., Musin A.,A., Fatkhullina Yu.I. Microwave heating of an emulsion drop. *High Temperature*, 2018, Vol. 56, No. 2, pp. 234–238; <https://doi.org/10.1134/S0018151X18020141>
3. Abramova O.A., Pityuk Yu.A., Gumerov N.A., Akhatov I.S. An efficient method for simulation of the dynamics of a large number of deformable droplets in the stokes regime. *Dokl. Phys.*, 2014, Vol. 59, No. 5, pp. 236–240; <https://doi.org/10.1134/S102833581405005X>
4. Roca J.F., Carvalho M.S. Flow of a drop through a constricted microcapillary. *Comput. Fluids*, 2013, Vol. 87, pp. 50–56; <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.11.020>
5. Wrobel L.C., Soares D., Bhaumik C.L. Drop deformation in Stokes flow through converging channels. *Engrg. Analysis with Boundary Elements*, 2009, Vol. 33, No. 7, pp. 993–1000; <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2009.01.009>
6. Yin B., Luo H. Numerical simulation of drops inside an asymmetric microchannel with protrusions. *Comput. Fluids*, 2013, Vol. 82, pp. 14–28; <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.05.005>
7. Sivak S.A., Royak M.E., Stupakov I.M. Ispol'zovanie metoda bystrykh mul'tipolei pri optimizatsii metoda granichnykh elementov dlya resheniya uravneniya Gel'mgol'tsa [Using the fast multipole method in optimizing the boundary element method for solving the Helmholtz equation]. *Sib. Zhurn. Industr. Mat.*, 2021, Vol. 24, No. 3, pp. 83–100 (in Russian); <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.307>

8. Gumerov N. A., Duraiswami R. Fast multipole methods on graphics processors. *J. Comput. Phys.*, 2008, Vol. 227, No. 18, pp. 8290–8313; <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.05.023>
9. Rawool A., Mitra S.K., Kandlikar S.G. Numerical simulation of flow through microchannels with designed roughness. *Microfluidics and Nanofluidics*, 2006, Vol. 2, No. 3, pp. 215–221; <https://doi.org/10.1007/s10404-005-0064-5>
10. Li Z., Wan J., Zhan H., He L., Huang K. An energy perspective of pore scale simulation and experimental evidence of fluid flow in a rough conduit. *J. Hydrol.*, 2020, Vol. 587, article 125010; <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2020.125010>
11. Taylor J.B., Carrano A.L., Kandlikar S.G. Characterization of the effect of surface roughness and texture on fluid flow — past, present, and future. *Internat. J. Thermal Sci.*, 2006, Vol. 45, No. 10, pp. 962–968; <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2006.01.004>
12. Pozrikidis C. *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*. Cambridge: Univ. Press, 1992.
13. Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoi neszhimaimoi zhidkosti* [Mathematical problems of the dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow: Nauka, 1970 (in Russian).
14. Saad Y. *Iterative Methods for Sparse Linear System*. Philadelphia: SIAM, 2000.
15. Itkulova Y.A., Solnyshkina O.A., Gumerov N.A. Toward large scale simulations of emulsion flows in microchannels using fast multipole and graphics processor accelerated boundary element method. *ASME 2012 Internat. Mech. Engrg. Congress and Exposition*, 2012, pp. 873–881; <http://dx.doi.org/10.1115/IMECE2012-86238>
16. Spurk J.H., Aksel H. *Fluid Mechanics*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2008
17. Solnyshkina O.A., Fatkullina N.B., Bulatova A.Z. Three-dimensional simulation of drop motion in channels of different cross-sections. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, Vol. 1675, article 012099; <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1675/1/012099>

УДК 532.5

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КАПЛИ ЖИДКОСТИ С СУПЕРГИДРОФОБНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2023 П. М. Сомванши^{1а}, В. В. Чеверда^{1,2б}, О. А. Кабов^{1,3}¹*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*²*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*³*Новосибирский государственный технический университет,
просп. К. Маркса, 20, г. Новосибирск 630073, Россия*E-mails: ^apraveen.somwanshi@gmail.com, ^bslava.cheverda@gmail.comПоступила в редакцию 22.11.2022 г.; после доработки 05.12.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Исследовано взаимодействие капли жидкости с медной поверхностью. Подложка принимается супергидрофобной с краевым углом смачивания 150° . Исходя из объёма капли числа Бонда и Вебера составляют приблизительно 0,23 и 1,6 соответственно. Температура поверхности и окружающего воздуха составляет 298 К, а температура капли жидкости на 5 К ниже. Моделирование сопряжённого теплообмена выполняется с использованием осесимметричной системы координат. Модель контактной линии Кистлера используется для определения динамического угла контакта капли при растекании. Исследуется изменение напряжения сдвига на подложке и теплового потока, индуцированного во время распространения капли в зависимости от времени.

Ключевые слова: удар капли, супергидрофобная поверхность, температура поверхности.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.212

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие капли с твёрдой поверхностью широко изучается экспериментально, численно и теоретически из-за важности данных процессов в природе и технике [1–3]. Гидродинамика взаимодействия изотермической капли при падении на твёрдую поверхность в настоящее время хорошо изучена, но теплообмен при падении капли должен быть изучен более тщательно для лучшего понимания происходящих процессов. Теплообмен между каплями жидкости и твёрдой поверхностью является одним из важных параметров в спрейном охлаждении. Впоследствии детальное понимание поможет в разработке наиболее эффективной системы охлаждения [4]. В серии работ [5–7] разработан алгоритм обработки инфракрасных изображений для получения информации о тепловом потоке в области капли и контактной линии. Для этого используется алгоритм решения обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности. Показано наличие максимума теплового потока в области контактной линии. В работе [8] показано, что поток пара с жидкого мостика меньше на гидрофильной поверхности по сравнению с гидрофобной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-79-10373; <https://www.rscf.ru/project/21-79-10373/>). Измерение краевого угла смачивания выполнено в рамках государственного задания Института теплофизики СО РАН.

Недостаточно эффективное охлаждение электроники является одной из причин, вызывающих сбои различных устройств. Таким образом, охлаждение микроэлектроники становится центральным при проектировании электронных устройств. Охлаждение может быть достигнуто с помощью нескольких методов. Двухфазный поток является одним из эффективных методов, используемых для охлаждения электронных устройств. Трёхфазная контактная линия демонстрирует значительную величину теплового потока [9, 10]. Плотность теплового потока вблизи трёхфазной контактной линии может достигать более 1 кВт/см^2 [11]. Трёхфазная контактная линия играет важную роль в спрейной системе [12]. Несколько режимов наблюдаются во время формирования распыления [13]. Баланс множественных сил, обусловленных гравитацией, вязкостью и поверхностным натяжением, определяет форму и размер распыления. Капли могут образовываться при небольшом расходе жидкости. Доминирование силы инерции заставляет капли двигаться непрерывно, сливаться и тем самым образуется обычная струя жидкости. При взаимодействии капли с твёрдой поверхностью форма капли искажается до тюльпановидной формы с последующим увеличением расхода. В результате образуется тонкая плёнка жидкости. Впоследствии поверхностное натяжение приводит к тому, что при разрыве плёнки образуются небольшие капли. Характеристики распыления [14, 15] влияют на охлаждение. Критический тепловой поток увеличивается с увеличением расхода [16]. Создание микроструктур на поверхностях повышает характеристики теплопередачи [17]. В спрейной системе охлаждения преобладает поверхностное натяжение и, следовательно, данная система может использоваться в условиях невесомости. Толщина тонкой плёнки на подложке больше при отсутствии силы тяжести.

Столкновение капли с твёрдой поверхностью подразделяется на три последующие фазы, а именно: распространение капли, отступление линии контакта и испарение сидячей капли [18–21]. Изменение радиуса смоченной каплей поверхности не зависит от её температуры [18]. Теплообмен и гидродинамика капли жидкости уникальны для выбранных жидкости и поверхности. Результаты одной конфигурации не могут быть сопоставлены с другой, что делает необходимым выполнение дальнейших исследований. Настоящее исследование направлено на создание двухфазной системы охлаждения. В данной работе спрогнозирован порядок величины напряжения сдвига и теплового потока, возникающих при взаимодействии холодной капли с гидрофобной поверхностью.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КОНФИГУРАЦИЯ ПОТОКА

Капля холодной жидкости (вода, глицерин) взаимодействует с медной поверхностью (плотность $\rho = 8460 \text{ кг/м}^3$, теплоёмкость $C_p = 385 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, коэффициент теплопроводности $k = 400 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$, окружённой атмосферным воздухом $\rho = 1.395 \text{ кг/м}^3$, $C_p = 0.286 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$, $k = 0.026 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$).

Геометрия условий падения и граничные условия показаны на рис. 1. Толщина медной подложки составляет 2,5 мм. Во время растекания жидкой капли рассчитывается процесс теплообмена с подложкой. При этом численное моделирование проводится с использованием сопряжённого механизма теплопередачи. Движение трёхфазной контактной линии допускается при отсутствии скольжения на твёрдой поверхности. Измерение краевого угла смачивания проводится благодаря обработке изображений [22]. В нашем случае измерения осуществлялись с помощью коммерческого прибора Kruss DSA-100. Измерения проводились в 8–10 местах на гидрофобной поверхности. Среднее между значениями натекающего и оттекающего краевых углов смачивания принималось за равновесный краевой угол смачивания.

Энергия поверхности прописывается с использованием равновесного контактного угла θ_e и динамического угла контакта θ_d . Верхняя и боковые границы открыты в атмосферу. Тепловой поток и температура непрерывны на границе раздела твёрдое тело-жидкость. Подложка и окружающий воздух находятся при температуре 298 К, а температура капли — на 5 К ниже (293 К). Теплофизические свойства считаются постоянными и принимаются при эталонной

температуре. Радиус посадочного места капли $R = r \sin(\theta_e)$ принимается в качестве характеристической длины, и выбираем скорость для получения безразмерных величин $U = (\sigma\rho/R)^{1/2}$, где σ (Н/м²) — поверхностное натяжение.

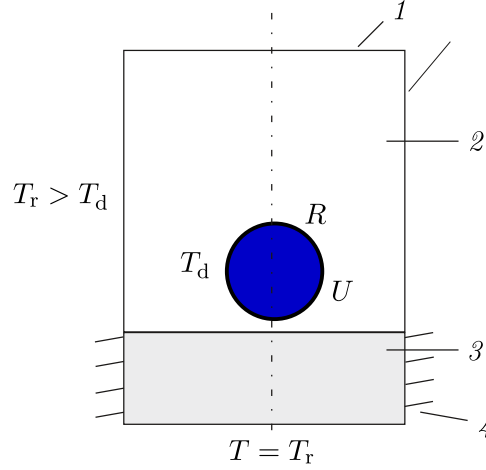


Рис. 1. Вычислительная область с начальными и граничными условиями: окружающий воздух, а также подложка изначально находятся при температуре $T_r = 298$ К; температура падающей капли $T_d = 293$ К ниже температуры подложки T_r ; 1 — открытые границы, 2 — воздух, 3 — подложка с краевым углом смачивания 150° , 4 — термоизоляция

COMSOL© (коммерческий решатель с помощью метода конечных элементов) используется для дискретизации несжимаемой формы уравнений Навье — Стокса в системе координат $r-z$. Интерфейс отслеживается методом фазового поля [23]. Уравнения массы, импульса и энергии решаются, чтобы найти распределение температуры внутри жидкости. Уравнения Навье — Стокса (1), (2) решаются совместно с моделью Кана — Хиллиарда (уравнения (4), (5) для прогнозирования формы поверхности капли) [23–25]. Свойства смеси определяются в уравнениях (6)–(9). Отношение сил гравитации к поверхностному натяжению задаётся числом Бонда $Bo = \rho g R^2 / \sigma$ и принимается условие $Bo < 1$, так как в данной работе рассматриваются маленькие капли, для которых поверхностное натяжение превышает силу гравитации. Отношение силы инерции к поверхностному натяжению задаётся числом Вебера $We = \rho U^2 R / \sigma$. Ожидается, что сила поверхностного натяжения будет значительной по отношению к гравитации. Поскольку медь обладает большой теплопроводностью по сравнению с водой, ожидается, что температурные переходные процессы будут контролироваться конвекцией жидкости [25]. Уравнения сохранения массы, импульса, энергии, модель Кана — Хиллиарда и свойства смеси приводятся ниже (уравнения (1)–(11)):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \mathbf{F}_{st} + \mathbf{F}_g, \quad (2)$$

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p(\mathbf{u} \cdot \nabla T) = \nabla \cdot (k \nabla T), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot \gamma \nabla \psi, \quad (4)$$

$$\psi = \lambda \left[-\nabla^2 \phi + \frac{\phi(\phi^2 - 1)}{\epsilon^2} \right], \quad (5)$$

$$\rho = \frac{1}{2}(\rho_{\text{fluid 2}} - \rho_{\text{fluid 1}})(1 + \phi) + \rho_{\text{fluid 1}}, \quad (6)$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu_{\text{fluid 2}} - \mu_{\text{fluid 1}})(1 + \phi) + \mu_{\text{fluid 1}}, \quad (7)$$

$$C_p = \frac{1}{2}(C_{p,\text{fluid 2}} - C_{p,\text{fluid 1}})(1 + \phi) + C_{p,\text{fluid 1}}, \quad (8)$$

$$k = \frac{1}{2}(k_{\text{fluid 2}} - k_{\text{fluid 1}})(1 + \phi) + k_{\text{fluid 1}}, \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g}, \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_{\text{st}} = \nabla \cdot \{\sigma [I - (\mathbf{nn}^T)] \delta\}; \quad \delta = 6|\nabla \phi| |\phi(1 - \phi)|. \quad (11)$$

Здесь u — вектор скорости (м/с); p — давление (Н/м²); I — единичная матрица; \mathbf{F}_{st} — сила поверхностного натяжения (Н); \mathbf{F}_g — сила гравитации (Н); T — температура (К); ϕ — фаза (жидкость или газ); γ — мобильность фазы (м³с/кг); γ — мобильность фазы (м³с/кг); ψ — химический потенциал (Па); ε — толщина межфазовой границы (м); μ — динамическая вязкость (Нс/м²); fluid 1 — газ; fluid 2 — жидкость; \mathbf{g} — ускорение свободного падения (м²/с); \mathbf{n} — единичный вектор; δ — дельта-функция Дирака.

Модель контактной линии Кистлера [26] используется в настоящем исследовании и рассматривается в терминах капиллярного числа Ca в виде

$$\theta_d = f_N [Ca + f_{\text{HI}}(\theta_e)], \quad Ca = \mu U_{\text{cl}} / \sigma. \quad (12)$$

Здесь f_N определяется как

$$f_{N(x)} = \arccos \left\{ 1 - 2 \tanh \left[5.16 \left(\frac{x}{1 + 1.31x^{0.99}} \right)^{0.706} \right] \right\} \quad (13)$$

и f_{HI} определяется как

$$f_{\text{HI}}^{0.706} = \frac{1}{5.16} [1 + 1.31(f_{\text{HI}})^{0.99}]^{0.706} \operatorname{artanh} \left(\frac{1 - \cos \theta_e}{2} \right); \quad (14)$$

f_N и f_{HI} — функции Хоффмана; U_{cl} — скорость контактной линии, θ_e — равновесный контактный угол.

1.1. Независимость от размера расчётной сетки

Проверка и независимость результатов расчёта от размера расчётной ячейки выполняются аналогично тому, как показано в [25]. Численное моделирование может быть подвержено ошибкам из-за выбора размера сетки. Допустимая ошибка и требуемое вычислительное время являются решающими для размера сетки. Сетка неструктурированная, содержит треугольные ячейки. Независимость результатов от размера сетки исследуется с использованием малых, средних и больших ячеек и показана на рис. 2. График показывает ошибки для расчётов с разной сеткой объёма капли (V), содержащей большое и среднее количество ячеек. Ошибка в этом случае меньше 0,3%, в то время как при небольшом количестве ячеек ошибка превышает 0,5%. Сетка со средним количеством ячеек используется в настоящей работе. Потеря массы контролируется до тех пор, пока капля жидкости не откатится и полностью не сохранится в вычислительной области. Потеря массы как для воды, так и для глицерина (рис. 2) составляет менее 0,5%.

1.2. Сравнение с экспериментом для падающей капли

Проведено сравнение с численной работой [27]. В этой работе численно изучили воздействие капли жидкости на более холодную подложку из кремния при замерзании. На рис. 3 показано, что прогноз по коэффициенту теплопередачи (h) в настоящей работе является достаточно хорошим и согласуется с работой [27].

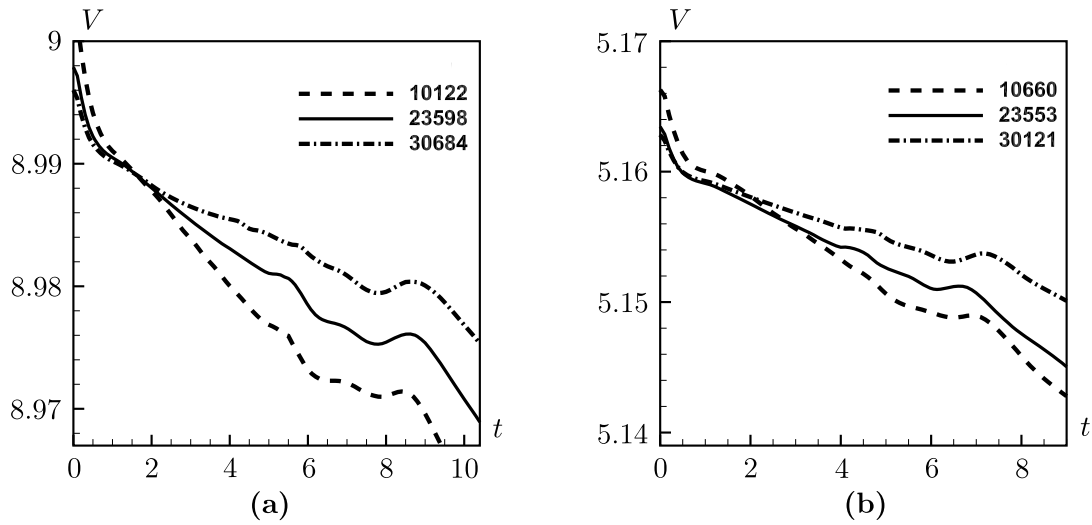


Рис. 2. Исследование независимости результатов расчётов от размера сетки при взаимодействии капли воды (а) и глицерина (б) с числами Бонда ($\sim 0,23$) и Вебера ($\sim 1,6$) с супергидрофобной медной поверхностью, имеющей краевой угол смачивания 150°

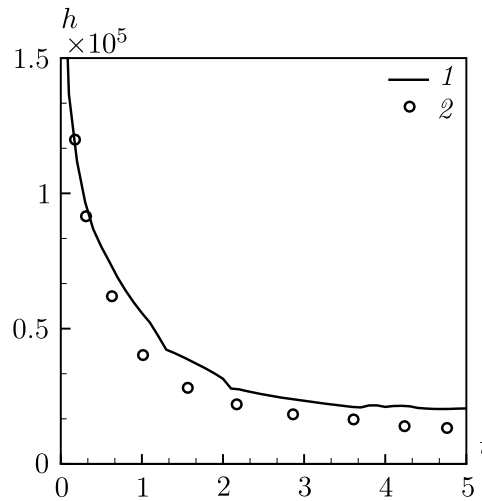


Рис. 3. Воздействие капли воды (0°C) на холодную подложку из кремния -20°C ; $\rho = 2330 \text{ кг/м}^3$, $k = 148 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}$, $C_p = 712 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$ со скоростью удара 1 м/с и диаметром 2 мм ; сравнивается коэффициент теплопередачи 1 , определяемый как отношение поверхностного усреднённого теплового потока и разницы температур между изначальным перепадом нагрева и теоретически предполагаемой температурой контакта, с коэффициентом теплопередачи 2 в работе [27]; показано удовлетворительное совпадение

2. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Исследовано падение капли жидкости на супергидрофобную поверхность. Динамика радиуса пятна контакта капли на твёрдой поверхности обсуждается в разд. 2.1. Средняя температура жидкости вблизи подложки обсуждается в разд. 2.2. Напряжение сдвига и тепловой поток на подложке обсуждаются в разд. 2.3.

В качестве жидкости рассматривается вода применительно к решению проблемы антиобледенения крыльев самолётов, также результаты данного исследования можно применить в создании системы охлаждения на основе спреев. В данной системе важно понимать взаимодействие и теплообмен капли с твёрдой поверхностью. Глицерин рассматривается в качестве

рабочей жидкости для понимания эффекта вязкости в данных процессах.

2.1. Радиус площади, занимаемой каплей

Изменение радиуса (R_b) следа от времени, возникающего при воздействии капли воды или глицерина с супергидрофобной поверхностью, показано на рис. 4. Скорость распространения фронта жидкости определяется скоростью удара и физическими свойствами жидкостей. Впоследствии скорость распространения определяет порядок величины радиуса занимаемой площади. Радиус занимаемой площади становится нулевым в момент отскока. Отскок наблюдается как для воды, так и для глицерина, который похож на тот, который обнаружен в [25, 28]. Максимальная величина радиуса следа для воды на 25.9% больше, чем у глицерина. Отскок капли происходит из-за приобретения относительно большой поверхностной энергии капли, которой достаточно для её отрыва от подложки.

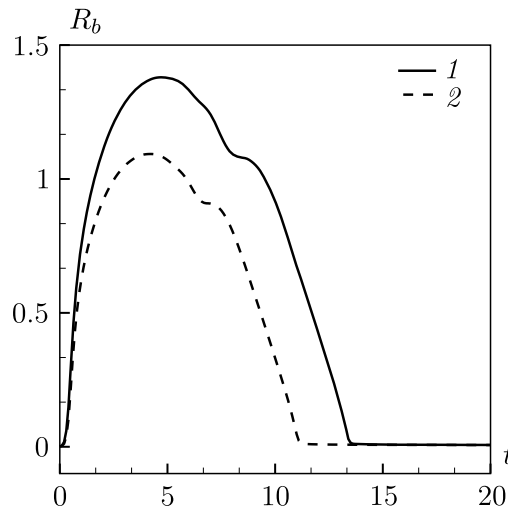


Рис. 4. Изменение радиуса занимаемой площади, наблюдаемое при падении капли холодной жидкости с числами Бонда ($\sim 0,23$) и Вебера ($\sim 1,6$) на супергидрофобную медную поверхность, имеющую краевой угол смачивания 150° ; 1 — вода, 2 — глицерин

2.2. Температура на поверхности подложки

Изменение средней температуры (T) жидкости вблизи подложки показано на рис. 5. Видно, что в течение первых 8 мс температура стенки уменьшается. Для воды температура подложки снижается на 0,81 К, а для глицерина на 0,79 К. Нужно отметить, что максимального радиуса капля достигает за время 5 мс. На последующих этапах температура стенки начинает возрастать. Через 25 мс температура стенки начинает превышать начальную температуру стенки 298 К. В этот период времени капля находится во взвешенном состоянии. Температура стенки превышает начальную температуру на 0,1 К, что может объясняться переходом кинетической энергии капли в тепловую. Скорость распространения и, следовательно, конвекция в воде больше, чем у глицерина. Также результирующая теплоотдача в воде больше, чем у глицерина. Нужно отметить, что температура подложки в случае падения глицерина всего на 0,04 К больше, т. е. изменяется на маленькую величину за 20 мс.

2.3. Напряжение сдвига и тепловой поток на стенке

Изменение напряжения сдвига на стенке (τ) в зависимости от времени показано на рис. 6(а). Напряжение сдвига на стенке быстро увеличивается и достигает максимума за время 0,5 мс. Далее напряжение сдвига снижается до нуля в момент, когда капля достигает максимального радиуса, и меняет знак. Напряжение сдвига на стенке прямо пропорционально динамической вязкости, скорости распространения и обратно пропорционально смещению объёма

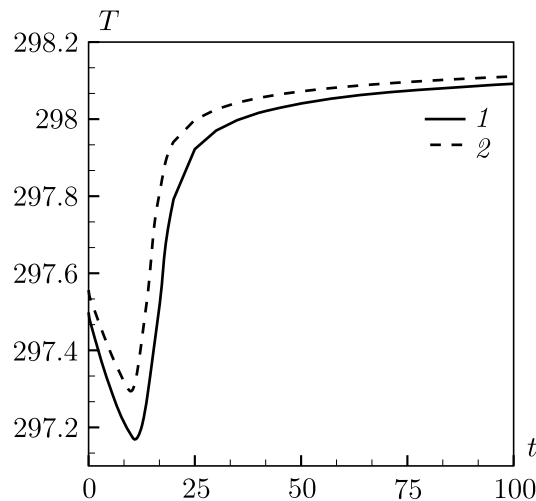


Рис. 5. Изменение средней температуры подложки, наблюдаемое при падении капли холодной жидкости с числами Бонда ($\sim 0,23$) и Вебера ($\sim 1,6$) на супергидрофобную медную поверхность, имеющую контактный угол смачивания 150° ; 1 — вода, 2 — глицерин

жидкости в направлении, нормальном к скорости распространения. Динамическая вязкость воды существенно меньше, чем у глицерина (см. таблицу), следовательно, результирующая скорость в воде больше, чем у глицерина. Пиковая величина напряжения сдвига на стенке в воде приблизительно на 8,5% больше, чем у глицерина.

Свойства жидкой среды при 25°C для воды и глицерина

Материалы/Свойства	Вода	Глицерин
Плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$	998	1261
Динамическая вязкость, $\text{Па}\cdot\text{с}$	8.9×10^{-4}	0.8395
Теплопроводность, $\text{Вт}/(\text{моль}\cdot\text{К})$	0.56	0.286
Коэффициент диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$	13.4×10^{-8}	9.3×10^{-8}
Поверхностное напряжение, $\text{Н}/\text{м}$	0,072	0,0629
Удельная теплоёмкость, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$	4179	2449
Число Прандтля	6,64	7188.58
Скорость удара, $\text{м}/\text{с}$	0.299	0.273
Число Бонда	0.23	0.23
Число Вебера	1.6	1,6
Объём капли, микролитр	9.0	5.16
Радиус падения, мм	1.29	1.072

Изменение среднего теплового потока на стенке (q) в зависимости от времени показано на рис. 6(b). Осреднение теплового потока осуществляется по всему пятну контакта капли. Результирующая скорость распространения в воде больше, чем у глицерина. Колебания и конвекция являются доминирующими механизмами теплообмена. Анализируя число Прандтля для глицерина, можно обнаружить, что перемещение жидкости за счёт движения больше, чем за счёт диффузии. Максимальный тепловой поток на стене для воды приблизительно на 91,2% больше, чем у глицерина. С течением времени тепловой поток быстро вырастает и достигает максимуму при 2.8 мс для глицерина и 3 мс для воды. Таким образом, рост средней плотно-

сти теплового потока прекращается примерно в тот момент, когда капля имеет максимальный размер.

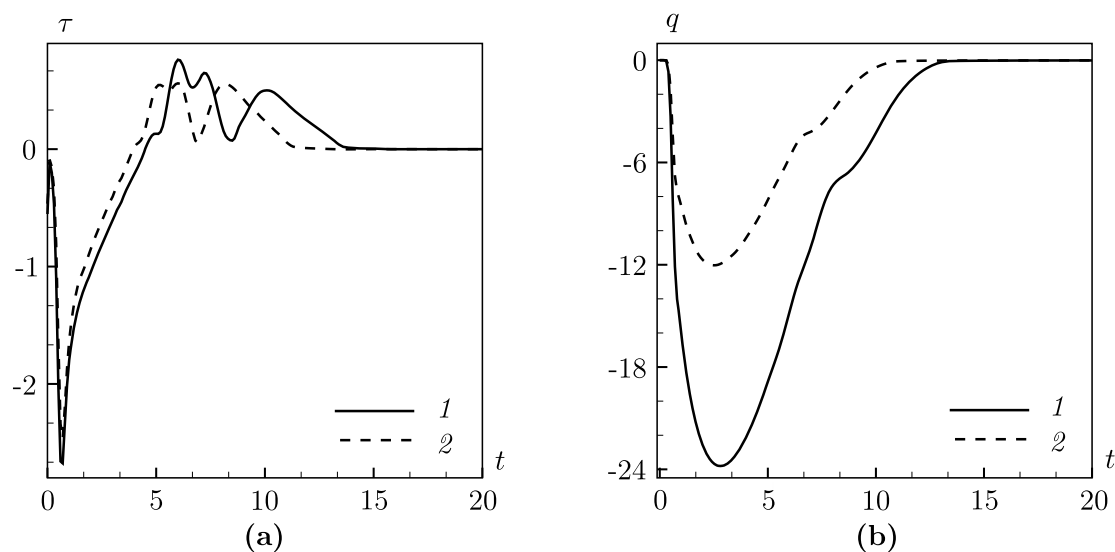


Рис. 6. Напряжение сдвига на стенке (а) и средний тепловой поток (б) на стенке в зависимости от времени, наблюдаемого при падении капли холодной жидкости с числами Бонда ($\sim 0,23$) и Вебера ($\sim 1,6$) на супергидрофобную поверхность с краевым углом смачивания 150° ; 1 — вода, 2 — глицерин

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное моделирование выполнено для прогнозирования параметров распространения неизотермической капли жидкости с числами Бонда и Вебера приблизительно 0,23 и 1,6 соответственно на супергидрофобной медной поверхности, имеющей средний краевой угол смачивания 150° (взято из эксперимента).

Полученные результаты в дальнейшем могут быть использованы при моделировании процессов охлаждения нагреваемой поверхности с помощью спрейной системы, исследовании процессов образования наледи на поверхностях летательных аппаратов, оптимизации процессов нанесения краски.

Результаты исследования:

- отскок капли наблюдается как для воды, так и для глицерина приблизительно при 13,4 мс и 11,1 мс соответственно;
- максимальная величина напряжения сдвига на стенке для воды приблизительно на 8,5% больше, чем у глицерина;
- максимальный тепловой поток на стене для воды приблизительно на 91,2% больше, чем у глицерина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Worthington A. M. On the forms assumed by drops of liquids falling vertically on a horizontal plate // Proc. Royal Soc. 1876. V. 25. P. 261–272.
2. Yarin A. L. Drop impact dynamics: splashing, spreading, receding, bouncing // Ann. Rev. Fluid Mech. 2006. V. 38. P. 159–192.
3. Josserand C., Thoroddsen S.T. Drop impact on a solid surface // Ann. Rev. Fluid Mech. 2016. V. 48. P. 365–391.

4. *Khandekar S., Sahu G., Muralidhar K., Gatapova E. Y., Kabov O. A., Hu R., Luo X., Zhao L.* Cooling of high-power LEDs by liquid sprays: Challenges and prospects // *Appl. Thermal Engrg.* 2021. V. 184. Article 115640.
5. *Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A.* Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line // *Appl. Math. Model.* 2016. V. 40, N 2. P. 1029–1037.
6. *Чеверда В.В., Марчук И.В., Карчевский А.Л., Орлик Е.В., Кабов О.А.* Экспериментальное исследование теплообмена в стекающем по наклонной фольге ручейке // *Теплофизика и аэромеханика.* 2016. Т. 23, № 3. С. 431–436.
7. *Karchevsky A.L.* Development of the heated thin foil technique for investigating nonstationary transfer processes // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer.* 2018. V. 6, N 3. P. 179–185.
8. *Jaiswal A.K., Benard B., Garg V., Khandekar S.* Evaporation dynamics of liquid bridge formed between two heated hydrophilic and hydrophobic flat surfaces // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer.* 2022. V. 10, N 1. P. 1–14.
9. *Karchevsky A.L., Cheverda V.V., Marchuk I.V., Kabov O.A., Ponomarenko T.G., Sulyaeva V. S.* Heat flux density evaluation in the region of contact line of drop on a sapphire surface using infrared thermography measurements // *Microgravity Sci. Technology.* 2021. V. 33. N 53; <https://doi.org/10.1007/s12217-021-09892-6>
10. *Чеверда В.В., Карчевский А.Л., Марчук И.В., Кабов О.А.* Плотность теплового потока в области контактной линии капли, лежащей на горизонтальной поверхности тонкой нагреваемой фольги // *Теплофизика и аэромеханика.* 2017. Т. 24, № 5(107). С. 825–828.
11. *Stephan P.C., Busse C. A.* Analysis of the heat transfer coefficient of grooved heat pipe evaporator walls // *Internat. J. Heat and Mass Transfer.* 1992. V. 35. P. 383–391.
12. *Wang J-X., Guo W., Xiong K., Wang S-N.* Review of aerospace-oriented spray cooling technology // *Progress in Aerospace Sci.* 2020. V. 116. Article 100635.
13. *Chen C., Tang Z.* Investigation of the spray formation and breakup process in an open-end swirl injector // *Sci. Progress.* 2020. V. 103. P. 1–19.
14. *Mudawar I., Estes K.* Optimizing and predicting CHF in spray cooling of a square surface // *ASME J. Heat Transfer.* 1996. V. 118. P. 672–679.
15. *Wang Y.Q., Liu M.H., Liu D., Xu K., Chen Y.L.* Experimental study on the effects of spray inclination on water spray cooling performance in non-boiling regime // *Experimental Thermal and Fluid Sci.* 2010. V. 34. P. 933–942.
16. *Visaria M., Mudawar I.* Theoretical and experimental study of the effects of spray inclination on two-phase spray cooling and critical heat flux // *Internat. J. Heat and Mass Transfer.* 2008. V. 51. P. 2398–2410.
17. *Zhang Z., Jiang P.X., Ouyang X.L., Chen J.N., Christopher D.M.* Experimental investigation of spray cooling on smooth and micro-structured surfaces // *Internat. J. Heat and Mass Transfer.* 2014. V. 76. P. 366–375.
18. *Liang G., Mudawar I.* Review of drop impact on heated walls // *Internat. J. Heat and Mass Transfer.* 2017. V. 106. P. 103–126.
19. *Gholijani A., Schlawitschek C., Gambaryan-Roisman T., Stephan P.* Heat transfer during drop impingement onto a hot wall: The influence of wall superheat, impact velocity, and drop diameter // *Internat. J. Heat and Mass Transfer.* 2020. V. 153. Article 119661.
20. *Liu L., Zhang Y., Cai G., Tsai P. A.* High-speed dynamics and temperature variation during drop impact on a heated surface // *Internat. J. Heat and Mass Transfer.* 2022. V. 189. Article. 122710.
21. *Gatapova E.Y., Kirichenko E.O., Bai B., Kabov O.A.* Interaction of impacting water drop with a heated surface and breakup into microdrops // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer.* 2018. V. 6, N 1. P. 75–88.
22. *Biolè D., Bertola V.* Measuring fluid interfaces, corners, and angles from high-speed digital images of impacting drops // *J. Flow Visualization and Image Processing.* 2021. V. 28, N 1. P. 1–19.
23. *Yue P., Zhou C., Feng J.J.* Sharp-interface limit of the Cahn–Hilliard model for moving contact lines // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 645. P. 279–294.

24. Yue P., Zhou C., Feng J.J. Spontaneous shrinkage of drops and mass conservation in phase-field simulations // *J. Comput. Phys.* 2007. V. 223. P. 1–9.
25. Somwanshi P.M., Muralidhar K., Khandekar S., Vyacheslav C. Mixing and wall heat transfer during vertical coalescence of drops placed over a superhydrophobic surface // *Interfacial Phenomenon and Heat Transfer*. 2020. V. 8, N 3. P. 207–224.
26. Kistler S.F. *Hydrodynamics of Wetting in Wettability*. N. Y.: Marcel Dekker, 1993.
27. Schreimb M., Borchert S., Berberovic E., Jakirlic S., Roisman I. V., Tropea C. Computational modelling of flow and conjugate heat transfer of a drop impacting onto a cold wall // *Internat. J. Heat and Mass Transfer*. 2017. V. 109. P. 971–980.
28. Jaiswal A.K., Khandekar S. Dynamics of a droplet impacting a sessile droplet on a superhydrophobic surface: role of boundary conditions during droplet placement // *J. Flow Visualization and Image Processing*. 2021. V. 28, N 4. P. 69–89.

UDC 532.5

IMPACT OF LIQUID DROP OVER A SUPERHYDROPHOBIC SURFACE

© 2023 P. M. Somwanshi^{1a}, V. V. Cheverda^{1,2b}, O. A. Kabov^{1,3}¹*Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Novosibirsk State University,**ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia,*³*Novosibirsk State Technical University,
pr. K. Marksa 20, Novosibirsk 630073, Russia*E-mails: ^apraveen.somwanshi@gmail.com, ^bslava.cheverda@gmail.com

Received 22.11.2022, revised 05.12.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. The impact of a liquid drop over a copper surface is investigated. The substrate is assumed to be superhydrophobic with a equilibrium contact angle of 150° . Based on the volume of the drop, the Bond and Weber numbers are 0.23 and 1.6, respectively. Surface temperature and ambient air is at 298 K, and the temperature of the liquid drop is 5 K lower than the ambient. Simulation of conjugate heat transfer is performed using the axi-symmetric coordinate system. The Kistler contact line model is used to predict the dynamic contact angle of the drop during spreading. In the present work, we investigate the temporal variation of the shear stress and the wall heat flux induced over a substrate during the drop spreading.

Keywords: drop impact, superhydrophobic surface, surface temperature.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.212

REFERENCES

1. Worthington A. M. On the forms assumed by drops of liquids falling vertically on a horizontal plate. *Proc. Royal Soc.*, 1876, Vol. 25, pp. 261–272.
2. Yarin A. L. Drop impact dynamics: splashing, spreading, receding, bouncing. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 2006, Vol. 38, pp. 159–192.
3. Josserand C., Thoroddsen S.T. Drop impact on a solid surface. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 2016, Vol. 48, pp. 365–391.
4. Khandekar S., Sahu G., Muralidhar K., Gatapova E. Y., Kabov O. A., Hu R., Luo X., Zhao L. Cooling of high-power LEDs by liquid sprays: Challenges and prospects. *Appl. Thermal Engrg.*, 2021, Vol. 184, article 115640.
5. Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line. *Appl. Math. Model.*, 2016, Vol. 40, No. 2, pp. 1029–1037.
6. Cheverda V.V., Marchuk I.V., Karchevskii A.L., Orlik E.V., Kabov O.A. Eksperimental'noe issledovanie teploobmena v stekayushchem po naklonnoi fol'ge rucheike [Experimental study of heat transfer in a stream flowing down an inclined foil]. *Teplofiz. Aeromekhanika*, 2016, Vol. 23, No. 3, pp. 431–436 (in Russian).
7. Karchevsky A.L. Development of the heated thin foil technique for investigating nonstationary transfer processes. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2018, Vol. 6, No. 3, pp. 179–185.

8. Jaiswal A.K., Benard B., Garg V., Khandekar S. Evaporation dynamics of liquid bridge formed between two heated hydrophilic and hydrophobic flat surfaces. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2022, Vol. 10, No. 1, pp. 1–14.
9. Karchevsky A.L., Cheverda V.V., Marchuk I.V., Kabov O.A., Ponomarenko T.G., Sulyaeva V. S. Heat flux density evaluation in the region of contact line of drop on a sapphire surface using infrared thermography measurements. *Microgravity Sci. Technology*, 2021, Vol. 33, No. 53; <https://doi.org/10.1007/s12217-021-09892-6>
10. Cheverda V.V., Karchevskii A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Plotnost' teplovogo potoka v oblasti kontaktnoi linii kapli, lezhashchei na gorizontnoi poverkhnosti tonkoi nagrevaemoi fol'gi [The heat flux density in the area of the contact line of a drop lying on the horizontal surface of a thin heated foil]. *Teplofiz. Aeromekhanika*, 2017, Vol. 24, No. 5(107), pp. 825–828 (in Russian).
11. Stephan P.C., Busse C. A. Analysis of the heat transfer coefficient of grooved heat pipe evaporator walls. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 1992, Vol. 35, pp. 383–391.
12. Wang J-X., Guo W., Xiong K., Wang S-N. Review of aerospace-oriented spray cooling technology. *Progress in Aerospace Sci.*, 2020, Vol. 116, article 100635.
13. Chen C., Tang Z. Investigation of the spray formation and breakup process in an open-end swirl injector. *Sci. Progress*, 2020, Vol. 103, pp. 1–19.
14. Mudawar I., Estes K. Optimizing and predicting CHF in spray cooling of a square surface. *ASME J. Heat Transfer*, 1996, Vol. 118, pp. 672–679.
15. Wang Y.Q., Liu M.H., Liu D., Xu K., Chen Y.L. Experimental study on the effects of spray inclination on water spray cooling performance in non-boiling regime. *Experimental Thermal and Fluid Sci.*, 2010, Vol. 34, pp. 933–942.
16. Visaria M., Mudawar I. Theoretical and experimental study of the effects of spray inclination on two-phase spray cooling and critical heat flux. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 2008, Vol. 51, pp. 2398–2410.
17. Zhang Z., Jiang P.X., Ouyang X.L., Chen J.N., Christopher D.M. Experimental investigation of spray cooling on smooth and micro-structured surfaces. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 2014, Vol. 76, pp. 366–375.
18. Liang G., Mudawar I. Review of drop impact on heated walls. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 2017, Vol. 106, pp. 103–126.
19. Gholijani A., Schlawitschek C., Gambaryan-Roisman T., Stephan P. Heat transfer during drop impingement onto a hot wall: The influence of wall superheat, impact velocity, and drop diameter. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 2020, Vol. 153, article 119661.
20. Liu L., Zhang Y., Cai G., Tsai P. A. High-speed dynamics and temperature variation during drop impact on a heated surface. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 2022, Vol. 189, article. 122710.
21. Gatapova E.Y., Kirichenko E.O., Bai B., Kabov O.A. Interaction of impacting water drop with a heated surface and breakup into microdrops. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2018, Vol. 6, No. 1, pp. 75–88.
22. Biolè D., Bertola V. Measuring fluid interfaces, corners, and angles from high-speed digital images of impacting drops. *J. Flow Visualization and Image Processing*, 2021, Vol. 28, No. 1, pp. 1–19.
23. Yue P., Zhou C., Feng J.J. Sharp-interface limit of the Cahn–Hilliard model for moving contact lines. *J. Fluid Mech.*, 2010, Vol. 645, pp. 279–294.
24. Yue P., Zhou C., Feng J.J. Spontaneous shrinkage of drops and mass conservation in phase-field simulations. *J. Comput. Phys.*, 2007, Vol. 223, pp. 1–9.
25. Somwanshi P.M., Muralidhar K., Khandekar S., Vyacheslav C. Mixing and wall heat transfer during vertical coalescence of drops placed over a superhydrophobic surface. *Interfacial Phenomenon and Heat Transfer*, 2020, Vol. 8, No. 3, pp. 207–224.
26. Kistler S.F. *Hydrodynamics of Wetting in Wettability*. N. Y.: Marcel Dekker, 1993.
27. Schremb M., Borchert S., Berberovic E., Jakirlic S., Roisman I. V., Tropea C. Computational modelling of flow and conjugate heat transfer of a drop impacting onto a cold wall. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 2017, Vol. 109, pp. 971–980.

28. Jaiswal A.K., Khandekar S. Dynamics of a droplet impacting a sessile droplet on a superhydrophobic surface: role of boundary conditions during droplet placement. *J. Flow Visualization and Image Processing*, 2021, Vol. 28, No. 4, pp. 69–89.

УДК 517.956

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ЧЁТНОГО ПОРЯДКА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

© 2023 А. К. Уринов^{1,2a}, М. С. Азизов^{2b}

¹*Институт математики им. В. И. Романовского АН Республики Узбекистан,
ул. Университетская, 46, г. Ташкент 100174, Узбекистан,*

²*Ферганский государственный университет,
ул. Мураббийлар, 19, г. Фергана 150100, Узбекистан*

E-mails: ^aurinovak@mail.ru, ^bmuzaffar.azizov.1988@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2021 г.; после доработки 15.07.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Для одного вырождающегося дифференциального уравнения в частных производных высокого чётного порядка с оператором Бесселя в прямоугольнике сформулирована начально-граничная задача и доказаны существование, единственность и устойчивость решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: вырождающееся дифференциальное уравнение, начально-граничная задача, спектральная задача, существование, единственность и устойчивость решения, метод разделения переменных.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.213

В связи с многочисленными приложениями в науке и технике теория дифференциальных уравнений в частных производных развивается быстрыми темпами. В частности, к уравнениям высокого чётного порядка приводятся многие задачи колебания стержня, пластин, балок и т. д. [1–4]. В настоящее время имеются многочисленные научные работы, в которых сформулированы и изучены начально-граничные задачи для таких уравнений. Например, в работе [5] в многомерных областях сформулированы и исследованы начально-граничные задачи для некоторых классов ультрагиперболических уравнений $2m$ -го порядка по пространственным переменным и второго порядка по временной переменной; в работах [6–8] изучены начально-граничные задачи соответственно для уравнения смешанного типа и уравнения с меняющимся направлением времени $2m$ -го порядка по пространственным переменным, а по временной переменной $2s$ -го и $2s + 1$ -го порядков, где $m, s \in \mathbb{N}$. Начально-граничные задачи в многомерных областях исследованы также в работах [9, 10], именно в работе [9] для псевдопараболических, квазиэллиптических и «частично гиперболических» уравнений видов соответственно $D_t^{2m+1}(Au) + Bu = f(x, t)$, $D_t^{2m}(Au) - Bu = f(x, t)$, $D_t^{2m}(Au) + Bu = f(x, t)$ (здесь $D_t^l u = \frac{\partial^l u}{\partial t^l}$; A и B — линейные дифференциальные операторы второго и $2p$ -го порядка по пространственным переменным, $l, m, p \in \mathbb{N}$); в работе [10] — для некоторых классов уравнений составного типа 2-го порядка по пространственным переменным и $2p$ -го порядков по временной (выделенной) переменной. В работе [11] в многомерной области с достаточно гладкой границей изучена начально-граничная задача для уравнения $\partial_t^\rho u(x, t) + A(x, D)u(x, t) = f(x, t)$, где ∂_t^ρ — дифференциальный оператор Римана — Лиувилля дробного порядка $\rho \in (0, 1]$, $A(x, D)$ — произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор чётного порядка.

В перечисленных выше работах рассмотрены, в определенном смысле, общие уравнения

с достаточно гладкими коэффициентами, а однозначная разрешимость задач, поставленных для них, доказана в более общих условиях для коэффициентов уравнений.

В последнее время возрос интерес к постановке и изучению новых начально-граничных задач на плоскости для уравнений высокого порядка с конкретными коэффициентами. В частности, в работах [12–16] в прямоугольной области исследованы начально-граничные задачи для уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= f(x, t), \\ \frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= f(x, t), \\ B_{\gamma-1/2}^t u + (-1)^p \frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} &= f(x, t),\end{aligned}$$

в работе [17] — для уравнения

$$B_{\gamma-1/2}^t \left[(-1)^s \frac{\partial^s}{\partial x^s} \left(\rho(x) \frac{\partial^s u}{\partial x^s} \right) \right] + (-1)^k \frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} = f(x, t),$$

где $p, k, s \in \mathbb{N}$, $s < k$, а $B_{\gamma-1/2}^t \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t}$ — оператор Бесселя [18]. В работе [19] изучена задача Дирихле в прямоугольнике и параллелепипеде соответственно для уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial y^{2p}} &= f(x, y), \\ \frac{\partial^{2p}u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^{2p}u}{\partial y^{2p}} &= f(x, y, t).\end{aligned}$$

В работе [20] в прямоугольной области исследована спектральная задача для уравнения $(-1)^n D_x^{2n} u + (-1)^k D_y^{2k} u + g(x, y)u = \lambda u$; в [21] в квадрате рассмотрена краевая задача для уравнения $(-1)^q D_x^{2q+1} u + (-1)^p y^m D_y^{2p} u = 0$, где $m \in \mathbb{R}$, $p, q, n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, $n > 1$, $0 \leq m < 2p$, $D_z^j \equiv \frac{\partial^j}{\partial z^j}$.

Несмотря на изложенное выше, в настоящее время начально-граничные задачи на плоскости для вырождающихся уравнений остаются малоизученными. В данной работе сформулируем и исследуем одну начально-граничную задачу для уравнения высокого чётного порядка, вырождающегося на границе области.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $\Omega = \{(x, t) \mid 0 < x < 1; 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение высокого чётного порядка вида

$$B_{\gamma-1/2}^t u + (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) = f(x, t), \quad (1)$$

вырождающегося на боковой стороне $x = 0$ области Ω , где α, γ, k, T — заданные действительные числа, причем $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \gamma < 1/2$, $k \in \mathbb{N}$, а $f(x, t)$ — заданная функция.

Исследуем существование, единственность и устойчивость решения следующей начально-граничной задачи для уравнения (1) в области Ω :

Задача 1. Найти функцию $u(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $\frac{\partial^j u}{\partial x^j} \in C(\overline{\Omega})$, $\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in C(\Omega)$, $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \in C(\overline{\Omega})$, $j = \overline{0, k-1}$; $t^{2\gamma} u_t \in C(\overline{\Omega})$; $B_{\gamma-1/2}^t u$, $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \in C(\Omega) \cap L_2(\Omega)$;
- 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1);
- 3) удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^{2\gamma} u_t(x, t) = \varphi_2(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \dots = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(1, t) = \frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}} u(1, t) = \dots = \frac{\partial^{2k-1}}{\partial x^{2k-1}} u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — заданные непрерывные функции.

Отметим, что поставленная задача для уравнения (1) при $\alpha = 0$, $k \in \mathbb{N}$ изучена в работе [14], а при $\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $k = 2$ — в работе [22], причем в последнем случае, она описывает вынужденные колебания консольно закрепленной балки [1]. Также отметим, что начально-граничные задачи с другими граничными условиями для уравнения (1) при $\gamma = 0$, $2 < k \in \mathbb{N}$, α — нецелое число из интервала $(0, k)$ и $(k, 2k - 1)$, исследованы соответственно в [23, 24].

2. ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Нетривиальное решение однородного уравнения

$$B_{\gamma-1/2}^t u + (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) = 0,$$

удовлетворяющего условиям (3) и (4), ищем в виде $u(x, t) = v(x)T(t)$. В результате относительно функции $v(x)$ получим следующую спектральную задачу:

$$Mv \equiv (-1)^k [x^\alpha v^{(k)}(x)]^{(k)} = \lambda v(x), \quad 0 < x < 1; \quad (5)$$

$$v(0) = v'(0) = \dots = v^{(k-1)}(0) = 0; \quad v^{(k)}(1) = v^{(k+1)}(1) = \dots = v^{(2k-1)}(1) = 0. \quad (6)$$

Выясним, при каких λ задача (5), (6) имеет нетривиальные решения. С этой целью сначала умножим уравнение (5) на функцию $v(x)$, а затем проинтегрируем полученное равенство по x на отрезке $[0, 1]$:

$$(-1)^k \int_0^1 [x^\alpha v^{(k)}(x)]^{(k)} v(x) dx = \lambda \int_0^1 v^2(x) dx. \quad (7)$$

Из равенства (7), применяя правило интегрирования по частям k раз к первому интегралу и учитывая условия (6), получим

$$\int_0^1 x^\alpha [v^{(k)}(x)]^2 dx = \lambda \int_0^1 v^2(x) dx,$$

откуда при $v(x) \not\equiv 0$ вытекает, что $\lambda \geq 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует, что $v^{(k)}(x) = 0$, $x \in (0, 1)$. Отсюда в силу условия (6) получим $v(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$.

Следовательно, задача (5), (6) может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Для исследования спектральной задачи (5), (6) применим метод функций Грина. С этой целью построим функцию Грина $G(x, s)$ задачи. Она должна обладать следующими свойствами:

1°. Функция $G(x, s)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(k-1)$ -го порядка включительно, а функция $x^\alpha \frac{\partial^k G(x, s)}{\partial x^k}$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(k-2)$ -го порядка включительно для всех значений x и s из отрезка $[0, 1]$.

2°. При любом фиксированном $s \in (0, 1)$ функция $x^\alpha \frac{\partial^k G(x, s)}{\partial x^k}$ имеет непрерывные производные $(k-1)$ -го и k -го порядков по x в каждом из интервалов $[0, s)$ и $(s, 1]$, причём

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^k G(x, s)}{\partial x^k} \right) \Big|_{x=s+0} - \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^k G(x, s)}{\partial x^k} \right) \Big|_{x=s-0} = (-1)^k.$$

3°. Функция $G(x, s)$, рассматриваемая как функция от x , удовлетворяет условиям (6) и уравнению $MG(x, s) = 0$, $x \in (0, s) \cup (s, 1)$.

Функция $G(x, s)$, обладающая перечисленными выше свойствами существует, единственна и имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} (-1)^k \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1-\alpha}}{(k-1)!(k-\alpha)_k 0!} + \frac{(-1)^{k-2} x^{2k-2-\alpha} s}{(k-2)!(k-\alpha-1)_k 1!} + \dots + \frac{x^{k-\alpha} s^{k-1}}{0!(1-\alpha)_k (k-1)!}, & x < s, \\ (-1)^k \frac{(-1)^{k-1} s^{2k-1-\alpha}}{(k-1)!(k-\alpha)_k 0!} + \frac{(-1)^{k-2} s^{2k-2-\alpha} x}{(k-2)!(k-\alpha-1)_k 1!} + \dots + \frac{s^{k-\alpha} x^{k-1}}{0!(1-\alpha)_k (k-1)!}, & x > s, \end{cases}$$

здесь $(a)_k = (a)(a+1)\dots(a+k-1)$ — символ Похгаммера [25].

Тогда методом, применённым в [26], легко убедиться, что задача (5), (6) эквивалентна следующему интегральному уравнению с симметричным ядром $G(x, s)$:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x, s)v(s) ds. \quad (8)$$

Так как ядро $G(x, s)$ непрерывно, симметрично и положительно (т. е. $\lambda > 0$), то согласно теории интегральных уравнений [27] уравнение (8) и задача (5), (6) имеют счётное число собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$, $\lambda_n \rightarrow +\infty$, а соответствующие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_n(x), \dots$ образуют ортонормированную систему в пространстве $L_2(0, 1)$ и любая функция, истокообразно представима через ядро $G(x, s)$, разлагается в сходящийся в среднем ряд Фурье по этим собственным функциям [27].

Лемма 1. Если $h(x)$, $x^\alpha h^{(k)}(x) \in C^{k-1}[0, 1]$ и $(x^\alpha h^{(k)}(x))^{(k)} \in L_2(0, 1)$, $h^{(j)}(0) = 0$, $h^{(k+j)}(1) = 0$, $j = \overline{0, k-1}$, то функция $h(x)$ разлагается в ряд по собственным функциям задачи (5), (6), который сходится равномерно и абсолютно в интервале $[0, 1]$.

Доказательство. В силу свойства функций $G(x, s)$ и $h(x)$ справедливо равенство

$$h(x) = \int_0^1 G(x, s)(-1)^k (s^\alpha h^{(k)}(s))^{(k)} ds.$$

Следовательно, функция $h(x)$ истокообразно представима через ядро $G(x, s)$. Кроме того, нетрудно убедиться, что

$$\int_0^1 G^2(x, s) ds \leq A(x) \leq K = \text{const}, \quad K > 0.$$

Тогда, согласно теореме Гильберта — Шмидта [27], справедливо утверждение леммы 1. \square

3. СХОДИМОСТЬ ОСНОВНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ РЯДОВ

Лемма 2. В промежутке $[0, 1]$ равномерно сходятся следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2(x)}{\lambda_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v_n^{(\mu)}(x))^2}{\lambda_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(\mu)}]^2}{\lambda_n^2}, \quad \mu = \overline{0, k-1}. \quad (9)$$

Доказательство. Так как ядро $G(x, s)$ интегрального уравнения (8) симметрично, положительно и непрерывно в $\{(x, s) \mid 0 \leq x, s \leq 1\}$, то на основании теоремы Мерсера [27] это ядро представлено абсолютно и равномерно сходящимся билинейным рядом $G(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} [v_n(x)v_n(s)]/\lambda_n$. Отсюда, в частности, при $x = s$ следует, что

$$G(x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2(x)/\lambda_n \leq K = \text{const} < +\infty,$$

т. е. первый ряд в (9) равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$.

Из уравнения (8) при $\lambda = \lambda_n$, $v(x) = v_n(x)$, $\mu = \overline{0, k-1}$ имеем

$$v_n^{(\mu)}(x) = \lambda_n \int_0^1 \frac{\partial^\mu G(x, s)}{\partial x^\mu} v_n(s) ds = (-1)^k \int_0^1 \frac{\partial^\mu G(x, s)}{\partial x^\mu} (s^\alpha v_n^{(k)}(s))^{(k)} ds. \quad (10)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что функции $\frac{\partial^\mu G(x, s)}{\partial x^\mu}$, $\mu = \overline{0, k-1}$, имеют непрерывные производные по s до $(k-1)$ -го порядка включительно и удовлетворяют граничным условиям (3) по аргументу s , причём $s^{\alpha/2} \frac{\partial^{\mu+k} G(x, s)}{\partial x^\mu \partial s^k} \in L_2(0, 1)$ для любых $x \in [0, 1]$. Учитывая это, применим правило интегрирования по частям k раз к последнему интегралу в (10). В результате, принимая во внимание свойства функций $G(x, s)$ и $v_n(s)$, получим

$$v_n^{(\mu)}(x) = \int_0^1 s^\alpha \frac{\partial^{\mu+k} G(x, s)}{\partial x^\mu \partial s^k} v_n^{(k)}(s) ds$$

или

$$\frac{v^{(\mu)}(x)}{\sqrt{\lambda_n}} = \int_0^1 (s^{\alpha/2} \frac{\partial^{\mu+k} G(x, s)}{\partial x^\mu \partial s^k}) (\frac{s^{\alpha/2} v_n^{(k)}(s)}{\sqrt{\lambda_n}}) ds.$$

Следовательно, выражения $v^{(\mu)}(x)/\sqrt{\lambda_n}$ есть коэффициенты Фурье функции $s^{\alpha/2} \frac{\partial^{\mu+k} G(x, s)}{\partial x^\mu \partial s^k}$ в системе функций $\{(s^{\alpha/2} v_n^{(k)}(s)/\sqrt{\lambda_n})\}_{n=1}^{\infty}$, ортонормированность которой доказывается ниже (см. равенство (12)). Поэтому, на основании неравенства Бесселя [27], имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[v_n^{(\mu)}(x)]^2}{\lambda_n} \leq \int_0^1 s^\alpha \left(\frac{\partial^{\mu+k} G(x, s)}{\partial x^\mu \partial s^k} \right)^2 ds,$$

т. е. второй ряд в (9) сходится равномерно.

Из (8), в силу свойств 1°, 2° функции Грина $G(x, s)$, имеем

$$\frac{[x^\alpha v_n^{(k)}(x)]^{(\mu)}}{\lambda_n} = \int_0^1 \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \left(x^\alpha \frac{\partial^k G(x, s)}{\partial x^k} \right) v_n(s) ds, \quad \mu = \overline{0, k-1}.$$

Следовательно, функции $[x^\alpha v_n^{(k)}(x)]^{(\mu)}$ являются коэффициентами Фурье функции $\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \left(x^\alpha \frac{\partial^k G(x, s)}{\partial x^k} \right)$ в системе ортонормированных функций $\{v_n(s)\}_{n=1}^\infty$. Так как $\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \left(x^\alpha \frac{\partial^k G(x, s)}{\partial x^k} \right) \in L_2(0, 1)$ для любых $s \in [0, 1]$, то отсюда на основании неравенства Бесселя [27] вытекает равномерная сходимость последнего ряда в (9). Лемма 2 доказана. \square

4. ПОРЯДОК КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Лемма 3. Пусть функция $g(x)$ непрерывна вместе со своими производными до $(k-1)$ -го порядка включительно, удовлетворяет граничным условиям $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$ и $g^{(k)}(x) \in L_{2,\alpha}(0, 1)$; здесь $L_{2,\alpha}(0, 1)$ — пространство функций с нормой

$$\|g\|_\alpha^2 = \int_0^1 x^\alpha g^2(x) dx.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n g_n^2 \leq \int_0^1 x^\alpha [g^{(k)}(x)]^2 dx,$$

где g_n — коэффициенты Фурье функции $g(x)$ по системе собственных функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$.

Доказательство. Введём в рассмотрение функционал

$$I(F) = \int_0^1 x^\alpha [F^{(k)}(x)]^2 dx$$

и применим его к функции $F = g(x) - \sum_{n=1}^{m-1} g_n v_n(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} I(F) &= I(g) \\ &+ \sum_{n=1}^{m-1} g_n^2 I(v_n) - 2 \sum_{\substack{n,l=1 \\ n \neq l}}^{m-1} g_n g_l \int_0^1 x^\alpha v_n^{(k)}(x) v_l^{(k)}(x) dx - 2 \sum_{n=1}^{m-1} g_n \int_0^1 x^\alpha g^{(k)}(x) v_n^{(k)}(x) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Вычислим некоторые интегралы, участвующие в (11):

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha v_n^{(k)}(x) v_l^{(k)}(x) dx &= \int_0^1 (x^\alpha v_n^{(k)}(x)) v_l^{(k)}(x) dx \\ &= [(x^\alpha v_n^{(k)}) v_l^{(k-1)} - (x^\alpha v_n^{(k)})' v_l^{(k-2)} + \dots + (-1)^{k-1} (x^\alpha v_n^{(k)})^{(k-1)} v_l]_{x=0}^{x=1} \\ &+ (-1)^k \int_0^1 (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)} v_l(x) dx = \lambda_n \int_0^1 v_n(x) v_l(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq l, \\ \lambda_n, & n = l. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично, находим

$$\int_0^1 x^\alpha g^{(k)}(x) v_n^{(k)}(x) dx = \lambda_n \int_0^1 g(x) v_n(x) dx = \lambda_n g_n. \quad (13)$$

Из (12) следует, что

$$I(v_n) = \int_0^1 x^\alpha [v_n^{(k)}(x)]^2 dx = \lambda_n. \quad (14)$$

Из (11) на основании (12)–(14) следует, что $I(F) = I(g) - \sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n g_n^2 \geq 0$. Отсюда следует утверждение леммы 3. \square

Лемма 4. Пусть функция $g(x)$ непрерывна вместе со своими производными до $(k-1)$ -го порядка включительно, а функция $x^\alpha g^{(k)}(x)$ непрерывна вместе со своими производными также до $(k-1)$ -го порядка включительно, $[x^\alpha g^{(k)}(x)]^{(k)} \in L_2(0,1)$ и $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$, $g^{(k)}(1) = g^{(k+1)}(1) = \dots = g^{(2k-1)}(1) = 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 g_n^2 \leq \int_0^1 [(x^\alpha g^{(k)}(x))^{(k)}]^2 dx.$$

Доказательство. Нетрудно показать, что $(-1)^k \lambda_n g_n$ можно рассматривать как коэффициенты Фурье функции $[x^\alpha g^{(k)}(x)]^{(k)}$ по системе собственных функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Отсюда, согласно неравенству Бесселя [27], следует утверждение леммы 4. \square

Из лемм 3 и 4 вытекает следующая

Лемма 5. Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условиям леммы 3, а функция $(x^\alpha g^{(k)}(x))^{(k)}$ условиям леммы 2. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 g_n^2 \leq \int_0^t x^\alpha [(x^\alpha g^{(k)}(x))^{(2k)}]^2 dx.$$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Нетрудно видеть, что формальное применение метода Фурье приводит к следующему представлению решения задачи 1:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n(x), \quad (15)$$

где λ_n и $v_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, — собственные значения и собственные функции задачи (5), (6);

$$u_n(t) = a_n t^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n t^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\pi}{2 \cos \gamma \pi} \int_0^t [J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t) J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} \tau) - J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda_n} \tau) J_{1/2-\gamma}(\sqrt{\lambda_n} t)] (t/\tau)^{1/2-\gamma} \tau f_n(\tau) d\tau, \quad (16)$$

$$a_n = \frac{1}{2} (\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2} \Gamma(1/2-\gamma) \varphi_{2n}, \quad b_n = (\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma} \Gamma(1/2+\gamma) \varphi_{1n}, \quad (17)$$

$J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода [28], $\Gamma(z)$ — гамма-функция [25], а φ_{1n} , φ_{2n} , $f_n(t)$ — коэффициенты Фурье функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(x, t)$ в системе собственных функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 1. Пусть $\gamma = 0$ и функция $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условиям леммы 5, функция $\varphi_2(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 4 по аргументу x равномерно по t . Тогда ряд (15) определяет решение задачи 1.

Доказательство. Так как $\gamma = 0$, то в силу $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \sin x$, $J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \cos x$ функция (16) записывается в виде

$$u_n(t) = \varphi_{1n} \cos \sqrt{\lambda_n} t + \frac{\varphi_{2n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(t - \tau) d\tau. \quad (18)$$

Учитывая это, докажем равномерную сходимость рядов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) v_n(x), & \frac{\partial^\mu u}{\partial x^\mu} &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n^{(\mu)}(x), & \mu &= \overline{0, k-1}, \\ \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(\nu)}, & \nu &= \overline{0, k}. \end{aligned}$$

Сначала покажем равномерную сходимость ряда $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)$. В силу (15) и (18) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n} \cos \sqrt{\lambda_n} t (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, оценим каждую из сумм в правой части последнего равенства:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{1n} \cos \sqrt{\lambda_n} t (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)} \right| \\ \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 \varphi_{1n}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}]^2}{\lambda_n^3} \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 \varphi_{1n}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2(x)}{\lambda_n} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2n}}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)} \right| \\ \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \varphi_{2n}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}]^2}{\lambda_n^3} \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \varphi_{2n}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2(x)}{\lambda_n} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[x^\alpha v_n^{(k)}(x)]^{(k)}}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(t - \tau) d\tau \right| \\ \leq \left\{ T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \int_0^1 f_n^2(\tau) d\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}]^2}{\lambda_n^3} \right\}^{1/2} = \left\{ T \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2(\tau) d\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2(x)}{\lambda_n} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

В силу условия теоремы 1, на основании лемм 2, 4 и 5 ряды в правой части последних неравенств сходятся равномерно на $[0, 1]$. Следовательно, ряды, стоящие в левых частях, сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$.

Аналогично доказывается равномерная сходимость и остальных рядов. \square

Теорема 2. Пусть $\gamma \in (0, 1/2)$ и функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 5, а функция $f(x, t)$ удовлетворяет условиям леммы 5 по аргументу x равномерно по t . Тогда ряд (15) определяет решение задачи 1.

При доказательстве этой теоремы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 6. Для функций $u_n(t), n \in \mathbb{N}$, определяемых равенствами (16), при всех $\gamma \in (0, 1/2)$ справедливы неравенства

$$|u_n(t)| \leq |\varphi_{1n}| + \frac{T^{1-2\gamma}}{1-2\gamma} |\varphi_{2n}| + \frac{2T\sqrt{T}}{1-2\gamma} \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Доказательство. Переписывая функции (16) с помощью функции Бесселя — Клиффорда $\bar{J}_w(z) = \Gamma(w+1)(z/2)^{-w} J_w(z)$ и учитывая $|\bar{J}_w(x)| \leq 1$ при $w > -1/2$, а также $0 \leq \tau \leq t \leq T$, получим

$$|u_n(t)| \leq |a_n| \frac{T^{1-2\gamma}(\sqrt{\lambda_n}/2)^{1/2-\gamma}}{\Gamma(3/2-\gamma)} + |b_n| \frac{(\sqrt{\lambda_n}/2)^{\gamma-1/2}}{\Gamma(\gamma+1/2)} + \frac{2T}{1-2\gamma} \int_0^t |f_n(\tau)| d\tau.$$

Отсюда, принимая во внимание равенства (17) и применяя неравенство Коши — Буняковского к интегралу, сразу придём к неравенству (19). Лемма 6 доказана. \square

Переходим к доказательству теоремы 2, т. е. к равномерной сходимости рядов (15) и рядов

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j u}{\partial x^j} &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) v_n^{(j)}(x), \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j} (x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(j)}, \quad j = \overline{0, k-1}, \\ \frac{\partial^k}{\partial x^k} (x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}, \\ t^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} t^{2\gamma} u_n'(t) v_n(x), \quad B_{\gamma-1/2}^t u = \sum_{n=1}^{\infty} B_{\gamma-1/2}^t u_n(t) v_n(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} (x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k}) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) [x^\alpha v_n^{(k)}(x)]^{(k)}. \quad (20)$$

Отсюда, согласно (19), следует, что для доказательства равномерной сходимости ряда, стоящего в правой части равенства (20), достаточно доказать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{jn} (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}, \quad j = \overline{1, 2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\int_0^T f_n^2(\tau) d\tau} (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}.$$

К каждому этих рядов применим неравенство Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{jn} (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sqrt{\lambda_n^3} \varphi_{jn} \frac{(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}}{\sqrt{\lambda_n^3}} \right| \\ &\leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 \varphi_{jn}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}]^2}{\lambda_n^3} \right]^{1/2} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 \varphi_{jn}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2(x)}{\lambda_n} \right]^{1/2}, \quad j = \overline{1, 2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\int_0^T f_n^2(\tau) d\tau} (x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sqrt{\lambda_n^3 \int_0^T f_n^2(\tau) d\tau} \frac{(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}}{\sqrt{\lambda_n^3}} \right| \\ &\leq \left[\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 f_n^2(\tau) d\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(x^\alpha v_n^{(k)}(x))^{(k)}]^2}{\lambda_n^3} \right]^{1/2} = \left[\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^3 f_n^2(\tau) d\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n^2(x)}{\lambda_n} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Ряды, стоящие в правых частях этих неравенств, в силу условия теоремы 2, согласно леммам 2 и 5, равномерно сходятся. Тогда ряды, стоящие в левых частях, сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$. Аналогично доказывается равномерная сходимость в $\bar{\Omega}$ и остальных рядов.

Из доказанного выше следует, что ряды, соответствующие каждому члену уравнения (1) и условиям (2), (3), сходятся равномерно в $\bar{\Omega}$. Тогда сумма этих рядов удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3). Следовательно, сумма ряда (15) является решением задачи 1.

6. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Теорема 3. *Задача 1 не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Предположим, что задача 1 имеет два решения: $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Введём обозначение $u_1(x, t) - u_2(x, t) = u(x, t)$. Тогда функция $u(x, t)$ является решением задачи 1 при $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x) \equiv 0$, $f(x, t) \equiv 0$.

Возьмём произвольное число b из $(0, T]$ и введём функцию

$$w(x, t) = \begin{cases} 0, & b \leq t \leq T, \\ \int_b^t \xi^{-2\gamma} u(x, \xi) d\xi, & 0 \leq t \leq b. \end{cases} \quad (21)$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

а) $\frac{\partial^j w}{\partial x^j}, \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(x^\alpha \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \right) \in C(\bar{\Omega})$, $j = \bar{0}, k = \bar{1}$, и удовлетворяет условиям (3), (4);

б) $t^{2\gamma} w_t, t^{2\gamma} (t^{2\gamma} w_t)'_t \in C(\bar{\Omega})$ и $w(x, t) = 0$, $t \in [b, T]$.

Умножим уравнение (1), при $f(x, t) \equiv 0$, на функцию $t^{2\gamma} w(x, t)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Ω :

$$\int_0^1 \int_0^T t^{2\gamma} w(x, t) \left[t^{-2\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \right] dt dx = 0.$$

Принимая во внимание (21), перепишем это равенство в виде

$$\int_0^1 dx \int_0^b w \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt + (-1)^k \int_0^b t^{2\gamma} dt \int_0^1 w \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) dx = 0.$$

Теперь, применяя правило интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[wt^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}^{t=b} - \int_0^b \frac{\partial w}{\partial t} t^{2\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} dt \right] dx \\ & + (-1)^k \int_0^b t^{2\gamma} \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) w - \frac{\partial^{k-2}}{\partial x^{k-2}} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\ & \left. + \dots + (-1)^{k-1} \left(x^\alpha \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right) \frac{\partial^{k-1} w}{\partial x^{k-1}} \Big|_{x=0}^{x=1} \right] dt + \int_0^b t^{2\gamma} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} dx = 0, \end{aligned}$$

откуда, в силу свойств функций $w(x, t)$ и $u(x, t)$, следует

$$- \int_0^1 dx \int_0^b t^{2\gamma} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dt + \int_0^b t^{2\gamma} dt \int_0^1 x^\alpha \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^k u}{\partial x^k} dx = 0.$$

Отсюда, учитывая равенства $u = t^{2\gamma} \frac{\partial w}{\partial t}$ и $\frac{\partial^k u}{\partial x^k} = t^{2\gamma} \frac{\partial^{k+1} w}{\partial x^k \partial t}$, имеем

$$- \int_0^1 dx \int_0^b u \frac{\partial u}{\partial t} dt + \int_0^1 x^\alpha dx \int_0^b t^{4\gamma} \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^{k+1} w}{\partial x^k \partial t} dt = 0.$$

Далее, принимая во внимание равенства

$$u \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u^2, \quad \frac{\partial^k w}{\partial x^k} \frac{\partial^{k+1} w}{\partial x^k \partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^k w}{\partial x^k} \right]^2, \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k} w(x, b) = 0,$$

получим

$$\int_0^1 u^2(x, b) dx = -(\varepsilon + 1) \int_0^1 x^\alpha dx \int_0^b t^\varepsilon \left(\frac{\partial^k w}{\partial x^k} \right)^2 dt,$$

где $\varepsilon = 0$ при $\gamma = 0$ и $\varepsilon = 4\gamma - 1$ при $\gamma > 0$.

Из последнего равенства, в силу $\gamma \in [0, 1/2)$, следует, что $\int_0^1 u^2(x, b) dx \equiv 0$.

Следовательно, $u(x, b) \equiv 0$ при $x \in [0, 1]$. Так как b — произвольное число из $(0, T]$ и $u(x, 0) = 0$, то $u(x, t) \equiv 0$, т. е. $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в $\bar{\Omega}$. Теорема 3 доказана. \square

Теорема 4. Пусть функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $f(x, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 или 2. Тогда для решения задачи 1 справедлива оценка

$$\|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq K_0 [\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2], \quad (22)$$

где K_0 — некоторое действительное положительное число.

Доказательство. Так как $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормальная система, то из (15), согласно (16)–(19), следует неравенство

$$\begin{aligned} & \|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)v_n(x) \right]^2 dx = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t)v_n^2(x) + 2 \sum_{\substack{n,k=1 \\ n \neq k}}^{\infty} u_n(t)u_k(t)v_n(x)v_k(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \\ &\leq \tilde{K} \sum_{n=1}^{\infty} [|\varphi_{1n}| + |\varphi_{2n}| + \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}]^2 \leq \tilde{K} \sum_{n=1}^{\infty} [|\varphi_{1n}|^2 + |\varphi_{2n}|^2 + \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \\ &\quad + 2|\varphi_{1n}||\varphi_{2n}| + 2|\varphi_{1n}|\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)} + 2|\varphi_{2n}|\|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}]. \end{aligned}$$

Заменяя последние три слагаемых по неравенству, $a^2 + b^2 \geq 2ab$, а затем применяя неравенство Бесселя и обозначая $3\tilde{K}$ через K_0 , получим

$$\|u(x, t)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq K_0 \left(\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}^2 \right). \quad (23)$$

Оценим последнее слагаемое правой части (23). Принимая во внимание $f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)v_n(x)$ и ортонормированность системы функций $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, находим

$$\begin{aligned} \|f(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= (f(x, t), f(x, t))_{L_2(\Omega)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)v_n(x), \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)v_n(x) \right)_{L_2(\Omega)} \\ &= \int_0^T \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)v_n(x) \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t)v_m(x) dx dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T f_n^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|_{L_2(0,T)}^2. \end{aligned}$$

В силу этого равенства из (23) сразу следует неравенство (22). Теорема 4 доказана. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
2. Корнев Б.Г. Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1954.
3. Маховер Е.В. Изгиб пластинки переменной толщины с острым краем // Уч. зап. ЛГПИ им. Герцена. 1957. Т. 17, № 2. С. 28–39.
4. Маховер Е.В. О спектре собственных частот пластинки с острым краем // Уч. зап. ЛГПИ им. Герцена. 1958. Т. 197. С. 113–118.
5. Бубнов Б.А., Врагов В.Н. К теории корректных краевых задач для некоторых классов ультрагиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 4. С. 795–800.
6. Егоров И. Е. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1560–1567.
7. Егоров И.Е., Федоров И.Е. О первой краевой задаче для одного уравнения смешанного типа высокого порядка // Методы прикл. математики и мат. физики. Якутск: ЯФ СО АН СССР, 1987. С. 8–14.
8. Егоров И.Е. Краевая задача для одного уравнения высокого порядка с меняющимся направлением времени // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 6. С. 1301–1304.
9. Кожанов А.И. О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешённых относительно старшей производной // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 359–376.

10. Кожанов А.И., Пинигина Н.Р. Краевые задачи для некоторых классов уравнений составного типа высокого порядка // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 842–853.
11. Ashurov R.R., Muhiddinova A.T. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, N 3. P. 517–525.
12. Amanov D. About correctness of boundary value problems for an equation of even order // Uzbek Math. J. 2011. № 4. P. 20–35.
13. Amanov D., Ashuraliyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order // First Internat. Conf. Anal. Appl. Math. 2012. P. 3–7.
14. Уринов А. К., Азизов М. С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2022. Т. 26, № 2. С. 273–292.
15. Уринов А. К., Азизов М. С. О разрешимости нелокальных начально-граничных задач для одного дифференциального уравнения в частных производных высокого четного порядка // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32, № 2. С. 240–255.
16. Азизов М.С. Об одной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высшего четного порядка с оператором Бесселя // Бюлл. Ин-та математики АН Республики Уз. 2022. Т. 5, № 1. С. 14–24.
17. Азизов М. С. Об одной нелокальной начально-граничной задаче для уравнения в частных производных высокого четного порядка в прямоугольнике // Бюлл. Ин-та математики АН Республики Уз. 2022. Т. 5, № 5. С. 112–133.
18. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.
19. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 262–276.
20. Иргашев Б.Ю. О спектральной задаче для одного уравнения высокого чётного порядка // Изв. вузов. Математика. 2016. №. 7, С. 44–54.
21. Апаков Ю.П., Иргашев Б.Ю. Краевая задача для вырождающегося уравнения высокого нечётного порядка // Украин. мат. журн. 2014. Т. 66, №. 10, С. 1348–1331.
22. Сабитов К.Б., Фадеева О.В. Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25, № 1. С. 51–66.
23. Байкузиев К.Б., Каланов Б.С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. 1972. Т. 2. С. 40–54.
24. Байкузиев К.Б., Каланов Б.С. О разрешимости смешанной задачи для уравнения высшего порядка, вырождающегося на границе области // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. 1973. Т. 3. 1973. С. 65–73.
25. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. М.: Наука, 1965.
26. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
27. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 1959.
28. Ватсон Дж.Н. Теории бесселевых функций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949.

UDC 517.956

**ABOUT AN INITIAL BOUNDARY PROBLEM FOR A DEGENERATE
HIGHER EVEN ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION**© 2023 A. K. Urinov^{1,2a}, M. S. Azizov^{2b}¹*Romanovsky Institute of Mathematics AS Respubliki Uzbekistan,
ul. Universitetskaya 46, Tashkent 100174, Uzbekistan,*²*Ferghana State University,
ul. Murabbiylar 19, Ferghana 150100, Uzbekistan*E-mails: ^aurinovak@mail.ru, ^bmuzaffar.azizov.1988@mail.ru

Received 18.12.2021, revised 15.07.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. For one degenerate differential equation in partial derivatives of high even order with operator The initial boundary value problem is formulated in the rectangle and the existence, uniqueness and stability of the solution of the problem under study are proved.

Keywords: degenerate partial differential equation initial-boundary value problem, spectral problem, the existence, uniqueness and stability of the solution, the method of separation of variables.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.213

REFERENCES

1. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. *Uraveniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
2. Korenev B. G. *Voprosy rascheta balok i plit na uprugom osnovanii* [Issues of calculation of beams and slabs on an elastic foundation]. Moscow: Stroiizdat, 1954 (in Russian).
3. Makhover E. V. *Izgib plastinki peremennoi tolshchiny s ostrym kraem* [Bending of a plate of variable thickness with a sharp edge]. *Uch. Zap. LGP im. Gertsena*, 1957, Vol. 17, No. 2, pp. 28–39 (in Russian).
4. Makhover E. V. *O spektre sobstvennykh chastot plastinki s ostrym kraem* [On the natural frequency spectrum of a plate with a sharp edge]. *Uch. Zap. LGP im. Gertsena*, 1958, Vol. 197, pp. 113–118 (in Russian).
5. Bubnov B. A., Vragov V. N. *K teorii korrektnykh kraevykh zadach dlya nekotorykh klassov ul'tragiperbolicheskikh uravnenii* [On the theory of well-posed boundary value problems for some classes of ultrahyperbolic equations]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1982, Vol. 264, No 4, pp. 795–800 (in Russian).
6. Egorov I. E. *Razreshimost' odnoi kraevoi zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa vysokogo poryadka* [Solvability of a boundary value problem for a high-order equation of mixed type]. *Differ. Uravn.*, 1987, Vol. 23, No. 9. pp. 1560–1567 (in Russian).
7. Egorov I. E. Fedorov I.E. *O pervoi kraevoi zadache dlya odnogo uravneniya smeshannogo tipa vysokogo poryadka* [On the first boundary value problem for a high-order mixed-type equation]. *Metody prikladnoi matematiki i mat. fiziki*, 1987, pp. 8–14 (in Russian)
8. Egorov I. E. *Kraevaya zadacha dlya odnogo uravneniya vysokogo poryadka s menyayushchimsya napravleniem vremeni* [A boundary value problem for a higher-order equation with changing time direction]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1988, Vol. 303, No. 6, pp. 1301–1304 (in Russian).

9. Kozhanov A. I. O kraevykh zadachakh dlya nekotorykh klassov uravnenii vysokogo poryadka, nerazreshennykh otноситel'no starshei proizvodnoi [Boundary value problems for some classes of higher-order equations that are unsolved with respect to the highest derivative]. *Sib. Mat. Zhurn.*, 1994, Vol. 35, No. 2, pp. 359–376 (in Russian).
10. Kozhanov A. I., Pinigina N. R. Kraevye zadachi dlya nekotorykh klassov uravnenii sostavnogo tipa vysokogo poryadka [Boundary value problems for certain classes of high order composite type equations]. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2015, Vol. 12, pp. 842–853 (in Russian).
11. Ashurov R. R., Muhiddinova A. T. Initial-boundary value problem for a time-fractional subdiffusion equation with an arbitrary elliptic differential operator. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 517–525.
12. Amanov D. About correctness of boundary value problems for an equation of even order. *Uzbek Math. J.*, 2011, No. 4, pp. 20–35.
13. Amanov D. and Ashuraliyev A. Well-posedness of boundary value problems for partial differential equations of even order. *First Internat. Conf. Anal. Appl. Math.*, 2012, pp. 3–7.
14. Urinov A. K., Azizov M. S. Nachal'no-granichnaya zadacha dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh vysshego chetnogo poryadka s operatorom Besselya [Initial boundary value problem for partial differential equations of higher even order with Bessel operator]. *Vestn. Samara Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2022, Vol. 26, No. 2, pp. 273–292 (in Russian).
15. Urinov A. K., Azizov M. S. O razreshimosti nelokal'nykh nachal'no-granichnykh zadach dlya odnogo differentsial'nogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh vysokogo chetnogo poryadka [On the solvability of non-local initial boundary value problems for a single partial differential equation of high even order]. *Vestn. Udmurd. Univ. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, Vol. 32, No. 2, pp. 240–255 (in Russian).
16. Azizov M.S. Ob odnoi nachal'no-granichnoi zadache dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh vysshego chetnogo poryadka s operatorom Besselya [On an initial boundary value problem for a partial differential equation of higher even order with Bessel operator]. *Bull. In-ta mat. AN Respubliki Uzbekistan*, 2022, Vol. 5, No. 1, pp. 14–24 (in Russian).
17. Azizov M.S. Ob odnoi nelokal'noi nachal'no-granichnoi zadache dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh vysokogo chetnogo poryadka v pryamougol'nike [On a non-local initial boundary value problem for a partial differential equation of high even order in a rectangle]. *Bull. In-ta mat. AN Respubliki Uzbekistan*, 2022, Vol. 5, No. 5, pp. 112–133 (in Russian).
18. Kipriyanov I. A. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi [Singular elliptic boundary value problems]. Moscow: Nauka, 1997 (in Russian).
19. Sabitov K. B. Zadacha Dirikhle dlya uravnenii s chastnymi proizvodnymi vysokikh poryadkov [The Dirichlet Problem for Higher-Order Partial Differential Equations]. *Mat. Zametki*, 2015, Vol. 97, No. 2, pp. 262–276 (in Russian).
20. Irgashev B. YU. O spektral'noi zadache dlya odnogo uravneniya vysokogo chetnogo poryadka [On spectral problem for one equation of high even order]. *Izv. VUZov. Mat.*, 2016, No. 7, pp. 44–54 (in Russian).
21. Apakov Yu.P., Irgashev B. YU. Kraevaya zadacha dlya vyrozhdayushchegosya uravneniya vysokogo nechetnogo poryadka [Boundary value problem for a degenerate equation of high odd order]. *Ukrain. Mat. Zhurn.*, 2014, Vol. 66, No. 10, pp. 1348–1331. (in Russian).
22. Sabitov K.B., Fadeeva O.V. Nachal'no-granichnaya zadacha dlya uravneniya vynuzhdennykh kolebanii konsol'noi balki [Initial boundary value problem for the equation of forced oscillations of a cantilever beam]. *Vestn. Samara Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2021, Vol. 25, No. 1, pp. 51–66 (in Russian).
23. Baikuziev K. B., Kalanov B. S. O razreshimosti smeshannoi zadachi dlya uravneniya vysshego poryadka, vyrozhdayushchegosya na granitse oblasti [On the solvability of a mixed problem for a higher-order equation that degenerates on the boundary of a domain]. *Boundary Value Problems Diff. Equ.*, 1972, No. 2, pp. 40–54 (in Russian).
24. Baikuziev K. B., Kalanov B. S. O razreshimosti smeshannoi zadachi dlya uravneniya vysshego poryadka, vyrozhdayushchegosya na granitse oblasti [On the solvability of a mixed problem for a higher-order

- equation that degenerates on the boundary of a domain] *Boundary Value Problems Diff. Equ.*, 1973, No. 3, pp. 65–73 (in Russian).
25. Beitmen G., Ehrdeii A. Vysshie transtsendentnye funktsii [Higher transcendental functions]. Vol. I. Moscow: Nauka, 1965 (in Russian).
 26. Naimark M. A. Lineinye differentsial'nye operatory [Linear differential operators]. Moscow: Nauka, 1969 (in Russian).
 27. Mikhlin S. G. Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam [Lectures on linear integral equations]. Moscow: Fizmatlit, 1959 (in Russian).
 28. Watson Dzh. N. Teorii besselevykh funktsii [Theories of Bessel functions]. Moscow: Izdatel'stvo Inostrannoi Literatury, 1949 (in Russian).

УДК 519.63

**ЭФФЕКТИВНЫЙ МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ**© 2023 А. И. Федюшкин^{1а}, К. А. Иванов^{2б}, А. А. Пунтус^{3с}¹*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН,
просп. Вернадского, 101, корпус 1, г. Москва 119526, Россия,*²*АО «НПП «Пульсар»,
Окружной проезд, 27, г. Москва 105187, Россия,*³*Московский авиационный институт,
Волоколамское шоссе, 4, г. Москва 125993, Россия*E-mails: ^afai@ipmnet.ru, ^bkirill7785@mail.ru, ^cartpuntos@yandex.ruПоступила в редакцию 29.08.2022 г.; после доработки 29.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

Описана реализация алгоритма решения задачи о вибрационной конвекции в прямоугольной области, заполненной неравномерно нагретой несжимаемой жидкостью. Математическая модель основана на решении уравнений Симоненко — Зеньковской, полученных осреднением уравнений Навье — Стокса в предположении, что объём жидкости совершает высокочастотные поступательные вибрации. Для решения уравнений Пуассона реализован алгебраический многосеточный метод в сочетании с высокоэффективным методом динамического программирования (на основе принципа оптимального управления Беллмана) и дискретным преобразованием Фурье. Разработано математическое программное обеспечение, написанное на языке C/C++. Приводятся примеры решения модельных задач с различными направлениями потока нагрева квадратной области относительно вектора вибраций.

Ключевые слова: многосеточный метод, высокочастотная вибрационная конвекция, уравнения Симоненко — Зеньковской, вихрь-функция тока, принцип оптимальности Беллмана, дискретное преобразование Фурье.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.214

ВВЕДЕНИЕ

Исследования вибрационного влияния на гидродинамику и теплообмен в жидкости имеет фундаментальное и многочисленные прикладные значения. Например, среди таких приложений можно выделить влияние вибраций на пограничные слои и процессы выращивания совершенных кристаллов, снижение сопротивления тела, движущегося в газе или жидкости. Это важно для процессов охлаждения и теплоотвода в мощных электронных приборах и суперкомпьютерах, тепловых и ядерных энергетических установках; для задач фильтрации с целью увеличения нефтеотдачи; для технологических процессов с теплопереносом, например при получении новых материалов и лекарств; а также в медицине (в кардиологии — проблема кальциноза аорты и клапанов сердца, гемодинамике, урологии и др.), для решения задач интенсификации перемешивания в химических реакторах. Изучение воздействия вибраций на жидкие среды проводится уже около 200 лет, начиная с работ М. Фарадея (1831 г.) и Л. Рэлея (1883 г.) [1, 2]. Актуальность исследований вибрационных течений подтверждается огромным количеством научных работ (например, [3–18]), в которых имеются обзоры по влиянию вибраций на конвективное течение. Авторами работ [3, 4] впервые было указано на

возникновение осреднённого вибрационного конвективного течения при периодическом воздействии на жидкость. Вибрационное воздействие на жидкий объём может осуществляться двумя способами: 1) вибрации всего жидкого объёма как целого (например, так называемый *g-jitter* [3–8], при изменении гравитационного поля, в котором находится жидкий объём), 2) вибрации приложены к части границы этого жидкого объёма или к погружённому в расплав вибратору [9–20]. Первый способ вибрационного воздействия можно рассматривать как частный случай второго, но при одновременной вибрации всех границ жидкого объёма. Вибрационные воздействия на расплав могут иметь позитивное и негативное влияние. К позитивному можно отнести эффективное улучшение перемешивания расплава, отвод тепла от кристалла и свойства кристалла; к негативным — эффект, ухудшающий процесс роста и свойства кристалла. В технологических процессах получения материалов, например в процессах выращивания монокристаллов, вибрации могут оказывать влияние на гидродинамику расплава, распределение температуры (примеси), скорость кристаллизации, теплоотвод от кристалла и, как следствие, на качество кристаллов [9–18]. Для эффективности вибрационного воздействия на расплав необходимо определять диапазоны амплитудно-частотных параметров, зависящих от свойств расплава, метода роста кристалла и конфигурации вибрационного воздействия. Это можно делать с помощью математического моделирования, используя эффективные модели и численные методы. В отличие от моделирования стационарных задач [19] численное исследование нестационарных задач осложнено временными затратами получения решений. Возникает потребность использовать эффективные методы, сокращающие время вычислений, не уменьшая точности. Эффективные численные методы способны либо увеличить неявность метода, позволяющую увеличить шаг по времени [20], и/или использовать алгоритмы [21–24], сокращающие затраты на один шаг по времени. Данная работа посвящена методическому изучению численного решения модели виброконвекции на основе осреднённых уравнений Симоненко — Зеньковской [5], записанной в терминах вихрь-функции тока с применением эффективного многосеточного метода Федоренко [21], и прямых методов решения двух уравнений Пуассона с оптимизацией по Беллману [25] или дискретного преобразования Фурье.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система координат и геометрия расчётной прямоугольной области, заполненная жидкостью и совершающая вертикальные вибрации вдоль оси Oy , показаны на рис. 1.

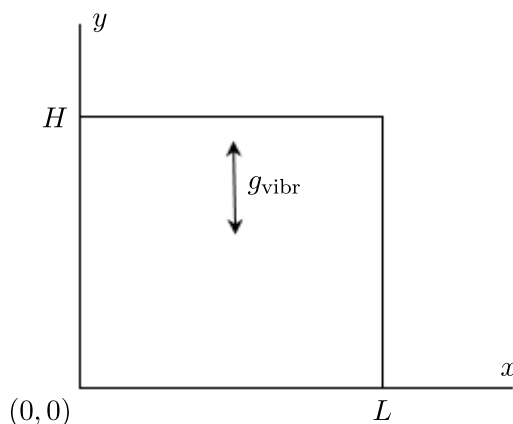


Рис. 1. Геометрия расчётной области и система координат

В данной работе представлены результаты для квадратного контейнера $L = H$ (рис. 1), заполненного неравномерно нагретой жидкостью, совершающего высокочастотные вибрационные колебания вдоль оси Oy с малой амплитудой A по следующему закону: $y = -A \sin \Omega t$,

$g_{\text{vibr}} \equiv \ddot{y} = A\Omega^2 \sin \Omega t$, где $\Omega = 2\pi f$ — круговая частота (об/сек), f — частота колебаний (Гц) (порядка 50 Гц), A — амплитуда вибраций (м) (порядка 100 мкм), g_{vibr} — вибрационное ускорение.

В случае совершения объёмом жидкости высокочастотных вибраций задача может описываться системой уравнений Симоненко — Зеньковской, полученной усреднением системы уравнений Навье — Стокса по «быстрому» времени [5]. В двумерном случае в переменных вихрь-функция тока данная система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \omega = \Delta \omega + Gr \frac{\partial \theta}{\partial x} + \varepsilon J(G, K), \quad (1)$$

$$\nabla \psi = -\omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \theta = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta, \quad (3)$$

$$\Delta G = F, \quad (4)$$

$$\psi_{x=0} = \psi_{x=L} = \psi_{y=0} = \psi_{y=H} = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \omega_{x=0} &= \frac{2(\psi_{1j} - \psi_{0j})}{\Delta h_x^2}, & \omega_{x=L} &= \frac{2(\psi_{(L-1)j} - \psi_{Lj})}{\Delta h_x^2}, \\ \omega_{y=0} &= \frac{2(\psi_{i1} - \psi_{i0})}{\Delta h_y^2}, & \omega_{y=H} &= \frac{2(\psi_{i(H-1)} - \psi_{iH})}{\Delta h_y^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\theta(x=0) = 1, \quad \theta(x=L) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(y=0, y=H) = 0, \quad (7)$$

$$G_{x=0} = G_{x=L} = G_{y=0} = G_{y=H} = 0; \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} J(G, K) &= -\left(1 + \frac{\partial G}{\partial y}\right)(G_{xy^2}) + G_{xx}(G_{xy} + K) + \frac{\partial G}{\partial x}\left(G_{x^2y} + \frac{\partial K}{\partial x}\right), \\ u &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad F = -\beta_T \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad K = -\beta_T \frac{\partial \theta}{\partial y}, \end{aligned}$$

вектор ускорения силы тяжести \mathbf{g} направлен навстречу оси Oy ; безразмерные функции: завихренность (вихрь) ω , функция тока ψ , температура $\theta = (T - T_1)/(T_2 - T_1)$, вторая функция тока (вибрационная) G ; \vec{V} — вектор скорости с компонентами u и v , t — время. Безразмерными определяющими параметрами являются: число Прандля $\text{Pr} = \nu/a = \mu \text{Cp}/\lambda$, число Грасгофа $\text{Gr} = g\beta_T(T_2 - T_1)H^3/\nu^2$ (число Рэлея $\text{Ra} = \text{GrPr}$), вибрационный параметр $\varepsilon = A(\Omega)^2/2$ (единственный в случае высоких частот), вибрационное число Рэлея $\text{Ra}_{\text{vibr}} = \text{Pr} g_{\text{vibr}}\beta_T(T_2 - T_1)H^3/\nu^2$, где T — размерная температура, $(T_2 - T_1)$ — масштаб температуры, g — модуль вектора ускорения силы тяжести \mathbf{g} , ν — кинематическая вязкость, β_T — коэффициент объёмного температурного расширения, μ — динамическая вязкость, λ — теплопроводность, Cp — удельная теплоёмкость при постоянном давлении, a — температуропроводность, $g_{\text{vibr}} = A\Omega^2$. Рассматриваются граничные условия прилипания и непроницаемости (5), (6), где условие для вихря аппроксимируется по формуле Тома.

2. ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА РАСЧЁТА

Особенностью предложенного метода решения системы уравнений виброконвекции является то, что уравнения Симоненко — Зеньковской [5] были переписаны в терминах: вихрь-две функции тока, температура (1)–(4), и поскольку основное время при численном решении системы уравнений (1)–(4) затрачивается на решение уравнений Пуассона (2), (4), то для решения эллиптических уравнений для функций тока были использованы экономичные алгоритмы:

- 1) геометрический многосеточный метод Федоренко [21],
- 2) матричный метод на основе динамического программирования Беллмана [25],
- 3) метод решения уравнения Пуассона в прямоугольнике на основе дискретного преобразования Фурье (DFT) [29].

Метод расчёта с указанными экономичными алгоритмами 1)–3) реализован в программе AliceFlow2D, написанной на языке C/C++, с реализацией алгоритма Fedorenko v.0.32 [21]. В программе AliceFlow2D также реализован алгоритм решения уравнений Симоненко — Зеньковской, записанных в естественных переменных скорость-давление [5], который требует больше времени в сравнении с изложенным эффективным алгоритмом решения уравнений Симоненко — Зеньковской, записанных в виде (1)–(4). Программа AliceFlow2D сертифицирована в государственном Реестре России программ для ЭВМ [30] и находится в свободном доступе с разрешения авторов.

Для определения эффективности данных методов были проведены методические расчёты уравнения Лапласа $\Delta T = 0$ (с условиями Дирихле $T_{x=0} = 400$, $T_{x=L} = 300$, $T_{y=0} = 300$, $T_{y=H} = 300$) на сетке $N_x = N_y = 50$ семью различными методами решения:

- 1) стандартным методом поточечной нижней релаксации с параметром $\alpha=0.8$;
- 2) методом Зейделя, в котором для каждого узла две точки берутся с текущего слоя и две точки с предыдущего;
- 3) методом Зейделя, использующим алгоритм прогонки сначала вдоль горизонтальных, а потом вдоль вертикальных линий сетки;
- 4) методом последовательной верхней релаксации с параметром $\alpha = 1.855$;
- 5) геометрическим многосеточным методом, где каждый пятый узел вдоль каждого координатного направления образует грубую сетку. Используется геометрический двухсеточный метод, сглаживание в котором осуществляется полинейным методом Зейделя, использующим алгоритм прогонки вдоль горизонтальных и вертикальных линий сетки, а также сплайновую интерполяцию с грубой сетки на подробную;
- 6) геометрическим многосеточным методом, где каждый пятый узел вдоль каждого координатного направления образует грубую сетку. Используется геометрический двухсеточный метод, сглаживание в котором осуществляется поточечным методом Зейделя;
- 7) геометрическим многосеточным методом, где каждый пятый узел вдоль каждого координатного направления образует грубую сетку. Используется геометрический двухсеточный метод, сглаживание в котором осуществляется поточечным методом верхней релаксации. Оптимальный параметр верхней релаксации свой на каждой сетке.

На рис. 2 показаны результаты методических расчётов уравнения Лапласа, которые показали, что наилучшей скоростью сходимости среди рассмотренных алгоритмов обладает многосеточный алгоритм Федоренко [21] с продольно поперечной прогонкой, сплайновой интерполяцией и проекцией на основе средних значений. Геометрический многосеточный вариант метода Федоренко [21] со сплайновой интерполяцией с грубой сетки на подробную является быстродействующим, поскольку позволяет использовать эффективный оператор проекции, в котором осреднённые значения для сборки матрицы с однородными граничными условиями берутся на сетке меньшей размерности, а также позволяет часть операций по вычислению среднего проводить один раз и выносить их из общего вычислительного цикла.

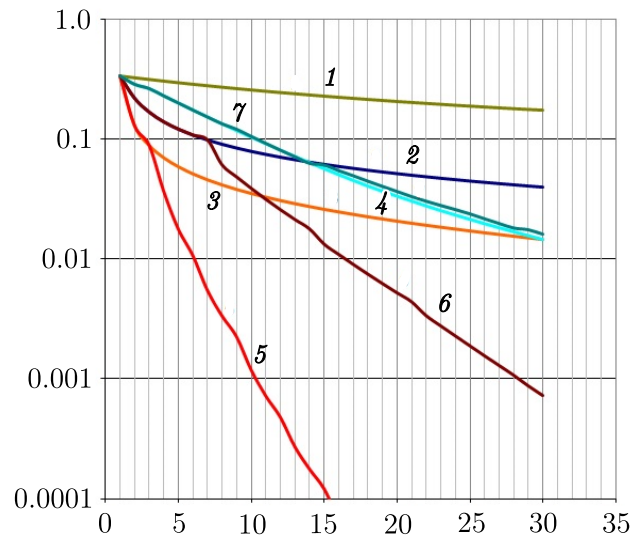


Рис. 2. Скорости сходимости различных реализованных итерационных методов решения уравнения Лапласа: стандартный (1), Зейделя (2), полилинейный LR (3), SOR (4), Федоренко на базе LR (5), Федоренко на базе Зейделя (6), Федоренко на базе SOR с оптимальным набором параметров (7)

Реализацию метода динамического программирования Беллмана [25] кратко поясним на примере решения уравнения Пуассона, записанного в общем виде (5):

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \varsigma = 0, \quad (9)$$

$$D(\phi) = \int_S (\phi_x^2 + \phi_y^2 - 2\varsigma\phi) dx dy, \quad (10)$$

где S — расчётная область.

Уравнение (9) — обобщённый вид уравнения Пуассона, где в случае $\phi \equiv \psi$ и $\varsigma \equiv \omega$ справедливо уравнение (2), а в случае $\phi \equiv G$ и $\varsigma \equiv -F$ — уравнение (4).

Задача решения уравнения Пуассона (9) эквивалентна задаче минимизации функционала энергии $D(\phi)$ (10), которая решается методом динамического программирования Беллмана [25]. Минимизация функционала $D(\phi)$ на всей области S приводит к тому, что он минимален также и на каждом вертикальном вектор-столбце, и вообще в каждом конечном элементе. Принцип минимума функционала $D(\phi)$ позволяет записать рекуррентное соотношение для вектор-столбцов в прямоугольной расчётной области от правой границы до левой границы расчётной области (13), (14). Нахождение функции ϕ состоит из прямого хода:

$$C_i = I - [I + Q + C_{i+1}]^{-1}, \quad C_{N_x} = I, \quad b_i = [I - C_i](b_{i+1} + r_i + \varsigma_i h_x h_y \beta), \\ b_{N_x} = \phi_{N_x}, \quad i = N_x - 1, \dots, 1,$$

и обратного хода:

$$\phi_i = [I - C_i]\phi_{i-1} + b_i, \quad i = 1, \dots, N_x - 1,$$

где матрица $Q = (q_{ij})$ для равномерной сетки с шагами h_x и h_y и $\beta = h_x/h_y$ имеет вид

$$q_{ij} = \begin{cases} 2\beta^2, & i = j \\ -\beta^2, & |i - j| = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Краевые условия Дирихле на нижней и верхней границах учитываются в векторах r_i :

$$r_i = [r_{ij}], \quad \text{где } r_{ij} = \begin{cases} \phi_{i0}, & i = j \\ \phi_{iM}, & i = N_x - 1, \quad j = 1, \dots, N_y - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Последовательность матриц $C_i, i = 1, \dots, N_x$, вычисляется один раз и запоминается при первом обращении. На всех остальных итерациях происходит лишь чтение матриц A_i в оперативной памяти. На сетке 50×50 работающая программа потребляет не более 3 Мб оперативной памяти, а на сетке 200×200 требуется 87 Мб. Векторы b_i вычисляются каждый раз заново так как зависят от изменяющейся правой части ς уравнения (5). Обратная матрица находится путём $N_x - 2$ кратного решения системы линейных уравнений (СЛАУ) размерности $(N_y - 2)(N_y - 2)$ методом Гаусса. Всего требуется обратить $N_x - 2$ матриц, где N_x — число сеточных узлов в горизонтальном направлении, а N_y — количество узлов сетки по вертикали. Кратко поясним решение уравнения Пуассона (9) с помощью дискретного преобразования Фурье (DFT) с постоянным шагом сетки по оси [29]. Разностную аппроксимацию уравнения Пуассона (9) удобно переписать в следующем виде:

$$\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \alpha_j \phi_{i,j} + \beta_j \phi_{i,j+1} + \gamma_j \phi_{i,j-1} = p \varsigma_{i,j}, \quad (11)$$

где $\beta_j = \gamma_j = \beta^2$, $p = h_x^2$, $\alpha_j = -2 - 2\beta^2$, $\beta = h_x/h_y$. Пусть разностные аналоги $\phi_{i,j}$ и $\varsigma_{i,j}$ функции ϕ и ς представлены в виде

$$\phi_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} a_{k,j} \sin\left(\frac{\pi k i}{N_x}\right), \quad \varsigma_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_x-1} b_{k,j} \sin\left(\frac{\pi k i}{N_x}\right), \quad (12)$$

где

$$a_{k,j} = \frac{2}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x-1} \phi_{i,j} \sin\left(\frac{\pi k i}{N_x}\right), \quad b_{k,j} = \frac{2}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x-1} \varsigma_{i,j} \sin\left(\frac{\pi k i}{N_x}\right).$$

Подставив (12) в (11), получим

$$\sum_{k=1}^{N_x-1} \left[a_{k,j} \left(\sin \frac{\pi k(i+1)}{N_x} + \sin \frac{\pi k(i-1)}{N_x} \right) + \alpha_j a_{k,j} \sin \frac{\pi k i}{N_x} + \beta_j a_{k,j+1} \sin \frac{\pi k i}{N_x} + \gamma_j a_{k,j-1} \sin \frac{\pi k i}{N_x} \right] = p \sum_{k=1}^{N_x-1} b_{k,j} \sin \frac{\pi k i}{N_x}. \quad (13)$$

Далее, приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках в уравнении (13), придём к трёхдиагональному соотношению:

$$\beta_j a_{k,j+1} + \lambda_{k,j} a_{k,j} + \gamma_j a_{k,j-1} = p b_{k,j}, \quad \text{где } \lambda_{k,j} = \alpha_j + 2 \cos \frac{\pi k}{N_x}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1. \quad (14)$$

Система уравнений (14) с трёхдиагональной матрицей для определения величин $a_{k,j}$ при каждом k решается методом прогонки. Затем функция $\phi_{i,j}$ отыскивается с помощью обратного преобразования (12).

Если метод Беллмана не содержит параметров настройки, то эффективность геометрического многосеточного метода, как и любого итерационного метода, зависит от нескольких параметров настройки: числа итераций на каждой из сеток, порогового значения невязки, процедуры интерполяции и огрубления, итерационного метода сглаживателя, числа уровней

сетки и самого алгоритма построения грубых сеток в случае алгебраического многосеточного метода.

Для двух функций тока в случае геометрически сложной области, а также неравномерной и даже треугольной сетки может быть применён прямой метод для ленточной матрицы. При этом, так как матрица СЛАУ не меняется, она может быть приведена к верхнетреугольному виду лишь единожды, а время обратного хода при изменяющейся правой части уравнения занимает столько же мало времени, что и в методе динамического программирования Беллмана. При этом метод с ленточной матрицей потребляет в 2.73 раза больше оперативной памяти, чем метод Беллмана, и может быть применён для двумерных задач.

Тестовые решения уравнения Пуассона на компьютере с процессором 2.2 ГГц (2 потока) показали, что на сетке в 1 млн расчётных узлов ($10^3 \times 10^3$) тремя методами (дискретного преобразования Фурье (DFT), динамического программирования Беллмана и алгебраического многосеточного метода (AMG) в эффективной реализации, известной под названием `amg1r5` [23]) необходимы следующие затраты компьютера по времени и памяти.

1. Метод на основе дискретного преобразования Фурье (DFT) для решения уравнения Пуассона потребовал 101 Мб памяти и 2 с 775 мс времени.

2. Метод динамического программирования Беллмана [25] потребовал 9 Гб памяти и 13 м 45 с времени на построение последовательности матриц A_i . Обратный ход метода Беллмана занял 3 с 864 мс.

3. Алгебраический многосеточный метод `amg1r5` [23] потребовал 2 Гб памяти, и решение алгебраическим многосеточным методом `amg1r5` заняло 2 с 855 мс.

Система уравнений Симоненко — Зеньковской (1)–(4) решалась на совмещённой сетке, (вихрь, обе функции тока и температура вычисляются в одних и тех же узлах сетки). В процессе вычислений никаких шахматных осцилляций, характерных для формулировки в естественных переменных, не возникало [22, 27–29].

Система уравнений гидродинамики решается отдельным решателем (уравнения для вихря, функций тока ψ и G , а также температуры решаются последовательно). Для завихренности на твёрдой границе в комплексе программ реализованы три метода: условия Тома $\omega_{\text{wall}} = 2(\psi_i - \psi_{\text{wall}})/h^2$, Вудса $\omega_{\text{wall}} = -0.5\omega_i + 3 \cdot (\psi_{\text{wall}} - \psi_i)/h^2$ и Йенсена $\omega_{\text{wall}} = (-7\psi_{\text{wall}} + 8\psi_i - \psi_{ii})/(2h^2)$ [28, 29]. В данной работе представлены результаты с аппроксимацией граничного условия для завихренности по формуле Тома. Для удовлетворения граничного условия для завихренности по неявной схеме на твёрдой стенке в программном комплексе организован итерационный цикл нижней релаксации с параметром $\alpha = 0.2$ [28, 29].

При решении уравнения переноса вихря с продольно-поперечной прогонкой (ADI) характерное время расчёта одного варианта на сетке 50×50 узлов составляло около 6 мин (PC с процессором 2.2 ГГц, 2 потока), а потребление оперативной памяти при этом составляло 8 Мб. Для аппроксимации уравнения конвективной диффузии применялся метод контрольного объёма [27]. При аппроксимации конвективного члена применялся метод отложенной коррекции, в котором неявно реализуется противопоточная схема (Upwind), а также явная уточняющая добавка до схемы высокой разрешающей способности (QUICK, LUS, CUS, SMART, H_QUICK, UMIST, CHARM, MUSCL, VAN_LEER_HARMONIC, OSPRE, VAN_ALBADA, SUPERBEE, MINMOD, H_CUS, KOREN или FROMM), которая реализована добавлением в правую часть уравнения выражений для ограничителя потока, представленных в табл. 1.

В табл. 1 величина $r = (\Phi_d - \Phi_c)/(\Phi_c - \Phi_u)$, где Φ — искомая функция, а индексы означают: c — center, u — upwind (сторона против потока), d — direct (сторона по потоку).

Для аппроксимации по времени используется схема Пейре второго порядка на равномерной сетке по времени с шагом τ в виде
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{3\omega^{n+1} - 4\omega^n + \omega^{n-1}}{2\tau}.$$

Для уравнений Пуассона (2), (4) применяется метод динамического программирования Беллмана [25], для завихренности делается одна итерация метода установления с продольно-

Таблица 1

Ограничители потока для различных схем

№	Схема	Формула ограничителя потока
1	<i>QUICK</i>	$0.5(1.5r + 0.5)$
2	<i>LUS</i>	1.0
3	<i>CUS</i>	$0.5((1 + 1/3)r + (1 - 1/3))$
4	<i>SMART</i>	$\max(0, \min(2r, 0.75r + 0.25, 4.0))$
5	<i>H_QUICK</i>	$\begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ 2(r + r)/(r + 3), & r > 0 \end{cases}$
6	<i>UMIST</i>	$\max(0, \min(2r, 0.25 + 0.75r, 0.75 + 0.25r, 2))$
7	<i>CHARM</i>	$\begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ r(3r + 1)/(r + 1)^2, & r > 0 \end{cases}$
8	<i>MUSCL</i>	$\max(0, \min(2, 0.5r + 0.5, 2r))$
9	<i>VAN_LEER_HARMONIC</i>	$\begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ (r + r)/(r + 1), & r > 0 \end{cases}$
10	<i>OSPRE</i>	$3(r^2 + r)/(2(r^2 + r + 1))$
11	<i>VAN_ALBADA</i>	$(r^2 + r)/(r^2 + 1)$
12	<i>SUPERBEE</i>	$\max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$
13	<i>MINMOD</i>	$\max(0, \min(r, 1))$
14	<i>H_CUS</i>	$\begin{cases} 0, & r \leq 0, \\ 1.5(r + r)/(r + 2), & r > 0 \end{cases}$
15	<i>KOREN</i>	$\max(0, \min(2r, (2r + 1)/3, 2))$
16	<i>FROMM</i>	$0.5(r + 1)$

поперечной прогонкой и применяется нижняя релаксация; для температуры применяется алгебраический многосеточный метод amg1r5 [23].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной работе рассмотрено влияние на гидродинамику и теплоперенос вертикальных вибраций квадратной области ($H = L = 3.0$ см), заполненной жидкостью в условиях невесомости, для трёх наборов параметров, приведённых в табл. 2. Свойства жидкости соответствуют расплаву теллурида кадмия CdTe (число Прандтля $Pr = 0.0824$).

Получены результаты решения трёх модельных задач с разными граничными условиями для температуры.

Задача 1. Задача с боковым подогревом квадратной области [26]. $T(x = 0) = 400$ К, $T(x = L) = 300$ К, $\frac{\partial T}{\partial y}(y = 0, y = H) = 0$, ψ и $G(y = 0, y = H, x = 0, x = L) = 0$; условие прилипания на твёрдых стенках задаётся граничным условием для вихря $\omega(y = 0, y = H, x = 0, x = L)$ с аппроксимацией Тома.

Задача 2. Задача с охлаждением части верхней границы (модель выращивания кристаллов методом Чохральского). $T(x = 0) = T(x = L) = T(y = 0) = 400$ К, $T(y = H, L/3 < x < 2L/3) = 300$, $\frac{\partial T}{\partial y}(y = H, x \leq L/3$ и $x \geq 2L/3) = 0$, ψ и $G(y = 0, y = H, x = 0, x = L) = 0$;

условие прилипания на твёрдых стенках задаётся граничным условием для вихря ω ($y = 0, y = H, x = 0, x = L$) с аппроксимацией Тома.

Задача 3. Задача с подогревом снизу (задача Рэлея – Бенара). $T(y = 0) = 400$ К, $T(y = H) = 300$ К, $\frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, x = L) = 0$; ψ и $G(y = 0, y = H, x = 0, x = L) = 0$; условие прилипания на твёрдых стенках задаётся через граничное условием для вихря ω ($y = 0, y = H, x = 0, x = L$) с аппроксимацией Тома.

Результаты решения данных задач 1–3 для параметров $P0, P1, P2$ и $P3$ (см. табл. 2) представлены в виде изотерм и изолиний функции тока на рис. 3–6 и в виде значений максимальных скоростей в табл. 3.

Таблица 2

Параметры вибрационного воздействия

№ набора параметров	Амплитуда A , мкм	Частота f , Гц	g_{vibr}	Ra_{vibr}	ϵ
P0	2	5	0.1	$5 \cdot 10^2$	0.001
P1	50	50	4.93	$2.47 \cdot 10^6$	2.465
P2	100	30	3.55	$1.78 \cdot 10^6$	1.776
P3	100	50	9.87	$4.95 \cdot 10^6$	4.93

Таблица 3

Результаты расчётов

№	Максимальное значение модуля скорости, мм/с		
	Задача 1	Задача 2	Задача 3
P1	1	—	<0.2
P2	0.9	0.8–1.71	<0.2
P3	1.2	—	<0.2

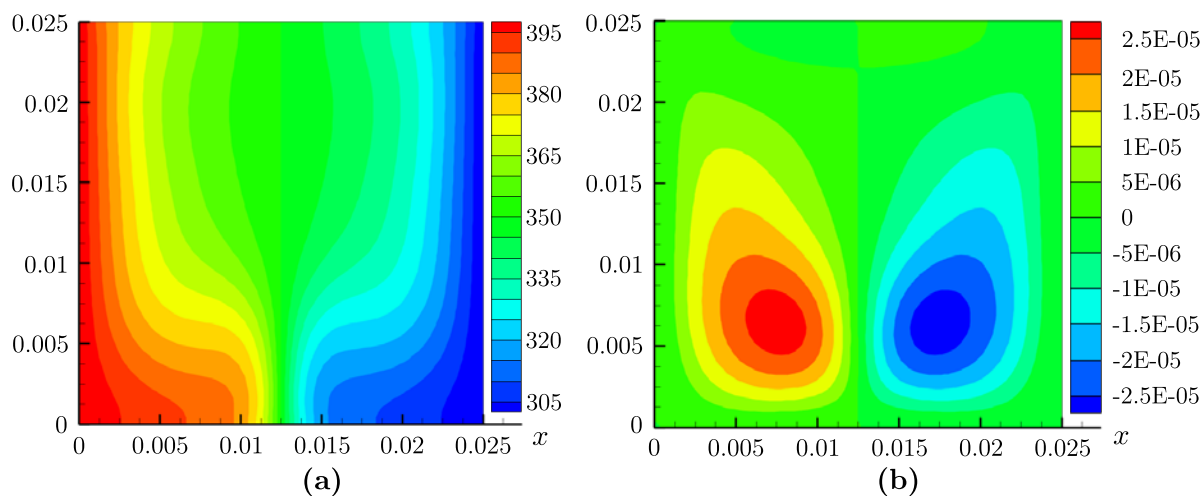


Рис. 3. Задача 1. Изотермы (а) и функция тока (б) течения расплава при слабой вибрационной конвекции для параметров P0 (табл. 2)

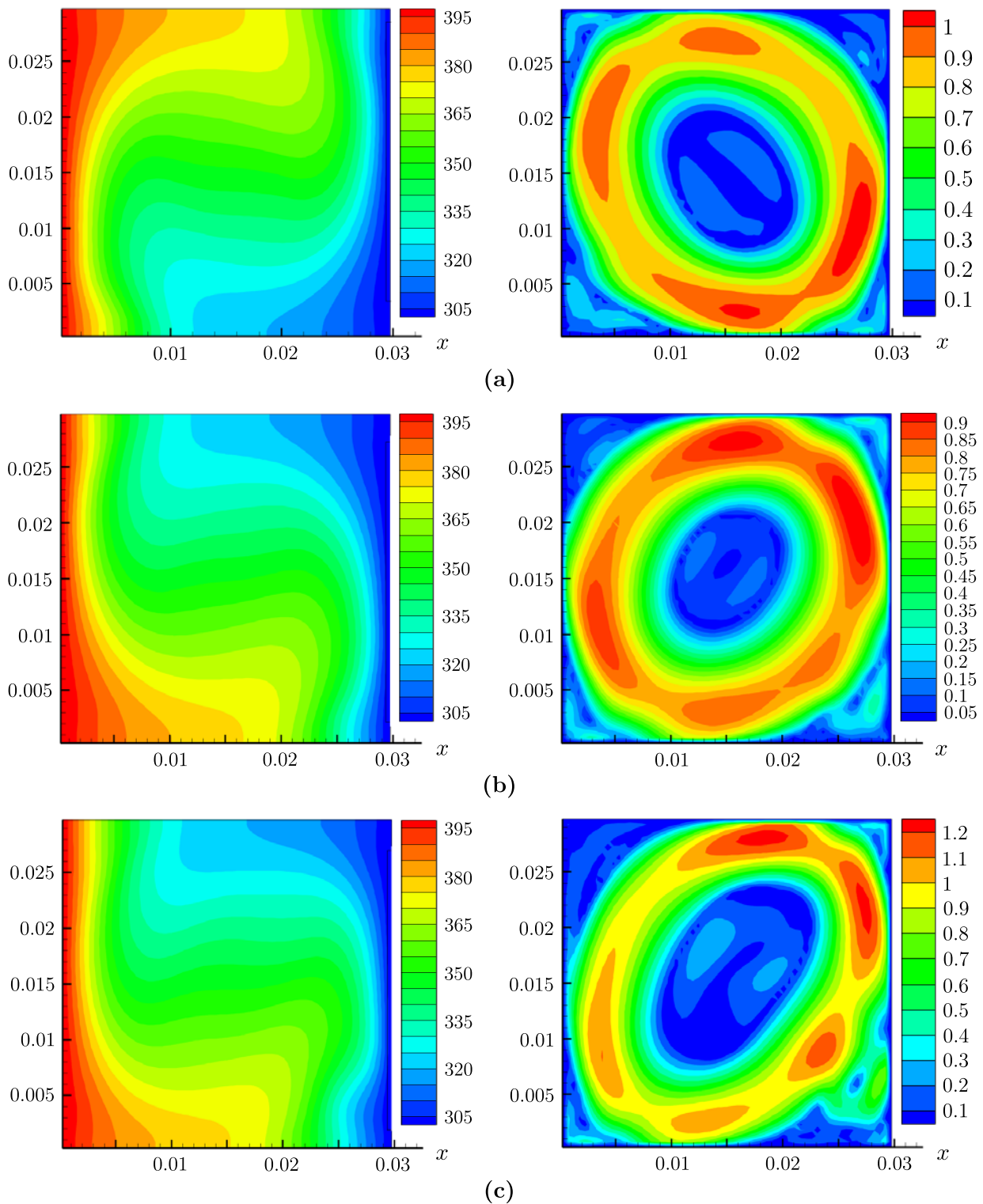


Рис. 4. Задача 1. Изотермы (слева) и модуль скорости (справа) течения расплава при вибрационной конвекции для параметров: $P1$ (а), $P2$ (б), $P3$ (с) (табл. 2)

На рис. 3–6 показана вибрационная конвекция для задач 1–3 в условиях невесомости для расплава с числом $Pr = 0.087$ в виде полей функции тока, модуля скорости и изотерм. На рис. 3 представлены результаты в виде изотерм и функции тока для задачи 1, показывающие влияние

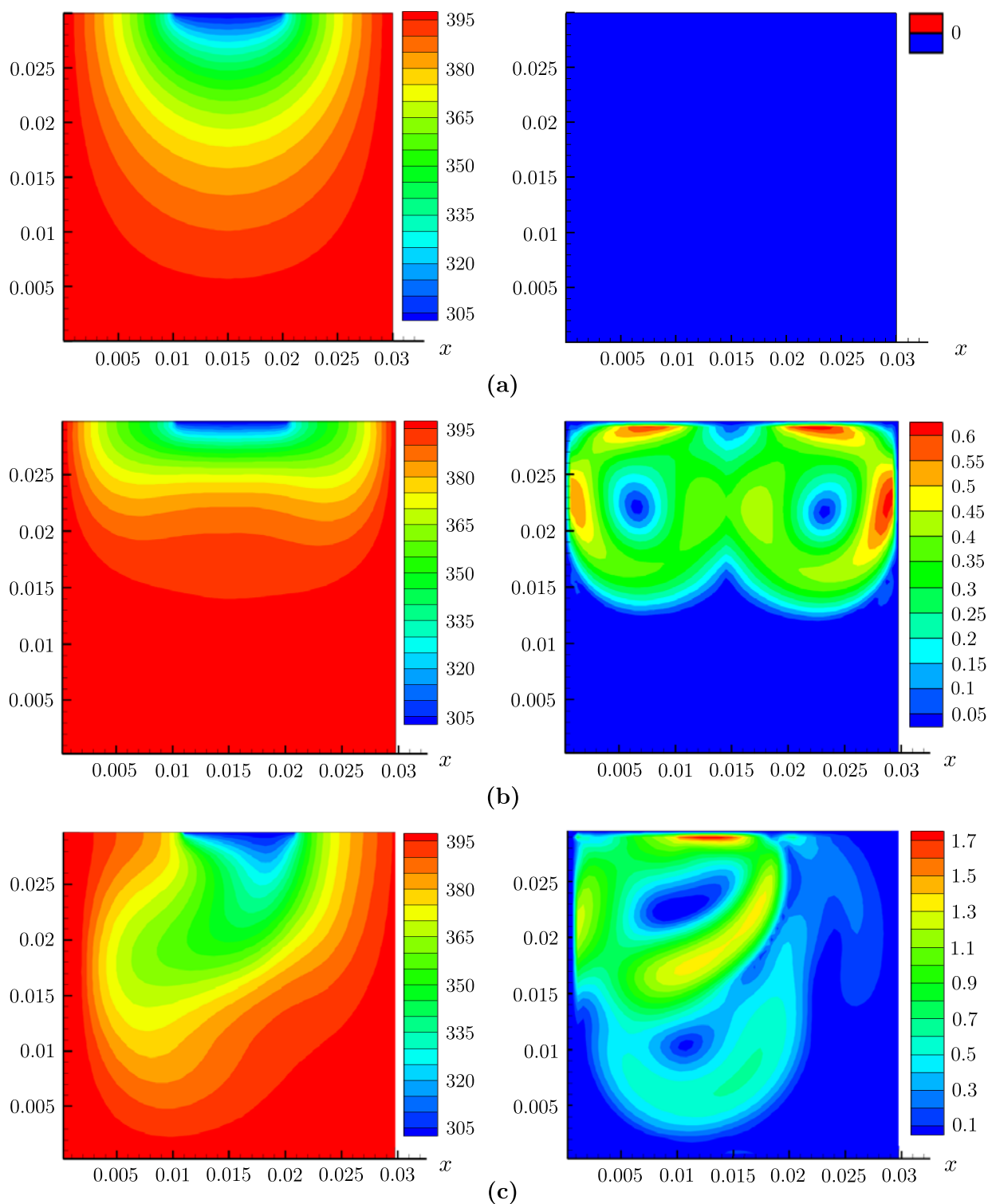


Рис. 5. Задача 2. Изотермы (слева) и модуль скорости (справа) течения расплава при вибрационной конвекции для параметров: без вибраций (а), вертикальные вибрации при $P2$ (б), горизонтальные вибрации при $P2$ (с) (табл. 2)

виброконвекции на поле температуры и структуру течения расплава в случае слабого вибрационного воздействия: $Ra_{\text{vibr}} = 500$ — набор параметров $P0$ (табл. 2). В этом случае наблюдается двухъячейковая структура слабой виброконвекции с двумя согласующимися вихрями,

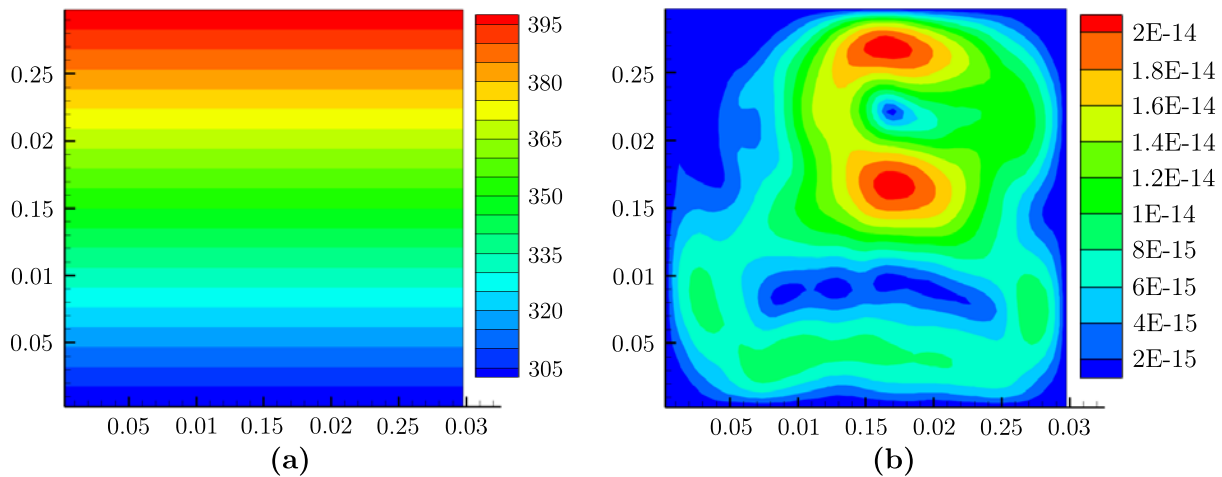


Рис. 6. Задача 3. Изотермы (а) и модуль скорости (б) течения расплава при вибрационной конвекции для параметров $P2$ (табл. 2)

вытянутыми вдоль вертикальной линии с подъёмом жидкости в центре области и опусканием вдоль вертикальных стенок. В результате двухвихревого подъёмно-опускного конвективного течения распределение отклонений поля температуры от исходного практически симметрично относительно средней вертикальной линии области. При повышении вибрационного числа Рэлея $Ra_{vibr} > 10^6$ двухвихревая вертикальная симметричная структура конвективного течения теряет устойчивость и становится одновихревой, как показано на рис. 4. Смена моды конвективного течения связана с потерей устойчивости и согласуется с теоретическими результатами [3, 4]. На рис. 4 показаны изотермы и модули скорости для задачи 1 для трёх наборов параметров $P1$, $P2$, $P3$ (табл. 2). Характерной особенностью одновихревого течения виброконвективного течения в невесомости является направление закрутки течения. На рис. 4 показано, что направление виброконвективного течения меняется дискретно в зависимости от вибрационных параметров и на это может влиять величина амплитуды вибрационного воздействия; например, на рис. 4(а) течение направлено по часовой стрелке при амплитуде 50 мкм, а на рис. 4(б) и 4(с) течение направлено против часовой стрелки при амплитуде 100 мкм.

На рис. 5(а) показаны изотермы при отсутствии вибрационного воздействия в простейшей модели метода Чохральского и показано влияние на структуру течения и поле температуры вертикальных вибраций (рис. 5(б)) и горизонтальных вибраций (рис. 5(с)) для набора параметров $P2$ (табл. 2).

Для задачи 3 (рис. 6) результаты моделирования показали, что для наборов параметров $P1$, $P2$, $P3$ (табл. 2) вибрационные воздействия создают очень слабые течения, которые не оказывают влияния на поле температуры и решения практически совпадают для всех трёх наборов параметров $P1$, $P2$, $P3$ (табл. 3), что согласуется с результатами авторов работы [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Система уравнений Симоненко — Зеньковской для высокочастотной виброконвекции несжимаемой жидкости [5] была записана в терминах: вихрь-две функции тока, температура, что позволило использовать эффективные алгоритмы численного решения.

В результате проведённого исследования выбран наилучший по быстродействию метод в виде связки следующих алгоритмов: для уравнения вихря — одна итерация метода установления с использованием продольно поперечной прогонки (LR), для эллиптических уравнений применяется метод динамического программирования Беллмана [25], для уравнения переноса температуры — алгебраический многосеточный метод `amg1r5` Руге и Штубена [23]. Система

уравнений Симоненко — Зеньковской решается отдельным решателем [28]. Время расчёта одного варианта на сетке 50×50 узлов в среднем составляет порядка 6 м процессорного времени (2.2 ГГц, 2 потока; потребляет 8 Мб оперативной памяти). На языке C/C++ написана программа решения системы уравнений Симоненко — Зеньковской, записанной в терминах: вихрь-две функции тока, температура. С помощью разработанной программы могут быть рассчитаны течения теплоносителей и теплообмен в широком наборе определяющих параметров ($Pr, Gr, Ra, \varepsilon, Ra_{vibr}$).

На примере решения модельных задач показано, что изменением вибрационных параметров можно менять структуру и направление конвективного течения, что согласуется с теоретическими результатами, указывающими на дискретную неустойчивость возникновения виброконвекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Faraday M.* On a peculiar class of acoustical figures // *Philos. Trans. Royal Soc.* 1831. N 121. P. 299–340.
2. *Lord Rayleigh* On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems // *Trans. Royal Soc. London.* 1883. V. 175, N 1. P. 1–21.
3. *Gershuni G.Z., Lubimov D.V.* Termal Vibrational Convection. John Willey & Sons, 1998.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989.
5. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибраций высокой частоты на возникновение конвекции // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1966. № 5. С. 51–55.
6. *Farooq A., Homsy G.M.* Streaming flows due to g-jitter-induced natural convection // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 271. P. 351–378; DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112094001801>
7. *Zyuzgin A.V., Putin G.F., Kharisov A.F.* Ground modeling of thermovibrational convection in real weightlessness // *Fluid Dynamics.* 2007. V. 42, N 3. P. 354–361.
8. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Иванцов А.О. Влияние вибраций на гидродинамику расплава при выращивании кристаллов бесконтактным методом Бриджмена // *Вычисл. механика сплошных сред.* 2011. V. 4, N 4. P. 52–62; <https://doi.org/https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4>
9. Аветисов И.Х., Жариков Е.В., Зиновьев А.Ю., Садовский А.П. Новый метод управления тепло-массопереносом в расплаве при выращивании кристаллов по Чохральскому // *Докл. АН.* 2009. Т. 428, № 2. С. 177–179.
10. *Fedyushkin A.I., Bourago N.G., Polezhaev V.I., Zharikov E.V.* The influence of vibration on hydrodynamics and heat-mass transfer during crystal growth // *J. Crystal Growth.* 2005. V. 275. P. e1557–e1563.
11. Федюшкин А.И., Иванов К.А. Гидродинамика и теплообмен при вибрационных воздействиях на расплав в процессах выращивания монокристаллов, М., 2014. (Препринт ИПМех РАН, № 1085).
12. *Fedyushkin A.I., Burago N.G., Puntus A.A.* Convective heat and mass transfer modeling under crystal growth by vertical Bridgman method // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. V. 1479. Article 012029; DOI: [10.1088/1742-6596/1479/1/012029](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012029)
13. Федюшкин А.И. Влияние управляемых вибраций на гидродинамику и теплоперенос при росте кристаллов методом Чохральского // *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Тр. Межд. научн. конф., Воронеж, 17–19 декабря 2018 г., Воронеж, 2018.* С. 955–962.
14. Федюшкин А.И. Влияние вибраций на пограничные слои в задачах свободной и вынужденной конвекции // *Материалы XIII Межд. конф. по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ2020), 6–13 сентября 2020 г., Алушта, 2020.* С. 594–596; http://www.npnj.ru/files/npnj2020_web.pdf
15. Федюшкин А.И. Влияния управляемых вибраций на гидродинамику и теплоперенос при росте кристаллов // *Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. XX Межд. конф. (Ростов-на-Дону, 18–21 июня 2020 г.). Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного фед. ун-та, 2020.* С. 236–240; ISBN 978-5-9275-3486-9

16. *Fedyushkin A.I.* Heat and mass transfer during crystal growing by the Czochralski method with a submerged vibrator // *J. Phys. Conf. Ser.* 2019. V. 1359. Article 012054; DOI: 10.1088/1742-6596/1359/1/012054
17. *Fedyushkin A.I.* The effect of controlled vibrations on Rayleigh—Benard convection // *J. Phys. Conf. Ser.* 2021. V. 2057, N 1. Article 012012; DOI: 10.1088/1742-6596/2057/1/012012.
18. *Fedyushkin A.I.* Numerical simulation of gas-liquid flows and boiling under effect of vibrations and gravity // *J. Phys. Conf. Ser.* 2020. Article 1479; DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012094.
19. *Иванов К.А., Золотарёв А.А., Юрасов А.Н.* Численные методы решения стационарных задач теплопроводности многосеточными методами. М.: изд. ВНИИГеосистем, 2021.
20. *Федюшкин А.И.* Исследование матричного метода решения уравнений конвекции. Комплекс программ «МАРЕНА». М., 1990. (Препринт Ин-та прикл. математики; № 471).
21. *Федоренко Р.П.* Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1961. Т. 1, № 5. С. 922–927.
22. *Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г.* Методы расчёта нестационарных несжимаемых течений в естественных переменных на неразнесённых сетках // *Мат. моделирование.* 1996. Т. 8, № 7. С. 1–29.
23. *Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н. и др.* Методы ускорения газодинамических расчётов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014.
24. *Ермаков М.К.* Использование многосеточного метода в задачах физической механики // *Физ.-хим. кинетика в газовой динамике.* 2014. Т. 15, № 2; <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-2/articles/116/>
25. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.
26. *Davis de V.G., Jones I.P.* Natural convection in square cavity: A comparison exercise // *Internat. J. Numer. Meth. Fluids.* 1983. V. 3. Article 227.
27. *Патанкар С.* Численные моды решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
28. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
29. *Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
30. *Иванов К.А. и др.* Свидетельство № 2021668343 о государственной регистрации программы AliceFlow2D в российском Реестре программ для ЭВМ от 15.11.2021 г.

UDC 519.63

**AN EFFECTIVE MULTIGRID METHOD FOR SOLVING PROBLEMS
OF HIGH FREQUENCY VIBRATIONAL CONVECTION**© 2023 A. I. Fedyushkin^{1a}, K. A. Ivanov^{2b}, A. A. Puntus³¹*Ishlinsky Institute of Problems of Mechanics RAS,
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow 119526, Russia,*²*NPP «Pulsar»,**Okružnoi proezd 27, Moscow 105187, Russia,*³*Moscow Aviation Institute,**Volokolamskoe shosse 4, Moscow 125993, Russia*E-mails: ^afai@ipmnet.ru, ^bkirill7785@mail.ru, ^cartpuntus@yandex.ru

Received 29.08.2022, revised 29.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. The paper describes an implemented algorithm for solving the problem of vibrational convection in a rectangular area filled with an unevenly heated incompressible fluid. The mathematical model is based on the solution of the Simonenko–Zenkovskaya equations obtained by averaging the Navier–Stokes equations under the assumption that the volume of liquid performs high-frequency translational vibrations. To solve the Poisson equations, an algebraic multigrid method is implemented in combination with a highly efficient dynamic programming method (based on the optimal control principle of R. Bellman) and discrete Fourier transform. Mathematical software written in C/C++ has been developed. Examples of solving model problems with different directions of the heating flow of a square region relative to the vibration vector are given.

Keywords: multigrid method, high-frequency vibrational convection. Simonenko–Zenkovskaya equations, Bellman optimality principle, discrete Fourier transform.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.214

REFERENCES

1. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures. *Philos. Trans. Royal Soc.*, 1831, No. 121, pp. 299–340.
2. Lord Rayleigh On the circulation of air observed in Kundt's tubes, and on some allied acoustical problems. *Trans. Royal Soc. London*, 1883, Vol. 175, No. 1, pp. 1–21.
3. Gershuni G.Z., Lubimov D.V. *Thermal Vibrational Convection*. John Willey & Sons, 1998.
4. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M., Nepomnyashchii A.A. *Ustoichivost' konvektivnykh techenii* [Stability of convective currents]. Moscow: Nauka, 1989 (in Russian).
5. Zen'kovskaya S.M., Simoneneko I.B. O vliyaniy vibratsii vysokoi chastoty na vozniknovenie konveksii [About the influence of high frequency vibrations on the occurrence of convection]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1966, No. 5, pp. 51–55 (in Russian).
6. Farooq A., Homsy G.M. Streaming flows due to g-jitter-induced natural convection. *J. Fluid Mech.*, 2006, Vol. 271, pp. 351–378; DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112094001801>
7. Zyuzgin A.V., Putin G.F., Kharisov A.F. Ground modeling of thermovibrational convection in real weightlessness. *Fluid Dynamics*, 2007, Vol. 42, No. 3, pp. 354–361.

8. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Ivantsov A.O. Vliyanie vibratsii na gidrodinamiku rasplava pri vyrashchivaniy kristallov beskontaktnym metodom Bridzhmena [The effect of vibrations on the hydrodynamics of the melt during crystal growth by the contactless Bridgman method]. *Vychisl. Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2011, Vol. 4, No. 4, pp. 52–62 (in Russian); <https://doi.org/https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4>
9. Avetisov I.Kh., Zharikov E.V., Zinov'ev A.Yu., Sadovskii A.P. Novyi metod upravleniya teplomassoperenosom v rasplave pri vyrashchivaniy kristallov po Chokhral'skomu [A new method for controlling heat and mass transfer in a melt during crystal growth according to Chokhralsky]. *Dokl. Akad. Nauk*, 2009, Vol. 428, No. 2, pp. 177–179 (in Russian).
10. Fedyushkin A.I., Bourago N.G., Polezhaev V.I., Zharikov E.V. The influence of vibration on hydrodynamics and heat-mass transfer during crystal growth. *J. Crystal Growth*, 2005, Vol. 275, pp. e1557–e1563.
11. Fedyushkin A.I., Ivanov K.A. Gidrodinamika i teploobmen pri vibratsionnykh vozdeistviyakh na rasplav v protsessakh vyrashchivaniya monokristallov [Hydrodynamics and heat transfer under vibration effects on the melt in the processes of growing single crystals]. Moscow, 2014. (Preprint Institute of Applied Mechanics Russian Akad. Nauk, No. 1085) (in Russian).
12. Fedyushkin A.I., Burago N.G., Puntus A.A. Convective heat and mass transfer modeling under crystal growth by vertical Bridgman method. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, Vol. 1479, article 012029; DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012029
13. Fedyushkin A.I. Vliyanie upravlyaemykh vibratsii na gidrodinamiku i teploperenos pri roste kristallov metodom Chokhral'skogo [The effect of controlled vibrations on hydrodynamics and heat transfer during crystal growth by the Chokhralsky method]. *Proc. Internat. Conf. Actual Probl. Appl. Math., Comput. Sci. Mech.* (Voronezh, December 17–19, 2018). Voronezh, 2018, pp. 955–962 (in Russian).
14. Fedyushkin A.I. Vliyanie vibratsii na pogramichnye sloi v zadachakh svobodnoi i vynuuzhdennoi konveksii [Influence of vibrations on boundary layers in problems of free and forced convection]. *Proc. XIII Internat. Conf. Appl. Math. Mech. Aerospace Industry (AMMAI'2020)* (Alushta, September 6–13, 2020). Moscow, 2020, pp. 594–596 (in Russian); http://www.npnj.ru/files/npnj2020_web.pdf
15. Fedyushkin A.I. Effects of controlled vibrations on hydrodynamics and heat transfer during crystal growth [The effects of controlled vibrations on hydrodynamics and heat transfer during crystal growth]. *Proc. XX Internat. Conf. Modern Problems of Continuum Mechanics* (Rostov-on-Don, June 18–21, 2020). Rostov-on-Don; Taganrog: Southern Federal Univ. Press, 2020, Vol. 2, pp. 236–240; ISBN 978-5-9275-3488-3 (in Russian).
16. Fedyushkin A.I. Heat and mass transfer during crystal growing by the Czochralski method with a submerged vibrator. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, Vol. 1359, article 012054; DOI: 10.1088/1742-6596/1359/1/012054
17. Fedyushkin A.I. The effect of controlled vibrations on Rayleigh–Benard convection. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, Vol. 2057, No. 1, article 012012; DOI: 10.1088/1742-6596/2057/1/012012.
18. Fedyushkin A.I. Numerical simulation of gas-liquid flows and boiling under effect of vibrations and gravity. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, article 1479; DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012094.
19. Ivanov K.A., Zolotarev A.A., Yurasov A.N. Chislennyye metody resheniya statsionarnykh zadach teploprovodnosti mnogosetochnymi metodami [Numerical methods for solving stationary heat conduction problems by multigrid methods]. Moscow: VNII geosistem Press, 2021 (in Russian).
20. Fedyushkin A.I. Issledovanie matrichnogo metoda resheniya uravnenii konveksii. Kompleks programm «MARENA» [Investigation of the matrix method for solving convection equations. A set of programs «MADDER»]. Moscow, 1990. (Preprint In-ta Prikl. Mat., No. 471) (in Russian).
21. Fedorenko R.P. Relaksatsionnyi metod resheniya raznostnykh ellipticheskikh uravnenii [Relaxation method for solving difference elliptic equations]. *Zhurn. Vychisl. Matematiki i Mat. Fiziki*, 1961, Vol. 1, No. 5, pp. 922–927 (in Russian).
22. Vabishchevich P.N., Pavlov A.N., Churbanov A.G. Metody rascheta nestatsionarnykh neszhimaemykh techenii v estestvennykh peremennykh na neraznesennykh setkakh [Methods for calculating unsteady incompressible flows in natural variables on non-weighted grids]. *Mat. Model.*, 1996, Vol. 8, No. 7, pp. 1–29 (in Russian).

23. Volkov K.N., Deryugin Yu.N., Emel'yanov V.N. i dr. Metody uskoreniya gazodinamicheskikh raschetov na nestrukturirovannykh setkakh [Methods for accelerating gas-dynamic calculations on unstructured grids.]. Moscow: Fizmatlit, 2014 (in Russian).
24. Ermakov M.K. Ispol'zovanie mnogosetochnogo metoda v zadachakh fizicheskoi mekhaniki [Using the multigrid method in problems of physical mechanics]. *Phys.-Chem. Kinetics in Gas Dynamics.*, 2014, Vol. 15, No. 2 (in Russian); <http://chemphys.edu.ru/issues/2014-15-2/articles/116/>
25. Bellman R., Endzhel E. Dinamicheskoe programmirovaniye i uravneniya v chastnykh proizvodnykh [Dynamic programming and partial differential equations]. Moscow: Mir, 1974 (in Russian).
26. Davis de V.G., Jones I.P. Natural convection in square cavity: A comparison exercise. *Internat. J. Numer. Meth. Fluids*, 1983, Vol. 3, article 227.
27. Patankar S. Chislennyye mody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti [Numerical modes for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. Moscow: Energoatomizdat, 1984 (in Russian).
28. Rouch P. Vychislitel'naya gidrodinamika [Computational fluid dynamics]. Moscow: Mir, 1980 (in Russian).
29. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. Chislennoe modelirovaniye protsessov teplo- i massoobmena [Numerical modeling of heat and mass transfer processes]. Moscow: Nauka, 1984 (in Russian).
30. Ivanov K.A., etc. Svidetel'stvo No. 2021668343 o gosudarstvennoi registratsii programmy AliceFlow2D v rossiiskom Reestre programm dlya EVM ot 15.11.2021 [Certificate No. 2021668343 on state registration of the AliceFlow2D program in the Russian Register of Comput. Programs, 15.11.2021] (in Russian).

УДК 550.344.094.4

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
РАСЧЁТА ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ
И ВОССТАНОВЛЕНИЯ СКОРОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕД
БАЙКАЛЬСКОЙ РИФТОВОЙ ЗОНЫ**

© 2023 М. С. Хайретдинов^{1,2a}, А. А. Михайлов^{1b}, В. В. Ковалевский^{1c},
Д. Л. Пинигина^{2d}, А. А. Якименко^{1,2e}

¹*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090, Россия,*
²*Новосибирский государственный технический университет,
просп. К. Маркса 20, Новосибирск 630073, Россия*

E-mails: ^amarat@opg.sccc.ru, ^balex_mikh@omzg.sccc.ru, ^ckovalevsky@sscc.ru,
^ddaria.pi789@gmail.com, ^eyakimenko@sscc.ru

Поступила в редакцию 24.10.2022 г.; после доработки 22.12.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

На основе численного метода решения прямой и обратной задач разработана методика слежения за динамикой распространения сейсмо-гидроакустического волнового поля, построения синтетических сейсмограмм и оценивания скоростных характеристик сложнопостроенной геофизической структуры Байкальской рифтовой зоны на участке пос. Бабушкин (юго-восточная часть Байкала) — пос. Бугульдейка (северо-западная часть Байкала). Выбор профиля для моделирования обусловлен выполненными здесь экспериментальными работами силами Института физики Земли РАН, Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Института геологии СО РАН в 2021 г. Алгоритм решения прямой задачи восстановления волнового поля основан на применении интегрального преобразования Лагерра по времени и конечно-разностной аппроксимации по пространственным координатам. Численная модель среды, используемая при расчётах распространения сейсмических волн, задавалась с учётом априорных данных о скоростном разрезе Байкальской рифтовой зоны, полученном рядом исследователей в районе по данным глубинного сейсмического зондирования Земли. Результаты прямого численного моделирования предполагают прогнозирование сложной структуры волнового поля и призваны для облегчения его интерпретации. В качестве подхода к решению обратной задачи восстановления скоростных характеристик неоднородной среды предложен и апробирован вычислительный сеточный алгоритм, основанный на вычислении средневзвешенных скоростей в участках сетки, накладываемой на поверхность земли. За счёт выбора шага сетки, метода аппроксимации дискретного годографа волн кубическими сплайнами, учёта кривизны годографа головных волн в областях с ярко выраженной неоднородностью строения среды удаётся определить скоростную характеристику с повышенной точностью. Показана согласованность восстановленной теоретической скоростной модели среды с экспериментально полученной моделью по методу глубинного сейсмического зондирования.

Ключевые слова: Байкальская рифтовая зона, численная модель, численное моделирование, волновое поле, синтетические сейсмограммы, сеточный алгоритм, скоростной разрез, сопоставительный анализ.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.215

ВВЕДЕНИЕ

В проблеме мониторинга сейсмоактивной Байкальской рифтовой зоны (БРЗ) всё большую роль играют экологически чистые методы активного мониторинга сложнопостроенных структур как земной толщи БРЗ [1], так и водной толщи оз. Байкал [2]. Здесь перспективным высокоразрешающим и экологически чистым является метод вибрационного просвечивания Земли, позволяющий получать с высокой повторяемостью отклики среды в ответ на акты зондирования мощным вибрационным источником ЦВ-100 с амплитудой возмущающей силы 100 Тс [3]. Источник установлен на берегу Байкала в районе пос. Бабушкин.

Экспериментально получаемая пространственно-временная картина сейсмического волнового поля в земле и гидроакустического в воде как результат вибрационного зондирования имеет сложный характер для интерпретации. В этой ситуации для прогнозирования и улучшения интерпретации картины волновых полей большую роль играет численное моделирование процессов распространения волновых полей, рассчитываемых с учётом априорных данных по глубинным скоростным разрезам БРЗ.

На сегодня такие разрезы получены рядом отечественных и зарубежных исследователей с применением широкого спектра исследований — глубинного сейсмического зондирования Земли (ГСЗ), метода преломлённых волн (МПВ, КМПВ) и др. Обзор многолетних исследований в этой области представлен в работе [4]. К числу ранних работ по этому направлению относится работа [5] по глубинному сейсмическому исследованию БРЗ и построению её одномерной скоростной модели по P -волнам. С применением метода глубинного сейсмического зондирования были уточнены обобщённые сейсмические границы и построены изолинии скорости в работе [6]. Структурные осадочные отложения под дном озера Байкал изучались последовательно во времени разными исследователями. В работе [7] из 4-х структурных этажей в строении земной коры в районе БРЗ выделяются осадочные отложения под дном оз. Байкал с толщиной, изменяющейся в диапазоне от 1.5 до 6.0 км и средней скоростью P -волн порядка 2.5 км/с. Исследования методом преломлённых волн (КМПВ) по изучению детального структурно-скоростного разреза осадочных отложений под дном оз. Байкал в районе его южной части были проведены в [8]. Как продолжение исследований в этом направлении являются работы датских учёных [9], где также рассмотрены свойства осадочных отложений под оз. Байкал, включая скоростной разрез среды по бортам озера на базе протяжённостью 350 км. Изучению глубинных структур БРЗ и, в частности, под дном оз. Байкал посвящены работы [10, 11], а также в разной степени названные выше работы [5–9].

Результаты приведённых геолого-геофизических исследований свидетельствуют о наличии под оз. Байкал мощного слоя осадочных отложений толщиной до 10 км, характеризующихся скоростями сейсмических волн от 1.48 до 5.25 км/с.

С учётом приведённых результатов в настоящей статье представлены численные методы моделирования волновых полей и восстановления скоростных характеристик неоднородных упругих сред Байкальской рифтовой зоны, основанные на решении прямых и обратных задач сейсмологии. В качестве основы глубинного скоростного разреза при построении численной модели разреза в расчётах используется модель, разработанная в [10], как одна из последних.

1. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ РАСЧЁТА ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Численная модель среды, используемая при расчётах распространения сейсмических волн, задавалась с учётом априорных данных о скоростном разрезе БРЗ, полученном по данным глубинного сейсмического зондирования [10]. Соответствующее графическое отображение численной модели среды приводится на рис. 1.

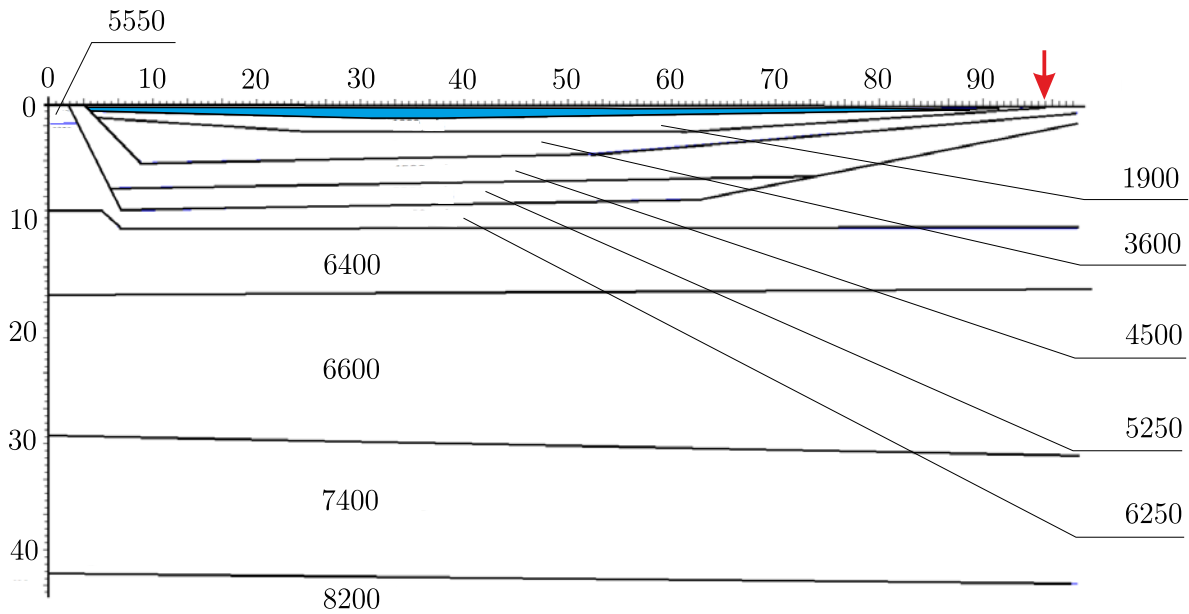


Рис. 1. Численная модель скоростного разреза БРЗ.

Подписаны значения скоростей продольных волн V_p (м/с) в граничных слоях; водяной слой выделен голубым цветом

Значения поперечных волн задавались по формуле $V_s = V_p/\sqrt{3}$. Плотность рассчитывалась по известной формуле Гарднера $\rho = 1,74 V_p^{0,25}$. Физические характеристики слоя воды: скорость продольной волны $V_p = 1480$ м/с, плотность $\rho = 1,0$ г/см³. При расчётах задавалась ограниченная по пространству область размерностью $(x, z) = (90, 45)$ км. Для подавления отражения волн на границах, ограничивающих заданную область, был использован способ ограничения расчётной области идеально поглощающими PML-слоями (Perfectly Matched Layers). Этот подход предложен для численных расчётов упругих волновых полей в работах [11, 12].

Алгоритм решения задачи основан на применении интегрального преобразования Лагерра по времени и конечно-разностной аппроксимации по пространственным координатам. Алгоритм решения задачи по времени с помощью интегральных преобразований Лагерра можно рассматривать как аналог интегрального преобразования Фурье [13, 14]. В отличие от последнего применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. Кроме того, введение параметра сдвига по временной переменной позволяет существенно уменьшить обусловленность получаемой системы уравнений. Эти основные преимущества алгоритма после конечно-разностной аппроксимации уравнений по вертикальной пространственной переменной дают возможность свести решение исходной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений для некоторого набора правых частей с хорошо обусловленной матрицей, не зависящей от параметра разделения. Это позволяет воспользоваться итерационными методами типа сопряжённых градиентов, сходящихся за несколько итераций из-за хорошей обусловленности редуцированной задачи [15].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Связь между компонентами напряжений и скоростями смещений в декартовой системе координат (x, z) для задачи распространения сейсмоакустических колебаний в упругой

изотропной среде записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + F_x(x, z) f(t), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + F_z(x, z) f(t), \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{1}$$

В этих уравнениях (u_x, u_z) — компоненты скорости смещения, $(\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz})$ — компоненты тензора напряжений, $\rho(x, z)$ — плотность среды, $\lambda(x, z)$ и $\mu(x, z)$ — коэффициенты Ламе; F_x, F_z — составляющие силы $\mathbf{F}(x, z) = F_x \mathbf{e}_x + F_z \mathbf{e}_z$, описывающей распределение локализованного в пространстве источника. В зависимости от типа моделируемого источника, F_x, F_z будут иметь следующие значения:

1) для источника вертикальной силы $F_x = 0, F_z = \delta(x - x_0) \delta(z - z_0)$;

2) для центра давления $F_x = \frac{\partial(x - x_0)}{\partial x} \delta(z - z_0), F_z = \delta(x - x_0) \frac{\partial(z - z_0)}{\partial z}$;

$f(t)$ — моделируемый временной сигнал в источнике с координатами (x_0, z_0) . Задача решается при нулевых начальных данных:

$$u_x|_{t=0} = u_z|_{t=0} = \sigma_{xx}|_{t=0} = \sigma_{zz}|_{t=0} = \sigma_{xz}|_{t=0} = 0.\tag{2}$$

Решение рассматривается на полупространстве $z \geq 0$ с граничными условиями на свободной поверхности:

$$\sigma_{xz}(x, z, t)|_{z=0} = \sigma_{zz}(x, z, t)|_{z=0} = 0.\tag{3}$$

Полагаем параметры среды $\rho(x, z), \lambda(x, z), \mu(x, z)$ кусочно-непрерывными функциями переменных (x, z) .

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

На первом этапе к задаче (1)–(3) применим интегральное преобразование Лагерра по времени. Для некоторой функции $F(t)$ интегральное преобразование Лагерра определяется как

$$F^m = \int_0^\infty F(t) (ht)^{-\alpha/2} l_m^\alpha(ht) d(ht)\tag{4}$$

с формулами обращения

$$F(t) = (ht)^{\alpha/2} \sum_{p=0}^\infty \frac{m!}{(m+\alpha)!} F^p l_m^\alpha(ht),\tag{5}$$

где $l_m^\alpha(ht)$ — ортонормированные функции Лагерра:

$$\int_0^\infty l_m^\alpha(ht) l_n^\alpha(ht) d(ht) = \delta_{mn} \frac{(m+\alpha)!}{m!}.$$

Функции Лагерра $l_m^\alpha(ht)$ выражаются через классические стандартизованные многочлены Лагерра $L_m^\alpha(ht)$. Выбираем параметр α целым и положительным, тогда

$$l_m^\alpha(ht) = (ht)^{\alpha/2} e^{-ht/2} L_m^\alpha(ht).$$

В результате данного преобразования исходная задача (1)–(3) сводится к двумерной пространственной дифференциальной задаче в спектральной области:

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} u_x^m &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^m}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^m}{\partial z} \right) - h \sum_{j=0}^{m-1} (u_x^j)^j, \\ \frac{h}{2} u_z^m &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^m}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}^m}{\partial z} \right) - h \sum_{j=0}^{m-1} (u_z^j)^j, \\ \frac{h}{2} \sigma_{zz}^m &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z^m}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x^m}{\partial x} - h \sum_{j=0}^{j-1} \sigma_{zz}^j, \\ \frac{h}{2} \sigma_{xx}^m &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x^m}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z^m}{\partial z} - h \sum_{j=0}^{j-1} \sigma_{xx}^j, \\ \frac{h}{2} \sigma_{xz}^m &= \mu \left(\frac{\partial u_x^m}{\partial z} + \frac{\partial u_z^m}{\partial x} \right) - h \sum_{j=0}^{j-1} \sigma_{xz}^j, \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_x^m|_{t=0} = u_z^m|_{t=0} = \sigma_{xx}^m|_{t=0} = \sigma_{zz}^m|_{t=0} = \sigma_{xz}^m|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Для решения приведённой задачи воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных по пространственным координатам на сдвинутых сетках с четвёртым порядком точности [16]. Для этого в расчётной области введём в направлении координаты z сетки ωz_1 и $\omega z_{1/2}$ с шагом дискретизации Δz , сдвинутые относительно друг друга на $\Delta z/2$:

$$\omega z_1 = (x, j\Delta z, t), \quad \omega z_{1/2} = (x, j\Delta z + \Delta z/2, t), \quad j = 0, \dots, M.$$

Аналогично, введём в направлении координаты x сетки ωx_1 и $\omega x_{1/2}$ с шагом дискретизации Δx , сдвинутые относительно друг друга на $\Delta x/2$:

$$\omega x_1 = (i\Delta x, z, t), \quad \omega x_{1/2} = (i\Delta x + \Delta x/2, z, t), \quad i = 0, \dots, N.$$

На данных сетках введём операторы дифференцирования D_x и D_z , аппроксимирующие производные $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ с четвёртым порядком точности по координатам $z = x_1$ и $x = x_2$:

$$\begin{aligned} D_x u(x, z) &= \frac{9}{8\Delta x} [u(x + \Delta x/2, z) - u(x - \Delta x/2, z)] \\ &\quad - \frac{1}{24\Delta x} [u(x + 3\Delta x/2, z) - u(x - 3\Delta x/2, z)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_z u(x, z) &= \frac{9}{8\Delta x} [u(x, z + \Delta z/2) - u(x, z - \Delta z/2)] \\ &\quad - \frac{1}{24\Delta x} [u(x, z + 3\Delta z/2) - u(x, z - 3\Delta z/2)]. \end{aligned}$$

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$\begin{aligned} u_x^m(x, z) \in \omega x_1 \times \omega z_1, \quad u_z^m(x, z) \in \omega x_{1/2} \times \omega z_{1/2}, \\ \sigma_{xx}^m(x, z), \sigma_{zz}^m(x, z) \in \omega x_{1/2} \times \omega z_1, \quad \sigma_{xz}^m(x, z) \in \omega x_1 \times \omega z_{1/2}. \end{aligned}$$

В результате конечно-разностной аппроксимации задачи (6), (7) получим систему линейных алгебраических уравнений. Представим искомый вектор решения \mathbf{W} в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(m) &= (\mathbf{V}_0(m), \mathbf{V}_1(m), \dots, \mathbf{V}_{M+N}(m))^T, \\ \mathbf{V}_{i+j} &= (u_x^{i,j}, u_z^{i+1/2, j+1/2}, \sigma_{xx}^{i+1/2, j}, \sigma_{zz}^{i+1/2, j}, \sigma_{xz}^{i, j+1/2})^T. \end{aligned}$$

Тогда данная система линейных алгебраических уравнений в векторной форме может быть записана как

$$\left(A_\Delta + \frac{h}{2} E \right) \mathbf{W}(m) = \mathbf{F}_\Delta(m-1).$$

В результате матрица системы сведённой задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать быстрые методы решения систем линейных алгебраических уравнений на основе итерационных методов типа сопряжённых градиентов, сходящиеся к решению с требуемой точностью всего за несколько итераций. На этом этапе проведения вычислений была реализована распараллеленная версия метода сопряжённых градиентов. На уровне входных данных при задании модели среды это равносильно декомпозиции исходной области на множество подобластей, равных количеству процессоров. Это даёт возможность распределения памяти как при задании входных параметров модели, так и при дальнейшей численной реализации алгоритма в подобластях.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для моделирования по Байкальскому профилю использовался двухмерный случай постановки задачи в плоскости (x, z) . Моделировалось волновое поле от локального источника типа вертикальная сила. В этом случае компоненты распределения источника в пространстве для системы уравнений (1) задавались как $F_x = 0$, $F_z = \delta(x - x_0)(z - z_0)$. Временной сигнал в источнике задавался в волновом поле в виде импульса Пузырёва:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{2\pi f_0(t-t_0)^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t-t_0)), \quad (8)$$

где $\gamma = 4$, $f_0 = 8$ Гц, $t_0 = 0, 125$ с.

При этом моделируется волновое поле от точечного источника типа вертикальная сила, расположенного на поверхности с координатой $x_0 = 88$ км по оси Ox (местоположение показано стрелкой на рис. 1). По отношению к заданной модели среды (рис. 1) изложенная методика расчёта позволяет отслеживать развитие во времени картины распространения волнового поля от источника по горизонтали и глубине. В качестве примера на рис. 2 приведён мгновенный снимок волнового поля U_z -компоненты для момента времени $T = 15$ с. Рисунок наглядно показывает распространение волновых фронтов колебаний в выбранных координатах.

По результатам расчётов получены синтетические сеймотрассы, характеризующие расположение волновых откликов в координатах время-расстояние, где расстояние отсчитывается от источника по горизонтали. В качестве примера на рис. 3, 4 представлены синтетические сеймотрассы для P - и U_z -компонент волнового поля в диапазоне дальностей 76,5–86 км.

Приёмники для записи сеймотрасс P -компоненты располагались на глубине $z = 20$ метров, а для U_z -компоненты — на поверхности. Значения для P -компоненты вычислялись по

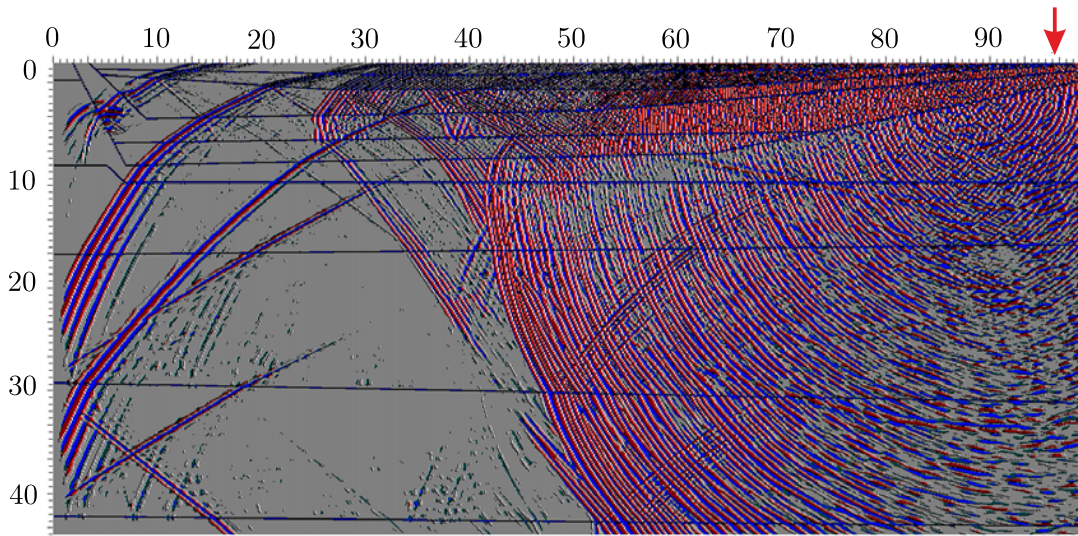


Рис. 2. Мгновенный снимок волнового поля U_2 -компоненты для $T = 15$ с

значениям нормальных компонент тензора напряжения по формуле $P = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{zz}^2}$. Координата первого приёмника $x_1 = 2$ км. Интервал между приёмниками по оси Ox составляет $\Delta x = 500$ метров. Первые три приёмника расположены на суше, а остальные — в воде. Приведённые параметры расстановки для численного эксперимента соответствуют тем, что были реализованы в реальном эксперименте в юго-восточной части Байкала на трассе пос. Бабушкин—пос. Бугульдейка.

Приведённые рисунки отражают сложную многоволновую структуру сейсмического поля. На основе полученных волновых откликов оцениваются времена вступления волн, которые в дальнейшем используются для расчёта скоростных характеристик среды по глубине. Алгоритм расчёта рассматривается ниже.

5. АЛГОРИТМ И РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНИВАНИЯ СКОРОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОПОСТРОЕННОЙ СРЕДЫ

Задача восстановления скоростной характеристики среды по сути своей является обратной задачей, заключающейся в построении скоростного разреза на основе измеренных времён вступлений волн, образующих скоростной годограф в виде некоторой интегральной функции.

Решение задачи восстановления связано с построением теоретического годографа с помощью решения нелинейной системы условных уравнений вида

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\eta}(X, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (9)$$

где $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ — вектор времён вступлений сейсмических волн, $\boldsymbol{\eta}(X, \boldsymbol{\theta})$ — N -мерный вектор вычисляемых времён пробега (теоретический годограф) или функция регрессии, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$ — вектор ошибок, $\boldsymbol{\theta} = [(x^*, y^*), \mathbf{v}]^T$, где (x^*, y^*) — координаты точки излучения, \mathbf{v} — вектор локальных скоростей сейсмических волн; $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ — матрица координат датчиков, N — число датчиков. При известных (x^*, y^*) в качестве оцениваемых параметров выступают локальные скорости сейсмических волн \mathbf{v} .

Такая задача является типичной в геофизике, и существует множество подходов к её решению, основанных на минимизации невязки между экспериментальным и теоретическим годографами методом наименьших квадратов [17, 18]:

$$\boldsymbol{\theta} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in \Omega} Q(\boldsymbol{\theta}), \quad Q(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^{-2} (t_i - \eta(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}))^2. \quad (10)$$

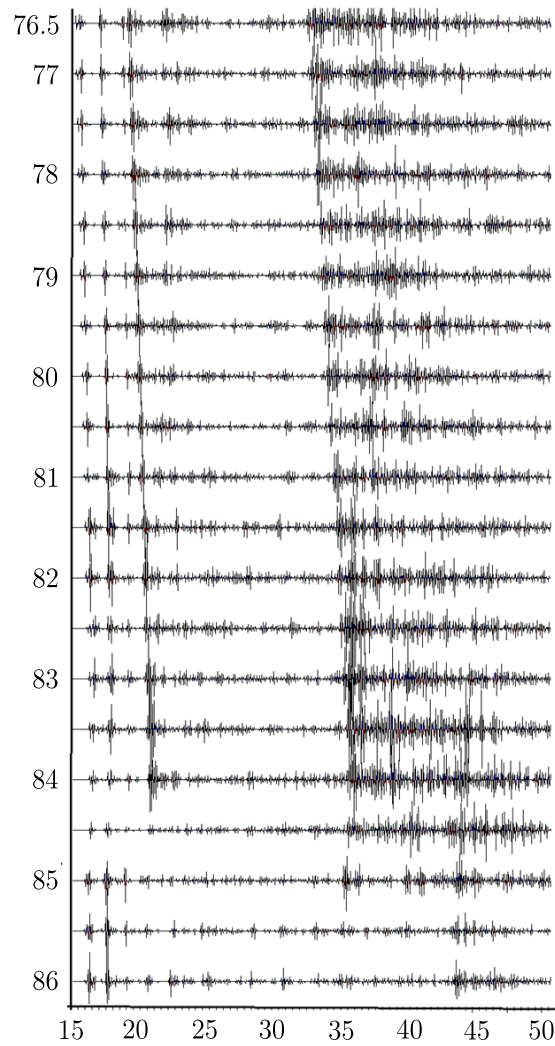


Рис. 3. Сейсмограммы: P -компонента

Из-за большой размерности параметров в виде \mathbf{t} и \mathbf{v} применение строгих методов решения обратной задачи часто осложнено. В этом случае можно прибегнуть к использованию эвристического алгоритма при сохранении допустимой точности решения. В частности, такой подход возникает в задачах имитационного моделирования, для которых нужно проводить множество испытаний с целью установления связи между выбираемыми параметрами \mathbf{v} и получаемым результатом в (9). Ниже рассматривается подход к восстановлению скоростей с применением сеточного метода с адаптивным выбором шага сетки. При этом подразумевается уточнение расчётов скоростей в областях с наиболее выраженной гетерогенностью.

Идея подхода состоит в том, что исследуемая область разбивается на участки [19], в которых вычисляются локальные скорости:

$$v_k = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M V_{ij} \frac{L_{ijk}}{L_{ij}} \bigg/ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{L_{ijk}}{L_{ij}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad (11)$$

где V_{ij} — средняя скорость сейсмической волны от источника i до датчика j ; N — число источников; M — число регистрирующих датчиков на линейном профиле; L_{ij} — расстояние, пройденное сейсмической волной от источника i до датчика j ; L_{ijk} — расстояние, пройденное

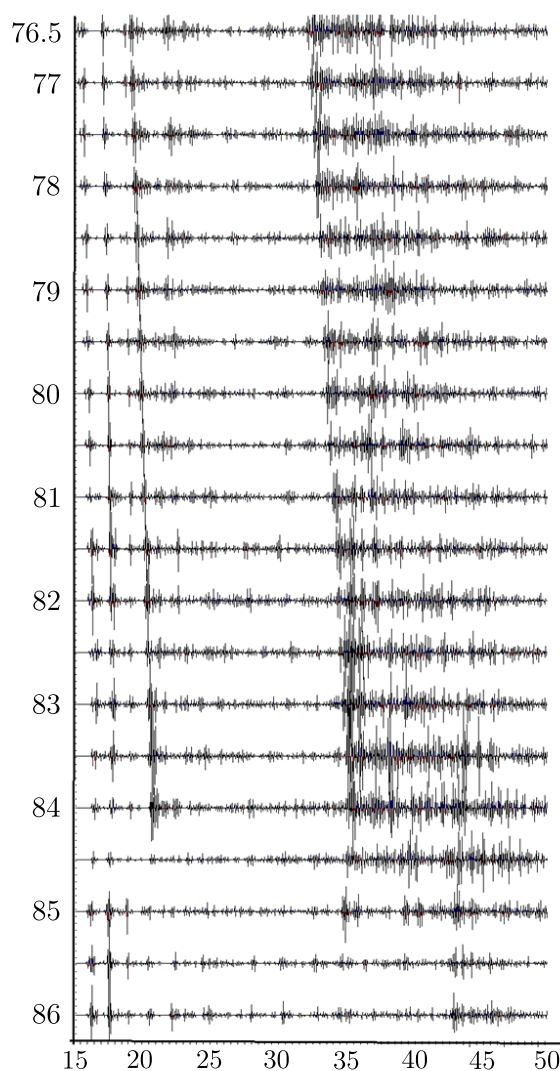


Рис. 4. Сейсмограммы: U_z -компонента

сейсмической волной от источника i до датчика j в k -м участке. Таким образом, на всю исследуемую область накладывается сетка, узлами которой являются k -е участки. Минимальный шаг сетки ограничивается верхней граничной частотой колебаний источника. Рис. 5 поясняет методику определения средневзвешенной скорости сейсмической волны.

На рис. 5(a) представлена схема вибрационного зондирования изучаемой среды, в данном случае области грязевого вулкана Карabetова гора (Таманская грязевулканическая провинция). На схеме пятью звёздочками помечены места последовательной установки источника (сейсмического вибратора), кружками — места размещения 37 датчиков на линейном профиле с шагом 50 м; область самого вулкана помечена кругом; показана сетка, наложенная на дневную поверхность земли для определения средневзвешенной скорости сейсмической волны на выбранном участке в соответствии с (11). На рис. 5(b) обозначены в цвете и количественно представлены результаты определения средневзвешенной скорости на участках среды соответствующей цветности.

Очевидно, что рассматриваемый метод даёт удовлетворительное приближение по точности к скоростным оценкам при условиях прямолинейности пути волны в направлении источник-приёмник и разумного выбора шага сетки. Первое справедливо для проходящих волн. Выбор последнего определяется кривизной нелинейного годографа, что требует выбора

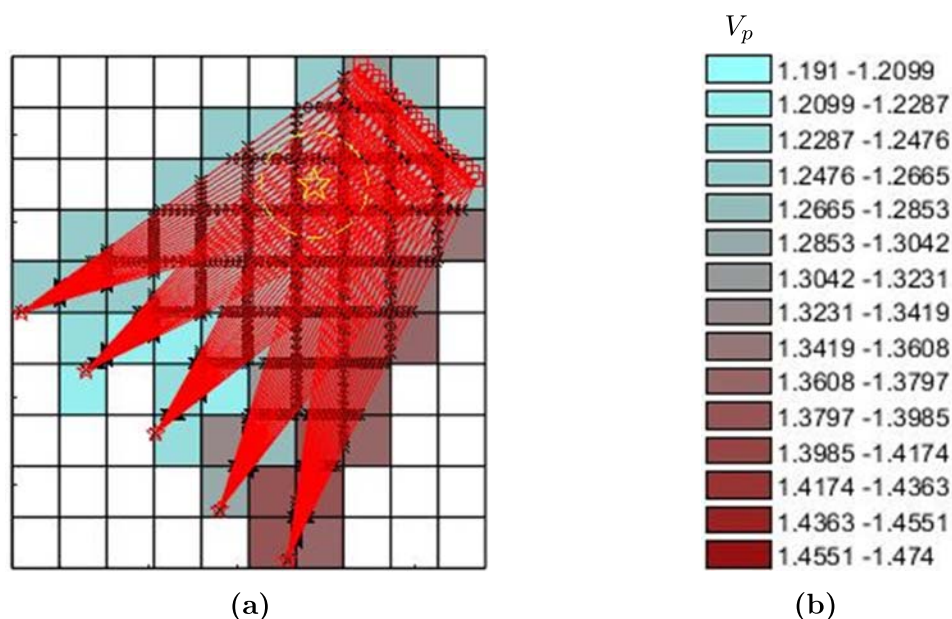


Рис. 5. Схема зондирования области грязевого вулкана и оценки скоростей продольных волн в среде; звёздочками помечены места установки источника, кружками — места размещения датчиков на линейном профиле, область самого вулкана помечена кругом; (a) сетка, наложенная на дневную поверхность земли для определения средневзвешенной скорости сейсмической волны на выбранном участке; (b) результаты представления средневзвешенной скорости

адаптивного шага сетки. Поскольку нелинейный годограф представляется набором N дискретных значений времени, то возникает задача интерполяции его непрерывной функцией времени. В качестве интерполирующей функции используются кубические сплайны. Как известно, на каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ функция $S_i(x)$ является кубическим многочленом вида

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (12)$$

при условии непрерывности со своими производными вплоть до второго порядка. Использование такого интерполанта определяется тем, что гарантированно выполняется условие равенства значений интерполирующей функции в N узлах с заданными дискретными значениями функции годографа F_i : $S_3(x_i) = F_i$, $i = 1, \dots, N$. Для поиска неизвестных коэффициентов a_i , b_i , c_i , d_i используются следующие условия:

1. Интерполяции функции $S_i(x_i) = F_i$.
2. Непрерывности функции $S_i(x_i) = S_{i-1}(x_i)$.
3. Непрерывности первой производной функции $S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i)$.
4. Непрерывности второй производной функции $S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i)$. На концах годографа принимается $S''_1(x_0) = 0$, $S''_N(x_N) = 0$.

Таким образом, возникает необходимость решения $4N$ алгебраических уравнений для восстановления непрерывной функции годографа по набору дискретных значений времён вступлений головных волн на сейсмограммах, получаемых от каждого датчика (рис. 5). В каждом конкретном случае решение будет соотноситься с решением прямой задачи для выбранной численной скоростной модели среды либо по набору экспериментально измеренных времён вступлений волн. Точность восстановления оценивается критерием (10). Пример восстановления скоростей волн приводится ниже.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ДАННЫХ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОЦЕНИВАНИЮ СКОРОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОПОСТРОЕННОЙ СРЕДЫ В БАЙКАЛЬСКОЙ РИФТОВОЙ ЗОНЕ

По отношению к синтетическим сейсмограммам для P -компоненты (рис. 3), соотнесённым к численной модели (рис. 1) в соответствии с алгоритмами (11), (12), восстановлены скоростные характеристики среды в диапазоне дальностей 76–90 км. Годограф в этом диапазоне по своему характеру представляется тремя графиками, описываемыми уравнениями

$$f = \begin{cases} c_1(x - x_1) + d_1, & x \in [76,5 \dots 83] \text{ км}, \\ a_2(x - x_1)^3 + b_2(x - x_1)^2 + c_2(x - x_1) + d_2, & x \in [83 \dots 85] \text{ км}, \\ a_3(x - x_1)^3 + b_3(x - x_1)^2 + c_3(x - x_1) + d_3, & x \in [85 \dots 86] \text{ км}. \end{cases} \quad (13)$$

Шаг интерполяции составляет 0,1 км в диапазонах расстояний, указанных в квадратных скобках справа от уравнений. В качестве примера результатов расчётов в таблице приводятся значения коэффициентов для 2-го уравнения кубического сплайна, охватывающего участок 83–85 км.

	$x - x_1$		a_2	b_2	c_2	d_2
1	83	83,1	0,166667	-0,5000000000	0,098333	16,53
2	83,1	83,2	0,166667	-0,4500000000	0,003333	16,535
3	83,2	83,3	0,166667	-0,4000000000	-0,08167	16,531
4	83,3	83,4	0,166667	-0,3500000000	-0,15667	16,519
5	83,4	83,5	0,166667	-0,3000000000	-0,22167	16,5
6	83,5	83,6	0,166667	-0,2500000000	-0,27667	16,475
7	83,6	83,7	0,166667	-0,2000000000	-0,32167	16,445
8	83,7	83,8	0,166667	-0,1500000000	-0,35667	16,411
9	83,8	83,9	0,166667	-0,1000000000	-0,38167	16,374
10	83,9	84	0,166667	-0,0500000000003	-0,39667	16,335
11	84	84,1	-0,03333	0,0000000000	-0,40167	16,295
12	84,1	84,2	-0,03333	-0,0100000000	-0,40267	16,2548
13	84,2	84,3	-0,03333	-0,0200000000	-0,40567	16,2144
14	84,3	84,4	-0,03333	-0,0300000000	-0,41067	16,1736
15	84,4	84,5	-0,03333	-0,0400000000	-0,41767	16,1322
16	84,5	84,6	-0,03333	-0,0500000000	-0,42667	16,09
17	84,6	84,7	-0,03333	-0,0600000000	-0,43767	16,0468
18	84,7	84,8	-0,03333	-0,0700000000	-0,45067	16,0024
19	84,8	84,9	-0,03333	-0,0800000000	-0,46567	15,9566
20	84,9	85	-0,03333	-0,0900000000	-0,48267	15,9092

На рис. 6(а) представлены гистограммы средневзвешенных скоростей V_p (11) в локализованных диапазонах дальностей источник-приёмник, указанных на оси абсцисс. Как следует из графиков, в диапазоне дальностей зондирования 76–90 км скорости лежат в пределах 4,97–5,38 км/с. Полученные оценки численного моделирования согласуются с обобщёнными данными по скоростям (рис. 6(б)), полученными ранее в натуральных экспериментах по глубинному сейсмическому зондированию БРЗ [4].

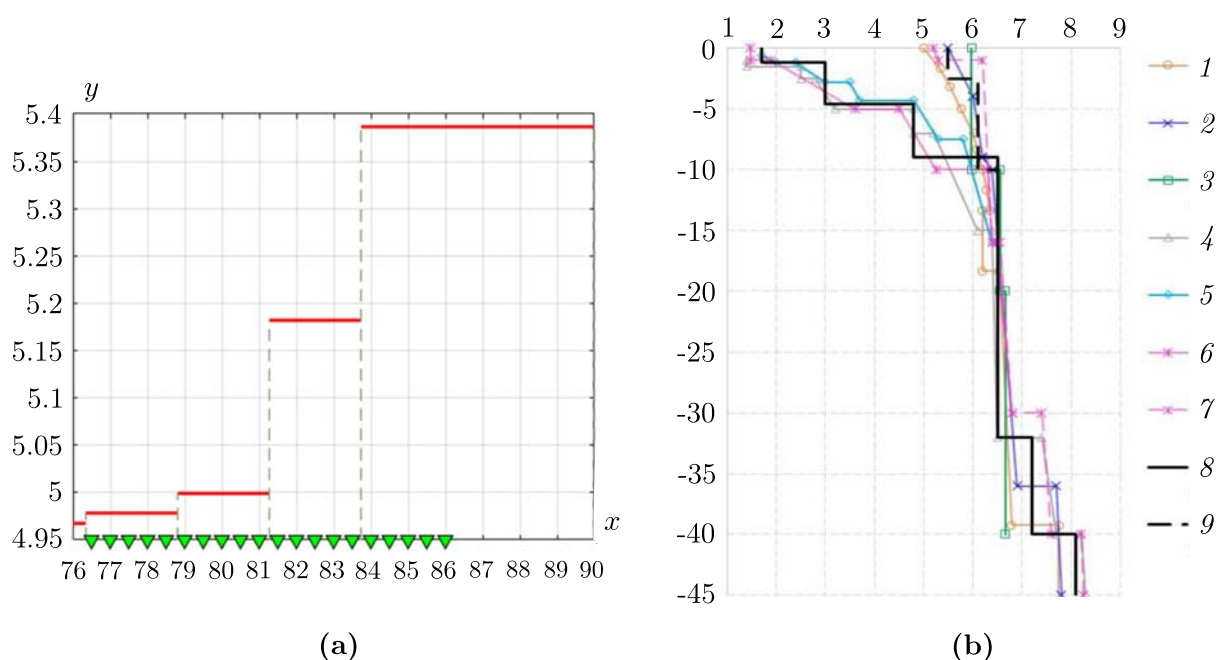


Рис. 6. Гистограммы скоростей волн:

- (a) гистограмма восстановленных скоростей волн V_p как функция дальности:
 x — положение датчиков относительно начала координат (км),
 y — скорости сейсмических волн (км/с);
- (b) обобщённые данные по скоростям, полученным в натуральных экспериментах по глубинному сейсмическому зондированию БРЗ [4]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан подход к численному моделированию распространения сейсмо-гидроакустического волнового поля в сопряжённых средах земля-вода. Подход основывается на применении методов прямого и обратного численного моделирования и реализован при расчёте скоростных характеристик среды в юго-восточной части оз. Байкал. Выбор района обусловлен необходимостью дополнения полученных здесь результатов полевых исследований, выполненных совместными усилиями ИФЗ РАН, ИВМиМГ СО РАН, ГИН СО РАН по программе мониторинга смежных сред земля-вода-лёд-атмосфера. Разработанный подход распадается на этапы.

1. Прямое моделирование, когда по численной модели скоростного разреза среды рассчитываются мгновенные снимки волновых полей и синтетические сейсмограммы. На основе последних получают картины распределения волн по времени и пространству. Из сопоставления результатов численного моделирования и полевых экспериментов вытекает принципиальный вывод о том, что в воде присутствуют гидроакустические волны, порождаемые скоростными (около 5,35 км/с) сейсмическими волнами на границе дно-вода. Это подтверждает априорное теоретическое заключение о наличии сейсмо-гидроакустической трансформации волн, имеющей важное научное и практическое значение.

2. Решение обратной задачи восстановления скоростных характеристик неоднородной среды на основе предложенного и апробированного сеточного метода, основанного на вычислении средневзвешенных скоростей волн в участках сетки, накладываемой на поверхность Земли. За счёт выбора шага сетки, метода аппроксимации дискретного годографа волн кубическими сплайнами, учёта кривизны годографа головных волн в областях с ярко выраженной неоднородностью строения среды удаётся определить скоростную характеристику с повышенной

точностью. На примере численного оценивания скоростного разреза в выбранном районе исследований показано хорошее согласие восстановленной теоретической скоростной модели среды с экспериментально полученной моделью по методу ГСЗ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kovalevsky V.V., Fatyanov A.G., Karavaev D.A., Braginskaya L.P., Grigoryuk A.P., Mordvinova V.V., Tubanov Ts.A., Bazarov A.D. Research and verification of the Earth's crust velocity models by mathematical simulation and active seismology methods // *Geodynamics & Tectonophysics*. 2019. V. 10, N 3. P. 569–583.
2. Макаров М.М., Кучер К.М., Попов О.Е., Асламов И.А., Гранин Н.Г. Экспериментальные исследования распространения тонально-импульсных сигналов в воде озера Байкал // *Журн. приклад. и фундамент. исследований*. 2018. № 7. С. 54–60.
3. Алексеев А.С., Глинский Б.М., Ковалевский В.В., Хайретдинов М.С. и др. Активная сейсмология с мощными вибрационными источниками. Новосибирск: Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2004.
4. Беляшев А.В., Тубанов Ц.А. Подбор скоростных моделей для локализации сейсмических событий в пределах Байкальской рифтовой зоны // *Геофиз. технологии*. 2021. № 1. С. 38–51.
5. Puzyrev N.N., Mandelbaum M.M., Krylov S.V., Mishenkin B.P., Krupskaya G.V., Petrick G.V. Deep seismic investigations in the Baikal rift zone // *Tectonophysics*. 1973. V. 20, N 1. P. 85–95; DOI: 10.1016/0040-1951(73)90098-X
6. Сун Юншен С., Крылов С.В., Баоцзюнь Я. и др. Глубинное сейсмическое зондирование литосферы на международном трансекте Байкал-Северо-Восточный Китай // *Геология и геофизика*. 1996. Т. 37, № 2. С. 3–15.
7. Ten Brink U.S., Taylor M.H. Crustal structure of central Lake Baikal: Insight into intracontinental rifting // *J. Geophys. Res.* 2003. V. 108, N B3. P. 21–33; DOI: 10.1029/2002JB001880
8. Суворов В.Д., Мишенькина З.Р. Структура осадочных отложений и фундамента под южной котловиной озера Байкал по данным КМПВ // *Геология и геофизика*. 2005. Т. 46, № 11. С. 1159–1167.
9. Nielsen C., Thybo H. Lower crustal intrusions beneath the southern Baikal Rift Zone: Evidens from full-waveform modeling of wide-angle seismic data // *Tectonophysics*. 2009. V. 470, N 3-4. P. 298–318; DOI: 10.1016/j.tecto.2009.01.023
10. Мордвинова В.В., Артемьев А.А. Трёхмерная модель юга Байкальской рифтовой зоны и сопредельных территорий по обменным волнам // *Геология и геофизика*. 2010. Т. 51, № 6. С. 887–904.
11. Collino F. Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 131, N 1. P. 164–180.
12. Collino F., Tsogka C. Application of PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media // *Geophysics*. 2001. V. 66, N 1. P. 294–307.
13. Mikhailenko B.G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // *Appl. Math. Lett.* 1999. V. 12, N 4. P. 105–110.
14. Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // *J. Comput. Acoustics*. 2001. V. 9, N 4. P. 1523–1541; DOI: 10.1142/S0218396X01001339
15. Paige C.C., Saunders M.A. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares // *ACM Trans. Math. Software*. 1982. V. 8, N 1. P. 43–71.
16. Levander A.R. Fourth order velocity-stress finite-difference scheme // *Proc. 57-th SEG Annual Meeting*. New Orleans, 1987. P. 234–245.
17. Гольдин С.В. Интерпретация данных сейсмического метода отражённых волн. М.: Недра, 1979.
18. Кутьина О.Г. Построение статистических алгоритмов обработки и интерпретации сейсмических данных. М.: Недра, 1982.
19. Тагиров Х.Ю., Асланов Т.Г., Магомедов Х.Д. Определение средневзвешенной скорости сейсмической волны на участках Земли по пути её распространения // *Изв. Дагестан. гос. пед. ун-та. Естественные и точные науки*. 2017. Т. 11, № 3. С. 108–114.

UDC 550.344.094.4

NUMERICAL ANALYTIC METHODS FOR CALCULATING WAVE FIELDS AND RESTORING THE VELOCITY CHARACTERISTICS OF INHOMOGENEOUS ELASTIC MEDIA IN THE BAIKAL RIFT ZONE**© 2023 M. S. Khairtdinov^{1,2a}, A. A. Mikhailov^{1b}, V. V. Kovalevsky^{1c},
D. L. Pinigina^{2d}, A. A. Yakimenko^{1,2e}**¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Novosibirsk State Technical University,
pr. K. Marksa 20, Novosibirsk 630073, Russia*E-mails: ^amarat@opg.sgcc.ru, ^balex_mikh@omzg.sgcc.ru, ^ckovalevsky@sgcc.ru,
^ddaria.pi789@gmail.com, ^eyakimenko@sgcc.ru

Received 24.10.2022, revised 22.12.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. On the basis of a numerical method for solving direct and inverse problems, a method has been developed for tracking the dynamics of the propagation of a seismo-hydroacoustic wave field, constructing model seismograms, and estimating the velocity characteristics of the complex geophysical structure of the Baikal rift zone in the area of the village Babushkin (southeastern Baikal) - the village. Buguldeika (north-western Baikal). The choice of the profile for modeling is due to the experimental work performed here by the Institute of Physics of the Earth Russian Academy of Sciences, the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, the Institute of Geology of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences in 2021. The algorithm for solving the direct problem of wave field reconstruction is based on the application of the integral Laguerre transformation in time and finite-difference approximation in spatial coordinates. The numerical model of the medium used to calculate the propagation of seismic waves was set taking into account a priori data on the velocity section of the Baikal rift zone, obtained by a number of researchers in the region according to the data of deep seismic sounding of the Earth. The results of direct numerical modeling assume the prediction of the complex structure of the wave field and are intended to facilitate its interpretation. As an approach to solving the inverse problem of restoring the velocity characteristics of an inhomogeneous media, a computational grid algorithm based on the calculation of weighted average velocities in sections of a grid superimposed on the Earth's surface is proposed and tested. By choosing the grid step, the method of approximating the discrete wave travel time curve by cubic splines, and taking into account the curvature of the head wave travel time curve in areas with a pronounced inhomogeneity of the medium structure, it is possible to determine the velocity characteristic with increased accuracy. The consistency of the reconstructed theoretical velocity model of the medium with the experimentally obtained model by the method of deep seismic sounding is shown.

Keywords: Baikal rift zone, numerical model, numerical modeling, wave field, model seismograms, grid algorithm, velocity profile, comparative analysis.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.215

REFERENCES

1. Kovalevsky V.V., Fatyanov A.G., Karavaev D.A., Braginskaya L.P., Grigoryuk A.P., Mordvinova V.V., Tubanov Ts.A., Bazarov A.D. Research and verification of the Earth's crust velocity models by

- mathematical simulation and active seismology methods. *Geodynamics & Tectonophysics*, 2019, Vol. 10, No. 3, pp. 569–583.
2. Makarov M.M., Kucher K.M., Popov O.E., Aslamov I.A., Granin N.G. Eksperimental'nye issledovaniya rasprostraneniya tonal'no-impul'snykh signalov v vode ozera Baikal [Experimental studies of the propagation of tone-pulse signals in the water of Lake Baikal]. *Zhurn. Priklad. i Fund. Issled.*, 2018, No. 7, pp. 54–60 (in Russian).
 3. Alekseev A.S., Glinskii B.M., Kovalevskii V.V., Khairtdinov M.S. i dr. Aktivnaya seismologiya s moshchnymi vibratsionnymi istochnikami [Active seismology with powerful vibration sources]. Novosibirsk: Filial «Geo» Izd-va SO RAN, 2004 (in Russian).
 4. Belyashev A.V., Tubanov Ts.A. Podbor skorostnykh modelei dlya lokalizatsii seismicheskikh sobytii v predelakh Baikal'skoi riftovoi zony [Selection of high-speed models for localization of seismic events within the Baikal Rift zone]. *Geofiz. Tekhnol.*, 2021, No. 1, pp. 38–51 (in Russian).
 5. Puzyrev N.N., Mandelbaum M.M., Krylov S.V., Mishenkin B.P., Krupskaya G.V., Petrick G.V. Deep seismic investigations in the Baikal rift zone. *Tectonophysics*, 1973, Vol. 20, No. 1, pp. 85–95; DOI: 10.1016/0040-1951(73)90098-X
 6. Sun Yunshen S., Krylov S.V., Baotszyun' Ya. i dr. Glubinnoe seismicheskoe zondirovanie litosfery na mezhdunarodnom transekte Baikal-Severo-Vostochnyi Kitai [Deep seismic sounding of the lithosphere on the Baikal-Northeast China international transect]. *Geologiya i Geofiz.*, 1996, Vol. 37, No. 2, pp. 3–15 (in Russian).
 7. Ten Brink U.S., Taylor M.H. Crustal structure of central Lake Baikal: Insight into intracontinental rifting. *J. Geophys. Res.*, 2003, Vol. 108, No. B3, pp. 21–33; DOI: 10.1029/2002JB001880
 8. Suvorov V.D., Mishen'kina Z.R. Struktura osadochnykh otlozhenii i fundamenta pod yuzhnoi kotlovinoi ozera Baikal po dannym KMPV [The structure of sedimentary deposits and the foundation under the southern basin of Lake Baikal according to KMPV]. *Geologiya i Geofiz.*, 2005, Vol. 46, No. 11, pp. 1159–1167 (in Russian).
 9. Nielsen C., Thybo H. Lower crustal intrusions beneath the southern Baikal Rift Zone: Evidens from full-waveform modeling of wide-angle seismic data. *Tectonophysics*, 2009, Vol. 470, No. 3–4, pp. 298–318; DOI: 10.1016/j.tecto.2009.01.023
 10. Mordvinova V.V., Artem'ev A.A. Trekhmernaya model' yuga Baikal'skoi riftovoi zony i sopredel'nykh territorii po obmennym volnam [Three-dimensional model of the south of the Baikal rift zone and adjacent territories by exchange waves]. *Geologiya i Geofiz.*, 2010, Vol. 51, No. 6, pp. 887–904 (in Russian).
 11. Collino F. Perfectly matched absorbing layers for the paraxial equations. *J. Comput. Phys.*, 1996, Vol. 131, No. 1, pp. 164–180.
 12. Collino F., Tsogka C. Application of PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media. *Geophysics*, 2001, Vol. 66, No. 1, pp. 294–307.
 13. Mikhailenko B.G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems. *Appl. Math. Lett.*, 1999, Vol. 12, No. 4, pp. 105–110.
 14. Konyukh G.V., Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A. Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling. *J. Comput. Acoustics*, 2001, Vol. 9, No. 4, pp. 1523–1541; DOI: 10.1142/S0218396X01001339
 15. Paige C.C., Saunders M.A. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. *ACM Trans. Math. Software*, 1982, Vol. 8, No. 1, pp. 43–71.
 16. Levander A.R. Fourth order velocity-stress finite-difference scheme. *Proc. 57-th SEG Annual Meeting*. New Orleans, 1987, pp. 234–245.
 17. Gol'din S.V. Interpretatsiya dannykh seismicheskogo metoda otrazhennykh voln [Interpretation of the data of the seismic method of reflected waves]. Moscow: Nedra, 1979 (in Russian).
 18. Kut'ina O.G. Postroenie statisticheskikh algoritmov obrabotki i interpretatsii seismicheskikh dannykh [Construction of statistical algorithms for processing and interpretation of seismic data]. Moscow: Nedra, 1982 (in Russian).

19. Tagirov Kh.Yu., Aslanov T.G., Magomedov Kh.D. Opredelenie srednevzveshennoi skorosti seismicheskoi volny na uchastkakh Zemli po puti ee rasprostraneniya [Determination of the weighted average velocity of a seismic wave on Land along the path of its propagation]. *Izv. Dagestan. Gos. Ped. Univ. Estestvennye i Tochnye Nauki*, 2017, Vol. 11, No. 3, pp. 108–114.

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВЗРЫВНОЙ ВОЛНЫ СО СЛОЕМ ЖИДКОСТНОЙ ПЕНЫ С УЧЁТОМ ЭФФЕКТА КОМПАКТИРОВАНИЯ

© 2023 П. А. Чупров^{1a}, С. В. Фортова^{1b}, П. С. Уткин²

¹Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, г. Москва 123056, Россия,

²Харбинский технологический институт,
ул. Западная Дажэ, 92, г. Харбин 150001, Китай

E-mails: ^apetchu@mail.ru, ^bsfortova@mail.ru

Поступила в редакцию 12.08.2022 г.; после доработки 12.08.2022 г.;
принята к публикации 29.09.2022 г.

С помощью системы уравнений Баера — Нунциато проведено численное исследование взаимодействия взрывной волны с жидкостной пеной. Данная задача имеет своей целью исследование влияния механизма компактирования на волновую картину переотражения. Разработан вычислительный алгоритм, основанный на методе HLL. Сравнение результатов с вычислительными экспериментами других авторов показывает, что учёт механизма компактирования приводит к получению более качественных результатов.

Ключевые слова: численное моделирование, жидкостная пена, система уравнений Баера — Нунциато, компактирование, взрывные волны.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.216

ВВЕДЕНИЕ

Задача изучения взаимодействия взрывной волны (ВВ) с пеной в настоящее время получила широкое распространение, например в области взрывозащиты. Ударные волны (УВ) способны причинять существенный ущерб всевозможным структурам, поэтому задача их ослабления представляет прямой практический интерес. Большинство методов взрывозащиты основаны на применении деформируемых защитных слоёв, которые либо рассеивают энергию взрыва, либо способны отразить волну [1]. Всевозможные пенные материалы показывают отличные результаты при использовании их в качестве взрывозащиты. Однако в некоторых экспериментах наблюдался обратный эффект — усиление нагрузки на защищаемый объект, что является существенно нежелательным явлением. Более того, известно, что при наличии в пене химически активных компонент, в момент локального подвода энергии к пене, в ней может возникать волна горения, способная в некоторых случаях, например при наличии в пене водород-кислородной смеси, переходить в детонацию [2]. Подобное поведение пены, хоть и не находит, по очевидным причинам, применения в области взрывозащиты, может быть использовано, например, для устранения разливов нефти на поверхности воды. Вся динамика этого процесса к настоящему моменту ещё не изучена, в связи с чем активно развиваются методы численного счёта подобных задач, более того в экспериментальном смысле такие исследования представляют известную сложность в связи с дороговизной установок, способных воспроизводить УВ большой интенсивности, а также с эффектами распада пены, которые накладывают

достаточно жёсткие временные рамки на эксперимент. Например, в [3] для изучения взаимодействия ВВ с барьером из пены в ударной трубе используется система уравнений Эйлера с дополнительным уравнением объёмной доли. В [4] для этих же целей используется метод SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics). Вообще, разработано множество математических моделей, пригодных для численного моделирования динамики пены. Эти модели способны воспроизводить даже достаточно сложные процессы, например горение в пенах. Однако как показывает опыт, многие из этих моделей требуют точной настройки и подгонки параметров под каждую конкретную задачу, порой имеют проблемы с численной устойчивостью и стабильностью решения. В настоящей задаче взаимодействия УВ со слоем жидкостной пены предлагается использовать метод, основанный на системе уравнений Баера — Нунциато [5]. Это система уравнений, предназначенная для моделирования динамики многофазных процессов. Её преимуществом является практически безусловная гиперболичность, что приводит к подавлению нефизичных осцилляций и прочих вычислительных проблем, присущих моделям, не обладающим таким свойством. Модель Баера — Нунциато широко применяется для разнообразных задач многофазной динамики, например для задач внутренней баллистики [6], задачи о соударении металлических пластин [7], моделирования взаимодействия ударной волны с плотной засыпкой частиц [8]. Сама идея использования этой системы уравнений к задачам о взаимодействии УВ со слоем пены не нова, например, в работе [9] была показана возможность численного исследования взаимодействия ударной волны со слоем полиуретановой пены с учётом эффекта уплотнения. В нашем случае интерес представляет исследование влияния механизма компактирования, восходящего к работам [5, 10] и ранее применявшегося для описания динамики диспергированных твёрдых частиц [11], на результат численного моделирования жидкостных пен. Это исследование представляет интерес по причине того, что в некоторых задачах многофазной динамики именно правильный учёт этого эффекта позволяет добиться качественно верного соответствия результатов моделирования и экспериментальных данных. Как показано в настоящей работе, учёт этого эффекта имеет заметное влияние на протекающие процессы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Математическая модель основывается на системе уравнений [5] для описания течений двухфазных сжимаемых сред:

$$u_t + f_x(u) = h(u)\bar{\alpha}_x + p + s,$$

$$u = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{E} \\ \alpha\rho \\ \alpha\rho v \\ \alpha\rho E \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{v} \\ \bar{\alpha}(\bar{\rho}\bar{v}^2 + \bar{p}) \\ \bar{\alpha}\bar{v}(\bar{\rho}\bar{E} + \bar{p}) \\ \alpha\rho v \\ \alpha(\rho v^2 + p) \\ \alpha v(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} -\tilde{v} \\ 0 \\ \tilde{p} \\ \tilde{p}\tilde{v} \\ 0 \\ -\tilde{p} \\ -\tilde{p}\tilde{v} \end{bmatrix}, \quad p = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ (-\tilde{p} + \beta)F \\ 0 \\ 0 \\ -\tilde{p}F \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ I \\ 0 \\ -M \\ -I \end{bmatrix},$$

$$\bar{\alpha} + \alpha = 1, \quad \bar{E} = \frac{\bar{v}^2}{2} + \frac{\bar{p} + \bar{\gamma}\bar{P}_0}{\bar{\rho}(\bar{\gamma} - 1)}, \quad E = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho(\gamma - 1)},$$

$$F = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{\mu_c}(\bar{p} - p - \beta).$$

Здесь u — вектор консервативных переменных, f — вектор дифференциального потока, $h(u)\bar{\alpha}_x$ — дифференциальный источниковый член, p — алгебраический источниковый член, связанный с релаксацией давлений фаз. Вектор s содержит источниковые члены, описывающие обмен массой, импульсом и энергией между фазами. Член M отвечает за межфазный обмен импульсом, член I — за межфазный обмен энергией. При записи системы уравнений

использованы стандартные обозначения: t — время, x — пространственная координата, α — объёмная доля, ρ — истинная плотность, v — скорость, p — давление. Параметры с верхней чертой относятся к жидкой фазе, без черты — к газовой. Скорость и давление с тильдой соответствуют параметрам на межфазной границе и предполагаются равными:

$$\tilde{p} = \alpha p + \bar{\alpha} \bar{p}, \quad \tilde{v} = \frac{\alpha \rho v + \bar{\alpha} \bar{\rho} \bar{v}}{\alpha \rho + \bar{\alpha} \bar{\rho}}.$$

В качестве уравнения состояния (УРС) для газовой фазы используется УРС идеального газа с показателем адиабаты γ . Для жидкой фазы используется двучленное УРС с параметрами $\bar{\gamma}$ и \bar{P}_0 . Вектор p содержит в себе члены, связанные с релаксацией давления — реальным многомерным процессом, проходящим на границе раздела фаз. В используемом вычислительном алгоритме данный процесс отражается в отдельной процедуре, в которой происходит и учёт эффекта компактирования (см. далее). Вычислительный алгоритм основан на методе расщепления по физическим процессам. Каждый шаг интегрирования по времени расщепляется на три подшага: гиперболический этап, релаксация давления и учёт межфазного взаимодействия.

2. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ЭТАП

Для решения гиперболического этапа применяется метод HLL, аналогичный [10]. При решении исходной системы первое уравнение (уравнение компактирования) решается отдельно с помощью специальной аппроксимации, удовлетворяющей так называемому $p - v$ условию. Это необходимо для устранения осцилляций давления, неизбежно возникающих в противном случае. Оставшаяся часть системы решается с помощью следующей конечно-объёмной аппроксимации:

$$u_t + f_x(u) = h(u) \bar{\alpha}_x \longrightarrow \begin{cases} U_t + F_x = H \bar{\alpha}_x, \\ \bar{\alpha}_t + \bar{v} \bar{\alpha}_x, \end{cases}$$

$$U_{h,j}^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} [F_{j+1/2}^{HLL}(U_j^n, U_{j+1}^n) - F_{j-1/2}^{HLL}(U_{j-1}^n, U_j^n)] + h(U_j^n, \alpha_j^n) (\Delta_j^n \bar{\alpha}_x)^{HLL}.$$

Численный поток выглядит следующим образом:

$$F_{j+1/2}^{HLL} = \frac{S_{j+1/2}^p F_j^n - S_{j+1/2}^m F_{j+1}^n + S_{j+1/2}^p S_{j+1/2}^m (U_{j+1}^n - U_j^n)}{S_{j+1/2}^p - S_{j+1/2}^m},$$

$$S_{j+1/2}^p = \max(0, v_j^n + c_j^{n+}, v_{j+1}^n + c_{j+1}^n, \bar{v}_j^n + \bar{c}_j^{n+}, \bar{v}_{j+1}^n + \bar{c}_{j+1}^n),$$

$$S_{j+1/2}^m = \min(0, v_j^n - c_j^{n+}, v_{j+1}^n - c_{j+1}^n, \bar{v}_j^n - \bar{c}_j^{n+}, \bar{v}_{j+1}^n - \bar{c}_{j+1}^n).$$

Специальная аппроксимация производной объёмной доли в правой части системы в таком случае имеет вид

$$\Delta_j^n \bar{\alpha}_x = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{S_{j+1/2}^p \bar{\alpha}_j^n - S_{j+1/2}^m \bar{\alpha}_{j+1}^n}{S_{j+1/2}^p - S_{j+1/2}^m} - \frac{S_{j-1/2}^p \bar{\alpha}_{j-1}^n - S_{j-1/2}^m \bar{\alpha}_j^n}{S_{j-1/2}^p - S_{j-1/2}^m} \right),$$

а соответствующая ей и численному потоку HLL численная аппроксимация уравнения компактирования записывается как

$$\bar{\alpha}_{h,j}^{n+1} = \bar{\alpha}_j^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left[\frac{\bar{v}_j^n (S_{j+1/2}^p \bar{\alpha}_j^n - S_{j+1/2}^m \bar{\alpha}_{j+1}^n) + S_{j+1/2}^p S_{j+1/2}^m (\bar{\alpha}_j^n - \bar{\alpha}_{j+1}^n)}{S_{j+1/2}^p - S_{j+1/2}^m} - \frac{\bar{v}_j^n (S_{j-1/2}^p \bar{\alpha}_{j-1}^n - S_{j-1/2}^m \bar{\alpha}_j^n) + S_{j-1/2}^p S_{j-1/2}^m (\bar{\alpha}_{j-1}^n - \bar{\alpha}_j^n)}{S_{j-1/2}^p - S_{j-1/2}^m} \right].$$

Выбор этого метода обусловлен его крайней устойчивостью при решении задач с явными межфазными границами, однако стоит отметить, что его использование сопряжено с некоторыми трудностями, а именно, с «размазыванием» межфазной границы со временем. Для уменьшения влияния этого эффекта на решение пена добавлялась в расчётную область непосредственно перед моментом достижения её поверхности взрывной волной. Этот эффект хорошо известен для метода HLL применительно к системе Баера — Нунциато, и его влияние может быть уменьшено с помощью увеличения числа ячеек или использования методов реконструкции решения для увеличения порядка пространственной аппроксимации. Более сложные методы, например HLLC-подобные, в большей степени лишены этого недостатка.

3. ЭТАП РЕЛАКСАЦИИ ДАВЛЕНИЙ

На втором этапе расщепления производится релаксация давлений с учётом компактирования. В настоящей работе используется механизм, аналогичный [10], а именно:

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \tilde{p} + \beta, \\ \beta &= \bar{\alpha}\bar{\rho} \frac{dB}{d\bar{\alpha}} = -\bar{\alpha}\bar{\rho} a n \ln \frac{1 - \bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}_0} \left(\frac{B(\bar{\alpha})}{a} \right)^{(n-1)/n}, \\ a &= 3 \cdot 10^4, \quad n = 1.02, \quad \bar{\alpha}_0 = 0.1, \\ B(\bar{\alpha}) &= \begin{cases} B_a(\bar{\alpha}), & \text{если } \bar{\alpha}_0 < \bar{\alpha} < 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \\ B_a(\bar{\alpha}) &= a[b_1(\bar{\alpha}) - b_1(\bar{\alpha})_0 + b_2(\bar{\alpha})]^n, \\ b_1(\bar{\alpha}) &= (1 - \bar{\alpha}) \ln(1 - \bar{\alpha}), \quad b_2(\bar{\alpha}) = (1 + \ln(1 - \bar{\alpha}_0)) (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0).\end{aligned}$$

Здесь $B_a(\bar{\alpha})$ — потенциальная энергия компактирования; f и n — параметры закона компактирования, являющиеся характеристиками рассматриваемой двухфазной среды; $\bar{\alpha}_0$ — объёмная доля жидкой фазы, при достижении которой включается компактирование и она становится отличной от нуля. Параметр β отвечает за силовое взаимодействие фаз на контактной границе. Конкретный вид этого члена может отличаться в зависимости от особенностей рассматриваемой задачи. Использованный в настоящей работе вид β отвечает случаю так называемых межгранулярных напряжений, т. е. силе упругости гранулированной среды при достижении плотной упаковки частиц. Этот эффект реализован благодаря выбору β как ступенчатой функции от объёмной доли жидкости $\bar{\alpha}$: нуль до некоторой пороговой величины объёмной доли $\bar{\alpha}_0$ и некоторая зависимость от $\bar{\alpha}$ после. В [9] при изучении пен из полиуретана в качестве β использовалась зависимость, основанная на работе [13], в которой проводилось теоретическое рассмотрение одиночной ячейки пены, что позволяло отразить реальную механику сжатия слоя пены. В нашем случае параметры модели калибровались по совсем другим задачам и не имеют точной физической интерпретации для настоящей задачи. Наш выбор модели обусловлен простотой и надёжностью подхода, его многочисленным использованием в более ранних работах, например [6]. В дальнейших исследованиях ожидается разработка специализированной под задачи о взаимодействии УВ с пеной модели, однако как можно видеть далее, даже такой упрощённый подход даёт возможность исследования влияния механизма на динамику процесса. Более подробно все необходимые формулы и зависимости описаны в работе [11].

4. ЭТАП УЧЁТА МЕЖФАЗНОГО ВАЗИМОДЕЙСТВИЯ

На третьем этапе расщепления решается СОДУ с обменными членами в правой части:

$$\begin{aligned} \frac{d(\alpha\rho)}{dt} &= 0, & \frac{d(\alpha\rho v)}{dt} &= -M, & \frac{d(\alpha\rho E)}{dt} &= -I, \\ \frac{d(\bar{\alpha})}{dt} &= 0, & \frac{d(\bar{\alpha}\bar{\rho})}{dt} &= 0, & \frac{d(\bar{\alpha}\bar{\rho}v)}{dt} &= M, \\ \frac{d(\bar{\alpha}\bar{\rho}E)}{dt} &= I, & M &= \delta, & I &= M\bar{v}, & \delta &= 0.75\bar{\alpha}Cd\rho|v - \bar{v}|(v - \bar{v})/d. \end{aligned}$$

В рамках исследуемой задачи единственным обменным процессом считается межфазное трение, реализованное по формулам из [14]. Межфазное трение — модель, учитывающая трение между фазами, а именно, процесс выравнивания скоростей фаз на межфазной границе. Этот механизм использовался, например, в [6]. Без учёта межфазного трения невозможно корректно отразить увлечение за собой частиц тяжёлой фазы более быстрым течением лёгкой фазы. Здесь d — диаметр частиц (в работе принят за 50 мкм из аналогичных экспериментов [3]), Cd — коэффициент трения частиц (в работе принят за 10.2, устанавливался экспериментально исходя из соответствия времени прихода УВ на правый торец канала). Вообще говоря, в модели возможен учёт обмена массой, т. е. наличия превращения фаз, что позволяет вести расчёт, например, горения, как в работе [6], поэтому исследование пен, содержащих в себе химически активные вещества, может быть проведено с минимальными модификациями.

5. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Для численного исследования была выбрана постановка задачи из [4]: одномерная расчётная область длиной 1 м, в которой на расстоянии 0.33 м от левого конца расчётной области находится слой пены толщиной 10 см. С левого торца в область входит взрывная волна специального профиля, на правой границе условие стенки и датчик давления. Важно отметить, что в [4] используется двумерная постановка задачи, что связано с исследованием взаимодействия УВ не только с пеной, но с некоторым количеством геометрических препятствий. В нашем случае такие препятствия не рассматриваются.

Для моделирования входа в расчётную область взрывной волны на левой границе задаётся меняющееся во времени граничное условие [4]:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_0 + 100.924p_0 \left(1 - \frac{t}{t_+}\right) \exp\left(\frac{-\theta t}{t_+}\right), \\ \rho(t) &= \frac{(\gamma + 1)(p(t) - p_0) + 2\gamma p_0}{(\gamma - 1)(p(t) - p_0) + 2\gamma p_0}, \\ v(t) &= \sqrt{\frac{2}{\gamma p_0} \frac{c_0(p(t) - p_0)}{\sqrt{(\gamma + 1)(p(t) - p_0) + 2\gamma p_0}}}. \end{aligned}$$

Здесь $t_+ = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, $\theta = 2.72$, $p_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Па}$, c_0 — невозмущённая скорость звука в газе. Пена предполагается смесью воды и воздуха с объёмной долей воды $\bar{\alpha} = 0.1$. Параметры УРС: $\gamma = 1.4$, $\gamma = 7$, $\bar{P}_0 = 10^9 \text{ Па}$. В начальный момент времени вещество в области покоится и находится в нормальных условиях: $p = \bar{p} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $\rho = 1.17 \text{ кг/м}^3$, $\bar{\rho} = 1000 \text{ кг/м}^3$.

На рис. 1 представлено сравнение показаний датчиков давления из [4] и в текущем численном эксперименте как с компактированием, так и без него.

Рассмотрим подробнее механику процесса. Приблизительно до 0.7 мс происходит распространение ударной волны, формирование её фронта и прохождение её сквозь пену. Скачок

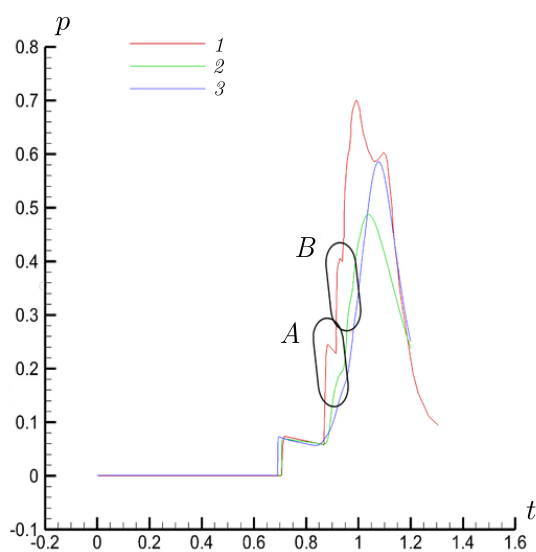


Рис. 1. Показания датчика давления:
 1 — [4]; 2 — расчёт с компактированием; 3 — расчёт без компактирования

давления на отметке приблизительно 0.7 мс соответствует падению первичной прошедшей волны на правый торец канала. После этого на протяжении приблизительно 0.1 мс происходит постепенное падение давления, пока отражённая от торца волна распространяется в противоположную сторону. Скачки давления, отмеченные как *A* и *B*, связаны с переотражением УВ между надвигающейся на торец пеной и самим торцом канала. Самый высокий пик давления связан с ударом массы пены о торец канала, после чего процессы переотражения прекращаются. Влияние учёта эффекта компактирования приводит к тому, что объёмная доля воды в пене не поднимается выше определённого уровня. Это приводит к тому, что сила межфазного трения, пропорциональная объёмной доле жидкости, уменьшается, что приводит к более сильным ударным волнам в газе, имеющим более резкий профиль. Однако ограничение объёмной доли жидкости в пене приводит к тому, что финальный пик давления в расчёте с компактированием гораздо меньше, чем в эксперименте и расчёте без компактирования. Менее плотная пена ударяется об стенку, соответственно передаваемый импульс меньше.

Упомянутый выше процесс переотражения волн играет значимую роль в динамике задачи. Для более детального разбора процесса стоит подробнее рассмотреть волновую картину в пристеночной области в моменты времени, соответствующие отражению прошедшей волны от торца и её приходу на поверхность пены. Эти картины представлены на рис. 2 и 3.

На рис. 2 показана волновая картина переотражения у правого торца в расчёте с компактированием. Видно, как достигшая торца волна отражается от неё и бежит навстречу пене (0.76 мс, отражённая волна выделена), после чего ударяется об пену, создавая локальный пик давления (0.8 мс), отражается и движется в сторону правого торца (0.84 и 0.88 мс). Из-за того, что к этому моменту времени пена уже потеряла свою целостную структуру, отражённая от пены волна не имеет чёткого фронта. Небольшой пик давления на графике 0.76 мс на отметке 0.94 мм связан с межфазным трением на границе пены.

На рис. 3 показана аналогичная картина, но для расчёта без компактирования.

Легко заметны все основные черты течения, описанные ранее: отражённая от торца волна и отражённая от пены волна. Видно, что намного меньшую интенсивность имеет пик давления в момент встречи отражённой волны с поверхностью пены, что, однако, требует дополнительного пояснения. Для этого рассмотрим графики давления и объёмной доли жидкости в момент времени 0.78 и 0.8 мс:

Из рис. 4 видно, что разница в интенсивности пиков давления связана с тем, что к момен-

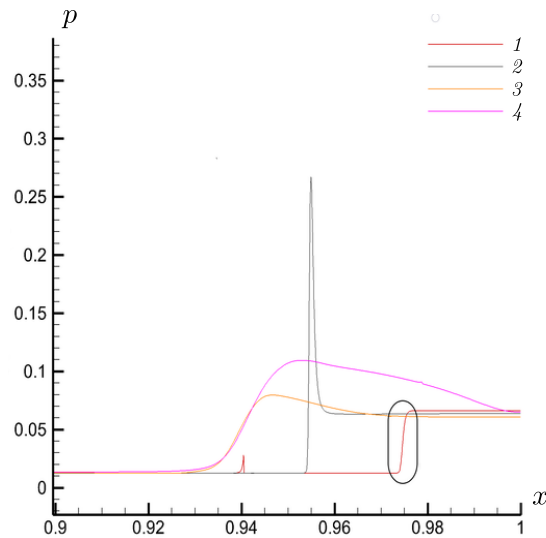


Рис. 2. Волновая картина около правого торца в расчёте с компактированием:
1 — 0.76 мс; 2 — 0.8 мс; 3 — 0.84 мс; 4 — 0.88 мс

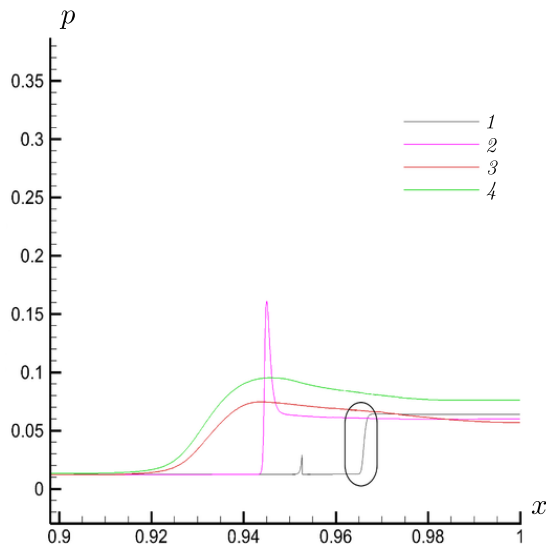


Рис. 3. Волновая картина около правого торца в расчёте без компактирования:
1 — 0.76 мс; 2 — 0.8 мс; 3 — 0.84 мс; 4 — 0.88 мс

ту времени 0.8 мс в расчёте без компактирования отражение уже произошло, в связи с чем пик давления идёт на спад. В свою очередь в расчёте с компактированием к моменту 0.8 мс наблюдается самый момент столкновения отражённой волны с пеной. Такое поведение, вероятно, связано с описанным выше эффектом уменьшения межфазного трения в расчёте с компактированием, что приводит к более медленному движению пены. Максимальные пики давления, наблюдаемые при столкновении пены с отражённой волной, практически одинаковы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведена попытка применить описанный механизм компактирования к жидкостным пенам и получен результат, свидетельствующий о заметном влиянии этого механизма на динамику процесса. Стоит отметить, что использованный в работе механизм изначально разрабатывался для другого класса задач, поэтому разработка усовершенствованного или нового механизма, пригодного именно для зада взаимодействия ВВ с пеной, является темой

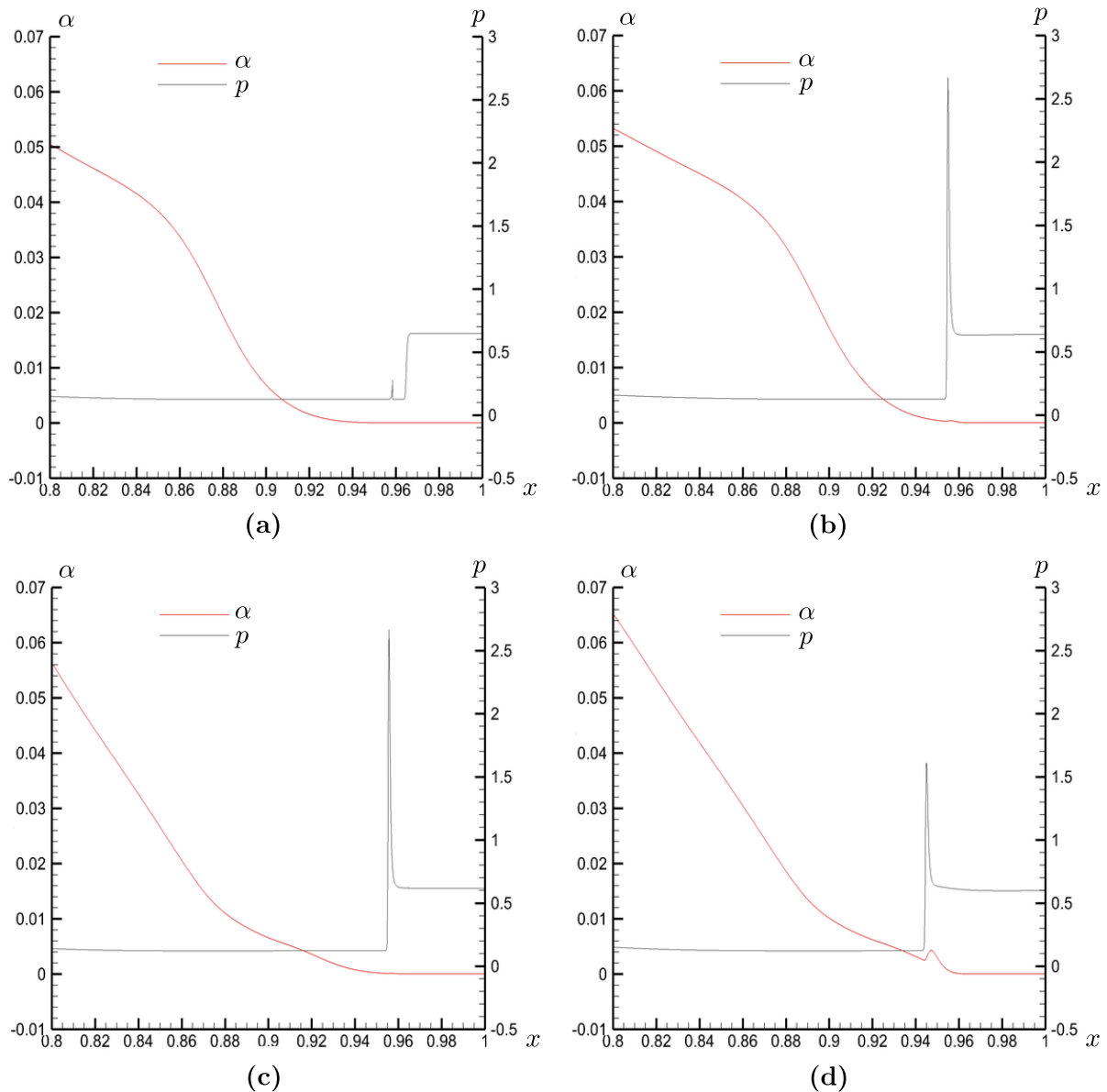


Рис. 4. Отражение УВ от пены в расчёте с компактированием: 0.78 мс (а), 0.8 мс (б); без компактирования: 0.78 мс (с), 0.8 мс (д)

дальнейших перспективных исследований. Важно, что для моделирования использовалась математическая модель Баера — Нунциато, учитывающая сжимаемость обеих фаз. Несмотря на слабую сжимаемость воды в представленных условиях, учёт этого позволяет системе уравнений быть гиперболической, что убирает необходимость во всевозможных вычислительных ухищрениях для достижения стабильности решения. Такой подход в сочетании с гибкими механизмами релаксации давлений и скоростей фаз позволяет без кропотливого подгона замыкающих соотношений исследовать широкий спектр многофазных задач, в том числе и задачу о взаимодействии УВ со слоем жидкостной пены. Помимо этого стоит отметить, что использование более точных численных методов, основанных, например, на методе HLLC, является необходимым направлением дальнейшей работы по этой теме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Igra O., Falcovitz J., Jourdan G.* Review of methods to attenuate shock/blast waves // *Prog. Aerosp. Sci.* 2013. V. 58, P. 1–35.
2. *Kichatov B., Korshunov A., Kiverin A., Son E.* Foamed emulsion – Fuel on the base of water-saturated oils // *Fuel.* 2017. V. 203. P. 261–268.
3. *Sembian S., Liverts M., Apazidis N.* Attenuation of strong external blast by foam barriers // *Phys. Fluids.* 2016. V. 28, N 9. Article 096105; DOI: 10.1063/1.4963243
4. *Prasanna Kumar S.S. Ramamurthi K., Patnaik B.S.* Numerical study of a foam-shock trap based blast mitigation strategy // *Phys. Fluids.* 2018. V. 30, N 8. Article 086102; DOI: 10.1063/1.5043177
5. *Baer M.R., Nunziato J.W.* A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition in reactive granular materials // *Internat. J. Multiphase Flow.* 1986. V. 12, N 6. P. 861–889.
6. *Чупров П.А., Порошина Я.Э., Уткин П.С.* Численное исследование дефлаграции пороха в рамках модели Баера — Нунциато // *Горение и взрыв.* 2020. Т. 13, № 3. С. 91–106.
7. *Chuprov P., Utkin P., Fortova S.* Numerical simulation of a high-speed impact of metal plates using a three-fluid model // *Metals.* 2021. V. 11, N 8. Article 1233.
8. *Уткин П.С.* Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с плотной засыпкой частиц в рамках двухжидкостного подхода // *Хим. физика.* 2017. Т. 36, № 11. С. 61–71.
9. *Baer M.R.* A numerical study of shock wave reflection on low density foam // *Shock Waves.* 1992. V. 2. P. 121–124.
10. *Saurel R., Favrie N., Petitpas F., Lallemand M.-H., Gavriluk S.L.* Modelling dynamic and irreversible powder compaction // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 664. P. 348–396.
11. *Poroshyna Y.E., Utkin P.S.* Numerical simulation of a normally incident shock wave–dense particles layer interaction using the Godunov solver for the Baer–Nunziato equations // *Internat. J. Multiphase Flow.* 2021. V. 142. Article 103718.
12. *Saurel R., Abrell R.* A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // *J. Comput. Phys.* 1999. V. 150, N 2. P. 425–467.
13. *Warren W.E., Kraynik A.M.* The nonlinear elastic behavior of open-cell foams // *J. Appl. Mech.* 1991. V. 58, N 2. P. 376.
14. *Rogue et al.* Experimental and numerical investigation of the shock-induced fluidization of a particles bed // *Shock Waves.* 1998. V. 8, N 2. P. 29–45.

UDC 519.63

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE INTERACTION BETWEEN SHOCK WAVE AND AQUEOUS FOAM WITH COMPACTION

© 2023 P. A. Chuprov^{1a}, S. V. Fortova^{1b}, P. S. Utkin²

*Institute of Design Automation RAS,
ul. 2-ya Brestskaya 19/18, Moscow 123056, Russia,*

*²Harbin Institute of Technology,
ul. Zapadnaya Dazhi 92, Harbin 150001, China*

E-mails: ^apetchu@mail.ru, ^bsfortova@mail.ru

Received 12.08.2022, revised 12.08.2022, accepted 29.09.2022

Abstract. Using the system of Bayer–Nunziato equations, a numerical study of the interaction of an explosive wave with liquid foam was carried out. This problem is aimed at studying the influence of the compaction mechanism on the wave pattern of re-reflection. A computational algorithm based on the HLL method has been developed. Comparison of the results with computational experiments of other authors shows that taking into account the compaction mechanism leads to better results.

Keywords: numerical simulation, liquid foam, Baer–Nunziato system of equations, compaction, explosive waves.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.216

REFERENCES

1. Igra O., Falcovitz J., Jourdan G. Review of methods to attenuate shock/blast waves. *Prog. Aerosp. Sci.*, 2013, Vol. 58, pp. 1–35.
2. Kichatov B., Korshunov A., Kiverin A., Son E. Foamed emulsion – Fuel on the base of water-saturated oils. *Fuel*, 2017, Vol. 203, pp. 261–268.
3. Sembian S., Liverts M., Apazidis N. Attenuation of strong external blast by foam barriers. *Phys. Fluids*, 2016, Vol. 28, No. 9, article 096105; DOI: 10.1063/1.4963243
4. Prasanna Kumar S.S. Ramamurthi K., Patnaik B.S. Numerical study of a foam-shock trap based blast mitigation strategy. *Phys. Fluids*, 2018, Vol. 30, No. 8, article 086102; DOI: 10.1063/1.5043177
5. Baer M.R., Nunziato J.W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition in reactive granular materials. *Internat. J. Multiphase Flow*, 1986, Vol. 12, No. 6, pp. 861–889.
6. Chuprov P.A., Poroshina Ya.E., Utkin P.S. Chislennoe issledovanie deflagratsii porokha v ramkakh modeli Baera–Nuntsiato [Numerical study of gunpowder deflagration in the framework of the model Baer–Nunziato]. *Gorenie i Vzryv*, 2020, Vol. 13, No. 3, pp. 91–106 (in Russian).
7. Chuprov P., Utkin P., Fortova S. Numerical simulation of a high-speed impact of metal plates using a three-fluid model. *Metals*, 2021, Vol. 11, No. 8, article 1233.
8. Utkin P.S. Matematicheskoe modelirovanie vzaimodeistviya udarnoi volny s plotnoi zasypkoi chastits v ramkakh dvukhzhidkostnogo podkhoda [Mathematical modeling of the interaction of a shock wave with a dense backfill of particles in the framework of a two-fluid approach]. *Khim. Fiz.*, 2017, Vol. 36, No. 11, pp. 61–71 (in Russian).
9. Baer M.R. A numerical study of shock wave reflection on low density foam. *Shock Waves*, 1992, Vol. 2, pp. 121–124.

10. Saurel R., Favrie N., Petitpas F., Lallemand M.-H., Gavriluk S.L. Modelling dynamic and irreversible powder compaction. *J. Fluid Mech.*, 2010, Vol. 664, pp. 348–396.
11. Poroshyna Y.E., Utkin P.S. Numerical simulation of a normally incident shock wave–dense particles layer interaction using the Godunov solver for the Baer–Nunziato equations. *Internat. J. Multiphase Flow*, 2021, Vol. 142, article 103718.
12. Saurel R., Abrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *J. Comput. Phys.*, 1999, Vol. 150, No. 2, pp. 425–467.
13. Warren W.E., Kraynik A.M. The nonlinear elastic behavior of open-cell foams. *J. Appl. Mech.*, 1991, Vol. 58, No. 2, pp. 376.
14. Rogue et al. Experimental and numerical investigation of the shock-induced fluidization of a particles bed. *Shock Waves*, 1998, Vol. 8, No. 2, pp. 29–45.

УДК 51.72

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЛАЗЕРОМ УДАРНЫХ ВОЛН В АЛЮМИНИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

© 2023 В. В. Шепелев^a

*Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, г. Москва 123056, Россия*

E-mail: vadim.aries@gmail.com

Поступила в редакцию 14.10.2022 г.; после доработки 14.10.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

С помощью двумерной осесимметричной физико-математической модели и алгоритма проведено численное исследование задачи об облучении объёмной алюминиевой мишени единичным фемтосекундным лазерным импульсом. Задача имеет ряд фундаментальных и практических приложений, связанных с упрочняющим воздействием остаточных пластических деформаций после прохождения индуцированной лазером ударной волны, в частности лазерное ударное упрочнение, также известное в литературе как лазернаяковка, лазерный наклёп или лазерный пининг. Осевая симметрия лазерного пучка позволяет уменьшить размерность задачи с трёхмерной до двумерной и существенно сэкономить вычислительные ресурсы. Использовано полуэмпирическое уравнение состояния алюминия в форме Ми — Грюнайзена с подстройкой параметров по холодной кривой металла и данным ударно-волновых экспериментов. Исследован закон распространения и затухания ударной волны, выделены стадии одномерного, переходного и полусферического распространения ударной волны. Описаны размеры и форма области, на которую может быть осуществлено упрочняющее воздействие единичным фемтосекундным лазерным импульсом.

Ключевые слова: математическое моделирование, гидродинамика, вычислительные методы, метод конечных объёмов, фемтосекундные лазеры, ударные волны, уравнение состояния.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.217

ВВЕДЕНИЕ

Лазерная физика и лазерные технологии прочно обосновались в ряду важнейших и наиболее интенсивно развивающихся областей науки и техники в последние десятилетия. Многие области применения лазерных технологий уже стали самостоятельными научными или технологическими областями знаний. Среди приложений лазеров, и в особенности лазеров с короткими и ультракороткими импульсами, в первую очередь можно отметить такие области, как лазерное структурирование поверхностей [1, 2], аддитивные технологии [3, 4], лазерную абляцию в жидкость [5, 6] и лазерное упрочнение материалов [7, 8]. Лазерное ударное упрочнение (Laser Shock Peening, LSP) посредством наносекундных (нс, $1 \text{ нс} = 10^{-9} \text{ с}$) лазерных импульсов позволяет увеличить срок службы металлических деталей в 2–5 раз, при стоимости процесса около 1% от стоимости самой детали, согласно данным компании LSP Technologies (презентация [9]). LSP также снижает вероятность образования поверхностных микротрещин и повышает устойчивость материала к нагрузкам, в том числе усталостным нагрузкам. На поверхности образуются усталостные микротрещины. В последнее десятилетие использование фемтосекундных

Работа выполнена в рамках государственного задания ИАП РАН.

(фс, $1 \text{ фс} = 10^{-15} \text{ с}$) лазерных импульсов для LSP было предложено и опробовано, но лежащие в основе фемтосекундного LSP физические механизмы по-прежнему недостаточно изучены. Поскольку эффект упрочнения напрямую связан с величиной напряжений в подповерхностном слое, расчёт пространственной эволюции напряжений при лазерно-индуцированной ударной волне в металлах имеет первостепенное значение. В этой статье мы рассчитываем распределение напряжений в подповерхностном слое, что позволяет нам определить геометрические границы лазерной обработки.

За последние 15 лет автором вместе с коллегами были разработаны и реализованы гидродинамические модели для описания широкого класса лазерных явлений. Это были как поверхностные явления, такие как двухтемпературный фемтосекундный лазерный нагрев металла, [10, 11], так и процессы, вызванные индуцированными лазером ударными волнами (например, [11–13]). В работе [14] с помощью плоской двумерной модели, основанной на уравнениях состояния (УРС) идеального газа, было проведено исследование индуцированной лазером ударной волны, её распространения и затухания в объёмной алюминиевой мишени. Параметры модели подбирались таким образом, чтобы получившаяся волновая картина, амплитудные и скоростные характеристики рассматриваемой ударной волны (УВ) были физически достоверными. Настоящая работа делает следующий шаг к более физически адекватным и точным результатам, представляя усовершенствованную модель. Модель основана на реалистичном полуэмпирическом УРС в форме Ми — Грюнайзена [15] и учитывает цилиндрическую симметрию задачи относительно оси лазерного пучка, позволяя таким образом решать фактически трёхмерную задачу на двумерной расчётной сетке.

1. ПОСТАНОВКА И НАЧАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

Выполняется гидродинамическое моделирование распространения ударной волны в алюминиевой мишени, облучаемой единичным ультракоротким лазерным импульсом, в двумерной цилиндрической геометрии. На рис. 1 показана схематичная конфигурация мишени.

Пространственными переменными являются цилиндрический радиус r и расстояние вдоль оси симметрии z . Одиночный лазерный импульс падает перпендикулярно поверхности мишени и производит нагрев её тонкой подповерхностной области. Зона нагрева представляет собой диск радиусом R_L и глубиной нагрева d_T .

В случае фемтосекундного импульса процесс быстрого начального лазерного нагрева металлической мишени является, вообще говоря, двухтемпературным. Процесс длится единицы пикосекунд. Он включает в себя поглощение энергии лазерного импульса электронной подсистемой металла, распространение тепла от поверхностного скин-слоя в мишень за счёт электронной теплопроводности, а также релаксацию поглощённой энергии от нагретых электронов к ионной решётке. В результате электрон-ионной релаксации распределения температур электронной и ионной подсистем металла выравниваются, т. е. система снова становится однотемпературной.

Физика процесса двухтемпературного нагрева алюминия фемтосекундным лазерным импульсом детально разобрана в [16, 17]. В работах [10, 11] приведены результаты математического моделирования двухтемпературного нагрева алюминия. Здесь мы не будем останавливаться на деталях двухтемпературного нагрева, поскольку нам важен только его результат — сформированный однотемпературный профиль ударной волны, которая далее будет распространяться вглубь мишени. В качестве начального условия для давления в настоящей модели мы выбираем ступенчатую пространственную функцию. Такое упрощение оправдано из-за того, что скорость выравнивания температур вследствие электронной температуры и электронно-ионной релаксации в мишени превышает звуковой масштаб, а изменение формы импульса сжатия с гауссова на ступенчатый оказывает незначительное влияние на дальнейшее распространение индуцированной лазером ударной волны.

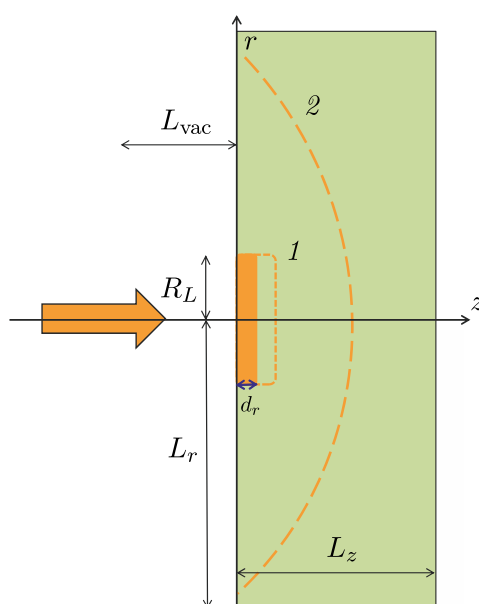


Рис. 1. Конфигурация задачи лазерного облучения объёмной алюминиевой мишени: луч лазера (оранжевая стрелка) падает на мишень слева; $L_r = 1280$ нм — полуширина мишени; $L_z = 1000$ нм — толщина мишени; $L_{vac} = 200$ нм — толщина прилегающего к мишени слева вакуумного слоя; $R_L = 200$ нм — радиус светового пятна; $d_r = 80$ нм — глубина прогрева; отмечены фронты ударной волны в плоском (1) и полусферическом (2) режимах распространения

Давление внутри диска радиусом R_L и высотой d_r повышено по сравнению со значением в исходном состоянии (нормальные условия), однородно внутри диска и равно $p_{heat} = 35.6$ ГПа (1 ГПа = 10^9 Па). Давление в мишени вне нагретого диска и в вакууме вне мишени равно $p_{cold} = p_{vac} = 0$. Мишень однородна по плотности и покоится в начальный момент времени.

Выбранные данные для расчёта примерно соответствуют экспериментальной конфигурации [18], в которой лазерная установка обладает интенсивностью падающего на образец излучения $I_{inc} \approx 10^{13}$ Вт/см² при длительности импульса $\tau_L = 100$ фс. Падающая на единицу поверхности энергия (флюенс) тогда будет равной $F_{inc} \approx 2 \div 3$ Дж/см², а поглощённая единицей поверхности энергия (поглощённый флюенс) для алюминиевого образца $F_{abs} = 0.24$ Дж/см².

Мы связываем начало координат с центром светового пятна на поверхности металла. Ось r направлена вправо вдоль поверхности, а ось z — вдоль оси симметрии лазерного пучка, которая перпендикулярна поверхности. Размеры половины мишени составляют 1280×800 нм. Расчётная область представляет собой прямоугольник, содержащий фрагмент границы мишени с внешней средой (воздухом либо вакуумом) малой плотности. Физически содержательная часть задачи оперирует с величинами порядка $1 \div 10$ ГПа. Атмосферным давлением, имеющим порядок 10^5 Па, в этом случае можно пренебречь и считать давление внешней среды нулевым. Предположение о физических параметрах внешней среды является модельным. При соблюдении этих предположений в модели внешняя среда не оказывает влияния на распространение ударной волны в мишени, потому что область формирования и распространения ударной волны и область лазерного факела оказываются пространственно разделены. Нас интересует только следствие лазерного удара — индуцированная лазерным импульсом ударная волна высокой амплитуды, распространяющаяся вглубь мишени. Поэтому внешняя среда и поверхность мишени в настоящей модели практически не рассматривается.

Толщина слоя внешней среды $L_{vac} = 200$ нм. Таким образом, задача решается в прямоугольнике $[0, L_r] \times [-L_z, L_{vac}]$, размеры которого составляют 1280×1000 нм.

2. МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ

Однотемпературная модель, представленная в [14], основана на плоских двумерных уравнениях Эйлера, описывающих законы сохранения массы, импульса и энергии в сплошной идеальной среде. Для осесимметричного случая уравнения запишутся в виде, содержащем источник член [16]:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y = -\frac{1}{r}\mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$, $\mathbf{F} = (\rho u, p + \rho u^2, \rho uv, u(p + \rho E))^T$, $\mathbf{G} = (\rho v, \rho uv, p + \rho v^2, v(p + \rho E))^T$, $\mathbf{S} = (\rho, \rho u^2, \rho uv, u(p + \rho E))^T$; ρ — плотность вещества; u, v — компоненты гидродинамической скорости соответственно по координатным осям r и z ; p — давление, $E = e + u^2/2 + v^2/2$ — полная, а e — внутренняя энергия единицы массы вещества. Система состоит из четырёх нелинейных уравнений в частных производных и замыкается уравнением состояния $p = p(\rho, e)$, которое связывает, вообще говоря, только энергию и давление и не содержит информации о температуре материала.

Начальные условия в примитивных переменных (ρ, u, v, p) в прямоугольнике $[0, L_r] \times [-L_z, L_{\text{vac}}]$ запишем в следующем виде:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(r, z), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

$$p|_{t=0} = p_0(r, z), \quad (5)$$

где $\rho_0(r, z)$ и $p_0(r, z)$ — ступенчатые функции:

$$\rho_0(r, z) = \begin{cases} 2 \text{ кг/м}^3 & \text{при } z \leq 0, \\ 2413 \text{ кг/м}^3 & \text{при } z > 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$p(r, z) = \begin{cases} 35.6 \text{ ГПа} & \text{при } 0 < r \leq R_L, \quad 0 < z \leq d_T, \\ 0 & \text{при всех остальных } r \text{ и } z. \end{cases} \quad (7)$$

Граничные условия симметрии накладываются на ось z , т. е. прямую $r = 0$ (рис. 1):

$$\mathbf{U}_{-1,j} = \mathbf{U}_{1,j}. \quad (8)$$

На всех остальных границах ставятся прозрачные граничные условия, обеспечивающие свободное прохождение любых проходящих возмущений:

$$\mathbf{U}_{i,-1} = \mathbf{U}_{i,1}, \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_{N+1,j} = \mathbf{U}_{N,j}, \quad (10)$$

$$\mathbf{U}_{i,M+1} = \mathbf{U}_{i,M}, \quad (11)$$

где $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, M$, N — количество ячеек по оси r , M — количество ячеек по оси z . Фиктивные ячейки с отрицательными индексами либо с индексами $i > N$, $j > M$, используются для корректной аппроксимации граничных условий.

Уравнения (1) решаются с использованием явного метода конечных объёмов типа Годунова [20]. Вычислительную область покроем равномерной прямоугольной декартовой сеткой размером 640×400 ячеек. Метод конечных объёмов является консервативным, поскольку

разностные уравнения расчётной схемы обеспечивают точное выполнение законов сохранения в любой выбранной ячейке сетки:

$$\frac{\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} - \mathbf{U}_{i,j}^n}{\tau} + \frac{\mathbf{F}_{i+1/2,j}^n - \mathbf{F}_{i-1/2,j}^n}{h_r} + \frac{\mathbf{G}_{i,j+1/2}^n - \mathbf{G}_{i,j-1/2}^n}{h_z} = -\frac{\mathbf{S}_{i,j}^n}{(r_{i+1} - r_i)/2}, \quad (12)$$

где τ , h_r , h_z — шаги соответственно по времени и координатным направлениям r и z . Потоки $\mathbf{F}_{i\pm 1/2,j}^n$, $\mathbf{G}_{i,j\pm 1/2}^n$ через границы ячейки (i, j) вычисляются с помощью решения задач Римана о распаде разрыва между выбранной ячейкой и соседними ячейками. Погрешность вычислений в случае использования консервативного метода возникает только из-за ошибки дискретизации, но не из-за возникновения паразитных источников массы, импульса и энергии вычислительной природы.

Задача Римана решается с помощью метода HLLC (HLL + contact) [21], выбранного по нескольким причинам. Во-первых, он способен работать с уравнением состояния общего вида, а не только с идеальным газом. Во-вторых, в отличие от не менее известного метода HLL (Harten—Lax—van Leer) [22], он гораздо точнее разрешает ударные фронты и контактные разрывы. В-третьих, сравнительные тестовые расчёты показали, что метод HLLC демонстрирует способность разрешать ударные волны при очень сильных разрывах с большой разницей в начальных плотностях и давлениях справа и слева на несколько порядков величины. При использовании усреднённых по Роу значений u , v , c для вычисления скоростей волн он превосходит даже метод Роу [23], который известен своей точностью разрешения ударных волн благодаря используемому в нём точному решению специальным образом линеаризованной задачи Римана о распаде разрыва на границе между ячейками.

Следуя [19], мы используем следующий критерий устойчивости метода для вычисления подходящего для расчётов временного шага:

$$\tau < C_{\text{CFL}} \frac{h}{\max_{i,j} (|u_{i,j}^n| + c_{i,j}^n, |v_{i,j}^n| + c_{i,j}^n)}, \quad (13)$$

где h — минимальный из шагов по координатам r и z , C_{CFL} — число Куранта — Фридрихса — Леви, $0 < C_{\text{CFL}} < 0.5$ для 2D-схемы без расщепления (2), $c_{i,j}^n$ — скорость звука в ячейке (i, j) в момент времени t_n . На практике значение C_{CFL} выбирается исходя из специфики задачи и метода, и это всегда компромисс между желаемой скоростью вычисления, условиями задачи и ограничениями вычислительной методики. Условие (13) является практическим аналогом условия Куранта, Фридрихса и Леви [24].

Схема (12) имеет только первый порядок аппроксимации, что в вычислительной практике приводит к слишком широкому размазыванию фронтов ударов и контактных разрывов. Поэтому на каждом шаге вычислительного алгоритма мы выполняем линейную реконструкцию сеточной функции с использованием процедуры ENO второго порядка [25].

Верификация вычислительной схемы выполняется на стандартных одномерных и двумерных задачах [19], «тестах Торо».

3. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Ранее [14] уже была решена более простая задача моделирования с двумя различными УРС, такими как идеальный УРС и простой УРС типа Ми-Грюнейзена. Наиболее существенным, важным и трудным для реализации элементом гидродинамической модели является, конечно, УРС общего вида.

Существуют разные подходы к разработке таких УРС. Например, часто используются полуэмпирические УРС [26, 27] более широкого диапазона в табличной форме, которые используют группы К. В. Хищенко [28] и И. В. Ломоносова [29]. Для таких УРС берётся набор

данных из экспериментов по ударному сжатию для определённого участка фазовой диаграммы, аппроксимируемый аналитической зависимостью. Затем он сводится в таблицу и объединяется с данными из других областей фазовой диаграммы. Наиболее важным преимуществом таких табличных УРС является то, что они содержат области с фазовыми переходами. В то же время вычислительная реализация алгоритмов с использованием табличных УРС обычно требует больших ресурсов из-за большой скорости обращений к памяти компьютера для чтения, а также требует дополнительных усилий, если необходимо различать табличные значения. Аналитические зависимости лишены этих недостатков.

В представленной модели используется УРС, разработанное Ю. В. Петровым из Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН [15], по данным ударно-волновых экспериментов из базы Rusbank EOS и холодной кривой Розе [30]. УРС записывается в форме Ми — Грюнайзена:

$$p(\rho, e) = p_{\text{cold}}(\rho) + G(e - e_{\text{cold}}(\rho)), \quad (14)$$

где $p_{\text{cold}}(\rho)$, $e_{\text{cold}}(\rho)$ — холодные кривые алюминия, $G = 1.2$ — параметр Грюнайзена. Давление на холодной кривой алюминия выражается формулой

$$p_{\text{cold}} = \begin{cases} p_0 \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^a - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^b \right), & \text{если } \rho/\rho_0 \geq 1, \\ p_g \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right), & \text{если } \rho/\rho_0 < 1, \end{cases} \quad (15)$$

где $p_0 = 560.964$ ГПа, $a = 1.1266$, $b = 0.9775$ — параметры УРС, $p_g = 15$ ГПа — давление, определяющее максимальную абсолютную отрицательного давления в УРС, $\rho_0 = 2750$ кг/м³.

Выражение для энергии на холодной кривой алюминия имеет вид

$$e_{\text{cold}} = \begin{cases} p_0 \left(\frac{1}{a} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^a - \frac{1}{b} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^b \right), & \text{если } \rho/\rho_0 \geq 1, \\ p_0(a-b) \left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n-1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \right) - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{ab} \right), & \text{если } \rho/\rho_0 < 1. \end{cases} \quad (16)$$

Квадрат скорости звука в УРС, необходимый для расчётов скоростей волн в численном решении задачи Римана о распаде разрыва, рассчитывается по формуле

$$c^2(\rho, p) = p'_{\text{cold}}(\rho) + (G+1) \frac{p - p_{\text{cold}}(\rho)}{\rho}. \quad (17)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 показана динамика распространения и затухания ударной волны в одномерном срезе, сделанном по оси симметрии мишени. Мы можем видеть, что до момента времени $t \approx 38$ пс амплитуда волны близка к постоянной, а после 38 пс ударная волна начинает быстро затухать.

На рис. 3 показаны двумерные диаграммы давления в моменты времени $t = 19.2, 28.867.2$ пс, соответствующие плоскому одномерному, переходному и полусферическому режимам распространения волны. В плоском режиме значительная часть фронта волны является плоскостью, которая постепенно распадается по направлению от периферии к центру, это обеспечивает временное отсутствие затухания. В переходном режиме значительная часть плоского фронта ударной волны уже распалась, но по направлению оси симметрии волна движется всё ещё в практически плоском режиме, затухая очень слабо. В полусферическом режиме волна подвержена сильному и быстрому затуханию.

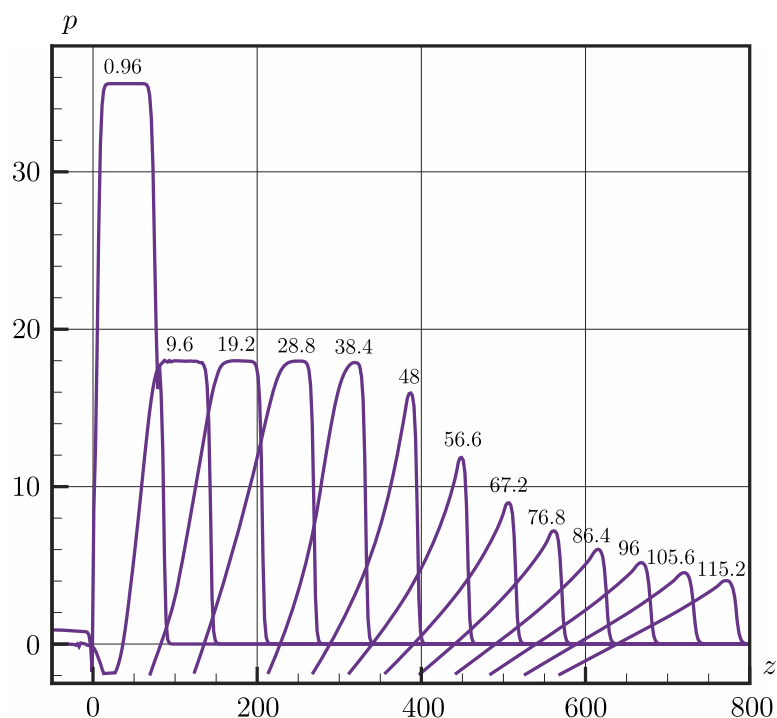


Рис. 2. Одномерные срезы профилей распространяющейся и затухающей ударной волны на оси симметрии задачи (оси лазерного пучка).

Подписи показывают время в пикосекундах (пс), соответствующее каждому профилю.

Луч лазера падает слева направо, т. е. ориентация мишени такая же, как и на рис. 1

Легко проделать сравнение полученных расчётов для трёхмерной задачи с аналогичной двумерной задачей. Двумерный случай можно интерпретировать как задачу о затухании ударной волны в бесконечно толстой мишени той же ширины. Поэтому, очевидно, волна будет затухать медленнее из-за отсутствующего измерения. На рис. 4 приведено сравнение представленных выше расчётов с расчётами с теми же начальными данными, но для плоского случая, без учёта осевой симметрии. На диаграмме видно заметное расхождение в законах затухания ударной волны в двумерном и трёхмерном случаях.

Теперь рассмотрим возможный упрочняющий эффект ударной волны, индуцированной воздействием ультракороткого лазерного импульса на металл.

Сильные ударные волны в металлах разделяются на пластическую ударную и упругую волну с давлением, которое называется пределом упругости Гюгоню (Hugoniot Elastic Limit, HEL) [31]. В отличие от типичных длинных ударных волн, имеющих относительно низкий p_{HEL} в упругой волне-предвестнике, ультракороткая ударная волна, генерируемая фемтосекундным лазерным импульсом, создаёт гораздо более сильный упругий предвестник. Такое сильное упругое сжатие возможно, поскольку продолжительность нагружения чрезвычайно мала. Единичный упругий скачок, проходящий через металл, не вызывает остаточных деформаций [32], в отличие от пластического удара, который вызывает в металле необратимые деформации. Такие остаточные деформации необходимы для ударного упрочнения. Мы предполагаем, что для начала процесса упрочнения необходимо приложить пороговое давление, превышающее предел текучести целевого металла. Для фемтосекундных лазерно-индуцированных ударных волн этот порог равен пределу упругости Гюгоню p_{HEL} . Для алюминия значение HEL составляет $p_{HEL} = 12.6$ ГПа [33]. Слабые упругие ударные волны с давлением $p < p_{HEL}$ не могут вызвать упрочнения металла. Согласно такому условию, в тех областях мишени, где максимальное напряжение, приложенное к частице материала, превышает HEL, предполагается, что происходит ударное упрочнение. И наоборот, в областях, где давление ниже HEL, упрочнения

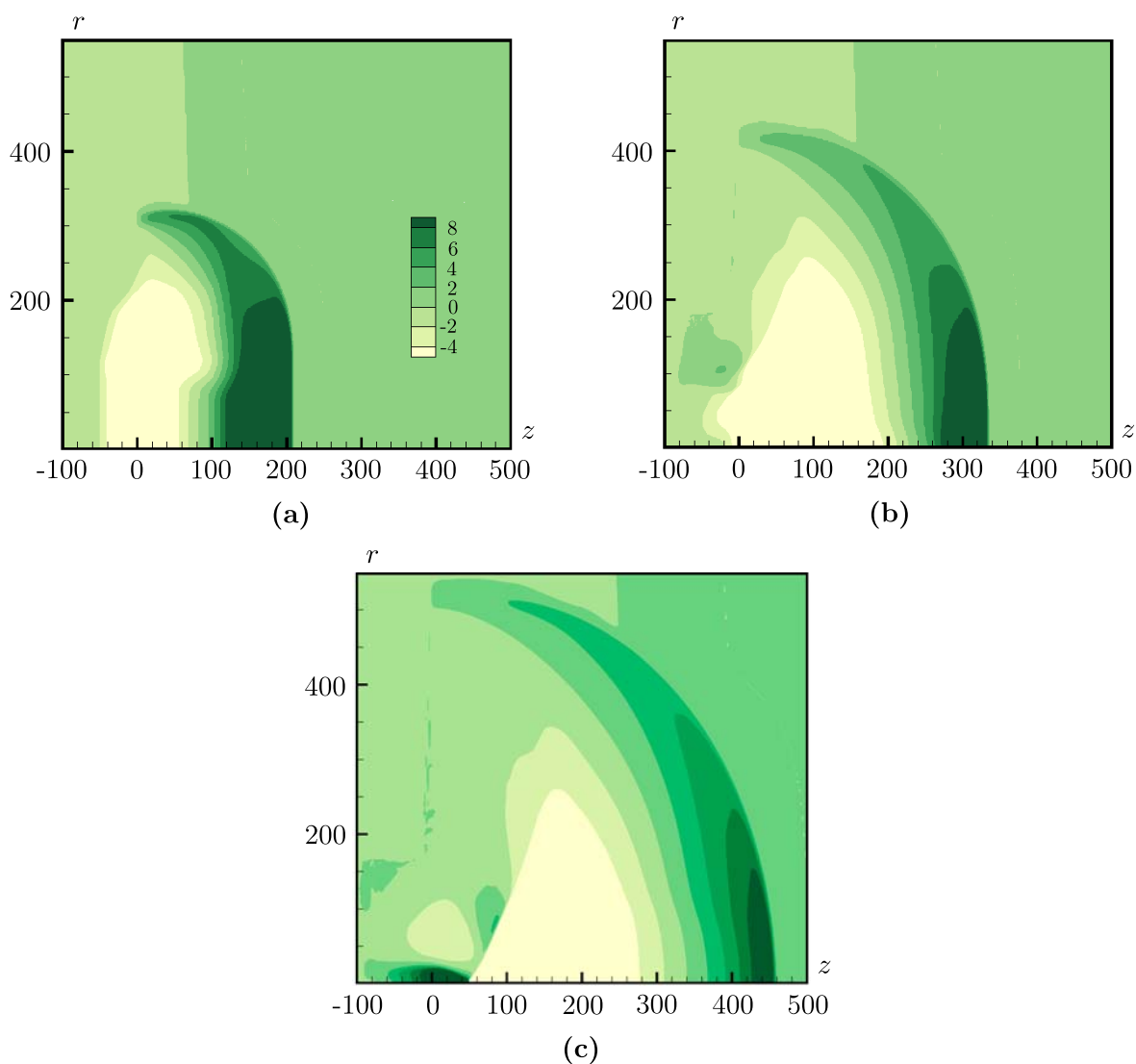


Рис. 3. Двумерные диаграммы давления в моменты времени $t = 19.2$ пс (а), $t = 38.4$ пс (б), $t = 57.6$ пс (с).

Режим распространения ударной волны: практически плоский и одномерный (а), переходный (б), полусферический (с). Луч лазера падает слева направо, т. е. ориентация мишени такая же, как и на рис. 1

не происходит.

Это соображение позволяет установить простой критерий для построения геометрической области мишени, в которой упрочняющее воздействие имеет место. К области упрочнения будут относиться все ячейки сетки, в которых величина давления хотя бы однажды за всё время симуляции превысила пороговое значение. Для построения области воспользуемся p_{\max} -диаграммой, т. е. двумерной картой, на которой показано максимальное давление в каждой точке от начала и до 96 пс, когда начальное возмущение уже распалось в такой степени, что ни в одной точке расчётной области давление точно не превысит p_{HEL} . Очевидно, область упрочнения на p_{\max} -диаграмме будет ограничена изолинией давления, соответствующей пороговому значению, т. е. величине p_{HEL} . Построенная диаграмма показана на рис. 5.

Заметим, что максимальная глубина упрочняющего воздействия на металл имеет тот же по порядку линейный размер, что и диаметр светового пятна, т. е. фемтосекундное упрочнение металла, согласно приведённой модели и расчётам, нельзя осуществить на глубину, существен-

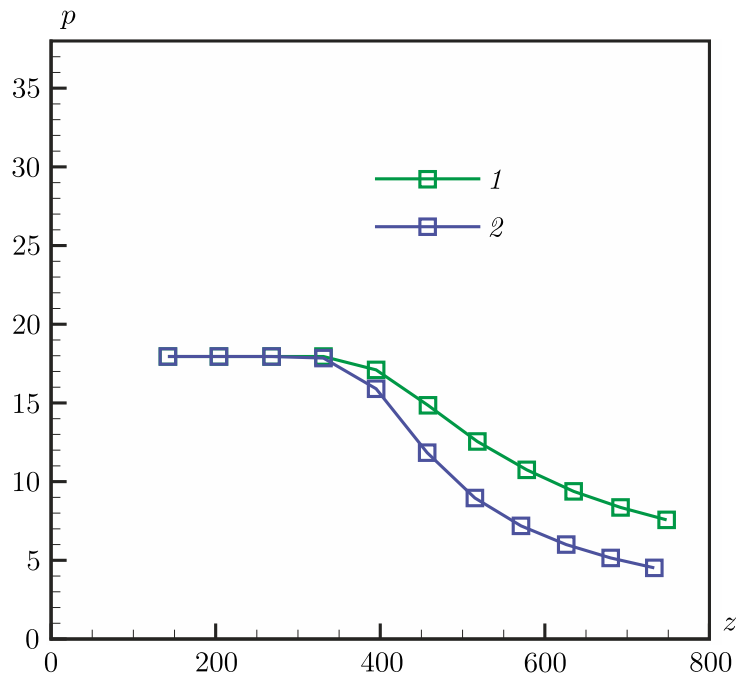


Рис. 4. Сравнение динамики амплитуды ударной волны при её распространении вглубь мишени в расчёте по алгоритму с «плоским» расчётом без учёта цилиндрической симметрии (1) и по настоящей модели (2).

Затухание в трёхмерной задаче выражено существенно сильнее, чем в двумерной. Луч лазера падает слева направо, т. е. ориентация мишени такая же, как и на рис. 1.

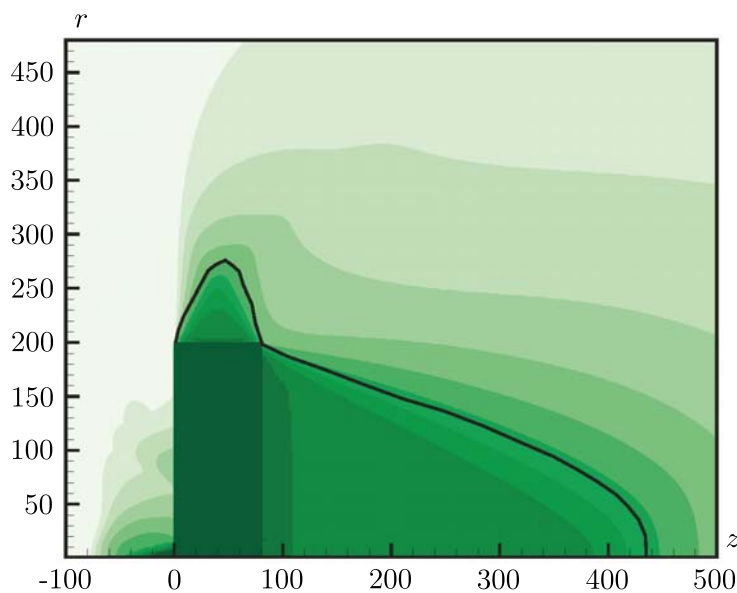


Рис. 5. p_{\max} -диаграмма в момент времени $t = 96$ пс.

Сплошной линией на диаграмме показан уровень $p = p_{\text{NEL}}$.

Клиновидная область, ограниченная этим уровнем, — область упрочнения металла вследствие фемтосекундного нагрева. Луч лазера падает слева направо, т. е. ориентация мишени такая же, как и на рис. 1

но превышающую размеры светового пятна. Также заметим, что индуцированная ультракоротким импульсом ударная волна способна упрочнять металл практически лишь в плоском

режиме распространения. Когда волна полностью сферизуется, давление в ней быстро падает ниже порога упрочнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены гидродинамическая модель и численный алгоритм, основанные на уравнениях Эйлера движения сплошной среды и полуэмпирическом уравнении состояния в форме Ми — Грюнайзена. Программа, разработанная на основе модели и реализующая алгоритм, способна эффективно выполнять расчёты по моделированию распространения и затухания индуцированной лазером ударной волны в сплошной металлической мишени. Проведена симуляция распространения и затухания ударной волны в конфигурации, близкой к экспериментальной задаче по одноимпульсному фемтосекундному лазерному упрочнению алюминия. Выделены этапы плоского одномерного, переходного и полусферического распространения ударной волны. Проведено сравнение закона затухания ударной волны с двумерным плоским случаем для аналогичного материала.

Модель и алгоритм планируется далее дорабатывать и улучшать. Разработка алгоритма для параллельных вычислений на основе модели позволит производить расчёты с существенно более высокой точностью на сетках с $\sim 10^6 \div 10^7$ ячеек. Использование многожидкостных моделей, таких, например, как GFM (Ghost Fluid Method) или модель Баера — Нунциато, позволит более точно и с меньшим расходом ресурсов разрешать контактную поверхность между металлом и вакуумом. Использование упругопластических моделей, таких, например, как модель Джонсона — Кука, позволит более точно оценивать эффективность упрочняющего воздействия и, как следствие, глубину и форму зоны упрочнения в облучаемом металле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vorobyev A.Y., Guo C. Colorizing metals with femtosecond laser pulses // *Appl. Phys. Lett.* 2008. V. 92. Article 041914; DOI: 10.1364/OE.14.002164
2. Bonse J., Kruger J., Hohm S., Rosenfeld A. Femtosecond laser-induced periodic surface structures // *Laser Appl.* 2012. V. 24, N 4. Article 042006; DOI: 10.2351/1.4712658
3. Leung C.L.A., Marussi S., Atwood R.C., Towrie M., Withers P.J., Lee P.D. In situ x-ray imaging of defect and molten pool dynamics in laser additive manufacturing // *Nat. Commun.* 2018. V. 9. Article 1355; DOI: 10.1038/s41467-018-03734-7
4. Bertoli U.S., MacDonald B.E., Schoenung J.M. Stability of cellular microstructure in laser powder bed fusion of 316l stainless steel // *Mater. Sci. Engrg.: A.* 2019. V. 739. P. 109–117; DOI 10.1016/j.msea.2018.10.051
5. Stratakis E., Barberoglou M., Fotakis C., Viau G., Garcia C., Shafeev G.A. Generation of Al nanoparticles via ablation of bulk Al in liquids with short laser pulses // *Optics Express.* 2009. V. 17, N 15. P. 12650–12659; DOI: 10.1364/OE.17.012650
6. Zhang D., Gokce B., Barcikowski S. Laser synthesis and processing of colloids: Fundamentals and applications // *Chem. Rev.* 2017. V. 117, N 5. P. 3990–4103; DOI: 10.1021/acs.chemrev.6b00468
7. Sano T., Eimura T., Kashiwabara R., Matsuda T., Isshiki Y., Hirose A., Tsutsumi S., Ara-kawa K., Hashimoto T., Masaki K., Sano Y. Femtosecond laser peening of 2024 aluminum alloy without a sacrificial overlay, under atmospheric conditions // *J. Laser Appl.* 2017. V. 29, N 1. Article 012005; DOI: 10.2351/1.4967013
8. Trdan U., Sano T., Klobcar D., Sano Y., Grum J., Sturm R. Improvement of corrosion re-sistance of AA2024-T3 using femtosecond laser peening without protective and confining medium // *Corros. Sci.* 2018. V. 143. P. 46–55; DOI: 10.1016/j.corsci.2018.08.030
9. *LSP Technologies: Introduction to Laser Peening* // <https://www.lsptechnologies.com/wp-content/uploads/2019/03/Intro-to-Laser-Peening-Webinar.pdf>

10. Shepelev V.V., Inogamov N.A. Two-dimensional turning of thermal flux from normal to lateral propagation in thin metal film irradiated by femtosecond laser pulse // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 946. Article 012010.
11. Shepelev V.V., Inogamov N.A., Fortova S.V. Thermal and dynamic effects of laser irradiation of thin metal films // Optical and Quantum Electronics. 2020. V. 52, N 2. Article 88.
12. Shepelev V.V., Inogamov N.A., Fortova S.V., Danilov P.A., Kudryashov S.I., Kuchmizhak A.A., Vitrik O.B. Action of a femtosecond laser pulse on thin metal film supported by glass substrate // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 1128. Article 012092.
13. Shepelev V.V., Inogamov N.A., Danilov P.A., Kudryashov S.I., Kuchmizhak A.A., Vitrik O.B. Ultrashort pulse action onto thin film on substrate: Qualitative model of shock propagation in sub-strate explaining phenomenon of fast growth of a hole with increase of absorbed energy // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1147. Article 012065.
14. Shepelev V., Inogamov N.A., Fortova S.V. The role of geometry in the generation of a shock wave by a femtosecond laser pulse // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1787. Article 012023.
15. Shepelev V.V., Inogamov N.A., Petrov Yu.V., Fortova S.V. Equations of state of the Mie-Gruneisen type as applied to problems of laser hardening of materials // J. Phys. Conf. Ser. (in press).
16. Anisimov S.I., Zhakhovskii V.V., Inogamov N.A., Nishihara K., Petrov Yu.V., Khokhlov V.A. Ablated matter expansion and crater formation under the action of ultrashort laser pulse // J. Experiment. Theor. Phys. 2006. V. 103, N 2. P. 183–197.
17. Анисимов С.И., Жаховский В.В., Иногамов Н.А., Нишихара К., Петров Ю.В., Хохлов В.А. Формирование кратера и откольной оболочки коротким лазерным импульсом // Мат. моделирование. 2006. V. 18, N 8. P. 111–122.
18. Fisher D., Fraenkel M., Henis Z., Moshe E., Eliezer S. Interband and intraband (Drude) contributions to femtosecond laser absorption in aluminum // Phys. Rev. E. 2001. V. 65. Article 016409.
19. Toro E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Springer-Verl., 1999.
20. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
21. Toro E., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver // Shock Waves. 1994. V. 4. P. 25–34.
22. Harten A., Lax P., van Leer B. On upstream differencing and godunov type methods for hyperbolic conservation Laws // SIAM Rev. 1983. V. 25, N 1. P. 35–61.
23. Roe P. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. P. 357–372.
24. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. Mathematische Annalen. 1928. V. 100, N 1. P. 32–74; DOI: 10.1007/BF01448839
25. Shu C.-W. Essentially Non-oscillatory and Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1998. P. 325–432; DOI: 10.1007/BFb0096355
26. Bushman A.V., Fortov V.E. Model equations of state // Sov. Phys. Usp. 1983. V. 26, N 6. P. 465–496; DOI: 10.1070/pu1983v026n06abeh004419
27. Bushman A.V., Kanel G.I., Ni A.L., Fortov V.E. Thermophysics and Dynamics of Intense Pulse Loadings. London: Taylor&Fransis, 1993.
28. Khishchenko K.V. The equation of state for magnesium at high pressures // Tech. Phys. Lett. 2004. V. 30, N 10. P. 829–831; DOI: 10.1134/1.1813723
29. Lomonosov I.V. Multi-phase equation of state for aluminum // Laser Part. Beams. 2007. V. 25. P. 567–584; DOI: 10.1017/S0263034607000687
30. Rose J.H., Smith J.R., Guinea F., Ferrante J. Universal features of the equation of state of metals // Phys. Rev. B. 1984. V. 29. Article 2963.
31. Zel'dovich Y.B., Raizer Y.P. Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena. Dover, 2002.

-
32. *Anisimov S.I., Zhakhovsky V.V., Inogamov N.A., Migdal K.P., Petrov Y.V., Khokhlov V.A.* High-energy-density physics and laser technologies // *J. Experiment. Theor. Phys.* 2019. V. 129, N 4. P. 757–782; DOI: 10.1134/S1063776119100169.
 33. *Zhakhovsky V.V., Budzevich M.M., Inogamov N.A., Oleynik I.I., White C.T.* Two-zone elastic-plastic single shock waves in solids // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 107, N 13. Article 135502; DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.135502

UDC 51.72

**HYDRODYNAMIC MODELING OF LASER-INDUCED SHOCK WAVES
IN ALUMINUM IN A CYLINDRICALLY-SYMMETRIC FORMULATION**

© 2023 V. V. Shepelev

*Institute for Computer Aided Design RAS,
ul. 2-ya Brestskaya 19/18, Moscow 123056, Russia*

E-mail: vadim.aries@gmail.com

Received 14.10.2022, revised 14.10.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. Using two-dimensional cylindrically-symmetric physical and mathematical model and an algorithm, a numerical investigation of the problem of irradiating a volumetric aluminum target with a single femtosecond laser pulse is carried out. The problem has a number of fundamental and practical applications related to the hardening effect of residual plastic deformations after the passage of a laser-induced shock wave, in particular, laser shock hardening technology, also known in the literature as laser forging, laser riveting or laser peening. Axial symmetry of laser beam makes it possible to reduce the dimension of the problem from three-dimensional to two-dimensional and significantly save computational resources. Semi-empirical equation of the state of aluminum in the form of a Mi–Gruneisen with the adjustment of parameters according to the cold curve of the metal and the data of shock-wave experiments was used. The law of shock wave propagation and attenuation is investigated, the stages of (1) single, (2) transient and (3) hemispherical shock wave propagation are identified. The size and shape of the area on which the strengthening effect can be carried out by a single femtosecond laser pulse are described.

Keywords: mathematical modeling, hydrodynamics, computational methods, Riemann solvers, femtosecond lasers, shock waves, equations of state.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.217

REFERENCES

1. Vorobyev A.Y., Guo C. Colorizing metals with femtosecond laser pulses. *Appl. Phys. Lett.*, 2008, Vol. 92, article 041914; DOI: 10.1364/OE.14.002164
2. Bonse J., Kruger J., Hohm S., Rosenfeld A. Femtosecond laser-induced periodic surface structures. *Laser Appl.*, 2012, Vol. 24, No. 4, article 042006; DOI: 10.2351/1.4712658
3. Leung C.L.A., Marussi S., Atwood R.C., Towrie M., Withers P.J., Lee P.D. In situ x-ray imaging of defect and molten pool dynamics in laser additive manufacturing. *Nat. Commun.*, 2018, Vol. 9, article 1355; DOI: 10.1038/s41467-018-03734-7
4. Bertoli U.S., MacDonald B.E., Schoenung J.M. Stability of cellular microstructure in laser powder bed fusion of 316l stainless steel. *Mater. Sci. Engrg.: A*, 2019, Vol. 739, pp. 109–117; DOI: 10.1016/j.msea.2018.10.051
5. Stratakis E., Barberoglou M., Fotakis C., Viau G., Garcia C., Shafeev G.A. Generation of Al nanoparticles via ablation of bulk Al in liquids with short laser pulses. *Optics Express*, 2009, Vol. 17, No. 15, pp. 12650–12659; DOI: 10.1364/OE.17.012650
6. Zhang D., Gokce B., Barcikowski S. Laser synthesis and processing of colloids: Fundamentals and applications. *Chem. Rev.*, 2017, Vol. 117, No. 5, pp. 3990–4103; DOI: 10.1021/acs.chemrev.6b00468

7. Sano T., Eimura T., Kashiwabara R., Matsuda T., Isshiki Y., Hirose A., Tsutsumi S., Ara-kawa K., Hashimoto T., Masaki K., Sano Y. Femtosecond laser peening of 2024 aluminum alloy without a sacrificial overlay, under atmospheric conditions. *J. Laser Appl.*, 2017, Vol. 29, No. 1, article 012005; DOI: 10.2351/1.4967013
8. Trdan U., Sano T., Klobcar D., Sano Y., Grum J., Sturm R. Improvement of corrosion re-sistance of AA2024-T3 using femtosecond laser peening without protective and confining medium. *Corros. Sci.*, 2018, Vol. 143, pp. 46–55; DOI: 10.1016/j.corsci.2018.08.030
9. LSP Technologies: Introduction to Laser Peening. <https://www.lsptechnologies.com/wp-content/uploads/2019/03/Intro-to-Laser-Peening-Webinar.pdf>
10. Shepelev V.V., Inogamov N.A. Two-dimensional turning of thermal flux from normal to lateral propagation in thin metal film irradiated by femtosecond laser pulse. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, Vol. 946, article 012010.
11. Shepelev V.V., Inogamov N.A., Fortova S.V. Thermal and dynamic effects of laser irradiation of thin metal films. *Optical and Quantum Electronics*, 2020, Vol. 52, No. 2, article 88.
12. Shepelev V.V., Inogamov N.A., Fortova S.V., Danilov P.A., Kudryashov S.I., Kuchmizhak A.A., Vitrik O.B. Action of a femtosecond laser pulse on thin metal film supported by glass substrate. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2018, Vol. 1128, article 012092.
13. Shepelev V.V., Inogamov N.A., Danilov P.A., Kudryashov S.I., Kuchmizhak A.A., Vitrik O.B. Ultrashort pulse action onto thin film on substrate: Qualitative model of shock propagation in sub-strate explaining phenomenon of fast growth of a hole with increase of absorbed energy. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, Vol. 1147, article 012065.
14. Shepelev V., Inogamov N.A., Fortova S.V. The role of geometry in the generation of a shock wave by a femtosecond laser pulse. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, Vol. 1787, article 012023.
15. Shepelev V.V., Inogamov N.A., Petrov Yu.V., Fortova S.V. Equations of state of the Mie-Gruneisen type as applied to problems of laser hardening of materials. *J. Phys. Conf. Ser.* (in press).
16. Anisimov S.I., Zhakhovskii V.V., Inogamov N.A., Nishihara K., Petrov Yu.V., Khokhlov V.A. Ablated matter expansion and crater formation under the action of ultrashort laser pulse. *J. Experiment. Theor. Phys.*, 2006, Vol. 103, No. 2, pp. 183–197.
17. Anisimov S.I., Zhakhovskii V.V., Inogamov N.A., Nishikhara K., Petrov Yu.V., Khokhlov V.A. Formirovanie kratera i otkol'noi obolochki korotkim lazernym impul'som [Formation of a crater and a split shell by a short laser pulse]. *Mat. Model.*, 2006, Vol. 18, No. 8, pp. 111–122 (in Russian).
18. Fisher D., Fraenkel M., Henis Z., Moshe E., Eliezer S. Interband and intraband (Drude) contributions to femtosecond laser absorption in aluminum. *Phys. Rev. E.*, 2001, Vol. 65, article 016409.
19. Toro E.F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer-Verl., 1999.
20. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Kraiko A.N., Prokopov G.P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
21. Toro E., Spruce M., Speares W. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver. *Shock Waves*, 1994, Vol. 4, pp. 25–34.
22. Harten A., Lax P., van Leer B. On upstream differencing and godunov type methods for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.*, 1983, Vol. 25, No 1, pp. 35–61.
23. Roe P. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 1981, Vol. 43, pp. 357–372.
24. Courant R., Friedrichs K., Lewy H. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physic. *Math. Annal.*, 1928, Vol. 100, No. 1, pp. 32–74; DOI: 10.1007/BF01448839 (in German).
25. Shu C.-W. *Essentially Non-oscillatory and Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1998, pp. 325–432; DOI: 10.1007/BFb0096355
26. Bushman A.V., Fortov V.E. Model equations of state. *Sov. Phys. Usp.*, 1983, Vol. 26, No. 6, pp. 465–496; DOI: 10.1070/pu1983v026n06abeh004419

27. Bushman A.V., Kanel G.I., Ni A.L., Fortov V.E. *Thermophysics and Dynamics of Intense Pulse Loadings*. London: Taylor&Fransis, 1993.
28. Khishchenko K.V. The equation of state for magnesium at high pressures. *Tech. Phys. Lett.*, 2004, Vol. 30, No. 10, pp. 829–831; DOI: 10.1134/1.1813723
29. Lomonosov I.V. Multi-phase equation of state for aluminum. *Laser Part. Beams*, 2007, Vol. 25, pp. 567–584; DOI: 10.1017/S0263034607000687
30. Rose J.H., Smith J.R., Guinea F., Ferrante J. Universal features of the equation of state of metals. *Phys. Rev. B.*, 1984, Vol. 29, article 2963.
31. Zel'dovich Y.B., Raizer Y.P. *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Dover, 2002.
32. Anisimov S.I., Zhakhovsky V.V., Inogamov N.A., Migdal K.P., Petrov Y.V., Khokhlov V.A. High-energy-density physics and laser technologies. *J. Experiment. Theor. Phys.*, 2019, Vol. 129, No. 4, pp. 757–782; DOI: 10.1134/S1063776119100169.
33. Zhakhovsky V.V., Budzevich M.M., Inogamov N.A., Oleynik I.I., White C.T. Two-zone elastic-plastic single shock waves in solids. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, Vol. 107, No. 13, article 135502; DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.135502

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2023. Том 26, № 2

Зав. редакцией Т. А. Звонарева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 07.11.2023 г.
Формат $60 \times 84^{1/8}$. Усл. печ. л. 26,7.
Объём 15,3 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия