

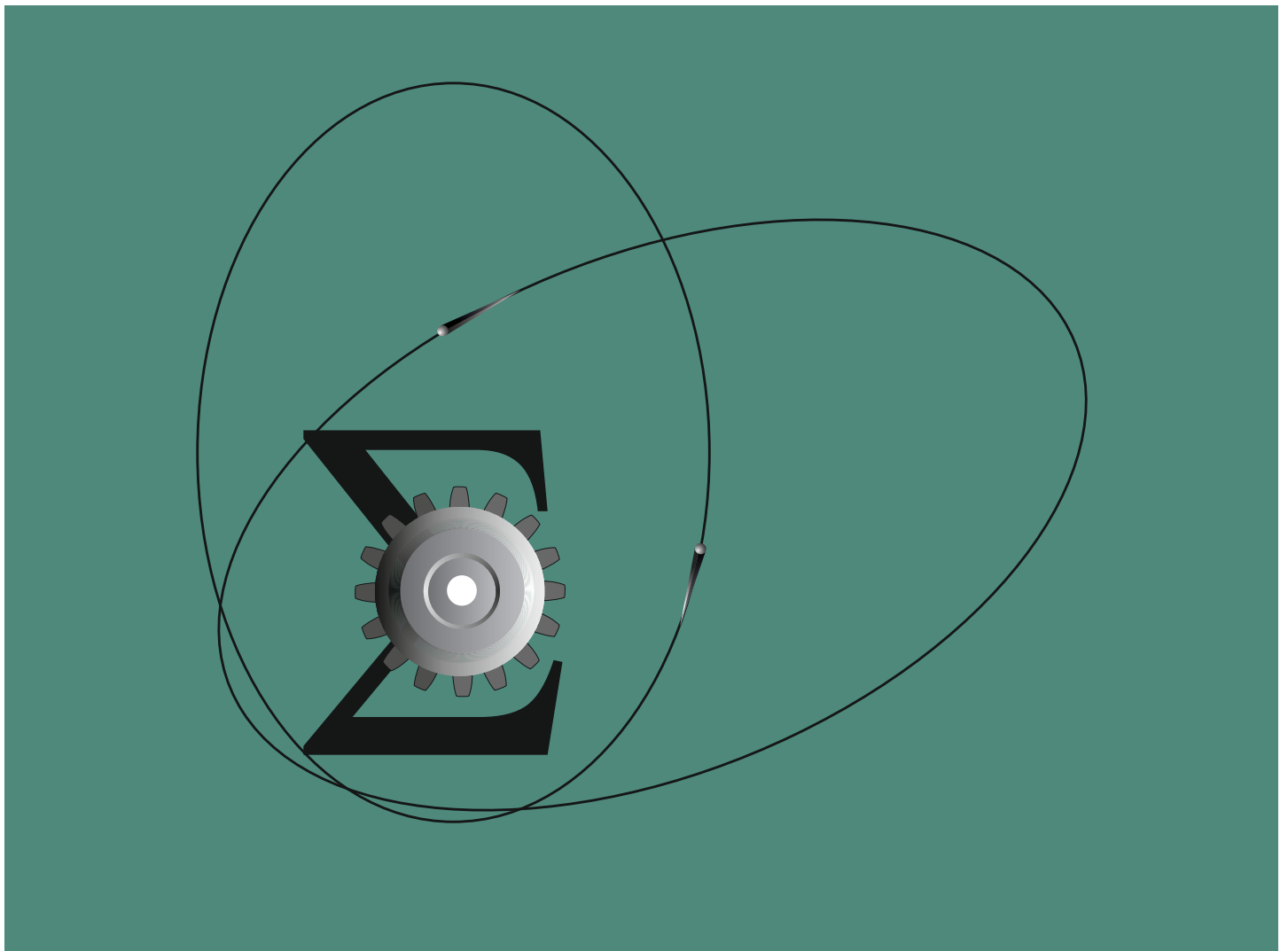
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 26

№ 3

2023



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	М. А. Шишленин
Отв. секретарь	В. А. Дедок

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	И. Б. Петров
Ю. С. Волков	П. И. Плотников
К. В. Воронцов	М. И. Протасов
А. В. Гасников	В. Г. Романов
М. А. Гузеев	Е. М. Рудой
В. П. Ильин	К. К. Сабельфельд
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. Н. Сидоров
А. Л. Карчевский	А. С. Терсенов
М. В. Клибанов	В. С. Тимофеев
С. С. Кутателадзе	В. В. Шайдуров
В. А. Левин	А. А. Шананин
Н. И. Макаренко	

Учредители журнала:

Сибирское отделение РАН

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году

Выходит 4 раза в год

Том 26, № 3(95)

Научный журнал

Июль–сентябрь, 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Богданов В. В., Волков Ю. С. Модифицированный метод парабол поиска корня . . .	5
Будянский А. В., Цибулин В. Г. Моделирование конкуренции популяций с учётом многофакторного таксиса	14
Деревцов Е. Ю. Лучевые преобразования моментов планарных тензорных полей . . .	26
Ковалёв М. Д. О графах и структурных формулах теории механизмов	42
Косов А. А., Семенов Э. И. Об интегрируемости и устойчивости стационарных решений гиростата Горячева — Сретенского	56
Куперштох А. Л., Медведев Д. А., Альянов А. В. Моделирование охлаждения подложки при испарении чистого пара с поверхности тонкой плёнки и капель жидкости	73
Лотов В. И. О времени первого достижения уровня для процесса возрастания-убывания	86
Сибиряков Н. Е., Кочкин Д. Ю., Кабов О. А., Карчевский А. Л. Определение плотности теплового потока в области контактной линии при испарении жидкости в пузырь	95
Соболев В. А. Декомпозиция сингулярно возмущённых задач оптимального слежения с заданной эталонной траекторией	112
Сорокин С. Б. Разностный метод вычисления потока тепла на недоступной границе в задаче теплопроводности	125
Фурман Д. П., Бухарина Т. А., Голубятников В. П. Центральный регуляторный контур системы морфогенеза механорецепторов дрозофилы: эффекты мутаций . . .	142
Хлуднев А. М. О равновесии упругих тел со слабо искривлённой перемычкой	154
Шинкарев В. Д., Лукьяненко Д. В., Тихонравов А. В., Ягола А. Г. Алгоритм контроля процесса напыления оптических покрытий на основе выборочных данных широкополосных измерений	169
Шубина М. В. Точные решения типа бегущей волны одномерных моделей инвазии рака	179

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СибЖИМ

Институт математики

им. С. Л. Соболева СО РАН

просп. Акад. Коптюга, 4

Новосибирск 630090, Россия

Телефон: +7 (383) 329-76-11

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998

4 issues per year

Vol. 26, No. 3(95)

Scientific journal

July–September, 2023

CONTENTS

Bogdanov V. V., Volkov Yu. S. A modified quadratic interpolation method for root finding	5
Budyansky A. V., Tsybulin V. G. Modeling of competition between populations with multi-taxis	14
Derevtsov E. Yu. Momentum ray transforms over planar tensor fields	26
Kovalev M. D. On graphs and structural formulas of the mechanisms theory	42
Kosov A. A., Semenov E. I. On the integrability and stability of stationary solutions of the Goryachev–Sretensky gyrostat	56
Kupershtokh A. L., Medvedev D. A., Alyanov A. V. Simulation of substrate cooling during evaporation of pure vapor from the surface of a thin liquid film and droplets ..	73
Lotov V. I. On the time of the first level achievement for the ascending-descending process	86
Sibiriyakov N. E., Kochkin D. Yu., Kabov O. A., Karchevsky A. L. Determination of the heat flux density in the region of the contact line during evaporation of a liquid into a bubble	95
Sobolev V. A. Decomposition of singularly perturbed optimal tracking problems with a given reference trajectory	112
Sorokin S. B. Difference method for calculating the heat flux at an inaccessible boundary in the problem of heat conduction	125
Furman D. P., Bukharina T. A., Golubyatnikov V. P. The central regulatory circuit of the morphogenesis system drosophila mechanoreceptors: mutation effects	142
Khudnev A. M. On the equilibrium of elastic bodies with weakly curved junction	154
Shinkarev V. D., Lukyanenko D. V., Tikhonravov A. V., Yagola A. G. Algorithm for controlling the process of spraying optical coatings based on sample broadband measurement data	169
Shubina M. V. Exact traveling wave solutions of one-dimensional models of cancer invasion	179

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:

SibJIM

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

pr. Akad. Koptiyuga 4

Novosibirsk 630090, Russia

Phone: +7 (383) 329-76-11

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

УДК 519.65

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПАРАБОЛ ПОИСКА КОРНЯ

© 2023 В. В. Богданов^a, Ю. С. Волков^b*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*E-mails: ^abogdanov@math.nsc.ru, ^bvolkov@math.nsc.ruПоступила в редакцию 27.04.2023 г.; после доработки 26.05.2023 г.;
принята к публикации 07.06.2023 г.

Предлагается модификация метода парабол для поиска корня непрерывной функции, состоящая в том, что одновременно строятся две параболы, интерполирующие значения заданной функции. Показано, что если третья производная исходной функции знакопостоянна на рассматриваемом промежутке локализации искомого корня, то корень лежит между корнями парабол. Это позволяет существенно сузить интервал локализации корня и уменьшить количество шагов для вычисления корня с заданной точностью. Предложенная модификация метода парабол используется в задаче расчёта изолиний при моделировании универсальной характеристики гидротурбин.

Ключевые слова: метод парабол, моделирование, функция эффективности гидротурбины, сплайн, многомерная аппроксимация.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.301

ВВЕДЕНИЕ

Проблема отыскания корней нелинейного алгебраического уравнения $f(x) = 0$ известна давно и в значительной степени изучена. Ей посвящена обширная литература, она подробно изложена в монографиях и учебниках [1–5]. Однако регулярно появляются работы, предлагающие какие-то улучшения известных методов (см., например, [6–8]). Одним из самых простых и надёжных методов поиска корня вещественной непрерывной функции является метод дихотомии или половинного деления. Но он является и самым медленно сходящимся. Для работы данного метода требуется выделение интервала, содержащего корень. Как альтернатива этому методу выступает метод секущих, называемый также методом хорд или методом линейной интерполяции. Сложность и скорость сходимости этих методов примерно одинакова. На каждом шаге интервал локализации корня уменьшается. В работе [9] в результате сопоставления различных методов поиска корней показано, что для простых корней наиболее экономичен метод секущих.

Немного более сложным, но и более быстрым выступает метод парабол, когда вместо линейной интерполяции осуществляется интерполяция квадратичной параболой уже по трём точкам интервала локализации (см. [2]). Ясно, что один из корней параболы всегда будет лежать между заданными точками со значениями функции разных знаков, что говорит о сходимости метода. Сходимость этого метода в целом быстрее сходимости методов дихотомии и хорд, хотя вместе с уменьшением числа итераций возрастают затраты на вычисление корня квадратного уравнения. Есть и другие быстро сходящиеся методы, например метод Ньютона, но все они являются локально сходящимися, так как могут не сходиться при определённых

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН (проект FWNF–2022–0015).

начальных приближениях. К классу полностью сходящихся методов относятся только методы половинного деления и секущих либо гибридные методы с использованием этих двух; обзор таких методов приведён в [10]. В данной работе мы предлагаем модификацию метода парабол путём построения одновременно двух парабол, позволяющую на каждом шаге существенно уменьшать интервал локализации корня. Также приводится пример практической задачи, где процедура поиска корня производится многократно, поэтому любое сокращение времени поиска корня весьма актуально. Это задача математического моделирования универсальной характеристики гидротурбины.

1. МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПАРАБОЛ

Пусть на отрезке локализации корня $[a, b]$ имеются четыре значения функции по два с каждой стороны от корня, который необходимо вычислить. Будем для определённости считать, что в точках x_0 и x_1 значения заданной функции $f(x)$ отрицательны:

$$f(x_0) < 0, \quad f(x_1) < 0, \quad x_0 < x_1,$$

а в точках x_2 и x_3 положительны:

$$f(x_2) > 0, \quad f(x_3) > 0, \quad x_1 < x_2 < x_3.$$

Построим две интерполяционные параболы $P_1(x)$ и $P_2(x)$, одну через левые три точки и вторую через правые (см. рис. 1). Ясно, что каждая из этих парабол пересечёт ось абсцисс между точками x_1 и x_2 . Интересен случай, когда искомый корень функции будет находиться между корнями этих парабол. Оказывается, такое положение корня гарантируется в случае постоянства знака третьей производной рассматриваемой функции.

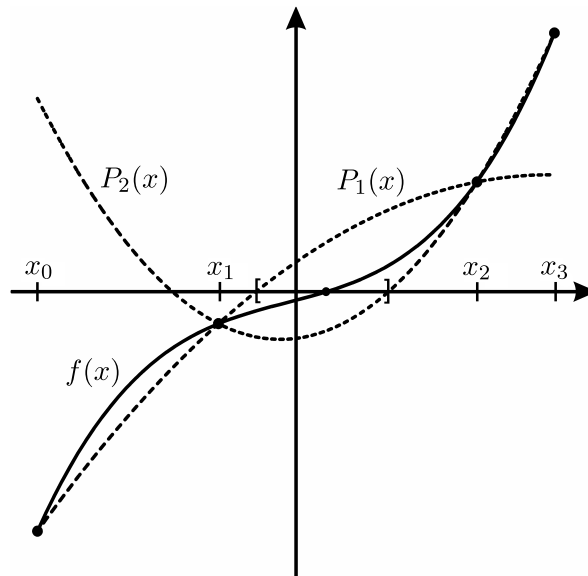


Рис. 1. Функция $f(x)$ (сплошная линия), точки локализации корня x_0, x_1, x_2, x_3 и две интерполяционные параболы $P_1(x)$ и $P_2(x)$ (пунктирные линии)

Теорема. Пусть x_1^* и x_2^* суть корни интерполяционных парабол $P_1(x)$ и $P_2(x)$, лежащие в промежутке (x_1, x_2) . Тогда если $f'''(x)$ знакопостоянна на отрезке $[x_0, x_3]$, то корень функции $f(x)$ расположен между точками x_1^* и x_2^* .

Доказательство. Параболы $P_1(x)$ и $P_2(x)$ являются интерполяционными многочленами Лагранжа, следовательно [3], для погрешностей интерполяции справедливы формулы:

$$P_1(x) - f(x) = \frac{1}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f'''(\xi_1),$$

$$P_2(x) - f(x) = \frac{1}{3!}(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f'''(\xi_2)$$

для некоторых чисел $\xi_1 \in (x_0, x_2)$ и $\xi_2 \in (x_1, x_3)$. Поэтому величина

$$[P_1(x) - f(x)][P_2(x) - f(x)] = \frac{1}{36}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)f'''(\xi_1)f'''(\xi_2)$$

всегда будет неположительна на рассматриваемом промежутке $[x_0, x_3]$, если значения функций $f'''(\xi_1)$ и $f'''(\xi_2)$ одного знака, что говорит о расположении парабол $P_1(x)$ и $P_2(x)$ по разные стороны от функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Теорема доказана. \square

Таким образом, если на интервале поиска корня знак третьей производной заданной функции постоянен, то построение двух таких парабол приводит, как правило, к существенному сужению интервала локализации корня.

Приведём схему алгоритма предлагаемого метода. Считаем, что заданы функция $f(x)$ и точки $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ такие, что

$$f(x_0) < 0, \quad f(x_1) < 0, \quad f(x_2) > 0, \quad f(x_3) > 0.$$

Достаточно рассмотреть только такой случай, другой случай сводится к этому заменой функции на $-f(x)$.

ШАГ 1. Строим параболу

$$P_1(x) = (x - x_2)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2)f[x_1, x_2] + f(x_2),$$

интерполирующую функцию $f(x)$ в точках x_0, x_1 и x_2 . Здесь $f[x_1, x_2]$ и $f[x_0, x_1, x_2]$ суть обычные разделённые разности первого и второго порядков от функции $f(x)$. Корень этой параболы x_1^* находим по формуле

$$x_1^* = x_2 - \frac{2f(x_2)}{A + \text{sign}(A)\sqrt{A^2 - 4f(x_2)f[x_0, x_1, x_2]}},$$

где $A = f[x_1, x_2] + f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]$. Отметим, что выбран корень параболы, который расположен на отрезке $[x_1, x_2]$.

ШАГ 2. Аналогичным образом строим параболу

$$P_2(x) = (x - x_1)(x - x_2)f[x_1, x_2, x_3] + (x - x_1)f[x_1, x_2] + f(x_1),$$

интерполирующую функцию $f(x)$ в точках x_1, x_2 и x_3 , и находим её корень

$$x_2^* = x_1 - \frac{2f(x_1)}{B + \text{sign}(B)\sqrt{B^2 - 4f(x_1)f[x_1, x_2, x_3]}},$$

где $B = f[x_1, x_2] + f[x_1, x_3] - f[x_2, x_3]$, причём здесь также выбран корень параболы, который расположен на отрезке $[x_1, x_2]$.

ШАГ 3. Проверяем взаимное расположение точек x_1^* и x_2^* .

ШАГ 3.1. Если $x_1^* < x_2^*$, то проверяем знак функции $f(x)$ в точке x_1^* .

ШАГ 3.1.1. Если $f(x_1^*) < 0$, то проверяем знак функции $f(x)$ в точке x_2^* .

ШАГ 3.1.1.1. Если $f(x_2^*) < 0$, то точки x_2 и x_3 оставляем неизменными, а точки x_1^* и x_2^* обозначаем x_0 и x_1 соответственно.

ШАГ 3.1.1.2. Если $f(x_2^*) > 0$, то точкам x_0, x_1, x_2, x_3 присваиваем значения x_1, x_1^*, x_2^*, x_2 соответственно.

ШАГ 3.1.2. Если $f(x_1^*) > 0$, то точки x_0 и x_1 не меняем, а точки x_1^* и x_2^* обозначаем x_2 и x_3 соответственно.

ШАГ 3.2. Если $x_1^* > x_2^*$, то проверяем знак функции $f(x)$ в точке x_2^* .

ШАГ 3.2.1. Если $f(x_2^*) < 0$, то проверяем знак функции $f(x)$ в точке x_1^* .

ШАГ 3.2.1.1. Если $f(x_1^*) < 0$, то точки x_2 и x_3 не меняем, а точки x_2^* и x_1^* обозначаем x_0 и x_1 соответственно.

ШАГ 3.2.1.2. Если $f(x_1^*) > 0$, то точки x_1, x_2^*, x_1^*, x_2 обозначаем x_0, x_1, x_2, x_3 соответственно.

ШАГ 3.2.2. Если $f(x_2^*) > 0$, то точки x_0 и x_1 не меняем, а точки x_2^* и x_1^* обозначаем x_2 и x_3 соответственно.

ШАГ 4. Проверяем длину отрезка $[x_1, x_2]$ локализации корня. Если заданная точность не достигнута, то возвращаемся к шагу 1 и повторяем вычисления.

Один шаг модифицированного метода состоит в построении двух парабол, необходимо решить два квадратных уравнения и вычислить два значения функции. Поскольку заранее не известно, является ли третья производная заданной функции знакопостоянной на интервале $[x_0, x_3]$, то в алгоритме предусмотрены дополнительные проверки. В случае знакопостоянства на шаге 3 алгоритма следует выполнять только пп. 3.1.1.2 или 3.2.1.2. Проведённые многочисленные расчёты в подавляющем большинстве случаев демонстрируют сокращение времени вычисления корня, но иногда может оказаться, что предлагаемая модификация не даёт улучшения сходимости в сравнении с обычным методом парабол: количество построенных парабол для вычисления значения корня с компьютерной точностью примерно одинаково в обоих случаях и даже изредка в методе без модификации на одно-два построения парабол может быть меньше. Однако при использовании обычного метода парабол иногда может случиться так, что сужение интервала локализации искомого корня функции происходит очень медленно, например, если на каждом шаге значения функции в точках, являющихся корнями парабол, всегда оказываются одного знака. Тогда предлагаемая модификация метода парабол приводит к существенному уменьшению числа итераций.

Пример. Задана функция $f(x) = xe^x - 10$ с интервалом локализации корня $[-10, 10]$. Корень функции $f(x)$, равный $1.7455280027407\dots$, на компьютере обычным методом парабол находится за 68 шагов, если в качестве начальных точек для параболы взять границы отрезка и его середину, причём правая граница локализации корня за всё время вычислений осталась неизменной. Даже метод половинного деления для этого примера потребует всего лишь 50 шагов.

Посмотрим, что даёт предлагаемая модификация. Кроме граничных точек -10 и 10 , в которых заданная функция имеет разные знаки, нам нужны ещё две точки с разными знаками рассматриваемой функции. В качестве одной из них естественно взять середину исходного промежутка $x = 0$, значение в ней отрицательно. Другая также может быть взята как середина нового промежутка локализации корня, т. е. $x = 5$. Теперь требуется всего 13 шагов, т. е. 26 построений парабол.

В следующем разделе описана практическая задача, где использован предложенный алгоритм. На практике довольно часто исследуемая функция представлена кубическим сплайном, следовательно, у такой функции третья производная является кусочно-постоянной, что почти всегда ведёт к выполнению условий теоремы.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ГИДРОТУРБИНЫ

Турбина гидроэлектрических станций (ГЭС) использует потенциальную энергию воды, расположенной на разных высотах над уровнем моря. Мощность потока воды зависит от её количества и напора и определяется из общих законов механики. Эта мощность, отбираемая турбиной от протекающей жидкости, передаётся валу, и механическая энергия вращения вала далее преобразуется электрогенератором в электрическую. Однако не вся мощность жидкости будет передана валу и может быть использована, так как в самой турбоустановке имеются потери, учитываемые функцией эффективности турбины, т. е. коэффициентом полезного действия (КПД). Конечно же основной задачей при строительстве ГЭС является минимизация потерь мощности или задача увеличения эффективности, т. е. повышения КПД. В современных гидравлических турбинах величина КПД достигает 92–93% и выше (до 96%) [11].

Главным элементом турбины является рабочее колесо, в котором и осуществляется преобразование энергии за счёт взаимодействия потока жидкости с лопастями рабочего колеса. Поэтому вид турбины в основном определяется формой рабочего колеса и условиями движения жидкости в его лопастной системе. Большой накопленный опыт, как правило, позволяет определиться с типом гидротурбин для каждого конкретного случая.

Гидротурбины одной системы могут отличаться размерами, конструкцией механизмов, конфигурацией проточного тракта. Все эти различия определяют индивидуальные свойства турбины, в первую очередь её КПД. Зависимости КПД, кавитационного коэффициента и некоторых других функций от основных параметров (диаметр рабочего колеса, частота вращения, расход воды, напор) на различных режимах работы являются основными характеристиками турбины, они определяют все необходимые показатели турбин для различных условий её работы.

Однако такие данные для натурной гидротурбины, устанавливаемой на ГЭС при строительстве, получить заранее невозможно, но их можно получить для геометрически подобной модельной турбины при её испытаниях и исследованиях на лабораторных стендах. При лабораторных испытаниях на модели необходимо выдерживать требования закона подобия, должны соблюдаться геометрическое, кинетическое и динамическое подобия. Требования всех критериев подобия соблюсти трудно, в частности, практически неосуществимо условие равенства чисел Рейнольдса в натурной турбине и на модели. В то же время практический опыт показывает, что остающиеся различия оказывают малое влияние на различие в индивидуальных свойствах и основных характеристиках модели и натурной, и экспериментально разработаны методики пересчёта всех параметров, учитывающие масштабный эффект [12, 13].

Основным документом для выбора основных параметров натурной гидротурбины является так называемая главная универсальная характеристика или просто универсальная характеристика, представляющая изображение линий равных значений функции эффективности η в плоскости координат $Q'_I - n'_I$ (приведённые величины расхода воды и частоты вращения), с нанесением линий равных значений величины открывающего аппарата a_0 и кавитационного коэффициента σ . Если турбина поворотно-лопастная (ПЛ), то наносятся ещё линии угла поворота лопастей φ . На рис. 2 приведён пример универсальной характеристики ПЛ-турбины, взятый из [14].

Вопросы построения функции эффективности η для создания математической модели универсальной характеристики рабочего колеса радиально осевой и ПЛ-гидротурбины по результатам энергетических испытаний модельной гидротурбины на лабораторном стенде рассматривались в работах [15, 16]. В основе рассмотренной методики лежит подход сплайн-аппроксимации многомерных хаотически расположенных данных с помощью радиальных базисных функций, который показал хорошие результаты и в других задачах, связанных с многомерной аппроксимацией [17, 18]. Построенная функция эффективности η в виде так называемых D^m -сплайна или натурального сплайна, иногда также называемых полигармоническими

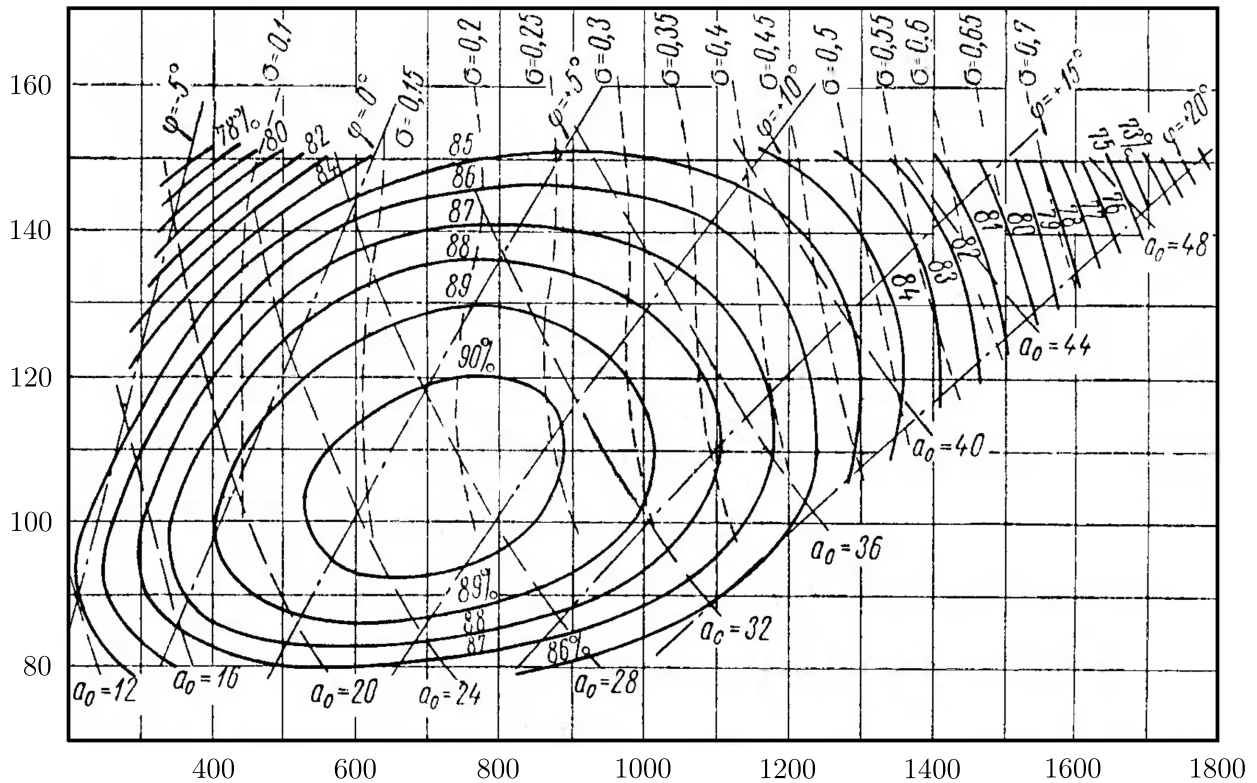


Рис. 2. Главная универсальная характеристика ПЛ-турбины [14]

сплайнами или псевдополиномиальными (см., например, [19–21]), используется в расчётах для создания основного документа, изображённого на рис. 2.

Для математического моделирования универсальной характеристики гидротурбины и решения необходимых задач разработан комплекс программ УХ, в котором для построения изолиний при поиске корня функции используется именно модифицированный метод парабол, что позволило сократить время расчёта изолиний примерно на 8%. Созданный комплекс программ УХ принят в промышленную эксплуатацию на АО «Ленинградский металлический завод».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модификация метода парабол для поиска корня непрерывной функции, которая основана на рассмотрении положения параболы, интерполирующей исходную функцию относительно этой функции. Указано, когда две параболы, интерполирующие значения функции, будут лежать по разные стороны от заданной функции. Показано, что построение двух парабол позволяет существенно сузить интервал локализации корня и уменьшить количество шагов для вычисления корня. Приведена практическая задача, в которой предложенная модификация метода парабол позволяет повысить эффективность расчёта изолиний при моделировании универсальной характеристики гидротурбин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бинوم, 2012.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Физматгиз, 1966.

4. Воеводин В.В. Численные методы алгебры (теория и алгоритмы). М.: Наука, 1966.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
6. Costabile F., Gualtieri M.I., Luceri R. A modification of Muller's method // *Calcolo*. 2006. V. 43, N 1. P. 39–50.
7. Gemechu T., Thota S. On new root finding algorithms for solving nonlinear transcendental equations // *Internat. J. Chem. Math. Phys.* 2020. V. 4, N 2. P. 18–24.
8. Cordero A., Garrido N., Torregrosa J.R., Triguero–Navarro P. Iterative schemes for finding all roots simultaneously of nonlinear equations // *Appl. Math. Lett.* 2022. V. 134. Article 108325.
9. Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Вычисление корней уравнения и определение их кратности // *Мат. моделирование*. 2010. Т. 22, № 7. С. 33–52.
10. Intep S. A review of bracketing methods for finding zeros of nonlinear functions // *Appl. Math. Sci.* 2018. V. 12, N 3. P. 137–146.
11. Ковалёв Н.Н. Гидротурбины. Конструкции и вопросы проектирования. Л.: Машиностроение, 1971.
12. Барлит В.В. Гидравлические турбины. Киев: Вища школа, 1977.
13. Кривченко Г.И. Гидравлические машины: турбины и насосы. М.: Энергоатомиздат, 1983.
14. Бронштейн Л.Я., Герман А.Н., Гольдин В.Е. и др. Справочник конструктора гидротурбин. Л.: Машиностроение, 1971.
15. Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л. Построение математической модели универсальной характеристики радиально-осевой гидротурбины // *Сиб. журн. индустр. математики*. 1998. Т. 1, № 1. С. 77–88.
16. Волков Ю.С., Мирошниченко В.Л., Салиенко А. Е. Математическое моделирование универсальной характеристики поворотной-лопастной гидротурбины // *Машинное обучение и анализ данных*. 2014. Т. 1, № 10. С. 1439–1450.
17. Bogdanov V.V., Karsten W.V., Miroshnichenko V.L., Volkov Yu.S. Application of splines for determining the velocity characteristic of a medium from a vertical seismic survey // *Central European J. Math.* 2013. V. 11, N. 4. P. 779–786.
18. Аниконов Ю.Е., Богданов В.В., Волков Ю.С., Деревцов Е.Ю. Об определении скоростных и упругих параметров среды фокальной зоны по годографам от землетрясений // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2021. Т. 24, № 4. С. 1–18.
19. Wendland H. *Scattered Data Approximation*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
20. Игнатов М.И., Певный А.Б. Натуральные сплайны многих переменных. Л.: Наука, 1991.
21. Schaback R. *Native Hilbert Spaces for Radial Basis Functions. I. New Developments in Approximation Theory*. Basel: Birkhauser, 1999. P. 255–282.

UDC 519.65

A MODIFIED QUADRATIC INTERPOLATION METHOD FOR ROOT FINDING

© 2023 V. V. Bogdanov^a, Yu. S. Volkov^b

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: ^abogdanov@math.nsc.ru, ^bvolkov@math.nsc.ru

Received 27.04.2023, revised 26.05.2023, accepted 07.06.2023

Abstract. A modification of the quadratic interpolation method for finding the root of a continuous function is proposed. Two quadratic interpolation polynomials are simultaneously constructed. It is shown that if the third derivative of the original function does not change sign on the considered interval of localization of the required root, then the root lies between the roots of the quadratic functions. This allows to significantly narrow the localization interval and reduce the number of steps to calculate the root with a given accuracy. The proposed modification of the quadratic interpolation method is used in the problem of calculating isolines when modeling the hill diagram of hydraulic turbines.

Keywords: quadratic interpolation, modeling, efficiency function of a hydraulic turbine, spline, multidimensional approximation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.301

REFERENCES

1. Ostrowski A.M. Solution of equations and systems of equations. N. Y.: Academ. Press, 1960.
2. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Binom, 2012 (in Russian).
3. Berezin I.S., Zhidkov N.P. Computing Methods. Vol. 1. Oxford: Pergamon Press, 1965.
4. Voevodin V.V. Chislennyye metody algebrы (teoriya i algoritmy) [Numerical methods of algebra (theory and algorithms)]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
5. Kalitkin N.N. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1978 (in Russian).
6. Costabile F., Gualtieri M.I., Luceri R. A modification of Muller's method. *Calcolo*, 2006, Vol. 43, No. 1, pp. 39–50.
7. Gemechu T., Thota S. On new root finding algorithms for solving nonlinear transcendental equations. *Internat. J. Chem., Math. Phys.*, 2020, Vol. 4, No. 2, pp. 18–24.
8. Cordero A., Garrido N., Torregrosa J.R., Triguero–Navarro P. Iterative schemes for finding all roots simultaneously of nonlinear equations. *Appl. Math. Lett.*, 2022, Vol. 134, article 108325.
9. Kalitkin N.N., Kuz'mina L.V. Calculation of roots and there multiplicity for nonlinear equation. *Math. Models Comput. Simul.*, 2011, Vol. 3, No. 1, pp. 65–80.
10. Intep S. A review of bracketing methods for finding zeros of nonlinear functions. *Appl. Math. Sci.*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 137–146.
11. Kovalev N.N. Gidroturbiny. Konstrukcii i voprosy proektirovaniya [Hydraulic turbines. Constructions and design issues]. Leningrad: Mashinostroenie, 1971 (in Russian).
12. Barlit V.V. Gidravlicheskie turbiny [Hydraulic turbines]. Kiev: Vishcha shkola, 1977 (in Russian).

13. Krivchenko G.I. *Gidravlicheskie mashiny: turbiny i nasosy* [Hydraulic machines: turbines and pumps]. Moscow: Jenergoatomizdat, 1983 (in Russian).
14. Bronshtejn L.Ya., German A.N., Goldin V.E. and others. *Spravochnik konstruktora gidroturbin* [Handbook of the designer of hydraulic turbines]. Leningrad: Mashinostroenie, 1971 (in Russian).
15. Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L. Postroenie matematicheskoy modeli universal'noj harakteristiki radial'no-osevoj gidroturbiny [Development of a mathematical model of an universal characteristic a francis turbine] // *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 1988, Vol. 1, No. 1, pp. 77–88 (in Russian).
16. Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L., Salienco A.E. Matematicheskoe modelirovanie universal'noj harakteristiki povorotno-lopastnoj gidroturbiny [Mathematical modeling of hill diagram for Kaplan turbine]. *Machine Learning and Data Analysis*, 2014, Vol. 1, No. 10, pp. 1439–1450.
17. Bogdanov V.V., Karsten W.V., Miroshnichenko V.L., Volkov Yu.S. Application of splines for determining the velocity characteristic of a medium from a vertical seismic survey. *Central European J. Math.*, 2013, Vol. 11, No. 4, pp. 779–786.
18. Anikonov Yu.E., Bogdanov V.V., Volkov Yu.S., Derevtsov E.Yu. On the Determination of the Velocity and Elastic Parameters of a Medium in the Focal Zone from Earthquake Hodographs. *J. Appl. Indust. Math.*, 2021, Vol. 24, No. 4, pp. 569–585.
19. Wendland H. *Scattered Data Approximation*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
20. Ignatov M.I., Pevnyi A.B. *Natural'nye splajny mnogih peremennyh* [Natural splines of many variables]. Leningrad: Nauka, 1991 (in Russian).
21. Schaback R. *Native Hilbert Spaces for Radial Basis Functions. I. New Developments in Approximation Theory*. Basel: Birkhauser, 1999, pp. 255–282.

УДК 519.63

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНКУРЕНЦИИ ПОПУЛЯЦИЙ С УЧЁТОМ
МНОГОФАКТОРНОГО ТАКСИСА**© 2023 А. В. Будянский^{1а}, В. Г. Цибулин^{2б}¹*Донской государственный университет,
пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону 344002, Россия,*²*Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону 344090, Россия*E-mails: ^aa_v_budyansky@mail.ru, ^bvgcibulin@sfedu.ruПоступила в редакцию 10.01.2023 г.; после доработки 26.02.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Изучается математическая модель конкуренции двух популяций, описываемая системой нелинейных дифференциальных уравнений реакции-диффузии-адвекции. Учитываются локальное взаимодействие, диффузионное распространение и таксис вследствие неоднородности общего ресурса и неравномерности распределения обоих видов. Проанализирована роль таксиса на заполняемость ареала и рассчитаны карты миграционных параметров, отвечающих различным вариантам конкурентного исключения и сосуществования видов. С использованием теории косимметрии находятся параметрические зависимости, при которых возникает мультистабильность. В вычислительном эксперименте проанализированы популяционные сценарии при нарушении косимметрии.

Ключевые слова: популяционная динамика, конкуренция, таксис, уравнения реакции-диффузии-адвекции, мультистабильность, косимметрия.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.302

ВВЕДЕНИЕ

Изменение климата и урбанизация являются угрозами естественной среде обитания биологических видов. Для изучения антропогенных воздействий на экосистемы необходимы надёжные инструменты анализа и прогноза, развитие математических моделей пространственно-временного взаимодействия видов [1]. В моделях на основе уравнений реакции-диффузии-адвекции [2, 3] важным фактором является учёт направленной миграции — таксиса. Например, при моделировании популяционных систем с антогонистическими видами таксис используется, чтобы учесть поисковую активность хищника [4, 5]. При этом пренебрегается реакцией жертв на неравномерность распределения хищников и других видов. При исследовании моделей конкурирующих популяций обычно учитывается только их диффузионное распространение и неоднородное распределение ресурсов [6, 7]. В ряде работ помимо описания локального взаимодействия и диффузии учитывается линейная адвекция вследствие миграции в речных и океанических течениях [8, 9]. Для системы параболических уравнений с линейной адвекцией в [10] были найдены условия, при которых возникает мультистабильность решений.

Одним из инструментов для анализа задач с мультистабильностью в виде семейств стационарных решений является аппарат теории косимметрии [11]. Модели конкурирующих популяций на основе уравнений реакции-диффузии-адвекции, допускающие косимметрию, рассматривались в работах [12–15]. Динамика двух конкурирующих видов при наличии хищника

анализировалась в [13], а в работе [14] изучались сценарии конкуренции в условиях биологической инвазии.

В настоящей работе исследуется модель конкуренции двух популяций с учётом многофакторного таксиса, описывающего внутривидовое и межвидовое взаимодействие и миграцию, вызванную неоднородностью распределения ресурса. Определяются условия на параметры, при которых система косимметрична и имеется семейство стационарных распределений популяций. Численно анализируется динамика при разрушении семейства и реализация популяционных сценариев. Проводится вычислительный эксперимент по влиянию таксиса на конкурентную борьбу видов.

1. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОПУЛЯЦИЙ

Анализируется модель распределения двух видов в неоднородной среде обитания [13], включающая описание локальной динамики, диффузию и направленную миграцию, вызванную неравномерностью распределения ресурса и видов:

$$\dot{u} = (k_1 u' - u \varphi_1')' + \eta_1 u f_0, \quad f_0 = 1 - \frac{u+v}{p}, \quad (1)$$

$$\dot{v} = (k_2 v' - v \varphi_2')' + \eta_2 v f_0, \quad (\dot{}) = \frac{\partial}{\partial t}(), \quad ()' = \frac{\partial}{\partial x}(). \quad (2)$$

Здесь $u(x, t)$ и $v(x, t)$ — плотности популяций, $p(x)$ — неоднородная по ареалу $\Omega = [0, a]$ функция ресурса (ёмкость среды), k_j , $j = 1, 2$, — коэффициенты диффузии, η_j — параметры роста. Направленная миграция определяется линейными по плотностям функциями φ_j :

$$\varphi_1 = \alpha_1 p + \beta_{11} u + \beta_{12} v, \quad (3)$$

$$\varphi_2 = \alpha_2 p + \beta_{21} u + \beta_{22} v, \quad (4)$$

где β_{12} , β_{21} — коэффициенты межвидового, а β_{11} , β_{22} — внутривидового таксисов. Положительность коэффициента β_{ij} отвечает стремлению вида к большей концентрации популяции. Отрицательность коэффициента β_{ij} означает отток от скопления видов. Миграция, вызванная неоднородностью распределения ресурса, определяется слагаемыми с коэффициентами α_j . На границах ареала Ω ставятся условия отсутствия потоков:

$$(-k_1 u' + u \varphi_1')|_{x=0,a} = (-k_2 v' + v \varphi_2')|_{x=0,a} = 0. \quad (5)$$

Система (1)–(5) дополняется начальными распределениями плотностей популяций:

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x). \quad (6)$$

2. АНАЛИЗ МОДЕЛИ

В [14] для системы двух конкурирующих видов установлено существование однопараметрического семейства стационарных распределений популяций при учёте таксиса, вызванного неоднородностью ресурса. Эта мультистабильность является следствием косимметрии задачи при дополнительных соотношениях на параметры системы. В данном разделе проводится анализ модели с учётом межвидового и внутривидового таксиса.

Лемма 1. *Вектор-функция $L = \exp(-\varphi_1/k_1)(\gamma v, -u)$ является косимметрией системы (1)–(6), если выполняются следующие условия:*

$$\gamma = k_2/k_1 = \varphi_2/\varphi_1 = \eta_2/\eta_1. \quad (7)$$

Доказательство. По определению косимметрии [11] вектор L должен быть ортогонален правой части системы (1)–(6) для любых функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$, т. е.

$$\int_0^a \exp(-\varphi_1/k_1) \left([(k_1 u' - u\varphi_1')' + \eta_1 u f_0] \gamma v - [(k_2 v' - v\varphi_2')' + \eta_2 v f_0] u \right) dx = 0.$$

После интегрирования по частям и учёта краевых условий (5) данное равенство может быть переписано в виде: $I_1 + I_2 = 0$, где

$$I_1 = \int_0^a \left\{ - [k_1 u' - u\varphi_1'] [\exp(-\varphi_1/k_1) \gamma v]' + [k_2 v' - v\varphi_2'] [\exp(-\varphi_1/k_1) u]' \right\} dx,$$

$$I_2 = \int_0^a \left\{ \eta_1 u f_0 [\exp(-\varphi_1/k_1) \gamma v] - \eta_2 v f_0 [\exp(-\varphi_1/k_1) u] \right\} dx.$$

После приведения подобных для выражения I_1 получаем

$$I_1 = \int_0^a uv \exp(-\varphi_1/k_1) \left(\frac{-\gamma \varphi_1' \varphi_1'}{k_1} + \frac{\varphi_2' \varphi_2'}{k_2} \right) dx.$$

Так как коэффициенты диффузии k_j и таксисные функции φ_j удовлетворяют условию (7), то $I_1 = 0$. Учёт (7) для коэффициентов η_j даёт $I_2 = 0$, что доказывает лемму. \square

Лемма 2. Таксисные функции φ_j удовлетворяют (7), если для миграционных коэффициентов выполнены соотношения

$$\alpha_2 = \gamma \alpha_1, \quad \beta_{21} = \gamma \beta_{11}, \quad \beta_{22} = \gamma \beta_{12}. \quad (8)$$

Доказательство. Подстановка (3), (4) в отношение φ_2/φ_1 и учёт равенств (8) доказывает лемму. \square

Лемма 3. Если выполняются условия на параметры (7), (8), то задача (1)–(6) имеет семейство стационарных решений:

$$u = (1 - \theta)w(x, \theta), \quad v = \theta w(x, \theta), \quad \theta \in [0, 1], \quad (9)$$

где $w(x)$ есть решение краевой задачи

$$(k_1 w' - w(\alpha_1 p' + (1 - \theta)\beta_{11} w' + \theta\beta_{12} w'))' + \eta_1 w(1 - w/p) = 0, \quad (10)$$

$$(k_1 w' - w(\alpha_1 p' + (1 - \theta)\beta_{11} w' + \theta\beta_{12} w'))|_{x=0,a} = 0. \quad (11)$$

Доказательство. Стационарное решение задачи (1)–(6) удовлетворяет уравнениям

$$(k_1 u' - u(\alpha_1 p' + \beta_{11} u' + \beta_{12} v'))' + \eta_1 u \left(1 - \frac{u+v}{p} \right) = 0,$$

$$(k_2 v' - v(\alpha_2 p' + \beta_{21} u' + \beta_{22} v'))' + \eta_2 v \left(1 - \frac{u+v}{p} \right) = 0.$$

После подстановки (9) получаем

$$(1 - \theta)[(k_1 w' - w(\alpha_1 p' + \beta_{11}(1 - \theta)w' + \beta_{12}\theta w'))' + \eta_1 w(1 - w/p)] = 0,$$

$$\theta[(k_2 w' - w(\alpha_2 p' + \beta_{21}(1 - \theta)w' + \beta_{22}\theta w'))' + \eta_2 w(1 - w/p)] = 0.$$

Первое из этих уравнений следует из (10) умножением на $1 - \theta$, а второе — умножением на θ/γ и использованием соотношений (7), (8). Аналогичные выкладки проводятся и для краевых условий (11). \square

Следствие. При $\beta_{11} = \beta_{12}$ и $\beta_{21} = \beta_{22}$ семейство стационарных решений (9) находится из не зависящей от θ краевой задачи

$$\begin{aligned} (k_1 w' - w(\alpha_1 p' + \beta_{11} w'))' + \eta_1 w(1 - w/p) &= 0, \\ (k_1 w' - w(\alpha_1 p' + \beta_{11} w'))|_{x=0,a} &= 0. \end{aligned}$$

Лемма 4. При отсутствии внутривидового таксиса ($\beta_{11} = \beta_{22} = 0$) и выполнении условий

$$k_2/k_1 = \alpha_2/\alpha_1 = \eta_2/\eta_1 = \gamma, \quad \beta_{12}\beta_{21} > 0 \quad (12)$$

система (1)–(6) имеет решение

$$u = (1 - \theta)w, \quad v = \theta w, \quad \theta = \beta_{21}/(\beta_{21} + \gamma\beta_{12}), \quad (13)$$

где w определяется из краевой задачи

$$(k_1 w' - w(\alpha_1 p' + \theta\beta_{12} w'))' + \eta_1 w(1 - w/p) = 0, \quad (14)$$

$$(k_1 w' - w(\alpha_1 p' + \theta\beta_{12} w'))|_{x=0,a} = 0. \quad (15)$$

Доказательство. Стационарное решение задачи (1)–(6) при $\beta_{11} = \beta_{22} = 0$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} (k_1 u' - u(\alpha_1 p' + \beta_{12} v'))' + \eta_1 u \left(1 - \frac{u+v}{p}\right) &= 0, \\ (k_2 v' - v(\alpha_2 p' + \beta_{21} u'))' + \eta_2 v \left(1 - \frac{u+v}{p}\right) &= 0 \end{aligned}$$

вместе с соответствующими краевыми условиями. После подстановки в данные уравнения соотношений (13) и учёта (12) получаем

$$\begin{aligned} (1 - \theta)[(k_1 w' - w(\alpha_1 p' + \theta\beta_{12} w'))' + \eta_1 w(1 - w/p)] &= 0, \\ \gamma\theta[(k_1 w' - w(\alpha_1 p' + \theta\beta_{12} w'))' + \eta_1 w(1 - w/p)] &= 0. \end{aligned}$$

Это доказывает лемму, так как $0 < \theta < 1$ в силу второго условия (12). \square

Таким образом, значения параметров β_{ij} определяют число стационарных решений системы (1)–(6). При выполнении условий на параметры системы (7), (8) (лемма 3) имеется континуальное семейство стационарных распределений. При нарушении условий косимметрии (7), (8) остаются полуположительные решения ($\theta=0$, $\theta=1$), и при выполнении условий леммы 4 получается решение, отвечающее сосуществованию видов. В частности, при $\beta_{21}/\beta_{12} = \gamma$ реализуется решение с идентичными распределениями видов ($u = v$). Далее представлены результаты вычислительных экспериментов по изучению влияния таксисных коэффициентов на формирование устойчивых стационарных распределений популяций.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПУЛЯЦИОННЫХ СЦЕНАРИЕВ

Для численного решения задачи (1)–(6) применялся метод прямых с дискретизацией на основе смещённых сеток аналогично [12, 13]. Компьютерные эксперименты были проведены в MATLAB с использованием метода Рунге — Кутты 4-го порядка.

Далее представлены результаты расчётов распределений популяций на ареале $\Omega = [0, a]$, $a = 2$. Вычисления проводились для различных значений параметров миграции α_i , β_{ij} при фиксированных коэффициентах диффузии $k_1 = 0.03$, $k_2 = 0.04$ и роста $\eta_1 = 3$, $\eta_2 = 4$.

Таким образом, мультистабильность решений получается при выполнении условий (7), (8) с $\gamma = k_2/k_1 = 4/3$. Функция ресурса даётся формулой, соответствующей ареалу с одной благоприятной зоной: $p(x) = 3 \left[\sin \frac{\pi x}{a} \right]^3 + 0.1$. Результаты расчётов по формированию семейств стационарных распределений далее представляются на плоскости среднеквадратичных отклонений распределений популяций σu и σv , вычисляемых по формулам

$$\sigma u = \sqrt{\frac{1}{n+2} \sum_{r=0}^{n+1} (u_r - \bar{u})^2}, \quad \bar{u} = \frac{1}{n+2} \sum_{r=0}^{n+1} u_r.$$

Здесь u_r, v_r — плотности распределения популяций в узлах сетки, n — количество внутренних узлов.

Согласно лемме 3 для коэффициентов миграции, удовлетворяющих соотношениям (8), система (1)–(6) имеет семейства стационарных распределений популяций. Данную мультистабильность иллюстрирует рис. 1, где на плоскости $(\sigma u, \sigma v)$ представлены полученные в результате численного эксперимента линии 1 и 2, отвечающие семействам при различных коэффициентах таксиса.

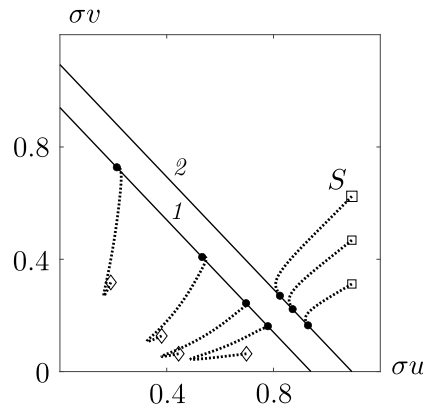


Рис. 1. Семейства стационарных распределений (линии 1, 2) и установление отдельных стационарных распределений из различных начальных данных (ромбы, квадраты):
 $\beta_{11} = \beta_{12} = -0.03, \beta_{22} = \beta_{21} = -0.04$ (линия 1);
 $\beta_{11} = \beta_{12} = 0.006, \beta_{22} = \beta_{21} = 0.008$ (линия 2);
 $\alpha_1 = 0.009, \alpha_2 = 0.012$

Для случая $\beta_{ij} < 0$ начальные распределения популяций находились в локализованных зонах:

$$u^0(x) = \begin{cases} U, & x \in l_u, \\ 0, & x \in \Omega \setminus l_u, \end{cases} \quad v^0(x) = \begin{cases} V, & x \in l_v, \\ 0, & x \in \Omega \setminus l_v. \end{cases}$$

Для различных амплитуд U, V и интервалов l_u, l_v в ходе численного эксперимента устанавливались стационарные распределения, входящие в непрерывное семейство решений (линия 1). Ромбы на рис. 1 отвечают нескольким начальным распределениям популяций.

Также на рис. 1 представлены результаты по инвазии при $\beta_{ij} > 0$. Начальные распределения популяции резидента $u^0(x)$ отвечали полному заполнению экологической ниши и находились в результате установления при численном решении системы (1)–(6) для $v = 0$. Начальные распределения инвайдера были локализованы: $v^0(x) = V \sin(2\pi x/a), x \in l_v = [0.63, 1.63], v^0(x) = 0, x \in \Omega \setminus l_v$. В зависимости от амплитуды V начальной плотности инвайдера происходит реализация одного из распределений на семействе (линия 2 на рис. 1).

Рис. 2 демонстрирует эволюцию во времени плотностей распределения популяций, соответствующую $V = 1.6$ (см. точку S на рис. 1). В начале установления происходит резкий спад плотности популяции резидента за счёт появления инвайдера, а затем плавный выход на стационарное решение, входящее в семейство стационарных распределений (линия 2 на рис. 1).

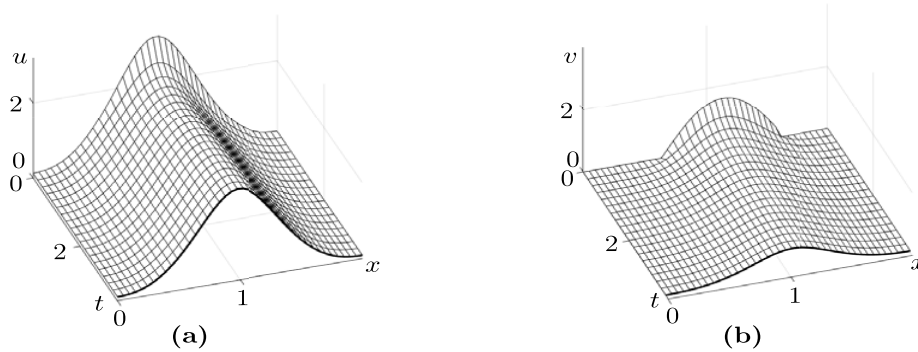


Рис. 2. Установление стационарного распределения из начальных данных, соответствующих точке S на рис. 1: $\beta_{11} = \beta_{12} = 0.006$, $\beta_{22} = \beta_{21} = 0.008$; $\alpha_1 = 0.009$, $\alpha_2 = 0.012$

Сценарий, соответствующий лемме 4, демонстрирует рис. 3, где приведены результаты разрушения семейств стационарных распределений при отсутствии внутривидового таксиса ($\beta_{11} = \beta_{22} = 0$).

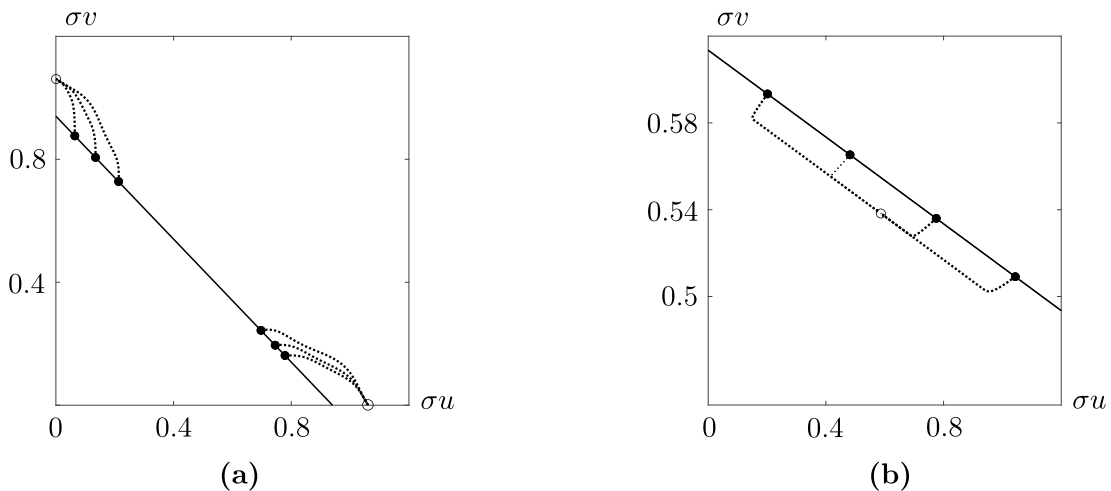


Рис. 3. Разрушение семейств стационарных решений, приведённых на рис. 1: (a) $\beta_{12} = -0.03$, $\beta_{21} = -0.04$; (b) $\beta_{12} = 0.006$, $\beta_{21} = 0.008$; точки — начальные распределения, кружки — финальные распределения; $\beta_{11} = \beta_{22} = 0$, $\alpha_1 = 0.009$, $\alpha_2 = 0.012$

Для отрицательных коэффициентов β_{12} , β_{21} (рис. 3(a)) решение, отвечающее сосуществованию видов, неустойчиво и происходит вытеснение одного вида другим в зависимости от начальных данных. В случае положительных коэффициентов β_{12} , β_{21} (рис. 3(b)) наблюдается выход на устойчивое решение (точка C на рис. 3(b)), отвечающее сосуществованию видов. Видно, что выбор начальных данных (точки на рис. 3) не влияет на финальное состояние, а траектории (пунктир) следуют вдоль линии семейства.

Для анализа влияния таксисных параметров на конкуренцию видов проводился вычислительный эксперимент при различных β_{12} , β_{21} и фиксированных начальных распределениях, отвечающих точкам на рис. 3. В результате интегрирования по времени получалось одно из трёх стационарных решений — сосуществование видов (точка на рис. 3(b)) и одно из по-

луположительных решений (см. рис. 3(a)). Распределения, отвечающие точкам A и B , используются в качестве начальных данных для численных экспериментов, представленных на рисунках 4, 5, 7.

На рис. 4(a, b) представлены карты параметров β_{12} и β_{21} с зонами, соответствующими сосуществованию видов (III) и выживанию одной из популяций (I и II).

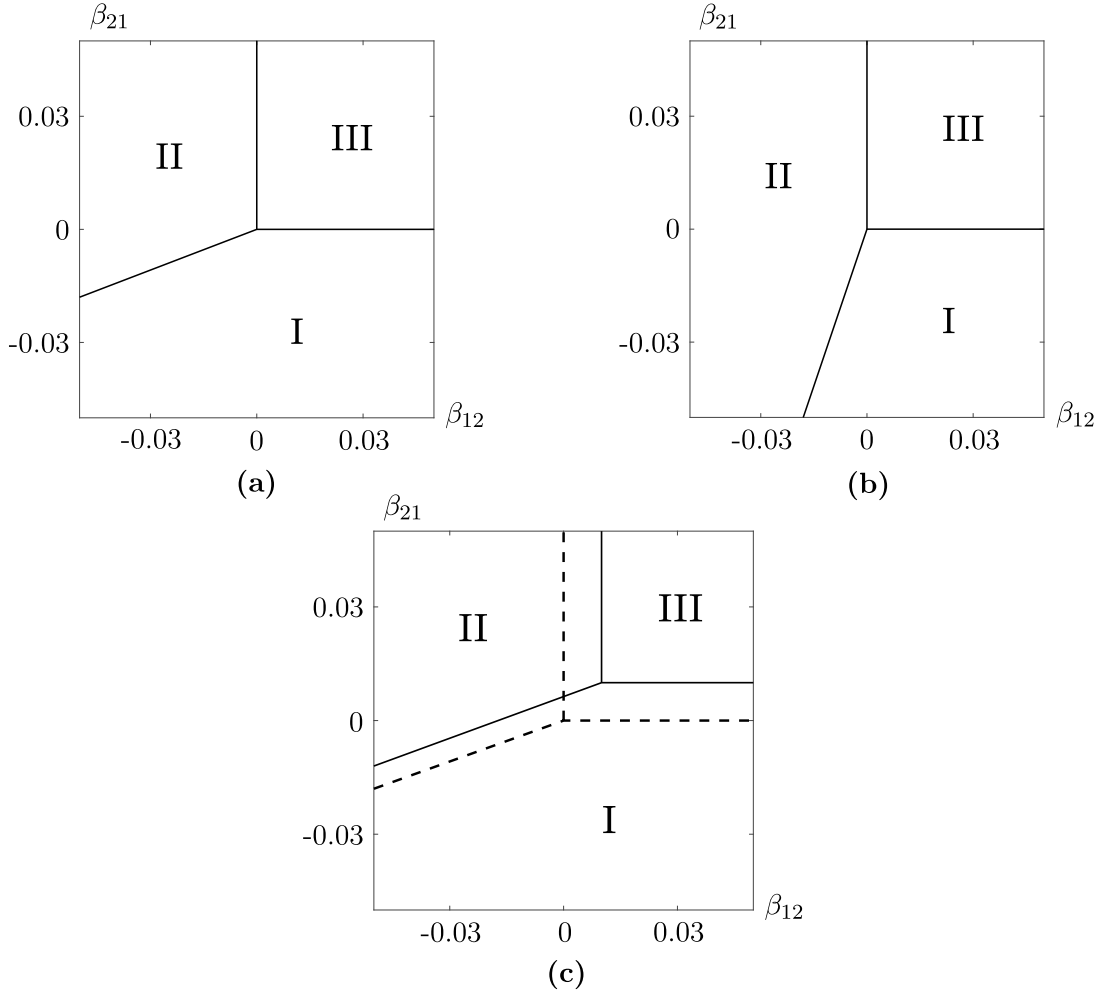


Рис. 4. Карты миграционных параметров с областями, отвечающими сосуществованию видов (III) и выживанию популяции u (I) или v (II): для начальных распределений, соответствующих точкам A (a) и B (b) (см. рис. 3), $\beta_{11} = \beta_{22} = 0$, $\alpha_1 = 0.009$, $\alpha_2 = 0.012$; $\beta_{11} = \beta_{22} = 0.01$ (сплошная линия), $\beta_{11} = \beta_{22} = 0$ (пунктир), $\alpha_1 = 0.009$, $\alpha_2 = 0.012$ (c)

Расчёты показывают, что линия, разделяющая зоны I и II, смещается при изменении начального распределения видов. Так, значения параметров миграции $\beta_{12} = -0.03$, $\beta_{21} = -0.04$ попадают в область I при выборе точки A в качестве начальной и в область II — при выборе точки B (см. рис. 3(a)). При $\beta_{12} \beta_{21} > 0$ получается сосуществование видов вне зависимости от начальных данных. Следует отметить, что случай $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$ соответствует косимметрии системы и данная точка является общей для всех областей. В соответствии с расчётами было установлено, что при ненулевых коэффициентах внутривидового таксиса β_{jj} общая точка для областей смещается (см. рис. 4(c)).

Проблема заполняемости ареала популяцией при учёте миграции, вызванной неравномерностью распределения ресурса, изучалась в [16], где установлено существование оптимального значения миграционного параметра. При заданных $k_1 = 0.03$ и $\eta_1 = 3$ на рис. 5 представлена

зависимость от параметра миграции α_1 средней по ареалу плотности популяции u . Видно, что максимум достигается при положительном значении параметра $\alpha_1 = \alpha_{\text{opt}} \approx 0.0147$. Аналогичный результат получается для второго вида при $\alpha_2 = \gamma\alpha_1$. Отметим, что на рис. 1–5 приведены результаты расчётов для параметров α_1, α_2 , которые были меньше оптимальных значений.

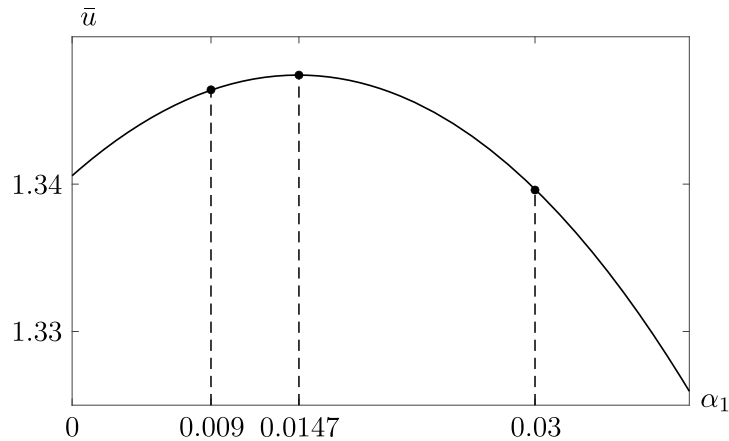


Рис. 5. Влияние параметра направленной миграции на заполняемость ареала

На рис. 6(a) представлена карта для коэффициентов β_{12} и β_{21} при значениях параметров миграции α_j , которые больше оптимальных значений.

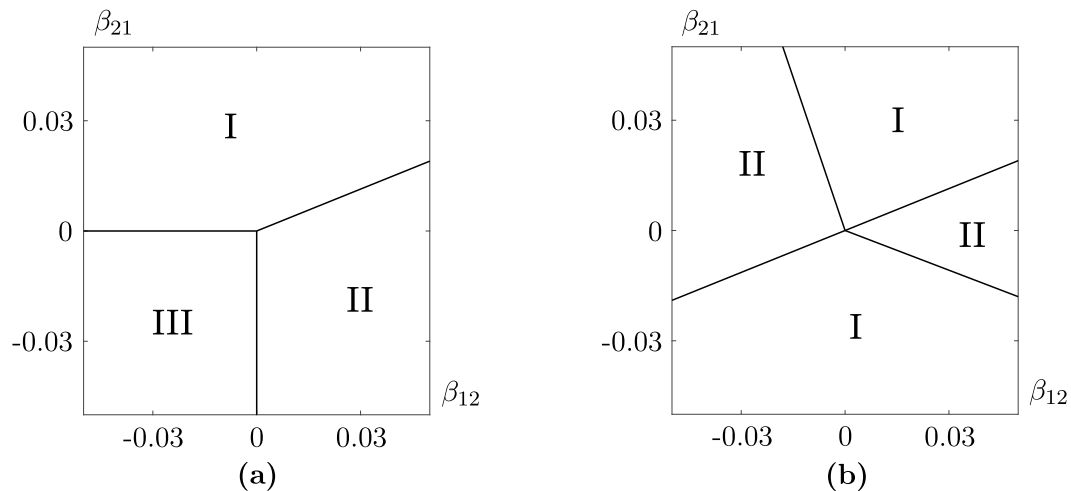


Рис. 6. Карты миграционных параметров с областями, отвечающими сосуществованию видов (III) и выживанию популяции u (I) или v (II); $\beta_{11} = \beta_{22} = 0$; $\alpha_1 = 0.03$, $\alpha_2 = 0.04$ (a); $\alpha_1 = \alpha_{\text{opt}} = 0.0147$, $\alpha_2 = \gamma\alpha_1 = 0.0196$ (b)

В данном случае наблюдается ситуация, обратная приведённой на рис. 4, когда сосуществованию видов отвечает третий координатный угол ($\beta_{12}, \beta_{21} < 0$), а линия, разделяющая области параметров, для которых происходит установление к различным полуположительным решениям, находится в первом квадранте. Рисунок отвечает расчётам при фиксированном начальном распределении видов u и v , соответствующим точке A на рис. 3(a).

Карта миграционных параметров при оптимальных значениях $\alpha_1 = 0.0147$, $\alpha_2 = 0.0196$ приведена на рис. 6(b). Данный случай характеризуется отсутствием области параметров, отвечающей сосуществованию видов. Исключением является общая точка для областей $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$, которая отвечает случаю косимметрии и существованию непрерывного семейства стационарных распределений обеих популяций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучено влияние миграционных эффектов на формирование распределений плотностей популяций. Рассмотрена модель, описывающая эволюцию двух конкурирующих видов с учётом пространственного распределения по ареалу. Анализируется случай, когда миграционные потоки зависят от внутривидового и межвидового таксиса, а также неравномерности распределения ресурса. Модель формулируется в виде двух нелинейных уравнений в частных производных. Найдены условия на параметры, при которых данная система является косимметричной и имеется мультистабильность решений. Сформулированы леммы об условиях на миграционные параметры системы, при которых существует и разрушается непрерывное семейство стационарных распределений популяций. На основе вычислительного эксперимента проанализированы популяционные сценарии в случае нарушения условия косимметрии. Построены карты миграционных параметров межвидового таксиса, описывающие различные сценарии конкурентной борьбы. Изучено влияние коэффициентов миграции, вызванной неоднородностью ресурса, и начального распределения популяций на конкурентное исключение видов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Murray J.D. *Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications*. N. Y.: Springer-Verl., 2003.
2. Cosner C., Cantrell R. *Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations*. Chichester: John Wiley and Sons, 2003.
3. Qin W., Zhou P. A review on the dynamics of two species competitive ODE and parabolic systems // *J. Appl. Anal. Comput.* 2022. V. 12, N 5. P. 2075–2109; DOI: 10.11948/20220196
4. Tyutyunov Y.V., Sen D., Titova L.I., Banerjee M. Predator overcomes the Allee effect due to indirect prey–taxis // *Ecological Complexity*. 2019. V. 39. Article 100772; DOI: 10.1016/j.ecocom.2019.100772
5. Говорухин В.Н., Загребнева А.Д. Популяционные волны и их бифуркации в модели «активный хищник–пассивная жертва» // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2020. Т. 12, № 4. С. 831–843; DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-831-843
6. Фрисман Е.Я., Кулаков М.П., Ревуцкая О.Л., Жданова О.Л., Неверова Г.П. Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2019. Т. 11, № 1. С. 119–151; DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151
7. Arumugam R., Sarkar S., Banerjee T., Sinha S., Dutta P.S. Dynamic environment-induced multistability and critical transition in a metacommunity ecosystem // *Phys. Rev. E*. 2019. V. 99, N 3. Article 032216; DOI: 10.1103/PhysRevE.99.032216
8. Zhou P., Tang D., Xiao D. On Lotka–Volterra competitive parabolic systems: Exclusion, coexistence and bistability // *J. Differ. Equ.* 2021. V. 282. P. 596–625; DOI: 10.1016/j.jde.2021.02.031
9. Vasilyeva O. Population dynamics in river networks: analysis of steady states // *J. Math. Biology*. 2019. V. 79. P. 63–100; DOI: 10.1007/s00285-019-01350-7
10. Ковалева Е.С., Цибулин В.Г., Фришмут К. Семейство стационарных режимов в модели динамики популяций // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2009. Т. 12, № 1. С. 98–107.
11. Юдович В.И. О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию // *Докл. РАН*. 2004. Т. 398, № 1. С. 57–61.
12. Будянский А.В., Цибулин В.Г. Влияние направленной миграции на формирование пространственных популяционных структур // *Биофизика*. 2015. Т. 60, № 4. С. 758–768.
13. Budyansky A.V., Frischmuth K., Tsybulin V.G. Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat // *Discrete Contin. Dyn. Systems. B*. 2019. V. 24, N 2. P. 547–561; DOI: 10.3934/dcdsb.2018196
14. Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability // *Appl. Math. Comput.* 2021. V. 410. Article 126456; DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456

15. Будянский А.В., Цибулин В.Г. Моделирование динамики популяций на неоднородном ареале: инвазия и мультистабильность // Биофизика. 2022. Т. 67, № 1. С. 174–182; DOI: 10.31857/S0006302922010197
16. Будянский А.В., Цибулин В.Г. Моделирование многофакторного таксиса в системе «хищник-жертва» // Биофизика. 2019. Т. 64, № 2. С. 343–349; DOI: 10.1134/S000630291920133

UDC 519.63

**MODELING OF COMPETITION BETWEEN POPULATIONS
WITH MULTI-TAXIS**© 2023 A. V. Budyansky^{1a}, V. G. Tsybulin^{2b}

¹*Don State University,
Gagarin Square, 1, Rostov-on-Don 344002, Russia,*
²*Southern Federal University,
ul. Milchakova 8a, Rostov-on-Don 344090, Russia*

E-mails: ^aa_v_budyansky@mail.ru, ^bvgcibulin@sfnedu.ru

Received 10.01.2023, revised 26.02.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. We study a mathematical model of competition between two populations, which is described by a system of nonlinear differential equations of reaction-diffusion-advection. The taxis is introduced to model the heterogeneity of the total resource and the non-uniform distribution of both types. We analyze the role of taxis in the area occupancy. The maps of migration parameters corresponding to various variants of competitive exclusion and coexistence of species are calculated. Using the theory of cosymmetry, we find parametric relations under which multistability arises. In a computational experiment, population scenarios with a violation of cosymmetry were studied.

Keywords: population dynamics, competition, taxis, equations of reaction-diffusion-advection, multistability, cosymmetry.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.302

REFERENCES

1. Murray J.D. *Mathematical Biology II. Spatial Models and Biomedical Applications*. N. Y.: Springer-Verl., 2003.
2. Cosner C., Cantrell R. *Spatial Ecology Via Reaction–Diffusion Equations*. Chichester: John Wiley and Sons, 2003.
3. Qin W., Zhou P. A review on the dynamics of two species competitive ODE and parabolic systems. *J. Appl. Anal. Comput.*, 2022, Vol. 12, No. 5, pp. 2075–2109; DOI: 10.11948/20220196
4. Tyutyunov Y.V., Sen D., Titova L.I., Banerjee M. Predator overcomes the Allee effect due to indirect prey–taxis. *Ecological Complexity*, 2019, Vol. 39, article 100772; DOI: 10.1016/j.ecocom.2019.100772
5. Govorukhin V.N., Zagrebneva A.D. Population waves and their bifurcation in a model «active predator – passive prey». *Comput. Research and Modeling*, 2020, Vol. 12, No 4, pp. 831–843; DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-831-843
6. Frisman E.Ya., Kulakov M.P., Revutskaya O.L., Zhdanova O.L., Neverova G.P. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations. *Comput. Research and Modeling*, 2019, Vol. 11, No. 1, pp. 119–151; DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151
7. Arumugam R., Sarkar S., Banerjee T., Sinha S., Dutta P.S. Dynamic environment-induced multistability and critical transition in a metacommunity ecosystem. *Phys. Rev. E.*, 2019, Vol. 99, No. 3, article 032216; DOI: 10.1103/PhysRevE.99.032216
8. Zhou P., Tang D., Xiao D. On Lotka –Volterra competitive parabolic systems: Exclusion, coexistence and bistability. *J. Differ. Equ.*, 2021, Vol. 282, pp. 596–625; DOI: 10.1016/j.jde.2021.02.031

9. Vasilyeva O. Population dynamics in river networks: analysis of steady States. *J. Math. Biology*, 2019, Vol. 79, pp. 63–100; DOI: 10.1007/s00285-019-01350-7
10. Kovaleva E.S., Tsybulin V.G., Frischmuth K. Semeistvo stacionarnykh rezhimov v modeli dinamiki populyatsii [A family of stationary modes in a population dynamics model]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2009, Vol. 12, No 1, pp. 98–107 (in Russian).
11. Yudovich V.I. Bifurcations under perturbations violating cosymmetry. *Doklady Physics*, 2004, Vol. 49, pp. 522–526.
12. Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Impact of directed migration on formation of spatial structures of populations. *Biophysics*, 2015, Vol. 60, pp. 622–631.
13. Budyansky A.V., Frischmuth K., Tsybulin V.G. Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat. *Discrete & Continuous Dynamical Systems B*, 2019, Vol. 24, No. 2, pp. 547–561; DOI: 10.3934/dcdsb.2018196
14. Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability. *Appl. Math. Comput.*, 2021, Vol. 410, article 126456; DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456
15. Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling the Dynamics of Populations in a Heterogeneous Environment: Invasion and Multistability. *Biophysics*, 2022, Vol. 67, No. 1, pp. 174–182; DOI: 10.31857/S0006302922010197
16. Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling of Multifactor Taxis in a Predator-Prey System. *Biophysics*, 2019, Vol. 64, No. 2, pp. 343–349; DOI: 10.1134/S000630291920133

УДК 517.44:517.95

ЛУЧЕВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОМЕНТОВ ПЛАНАРНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

© 2023 Е. Ю. Деревцов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: dert@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 07.04.2023 г.; после доработки 07.04.2023 г.;
принята к публикации 07.06.2023 г.

Рассмотрены лучевые преобразования моментов симметричных 2D тензорных полей произвольного ранга. Установлены основные геометрические и дифференциальные свойства смешанных лучевых преобразований тензорных полей и смешанных лучевых преобразований их моментов. Предложен и обоснован простой алгоритм восстановления тензорного поля малого ранга по известным смешанным лучевым преобразованиям его моментов.

Ключевые слова: тензорное поле, преобразование Радона, смешанное лучевое преобразование моментов, геометрические свойства, дифференциальные свойства, алгоритм реконструкции.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.303

ВВЕДЕНИЕ

Преобразование Радона \mathcal{R} функции $\varphi(x)$, $x = (x^1, x^2)$:

$$(\mathcal{R}\varphi)(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s\xi + t\eta) dt \quad \text{или} \quad (\mathcal{R}\varphi)(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s\xi(\theta) + t\eta(\theta)) dt, \quad \theta \in [0, 2\pi), s \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

представляющее собой математическое описание механизма получения исходных данных в модели вычислительной томографии, хорошо известно [1]. В определении (1) и далее используются обозначения $\xi = (\xi^1, \xi^2) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\xi^\perp = \eta = (\eta^1, \eta^2) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ для векторов единичной длины. Прямая $L_{\xi, s} \in \mathbb{R}^2$, вдоль которой производится интегрирование, задаётся параметрическим $x = s\xi + t\eta$ или нормальным $\langle \xi, x \rangle - s = 0$ уравнениями. Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^2 . Вектор η является направляющим вектором прямой $L_{\eta, s}$, вектор ξ — её нормальным вектором. Через B , ∂B обозначаем единичный круг и единичную окружность.

Обобщения преобразования Радона (1) порождают целое семейство интегральных преобразований в рамках математических моделей тензорной томографии и интегральной геометрии. Так, в модели 2D томографии симметричных тензорных полей [2] в качестве исходных данных используются значения лучевых преобразований $\mathcal{P}_m^{(j)}$, m целое, $m \geq 0$, $j = 0, \dots, m$, действующих на симметричные m -тензорные поля w и переводящих их в функции $g_m^{(j)}(\xi(\theta), \eta(\theta), s)$:

$$\mathcal{P}_m^{(j)} w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w_{i_1 \dots i_m} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} dt = g_m^{(j)}(\xi, s), \quad (2)$$

$x = s\xi + t\eta$. Величина η в качестве аргумента функции $g_m^{(j)}$ обычно будет опускаться. В (2) и далее используется правило Эйнштейна, по которому по повторяющимся сверху и снизу индексам производится суммирование от 1 до 2. В частности, при $j = 0$ — это продольное лучевое преобразование [3], при $j = m$ — поперечное лучевое преобразование [4], при остальных значениях j — смешанное лучевое преобразование [2]. В данной работе часто под лучевым преобразованием понимается любое из перечисленных, независимо от значения индекса j , которое будет понятно из контекста.

Продольные лучевые преобразования моментов симметричных тензорных полей (лучевые преобразования с весом), заданных в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n произвольной размерности, были введены в [3]. Показано, что симметричное тензорное поле ранга m однозначно определяется по первым $(m + 1)$ -м продольным лучевым преобразованиям его моментов. В терминах нашего определения (2) при $n = 2$ имеем

$$\mathcal{P}_{km}^{(0)} w(x, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k w_{i_1 \dots i_m} \eta^{i_1} \dots \eta^{i_m} dt, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Лучевым преобразованиям с весом посвящено немного работ. Отметим работы [5–8], в основном посвящённые вопросам теории заданных на компактных римановых многообразиях с простой метрикой и евклидовых пространствах произвольной размерности продольных лучевых преобразований моментов симметричных тензорных полей ранга m . В работе [5] выведены формулы Решетняка, выражающие нормы в весовых пространствах Соболева тензорного поля через некоторые нормы лучевых преобразований моментов исследуемого тензорного поля. Получены оценки устойчивости в нормах весовых соболевских пространств. В работе [6] получены описания образов, теоремы о носителе и инъективность лучевых преобразований моментов до порядка $m + 1$ включительно, тензорных полей ранга m , заданных в компактных, размерности n римановых многообразиях с простой метрикой. Работа [7] посвящена вопросам единственности восстановления заданного в \mathbb{R}^n векторного поля по продольным лучевым преобразованиям его первых двух моментов, известных вдоль прямых, проходящих через точки некоторой фиксированной кривой. Иначе говоря, томографические данные получены в рамках конусной схемы наблюдения. Работа [8] содержит новый вариант разложения произвольного m -тензорного поля, заданного в \mathbb{R}^n , на соленоидальную и потенциальную части, которое используется для описания ядер и условий инъективности лучевых преобразований первых $(k + 1)$ моментов симметричного m -тензорного поля. Описаны характеристики образов лучевых преобразований моментов с помощью уравнений Йона.

В работе [5], наряду с теретическими результатами, содержится алгоритм восстановления заданного в пространстве \mathbb{R}^n произвольной размерности $n \geq 2$ симметричного тензорного поля ранга m по его известным $m + 1$ продольным лучевым преобразованиям с весом t^k , $k = 0, \dots, m + 1$. В данной работе рассматриваются смешанные лучевые преобразования вида (2) и смешанные лучевые преобразования с весом t^k планарных симметричных тензорных полей ранга m . Иные весовые функции не рассматриваются. Напомним, что ниже для краткости говорим о смешанных лучевых преобразованиях с весом или ещё короче о лучевых преобразованиях. В качестве переменных образов лучевых преобразований используются пары ξ, s либо θ, s для образов лучевых преобразований $g_m^{(j)}(\xi, s)$, $g_m^{(j)}(\theta, s)$ и образов лучевых преобразований с весом $g_{km}^{(j)}(\xi, s)$, $g_{km}^{(j)}(\theta, s)$. Отдельные обозначения выделены для образа $g(\xi, s)$ преобразования Радона $\mathcal{R}\varphi$ и для образа $h_{i_1 \dots i_m}(\xi, s)$ преобразования Радона $\mathcal{R}w_{i_1 \dots i_m}(x)$ компоненты $w_{i_1 \dots i_m}(x)$ симметричного m -тензорного поля $w(x)$. При $k = 0$ индекс k , отвечающий за степень веса t^k , может опускаться.

В разд. 1 рассматриваются лучевые преобразования с весом симметричных тензорных полей рангов 1 и 2. Установлены связи между лучевыми преобразованиями с разными степенями k весов t^k . Показано, что векторное поле однозначно восстанавливается по продольным или

поперечным лучевым преобразованиям с весом t^k , $k = 0, 1$. Симметричное 2-тензорное поле однозначно восстанавливается по известным лучевым преобразованиям с весом t^k , $k = 0, 1, 2$, любого типа. Предложены простые алгоритмы восстановления тензорных полей рангов 1 и 2. В разд. 2 основные свойства — линейности, чётности, геометрические свойства преобразования Радона распространяются на лучевые преобразования и на лучевые преобразования с весом симметричных m -тензорных полей. Заключение содержит краткое описание и характеристику полученных результатов.

Напомним обозначения и определения некоторых множеств и функциональных пространств:

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ — единичный круг; $\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — единичная окружность;

\mathbb{S}^1 — множество векторов единичной длины, $\mathbb{S}^1 = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\eta| = 1\}$;

$\mathbb{S}B$ — множество пар $\mathbb{S}B = \{(x, \eta) \mid x \in B, \eta \in \mathbb{S}^1\}$;

$\mathbb{S}_x \subset \mathbb{S}B = \{(x, \eta) \mid x \in B, x \text{ фиксирована}, \eta \in \mathbb{S}^1\}$;

\mathbb{Z} — цилиндр (боковая поверхность), $\mathbb{Z} = \{(\xi, s) \mid \xi \in \mathbb{S}^1, s \in [-1, 1]\}$;

\mathbb{Q} — прямоугольник (развёртка боковой поверхности цилиндра), $\mathbb{Q} = \{(\theta, s) \mid \theta \in [0, 2\pi], s \in [-1, 1]\}$;

$T^m(B)$ ($S^m(B)$) — множество заданных в B (симметричных) тензорных полей ранга m ;

$C^l(B)$, $C^l(\mathbb{S}B)$, $C^l(\mathbb{Z})$, $C^l(\mathbb{Q})$ — пространства непрерывно дифференцируемых вместе со своими производными до порядка l функций, определённых в B , $\mathbb{S}B$, \mathbb{Z} , \mathbb{Q} функций;

$L_2(B)$ — пространство интегрируемых с квадратом в B функций;

$H^l(B)$ ($H_0^l(B)$) — соболевское пространство заданных в B функций (обращающихся в нуль на границе ∂B вместе со своими производными вплоть до порядка $l - 1$), интегрируемых с квадратом, вместе со своими производными вплоть до порядка l , $l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$, ($H^0(B) \equiv L_2(B)$).

Введённые определения легко переносятся на пространства тензорных полей путём их применения по отношению к каждой компоненте. Таковы пространства $H^l(T^m(B))$ ($H^l(S^m(B))$), $H_0^l(T^m(B))$ ($H_0^l(S^m(B))$) (симметричных) m -тензорных полей, l, m целые, $l, m \geq 0$. В дальнейшем символ круга B в обозначениях перечисленных гильбертовых пространств будет опускаться.

1. ЛУЧЕВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ВЕСОМ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ МАЛОГО РАНГА

Рассматриваются лучевые преобразования с весом тензорных полей, отличающиеся от лучевых преобразований (2) наличием под интегралом множителя t^k :

$$\mathcal{P}_{km}^{(j)} w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k w_{i_1 \dots i_m}(x) \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} dt = g_{km}^{(j)}(\xi, s), \quad (3)$$

$x = s\xi + t\eta$, $\eta, \xi \in \mathbb{S}^1$, $w(x)$ — заданное в B симметричное тензорное поле ранга m , $\text{supp } w \subset \bar{B}$. При $j = m = 0$ получаем преобразование Радона с весом t^k , $k \geq 0$:

$$\mathcal{R}\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(s\xi + t\eta) dt = g_{k0}^{(0)}(\xi, s), \quad (4)$$

которое при $k = 0$ совпадает с преобразованием Радона (1).

При $m = 1$, $j = 0, 1$, $k \geq 0$, приходим к лучевым преобразованиям с весом $\mathcal{P}_{k1}^{(j)}$ векторного поля $w = (w_1, w_2)$ — продольному (при $j = 0$) и поперечному при $j = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{k1}^{(0)} w(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k \langle w(s\xi + t\eta), \eta \rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^k (w_1 \eta^1 + w_2 \eta^2) dt = g_{k1}^{(0)}(\xi, s), \\ \mathcal{P}_{k1}^{(1)} w(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k \langle w(s\xi + t\eta), \xi \rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^k (w_1 \xi^1 + w_2 \xi^2) dt = g_{k1}^{(1)}(\xi, s).\end{aligned}$$

При $k = 0$ получаем продольные и поперечные лучевые преобразования векторных полей [4]. Непосредственная проверка показывает, что эти лучевые преобразования нечётны по совокупности своих переменных, т. е. $g_1^{(j)}(-\xi, -s) = -g_1^{(j)}(\xi, s)$, $j = 0, 1$, или $g_1^{(j)}(\theta + \pi, -s) = -g_1^{(j)}(\theta, s)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\int_0^{2\pi} g_{k1}^{(j)}(\xi(\theta), s) d\theta = 0, \quad j = 0, 1.$$

Значения лучевых преобразований представляют собой исходные данные для задач векторной томографии, состоящих в реконструкции векторного поля w по продольному и поперечному лучевым преобразованиям, его соленоидальной (по продольному преобразованию) или потенциальной (по поперечному преобразованию) части.

Полагая $m = 2$, $j = 0, 1, 2$, $k \geq 0$, получаем три разновидности лучевых преобразований с весом симметричного 2-тензорного поля $w = (w_{ij})$ — продольное, смешанное и поперечное:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{k2}^{(0)} w(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k w_{ij}(s\xi + t\eta) \eta^i \eta^j dt = g_{k2}^{(0)}(\xi, s), \\ \mathcal{P}_{k2}^{(1)} w(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k w_{ij}(s\xi + t\eta) \xi^i \eta^j dt = g_{k2}^{(1)}(\xi, s), \\ \mathcal{P}_{k2}^{(2)} w(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k w_{ij}(s\xi + t\eta) \xi^i \xi^j dt = g_{k2}^{(2)}(\xi, s).\end{aligned}$$

Отметим, что при $k = 0$ лучевые преобразования симметричных 2-тензорных полей чётны, как и преобразование Радона.

Напомним, что прямая $L_{\xi, s}$ задаётся нормальным $x^1 \cos \theta + x^2 \sin \theta - s = 0$ уравнением или параметрическими $x^1 = s \cos \theta - t \sin \theta$, $x^2 = s \sin \theta + t \cos \theta$ уравнениями. Здесь $\xi(\xi^1, \xi^2) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\eta(\eta^1, \eta^2) = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Отсюда следует, что

$$\cos \theta = \xi^1 = \eta^2 = \frac{\partial x^1}{\partial s} = \frac{dx^2}{dt}, \quad \sin \theta = \xi^2 = -\eta^1 = \frac{\partial x^2}{\partial s} = -\frac{dx^1}{dt}. \quad (5)$$

Приведённые соотношения и метод интегрирования по частям дают следующие соотношения для лучевых преобразований с весом векторных полей.

Лемма 1. Пусть в B заданы $\varphi, \psi \in H_0^l$, $l \geq 1$ целое, и векторные поля $u = d\varphi, v = d^\perp \psi \in H^{l-1}(S)$, где $d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right)$, $d^\perp \psi = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right)$. Тогда

$$\mathcal{P}_{k1}^{(0)} u(x) = -k \mathcal{P}_{(k-1)0}^{(0)} \varphi(x), \quad \mathcal{P}_{k1}^{(1)} v(x) = k \mathcal{P}_{(k-1)0}^{(0)} \psi(x). \quad (6)$$

Доказательство. Доказательство состоит в непосредственной проверке. Рассмотрим продольное лучевое преобразование с весом $\mathcal{P}_{k1}^{(0)}$ потенциального векторного поля $u(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k1}^{(0)}u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \eta^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \eta^2 \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \left(\frac{d}{dt} \varphi \right) dt = -k \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} \varphi(x) dt = -k \mathcal{P}_{(k-1)0}^{(0)} \varphi(x). \end{aligned}$$

Рассматривая поперечное лучевое преобразование с весом $\mathcal{P}_{k1}^{(1)}$ соленоидального векторного поля $v(x)$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k1}^{(1)}v(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x^2} \xi^1 + \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \xi^2 \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \left(-\frac{dx^1}{dt} \right) \right) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} t^k \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} dt = k \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} \psi(x) dt = k \mathcal{P}_{(k-1)0}^{(0)} \psi(x). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана. \square

Замечание 1. При $k = 0$ правые части равенств обращаются в нуль, что согласуется с тем фактом [4], что векторные поля вида $u = d\varphi$, $v = d^\perp \psi$ представляют собой ядра операторов $\mathcal{P}_{01}^{(0)}$, $\mathcal{P}_{01}^{(1)}$ соответственно. Продольное лучевое преобразование $\mathcal{P}_{01}^{(0)}$ соленоидального векторного поля v и поперечное лучевое преобразование потенциального поля u обращаются в нуль, только если $u = 0$, $v = 0$, а их значения представляют собой исходные данные, достаточные для однозначного восстановления векторного поля в рамках томографических постановок.

Пусть $w = (w_{ij}) \in H_0^l(S)$, $l \geq 1$, — векторное поле. Оператор внутреннего дифференцирования $d: H_0^l(S) \rightarrow H^{l-1}(S^2)$ при действии на поле w определяется следующим образом: $(dw)_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} + \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right)$. Оператор внутреннего ортогонального дифференцирования $d^\perp: H_0^l(S) \rightarrow H^{l-1}(S^2)$ при действии на поле w определяется таким образом:

$$(d^\perp w)_{ij} = \frac{1}{2} \left((-1)^j \frac{\partial w_i}{\partial x^{3-j}} + (-1)^i \frac{\partial w_j}{\partial x^{3-i}} \right).$$

Принимая во внимание разложение произвольного векторного поля [4] на потенциальную и соленоидальную части того же вида, что в лемме 1, образуемые посредством операторов d , d^\perp , получим представление симметричных 2-тензорных полей через потенциалы $\varphi, \psi, \chi \in H_0^l$, $l \geq 2$:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= (d^2 \varphi)_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}, \quad v_{ij} = ((d^\perp)^2 \psi)_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{3-i} \partial x^{3-j}}, \\ \tilde{u}_{ij} &= (d^\perp(d\chi))_{ij} = \frac{1}{2} \left((-1)^j \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^{3-j} \partial x^i} + (-1)^i \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^{3-i} \partial x^j} \right). \end{aligned} \tag{7}$$

Компоненты последнего соотношения выглядят следующим образом:

$$\tilde{u}_{11} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^1 \partial x^2}, \quad \tilde{u}_{22} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^1 \partial x^2}, \quad \tilde{u}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial (x^1)^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial (x^2)^2} \right).$$

Прямые вычисления показывают, что операторы d и d^\perp коммутативны, $d(d^\perp \chi) = d^\perp(d\chi)$.

Лемма 2. Пусть в B заданы потенциалы $\varphi, \psi, \chi \in H_0^1$, $l \geq 2$ целое, и симметричные 2-тензорные поля $u = d^2\varphi, v = (d^\perp)^2, (d^\perp d) \in H^{l-2}(S^2)$, заданные формулами (7). Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k2}^{(0)} u(x) &= k(k-1)\mathcal{P}_{(k-2)0}^{(0)}\varphi(x), & \mathcal{P}_{k2}^{(1)} u(x) &= -k\mathcal{P}_{(k-1)1}^{(1)}(d\varphi)(x), \\ \mathcal{P}_{k2}^{(0)} \tilde{u}(x) &= -k\mathcal{P}_{(k-1)1}^{(0)}(d^\perp\chi)(x), & \mathcal{P}_{k2}^{(2)} \tilde{u}(x) &= k\mathcal{P}_{(k-1)1}^{(1)}(d\chi)(x), \\ \mathcal{P}_{k2}^{(1)} v(x) &= -k\mathcal{P}_{(k-1)1}^{(0)}(d^\perp\psi)(x), & \mathcal{P}_{k2}^{(2)} v(x) &= k(k-1)\mathcal{P}_{(k-2)0}^{(0)}\psi(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Лучевые преобразования с весом $\mathcal{P}_{k2}^{(0)} u(x)$, $\mathcal{P}_{k2}^{(2)} v(x)$ обращаются в нуль тождественно при $k = 0, 1$. Лучевые преобразования с весом $\mathcal{P}_{k2}^{(1)} u(x)$, $\mathcal{P}_{k2}^{(0)} \tilde{u}(x)$, $\mathcal{P}_{k2}^{(2)} \tilde{u}(x)$, $\mathcal{P}_{k2}^{(1)} v(x)$ обращаются в нуль тождественно при $k = 0$.

Доказательство. При доказательстве используются соотношения (5), формулы (7) и метод интегрирования по частям.

Рассмотрим продольное лучевое преобразование с весом $\mathcal{P}_{k2}^{(0)}$ потенциального симметричного 2-тензорного поля $u(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k2}^{(0)} u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \eta^i \right) \eta^j dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \eta^i \right) \frac{dx^j}{dt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \eta^i \right) \\ &= t^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \eta^i \Big|_{-\infty}^{\infty} - k \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \eta^i dt = -k \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} d\varphi(x) = k(k-1)\mathcal{P}_{(k-2)0}^{(0)}\varphi(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим поперечное лучевое преобразование с весом $\mathcal{P}_{k2}^{(2)}$ соленоидального симметричного 2-тензорного поля $v(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k2}^{(2)} v(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k (-1)^j \frac{\partial}{\partial x^{3-j}} \left((-1)^i \frac{\partial \psi}{\partial x^{3-i}} \xi^i \right) \xi^j dt = - \int_{-\infty}^{\infty} t^k \frac{\partial}{\partial x^j} \left((-1)^i \frac{\partial \psi}{\partial x^{3-i}} \xi^i \right) \frac{dx^j}{dt} dt \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} (-1)^i \frac{\partial \psi}{\partial x^{3-i}} \xi^i dt = -k \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} d\psi(x) = k(k-1)\mathcal{P}_{(k-2)0}^{(0)}\psi(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим продольное лучевое преобразование с весом $\mathcal{P}_{k2}^{(0)}$ потенциального симметричного 2-тензорного поля $\tilde{u}(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{k2}^{(0)} \tilde{u}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^k \frac{\partial}{\partial x^j} \left((-1)^i \frac{\partial \chi}{\partial x^{3-i}} \eta^i \right) \eta^j dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \frac{\partial}{\partial x^j} \left((-1)^i \frac{\partial \chi}{\partial x^{3-i}} \eta^i \right) \frac{dx^j}{dt} dt \\ &= -k \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} (-1)^i \frac{\partial \chi}{\partial x^{3-i}} \eta^i dt = -k \int_{-\infty}^{\infty} t^{k-1} (d^\perp \chi)_i \eta^i dt = -k\mathcal{P}_{(k-1)1}^{(0)}(d^\perp \chi)(x). \end{aligned}$$

Остальные соотношения из (8) проверяются аналогично. \square

Связи (6), (8) между лучевыми преобразованиями с весом, установленные в леммах 1, 2, являются основой для простых алгоритмов восстановления векторных и симметричных 2-тензорных полей по их лучевым преобразованиям с весом.

Следствие 1. Пусть известны поперечные

$$\mathcal{P}_{01}^{(1)} w = \int_{-\infty}^{\infty} w_j(x) \xi^j dt, \quad \mathcal{P}_{11}^{(1)} w = \int_{-\infty}^{\infty} t w_j(x) \xi^j dt \quad (9)$$

или продольные

$$\mathcal{P}_{01}^{(0)} w = \int_{-\infty}^{\infty} w_j(x) \eta^j dt, \quad \mathcal{P}_{11}^{(0)} w = \int_{-\infty}^{\infty} t w_j(x) \eta^j dt \quad (10)$$

лучевые преобразования с весом t^k , $k = 0, 1$, векторного поля $w \in H^l(S)$, $l \geq 0$, $w = u + v$, $u = d\varphi$, $v = d^\perp \psi$ для $\varphi, \psi \in H_0^{l+1}$. Тогда поле w однозначно восстанавливается по поперечным (9) или продольным (10) лучевым преобразованиям с весом.

Доказательство. Всякое векторное поле $w \in H^l(S)$, $l \geq 0$, единственным образом разлагается в сумму $w = d\varphi + d^\perp \psi$ потенциального и соленоидального полей, генерируемых потенциалами $\varphi, \psi \in H_0^{l+1}$ [2]. Найдя эти поля, мы определим поле w .

В качестве доказательства утверждения представим алгоритмы решения систем уравнений (9) и (10). Из леммы 1 следует, что уравнения (9) приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{01}^{(1)} w &= \int_{-\infty}^{\infty} w_j(x) \xi^j dt = \int_{-\infty}^{\infty} (d\varphi)_j \xi^j dt, \\ \mathcal{P}_{11}^{(1)} w &= \int_{-\infty}^{\infty} t w_j(x) \xi^j dt = \int_{-\infty}^{\infty} t (d\varphi)_j \xi^j dt + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dt, \end{aligned}$$

а уравнения (10) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{01}^{(0)} w &= \int_{-\infty}^{\infty} w_j(x) \eta^j dt = \int_{-\infty}^{\infty} (d^\perp \psi)_j \eta^j dt, \\ \mathcal{P}_{11}^{(0)} w &= \int_{-\infty}^{\infty} t w_j(x) \eta^j dt = \int_{-\infty}^{\infty} t (d^\perp \psi)_j \eta^j dt + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Зафиксируем последовательные шаги алгоритма в случае, если известны поперечные лучевые преобразования.

1. Обращая известное преобразование $\mathcal{P}_{01}^{(1)} w$ (совпадающее с $\mathcal{P}_{01}^{(1)} u$), получаем векторное поле $u = d\varphi$.

2. По найденному потенциальному полю $d\varphi$ вычисляется лучевое преобразование $\mathcal{P}_{11}^{(1)} u$ с весом t .

3. Из обеих частей второго уравнения системы (11) вычитается преобразование $\mathcal{P}_{11}^{(1)} u$.

4. Обращая левую часть полученного уравнения как преобразование Радона, получаем потенциал ψ поля $v = d^\perp \psi$.

5. Применяя к потенциалу ψ оператор d^\perp , получаем соленоидальное векторное поле $v = d^\perp \psi$ с компонентами $v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x^2}$, $v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x^1}$. Потенциальное $u = d\varphi$ и соленоидальное $v = d^\perp \psi$ векторные поля найдены.

Если в качестве исходной информации выступают продольные лучевые преобразования с весом t^k , $k = 0, 1$, алгоритм остаётся в силе с очевидными незначительными изменениями. \square

Следствие 2. Пусть известны поперечные

$$\mathcal{P}_{02}^{(2)}w = \int_{-\infty}^{\infty} w_{ij}(x)\xi^i\xi^j dt, \quad \mathcal{P}_{12}^{(2)}w = \int_{-\infty}^{\infty} t w_{ij}(x)\xi^i\xi^j dt, \quad \mathcal{P}_{22}^{(2)}w = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 w_{ij}(x)\xi^i\xi^j dt, \quad (12)$$

смешанные

$$\mathcal{P}_{02}^{(1)}w = \int_{-\infty}^{\infty} w_{ij}(x)\xi^i\eta^j dt, \quad \mathcal{P}_{12}^{(1)}w = \int_{-\infty}^{\infty} t w_{ij}(x)\xi^i\eta^j dt, \quad \mathcal{P}_{22}^{(1)}w = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 w_{ij}(x)\xi^i\eta^j dt \quad (13)$$

или продольные

$$\mathcal{P}_{02}^{(0)}w = \int_{-\infty}^{\infty} w_{ij}(x)\eta^i\eta^j dt, \quad \mathcal{P}_{12}^{(0)}w = \int_{-\infty}^{\infty} t w_{ij}(x)\eta^i\eta^j dt, \quad \mathcal{P}_{22}^{(0)}w = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 w_{ij}(x)\eta^i\eta^j dt \quad (14)$$

лучевые преобразования с весом t^k , $k = 0, 1, 2$, симметричного 2-тензорного поля $w \in H^l(S^2)$, $l \geq 0$, $w = u + \tilde{u} + v$, $u = d^2\varphi$, $\tilde{u} = dd^\perp\chi$, $v = (d^\perp)^2\psi$ для $\varphi, \chi, \psi \in H_0^{l+2}$. Тогда поле w однозначно восстанавливается по поперечным (12), смешанным (13) или продольным (14) лучевым преобразованиям с весом.

Доказательство. Всякое симметричное 2-тензорное поле однозначно определяется тремя потенциалами $\varphi, \chi, \psi \in H_0^l$, $l \geq 2$, и разлагается в сумму потенциальных $u = d^2\varphi$, $\tilde{u} = dd^\perp\chi$ и соленоидального $v = (d^\perp)^2\psi$ полей, $w = d^2\varphi + (dd^\perp)\chi + (d^\perp)^2\psi$ [2]. Найдя эти поля, мы однозначно определим поле w .

В качестве доказательства приведём алгоритмы решения систем уравнений (12), (13) и (14). Из леммы 2 следует, что соотношения (12) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{02}^{(2)}w &= \int_{-\infty}^{\infty} (d^2\varphi)_{jk}\xi^j\xi^k dt, \\ \mathcal{P}_{12}^{(2)}w &= \int_{-\infty}^{\infty} t (d^2\varphi)_{jk}\xi^j\xi^k dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\chi}{\partial x^j}\xi^j dt, \\ \mathcal{P}_{22}^{(2)}w &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 (d^2\varphi)_{jk}\xi^j\xi^k dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} t \frac{\partial\chi}{\partial x^j}\xi^j dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Зафиксируем последовательность шагов алгоритма.

1. Из первого уравнения системы (15) находим потенциальное векторное поле $u = d^2\varphi$.
2. По полю u вычисляем поперечное лучевое преобразование $\mathcal{P}_{12}^{(2)}u$ с весом t .
3. Вычитаем из обеих частей второго уравнения системы (15) преобразование $\mathcal{P}_{12}^{(2)}u$.
4. Обращая левую часть полученного уравнения как поперечное лучевое преобразование векторного поля, получаем потенциальное поле $d\chi$.
5. По найденному на шаге 1 полю $u = d^2\varphi$ вычисляем поперечное лучевое преобразование $\mathcal{P}_{22}^{(2)}u$ с весом t^2 .
6. По найденному на шаге 4 полю $d\chi$ вычисляем поперечное лучевое преобразование потенциального векторного поля $d\chi$ с весом t .
7. Вычитаем найденные на шагах 5, 6 лучевые преобразования из обеих частей третьего уравнения системы (15).

8. Обращая левую часть полученного уравнения как преобразование Радона, получаем потенциал ψ симметричного соленоидального 2-тензорного поля $(d^\perp)^2\psi$.

9. Применяя к векторному полю $d\chi$ оператор d^\perp , получаем поле $(d^\perp d)\chi$.

10. Применяя к потенциалу ψ оператор d^\perp дважды, получаем симметричное соленоидальное 2-тензорное поле $(d^\perp)^2\psi$.

Используя лемму 2 в отношении смешанных (13) и продольных (14) лучевых преобразований с весом t^k , $k = 0, 1, 2$, получаем системы уравнений, аналогичные системе (15). Алгоритмы восстановления симметричного 2-тензорного поля по известным смешанным и продольным лучевым преобразованиям с весом аналогичны приведённому алгоритму восстановления поля по поперечным преобразованиям. \square

Замечание 2. При описании шагов алгоритмов, приведённых в следствиях 1, 2, опущены методы и алгоритмы обращения преобразования Радона и лучевых преобразований векторных и тензорных полей. Они многообразны и хорошо известны; часть из них достаточно подробно описаны в работе [2].

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ВЕСОМ

Напомним свойства преобразования Радона [1], которые предполагается распространить на лучевые преобразования с весом симметричных тензорных полей.

1. Преобразование Радона линейной комбинации функций φ , ψ есть линейная комбинация преобразований Радона функций: $\mathcal{R}(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1\mathcal{R}\varphi + c_2\mathcal{R}\psi$ (линейность преобразования Радона).

2. Преобразование Радона $\mathcal{R}\varphi(x)$ чётно: $g(-\xi, -s) = g(\xi, s)$ или $g(\pi + \theta, -s) = g(\theta, s)$ (чётность преобразования Радона).

3. Пусть в \mathbb{R}^2 задано линейное невырожденное преобразование $y = Ax$. Тогда $\mathcal{R}(\varphi(Ax)) = |\det A^{-1}| g((A^{-1})^T \xi, s)$, где A^{-1} , A^T — обратная и транспонированная матрицы соответственно.

4. Пусть $A = \lambda E$ для $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, и единичной матрицы E . Тогда

$$\mathcal{R}(f(\lambda x)) = \frac{1}{\lambda^2} g\left(\frac{\xi}{\lambda}, s\right) = \frac{1}{|\lambda|} g(\xi, \lambda s).$$

5. Пусть A — ортогональная матрица, $A^{-1} = A^T$, $|\det A| = 1$, тогда $\mathcal{R}(\varphi(Ax)) = g(A\xi, s)$.

6. Пусть в \mathbb{R}^2 произведена замена начала координат, $y = x - a$. Тогда

$$\mathcal{R}\varphi(x - a) = g(\xi, s - \langle \xi, a \rangle)$$

— сдвиг преобразования Радона.

Перечисленные свойства преобразования Радона обобщаются на случай лучевых преобразований и лучевых преобразований с весом симметричных тензорных полей. Для доказательства необходимо привести дополнительные сведения [2].

Ниже через d , d^\perp обозначены операторы внутреннего дифференцирования и ортогонального внутреннего дифференцирования, переводящие симметричное m -тензорное поле $(w_{i_1 \dots i_m})$ в симметричные тензорные поля u , v ранга $m + 1$. Оператор внутреннего дифференцирования $d: H_0^l(S^m) \rightarrow H^{l-1}(S^{m+1})$, $l \geq 1$, даёт поле u по правилу

$$u_{i_1 \dots i_m j} := (dw)_{i_1 \dots i_m j} = \frac{1}{m+1} \left(\frac{\partial w_{i_1 \dots i_m}}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x^{i_k}} \right).$$

Оператор внутреннего ортогонального дифференцирования d^\perp даёт поле v по правилу

$$v_{i_1 \dots i_m j} := (d^\perp w)_{i_1 \dots i_m j} = \frac{1}{m+1} \left((-1)^j \frac{\partial w_{i_1 \dots i_m}}{\partial x^{3-j}} + \sum_{k=1}^m (-1)^{i_k} \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x^{3-i_k}} \right),$$

$$d^\perp : H_0^l(S^m) \rightarrow H^{l-1}(S^{m+1}), \quad l \geq 1.$$

Известно [2], что операторы внутреннего дифференцирования и ортогонального внутреннего дифференцирования коммутативны:

$$((d d^\perp)w)_{i_1 \dots i_m j k} = ((d^\perp d)w)_{i_1 \dots i_m j k}.$$

Дивергенция и ортогональная дивергенция $\delta, \delta^\perp : H_0^l(S^m) \rightarrow H^{l-1}(S^{m-1}), k \geq 1$, действуют на симметричное m -тензорное поле w :

$$u_{i_1 \dots i_{m-1}} := (\delta w)_{i_1 \dots i_{m-1}} = \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} j}}{\partial x^j} \equiv \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 1}}{\partial x^1} + \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 2}}{\partial x^2},$$

$$v_{i_1 \dots i_{m-1}} := (\delta^\perp w)_{i_1 \dots i_{m-1}} = (-1)^j \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} j}}{\partial x^{3-j}} \equiv -\frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 1}}{\partial x^2} + \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{m-1} 2}}{\partial x^1}$$

и дают симметричные тензорные поля u, v валентности $m-1$.

Следующие результаты получены в [2], сформулированы с учётом обозначений, принятых в настоящей работе, и приводятся без доказательств.

Теорема 1. Пусть дано симметричное m -тензорное поле $w \in H^{l-m}(S^m), l, m \geq 0$ целые, $l \geq m$, и его лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)} w$, заданные в (2), $j = 0, \dots, m$.

1. Существуют потенциалы $\psi^{(0)}, \dots, \psi^{(m)} \in H_0^l$ такие, что имеет место следующее разложение поля w :

$$w = \sum_{j=0}^m u^{(j)} \equiv \sum_{j=0}^m (d^\perp)^{m-j} d^j \psi^{(j)}, \quad (16)$$

$u^{(j)} \in H^{l-m}(S^m), l \geq m$. Разложение (16) единственно.

2. Для целых $j, l = 0, \dots, m$ справедливы соотношения $\mathcal{P}_m^{(j)} w = \mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)}, \mathcal{P}_m^{(j)} u^{(l)} = 0$ при $j \neq l$.

3. Лучевое преобразование $\mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)}$ поля $u^{(j)}(x) = (d^\perp)^{m-j} (d)^j \psi^{(j)}(x)$, где $u^{(j)} \in H^l(S^m), \psi^{(j)} \in H_0^{l+m}, j = 0, \dots, m$, связано с лучевым преобразованием $\mathcal{P}_{m+1}^{(j+1)}$ поля $u^{(j+1)}(x) = (d^\perp)^{m-j} (d)^{j+1} \psi^{(j)}(x)$:

$$\mathcal{P}_{m+1}^{(j+1)} u^{(j+1)} = \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m.$$

Аналогично,

$$\mathcal{P}_{m+1}^{(j)} v^{(j)} = \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m,$$

где поле $v^{(j)}(x) = (d^\perp)^{m+1-j} (d)^j \psi^{(j)}(x)$.

4. Лучевое преобразование $\mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)}$ поля $u^{(j)}(x) = (d^\perp)^{m-j} (d)^j \psi^{(j)}(x)$, где $u^{(j)} \in H^l(S^m), \psi^{(j)} \in H_0^{l+m}, j = 0, \dots, m$, связано с преобразованием Радона его потенциала $\psi^{(j)}$ соотношением

$$\mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)} = \frac{j!(m-j)!}{m!} \frac{\partial^m}{\partial s^m} \mathcal{R} \psi^{(j)}, \quad j = 0, \dots, m.$$

5. Пусть $\psi^{(j)} = \varphi \in H_0^l$ для всех $j = 0, \dots, m, l \geq m$. Тогда $\frac{m!}{j!(m-j)!} \mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)} = \frac{\partial^m}{\partial s^m} \mathcal{R} \varphi$.

Предположим, что функция $\varphi(x(\theta, s)) \in H_0^1$ такова, что $x = s\xi + t\eta$ и $\varphi|_{\partial B} = 0$. Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \left\langle d\varphi, \frac{\partial x}{\partial s} \right\rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \xi^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \xi^2 = \langle d\varphi, \xi \rangle = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) \eta^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \eta^2 = \langle d^\perp \varphi, \eta \rangle, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left\langle d\varphi, \frac{\partial x}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \eta^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \eta^2 = \langle d\varphi, \eta \rangle = \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \xi^1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \xi^2 = -\langle d^\perp \varphi, \xi \rangle. \quad (18)$$

Соотношения (5), (17), (18) используются при доказательстве сформулированных ниже результатов. Кроме того, возможность представления тензорного поля через потенциалы, описание ядер лучевых преобразований и связи лучевых преобразований тензорных полей с преобразованиями Радона их потенциалов позволяют перенести свойства преобразования Радона на аналогичные свойства лучевых преобразований.

При доказательстве сформулированной ниже теоремы нам потребуется следующая лемма технического характера.

Лемма 3. Пусть на плоскости \mathbb{R}^2 заданы прямоугольная декартова система координат, векторы $\xi = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\eta = (-\sin \theta, \cos \theta)$, $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$, $x = s\xi + t\eta$, и линейное преобразование $y = Ax$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0$. Векторы $\tilde{\xi} = (A^{-1})^T \xi$, $\tilde{\eta} = (A^{-1})^T \eta$, $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; A^{-1}, A^T — обратная и транспонированная матрицы.

1. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle y, \tilde{\xi} \rangle &= \langle A(s\xi), \tilde{\xi} \rangle = \langle x, \xi \rangle = s, & \langle y, \tilde{\eta} \rangle &= \langle A(t\eta), \tilde{\eta} \rangle = \langle x, \eta \rangle = t, \\ \langle \xi, \eta \rangle &= \langle A\eta, \tilde{\xi} \rangle = \langle A\xi, \tilde{\eta} \rangle = 0, \\ \frac{\partial \varphi(y)}{\partial s} &= \langle d_y \varphi, \tilde{\xi} \rangle = \langle d_x \varphi, \xi \rangle = \langle d_x^\perp \varphi, \eta \rangle = \langle d_y^\perp \varphi, \tilde{\eta} \rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

2. Пусть $w_{i_1 \dots i_m}(x)$ — компоненты симметричного m -тензорного поля $w(x)$. Соотношения (19) выполняются для каждой компоненты $w_{i_1 \dots i_m}$ поля w :

$$\frac{\partial w_{i_1 \dots i_m}(y)}{\partial s} = \langle d_y w_{i_1 \dots i_m}, \tilde{\xi} \rangle = \langle d_x w_{i_1 \dots i_m}, \xi \rangle = \langle d_x^\perp w_{i_1 \dots i_m}, \eta \rangle = \langle d_y^\perp w_{i_1 \dots i_m}, \tilde{\eta} \rangle. \quad (20)$$

Доказательство. Доказательство приведённых в лемме соотношений состоит в их непосредственной проверке с опорой на свойства линейных преобразований плоскости. \square

Теорема 2. Пусть дано симметричное m -тензорное поле $w \in H^{l-m}(S^m)$, $l, m \geq 0$ целые, $l \geq m$, и его лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)} w$, заданные (2), $j = 0, \dots, m$.

1. Лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)} w(x)$ симметричного m -тензорного поля $w(x)$ линейны относительно преобразований Радона его компонент $w_{i_1 \dots i_m}(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{i_1 \dots i_m}(x) \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} dt = \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} \int_{-\infty}^{\infty} w_{i_1 \dots i_m}(x) dt;$$

эквивалентные формы записи

$$\mathcal{P}_m^{(j)} w(x) = \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} \mathcal{R} w_{i_1 \dots i_m}(x)$$

или

$$g_m^{(j)}(\xi, s) = \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} h_{i_1 \dots i_m}(\xi, s).$$

2. Лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)} w(x)$ при чётном $m = 2l$ чётны:

$$g_{2l}^{(j)}(-\xi, -s) = g_{2l}^{(j)}(\xi, s) \quad \text{или} \quad g_{2l}^{(j)}(\pi + \theta, -s) = g_{2l}^{(j)}(\theta, s);$$

лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)} w(x)$ при нечётном $m = 2l + 1$ нечётны:

$$g_{2l+1}^{(j)}(-\xi, -s) = -g_{2l+1}^{(j)}(\xi, s) \quad \text{или} \quad g_{2l+1}^{(j)}(\pi + \theta, -s) = -g_{2l+1}^{(j)}(\theta, s).$$

3. Пусть в \mathbb{R}^2 задана линейная замена $y = Ax$, $\det A \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{P}_m^{(j)}(w(Ax)) = \tilde{\xi}^{i_1} \dots \tilde{\xi}^{i_j} \tilde{\eta}^{i_{j+1}} \dots \tilde{\eta}^{i_m} |\det A^{-1}| h_{i_1 \dots i_m}(\tilde{\xi}, s) = |\det A^{-1}| g_m^{(j)}(\tilde{\xi}, s),$$

где A^T — транспонированная матрица, $\tilde{\xi} = (A^{-1})^T \xi$, $\tilde{\eta} = (A^{-1})^T \eta$, $\tilde{\eta}^1 = -\tilde{\xi}^2$, $\tilde{\eta}^2 = \tilde{\xi}^1$, $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

4. Пусть $A = \lambda E$ для $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, E — единичная матрица. Тогда

$$\mathcal{P}_m^{(j)}(w(\lambda x)) = \frac{1}{\lambda^2} g_m^{(j)}\left(\frac{\xi}{\lambda}, s\right).$$

5. Пусть матрица A ортогональна, $A^{-1} = A^T$, $|\det A| = 1$, тогда (вращение лучевого преобразования) $\mathcal{P}_m^{(j)}(w(Ax)) = g_m^{(j)}(A\xi, s)$.

6. Пусть в \mathbb{R}^2 произведена замена начала координат, $y = x - a$. Тогда (сдвиг лучевого преобразования) $\mathcal{P}_m^{(j)} w(x - a) = g_m^{(j)}(\xi, s - \langle \xi, a \rangle)$.

Доказательство. Для доказательства свойства 1 достаточно заметить, что от переменной x , а следовательно, и от t зависят лишь компоненты $w_{i_1 \dots i_m}$ тензорного поля w , в отличие от компонент векторов ξ , η , которые зависят лишь от угла θ . Используя свойство 1, затем свойство чётности преобразования Радона и нечётность компонент векторов ξ , η , а именно, $\xi^j(\theta + \pi) = -\xi^j$, $\eta^l(\theta + \pi) = -\eta^l$, приходим к свойству 2. Переходя к доказательству свойства 3, предварительно приведём доказательство свойства 3 преобразования Радона [1]. Так как $y = Ax$ и $\det A \neq 0$, то $x = A^{-1}y$ и $dx = |\det A^{-1}| dy$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\varphi(Ax)) &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(Ax) \delta(s - \langle \xi, x \rangle) dx = |\det A^{-1}| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) \delta(s - \langle \xi, A^{-1}y \rangle) dy \\ &= |\det A^{-1}| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) \delta(s - \langle (A^{-1})^T \xi, y \rangle) dy = |\det A^{-1}| g((A^{-1})^T \xi, s). \end{aligned}$$

С учётом приведённой формулы, пп. 1–4 теоремы 1 и соотношений леммы 3 получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m^{(j)} w(Ax) &= \frac{j!(m-j)!}{m!} \frac{\partial^m}{\partial s^m} \mathcal{R} \psi^{(j)}(Ax) = |\det A^{-1}| \frac{j!(m-j)!}{m!} \frac{\partial^m}{\partial s^m} g^{(j)}((A^{-1})^T \xi, s) \\ &= |\det A^{-1}| g_m^{(j)}((A^{-1})^T \xi, s), \quad j = 0, \dots, m. \end{aligned}$$

Свойства 4 и 5 непосредственно следуют из свойства 3 как его частные, более простые случаи. Заметим, что для матрицы $A = \lambda E$ определитель $\det A = \frac{1}{\lambda^2}$, $A^{-1} = (A^{-1})^T = \frac{1}{\lambda} E$, и $\tilde{\xi} = \frac{1}{\lambda} \xi$, $\tilde{\eta} = \frac{1}{\lambda} \eta$. Если матрица A ортогональна, $A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$, то $A^{-1} = A^T$ и $(A^{-1})^T = (A^T)^T = A$. Векторы ξ , η в этом случае преобразуются в векторы $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2) =$

$A\xi = (\cos(\theta + \vartheta), \sin(\theta + \vartheta))$, $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}^1, \tilde{\eta}^2) = A\eta = (-\sin(\theta + \vartheta), \cos(\theta + \vartheta))$. Хотя свойство 5 доказано в общем случае лучевого преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)}w$ для любых m, j , проведём независимое доказательство для $\mathcal{P}_1^{(1)}w$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^{(1)}u(Ax) &= \mathcal{P}_1^{(1)}u(y) = \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{R}\varphi(y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle d\varphi, \frac{\partial y}{\partial s} \right\rangle dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle d\varphi, \tilde{\xi} \rangle dt \\ &= \tilde{\xi}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(y) dt + \tilde{\xi}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(y) dt = \tilde{\xi}^1 \mathcal{R}u_1(Ax) + \tilde{\xi}^2 \mathcal{R}u_2(Ax) \\ &= \tilde{\xi}^1 h_1(A\xi, s) + \tilde{\xi}^2 h_2(A\xi, s) = g_1^{(1)}(A\xi, s). \end{aligned}$$

С учётом соотношений (19) леммы 3 приведённая цепочка равенств остаётся справедливой и для преобразования $\mathcal{P}_1^{(0)}$ с заменой потенциального векторного поля u на соленоидальное v , векторов $\xi, \tilde{\xi}$ на $\eta, \tilde{\eta}$ и оператора d на d^\perp .

Точка $a = (a^1, a^2)$, участвующая в формулировке свойства 6, задаёт сдвиг системы координат $y = x - a$. При этом векторы ξ, η остаются неизменными, $\xi = \tilde{\xi}, \eta = \tilde{\eta}$, операторы дифференцирования по переменным $x^j, y^j, j = 1, 2$, эквивалентны между собой. Для поперечного лучевого преобразования векторного поля w имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^{(1)}w(x - a) &= \mathcal{P}_1^{(1)}w(y) = \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{R}\varphi(y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle d_y\varphi, \frac{\partial y}{\partial s} \rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle d_y\varphi, \xi \rangle dt \\ &= \xi^1 \int_{-\infty}^{\infty} w_1(y) dt + \xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_2(y) dt = \xi^1 \mathcal{R}w_1(y) + \xi^2 \mathcal{R}w_2(y) \\ &= \xi^1 h_1(\xi, s - \langle \xi, a \rangle) + \xi^2 h_2(\xi, s - \langle \xi, a \rangle) = g_1^{(1)}(\xi, s - \langle \xi, a \rangle). \quad (21) \end{aligned}$$

Оставшаяся часть доказательства проводится методом математической индукции. Пусть утверждение верно для смешанного лучевого преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)}w^j(x)$ поля $w^{(j)}(x) = (d^\perp)^{m-j}(d)^j\psi^{(j)}(x)$, где $w \in H^l(S^m)$, $\psi^{(j)} \in H_0^{l+m}$, $j = 0, \dots, m$. Покажем, что соотношение 6 теоремы 2 справедливо для лучевого преобразования $\mathcal{P}_{m+1}^{(j+1)}$ поля $w^{(j+1)}(x) = (d^\perp)^{m-j}(d)^{j+1}\psi^{(j)}(x)$. Обозначим подынтегральную функцию $w_{i_1 \dots i_m}^{(j)}(z)\xi^{i_1} \dots \xi^{i_j}\eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m}$ преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)}$ через $\varphi(\xi, \eta, z)$, где $z = z(s, \xi, \eta, t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m+1}^{(j+1)}w^{(j+1)}(y) &= \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{P}_m^{(j)}w^{(j)}(z)) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle d_z\varphi, \frac{\partial z}{\partial s} \rangle dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle d_z\varphi, \xi \rangle dt \\ &= \xi^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z^1} dt + \xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z^2} dt = \xi^1 \mathcal{R}u_1(z) + \xi^2 \mathcal{R}u_2(z) \\ &= \xi^1 h_1(\xi, z) + \xi^2 h_2(\xi, z) = g_{m+1}^{(j+1)}(\xi, s - \langle \xi, a \rangle). \end{aligned}$$

Здесь $u = (u_1, u_2) = d\varphi$; h_1, h_2 — преобразование Радона его компонент.

Соотношения (17) и лемма позволяют доказать аналогичный результат, связывающий между собой смешанное лучевое преобразование $\mathcal{P}_m^{(j)}w^j(x)$ поля $w^{(j)}(x) = (d^\perp)^{m-j}(d)^j\psi^{(j)}(x)$, где $w \in H^l(S^m)$, $\psi^{(j)} \in H_0^{l+m}$, $j = 0, \dots, m$, и лучевое преобразование $\mathcal{P}_{m+1}^{(j)}$ поля $w^{(j)}(x) = (d^\perp)^{m+1-j}(d)^{j+1}\psi^{(j)}(x)$. \square

Следствие 3. Пусть дано симметричное m -тензорное поле $w \in H^{l-m}(S^m)$, $l, m \geq 0$ целые, $l \geq m$, и его лучевые преобразования с весом $\mathcal{P}_{km}^{(j)} w$, заданные (2), $j = 0, \dots, m$.

1. Лучевые преобразования с весом $\mathcal{P}_{km}^{(j)} w(x)$ симметричного m -тензорного поля $w(x)$ линейны относительно преобразований Радона с весом его компонент $w_{i_1 \dots i_m}(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k w_{i_1 \dots i_m}(x) \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} dt = \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} \int_{-\infty}^{\infty} t^k w_{i_1 \dots i_m}(x) dt;$$

эквивалентная форма записи

$$\mathcal{P}_{km}^{(j)} w(x) = \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} \mathcal{P}_{k0}^{(0)} w_{i_1 \dots i_m}(x)$$

или

$$g_{km}^{(j)}(\xi, s) = \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} g_{k0}^{(0)}(\xi, s).$$

2. Лучевые преобразования $\mathcal{P}_{km}^{(j)} w(x)$ чётны при $k + m$ чётном:

$$g_{km}^{(j)}(-\xi, -s) = g_{km}^{(j)}(\xi, s) \quad \text{или} \quad g_{km}^{(j)}(\pi + \theta, -s) = g_{km}^{(j)}(\theta, s);$$

лучевые преобразования $\mathcal{P}_{km}^{(j)} w(x)$ нечётны при $k + m$ нечётном:

$$g_{km}^{(j)}(-\xi, -s) = -g_{km}^{(j)}(\xi, s) \quad \text{или} \quad g_{km}^{(j)}(\pi + \theta, -s) = -g_{km}^{(j)}(\theta, s).$$

3. Пусть в \mathbb{R}^2 задано линейное невырожденное преобразование $y = Ax$. Тогда

$$\mathcal{P}_{km}^{(j)}(w(Ax)) = |\det A^{-1}| g_{km}^{(j)}((A^{-1})^T(\xi, s)),$$

где A^T — транспонированная матрица.

4. Пусть $A = \lambda E$ для $\lambda \in \mathbb{R}$, E — единичная матрица, $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{P}_{km}^{(j)}(w(\lambda x)) = \frac{1}{\lambda^2} g_{km}^{(j)}\left(\frac{\xi}{\lambda}, s\right).$$

5. Пусть матрица A ортогональна, $A^{-1} = A^T$, $|\det A| = 1$. Тогда

$$\mathcal{P}_{km}^{(j)}(w(Ax)) = g_{km}^{(j)}(A\xi, s).$$

6. Пусть в \mathbb{R}^2 произведена замена начала координат, $y = x - a$. Тогда

$$\mathcal{P}_{km}^{(j)} w(x - a) = g_{km}^{(j)}(\xi, s - \langle \xi, a \rangle).$$

Доказательство. Перечисленные свойства 1–6 сразу следуют из теоремы 2, но могут быть проверены и непосредственно точно так же, как это сделано при доказательстве теоремы 2. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваются смешанные лучевые преобразования симметричных тензорных полей вида (2) и смешанные лучевые преобразования с весом t^k вида (3). Иные весовые функции не рассматриваются. Особое внимание уделено лучевым преобразованиям с весом симметричных тензорных полей малых рангов 1 и 2. Установлены связи между лучевыми преобразованиями с разными степенями k весов t^k . Показано, что векторное поле однозначно восстанавливается

по продольным или поперечным лучевым преобразованиям с весом t^k , $k = 0, 1$. Симметричное 2-тензорное поле однозначно восстанавливается по известным лучевым преобразованиям с весом t^k , $k = 0, 1, 2$, любого типа, а именно, поперечным, смешанным или продольным. Предложены простые алгоритмы восстановления тензорных полей рангов 1 и 2. Основные свойства, известные для преобразования Радона (линейность, чётность, геометрические свойства), распространены на лучевые преобразования и на лучевые преобразования с весом симметричных m -тензорных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deans S.* The Radon Transform and Some of its Applications. N. Y.: Wiley, 1983.
2. *Derevtsov E.Yu., Svetov I.E.* Tomography of tensor fields in the plane // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 2. P. 24–68.
3. *Sharafutdinov V.A.* Integral Geometry of Tensor Fields. Urtecht: VSP, 1994.
4. *Деревцов Е.Ю.* Некоторые задачи не скалярной томографии // Сиб. электрон. мат. известия. 2010. Т. 7. С. 81–111.
5. *Krishnan V.P., Manna R., Sahoo S.K., Sharafutdinov V.A.* Momentum ray transforms // Inverse Probl. Imaging. 2019. V. 13, N 3. P. 679–701; DOI:10.3934/ipi.2019031
6. *Abhishek A., Mishra R.K.* Support theorems and an injectivity result for integral moments of a symmetric m -tensor field // J. Fourier Anal. Appl. 2019. V. 25, N 4. P. 1487–1512; DOI:10.1007/s00041-018-09649-7
7. *Mishra R.K.* Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in R^n // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2020. V. 28, N 2. P. 173–184; <https://doi.org/10.1515/jiip-2018-0028>
8. *Mishra R.K., Sahoo S.K.* Injectivity and range description of first $(k + 1)$ integral moment transforms over m -tensor fields in R^n // SIAM J. Math. Anal. 2021. V. 53, N 1. P. 253–278; <https://doi.org/10.1137/20M1347589>

UDC 517.44:517.95

MOMENTUM RAY TRANSFORMS OVER PLANAR TENSOR FIELDS

© 2023 E. Yu. Derevtsov

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: dert@math.nsc.ru

Received 07.04.2023, revised 07.04.2023, accepted 07.06.2023

Abstract. The paper considers ray transforms over the moments of symmetric tensor fields of arbitrary rank given in the unit circle. The basic geometric and differential properties of mixed ray transforms over tensor fields and mixed ray transforms over moments of tensor fields are established. A simple algorithm for reconstructing a low-rank tensor field from known mixed ray transforms of its moments is proposed and justified.

Keywords: tensor field, Radon transform, mixed ray momentum transform, geometric properties, differential properties, reconstruction algorithm.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.303

REFERENCES

1. Deans S. The Radon Transform and Some of its Applications. N. Y.: Wiley, 1983.
2. Derevtsov E.Yu., Svetov I.E. Tomography of tensor fields in the plane. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2015, Vol. 3, No. 2, pp. 24–68.
3. Sharafutdinov V.A. Integral Geometry of Tensor Fields. Urtecht: VSP, 1994.
4. Derevtsov E.Yu. Nekotorye zadachi neskalyarnoi tomografii [Some problems of non-scalar tomography]. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2010, Vol. 7, pp. 81–111 (in Russian).
5. Krishnan V.P., Manna R., Sahoo S.K., Sharafutdinov V. A. Momentum ray transforms. *Inverse Probl. Imaging*, 2019, Vol. 13, No. 3, pp. 679–701; DOI:10.3934/ipi.2019031
6. Abhishek A., Mishra R.K. Support theorems and an injectivity result for integral moments of a symmetric m -tensor field. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2019, Vol. 25, No. 4, pp. 1487–1512; DOI:10.1007/s00041-018-09649-7
7. Mishra R.K. Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in R^n . *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2020, Vol. 28, No. 2, pp. 173–184; <https://doi.org/10.1515/jiip-2018-0028>
8. Mishra R.K., Sahoo S.K. Injectivity and range description of first $(k + 1)$ integral moment transforms over m -tensor fields in R^n . *SIAM J. Math. Anal.*, 2021, Vol. 53, No. 1, pp. 253–278; <https://doi.org/10.1137/20M1347589>

УДК 531.01:531.8

О ГРАФАХ И СТРУКТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

© 2023 М. Д. Ковалёв

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, г. Москва 119991, Россия*

E-mail: kovalev.math@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 06.09.2022 г.; после доработки 06.09.2022 г.;
принята к публикации 12.01.2023 г.

Структурными формулами в теории механизмов называют формулы, выражающие число степеней свободы устройства через числа его звеньев и кинематических пар. Известно, что они не всегда справедливы. Разобраться в этом вопросе помогает математическая теория графов. Справедливость структурных формул в случае типичных устройств полностью определяется их строением, описываемым графами. В работе рассмотрено две модели плоских устройств с вращательными парами. Первая модель — устройства, составленные из прямолинейных стержней (рычагов), несущих на концах шарниры. Таким устройствам естественно сопоставляется граф G с вершинами, отвечающими шарнирам, и рёбрами, отвечающими рычагам. В теории механизмов принято рассматривать другой граф \mathcal{G} , вершины которого отвечают звеньям, а рёбра — кинематическим парам. Оказывается, использование графа G для описания структуры как в первой модели, так и во второй, содержащей все плоские устройства с вращательными парами, предпочтительнее графа \mathcal{G} . В частности, оно позволяет дать критерий применимости структурных формул для типичных устройств заданного строения.

Ключевые слова: математические модели механизмов, структура механизмов, структурные графы, структурные формулы теории механизмов, шарнирные механизмы, размерность конфигурационного пространства.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.304

ВВЕДЕНИЕ

В теории механизмов существует направление, занимающееся их структурным анализом. Это направление основано на так называемых структурных формулах, выражающих число степеней свободы устройства через числа его звеньев и кинематических пар. Первой структурной формулой была формула Чебышёва (её часто называют формулой Чебышёва — Грюблера) для плоских механизмов с вращательными парами. Впоследствии появились учитывающие различные типы кинематических пар структурные формулы и для пространственных механизмов. Но, как известно, эти классические структурные формулы не всегда справедливы. Поэтому продолжают появляться работы, пытающиеся их исправить и усовершенствовать путём введения в них новых слагаемых [1–5]. В предлагаемых как в плоском, так и в пространственном случаях новых структурных формулах стараются как можно шире учесть разнообразие механизмов. Исходными понятиями в этих изысканиях являются инженерные понятия звена, кинематической пары и кинематической цепи. Понятие графа даже не появляется в явном виде [6]. При попытке применить результаты этих работ хотя бы к плоским шарнирно-рычажным устройствам выясняется, что содержащиеся в них утверждения и формулы не всегда верны даже в этом простейшем случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

В настоящее время признано, что степень подвижности механических устройств (конструкций) зависит не только от чисел звеньев и кинематических пар в них, но и от их строения. Хотя ещё и встречаются такие высказывания: «Если число звеньев обозначить параметром n , а число кинематических пар параметром p , то именно эти два параметра целиком и полностью определяют структуру кинематической цепи механизма.» [27, с.24]. Анализ строения естественно основывать на сопоставлении устройству графа и последующем исследовании этого графа. Постепенно такой подход в теории механизмов получает признание [8–10]. Он основан на использовании графа, вершины которого отвечают звеньям конструкции, а рёбра — кинематическим парам. Мы будем обозначать этот граф как \mathcal{G} .

Если понимать механизм как устройство, допускающее непрерывное движение из любого его положения в любое другое, а его конфигурационное пространство как множество всех положений этого устройства, то число степеней свободы механизма есть размерность его конфигурационного пространства. При таком подходе исходные понятия теории механизмов обретают чёткий геометрический смысл. Соответствующая формализация была проведена автором в работе [11] и более подробно в [12, 13]. Анализ её отличия от других предложенных математиками формализаций содержится в [14]. В этих работах используется модель шарнирно-рычажных конструкций, т. е. устройств, составленных из прямолинейных жёстких стержней, соединённых в своих концах шарнирами (модель 1 данной работы). Такой конструкции естественным образом сопоставляется граф G , вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам.

Здесь будет установлено, что использование графа G для описания структуры конструкций модели 1, а также плоских устройств с вращательными парами (модель 2 данной работы) более естественно, чем графа \mathcal{G} . Будет выявлено, когда описание структуры таких устройств графами \mathcal{G} и G равносильно. Оказывается, для этого достаточно отсутствия в устройстве так называемых совмещённых (сложных или кратных) шарниров. Если в устройстве есть совмещённые шарниры, то граф \mathcal{G} , в отличие от графа G , не несёт полной информации о структуре устройства. Положение можно исправить, рассмотрев взвешенный граф \mathcal{G}^* .

В плоском случае известны комбинаторные условия на граф G , влекущие независимость связей в типичном шарнирно-рычажном устройстве со структурой такого графа. Это позволяет решить вопрос о справедливости структурных формул Чебышёва теории механизмов и их аналогов для типичных плоских устройств с вращательными парами. Заметим, что аналогичный вопрос для пространственных шарнирно-рычажных устройств со сферическими шарнирами пока не решён. Известно лишь его решение в некоторых частных случаях, например для устройств, составленных из жёстких тел, соединённых закреплёнными в них сферическими шарнирами штангами [15].

1. МОДЕЛЬ 1. ШАРНИРНО-РЫЧАЖНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Под ними мы понимаем конструкции, составленные из прямолинейных жёстких стержней (рычагов), соединённых шарнирами в их концах. У нас каждый рычаг несёт по шарниру на своих концах. При этом если в шарнире соединены лишь два рычага, то этому шарниру отвечает обычная вращательная пара, допускающая произвольное проворачивание одного из рычагов относительно другого. Будем называть такой шарнир 1-шарниром. Если в шарнире соединены $k > 2$ рычагов, то это так называемый совмещённый или сложный шарнир с одним общим центром вращения для всех k рычагов. Его мы назовём $(k - 1)$ -шарниром. В этом шарнире каждый из k рычагов допускает проворачивание, не зависимое от остальных рычагов. Если же конец рычага не соединён ни с каким другим рычагом, то в нём нет кинематической пары, и мы его называем 0-шарниром. Так, на рис. 2 шарнир v есть 0-шарнир, а шарнир w — 2-шарнир. До сих пор мы говорили о незакреплённых конструкциях. Но в теории механизмов обычно рассматривают закреплённые в плоскости (стойке) конструкции. Закрепление будем производить шарнирами, которые назовём закреплёнными, и на рисунках будем обозначать

крестиками в отличие от кружочков, отвечающих свободным (незакреплённым) шарнирам. В закреплённом шарнире непременно имеется хотя бы одна кинематическая пара, и он не может быть 0-шарниром. Конечно, наша кинематическая модель в большой мере является идеализацией. Мы допускаем пересечения различных рычагов и совпадение положений различных несмежных, т. е. не принадлежащих одному рычагу, шарниров.

Коль скоро мы принимаем такую модель плоских шарнирных конструкций, в частности механизмов, исследование их структуры сводится к исследованию графа G , вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам конструкции. Здесь можно применить теорию графов [16]. Исследование же кинематики сводится к исследованию множества решений системы уравнений, накладывающих условия на расстояния между шарнирами. Эту систему удобно записать в виде квадратичных уравнений $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = d_{ij}^2$, где (x_i, y_i) — координаты i -го шарнира p_i , а d_{ij} — квадрат длины рычага, несущего на концах шарниры p_i и p_j . Число уравнений равно числу r рычагов в конструкции. Анализом решений таких систем в настоящее время занимается вещественная алгебраическая геометрия [17, 18]. С другой стороны, эти вопросы относятся к задачам реализации абстрактных графов в евклидовых пространствах [19, 13]. В работе [18] подробно рассмотрены механизмы с экзотическими свойствами, такими как переменность числа степеней свободы и наличие останавливающихся шарниров, а также вопрос передачи движения в таких механизмах.

1.1. Структурные формулы

Структурными формулами в теории механизмов называют формулы, выражающие число W степеней свободы механизма (число степеней свободы механизма машиноведы также называют степенью его подвижности) через числа его звеньев и кинематических пар. В случае плоских шарнирно-рычажных механизмов используется восходящая к работе [20] П. Л. Чебышёва о шарнирных параллелограммах (работа была доложена в 1869 г. в Москве на Втором съезде русских естествоиспытателей) структурная формула

$$W = 3\rho - 2\mu, \quad (1)$$

где ρ — число звеньев за исключением стойки (для шарнирно-рычажных механизмов это число r рычагов механизма), μ — число его вращательных пар. П. Чебышёв получает её элементарным подсчётом числа степеней свободы, предполагая независимость условий, налагаемых вращательными парами и допуская возможность наличия на рычаге (стержне) более двух вращательных пар, или в нашей терминологии 1-шарниров. Итак, μ у П. Чебышёва — общее число 1-шарниров, и оно совпадает с числом всех шарниров. Поскольку закреплённые шарниры считаются смежными лишь одному рычагу, то совмещённых шарниров в конструкции нет.

Такой же подсчёт в модели 1, но основанный на общем числе степеней свободы всех незакреплённых шарниров и справедливый также и в случае наличия совмещённых шарниров, даёт формулу

$$W = 2m - r, \quad (2)$$

где m — число всех свободных шарниров (в него входят и 0-шарниры, и совмещённые k -шарниры), r — число рычагов. Действительно, число степеней свободы всех незакреплённых шарниров как точек в плоскости равно $2m$, а число условий в случае их независимости равно r .

Заметим, что число концов рёбер в графе G равно

$$2r = m_0 + 2m_1 + 3m_2 + \dots + n_1 + 2n_2 + \dots,$$

где m_i — число свободных i -шарниров ($i = 0, 1, 2, \dots$), n_i — число закреплённых шарниров, смежных i рычагам. Отсюда

$$m = m_0 + m_1 + m_2 + \dots = 2r - m_1 - 2m_2 - \dots - n_1 - 2n_2 - \dots$$

И подстановка этого равенства в (2) даёт аналог формулы Чебышёва для модели 1, справедливый и в случае наличия совмещённых шарниров:

$$W = 3r - 2(m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + n_1 + 2n_2 + \dots) \quad (3)$$

Формулой (1) обычно пользуются в теории механизмов для подсчёта числа степеней свободы механизма. Однако эта формула, как и формулы (2), (3), не всегда даёт правильный ответ. Машиноведы для её исправления вводят добавочные слагаемые, которые соотносят наличие избыточных или пассивных (паразитных) связей [21]. Их приходится выявлять в каждом случае отдельно.

Причины, по которым нарушаются формулы (1)–(3), оказываются двух родов. Во-первых, структурная формула может быть верна для подавляющего числа шарнирных устройств с заданным графом G и может нарушаться лишь при определённом выборе длин рычагов, т. е. она верна в типичном случае и теряет силу при специальном подборе параметров механизма. Например, плоский шарнирный четырёхзвенник становится фермой, если длина одного из его звеньев равна сумме длин остальных трёх. Геометрически множество таких исключительных механизмов представляет собой подмножество меньшей размерности в множестве параметров, определяющих механизмы данной структуры.

Во-вторых, структурная формула может быть не верна в типичном случае. Это происходит по той причине, что число степеней свободы определяется не только числом звеньев и вращательных пар (иных у нас нет), но и строением устройства. Строение же может быть такое, что налагаемые кинематическими парами связи зависимы для всех устройств. Пример этого приведён на рис. 1. Типичное устройство с таким графом является шарнирным механизмом с одной степенью свободы (по существу шарнирный четырёхзвенник), хотя структурная формула (2) даёт нулевое число степеней свободы.

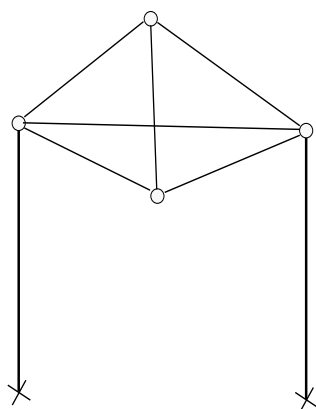


Рис. 1. Шарнирный четырёхзвенник с избыточной связью в шатунном звене; закреплённые в стойке шарниры обозначены крестиками

Далее мы рассмотрим степень подвижности лишь для типичных устройств. Структурный граф механизма разумно вводить так, чтобы он полностью определял степень подвижности типичного механизма.

1.2. Структурные графы G и \mathcal{G}

Итак, шарнирно-рычажному устройству, возможно с совмещёнными шарнирами, мы сопоставляем структурный граф G , вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам. Если V — множество шарниров, а E — множество рычагов, то его можно обозначить как $G(V, E)$. На этот граф разумно наложить ряд требований, диктуемых теорией механизмов. Перечислим их.

1. Граф $G(V, E)$ конечен, без петель и кратных рёбер и может иметь вершины двух видов: непременно кружочки, отвечающие свободным шарнирам, и, возможно, крестики, отвечающие закреплённым шарнирам. Для незакреплённых конструкций граф $G(V, E)$ содержит лишь вершины одного вида — кружочки. Поскольку нет смысла вставлять рычаги между закреплёнными шарнирами, будем считать, что в нём отсутствуют смежные двум крестикам рёбра.

2. Так как части механизма кинематически связаны, то граф $G(V, E)$ должен быть связан.

3. Более того, и подграф графа $G(V, E)$, порождённый вершинами-кружочками, также связан. Иначе бы наша конструкция распалась на несколько не связанных кинематически между собой частей, которые целесообразно бы было изучать по отдельности. (Граф $G(V, E)$, для которого выполнены все эти условия, в работах автора [11–13] называется шарнирной структурной схемой.)

Граф $G(V, E)$ полностью определяет степень подвижности типичных как закреплённых, так и незакреплённых шарнирно-рычажных устройств. Степенью подвижности незакреплённого плоского устройства U считаем степень подвижности устройства, полученного из U закреплением в плоскости одного его звена. Это звено начинаем считать стойкой. В случае шарнирно-рычажного механизма звеном является рычаг. Его всегда можно выбрать так, чтобы при выбрасывании из графа G ребра, отвечающего этому закреплённому рычагу, и объявлении его концов закреплёнными шарнирами получился граф G' закреплённой конструкции, отвечающий нашим требованиям. Действительно, если в G имеется цикл, то достаточно закрепить одно ребро этого цикла. При этом получится граф G' с двумя закреплёнными шарнирами и связным подграфом на свободных шарнирах. В противном случае G является деревом и имеет висячие вершины. Достаточно закрепить смежный висячей вершине рычаг. Если отбросить отвечающий висячей вершине закреплённый шарнир и отвечающее закреплённому рычагу ребро, то получим (в случае, когда G не есть одно ребро) дерево G' с одной закреплённой вершиной.

Хотя обычно структуру шарнирной конструкции изображают на рисунках так, как мы только что описали, т. е. в виде графа G , в теории механизмов ей принято [8–10] сопоставлять другой граф — \mathcal{G} . В качестве его вершин берут звенья (рычаги и стойку) конструкции, а в качестве рёбер — кинематические пары.

Равносильно ли описание структуры шарнирно-рычажной конструкции с помощью графа \mathcal{G} её описанию графом G ? На самом деле нет, как показывает рис. 2. Для незакреплённых шарнирно-рычажных конструкций, для которых графом G являются полный граф $G_1 = K_3$ и полный двудольный граф $G_2 = K_{1,3}$, граф \mathcal{G} один и тот же, а именно, K_3 . Эти конструкции существенно разные, одна из них ферма, а другая — механизм с двумя степенями подвижности. (Если закрепить один из рычагов конструкции в плоскости, то размерность её конфигурационного пространства будет равна двум.) Таким образом, в этом случае по графу \mathcal{G} структура конструкции однозначно не восстанавливается. Граф G несёт все сведения о ней.

Однако если откинуть этот случай, то описания становятся равносильными. Рассмотрим граф $G(V, E) = G$, отвечающий незакреплённой шарнирно-рычажной конструкции. Для него граф \mathcal{G} называют графом рёберным (рёберный граф для графа G обычно обозначают как $L(G)$) или смежностным по отношению к графу G . Известна следующая

Теорема 1 [16]. Пусть G и G_1 — связные графы, у которых рёберные графы изоморфны. Графы G и G_1 изоморфны всегда, кроме случая, когда один из них K_3 , а другой $K_{1,3}$.

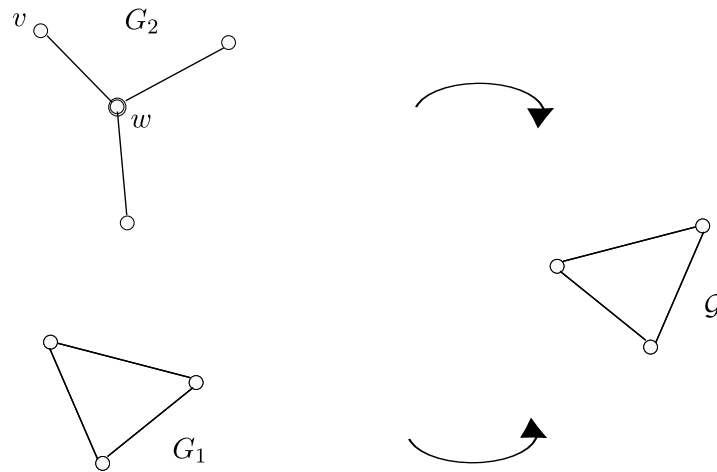


Рис. 2. Для графов $G_1 = K_3$ и $G_2 = K_{1,3}$ рёберным является граф \mathcal{G}

Следующие утверждения непосредственно вытекают из этой теоремы.

Утверждение 1. Если в графе G связной незакреплённой шарнирно-рычажной конструкции более четырёх вершин, то он восстанавливается по графу \mathcal{G} с точностью до переобозначения вершин.

Утверждение 2. В случае отсутствия совмещённых шарниров описание структуры связной незакреплённой шарнирно-рычажной конструкции графом \mathcal{G} равносильно её описанию графом G .

Рассмотрим теперь закреплённые шарнирно-рычажные конструкции. Закреплённой конструкции \mathcal{K} с графом G можно сопоставить незакреплённую конструкцию $\bar{\mathcal{K}}$ с графом \bar{G} следующим образом. Если у $\bar{\mathcal{K}}$ всего один закреплённый шарнир, то, чтобы получить $\bar{\mathcal{K}}$, мы его объявляем свободным и ещё добавляем смежный ему рычаг. При этом добавляется «висячий» 0-шарнир на втором конце добавленного рычага. В случае двух закреплённых шарниров у \mathcal{K} добавляем рычаг, смежный этим двум закреплённым шарнирам \mathcal{K} , и объявляем все шарниры свободными. Если у \mathcal{K} имеется $k > 2$ закреплённых шарниров q_1, q_2, \dots, q_k , то добавляем рычаги $q_1q_2, q_1q_3, \dots, q_1q_k$ и рычаги q_2q_3, \dots, q_2q_k и объявляем все шарниры свободными. Если у конструкции $\bar{\mathcal{K}}$ закрепить в плоскости добавленные рычаги, то она превратится в конструкцию \mathcal{K} . Таким образом, изучение кинематики закреплённой конструкции \mathcal{K} с графом G равносильно изучению кинематики незакреплённой конструкции $\bar{\mathcal{K}}$ с графом \bar{G} .

Чтобы получить из отвечающего конструкции $\bar{\mathcal{K}}$ графа \bar{G} отвечающий конструкции $\bar{\mathcal{K}}$ граф \mathcal{G} , достаточно в \bar{G} отождествить все вершины, отвечающие добавленным к G рёбрам, удалить все рёбра, соединявшие в \bar{G} эти вершины между собой, и заменить возможно возникшие многократные рёбра на однократные.

Из сказанного вытекает следующее утверждение.

Следствие. Описание структуры связных закреплённых шарнирно-рычажных конструкций графом \mathcal{G} равносильно описанию их графом G , за исключением случаев, когда G есть граф с одной закреплённой вершиной и двумя исходящими из неё рёбрами, либо G есть граф с двумя закреплёнными и одной свободной вершинами.

Действительно, только в этих двух случаях мы получаем эквивалентные незакреплённые конструкции с графами K_3 и $K_{1,3}$ в качестве графа \bar{G} .

2. МОДЕЛЬ 2. ПЛОСКИЕ КОНСТРУКЦИИ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМИ И ГРАФ \mathcal{G}^*

Рассмотрим теперь плоские конструкции, составленные из связанных возможно совмещёнными вращательными парами абсолютно твёрдых звеньев произвольной формы. Одно звено может содержать произвольное натуральное число пар. В этой модели мы также считаем конструкцию кинематически связанной и допускаем возможность пересечения различных звеньев. Однако не имеет смысла считать два звена связанными двумя различными вращательными парами, ибо в этом случае они составят одно абсолютно твёрдое звено. Таким образом, конструкции этой модели можно сопоставить граф \bar{G} без кратных рёбер и, естественно, без петель. Подчеркнём, что если придерживаться нашей терминологии, то такие конструкции могут содержать k -шарниры с $k \geq 1$, но не содержат 0-шарниров. Каждой такой конструкции \mathcal{K}^* можно сопоставить, возможно, неединственную наследующую её кинематические свойства шарнирно-рычажную конструкцию \mathcal{K} (введённое в работе [11] конфигурационное пространство отвечающей шарнирно-рычажной конструкции \mathcal{K} кинематической шарнирной схемы содержит множество всех положений конструкции \mathcal{K}^*). При этом сопоставлении k -кратным, $k \geq 1$, шарнирам \mathcal{K}^* отвечают не менее чем k -шарниры конструкции \mathcal{K} , имеющие те же положения в плоскости. Звенья конструкции \mathcal{K}^* мы заменяем рычагами конструкции \mathcal{K} , соединяющими эти шарниры так, чтобы сохранить определённое расположение шарниров в звеньях \mathcal{K}^* , не вводя лишних рычагов (рис. 3).

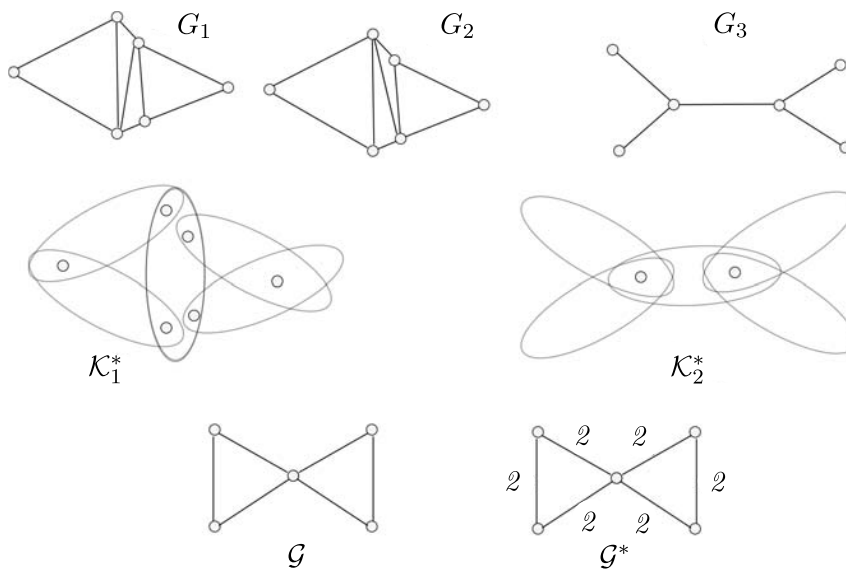


Рис. 3. Две незакреплённые пятизвенные плоские конструкции \mathcal{K}_1^* и \mathcal{K}_2^* составлены из овальных звеньев.

Конструкция \mathcal{K}_1^* с простыми шарнирами неизгибаема.

Конструкция \mathcal{K}_2^* с совмещёнными шарнирами изгибаема с четырьмя степенями подвижности.

Конструкции \mathcal{K}_1^* отвечают шесть эквивалентных графов G_i , два из которых G_1 и G_2 изображены.

Конструкция \mathcal{K}_2^* отвечает неэквивалентный графам G_1 и G_2 граф G_3 .

Но обеим конструкциям \mathcal{K}_1^* и \mathcal{K}_2^* отвечает один и тот же граф \mathcal{G} .

Изображён также отвечающий \mathcal{K}_2^* взвешенный граф \mathcal{G}^*

Если имеется звено лишь с одним шарниром, то мы ему сопоставляем рычаг, несущий кроме этого шарнира дополнительный 0-шарнир. Если в \mathcal{K}^* все звенья содержат не более трёх шарниров, то такое сопоставление однозначно. В противном случае конструкции \mathcal{K}^* отвечает

конечное число конструкций \mathcal{K} и их графов G , которые мы будем считать эквивалентными в смысле представимости ими конструкции \mathcal{K}^* . В самом деле, каждая из конструкций \mathcal{K} имеет те же кинематические свойства, что и конструкция \mathcal{K}^* . Пусть \mathbf{G} — совокупность графов G , сопоставляемых конструкции \mathcal{K}^* .

Имеет место следующее

Утверждение 3. Описание структуры связных плоских конструкций с вращательными парами, но без совмещённых шарниров, графом \mathcal{G} равносильно (в смысле применимости структурных формул теории механизмов) её описанию произвольным графом $G \in \mathbf{G}$.

При наличии совмещённых шарниров описание структуры конструкции с вращательными парами графом \mathcal{G} , как видно из рис. 3, теряет существенную часть информации, в отличие от описания её графом G .

В некоторых источниках, в частности [8], предлагалось в качестве структурного графа использовать граф $\hat{\mathcal{G}}$, отличающийся от графа \mathcal{G} при наличии совмещённого k -кратного, $k > 1$, шарнира тем, что из \mathcal{G} выбрасывалось определённое число рёбер, входящих в отвечающий этому совмещённому шарниру полный подграф $K_{k+1} \subset \mathcal{G}$. Скажем, при наличии двукратного шарнира из подграфа K_3 удалялось одно из рёбер (рис. 4). Такой структурный граф $\hat{\mathcal{G}}$ строится по конструкции неоднозначно. Да и структуру конструкции восстановить по нему невозможно, будь то конструкция модели 2 или модели 1, если не известно, какому звену отвечает стойка.

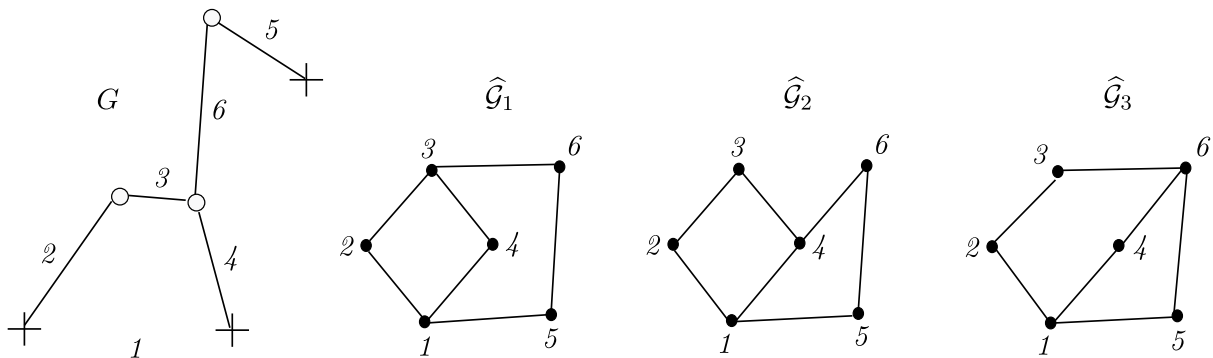


Рис. 4. Граф G конструкции с 2-шарниром не восстанавливается ни по одному из отвечающих ему трёх графов $\hat{\mathcal{G}}_i$, изображённых справа, взятому в отдельности; звенья обозначены цифрами, стойка — цифрой 1

Чтобы не терять информацию при наличии совмещённых шарниров, достаточно сопоставить конструкции взвешенный граф \mathcal{G}^* . Взвешенный граф \mathcal{G}^* есть граф \mathcal{G} каждому отвечающему k -кратному шарниру, $k > 0$, ребру которого приписан вес k , где $k = 1, 2, \dots$. Изображая взвешенный граф \mathcal{G}^* , мы на его рёбрах пишем вес $k = 2, 3, \dots$. Вес, равный 1, не записываем. В таком случае, если конструкция \mathcal{K} содержит лишь простые шарниры, то её взвешенный граф \mathcal{G}^* попросту совпадает с обычным графом \mathcal{G} . Отметим, что не любой взвешенный граф с натуральными весами является графом \mathcal{G}^* какой-либо конструкции. Действительно, в графе \mathcal{G}^* каждому шарниру кратности k отвечает полный подграф K_{k+1} с рёбрами веса k . Поэтому, например, взвешенный граф K_3 со всеми рёбрами веса 2, кроме одного рёбра, имеющего вес 1, не является графом \mathcal{G}^* ни для какой конструкции \mathcal{K}^* модели 2.

Пусть конструкции \mathcal{K}^* с вращательными парами (модель 2) отвечают граф \mathcal{G}^* и совокупность графов $\mathbf{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$. Тогда очевидно следующее

Утверждение 4. По любому из отвечающих конструкции модели 2-графов $G_i \in \mathbf{G}$ граф \mathcal{G}^* восстанавливается однозначно и, обратно, по графу \mathcal{G}^* однозначно восстанавливается совокупность графов $\{G_1, \dots, G_n\} = \mathbf{G}$.

3. КРИТЕРИИ ПРИМЕНИМОСТИ СТРУКТУРНЫХ ФОРМУЛ

Вопрос независимости связей в типичной шарнирно-рычажной конструкции (модель 1) в математике давно решён [22, 23, 11–13]. Тем самым решён и вопрос применимости в типичном случае структурных формул (1)–(3). Сформулируем эти критерии применимости формул Чебышёва к шарнирно-рычажным устройствам.

Теорема 2. *Степень подвижности типичной незакреплённой плоской шарнирно-рычажной конструкции вычисляется по формулам Чебышёва (1), (3) тогда и только тогда, когда для произвольной совокупности (пусть $e > 0$ штук) рёбер отвечающего ей графа G число v инцидентных им вершин удовлетворяет неравенству $e \leq 2v - 3$.*

Для формулировки критерия применимости структурных формул Чебышёва к закреплённым плоским шарнирно-рычажным устройствам [11] нам понадобится введённый выше граф \bar{G} .

Теорема 3. *Степень подвижности типичной закреплённой плоской шарнирно-рычажной конструкции вычисляется по формулам Чебышёва (1), (3) тогда и только тогда, когда для произвольной совокупности (пусть $e > 0$ штук) рёбер отвечающего ей графа \bar{G} число v инцидентных им вершин удовлетворяет неравенству $e \leq 2v - 3$.*

В качестве примера рассмотрим устройство на рис. 1. Здесь граф \bar{G} получается из изображённого графа G добавлением ребра, соединяющего две вершины, обозначенные крестиками. Все вершины полученного графа \bar{G} мы считаем свободными. Поскольку в полученном графе \bar{G} содержится полный подграф K_4 , то для него $v = 4$, а $e = 6$, и поскольку $e > 2v - 3 = 5$, то структурная формула (3) не выполняется. Причина этого состоит в том, что между отвечающими вершинам подграфа K_4 шарнирами имеется слишком много связывающих их рычагов. Это влечёт зависимость связей, налагаемых этими рычагами.

Теоремами 2 и 3 обуславливается предпочтительность использования графа G перед графами \mathcal{G} и \mathcal{G}^* для описания плоских шарнирных конструкций с вращательными парами. Поскольку произвольной плоской конструкции с вращательными парами (модель 2) можно сопоставить кинематически эквивалентную ей шарнирно-рычажную конструкцию (модель 1), то вопрос о применимости структурных формул в модели 2 сводится к приложению к эквивалентным шарнирно-рычажным конструкциям теорем 2 и 3. На рис. 5 изображён пример для плоской конструкции с вращательными парами (модель 2), не содержащей совмещённых шарниров. Здесь три овальных звена соединены пятью звеньями-стержнями (штангами), несущими на концах вращательные пары. Типичная конструкция 5(b) имеет одну степень подвижности, что согласуется со структурной формулой (1). Для типичной конструкции 5(a) формула (1) нарушается, конструкция имеет две степени подвижности. Это подтверждается применением теоремы 3 к графам G конструкций.

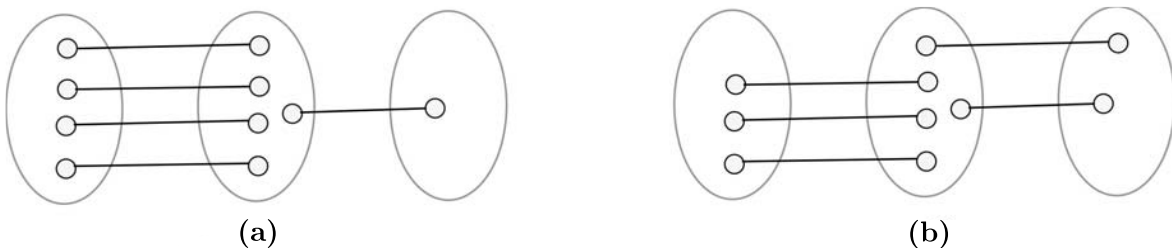


Рис. 5. Изображены две восьмизвенные плоские конструкции с десятью вращательными парами, обозначенными кружочками. Неподвижным звеном (стойкой) можно считать левое многошарнирное звено

4. ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ СЛУЧАЙ. КОНСТРУКЦИИ СО ШТАНГАМИ — МОДЕЛЬ 3

Для пространственного аналога плоских шарнирно-рычажных конструкций, т. е. для конструкций, составленных из жёстких стержней, несущих на концах сферические шарниры, вопрос о независимости налагаемых связями условий до сих пор не решён. Этот вопрос является центральным вопросом так называемой комбинаторной теории жёсткости [19]. Известно, что теоремы 2 и 3 не имеют естественного обобщения по размерности [13]. Пример этого даёт устройство, известное как «двойной банан» (рис. 6). Эта незакреплённая конструкция удовлетворяет трёхмерному аналогу условий теоремы 2: для любой совокупности из $e \geq 2$ рычагов число v инцидентных им шарниров удовлетворяет неравенству $e \leq 3v - 6$. Поскольку для числа 18 всех рычагов и числа 8 всех шарниров это неравенство становится равенством, то при справедливости аналога теоремы 2 «двойной банан» должен был быть неизгибаем. Однако при закреплении одной его половины вторую можно вращать вокруг оси AB с одной степенью свободы.

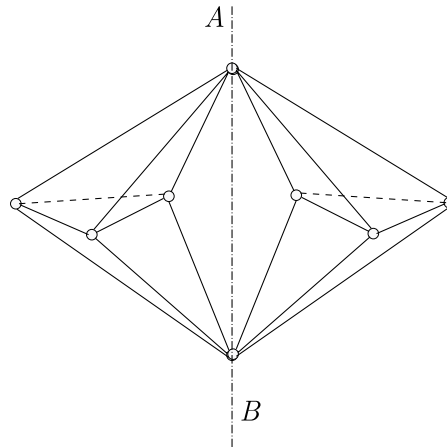


Рис. 6. «Двойной банан»

Тем не менее, для частного вида шарнирных устройств вопрос решён в произвольной размерности [24, 25]. Это конструкции, составленные из абсолютно твёрдых тел, соединённых стержнями-штангами, закреплёнными в телах допускающими все возможные вращения шарнирами (в англоязычной литературе их называют *bar-and-body frameworks*). Плоская разновидность таких устройств изображена на рис. 5. В трёхмерном случае тела соединены штангами со сферическими шарнирами на концах. Совмещённые шарниры в этой модели, которую мы назовём моделью 3, не допускаются. Заметим, что модель 3 является частным случаем модели 2, в котором многошарнирные звенья общего вида соединены между собой штангами, т. е. звеньями, содержащими лишь две кинематические пары. К устройству модели 3 естественно относить граф Γ , сопоставляя телам вершины этого графа, а штангам — его рёбра. Как правило, при этом получаем граф Γ с кратными рёбрами, т. е. мультиграф. Граф Γ считается связным и не содержащим петель. Пусть v — число вершин графа Γ , а e — число его рёбер.

Теорема 4. *Степень подвижности типичной закреплённой пространственной конструкции модели 3 вычисляется по формуле $W = 6(v - 1) - e$ тогда и только тогда, когда для произвольной непустой совокупности v' штук вершин отвечающего ей графа Γ число e' инцидентных им рёбер удовлетворяет неравенству $e' \leq 6(v' - 1)$.*

Подобная теорема справедлива и для устройств модели 3 в d -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^d . При этом шарниры считаются допускающими произвольное вращение штанги относительно звена в \mathbb{R}^d .

Теорема 5. Степень подвижности типичной закреплённой конструкции модели 3 в пространстве \mathbb{R}^d вычисляется по формуле $W = \frac{d(d+1)}{2}(v-1) - e$ тогда и только тогда, когда для произвольной непустой совокупности v' вершин отвечающего ей графа Γ число e' инцидентных им рёбер удовлетворяет неравенству $e' \leq \frac{d(d+1)}{2}(v'-1)$.

В двумерном случае эта теорема согласуется с теоремой 3. Отметим, что в трёхмерном случае полностью решён вопрос о степени подвижности типичных устройств, составленных из тел, скреплённых между собой вращательными парами [26, 25].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Геометрическая природа даже класса плоских механизмов с вращательными парами достаточно сложна. Для её глубокого изучения недостаточно находиться в русле традиционных понятий теории механизмов: звена, кинематической пары и кинематической цепи, группы Ассур. Необходимо аккуратное математическое построение модели, в частности определение самого понятия механизма. Исследование строения естественно основывать на аппарате теории графов. В случае плоских шарнирно-рычажных механизмов для анализа их структуры более естественным оказывается использование графа G , нежели принятого в теории механизмов графа \mathcal{G} . Такой подход позволяет на современном уровне решить вопрос об условиях справедливости в типичном случае структурной формулы Чебышёва для числа степеней свободы механизма. В пространственном случае имеются аналогичные результаты для механизмов с вращательными и сферическими парами, но в последнем случае вопрос независимости накладываемых в типичном случае условий связи ещё до конца не решён.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дворников Л.Т. Опыт структурного синтеза механизмов // Теория механизмов и машин. 2004. Т. 2, № 4. С. 3–17.
2. Дворников Л.Т. В доказательство состоятельности опыта структурного синтеза механизмов // Теория механизмов и машин. 2006. Т. 4, № 1. С. 44–48.
3. Пейсах Э.Е. К дискуссии по проблеме структурного синтеза плоских шарнирных механизмов // Теория механизмов и машин. 2006. Т. 4, № 1. С. 49–54.
4. Дворников Л.Т. О принципиальных некорректностях в исследованиях проф. Пожбелко В.И. по структуре механизмов // Теория механизмов и машин. 2016. Т. 14, № 3 (31). С. 145–166.
5. Пожбелко В.И., Куц Е.Н. Целочисленный структурный синтез многоконтурных рычажных механизмов со сложными шарнирами для разных областей машиностроения // Изв. вузов. Машиностроение. 2021. № 6. С. 23–36; DOI: 10.18698/0536-1044-2021-6-23-36
6. Пейсах Э.Е. О группах Ассур, фермах Баранова, цепях Грюблера, плоских шарнирных механизмах и об их структурном синтезе // Электрон. журн. Наука и образование. МГТУ. 2007. № 4. С. 2–7.
7. Дворников Л.Т. Теория структуры механических систем и практика её использования при синтезе сложных машин, включая горные и металлургические. Новокузнецк: Изд. центр СибГИУ, 2015.
8. Пейсах Э. Е., Нестеров В.А. Системы проектирования плоских рычажных механизмов. М.: Машиностроение, 1988.
9. Davies T.H. An extension of Manolescu's classification of planar kinematic chains and mechanisms of mobility $M \geq 1$, using graph theory // J. Mechanisms. 1968. V. 3. P. 87–100.
10. Диденко Е.В. Разработка и анализ плоских многоконтурных механизмов на основе теории графов: Дисс. ... канд. техн. наук. Москва, 2019.
11. Ковалёв М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 1. С. 45–70.

12. Ковалёв М.Д. Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестн. МГТУ. Сер. Машиностроение 2001. № 4. С. 33–51.
13. Ковалёв М.Д. Геометрические вопросы кинематики и статики. М.: Ленанд, 2019.
14. Ковалёв М.Д. Что такое шарнирный механизм? И что же доказал Кемпе? // Современная математика и её приложения. М.: ВИНТИ, 2020. Т. 179. С. 16–28 (Итоги науки и техники).
15. Tay T.S. Rigidity of multi-graphs I, linking rigid bodies in n -space // J. Combin. Theory. Ser. B. 1984. V. 36. P. 95–112.
16. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
17. Benedetti R., Risler J. Real Algebraic and Semi-Algebraic Sets. Paris: Hermann, 1990.
18. Ковалёв М.Д. Конфигурационные пространства шарнирных механизмов и их проекции // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 4. С.74–99.
19. Graver J., Servatius B., Servatius H. Combinatorial Rigidity. Providence: Amer. Math. Soc., 1993.
20. Чебышёв П.Л. О параллелограммах // Тр. Второго съезда русских естествоиспытателей. Отдел технологии и практической механики. 1870. С. 9–30.
21. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М.: Наука, 1990.
22. Pollaczek-Geiringer H. Über die Gliederung ebener Fuchwerke // Z. Angew. Math. Mech. 1927. V. 7, N 1. P. 58–72.
23. Laman G. On graphs and rigidity of plane skeletal structures // J. Engrg. Math. 1970. V. 4. P. 331–340.
24. Tay T.S. Rigidity of multi-graphs. I: Linking rigid bodies in n -space // J. Combin. Theory. Ser. B. 1984. V. 36, N 1. P. 95–112.
25. Handbook of Geometric Constraint Systems Principles. Taylor and Francis Group, 2019.
26. Tay T.S. Linking $(n - 2)$ -dimensional panels in n -space II: $(n - 2; 2)$ -frameworks and body and hinge structures // Graphs Combin. 1989. V. 5, N 1. P. 245–273.

UDC 531.01:531.8

ON GRAPHS AND STRUCTURAL FORMULAS OF THE MECHANISMS THEORY

© 2023 M. D. Kovalev

*Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory 1, Moscow 119991, Russia*

E-mail: kovalev.math@mtu-net.ru

Received 06.09.2022, revised 06.09.2022, accepted 12.01.2023

Abstract. Structural formulas in the theory of mechanisms are called formulas expressing the number of degrees of freedom of the device through the numbers of its links and kinematic pairs. It is known that they are not always fair. Mathematical graph theory helps to understand this phenomenon. The validity of structural formulas in the case of generic frameworks is completely determined by their structure, described by graphs. The paper considers two models of planar frameworks with rotational pairs. The first model is a construction made up of straight rods (levers) bearing hinges at the ends. Such devices are naturally associated with a graph G with vertices corresponding to hinges and edges corresponding to levers. In the theory of mechanisms, it is customary to consider another graph \mathcal{G} , whose vertices correspond to links, and the edges correspond to kinematic pairs. It turns out that the use of the graph G to describe the structure both in the first model and in the second one, which contains all planar constructions with rotational pairs, is preferable to the graph \mathcal{G} . In particular, it allows to give a criterion for the applicability of structural formulas for generic constructions of a given structure.

Keywords: structure of mechanisms, structural graphs, structural formulas of mechanisms theory, hinged mechanisms, dimension of configuration space, mathematical models of mechanisms.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.304

REFERENCES

1. Dvornikov L.T. Opyt strukturnogo sinteza mekhanizmov [Experience of structural synthesis of mechanisms]. *Teoriya Mekhanizmov i Mashin*, 2004, Vol. 2, No. 4, pp. 3–17 (in Russian).
2. Dvornikov L.T. V dokazatel'stvo sostoyatel'nosti opyta strukturnogo sinteza mekhanizmov [To prove the validity of the experience of structural synthesis of mechanisms]. *Teoriya Mekhanizmov i Mashin*, 2006, Vol. 4, No. 1, pp. 44–48 (in Russian).
3. Peisakh E.E. K diskussii po probleme strukturnogo sinteza ploskikh sharnirnykh mekhanizmov [To the discussion on the problem of structural synthesis of plane hinge mechanisms]. *Teoriya Mekhanizmov i Mashin*, 2006, Vol. 4, No. 1, pp. 49–54 (in Russian).
4. Dvornikov L.T. O printsipial'nykh nekorrektnostyakh v issledovaniyakh prof. Pozhbelko V.I. po strukture mekhanizmov [About fundamental inaccuracies in the research of Prof. Pozhbelko V.I. on the structure of mechanisms]. *Teoriya Mekhanizmov i Mashin*, 2016, Vol. 14, No. 3(31), pp. 145–166 (in Russian).
5. Pozhbelko V.I., Kuts E.N. Tselochislennyi strukturnyi sintez mnogokonturnykh rychazhnykh mekhanizmov so slozhnymi sharnirami dlya raznykh oblastei mashinostroeniya [Integer structural synthesis of multi-contour lever mechanisms with complex hinges for various fields of mechanical engineering]. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mashinostroenie*, 2021, No. 6, pp. 23–36 (in Russian); DOI: 10.18698/0536-1044-2021-6-23-36

6. Peisakh E.E. O gruppakh Assura, fermakh Baranova, tsepyakh Gryublera, ploskikh sharnirnykh mekhanizmakh i ob ikh strukturnom sinteze [About Assur groups, Baranov trusses, Grubler chains, plain hinge mechanisms and their structural synthesis]. *Elektron. Zhurn. «Nauka i Obrazovanie»*, MGTU, 2007, No. 4 (in Russian).
7. Dvornikov L.T. Nauchnye shkoly SibGIU. Teoriya struktury mekhanicheskikh sistem i praktika ee ispol'zovaniya pri sinteze slozhnykh mashin, vklyuchaya gornye metallurgicheskie [SibGIU scientific schools. Theory of the structure of mechanical systems and the practice of its use in the synthesis of complex machines, including mining and metallurgical], Novokuznetsk: Izd. Tsentr SibGIU, 2015 (in Russian).
8. Peisakh E.E., Nesterov V.A. Sistemy proektirovaniya ploskikh rychazhnykh mekhanizmov [Design systems for plain lever mechanisms]. Moscow: Mashinostroenie. 1988 (in Russian).
9. Davies T.H. An extension of Manolescu's classification of planar kinematic chains and mechanisms of mobility $M \geq 1$, using graph theory. *J. Mechanisms*, 1968, Vol. 3, pp. 87–100.
10. Didenko E.V. Razrabotka i analiz ploskikh mnogokonturnykh mekhanizmov na osnove teorii grafov. [Development and analysis of planar multi-contour mechanisms based on graph theory]. Diss. ... kand. tekhn. nauk, Moscow, 2019 (in Russian).
11. Kovalev M.D. Geometric theory of hinged devices. *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, 1995, Vol. 44, No. 1, pp. 43–68.
12. Kovalev M.D. Voprosy geometrii sharnirnykh ustroystv i skhem [Questions of geometry of hinge devices and schemes]. *Vestn. MGTU. Ser. Mashinostroenie*, 2001, No. 4, pp. 33–51 (in Russian).
13. Kovalev M.D. Geometricheskie voprosy kinematiki i statiki [Geometric questions of kinematics and statics]. Moscow: Lenand, 2019 (in Russian).
14. Kovalev M.D. Chto takoe sharnirnyi mekhanizm? I chto zhe dokazal Kempe? [What is a hinge mechanism? And what did Kempe prove?]. *Itogi Nauki i Tekh. Ser. Sovremen. Mat. i Ee Prilozh. Temat. Obzory*, Moscow: VINITI RAN, 2020, Vol. 179, pp. 16–28 (in Russian).
15. Tay T.S. Rigidity of multi-graphs I, linking rigid bodies in n -space. *J. Comb. Theory*, 1984, Vol. 36, pp. 95–112.
16. Harary F. Graph Theory. MA: Addison-Wesley Publ., 1969.
17. Benedetti R., Risler J. Real Algebraic and Semi-Algebraic Sets. Paris: Hermann, 1990.
18. Kovalev M.D. Konfiguratsionnye prostranstva sharnirnykh mekhanizmov i ikh proektsii [Configuration spaces of hinged mechanisms, and their projections], *Mat. Sbornik*, 2022, Vol. 213, No. 4, pp. 74–99 (in Russian).
19. Graver J., Servatius B., Servatius H. Combinatorial Rigidity. Providence: AMS, 1993.
20. Chebyshev P.L. O parallelogramakh [On parallelograms]. *Trudy Vtorogo S"ezda Rus. Estestvoispytatelei. Otdel Tekh. Prakt. Mekh.*, 1870, pp. 9–30 (in Russian).
21. Levitskii N.I. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines]. Moscow: Nauka, 1990 (in Russian).
22. Pollaczek-Geiringer H. Über die Gliederung ebener Fuchwerke. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1927, Vol.7, No. 1, pp. 58–72.
23. Laman G. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *J. Engrg. Math.*, 1970, Vol. 4, pp. 331–340.
24. Tay T.S. Rigidity of multi-graphs. I: Linking rigid bodies in n -space. *J. Combinat. Theory Ser. B*, 1984, Vol. 36, No. 1, pp. 95–112.
25. Handbook of Geometric Constraint Systems Principles. Taylor and Francis Group, 2019.
26. Tay T.S. Linking $(n - 2)$ -dimensional panels in n -space II: $(n - 2; 2)$ -frameworks and body and hinge structures. *Graphs Combin.*, 1989, Vol. 5, No. 1, pp. 245–273.

УДК 531.36

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ГИРОСТАТА ГОРЯЧЕВА — СРЕТЕНСКОГО© 2023 А. А. Косов^а, Э. И. Семенов^б

*Институт динамики систем и теории управления
им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, г. Иркутск 664033, Россия*

E-mails: ^аkosov_idstu@mail.ru, ^бedwseiz@gmail.com

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.; после доработки 05.06.2023 г.;
принята к публикации 07.06.2023 г.

Изучаются уравнения движения гиростата Горячева — Сретенского. Найдены все стационарные решения на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей и проведён анализ их устойчивости. Для случая совпадения точки подвеса с центром масс и действия гироскопического момента специального вида выполнено интегрирование в квадратурах.

Ключевые слова: гиростат Горячева — Сретенского, стационарные решения, устойчивость, интегрирование в квадратурах.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.305

ВВЕДЕНИЕ

В динамике твёрдого тела с неподвижной точкой важное значение имеют как классические случаи полной интегрируемости (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), так и случаи частичной интегрируемости, когда удаётся получить дополнительный частный интеграл [1–3]. Один из таких частично интегрируемых случаев для уравнений движения тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки был найден Д. Н. Горячевым [4], который показал существование четвёртого по счёту интеграла на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей. Интегрирование дифференциальных уравнений движения с использованием этого интеграла было выполнено С. А. Чаплыгиным [5], установившим, что решения в общем случае представляются гиперэллиптическими функциями времени. Эти результаты были распространены Л. Н. Сретенским [6] на более общие по сравнению с твёрдым телом уравнения движения гиростата, содержащие дополнительный параметр — вектор гиростатического момента.

Исследования случая Горячева — Чаплыгина для твёрдого тела и гиростата Горячева — Сретенского, а также их аналогов и обобщений успешно продолжаются и в настоящее время по нескольким направлениям. Изучались [7] эргодические свойства решений волчка Горячева — Чаплыгина, показано, что собственное вращение и прецессия обладают главным движением, а нутация является квазипериодической функцией времени. Были установлены [8] свойства движения линии узлов для волчка Горячева — Чаплыгина. Обобщение случая Горячева — Чаплыгина, где в гамильтониане присутствует ряд новых дополнительных параметров, изучалось в [2], при этом сохраняется вывод об интегрируемости на нулевом уровне интеграла площадей. Доказана [9] периодичность движений тела в случае Горячева при малых значениях энергии.

Были найдены [10] стационарные решения уравнений гиростата Горячева — Сретенского, лежащие на инвариантном множестве нулевого уровня интеграла площадей, но анализ их устойчивости не проводился. Изучалась [11] орбитальная устойчивость периодических движений твёрдого тела в случае Горячева — Чаплыгина показана их неустойчивость в первом приближении. Затем эта неустойчивость была подтверждена [12] и в строгой нелинейной постановке применением теоремы Четаева.

Объектом исследования в данной статье являются уравнения движения гиростата Горячева — Сретенского. Статья организована следующим образом. В разд. 1 приводятся уравнения движения, их первые интегралы и формулируются цели и задачи исследования. В разд. 2 найдены все стационарные решения, лежащие в множестве нулевого уровня интеграла площадей. В разд. 3 получены условия устойчивости найденных стационарных решений. В разд. 4 рассматривается случай совпадения точки подвеса с центром масс, но при этом действуют гироскопические моменты специального вида. Выполнено интегрирование уравнений движения в квадратурах, приведены примеры явного представления решений элементарными или специальными функциями времени. В заключении кратко отмечены возможные направления развития полученных результатов.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим векторную форму уравнений движения гиростата с неподвижной точкой под действием момента сил

$$I\dot{\omega} = (I\omega + \lambda) \times \omega + M, \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \quad (2)$$

Здесь $\omega = \text{col}\{p, q, r\}$ — вектор угловой скорости, $\gamma = \text{col}\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ — единичный вектор оси симметрии силового поля, заданные проекциями на оси связанной системы координат, $I = I^T > 0$ — симметричная положительно определённая матрица тензора инерции относительно неподвижной точки, $\lambda = \text{col}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ — вектор гиростатического момента, $M = M(t, \gamma, \omega)$ — вектор момента сил, действующих на гиростат. Будем, следуя [13–15], рассматривать в качестве первых интегралов следующие функции:

$$J_1 = J_1(\gamma, \omega) = \omega^T I \omega + 2U(\gamma) = c_1 = \text{const}, \quad (3)$$

$$J_2 = J_2(\gamma, \omega) = \gamma^T (I\omega + \lambda) + \frac{1}{2} \gamma^T S \gamma = c_2 = \text{const}, \quad (4)$$

$$J_3 = J_3(\gamma) = \gamma^T \gamma = 1, \quad (5)$$

где $S = S^T$ — некоторая симметричная матрица.

Отметим, что геометрический интеграл (5) имеет место при любом выборе момента $M = M(t, \gamma, \omega)$. Но для того чтобы у системы (1), (2) существовали интеграл энергии (3) и интеграл площадей (4), момент $M = M(t, \gamma, \omega)$ не может быть произвольным, а должен удовлетворять определённым условиям. Эти необходимые и достаточные условия даются следующим утверждением, доказанным в [16].

Утверждение 1. Для того чтобы функции (3) и (4) были первыми интегралами для системы (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы момент M был представим в виде

$$M = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} - \omega \times S \gamma + L(t, \gamma, \omega) \omega \times \gamma, \quad (6)$$

где $L(t, \gamma, \omega)$ — произвольная функция.

Данное утверждение показывает, что первые интегралы (3) и (4) определяют момент M в правой части (1) единственным образом с точностью до циркулярно-гироскопической составляющей $L(t, \gamma, \omega)\omega \times \gamma$. Первые два слагаемых в формуле момента (6) представляют собой соответственно момент потенциальных сил $\gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}$ с потенциалом $U(\gamma)$ и момент гироскопических сил $\omega \times S\gamma$, определяемый матрицей S .

Далее всюду будем считать матрицу инерции диагональной $I = \text{diag}(A, B, C)$, потенциал линейным $U(\gamma) = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$ (это соответствует тяжёлому твёрдому телу) и задающую момент гироскопических сил матрицу также диагональной $S = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$. Запишем систему (1), (2) в координатной форме:

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + \lambda_2 r - \lambda_3 q + c\gamma_2 - b\gamma_3 + k_2\gamma_2 r - k_3\gamma_3 q + L(q\gamma_3 - r\gamma_2), \\ B\dot{q} &= (C - A)pr + \lambda_3 p - \lambda_1 r + a\gamma_3 - c\gamma_1 + k_3\gamma_3 p - k_1\gamma_1 r + L(r\gamma_1 - p\gamma_3), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C\dot{r} &= (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + b\gamma_1 - a\gamma_2 + k_1\gamma_1 q - k_2\gamma_2 p + L(p\gamma_2 - q\gamma_1), \\ \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $L(t, \gamma, \omega)$ — некоторая непрерывная функция по t, γ, ω .

Далее считаем, что моменты инерции и потенциал удовлетворяют условиям Горячева [4]

$$A = B = 4C, \quad b = c = 0. \quad (9)$$

а вектор гироскопического момента удовлетворяет условиям Сретенского [6]

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0. \quad (10)$$

В качестве объекта исследования мы будем рассматривать систему (7), (8) при предположениях (9), (10), причём в двух вариантах. В первом варианте считается, что моменты гироскопических и циркулярно-гироскопических сил не действуют, т. е. $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ и $L(t, \gamma, \omega) \equiv 0$. Тогда уравнения (7) совпадают с уравнениями гиростата Горячева — Сретенского [6]

$$4C\dot{p} = 3Cqr - \lambda_3 q, \quad 4C\dot{q} = -3Cpr + \lambda_3 p + a\gamma_3, \quad C\dot{r} = -a\gamma_2. \quad (11)$$

Для системы (8), (11) первые интегралы (3) и (4) записываются в виде

$$J_1 = 4C(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2a\gamma_1 = c_1 = \text{const}, \quad (12)$$

$$J_2 = 4C(p\gamma_1 + q\gamma_2) + \gamma_3(Cr + \lambda_3) = c_2 = \text{const}. \quad (13)$$

В [6] установлено, что на инвариантном множестве $J_2 = 0$, задаваемом нулевым уровнем интеграла площадей (13), система (8), (11) имеет первый интеграл

$$J_4 = (Cr - \lambda_3)(p^2 + q^2) - ap\gamma_3 = c_4 = \text{const} \quad (14)$$

с произвольной постоянной $c_4 = \text{const}$. Наличие четырёх известных первых интегралов (5), (12)–(14) позволяет выполнить на множестве $J_2 = 0$ интегрирование в квадратурах [6]. Однако выяснение поведения решений, расположенных на множестве $J_2 = 0$, и их свойства устойчивости, в том числе и по отношению к близким решениям, лежащим вне этого множества, представляют несомненный интерес.

Во втором варианте считается, что действуют моменты гироскопических сил с $k_1 = k_2 = k$ и циркулярно-гироскопических сил с $L = L(\gamma_3) \neq 0$, но центр масс гиростата совпадает с точкой подвеса и, значит, $a = 0$. Тогда уравнения (7) примут вид

$$\begin{aligned} 4C\dot{p} &= 3Cqr - \lambda_3 q + k\gamma_2 r - k_3\gamma_3 q + L(q\gamma_3 - r\gamma_2), \\ 4C\dot{q} &= -3Cpr + \lambda_3 p + k_3\gamma_3 p - k\gamma_1 r + L(r\gamma_1 - p\gamma_3), \\ C\dot{r} &= k\gamma_1 q - k\gamma_2 p + L(p\gamma_2 - q\gamma_1). \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что момент вида $L\omega \times \gamma$, $L = \text{const}$ возникает при вращении ферромагнитного тела в постоянном и однородном магнитном поле [17].

Задачи исследования в данной статье состоят в том, чтобы:

1) выявить все стационарные решения, которые лежат в множестве нулевого уровня $J_2 = 0$ интеграла площадей (13) и задаются постоянными, обращающими правые части уравнений движения (8), (11) в нуль;

2) используя первые интегралы (5), (12), (13), получить методом интегральных связей Четаева [18] условия устойчивости либо первым методом Ляпунова условия неустойчивости по отношению ко всем переменным для стационарных решений, являющихся состояниями покоя;

3) используя вместе с интегралами (5), (12), (13) также и условный интеграл (4), тем же методом связей Четаева получить достаточные условия условной устойчивости относительно множества $J_2 = 0$ для стационарных решений системы (8), (11), являющихся перманентными вращениями;

4) для случая отсутствия момента потенциальных сил при действии момента гироскопических и циркулярно-гироскопических сил специального вида выполнить интегрирование системы (8), (15) в квадратурах;

5) построить примеры точных решений системы (8), (15), представленные в явном виде элементарными или специальными функциями.

2. ПОСТРОЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ $J_2 = 0$

Стационарные решения (т. е. такие постоянные $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3) = \text{const}$, которые обращают правые части в нуль), лежащие на инвариантном множестве $J_2 = 0$, для приведённой к безразмерной форме (в которой только один параметр λ_3 , а остальные параметры C и a можно считать равными единице) системы (8), (11) были найдены в [10]. Анализ устойчивости стационарных решений при этом не проводился. В этом разделе статьи получим все стационарные решения системы (8), (11), лежащие в множестве $J_2 = 0$, выраженные в явном виде через все параметры C , a , λ_3 . Это позволит в дальнейшем выявить влияние всех параметров на устойчивость стационарных решений.

Легко видеть, что для всех стационарных решений выполняются равенства $\bar{q} = \bar{\gamma}_2 = 0$. Для других компонент стационарного решения, лежащего на инвариантном множестве $J_2 = 0$, получаем систему трёх уравнений

$$-3C\bar{p}\bar{r} + \lambda_3\bar{p} + a\bar{\gamma}_3 = 0, \quad \bar{p}\bar{\gamma}_3 - \bar{r}\bar{\gamma}_1 = 0, \quad 4C\bar{p}\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_3(C\bar{r} + \lambda_3) = 0. \quad (16)$$

Из (16) сразу следует, что стационарными решениями системы (8), (11) будут два положения покоя (на них все компоненты угловой скорости равны нулю)

$$\bar{p} = \bar{q} = \bar{r} = \bar{\gamma}_2 = \bar{\gamma}_3 = 0, \quad \bar{\gamma}_1 = \sigma = \pm 1. \quad (17)$$

Из второго и третьего уравнений системы (16) с учётом геометрического интеграла (5) находим

$$\bar{\gamma}_3^2 = \frac{4C\bar{r}}{3C\bar{r} - \lambda_3}, \quad (18)$$

а из первого уравнения (16) следует

$$\bar{p} = \frac{a\bar{\gamma}_3}{3C\bar{r} - \lambda_3}. \quad (19)$$

Умножая (19) на $\bar{\gamma}_3$ и используя (18) и второе уравнение (16), получим уравнение для нахождения \bar{r} :

$$\frac{4aC}{(3C\bar{r} - \lambda_3)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{4C\bar{r}}{3C\bar{r} - \lambda_3}}.$$

Это уравнение сводится к отысканию корней полинома четвёртой степени

$$F_4(\bar{r}) = (C\bar{r} + \lambda_3)(3C\bar{r} - \lambda_3)^3 + 16a^2C^2 = 0,$$

удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq \frac{4C\bar{r}}{3C\bar{r} - \lambda_3} \leq 1, \quad \frac{C\bar{r} + \lambda_3}{3C\bar{r} - \lambda_3} \leq 0. \quad (20)$$

Дискриминант полинома $F_4(\bar{r})$ равен $D_4 = 128995088(16a^2C^2 - 9\lambda_3^4)$. Если параметры системы удовлетворяют неравенству

$$16a^2C^2 - 9\lambda_3^4 > 0, \quad (21)$$

то дискриминант положителен, значит, все четыре корня полинома $F_4(\bar{r})$ различны и либо все вещественные, либо все комплексные. Первый случай исключается тем фактом, что производная полинома $F_4(\bar{r})$ имеет кратный корень. Таким образом, при условии (21) система (8), (11) не имеет на множестве $J_2 = 0$ других стационарных решений, кроме состояний покоя (17).

Если параметры системы удовлетворяют равенству $16a^2C^2 - 9\lambda_3^4 = 0$, то полином $F_4(\bar{r})$ имеет двукратный корень $\bar{r} = -2\lambda_3/(3C)$ и соответствующие стационарные решения находятся в явном виде. При $a = -3\lambda_3^2/(4C) < 0$ система (8), (11) имеет два стационарных решения:

$$\bar{p} = \pm \frac{\lambda_3\sqrt{2}}{6C}, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{r} = -\frac{2\lambda_3}{3C}, \quad \bar{\gamma}_1 = -\frac{1}{3}, \quad \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (22)$$

При $a = 3\lambda_3^2/(4C) > 0$ система (8), (11) также имеет два стационарных решения:

$$\bar{p} = \mp \frac{\lambda_3\sqrt{2}}{6C}, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{r} = -\frac{2\lambda_3}{3C}, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{1}{3}, \quad \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (23)$$

Если параметры системы удовлетворяют неравенству

$$16a^2C^2 - 9\lambda_3^4 < 0, \quad (24)$$

то полином $F_4(\bar{r})$ имеет два различных вещественных корня и для получения стационарных решений по формулам (18), (19) и (16) необходимо отбирать только те из корней, для которых выполнены неравенства (20).

Например, при значениях параметров $a = C = 1$, $\lambda_3 = 3/2$ полином $F_4(\bar{r})$ имеет два вещественных корня, которые оба удовлетворяют неравенствам (20) и порождают четыре стационарных решения системы (8), (11), лежащих на множестве $J_2 = 0$. А для значений параметров $a = C = 1$, $\lambda_3 = 2$ условиям (20) удовлетворяет только один корень полинома $F_4(\bar{r})$, который порождает два стационарных решения.

Таким образом, при условии (24) на инвариантном множестве $J_2 = 0$ имеется либо два, либо четыре стационарных решения, являющихся, как и решения (22) и (23), перманентными вращениями (на них все компоненты вектора угловой скорости постоянны).

По отношению к неподвижной системе координат стационарные решения (17) означают состояния покоя, в которых центр масс гиростата занимает нижнее или верхнее положение. Другие стационарные решения $(\bar{p}, 0, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, 0, \bar{\gamma}_3)$ соответствуют перманентным вращениям с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = \bar{p}/\bar{\gamma}_1 = \bar{r}/\bar{\gamma}_3$ вокруг вертикальной оси, положение которой в связанной системе координат задаётся вектором с компонентами $(\bar{\gamma}_1, 0, \bar{\gamma}_3)$.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Перейдём теперь к анализу устойчивости стационарных решений. Введём обозначения для отклонений от невозмущённого стационарного движения:

$$x_1 = p - \bar{p}, \quad x_2 = q - \bar{q}, \quad x_3 = r - \bar{r}, \quad x_4 = \gamma_1 - \bar{\gamma}_1, \quad x_5 = \gamma_2 - \bar{\gamma}_2, \quad x_6 = \gamma_3 - \bar{\gamma}_3.$$

В этих переменных интегралы уравнений возмущённого движения для положений покоя (17) выпишутся следующим образом:

$$J_1 - \bar{J}_1 = 4C(x_1^2 + x_2^2) + Cx_3^2 + 2ax_4, \quad J_3 - \bar{J}_3 = 2\sigma x_4 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2.$$

Здесь и далее \bar{J}_i означает значение выбранного интеграла на невозмущённом движении. Функцию Ляпунова по методу Четаева [18] строим в виде связки (линейной комбинации) интегралов

$$V(x) = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_3(J_3 - \bar{J}_3).$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке выберем число α_3 следующим образом: $\alpha_3 = -a\sigma$, тогда функция $V(x)$ будет квадратичной формой

$$V(x) = 4C(x_1^2 + x_2^2) + Cx_3^2 - a\sigma(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2).$$

В случае $\sigma = -\text{sign}(a)$ эта квадратичная форма является положительно определённой по отношению ко всем переменным $x = \text{col}(x_1, \dots, x_6)$. Тем самым доказано следующее

Утверждение 2. *Состояние покоя (17), соответствующее значению $\sigma = -\text{sign}(a)$, устойчиво по Ляпунову.*

Для анализа устойчивости второго состояния покоя (17), которому соответствует $\sigma = \text{sign}(a)$, воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости по линейному приближению. Для этого состояния покоя характеристическое уравнение линейного приближения имеет вид

$$z^2(z^4 + a_2z^2 + a_0) = 0, \quad (25)$$

где

$$a_2 = \frac{\lambda_3^2 - 20C|a|}{16C^2}, \quad a_0 = \frac{|a|(4C|a| - \lambda_3^2)}{16C^3}. \quad (26)$$

Для того чтобы уравнение (25) не имело корней с положительной вещественной частью, оба коэффициента (26) должны быть неотрицательны, что приводит к противоречивым условиям $\lambda_3^2 \geq 20C|a|$, $4C|a| \geq \lambda_3^2$. Это означает, что один из коэффициентов (26) отрицателен и уравнение (25) имеет корень с положительной вещественной частью. Тем самым доказано следующее

Утверждение 3. *Состояние покоя (17), соответствующее значению $\sigma = \text{sign}(a)$, неустойчиво по Ляпунову.*

Перейдём теперь к анализу устойчивости стационарных решений, являющихся перманентными вращениями. В этом случае интегралы уравнений возмущённого движения записываются в виде

$$\begin{aligned} J_1 - \bar{J}_1 &= 8C\bar{p}x_1 + 2C\bar{r}x_3 + 2ax_4 + 4C(x_1^2 + x_2^2) + Cx_3^2, \\ J_2 - \bar{J}_2 &= 4C\bar{\gamma}_1x_1 + C\bar{\gamma}_3x_3 + 4C\bar{p}x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3)x_6 + 4Cx_1x_4 + 4Cx_2x_5 + Cx_3x_6, \\ J_3 - \bar{J}_3 &= 2\bar{\gamma}_1x_4 + 2\bar{\gamma}_3x_6 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2, \\ J_4 - \bar{J}_4 &= (2\bar{p}(C\bar{r} - \lambda_3) - a\bar{\gamma}_3)x_1 + C\bar{p}^2x_3 - a\bar{p}x_6 + (C\bar{r} - \lambda_3)(x_1^2 + x_2^2) - ax_1x_6 + o(\|x\|^2). \end{aligned}$$

Для анализа устойчивости перманентных вращений будем использовать все четыре интеграла, в том числе условный интеграл J_4 . Поэтому будут получены достаточные условия устойчивости только относительно инвариантного множества $J_2 = 0$, т. е. условной устойчивости.

Функцию Ляпунова по методу Четаева [18] строим в виде связки интегралов

$$V(x) = J_1 - \bar{J}_1 + \alpha_2(J_2 - \bar{J}_2) + \alpha_3(J_3 - \bar{J}_3) \\ + \alpha_4(J_4 - \bar{J}_4) + \beta_2(J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2 + \beta_4(J_4 - \bar{J}_4)^2.$$

С целью уничтожения линейных слагаемых в связке числа α_2 и α_3 выберем следующим образом:

$$\alpha_2 = -\frac{\bar{p}^2}{\bar{\gamma}_3} \alpha_4 - \frac{2\bar{r}}{\bar{\gamma}_3}, \quad \alpha_3 = \frac{\bar{r}(C\bar{r} + \lambda_3)}{\bar{\gamma}_3^2} + \left(\frac{a\bar{p}}{2\bar{\gamma}_3} + \frac{\bar{p}^2(C\bar{r} + \lambda_3)}{2\bar{\gamma}_3^2} \right) \alpha_4.$$

При этом число α_4 будем рассматривать как свободный параметр, значение которого можно выбирать с целью обеспечения положительной определённости связки интегралов. Тогда квадратичную часть функции Ляпунова можно записать в виде

$$V_2(x) = V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6) + V_{25}(x_2, x_5) + \beta_2(J_2 - \bar{J}_2)^2 + \beta_3(J_3 - \bar{J}_3)^2 + \beta_4(J_4 - \bar{J}_4)^2,$$

где

$$V_{25}(x_2, x_5) = (4C + \alpha_4(C\bar{r} - \lambda_3))x_2^2 + 4\alpha_2 C x_2 x_5 + \alpha_3 x_5^2,$$

$$V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6) = (4C + \alpha_4(C\bar{r} - \lambda_3))x_1^2 + Cx_3^2 \\ + \alpha_2(4Cx_1x_4 + Cx_3x_6) + \alpha_3(x_4^2 + x_6^2) - \alpha_4 a x_1 x_6.$$

Так как положительные числа β_2 , β_3 и β_4 можно брать как угодно большими, то для положительной определённости квадратичной части функции Ляпунова необходимо и достаточно [19], чтобы квадратичная форма $V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6) + V_{25}(x_2, x_5)$ была положительно определённой на линейном множестве

$$\Theta = \{\bar{\gamma}_1 x_4 + \bar{\gamma}_3 x_6 = 0, 4C\bar{\gamma}_1 x_1 + C\bar{\gamma}_3 x_3 + 4C\bar{p}x_4 + (C\bar{r} + \lambda_3)x_6 = 0, \\ (2\bar{p}(C\bar{r} - \lambda_3) - a\bar{\gamma}_3)x_1 + C\bar{p}^2 x_3 - a\bar{p}x_6 = 0\}.$$

Поскольку переменные x_2 и x_5 не входят в линейные ограничения Θ , то квадратичная форма $V_{25}(x_2, x_5)$ должна быть положительно определена, для чего в соответствии с критерием Сильвестра необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta_{25}(\alpha_4) = m_2 \alpha_4^2 + m_1 \alpha_4 + m_0 > 0, \quad (27)$$

где коэффициенты m_i квадратного трёхчлена $\Delta_{25}(\alpha_4)$ выражаются по явным формулам через параметры системы C , a , λ_3 и через компоненты исследуемого на устойчивость перманентного вращения $(\bar{p}, 0, \bar{r}, \bar{\gamma}_1, 0, \bar{\gamma}_3)$.

На линейном множестве Θ переменные x_3 , x_4 , x_6 можно выразить через x_1 . Тогда, подставляя эти выражения в квадратичную форму $V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6)$, на множестве Θ представим её как форму от одной переменной $V_{1346} = K(\alpha_4)x_1^2$, коэффициент которой K будет линейной функцией $K(\alpha_4) = n_1 \alpha_4 + n_0$ свободного параметра α_4 . Поэтому для положительной определённости формы $V_{1346}(x_1, x_3, x_4, x_6)$ на множестве Θ необходимо и достаточно положительности $K(\alpha_4)$.

Поскольку $m_2 = -4C\bar{p}^4/\bar{\gamma}_3^2 < 0$, то для того чтобы существовало такое значение свободного параметра α_4 , на котором одновременно выполнены неравенства $K(\alpha_4) > 0$ и (27), необходимо и достаточно, чтобы трёхчлен (27) имел два вещественных корня $\alpha_{41} < \alpha_{42}$ и чтобы для них выполнялось неравенство

$$\max\{K(\alpha_{41}), K(\alpha_{42})\} > 0. \quad (28)$$

Тем самым доказано

Утверждение 4. Каждое перманентное вращение, для которого выполнено неравенство (28), является условно устойчивым по Ляпунову относительно инвариантного множества $J_2 = 0$.

Пример 1. Пусть параметры системы (8), (11) имеют значения $C = 1$, $\lambda_3 = 2$, $a = -3\lambda_3^2/4C = -3$. Тогда в соответствии с (22) система имеет два стационарных решения, являющихся перманентными вращениями:

$$\bar{p} = \pm\sqrt{2}/3, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{r} = -4/3, \quad \bar{\gamma}_1 = -1/3, \quad \bar{\gamma}_2 = 0, \quad \bar{\gamma}_3 = \pm 2\sqrt{2}/3. \quad (29)$$

Полином (27) для обоих стационарных решений (29) будет одинаковым:

$$\Delta_{25}(\alpha_4) = -\frac{2}{9}\alpha_4^2 - \frac{32}{3}\alpha_4 - 36,$$

поэтому $\alpha_{41} = -2 - 3\sqrt{46}$, $\alpha_{42} = -2 + 3\sqrt{46}$. Функции $K(\alpha_4)$ соответственно будут такими:

$$K(\alpha_4) = \frac{\mp 64}{9(3\sqrt{2} \pm 2)^2}((6\sqrt{2} \pm 11)\alpha_4 \mp 33).$$

Для обоих стационарных решений (29) получаем $\max\{K(\alpha_{41}), K(\alpha_{42})\} = 168, 344 \dots > 0$, неравенство (28) выполнено. Поэтому в соответствии с утверждением 4 они оба являются условно устойчивыми по Ляпунову относительно инвариантного множества $J_2 = 0$.

В этом примере $\Delta_{25}(0) = -36 < 0$, поэтому построить положительно определённую связку Четаева из трёх интегралов J_1, J_2, J_3 невозможно. Характеристическое уравнение системы линейного приближения для стационара (29) имеет вид $z^4(z^2 + 3) = 0$, и корней с положительной вещественной частью у него нет. Поэтому вопрос о том, является ли условная устойчивость безусловной или же имеет место неустойчивость стационаров (29), в данном примере остаётся открытым.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ (8), (15) В КВАДРАТУРАХ

Система (8), (15) имеет четыре первых интеграла

$$J_1 = 4C(p^2 + q^2) + Cr^2 = c_1 \equiv \text{const}, \quad (30)$$

$$J_2 = 4C(p\gamma_1 + q\gamma_2) + (Cr + \lambda_3)\gamma_3 + \frac{1}{2}(k\gamma_1^2 + k\gamma_2^2 + k_3\gamma_3^2) = c_2 \equiv \text{const}, \quad (31)$$

$$J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (32)$$

$$J_4 = Cr + \mathcal{L}(\gamma_3) = c_4 \equiv \text{const}, \quad (33)$$

где

$$\mathcal{L}(\gamma_3) = -k\gamma_3 + \int_0^{\gamma_3} L(s) ds. \quad (34)$$

Из выражения для первого интеграла (33) имеем

$$r = \frac{1}{C}(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3)). \quad (35)$$

С учётом формулы (35) уравнения системы (8), (15) перепишем как

$$4C\dot{p} = f(\gamma_3)q - g(\gamma_3)\gamma_2, \quad (36)$$

$$4C\dot{q} = -f(\gamma_3)p + g(\gamma_3)\gamma_1, \quad (37)$$

$$\dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2, \quad (38)$$

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{1}{C}(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3))\gamma_2 - q\gamma_3, \quad (39)$$

$$\dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - \frac{1}{C}(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3))\gamma_1, \quad (40)$$

где введены следующие обозначения:

$$f(\gamma_3) = 3(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3)) - \lambda_3 + (L(\gamma_3) - k_3)\gamma_3, \quad (41)$$

$$g(\gamma_3) = \frac{1}{C}(L(\gamma_3) - k)(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3)). \quad (42)$$

Введём полярные координаты (Ω, φ) :

$$p = \Omega \cos \varphi, \quad q = \Omega \sin \varphi, \quad \text{где } \Omega = \Omega(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

При этом из выражения для первого интеграла (30) находим

$$\Omega^2 = \frac{c_1}{4C} - \frac{1}{4C^2}(c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3))^2. \quad (43)$$

Из соотношений (36), (37) имеем

$$4C\dot{\Omega} \cos \varphi - 4C\Omega\dot{\varphi} \sin \varphi = f(\gamma_3)\Omega \sin \varphi - g(\gamma_3)\gamma_2, \quad (44)$$

$$4C\dot{\Omega} \sin \varphi + 4C\Omega\dot{\varphi} \cos \varphi = -f(\gamma_3)\Omega \cos \varphi + g(\gamma_3)\gamma_1. \quad (45)$$

Складывая равенства (44), (45), умножив предварительно первое на $\cos \varphi$, второе на $\sin \varphi$, получим

$$4C\dot{\Omega} = g(\gamma_3)(\gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \cos \varphi). \quad (46)$$

Теперь вычтем из (45), умножив его на $\cos \varphi$, равенство (44), умножив его на $\sin \varphi$. В итоге получим

$$4C\Omega\dot{\varphi} = -\Omega f(\gamma_3) + g(\gamma_3)(\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi). \quad (47)$$

Из выражения для первого интеграла (31) находим

$$4C\Omega(\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi) = W(\gamma_3), \quad (48)$$

где

$$W(\gamma_3) = c_2 - (c_4 - \mathcal{L}(\gamma_3) + \lambda_3)\gamma_3 - \frac{1}{2}(k + (k_3 - k)\gamma_3^2). \quad (49)$$

Из равенств (47), (48) получим

$$\dot{\varphi} = -\frac{f(\gamma_3)}{4C} + \frac{g(\gamma_3)W(\gamma_3)}{16C^2\Omega^2}. \quad (50)$$

Таким образом, мы получили выражение для нахождения функции $\varphi(t)$ путём интегрирования правой части равенства (50), которая, с учётом формулы (43), зависит только от функции $\gamma_3(t)$.

Уравнение (38) перепишем как

$$\dot{\gamma}_3 = \Omega(\gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \cos \varphi). \quad (51)$$

Из соотношений (48), (51), рассматриваемых как система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных γ_1, γ_2 , находим

$$\gamma_1 = \frac{W(\gamma_3)}{4C\Omega} \cos \varphi + \frac{\dot{\gamma}_3}{\Omega} \sin \varphi, \quad (52)$$

$$\gamma_2 = \frac{W(\gamma_3)}{4C\Omega} \sin \varphi - \frac{\dot{\gamma}_3}{\Omega} \cos \varphi. \quad (53)$$

Осталось получить дифференциальное уравнение для нахождения функции $\gamma_3(t)$. Для этого возведём в квадрат равенство (51)

$$\dot{\gamma}_3^2 = \Omega^2(\gamma_1^2 \sin^2 \varphi + \gamma_2^2 \cos^2 \varphi - 2\gamma_1\gamma_2 \sin \varphi \cos \varphi). \quad (54)$$

Также возведём в квадрат выражение (48)

$$\gamma_1^2 \cos^2 \varphi + \gamma_2^2 \sin^2 \varphi + 2\gamma_1\gamma_2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{W^2(\gamma_3)}{16C^2\Omega^2}.$$

Выразим из этого соотношения слагаемое, содержащее смешанное произведение $\gamma_1\gamma_2$, и подставим его в формулу (54), которая примет вид

$$\dot{\gamma}_3^2 = \Omega^2(1 - \gamma_3^2) - \frac{W^2(\gamma_3)}{16C^2}.$$

С использованием формул (43), (49) окончательно получим дифференциальное уравнение для нахождения функции $\gamma_3(t)$ следующего вида:

$$\dot{\gamma}_3^2 = P(\gamma_3)\mathcal{L}^2(\gamma_3) + Q(\gamma_3)\mathcal{L}(\gamma_3) + R(\gamma_3), \quad (55)$$

где $P(\gamma_3)$, $Q(\gamma_3)$, $R(\gamma_3)$ — многочлены от γ_3 соответственно второй, третьей и четвёртой степени:

$$P(\gamma_3) = -\frac{5\gamma_3^2}{16C^2} + \frac{\gamma_3}{2C^2} - \frac{1}{4C^2}, \quad Q(\gamma_3) = \frac{k_3 - k}{16C^2}\gamma_3^3 + \frac{\lambda_3 + 5c_4}{8C^2}\gamma_3^2 + \frac{k - 2c_2 - 16c_4}{16C^2}\gamma_3 + \frac{c_4}{2C^2},$$

$$R(\gamma_3) = -\frac{(k_3 - k)^2}{64C^2}\gamma_3^4 - \frac{(c_4 + \lambda_3)(k_3 - k)}{16C^2}\gamma_3^3$$

$$\left(-\frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C} + \frac{0.5(k - 2c_2)(k_3 - k) - (c_4 + \lambda_3)^2}{16C^2} \right) \gamma_3^2$$

$$+ \left(\frac{c_4^2}{2C^2} - \frac{c_1}{2C} - \frac{(c_4 + \lambda_3)(k - 2c_2)}{16C^2} \right) \gamma_3 + \frac{c_1}{4C} - \frac{c_4^2}{4C^2} - \frac{(k - 2c_2)^2}{64C^2}.$$

Если квадратура (34) сводится к элементарной функции, то решение уравнения (55) сводится к квадратуре. В частности, этот случай реализуется тогда, когда функция $L(\gamma_3)$ является полиномом. Покажем на примерах, что в некоторых случаях решения могут быть получены в виде параметрических семейств, задаваемых в явной форме элементарными или специальными функциями времени.

5. ПРИМЕРЫ

Пример 2. Пусть $k = 0$, $L(\gamma_3) = L \equiv \text{const}$, $\mathcal{L}(\gamma_3) = L\gamma_3$. Тогда формулы (35), (43), (50), (52), (53) примут вид

$$r = \frac{1}{C}(c_4 - L\gamma_3), \quad \Omega^2 = \frac{c_1}{4C} - \frac{(c_4 - L\gamma_3)^2}{4C^2},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(2L + k_3)\gamma_3 + \lambda_3 - 3c_4}{4C} + \frac{\Theta_1(\gamma_3)}{16C^2\Omega^2}, \quad (56)$$

$$\gamma_1 = \frac{\sin \varphi}{\Omega} \dot{\gamma}_3 + \frac{\cos \varphi}{4C\Omega} \Theta_2(\gamma_3), \quad \gamma_2 = -\frac{\cos \varphi}{\Omega} \dot{\gamma}_3 + \frac{\sin \varphi}{4C\Omega} \Theta_2(\gamma_3), \quad (57)$$

где введены обозначения

$$\Theta_1(\gamma_3) = -\frac{L^2(2L - k_3)}{2C}\gamma_3^3 + \frac{L(c_4(4L - k_3) + 2L\lambda_3)}{2C}\gamma_3^2 - \frac{L(c_4^2 + c_4\lambda_3 + Lc_2)}{C}\gamma_3 + \frac{Lc_2c_4}{C},$$

$$\Theta_2(\gamma_3) = \frac{1}{2}(2L - k_3)\gamma_3^2 - (c_4 + \lambda_3)\gamma_3 + c_2.$$

При этом уравнение (55) для функции γ_3 сводится к квадратуре

$$\Phi(\gamma_3) = t - t_0. \quad (58)$$

Здесь

$$\Phi(\gamma_3) = \int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{a_4\gamma_3^4 + a_3\gamma_3^3 + a_2\gamma_3^2 + a_1\gamma_3 + a_0}}, \quad (59)$$

где t_0 — константа интегрирования и введены следующие обозначения:

$$a_4 = \frac{4Lk_3 - 20L^2 - k_3^2}{64C^2}, \quad a_3 = \frac{L^2}{2C^2} + \frac{(\lambda_3 + 5c_4)L}{8C^2} - \frac{(c_4 + \lambda_3)k_3}{16C^2},$$

$$a_2 = -\frac{c_2k_3 + (c_4 + \lambda_3)^2 + 2(c_2 + 8c_4)L}{16C^2} - \frac{L^2}{4C^2} - \frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C},$$

$$a_1 = \frac{c_4L}{2C^2} + \frac{(c_4 + \lambda_3)c_2}{8C^2} + \frac{c_4^2}{2C^2} - \frac{c_1}{2C}, \quad a_0 = -\frac{c_2^2}{16C^2} - \frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C}.$$

Интеграл в правой части равенства (59) в общем случае вычисляется в эллиптических функциях. Приведём пример, когда интеграл (59) вычисляется в элементарных функциях и при этом уравнение (58) разрешимо относительно γ_3 . Пусть, например, выполнены условия $c_2 \neq 0$, $c_4 \neq 0$ и имеют место следующие равенства:

$$c_1 = \frac{c_2^2 + 4c_4^2}{4C}, \quad \lambda_3 = c_2 - c_4 - \frac{4c_4L}{c_2}, \quad k_3 = -\frac{2L(2L(c_2^2 + 4c_4^2) + (c_2 + 4c_4)c_2^2)}{c_2^3},$$

тогда получим $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. В этом случае интеграл (59) легко вычисляется и из уравнения (58) находим

$$\gamma_3(t) = \frac{H_0}{H_1(t - t_0)^2 + H_2},$$

где коэффициенты H_0 , H_1 , H_2 зависят от постоянных c_2 , c_4 , L и являются слишком громоздкими. Поэтому придадим постоянным c_2 , c_4 , L конкретные значения. Пусть выполнены равенства

$$c_2 = \frac{3}{C}, \quad c_4 = \frac{2}{C}, \quad L = \frac{1}{C}, \quad c_1 = \frac{25}{4C^3}, \quad k_3 = -\frac{298}{27C}, \quad \lambda_3 = -\frac{5}{3C}.$$

Тогда получим

$$\gamma_3(t) = \frac{185976C^4}{82369t^2 + 305028C^4}. \quad (60)$$

Для функции $\gamma_3(t)$ вида (60) функция $\varphi(t)$ находится по формуле (56) простым интегрированием по времени t . Из формулы (56) находим

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{5}{4C^2}t - \frac{68}{\sqrt{8473}} \operatorname{arctg} \left(\frac{287\sqrt{8473}}{50838C^2} t \right) - \frac{89\sqrt{293}}{1465} \operatorname{arctg} \left(\frac{287\sqrt{293}}{8790C^2} t \right) - \frac{259}{\sqrt{18805}} \operatorname{arctg} \left(\frac{287\sqrt{18805}}{112830C^2} t \right),$$

где φ_0 — постоянная интегрирования.

Пример 3. Пусть $k = 0$, $k_3 = 8$, $C = 2$, $L = 4$, $\mathcal{L}(\gamma_3) = 4\gamma_3$,

$$\lambda_3 = -2 \cdot 6^{1/3} - \frac{6^{2/3}}{4} - 1, \quad c_1 = \frac{3 \cdot 6^{1/3}}{64} - \frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{6^{2/3}}{4}, \quad c_4 = 1.$$

Тогда ОДУ (55) для определения функции $\gamma_3(t)$ примет вид

$$\dot{\gamma}_3^2 = (1 - \gamma_3)(\gamma_3 - 3/4)(\gamma_3 - 1/2)(\gamma_3 - 1/4). \quad (61)$$

Легко видеть, что ОДУ (61) имеет следующие стационарные решения: $\gamma_3 = 1$, $\gamma_3 = 3/4$, $\gamma_3 = 1/2$, $\gamma_3 = 1/4$.

Для нахождения нестационарного решения запишем уравнение (61) в виде равенства

$$\int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{(1 - \gamma_3)(\gamma_3 - 3/4)(\gamma_3 - 1/2)(\gamma_3 - 1/4)}} = t - t_0,$$

где t_0 — постоянная интегрирования. Интеграл в левой части этого равенства является табличным [20], вычисляя который при условии $1 > \gamma_3 > 3/4$, получим

$$\int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{(1 - \gamma_3)(\gamma_3 - 3/4)(\gamma_3 - 1/2)(\gamma_3 - 1/4)}} = 4F\left(\arcsin \sqrt{\frac{4\gamma_3 - 3}{2\gamma_3 - 1}}, \frac{1}{2}\right).$$

Здесь $F(\phi, \kappa)$ — эллиптический интеграл первого рода, ϕ — амплитуда, κ — модуль эллиптической функции. Обращая равенство

$$4F\left(\arcsin \sqrt{\frac{4\gamma_3 - 3}{2\gamma_3 - 1}}, \frac{1}{2}\right) = t - t_0,$$

находим

$$\gamma_3(t) = \frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{(t - t_0)}{4}, 1/2\right) - 3}{2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{(t - t_0)}{4}, 1/2\right) - 4}. \quad (62)$$

Здесь $\operatorname{sn}(\cdot, \cdot)$ — эллиптический синус Якоби с модулем $\kappa = 1/2$. Функция (62) является ограниченной периодической. Для функции $\gamma_3(t)$ вида (62) из формулы (56) находим

$$\varphi(t) = \left(\frac{3}{4} - \frac{6^{1/3}}{4} - \frac{6^{2/3}}{32}\right)t + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sn}((t - t_0)/4, 1/2)}{2 \operatorname{cn}((t - t_0)/4, 1/2) \operatorname{dn}((t - t_0)/4, 1/2)}\right) + \Phi(t),$$

где $\operatorname{cn}(\cdot, \cdot)$ — эллиптический косинус Якоби, $\operatorname{dn}(\cdot, \cdot)$ — дельта амплитуды Якоби и введено обозначение

$$\Phi(t) = \int_0^t \frac{(\operatorname{sn}^2(\tau/4, 1/2) - 4)((6^{1/3} - 8) \operatorname{sn}^2(\tau/4, 1/2) + 24 - 6^{1/3}) d\tau}{3(6^{1/3} - 16) \operatorname{sn}^4(\tau/4, 1/2) + (320 - 12 \cdot 6^{1/3}) \operatorname{sn}^2(\tau/4, 1/2) + 12(6^{1/3} - 48)}.$$

Здесь для краткости записи мы положили $t_0 = 0$.

Пример 4. Пусть $k \neq 0$, $L(\gamma_3) = L \equiv \operatorname{const}$, $\mathcal{L}(\gamma_3) = (L - k)\gamma_3$. Тогда формулы (35), (43), (50), (52), (53) примут вид

$$r = \frac{1}{C}(c_4 - (L - k)\gamma_3), \quad \Omega^2 = \frac{c_1}{4C} - \frac{(c_4 - (L - k)\gamma_3)^2}{4C^2},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{(2L + k_3 - 3k)\gamma_3 + \lambda_3 - 3c_4}{4C} + \frac{\Theta_1(\gamma_3)}{16C^2\Omega^2}, \quad (63)$$

$$\gamma_1 = \frac{\sin \varphi}{\Omega} \dot{\gamma}_3 + \frac{\cos \varphi}{4C\Omega} \Theta_2(\gamma_3), \quad \gamma_2 = -\frac{\cos \varphi}{\Omega} \dot{\gamma}_3 + \frac{\sin \varphi}{4C\Omega} \Theta_2(\gamma_3), \quad (64)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}\Theta_1(\gamma_3) &= -\frac{(L-k)^2(2L-k-k_3)}{2C}\gamma_3^3 + \frac{(L-k)(c_4(4L-3k-k_3)+2\lambda_3(L-k))}{2C}\gamma_3^2 \\ &\quad + \frac{(L-k)((L-k)(k-2c_2)-2c_4(c_4+\lambda_3))}{2C}\gamma_3 - \frac{(L-k)c_4(k-2c_2)}{2C}, \\ \Theta_2(\gamma_3) &= \frac{1}{2}(2L-k-k_3)\gamma_3^2 - (c_4+\lambda_3)\gamma_3 - \frac{1}{2}(k-2c_2).\end{aligned}$$

При этом уравнение (55) для функции γ_3 сводится к следующей квадратуре:

$$\int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{b_4\gamma_3^4 + b_3\gamma_3^3 + b_2\gamma_3^2 + b_1\gamma_3 + b_0}} = t - t_0, \quad (65)$$

где t_0 — константа интегрирования и введены обозначения

$$\begin{aligned}b_4 &= \frac{(L-k)(k_3-k)}{16C^2} - \frac{5(L-k)^2}{16C^2} - \frac{(k_3-k)^2}{64C^2}, \\ b_3 &= \frac{(L-k)^2}{2C^2} + \frac{(\lambda_3+5c_4)(L-k)}{8C^2} - \frac{(c_4+\lambda_3)(k_3-k)}{16C^2}, \\ b_2 &= \frac{0.5(k-2c_2)(k_3-k) - (c_4+\lambda_3)^2 + (k-2c_2-16c_4)(L-k)}{16C^2} - \frac{(L-k)^2}{4C^2} - \frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C}, \\ b_1 &= \frac{c_4(L-k)}{2C^2} - \frac{(c_4+\lambda_3)(k-2c_2)}{16C^2} + \frac{c_4^2}{2C^2} - \frac{c_1}{2C}, \quad b_0 = -\frac{(k-2c_2)^2}{64C^2} - \frac{c_4^2}{4C^2} + \frac{c_1}{4C}.\end{aligned}$$

При значениях постоянных

$$c_1 = \frac{153k^2}{6C}, \quad c_2 = 2k, \quad c_4 = 3k, \quad k_3 = -74k, \quad \lambda_3 = \frac{21k}{2}, \quad L = -\frac{k}{2}$$

из формулы (65) получим $\gamma_3(t) = \frac{1696C^2}{25281k^2t^2 + 2320C^2}$. А из равенства (63) находим

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi_0 - \frac{21k}{8C}t - \frac{28}{\sqrt{145}} \arctg\left(\frac{159\sqrt{145}k}{580C}t\right) + \frac{(\sqrt{17}-6)}{\sqrt{212\sqrt{17}-703}} \operatorname{arcth}\left(\frac{159k}{4C\sqrt{212\sqrt{17}-703}}t\right) \\ &\quad + \frac{7(\sqrt{17}+6)}{\sqrt{212\sqrt{17}+703}} \operatorname{arcth}\left(\frac{159k}{4C\sqrt{212\sqrt{17}+703}}t\right),\end{aligned}$$

где φ_0 — постоянная интегрирования.

Пример 5. Пусть $k \neq 0$, $L(\gamma_3) = L\gamma_3 + l_0$, $\mathcal{L}(\gamma_3) = \frac{1}{2}L\gamma_3^2 + (l_0 - k)\gamma_3$, $L \neq 0$, l_0 — произвольные постоянные. Тогда формулы (35), (43) примут вид

$$r = \frac{1}{C}(c_4 - \gamma_3^2 L/2 - (l_0 - k)\gamma_3), \quad \Omega^2 = \frac{c_1}{4C} - \frac{(c_4 - \gamma_3^2 L/2 - (l_0 - k)\gamma_3)^2}{4C^2}.$$

Формулы (50), (52), (53) приводить не будем ввиду их громоздкости. При значениях постоянных

$$c_1 = k^2/C, \quad c_2 = k/2, \quad c_4 = -k, \quad \lambda_3 = -k, \quad L = -k, \quad l_0 = k, \quad k_3 = 5k$$

получим

$$\gamma_3(t) = \frac{4C}{\sqrt{k^2t^2 + 20C^2}}.$$

Полагая $C = 1$, $k = 2$, для функции $\gamma_3(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2 + 5}}$ находим

$$\varphi(t) = \varphi_0 + 2t + 2 \arcsin(t/\sqrt{5}) - 3/\sqrt{5} \operatorname{arctg}(t/\sqrt{5}) + \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2\sqrt{t^2 + 5}}\right),$$

где φ_0 — постоянная интегрирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем кратко основные результаты статьи и возможные направления их дальнейшего развития. В работе найдены все стационарные решения гиростата Горячева — Сретенского, лежащие на инвариантном множестве $J_2 = 0$ нулевого уровня интеграла площадей. Максимальное количество таких решений равно шести (два положения покоя и не более четырёх перманентных вращений). Доказано, что одно состояние покоя устойчиво, а другое неустойчиво. Получены достаточные условия условной устойчивости перманентных вращений относительно множества $J_2 = 0$. Представляет интерес выяснить, в каких случаях условная устойчивость является на самом деле безусловной, требуются ли какие-либо дополнительные ограничения на параметры системы. Для случая совпадения точки подвеса с центром масс ($a = 0$) и действия специального вида гироскопического момента выполнено интегрирование в квадратурах, для ряда примеров получены параметрические семейства решений, представимые элементарными или специальными функциями времени. Представляет интерес выяснить, используя метод малого параметра, сохраняются ли эти семейства решений при достаточно малом $|a| \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения твёрдого тела около неподвижной точки. М: Гостехиздат, 1953.
2. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твёрдого тела. Ижевск: изд. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
3. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твёрдого тела. Киев: Наукова думка, 2012.
4. Горячев Д.Н. О движении тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае $A = B = 4C$ // Мат. сб. 1900. Т. 21, №. 3. С. 431–438.
5. Чаплыгин С.А. Новый случай вращения тяжёлого твёрдого тела, подпёртого в одной точке // Тр. Отд. физ. наук об-ва любителей естествознания. 1901. Т. 10, вып. 3. С. 32–34.
6. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 2. С. 292–294.
7. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твёрдого тела. Ижевск: изд. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
8. Polekhin I.Yu. Precession of the Kovalevskaya and Goryachev—Chaplygin tops // Regular and Chaotic Dynamics. 2019. V. 24, N 3. P. 281–297.
9. Гашененко И.Н. О решении Д.Н. Горячева // Механика твёрдого тела. 2009. №. 39. С. 29–41.
10. Харламов М.П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
11. Маркеев А. П. О тождественном резонансе в одном частном случае задачи об устойчивости периодических движений твёрдого тела // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 32–37.
12. Бардин Б.С. К задаче об устойчивости маятникообразных движений твёрдого тела в случае Горячева — Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 14–21.

13. Горр Г.В., Мазнев А.В. О решениях уравнений движения твёрдого тела в потенциальном силовом поле в случае постоянного модуля кинетического момента // Механика твёрдого тела. 2017. №. 47. С. 12–24.
14. Yehia H.M. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields // J. Egyptian. Math. Soc. 2017. V. 25. P. 216–219; DOI: <https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001>
15. Зыза А.В. Компьютерное исследование полиномиальных решений уравнений динамики гиростата // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10, № 1. С. 7–25; DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25>
16. Kosov A.A., Semenov E.I. On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2022. V. 430. Article 133103; DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.133103>
17. Козлов В.В. К задаче о вращении твёрдого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.
18. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
19. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988.
20. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

UDC 531.36

ON THE INTEGRABILITY AND STABILITY OF STATIONARY SOLUTIONS OF THE GORYACHEV—SRETENSKY GYROSTAT© 2023 A. A. Kosov^a, E. I. Semenov^b*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
ul. Lermontova 134, Irkutsk 664033, Russia*E-mails: ^akosov_idstu@mail.ru, ^bedwseiz@gmail.com

Received 16.08.2022, revised 05.06.2023, accepted 07.06.2023

Abstract. The equations of motion of the Goryachev-Sretensky gyrost are studied. All stationary solutions are found on the invariant set of the zero level of the area integral and their stability is analyzed. For the case where the suspension point coincides with the center of mass and the action of a gyroscopic moment of a special type, integration in quadratures is performed.

Keywords: Goryachev—Sretensky gyrost, stationary solutions, stability, quadrature integration.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.305

REFERENCES

1. Golubev V.V. Lekcii po integririvaniju uravnenij dvizhenija tverdogo tela okolo nepodvizhnoj točki [Lectures on the integration of the equations of motion of a rigid body around a fixed point]. Moscow: Gostekhizdat, 1953 (in Russian).
2. Borisov A.V., Mamaev I.S. Dinamika tverdogo tela [Rigid Body Dynamics]. Izhevsk: Publ. NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», 2001 (in Russian).
3. Gashenko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M. Klassicheskie zadachi dinamiki tverdogo tela [Classical problems of rigid body dynamics]. Kiev: Naukova dumka, 2012 (in Russian).
4. Gorjachev D.N. O dvizhenii tjazhelogo tverdogo tela vokrug nepodvizhnoj točki v sluchae $A = B = 4C$ [On the motion of a heavy rigid body around a fixed point in the case $A = B = 4C$]. *Mat. Sbornik*, 1900, Vol. 21, No. 3, pp. 431–438 (in Russian).
5. Chaplygin S.A. Novyj sluchaj vrashhenija tjazhelogo tverdogo tela, podpertogo v odnoj točke [A new case of rotation of a heavy rigid body supported at one point]. *Tr. Otd. Fiz. Nauk Obshchestva Lyubitelei Estestvoznaniya*, 1901, Vol. 10, No. 3, pp. 32–34 (in Russian).
6. Sretenskij L.N. O nekotoryh sluchajah integriruемости uravnenij dvizhenija girostata [On some cases of integrability of the equations of motion of a gyrost]. *Dokl. AN SSSR*, 1963, Vol. 149, No. 2, pp. 292–294 (in Russian).
7. Kozlov V.V. Metody kachestvennogo analiza v dinamike tverdogo tela [Qualitative Analysis Methods in Rigid Body Dynamics]. Izhevsk: Publ. NIC «Reguljarnaja i Haoticheskaja Dinamika», 2000 (in Russian).
8. Polekhin I.Yu. Precession of the Kovalevskaya and Goryachev—Chaplygin Tops. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2019, Vol. 24, No. 3, pp. 281–297.
9. Gashenko I.N. O reshenii D.N. Gorjacheva [On D.N. Goryachev's decision]. *Solid State Mechanics [Mehanika Tverdogo Tela]*, 2009, No. 39, pp. 29–41 (in Russian).
10. Harlamov M.P. Topologicheskij analiz integriruemyh zadach dinamiki tverdogo tela [Topological analysis of integrable problems of rigid body dynamics]. Leningrad: Izd-vo LGU, 1988 (in Russian).

11. Markeev A.P. O tozhdestvennom rezonanse v odnom chastnom sluchae zadachi ob ustojchivosti periodicheskikh dvizhenij tverdogo tela [On identical resonance in one particular case of the problem of stability of periodic motions of a rigid body]. *Izv. RAN. MTT*, 2003, No. 3, pp. 32–37 (in Russian).
12. Bardin B.S. K zadache ob ustojchivosti majatnikoobraznyh dvizhenij tverdogo tela v sluchae Gorjacheva—Chaplygina [On the problem of stability of pendulum motions of a rigid body in the case of Goryachev—Chaplygin]. *Izv. RAN. MTT*, 2007, No. 2, pp. 14–21 (in Russian).
13. Gorr G.V., Maznev A.V. O reshenijah uravnenij dvizhenija tverdogo tela v potencial'nom silovom pole v sluchae postojannogo modulja kineticheskogo momenta [On solutions of the equations of motion of a rigid body in a potential force field in the case of a constant modulus of angular momentum]. *Solid State Mechanics [Mehanika Tverdogo Tela]*, 2017, No. 47, pp. 12–24 (in Russian).
14. Yehia H.M. Regular precession of a rigid body (gyrostat) acted upon by an irreducible combination of three classical fields. *J. Egyptian. Math. Soc.*, 2017, Vol. 25, pp. 216–219; DOI: <https://doi.org/10.1016/j.joems.2016.08.001>
15. Zyza A.V. Komp'yuternoe issledovanie polinomial'nyh reshenij uravnenij dinamiki girostata [Computer study of polynomial solutions of equations of gyrostat dynamics]. *Computer Research and Modeling [Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie]*, 2018, Vol. 10, No. 1, pp. 7–25 (in Russian); DOI: <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-1-7-25>
16. Kosov A.A., Semenov E.I. On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2022, Vol. 430, article 133103; DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.133103>
17. Kozlov V.V. K zadache o vrashhenii tverdogo tela v magnitnom pole [On the problem of rotation of a rigid body in a magnetic field]. *Izv. AN SSSR. MTT*, 1985, No. 6, pp. 28–33 (in Russian).
18. Chetaev N.G. Ustojchivost' dvizhenija. Raboty po analiticheskoj mehanike [Movement stability. Works on analytical mechanics]. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1962 (in Russian).
19. Rubanovskij V.N., Samsonov V.A. Ustojchivost' stacionarnyh dvizhenij v primerah i zadachah [Stability of stationary motions in examples and problems]. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
20. Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I. Integraly i rjady [Integrals and series]. Moscow: Nauka, 1981 (in Russian).

УДК 519.63:532.22:532.64:536.42

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОХЛАЖДЕНИЯ ПОДЛОЖКИ ПРИ ИСПАРЕНИИ ЧИСТОГО ПАРА С ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОЙ ПЛЁНКИ И КАПЕЛЬ ЖИДКОСТИ

© 2023 А. Л. Куперштох^a, Д. А. Медведев^b, А. В. Альянов^c

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^asknew@mail.ru, ^bdmedv@hydro.nsc.ru, ^caljanov-ant@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.04.2023 г.; после доработки 18.04.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Проведено численное исследование процесса охлаждения подложки в условиях испарения чистого пара с поверхности плёнки и капель жидкости. Моделирование такой двухфазной системы выполнялось методом решёточных уравнений Больцмана с учётом теплопроводности вещества и испарения. Использовалось уравнение состояния Ван-дер-Ваальса, описывающее фазовый переход жидкость-пар. Предложен новый метод задания граничных условий на плоской поверхности для моделирования контактных углов смачивания в методе решёточных уравнений Больцмана. При испарении и конденсации учитывалась скрытая теплота фазового перехода. Показано, что процесс зависит от толщины плёнки и скорости удаления пара с её поверхности. Рассмотрены случаи принудительного оттока пара, а также метод конденсации пара на охлаждаемом конденсаторе. Показано, что тепловой поток от подложки резко возрастает в окрестности контактных линий капель. Проведено сравнение тепловых потоков при испарении плёнки и капель на подложке с разной смачиваемостью.

Ключевые слова: метод решёточных уравнений Больцмана, фазовые переходы, динамика многофазных сред, испарение, поток тепла, мезоскопические методы, компьютерное моделирование.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.306

ВВЕДЕНИЕ

Для охлаждения нагретых поверхностей широко используются жидкие плёнки и капли. Эффективность таких методов связана с тем, что при испарении поверхность жидкости охлаждается из-за поглощения скрытой теплоты испарения. Вместе с тем процесс испарения связан с параметрами пара вблизи испаряющейся поверхности, т. е. насколько его плотность меньше, чем у насыщенного пара при данной температуре поверхности (закон Герца — Кнудсена) [1–3].

В реальных инженерных конструкциях отток пара от испаряющейся поверхности осуществляется несколькими способами. В простейшем случае пары жидкости уносятся диффузионным способом в окружающем газе. В так называемых тепловых трубках при поступлении пара в специальную секцию с пониженной температурой происходит его конденсация. Известен эффект интенсификации теплообмена при создании контактных линий путём разрыва плёнки, так как в окрестности контактной линии толщина жидкости уменьшается, градиент температуры локально увеличивается, и поток тепла возрастает [4–8]. В другом методе используется поток холодного газа вдоль поверхности протекающей плёнки, который уносит образовавшийся пар.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева (проект FWGG–2021–0006).

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

1.1. Метод решёточных уравнений Больцмана

Для моделирования двухфазных систем жидкость-пар успешно применяется метод решёточных уравнений Больцмана (LBE) [9–13]. Течение флюида в методе LBE моделируется ансамблем псевдочастиц, которые за шаг по времени Δt переносятся вдоль характеристик между соседними узлами пространственной решётки. Система описывается набором одночастичных функций распределения f_k , $k = \overline{0, m}$, эволюция которых за шаг по времени Δt описывается следующими уравнениями:

$$f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = f_k(\mathbf{x}, t) + \Omega_k\{f_k\} + \Delta f_k,$$

где \mathbf{c}_k — векторы скоростей псевдочастиц. Гидродинамические переменные (плотность ρ и скорость \mathbf{u}) вычисляются по формулам

$$\rho = \sum_{k=0}^m f_k \quad \text{и} \quad \rho \mathbf{u} = \sum_{k=1}^m \mathbf{c}_k f_k.$$

Оператор столкновений $\Omega_k\{f_k\}$ имеет вид релаксации функций распределения к локальному равновесию [14]:

$$\Omega_k\{f_k\} = (f_k^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}) - f_k(\mathbf{x}, t))/\tau,$$

где τ — безразмерное время релаксации. Равновесные функции распределения $f_k^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u})$ записываются в виде разложения функции распределения Максвелла — Больцмана для дискретных скоростей \mathbf{c}_k частиц

$$f_k^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}) \sim \rho \exp\left(-\frac{(\mathbf{c}_k - \mathbf{u})^2}{2\theta}\right)$$

в ряд по скорости \mathbf{u} до второго порядка [15]:

$$f_k^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}) = \rho w_k \left(1 + \frac{\mathbf{c}_k \mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k \mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2\theta}\right), \quad (1)$$

здесь θ — нормированная кинетическая температура псевдочастиц, которую обычно выбирают равной $\theta = (h/\Delta t)^2/3$, где h — шаг расчётной сетки.

Для учёта изменения функций распределения Δf_k под действием внутренних и внешних сил использовался метод точной разности (EDM) [16, 17]:

$$\Delta f_k = f_k^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - f_k^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}),$$

где изменение скорости за шаг по времени $\Delta \mathbf{u}$ определяется полной силой \mathbf{F} , действующей на вещество в узле, $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{F} \Delta t / \rho$.

Использовались два варианта метода LBE: одномерный D1Q3 с тремя скоростями псевдочастиц и двумерный D2Q9 с девятью скоростями [18]. Коэффициенты в уравнении (1) для одномерного варианта D1Q3 равны $w_0 = 2/3$, $w_{1,2} = 1/6$, а для двумерного D2Q9 имеем $w_0 = 4/9$, $w_{1-4} = 1/9$ и $w_{5-8} = 1/36$.

Компьютерное моделирование фазовых переходов методом LBE представляет собой метод сквозного счёта границ раздела фаз. Вместо разрыва плотности моделируется тонкий переходной слой жидкость-пар, в котором плотность изменяется плавно на масштабах нескольких узлов решётки (аналогично методам сквозного счёта ударных волн в газовой динамике). В этом случае жидкая и газообразная фазы описываются единообразно. Для этого вводятся силы, действующие между веществом в соседних узлах решётки (метод псевдопотенциала). Полная

сила, действующая на узел, имеет вид $\mathbf{F} = -\nabla U$, где псевдопотенциал $U = P(\rho, T) - \rho\theta$ выражается через уравнение состояния [19]. Эти силы обеспечивают поверхностное натяжение в тонком переходном слое между фазами, где плотность вещества изменяется сильно.

В работе [20] был предложен вариант метода ЛВЕ для описания тепломассопереноса в среде с фазовыми переходами. В нём учитываются испарение и конденсация в соответствии с уравнением состояния флюида, теплопроводность вещества, работа сил давления и теплота фазового перехода. Для описания конвективного переноса энергии используется метод пассивного скаляра (дополнительный комплект функций распределения g_k). Уравнения эволюции функций распределения имеют вид

$$g_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \Delta t, t + \Delta t) = g_k(\mathbf{x}, t) + \frac{g_k^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) - g_k(\mathbf{x}, t)}{\tau_E} + \Delta g_k(\mathbf{x}, t).$$

При этом внутренняя энергия единицы объёма равна $E = \sum_{k=0}^m g_k$. Равновесные функции распределения $g_k^{\text{eq}}(\rho, \mathbf{u})$ записываются аналогично уравнению (1). Работа сил давления и перенос тепла за счёт кондуктивной теплопроводности учитываются обычным конечно-разностным методом. В одномерном случае это выглядит следующим образом:

$$\frac{\Delta E_i}{\Delta t} = -p_i \frac{u_{i+1}^* - u_{i-1}^*}{2h} + \lambda \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2},$$

здесь физическая скорость \mathbf{u}^* вычисляется по формуле [21]

$$\rho \mathbf{u}^* = \sum_{k=1}^m \mathbf{c}_k f_k + \mathbf{F} \Delta t / 2,$$

а λ — коэффициент теплопроводности. При этом изменения функций распределения равны

$$\Delta g_k(\mathbf{x}, t) = g_k(\mathbf{x}, t) \frac{\Delta E_i}{E_i}.$$

В качестве уравнения состояния выбрано уравнение состояния Ван-дер-Ваальса. Для плотности, давления и температуры используются приведённые переменные, а для времени и линейных масштабов — решёточные единицы.

1.2. Учёт теплоты фазового перехода для газа Ван-дер-Ваальса

Внутренняя энергия одного моля газа, имеющего уравнение состояния Ван-дер-Ваальса

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2},$$

выражается формулой $E_{\text{mol}} = E_{\text{ideal}} - a/V$ (см. [22]).

Для единицы массы вещества это можно записать в виде $\varepsilon = C_V T - a\rho$ (удельная внутренняя энергия), где C_V — удельная теплоёмкость при постоянном объёме. Теплота фазового перехода представляет собой изменение внутренней энергии вещества в процессе уменьшения плотности от плотности жидкости ρ_L до плотности паров ρ_V при постоянной температуре. Из выражения для внутренней энергии получаем

$$Q = \varepsilon_V - \varepsilon_L = a(\rho_L - \rho_V), \quad (2)$$

здесь ρ_L и ρ_V — равновесные плотности жидкости и пара. Зависимость удельной теплоты фазового перехода от температуры $Q(T)$ учитывается неявно за счёт зависимостей ρ_L и ρ_V от

температуры. Теплота фазового перехода уменьшается до нуля при стремлении температуры к критическому значению.

В [20] предложена формула для изменения внутренней энергии единицы объёма в ячейке переходного слоя за счёт фазового перехода

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\rho_L Q(T) d\rho}{\rho_L - \rho_V dt}.$$

Считается, что теплота фазового перехода Q выделяется в диапазоне изменения плотностей $[\rho_V, \rho_L]$, тогда с учётом уравнения (2) получаем выражение

$$\frac{dE}{dt} = a\rho_L \frac{d\rho}{dt} = -a\rho_L \rho \operatorname{div}(\mathbf{u}^*).$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрены несколько задач с комбинированным (кондуктивным и конвективным) переносом тепла с учётом фазовых переходов жидкость-пар, которые решались методом решётчных уравнений Больцмана. В одномерных постановках численные расчёты по моделям D1Q3 и D2Q9 показали совпадающие результаты.

2.1. Тестовая задача с однородным потоком вещества

Рассмотрена стационарная задача с однородным потоком вещества через область с заданным перепадом температур (рис. 1). Плотность вещества ρ и скорость u постоянны. Распределение температуры в таком течении описывается уравнением сохранения полного потока тепла

$$-\lambda \frac{dT}{dx} + \rho C u T = \text{const},$$

где C — удельная теплоёмкость вещества. Для этой задачи получено аналитическое решение

$$T(x) = T_0 - \Delta T \frac{\exp(\alpha x) - 1}{\exp(\alpha L) - 1},$$

где L — длина области, $\Delta T = T_0 - T_L$ — перепад температуры, коэффициент $\alpha = \rho C u / \lambda$. Безразмерным параметром является число Пекле $Pe = \alpha L$.

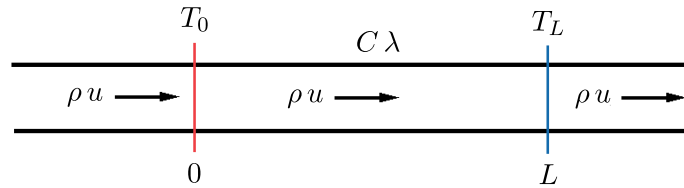


Рис. 1. Постановка задачи с однородным потоком вещества

Поток тепла за счёт теплопроводности (кондуктивный поток) равен

$$q_{\text{cond}} = -\lambda \frac{dT}{dx} = \rho C u \frac{\Delta T \exp(\alpha x)}{\exp(\alpha L) - 1},$$

а поток за счёт переноса энергии движущимся веществом (конвективный)

$$q_{\text{conv}} = \rho C u \left(T_0 - \frac{\Delta T (\exp(\alpha x) - 1)}{\exp(\alpha L) - 1} \right).$$

Действительно, при этом полный поток вдоль координаты x постоянный:

$$q_{\text{total}} = \rho C u \left(T_0 + \frac{\Delta T}{\exp(\alpha L) - 1} \right).$$

На рис. 2 показано сравнение аналитического и численного решения методом ЛВЕ при разных значениях коэффициента теплопроводности $\lambda = 2$ ($Pe = 1.12$) и $\lambda = 20$ ($Pe = 0.112$). При этом цветные кривые (ЛВЕ расчёты) наложены на теоретические кривые (чёрный пунктир) и совпадают с точностью до толщины линий. При увеличении теплопроводности λ распределения температуры и величин потоков стремятся к линейным зависимостям.

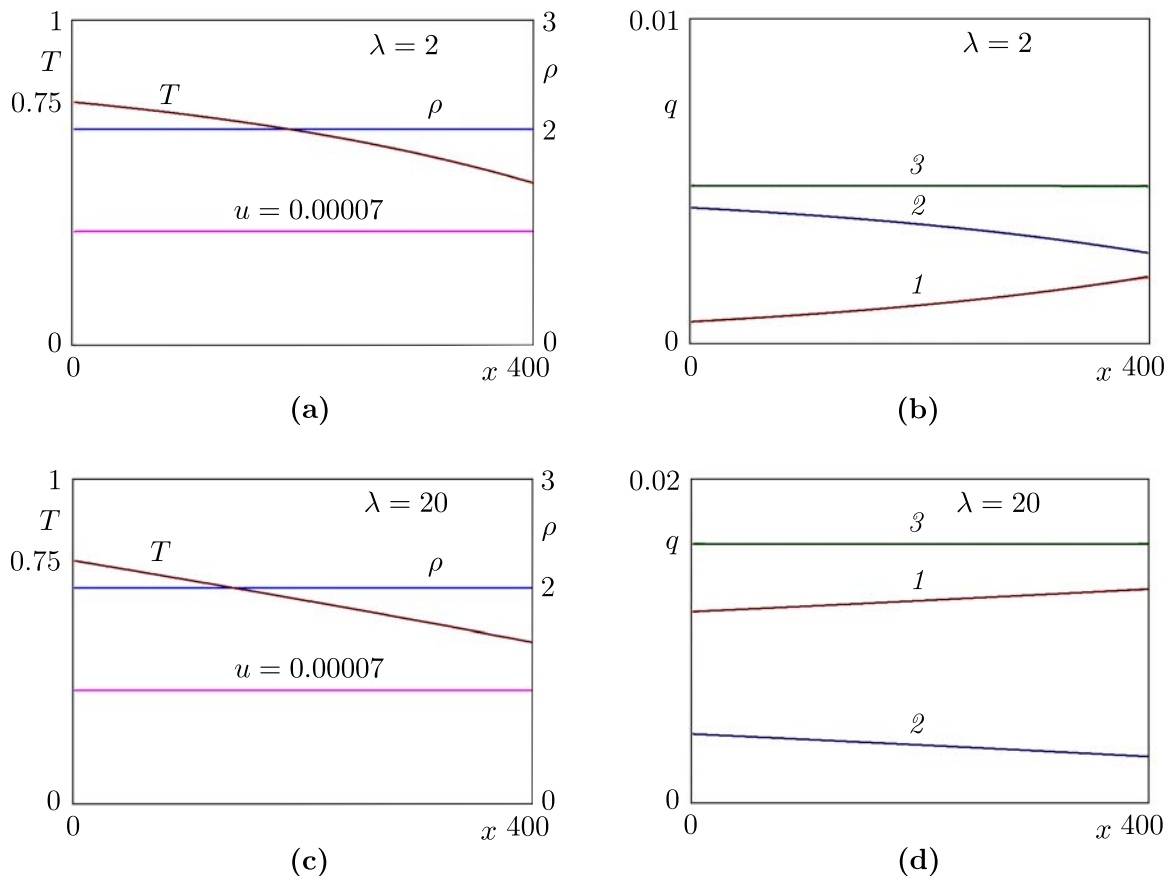


Рис. 2. Графики температуры, плотности и скорости (а), (с).
 Графики кондуктивного (кривые 1), конвективного (кривые 2)
 и полного (кривые 3) потоков (б), (d).

Плотность вещества $\rho = 2$, скорость $u = 0.00007$, $T_0 = 0.75$, $T_L = 0.5$, $C = 40$, $\tau_E = 0.5003$

Необходимо отметить, что для внутренней энергии в методе ЛВЕ есть диффузия, связанная со временем релаксации τ_E . В общем случае эффективный коэффициент теплопроводности есть сумма $\lambda_{\text{eff}} = \lambda + \rho C (\tau_E - 0.5)/3$. При значениях $\tau_E \rightarrow 0.5$ такой диффузией можно пренебречь.

2.2. Стационарная задача с фазовым переходом на границе жидкости

От предыдущей задачи постановка отличается тем, что происходит испарение жидкости. Задача рассматривается в системе отсчёта границы раздела жидкость-пар. Слева в расчётную область втекает жидкость с температурой T_0 . Для жидкой фазы задаётся коэффициент теплопроводности λ . Значение коэффициента теплопроводности пара принято в 20 раз меньше. На правой границе области $x = L$ обеспечивается отток пара с заданной скоростью u_0 .

При этом потоки массы вытекающей жидкости и массы вытекающего пара равны. Для этого на правой границе области задаются граничные условия для функций распределения LBM f_k . В одномерном случае это соответствует [3]

$$f_{-1}(n_x + 1) = \beta f_1(n_x), \quad \text{где} \quad \beta = \frac{1 - 3u_0 + 3u_0^2}{1 + 3u_0 + 3u_0^2}.$$

Для процесса испарения $u_0 > 0$ и соответственно $\beta < 1$. Через некоторое время устанавливается стационарное распределение температуры и плотности. Результаты показаны на рис. 3. На поверхности плёнки происходит поглощение тепла из-за скрытой теплоты испарения на границе раздела фаз (кривые 1 на рис. 3(а,с)). При увеличении коэффициента теплопроводности потоки тепла становятся больше несмотря на то, что перепад температуры уменьшается.

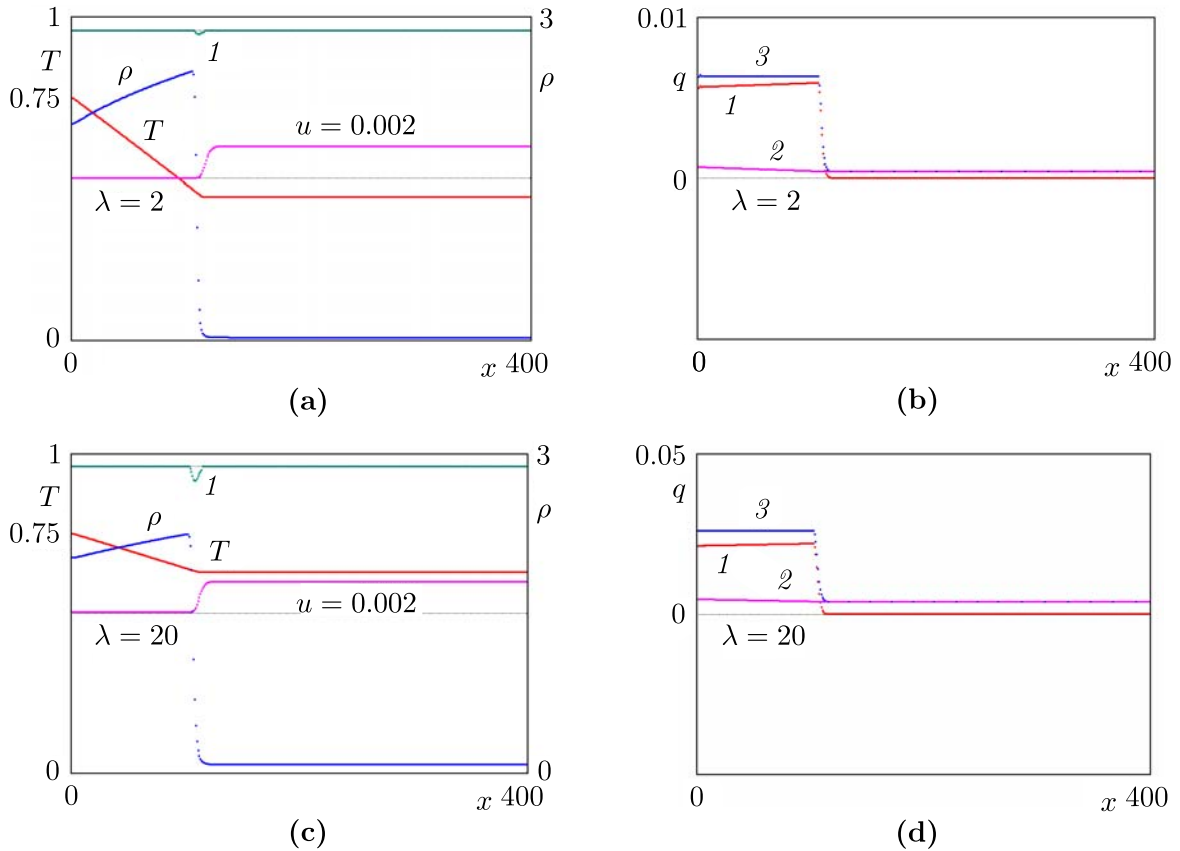


Рис. 3. Графики температуры, плотности и скорости (а), (с).
Графики кондуктивного (кривые 1), конвективного (кривые 2)
и полного (кривые 3) потоков (b), (d); $C_V = 40$;
 $\lambda = 2$, $\tau_E = 0.505$ (а), (b); $\lambda = 20$, $\tau_E = 0.501$ (с), (d)

2.3. Плёнка жидкости на поверхности нагретой подложки с оттоком пара

В начальном состоянии на горизонтальной поверхности подложки создавалась плёнка жидкой фазы плотностью ρ , а над ней — насыщенный пар. Задавалось небольшое поле тяжести с ускорением свободного падения, равным $g = 10^{-7}$ в решёточных единицах. Во всей области задавалась постоянная температура T_0 и скорость вещества u , равная нулю. Затем температура подложки ($y = 0$) скачком увеличивалась $T = T_0 + \Delta T$. За счёт теплопроводности жидкости плёнка начинает прогреваться. На верхней границе области $y = L$ обеспечивается отток пара с заданной скоростью u_0 . При этом в одномерном случае между поверхностью

плёнки и границей области через некоторое время устанавливается квазистационарный режим истечения пара, т. е. создаётся однородный поток пара с постоянной скоростью, плотностью и температурой (рис. 4(a)).

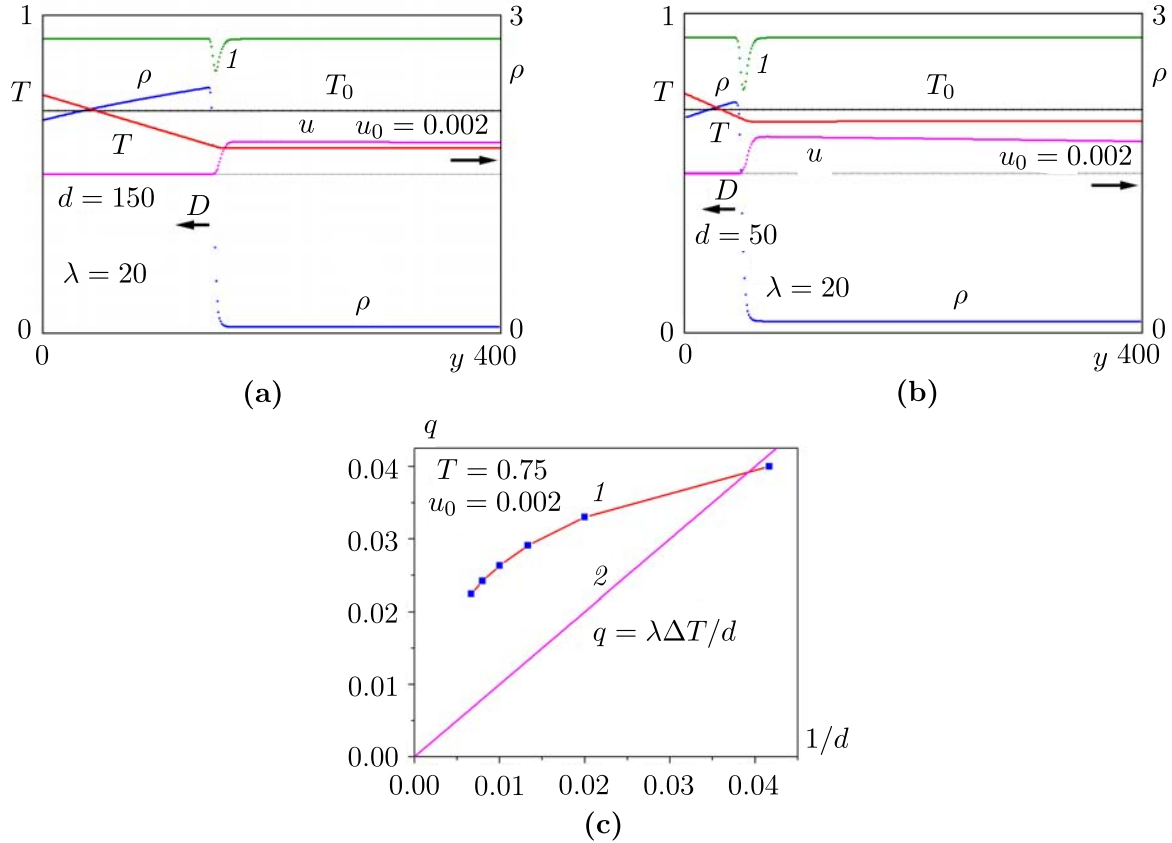


Рис. 4. Квазистационарный режим течения при оттоке пара на верхней границе (а), (b); $u_0 = 0.002$. Начальное состояние $T_0 = 0.7$, $u = 0$. Текущая толщина плёнки 150 (а) и 50 (b). Температура подложки $T = 0.75$. Коэффициент теплопроводности $\lambda = 20$.
 Зависимость потока тепла с подложки q от текущей толщины испаряющейся плёнки жидкости d (c)

Поток тепла от нагретой подложки к поверхности плёнки жидкости зависит от её теплопроводности, толщины и перепада температур. Для тонких плёнок и относительно высокой теплопроводности жидкости распределение температуры по толщине плёнки в квазистационарном режиме испарения близкое к линейному (рис. 4(a,b)). На поверхности плёнки происходит поглощение тепла из-за скрытой теплоты испарения на границе раздела фаз (кривые 1 на рис. 4(a,b)). Поток тепла, отводимый от подложки, зависит от скорости испарения жидкости на поверхности, т. е. от скорости оттока пара от плёнки. При увеличении скорости оттока пара тепловой поток с подложки увеличивается. Поток тепла зависит также от толщины плёнки d (рис. 4(c)). При постоянном перепаде температур зависимость от $1/d$ должна быть линейная $q = \lambda \Delta T / d$ (кривая 2). Однако перепад температуры на плёнке тоже зависит от её толщины (рис. 4(a,b)), поэтому зависимость от $1/d$ получается нелинейной (кривая 1 на рис. 4(c)).

2.4. Плёнка жидкости на поверхности нагретой подложки с конденсацией пара на верхней границе области

В начальном состоянии на поверхности подложки и на верхней границе создавались плёнки жидкой фазы, а между ними насыщенный пар (рис. 5(a)). Задавалось небольшое поле тяжести с ускорением свободного падения равным $g = 10^{-7}$ в решёточных единицах. Во всей

области задавалась постоянная начальная температура T_0 и скорость u , равная нулю. Затем температура подложки скачком увеличивалась $T = T_0 + \Delta T$, а на верхней границе области $y = L$ (конденсатор) уменьшалась до $T_{\text{кон}}$. Через некоторое время устанавливается квазистационарный режим, при котором происходит испарение плёнки на подложке с поглощением скрытой теплоты испарения и конденсация пара на поверхности плёнки жидкости у холодной границы области с выделением скрытой теплоты конденсации (кривая 1 на рис. 5(b)). Фактически это модель тепловых трубок, широко используемых в технике для охлаждения оборудования и микроэлектроники.

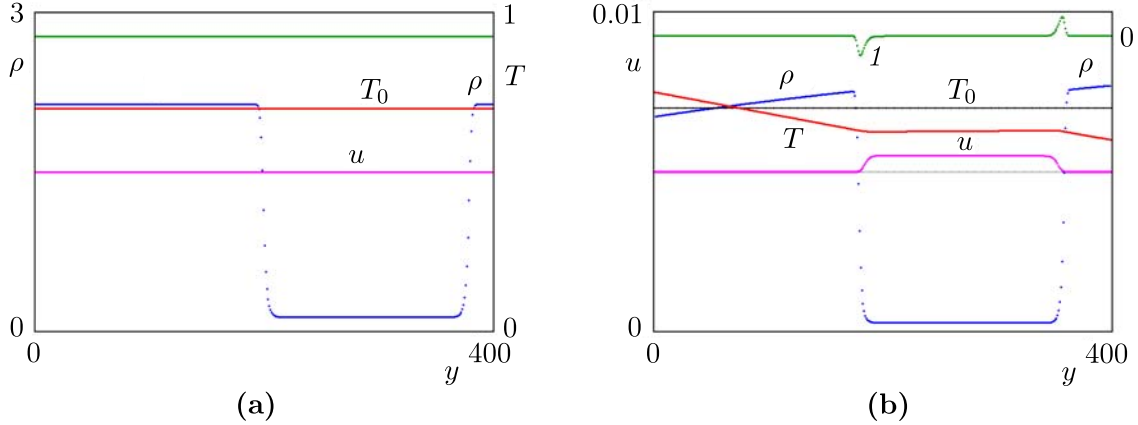


Рис. 5. Начальное состояние: $T_0 = 0.7$, $u = 0$ (a). Квазистационарный режим течения (b). Включены нагрев подложки $T = 0.75$, конденсатор пара $T_{\text{кон}} = 0.6$ и теплопроводность $\lambda = 20$

2.5. Капля жидкости на поверхности нагретой подложки с конденсацией пара на верхней границе области

На поверхность подложки помещалась капля жидкости «полусферической» формы, на верхней границе создавалась плёнка жидкой фазы, а между ними «насыщенный» пар (рис. 6(a)). Задавалось небольшое поле тяжести с ускорением свободного падения, равным $g = 10^{-7}$ в решёточных единицах. Чтобы обеспечить нейтральное смачивание подложки, в двумерном случае вводятся силы взаимодействия флюида с тремя соседними узлами твёрдой поверхности [23, 24]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^3 w_j B \Phi_{\text{solid}}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j.$$

Здесь функция Φ_{solid} в узле твёрдой поверхности принимает значение, равное значению функции $\Phi(\mathbf{x}) = \sqrt{-U}$ в ближайшем узле флюида, w_j — весовые коэффициенты. Параметр B определяет смачиваемость поверхности и контактный угол. Для нейтральной смачиваемости $B = 1$. Недостатком методов [23, 24] при изменении смачиваемости является то, что в прилегающем тонком слое жидкости изменяется её плотность. В данной работе для возможности изменения значений контактных углов предложен новый метод, лишённый этого недостатка, в котором по сравнению с нейтральным смачиванием при $B = 1$ вводятся дополнительно только горизонтальные составляющие сил, действующих на соседние с подложкой узлы флюида:

$$F_x(\mathbf{x}) = \beta \Phi(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^3 \Phi_{\text{solid}}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_{jx}.$$

Множитель $\beta = 0$ соответствует нейтральному смачиванию, $\beta < 0$ соответствует гидрофильным поверхностям, а $\beta > 0$ — гидрофобным.

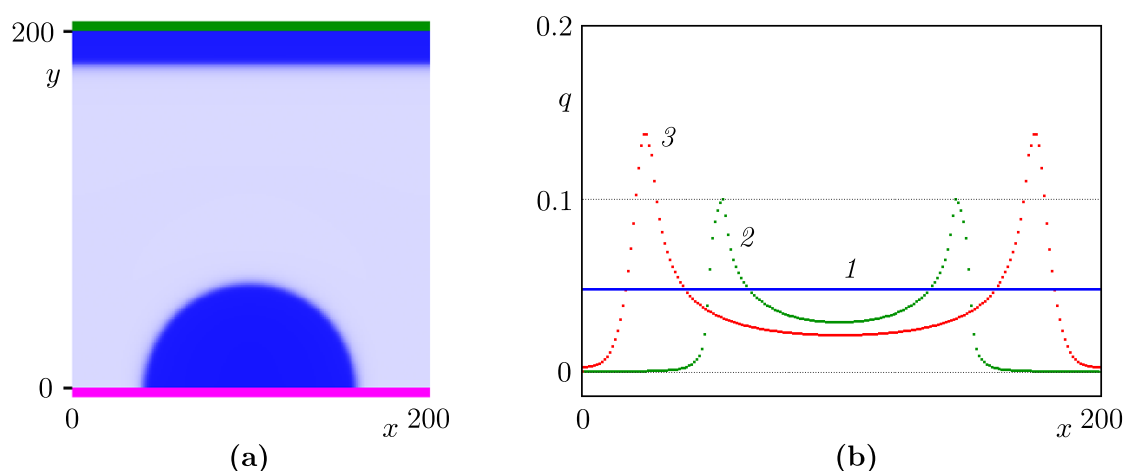


Рис. 6. Капля на твёрдой подложке (а). Начальные радиус капли $R = 60$, угол смачивания 90° , $T_0 = 0.7$, $u = 0$; размер 2D расчётной сетки 200×200 .
 Распределение теплового потока по подложке (b): 1 – плоская плёнка, 2 – капля с нейтральным смачиванием, 3 – капля на гидрофильной поверхности ($\beta = -0.3$). Температура подложки $T = 0.75$; температура конденсатора пара $T_{\text{con}} = 0.6$; коэффициент теплопроводности жидкости $\lambda = 20$

В начальном состоянии во всей области $L \times L$ задавалась постоянная температура T_0 и скорость u , равная нулю. Затем температура подложки скачком увеличивалась до $T(x, 0) = T_0 + \Delta T$, а на верхней границе области при $y = L$ уменьшалась до $T_{\text{con}} < T_0$. По координате x использовались периодические граничные условия для функций распределения $f_k(L, y) = f_k(0, y)$ и $g_k(L, y) = g_k(0, y)$. После этого происходит прогрев капли и испарение жидкости с её поверхности. Сверху области происходит конденсация пара на охлаждаемой плёнке. На рис. 6(a) показано начальное распределение плотности флюида.

Тепловой поток от подложки q значительно больше в окрестности контактных линий капель (рис. 6(b), кривые 2 и 3), что соответствует экспериментам [4–8]. При этом уменьшение контактного угла увеличивает вклад контактных линий (кривая 3).

Суммарный тепловой поток от подложки в двухмерном случае вычисляется следующим образом:

$$q_{\text{total}} = - \int_0^L \lambda_{\text{eff}}(x, 0) \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} dx.$$

Для капли с нейтральным смачиванием он равен $q_{\text{total}} = 4.9$ (кривая 2), а для капли на гидрофильной поверхности $q_{\text{total}} = 7.6$ (кривая 3). Эти значения меньше, чем теплоотвод для плоской плёнки того же объёма $q_{\text{total}} = 9.8$ (кривая 1). Таким образом, уменьшение угла смачивания увеличивает теплоотвод в окрестности контактной линии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено моделирование методом решёточных уравнений Больцмана процесса охлаждения подложки в условиях испарения чистого пара с поверхности плёнки и капель жидкости. Предложен новый метод задания граничных условий на плоской поверхности для моделирования контактных углов смачивания в методе ЛВЕ. Показано, что процесс охлаждения подложки зависит от толщины плёнки и скорости удаления пара с её поверхности. Рассмотрены случаи принудительного оттока и конденсации пара на охлаждаемом конденсаторе. Показано, что тепловой поток от подложки сильно увеличивается в окрестности контактных линий капель. Проведено сравнение тепловых потоков при испарении плёнки и капель на подложке с разной

смачиваемостью. Суммарный теплоотвод от подложки для капель оказался меньше, чем для плоской плёнки того же объёма и примерно той же площади поверхности.

Авторы благодарны А. А. Черевко, старшему научному сотруднику Института гидродинамики СО РАН, за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hirth J.P., Pound G.M.* Condensation and Evaporation. London: Pergamon Press, 1963.
2. *Kupershtokh A.L.* An evaporation flux of pure vapor in the method of lattice Boltzmann equations // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 2057. Article 012070; DOI: 10.1088/1742-6596/2057/1/012070
3. *Куперштох А.Л., Альянов А.В.* Испарение и конденсация чистого пара на поверхности жидкости в методе решёточных уравнений Больцмана // Вычисл. методы и программирование. 2022. Т. 23, № 4. С. 311–327; DOI: 10.26089/NumMet.v23r419
4. *Marchuk I., Karchevsky A., Surtayev A., Kabov O.* Heat flux at the surface of metal foil heater under evaporating sessile droplets // Internat. J. Aerospace Engrg. 2015. Article 391036 (1-5); DOI: 10.1155/2015/391036
5. *Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A.* Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line // Appl. Math. Model. 2016. V. 40, N 2. P. 1029–1037.
6. *Gibbons M.J., Howe C.M., Di Marco P., Robinson A.J.* Local heat transfer to an evaporating sessile droplet in an electric field // J. Phys. Conf. Ser. 2016. V. 745, N 3. Article 032066; DOI: 10.1080/1742-6596/745/3/032066
7. *Ajaev V.S., Kabov O.A.* Heat and mass transfer near contact lines on heated surfaces // Internat. J. Heat Mass Transfer. 2017. V. 108. P. 918–932; DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.079
8. *Чеверда В.В., Карчевский А.Л., Марчук И.В., Кабов О.А.* Плотность теплового потока в области контактной линии капли, лежащей на горизонтальной поверхности тонкой нагреваемой фольги // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 5. С. 825–828; https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=171733&ARTICLE_ID=171749
9. *McNamara G.R., Zanetti G.* Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 61, N 20. P. 2332–2335; DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.2332
10. *Higuera F.J., Jiménez J.* Boltzmann approach to lattice gas simulations // Europhys. Lett. 1989. V. 9, N 7. P. 663–668; DOI: 10.1209/0295-5075/9/7/009
11. *Aidun C.K., Clausen J.R.* Lattice-Boltzmann method for complex flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2010. V. 42. P. 439–472; DOI: 10.1146/annurev-fluid-121108-145519
12. *Kupershtokh A.L., Medvedev D.A., Karpov D.I.* On equations of state in a lattice Boltzmann method // Comput. Math. Appl. 2009. V. 58, N 5. P. 965–974; DOI: 10.1016/j.camwa.2009.02.024
13. *Kupershtokh A.L.* Simulation of flows with liquid–vapor interfaces by the lattice Boltzmann method // Vestnik NGU. Ser. Math. Mech. Inform. 2005. V. 5, N 3. P. 29–42.
14. *Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.K.* A model for collision process in gases. I. Small amplitude process in charged and neutral one-component system // Phys. Rev. 1954. V. 94, N 3. P. 511–525; DOI: 10.1103/PhysRev.94.511
15. *Koelman J.M.V.A.* A simple lattice Boltzmann scheme for Navier–Stokes fluid flow // Europhys. Lett. 1991. V. 15, N 6. P. 603–607; DOI: 10.1209/0295-5075/15/6/007
16. *Kupershtokh A.L.* New method of incorporating a body force term into the lattice Boltzmann equation // Proc. 5th Internat. EHD Workshop. Poitiers, 2004. P. 241–246.
17. *Kupershtokh A.L.* Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59, N 7. P. 2236–2245; DOI: 10.1016/j.camwa.2009.08.058
18. *Qian Y.H., d’Humières D., Lallemand P.* Lattice BGK models for Navier–Stokes equation // Europhys. Lett. 1992. V. 17, N 6. P. 479–484; DOI: 10.1209/0295-5075/17/6/001
19. *Qian Y.H., Chen S.* Finite size effect in lattice-BGK models // Internat. J. Model. Phys. C. 1997. V. 8, N 4. P. 763–771; DOI: 10.1142/S0129183197000655

20. *Kupershtokh A.L., Medvedev D.A., Griбанov I.I.* Thermal lattice Boltzmann method for multiphase flows // *Phys. Rev. E.* 2018. V. 98, N 2. Article 023308; DOI: 10.1103/PhysRevE.98.023308
21. *Ginzburg I., Adler P.M.* Boundary flow condition analysis for the three-dimensional lattice Boltzmann model // *J. Phys. II France.* 1994. V. 4, N 2. P. 191–214; DOI: 10.1051/jp2:1994123
22. *Ландау Л.Д., Лифшиц И.М.* Статистическая физика. Часть I. М.: Наука, 1976.
23. *Куперштох А.Л., Медведев Д.А.* Перфорация тонких жидких плёнок под действием неоднородного электрического поля // *Прикл. механика и техн. физика.* 2022. Т. 63, № 6. С. 12–20; DOI: 10.1134/S0021894422060025
24. *Li Q., Luo K.H., Kang Q.J., Chen Q.* Contact angles in the pseudopotential lattice Boltzmann modeling of wetting // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 90, N 5. Article 053301; DOI: 10.1103/PhysRevE.90.053301

UDC 519.63:532.22:532.64:536.42

SIMULATION OF SUBSTRATE COOLING DURING EVAPORATION OF PURE VAPOR FROM THE SURFACE OF A THIN LIQUID FILM AND DROPLETS© 2023 A. L. Kupershtokh^a, D. A. Medvedev^b, A. V. Alyanov^c*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Acad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^asknew@mail.ru, ^bdmedv@hydro.nsc.ru, ^caljanov-ant@yandex.ru

Received 17.04.2023, revised 18.04.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. A numerical study of the process of cooling the substrate under the conditions of evaporation of pure vapor from the surface of the film and a droplet of liquid was carried out. The lattice Boltzmann method was used for modeling of such a two-phase system, taking into account the thermal conductivity of the substance and evaporation. The van der Waals equation of state was used, which describes the liquid-vapor phase transition. A new method for setting the boundary conditions on a flat surface for modeling the contact wetting angles in the lattice Boltzmann method is proposed. During evaporation and condensation, the latent heat of the phase transition was taken into account. It is shown that the process depends on the film thickness and the rate of vapor removal from its surface. The cases of forced outflow of vapor, as well as the method of vapor condensation on a cooled condenser, are considered. It is shown that the heat flux from the substrate increases sharply in the vicinity of the droplet contact lines. A comparison is made of the heat fluxes during the evaporation of a film and droplets on a substrate with different wettability.

Keywords: lattice Boltzmann method, phase transitions, dynamics of multiphase media, evaporation, heat flux, mesoscopic methods, computer simulation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.306

REFERENCES

1. Hirth J.P., Pound G.M. Condensation and Evaporation. London: Pergamon Press, 1963.
2. Kupershtokh A.L. An evaporation flux of pure vapor in the method of lattice Boltzmann equations. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, Vol. 2057, article 012070; DOI: 10.1088/1742-6596/2057/1/012070
3. Kupershtokh A.L., Alyanov A.V. Isparenie i kondensatsiya chistogo para na poverhnosti zhidkosti v metode reshetochnykh uravnenii Bol'cmana. *Comput. Meth. Program.*, 2022, Vol. 23, No. 4. pp. 311–327 (in Russian); DOI: 10.26089/NumMet.v23r419
4. Marchuk I., Karchevsky A., Surtaev A., Kabov O. Heat flux at the surface of metal foil heater under evaporating sessile droplets. *Internat. J. Aerospace Engrg.*, 2015, article 391036 (1-5); DOI: 10.1155/2015/391036
5. Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line. *Appl. Math. Model.*, 2016, Vol. 40, No. 2, pp. 1029–1037.
6. Gibbons M.J., Howe C.M., Di Marco P., Robinson A.J. Local heat transfer to an evaporating sessile droplet in an electric field. *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, Vol. 745, No. 3, article 032066; DOI: 10.1080/1742-6596/745/3/032066
7. Ajaev V.S., Kabov O.A. Heat and mass transfer near contact lines on heated surfaces. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2017, Vol. 108, pp. 918–932; DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.11.079

8. Cheverda V.V., Karchevskij A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Plotnost' teplovogo potoka v oblasti kontaktnoi linii kapli, lezhashhei na gorizonta'noi poverhnosti tonkoi nagrevaemoi fol'gi [The heat flux density in the area of the contact line of the drop lying on the horizontal surface of the thin heated foil]. *Thermophys. Aeromech.*, 2017, Vol. 24, No. 5, pp. 825–828 (in Russian); https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=171733&ARTICLE_ID=171749
9. McNamara G.R., Zanetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, Vol. 61, No. 20, pp. 2332–2335; DOI: 10.1103/PhysRevLett.61.2332
10. Higuera F.J., Jiménez J. Boltzmann approach to lattice gas simulations. *Europhys. Lett.*, 1989, Vol. 9, No. 7, pp. 663–668; DOI: 10.1209/0295-5075/9/7/009
11. Aidun C.K., Clausen J.R. Lattice-Boltzmann method for complex flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2010, Vol. 42, pp. 439–472; DOI: 10.1146/annurev-fluid-121108-145519
12. Kupershtokh A.L., Medvedev D.A., Karpov D.I. On equations of state in a lattice Boltzmann method. *Comput. Math. Appl.*, 2009, Vol. 58, No. 5, pp. 965–974; DOI: 10.1016/j.camwa.2009.02.024
13. Kupershtokh A.L. Simulation of flows with liquid–vapor interfaces by the lattice Boltzmann method. *Vestnik NGU. Ser. Math. Mech. Inform.*, 2005, Vol. 5, No. 3, pp. 29–42.
14. Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M.K. A model for collision process in gases. I. Small amplitude process in charged and neutral one-component system. *Phys. Rev.*, 1954, Vol. 94, No. 3, pp. 511–525; DOI: 10.1103/PhysRev.94.511
15. Koelman J.M.V.A. A simple lattice Boltzmann scheme for Navier–Stokes fluid flow. *Europhys. Lett.*, 1991, V. 15, No. 6, pp. 603–607; DOI: 10.1209/0295-5075/15/6/007
16. Kupershtokh A.L. New method of incorporating a body force term into the lattice Boltzmann equation. *Proc. 5th Internat. EHD Workshop. Poitiers*, 2004, pp. 241–246.
17. Kupershtokh A.L. Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations. *Comp. Math. Appl.*, 2010, Vol. 59, No. 7, pp. 2236–2245; DOI: 10.1016/j.camwa.2009.08.058
18. Qian Y.H., d'Humières D., Lallemand P. Lattice BGK models for Navier–Stokes equation. *Europhys. Lett.*, 1992, Vol. 17, No. 6, pp. 479–484; DOI: 10.1209/0295-5075/17/6/001
19. Qian Y.H., Chen S. Finite size effect in lattice-BGK models. *Internat. J. Model. Phys. C.*, 1997, Vol. 8, No 4, pp. 763–771; DOI: 10.1142/S0129183197000655
20. Kupershtokh A.L., Medvedev D.A., Gribanov I.I. Thermal lattice Boltzmann method for multiphase flows. *Phys. Rev. E.*, 2018, Vol. 98, No. 2, article 023308; DOI: 10.1103/PhysRevE.98.023308
21. Ginzburg I., Adler P.M. Boundary flow condition analysis for the three-dimensional lattice Boltzmann model. *J. Phys. II France*, 1994, Vol. 4, No. 2, pp. 191–214; DOI: 10.1051/jp2:1994123
22. Landau L.D., Lifshic I.M. *Statisticheskaya Fizika. V. I.* Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
23. Kupershtoh A.L., Medvedev D.A. Perforaciya tonkih zhidkih plenok pod dejstviem neodnorodnogo elektricheskogo polya. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 2022, Vol. 63, No. 6, pp. 12–20 (in Russian); DOI: 10.1134/S0021894422060025
24. Li Q., Luo K.H., Kang Q.J., Chen Q. Contact angles in the pseudopotential lattice Boltzmann modeling of wetting. *Phys. Rev. E.*, 2014, Vol. 90, No. 5, article 053301; DOI: 10.1103/PhysRevE.90.053301

УДК 519.21

О ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ УРОВНЯ ДЛЯ ПРОЦЕССА ВОЗРАСТАНИЯ-УБЫВАНИЯ

© 2023 В. И. Лотов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*

E-mail: lotov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 21.02.2023 г.; после доработки 01.03.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Рассматривается случайный процесс, траектории которого характеризуются поочерёдным линейным ростом и линейным убыванием на промежутках времени случайной длины, при этом между ростом и убыванием процесс может также сохранять неизменным своё значение в течение случайных промежутков времени. Этот процесс может служить математической моделью накопления и расходования материалов, когда сочетаются случайные промежутки времени для накопления, расходования и перерывов в функционировании. Изучается среднее значение EN времени первого достижения фиксированного уровня траекториями этого процесса, включая нахождение точных формул для EN , оценку сверху в виде неравенства и асимптотику EN в условиях неограниченно удаляющегося уровня.

Ключевые слова: стохастические модели управления запасами, случайный процесс, случайное блуждание, время первого достижения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.307

Настоящая работа имеет целью предложить некую стохастическую модель управления запасами и рассчитать некоторые её параметры с помощью современных вероятностных подходов в граничных задачах для случайных блужданий.

Вводимый ниже процесс призван служить математической моделью накопления и расходования материалов в тех ситуациях, когда имеют место случайные промежутки времени для накопления, расходования и перерывов в функционировании.

В общем виде модель выглядит следующим образом.

Пусть $X(t)$ — количество продукта в момент времени t . Предполагается, что в течение некоторого промежутка времени случайной длины этот процесс сохраняет своё значение, что соответствует отсутствию расходования и новых поступлений продукта. Затем также в течение случайного времени происходит убывание количества имеющегося продукта с линейной скоростью в связи с его расходованием, после чего некоторое случайное время значение процесса вновь остаётся постоянным, что означает перерыв в функционировании системы. Затем начинается линейный рост количества продукта (уже с другой скоростью), связанный с новыми поступлениями, и это также происходит в течение промежутка времени случайной длительности. Потом опять процесс задерживается на случайное время на уже достигнутой позиции и вновь, как и выше, переходит к расходованию продукта по той же схеме.

Изучению подлежит среднее значение EN времени первого достижения некоторого заданного уровня траекторией процесса $X(t)$. Получены точные формулы для EN в разных ситуациях, найдена оценка сверху для EN в виде неравенства и установлена асимптотика EN в условиях неограниченно удаляющегося уровня (теоремы 1–3 и их следствия).

Отмеченные на рисунке случайные величины χ и T будут введены позже.

Целью работы является:

- (а) нахождение точных значений для $\mathbf{E}N$ и получение оценки сверху в терминах исходных распределений;
- (б) нахождение главного члена асимптотики $\mathbf{E}N$ при $b \rightarrow \infty$.

2. ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ $\mathbf{E}N$

Предположим, что существуют моменты $m_j = \mathbf{E}\tau_j^{(1)}$, $e_j = \mathbf{E}s_j^{(1)}$, $j = 1, 2$. Введём случайные величины $Y_i = k_2\tau_2^{(i)} - k_1\tau_1^{(i)}$, $i \geq 1$, и будем предполагать везде в дальнейшем, что $m = \mathbf{E}Y_1 = k_2m_2 - k_1m_1 > 0$. Как известно, при условии $\mathbf{E}Y_1 = 0$ математическое ожидание $\mathbf{E}N$ не существует, а при $\mathbf{E}Y_1 < 0$ с положительной вероятностью уровень b не достигается.

Обозначим

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n, \quad \eta = \eta(b) = \min\{n \geq 1 : S_n \geq b\}, \quad \chi = \chi(b) = S_{\eta(b)} - b,$$

и пусть $d = m_1 + m_2 + e_1 + e_2$.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\mathbf{E}N = \frac{d \mathbf{E}S_\eta}{m} - \frac{\mathbf{E}\chi}{k_2}. \quad (1)$$

Доказательство. Случайная величина η является моментом останковки для последовательности $\{Y_n\}$ и $\mathbf{E}\eta < \infty$, поэтому в силу тождества Вальда имеет место $\mathbf{E}S_\eta = m\mathbf{E}\eta$.

Траекторию процесса можно разбить на блоки. Каждый из них начинается с участка постоянства, затем идёт участок линейного убывания, затем опять участок постоянства и потом участок линейного роста. Обозначим через l_i продолжительность по времени i -го блока:

$$l_i = s_1^{(i)} + \tau_1^{(i)} + s_2^{(i)} + \tau_2^{(i)}, \quad \text{здесь } \mathbf{E}l_i = d,$$

и пусть

$$t_k = l_1 + \dots + l_k, \quad t_0 = 0.$$

Нетрудно видеть, что $X(t_i) = S_i$, $i \geq 1$. Если $\eta = k$, то на интервале времени $[t_{k-1}, t_k]$ процесс $X(t)$ линейно растёт с коэффициентом k_2 , пересекая в некоторой точке $N \leq t_k$ уровень b и достигая затем максимального значения в точке t_k , равного $S_k = S_\eta$. Тем самым соотношением $X(T) = S_\eta$ определяется случайная величина T и $X(T) - b = \chi$. Ясно, что $\chi/(T - N) = k_2$ (см. рисунок), т. е. $\mathbf{E}N = \mathbf{E}T - \mathbf{E}\chi/k_2$.

Остаётся заметить, что $T = t_\eta$, и в этой ситуации вновь применимо тождество Вальда:

$$\mathbf{E}T = \mathbf{E}l_1 \mathbf{E}\eta = \frac{\mathbf{E}l_1 \mathbf{E}S_\eta}{m} = \frac{d \mathbf{E}S_\eta}{m}.$$

Теорема доказана. □

Таким образом, задача сводится к нахождению величины $\mathbf{E}S_\eta = b + \mathbf{E}\chi$.

Следствие 1. *Предположим, что случайная величина $\tau_2^{(1)}$ имеет показательное распределение с параметром α . Тогда*

$$\mathbf{E}N = \frac{m_1 + 1/\alpha + e_1 + e_2}{k_2/\alpha - m_1} \left(b + \frac{k_2}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha}. \quad (2)$$

Доказательство. Случайная величина $k_2\tau_2^{(1)}$ распределена по показательному закону с параметром α/k_2 , на функцию распределения $F(y) = \mathbf{P}(k_1\tau_1^{(1)} < y)$ никакие ограничения не накладываются. В этих условиях $Y_1 = k_2\tau_2^{(1)} - k_1\tau_1^{(1)}$ обладает плотностью f , для которой при $t > 0$ по формуле свёртки имеем

$$f(t) = \int_{-\infty}^0 \frac{\alpha}{k_2} \exp\left\{-\frac{\alpha}{k_2}(t-y)\right\} dF(y) = C \exp\left\{-\frac{\alpha}{k_2}t\right\},$$

где C — константа. Отсюда сразу следует, что вне зависимости от конкретного вида распределения $\tau_1^{(1)}$ перескок $\chi(b)$ при всех $b \geq 0$ также имеет показательное распределение с параметром α/k_2 и $\mathbf{E}\chi = k_2/\alpha$.

Подстановка полученного значения в (1) приводит к (2). □

Для нахождения $\mathbf{E}\chi$ в явном виде рассмотренная в следствии 1 ситуация является наиболее простой и, по-видимому, чаще всего встречающейся в приложениях. Попытка найти явные формулы для $\mathbf{E}\chi$ в более общей ситуации приводит к весьма сложным исследованиям. Далее мы покажем, как это можно сделать.

Пусть по-прежнему $\mathbf{E}Y_1 > 0$ и

$$\mathbf{E}(e^{\lambda Y_1}; Y_1 > 0) = \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)}, \quad \operatorname{Re}\lambda = 0, \quad (3)$$

где $R(\lambda)$ и $P(\lambda)$ — полиномы. Как следует из [1, § 19, лемма 1], для выполнения (3) достаточно потребовать, чтобы функция $\mathbf{E}(\exp\{\lambda\tau_2^{(1)}\}; \tau_2^{(1)} > 0)$ была рациональной. Представление (3) имеет место, к примеру, когда плотность распределения Y_1 на положительной полуоси является конечной линейной комбинацией экспоненциальных плотностей или их свёрток, что является существенным обобщением ситуации, рассмотренной в следствии 1.

Займёмся сначала нахождением функции $\mathbf{E}\exp\{\lambda\chi\}$ при выполнении условия (3).

Предположим, что степень $P(\lambda)$ равна k , тогда степень $R(\lambda)$ обязана быть меньше k , поскольку $\mathbf{E}(e^{\lambda Y_1}; Y_1 > 0) \rightarrow 0$, если $\lambda = \operatorname{Re}\lambda \rightarrow -\infty$. Функция $\mathbf{E}(\exp\{\lambda Y_1\}; Y_1 > 0)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$ и непрерывна на мнимой оси, поэтому нули полинома $P(\lambda)$ должны лежать в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$.

Пусть $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}(\exp\{\lambda Y_1\})$. Определяющую роль в дальнейших рассуждениях будут играть нули и полюса функции $1 - z\varphi(\lambda)$ при $|z| < 1$, лежащие в правой полуплоскости. Здесь следует сделать замечание относительно равенства (3). Математическое ожидание $\mathbf{E}(e^{\lambda Y_1}; Y_1 > 0)$ имеет смысл при условии, что $\operatorname{Re}\lambda$ строго меньше наименьшего корня многочлена $P(\lambda)$. Обозначим его p_1 , он с необходимостью является вещественным. Однако правая часть в (3), а вместе с ней и вся функция $\varphi(\lambda)$ могут быть аналитически продолжены в правую полуплоскость. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении нулей и полюсов функции $1 - z\varphi(\lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ будем иметь в виду нули и полюса именно этого аналитического продолжения.

Покажем, что в правой полуплоскости будет также ровно k нулей функции $1 - z\varphi(\lambda)$ при $|z| < 1$. Для этого в плоскости переменной λ начертим прямоугольный контур Γ с вершинами в точках (A, iA) , $(0, iA)$, $(0, -iA)$, $(A, -iA)$. При достаточно больших значениях A имеем $|\varphi(\lambda)| \leq 1$, $\lambda \in \Gamma$. Это неравенство очевидно для той части контура, которая лежит на мнимой оси. На оставшейся части контура Γ имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(e^{\lambda Y_1}; Y_1 \leq 0)| &\leq \mathbf{P}(Y_1 \leq 0) < 1, \\ |\mathbf{E}(e^{\lambda Y_1}; Y_1 > 0)| &= \frac{R(\lambda)}{P(\lambda)} \rightarrow 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

поскольку степень $R(\lambda)$ меньше степени $P(\lambda)$. Значит, на этом контуре $|z\varphi(\lambda)| < 1$ при $|z| < 1$. Таким образом, при обходе переменной λ по контуру Γ значение функции $z\varphi(\lambda)$ остаётся внутри единичного круга. Тогда значение функции $1 - z\varphi(\lambda)$ будет находиться внутри круга единичного радиуса с центром в единице. Это значит, что при обходе переменной λ вдоль контура Γ значение функции $1 - z\varphi(\lambda)$ не обойдёт ни разу вокруг нуля, т. е. не получит приращения аргумента.

Далее,

$$1 - z\varphi(\lambda) = 1 - z\mathbf{E}(e^{\lambda Y_1}; Y_1 > 0) - z\mathbf{E}(e^{\lambda Y_1}; Y_1 \leq 0).$$

Последнее слагаемое не имеет особенностей в правой полуплоскости, поэтому нули полинома $P(\lambda)$ будут единственными особенностями (полюсами) функции $1 - z\varphi(\lambda)$, и при достаточно больших значениях A все они лежат внутри контура Γ . Значит, в силу принципа аргумента аналитической функции внутри контура находится ровно k нулей функции $1 - z\varphi(\lambda)$ (с учётом их кратностей); обозначим их $\lambda_1(z), \dots, \lambda_k(z)$.

В дальнейшем будем устремлять $z \rightarrow 1$, поэтому достаточно для наших целей предполагать, что $1 - \delta < z < 1$ при некотором малом δ . Функция $\varphi(\lambda)$ является выпуклой вниз и возрастающей на интервале $[0, p_1)$, так как её производная в нуле положительна. Ясно, что при малых z кривая $\varphi(\lambda)$ ровно один раз пересечёт горизонтальную прямую на уровне $1/z$. Следовательно, один из нулей, скажем $\lambda_1(z)$, является вещественным, $\lambda_1(z) > 0$ и $\lambda_1(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 1$. Он является простым. Остальные нули функции $1 - z\varphi(\lambda)$ являются комплексными с ненулевой мнимой частью, $\operatorname{Re}\lambda_i(z) > \lambda_1(z)$, $2 \leq i \leq k$.

Положим

$$\Lambda(z, \lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i(z)), \quad R_+(z, \lambda) = \frac{\Lambda(z, \lambda)}{P(\lambda)}, \quad R_-(z, \lambda) = \frac{(1 - z\varphi(\lambda))P(\lambda)}{\Lambda(z, \lambda)}.$$

Ясно, что $1 - z\varphi(\lambda) = R_-(z, \lambda)R_+(z, \lambda)$. Это представление удовлетворяет всем свойствам (по переменной λ), предъявляемым к канонической факторизации (см. [2, гл. 12]), и в соответствии с [3] имеет место тождество

$$\mathbf{E}(z^\eta e^{\lambda S_\eta}) = R_+(z, \lambda) [R_+^{-1}(z, \lambda)]^{[b, \infty)}, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad |z| < 1,$$

где принято обозначение:

$$[g(\lambda)]^A = \int_A e^{\lambda x} dG(x)$$

для любого $A \subset \mathbb{R}$ и для любой функции g , представимой при $\operatorname{Re} \lambda = 0$ в виде

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dG(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dG(x)| < \infty. \quad (4)$$

Таким образом, кроме всего прочего нам потребуется представить $R_+^{-1}(z, \lambda)$ как функцию переменной λ в виде интеграла (4) и затем осуществить сужение интегрирования на множество $[b, \infty)$. Будем предполагать, что при малых δ и $1 - \delta < z < 1$ все нули $\lambda_2(z), \dots, \lambda_k(z)$ также являются простыми. Разложим рациональную функцию $P(\lambda)/\Lambda(z, \lambda)$ на простые дроби:

$$R_+^{-1}(z, \lambda) = \frac{P(\lambda)}{\Lambda(z, \lambda)} = C(z) + \sum_{i=1}^k \frac{c_i(z)}{\lambda - \lambda_i(z)}.$$

Здесь, очевидно, коэффициенты можно вычислить по формуле

$$c_i(z) = P(\lambda_i(z)) \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_i(z)} \frac{\lambda - \lambda_i(z)}{\Lambda(z, \lambda)}.$$

Не зависящее от λ число $C(z)$ не требует уточнений, оно впоследствии исчезнет при переходе к сужению интеграла на множество $[b, \infty)$.

Ясно, что для $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $\operatorname{Re} \lambda_i(z) > 0$ выполняется

$$\left[\frac{1}{\lambda - \lambda_i(z)} \right]^{[b, \infty)} = \left[- \int_0^\infty e^{(\lambda - \lambda_i(z))y} dy \right]^{[b, \infty)} = - \int_b^\infty e^{(\lambda - \lambda_i(z))y} dy = \frac{e^{(\lambda - \lambda_i(z))b}}{\lambda - \lambda_i(z)}.$$

Отсюда выводим

$$\mathbf{E}(z^\eta e^{\lambda S_\eta}) = R_+(z, \lambda) [R_+^{-1}(z, \lambda)]^{[b, \infty)} = \frac{\Lambda(z, \lambda)}{P(\lambda)} \sum_{i=1}^k \frac{c_i(z) e^{(\lambda - \lambda_i(z))b}}{\lambda - \lambda_i(z)}.$$

Положим

$$M_i(z, \lambda) = \frac{\Lambda(z, \lambda)}{\lambda - \lambda_i(z)} = \prod_{j=1, \dots, k, j \neq i} (\lambda - \lambda_j(z)),$$

тогда

$$\mathbf{E} e^{\lambda \chi} = \lim_{z \rightarrow 1} \mathbf{E}(z^\eta e^{\lambda(S_\eta - b)}) = h(\lambda) := \frac{1}{P(\lambda)} \sum_{i=1}^k c_i M_i(\lambda) e^{-\lambda_i b}, \quad (5)$$

где

$$\lambda_i = \lim_{z \rightarrow 1} \lambda_i(z), \quad M_i(\lambda) = \lim_{z \rightarrow 1} M_i(z, \lambda), \quad i = 1, \dots, k.$$

Для нахождения $\mathbf{E}\chi$ остаётся найти производную правой части (5) в нуле.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{E}Y_1 > 0$, выполнено условие (3) и все нули $\lambda_2(z), \dots, \lambda_k(z)$ функции $1 - z\varphi(\lambda)$ являются простыми для z , близких к единице. Тогда

$$\mathbf{E}\chi = h'(0) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}N = \frac{d(b + h'(0))}{m} - \frac{h'(0)}{k_2}.$$

Функция h определена в (5).

Замечания. 1. Точные формулы для чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, как правило, бывают недоступны, однако методами последовательных приближений их значения могут быть локализованы с какой угодно точностью.

2. Если среди нулей функции $1 - z\varphi(\lambda)$ окажутся кратные, то схема доказательства теоремы 2 остаётся прежней, только после разложения функции $P(\lambda)/\Lambda(z, \lambda)$ на простые дроби придётся дополнительно вычислять выражения вида

$$\left[\frac{1}{(\lambda - \lambda_i(z))^j} \right]^{[b, \infty)}, \quad j \geq 2.$$

Покажем, как это можно сделать. Если $|u| > |\lambda|$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda - u)^j} &= \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \left(\frac{1}{\lambda - u} \right)^{(j-1)} \quad (\text{здесь имеется в виду производная порядка } j-1) \\ &= \frac{(-1)^j}{(j-1)!} \left(\frac{1}{u} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{u^i} \right)^{(j-1)} = \frac{(-1)^j}{(j-1)!} \frac{1}{u} \sum_{i=j-1}^{\infty} \frac{i(i-1)\dots(i-j+2)\lambda^{i-j+1}}{u^i} \\ &= \frac{(-1)^j}{u} \sum_{i=j-1}^{\infty} \frac{C_i^{j-1} \lambda^{i-j+1}}{u^i} = \frac{(-1)^j}{u} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{k+j-1}^{j-1} \lambda^k}{u^{k+j-1}} = \frac{(-1)^j}{u^j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{k+j-1}^{j-1} \lambda^k}{u^k}, \end{aligned}$$

т. е. для достаточно малых значений $|\lambda|$

$$\left[\frac{1}{(\lambda - \lambda_i(z))^j} \right]^{[b, \infty)} = \frac{(-1)^j}{\lambda_i^j(z)} \sum_{k=b}^{\infty} \frac{C_{k+j-1}^{j-1} \lambda^k}{\lambda_i^k(z)}.$$

Разумеется, наличие кратных нулей несколько усложнит вид функции $\mathbf{E} e^{\lambda\chi}$.

3. Пусть $\rho = \min\{\operatorname{Re} \lambda_i, i \geq 2\}$. Выделим в правой части (5) первое слагаемое и напомним, что $\lambda_1 = 0$. Тогда, очевидно, в условиях теоремы 2 имеет место при $b \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E}\chi = \left(\frac{c_1 M_1(\lambda)}{P(\lambda)} \right)' \Big|_{\lambda=0} + O(e^{-\rho b}). \quad (6)$$

4. Из представления (5) для $\mathbf{E} e^{\lambda\chi}$ нетрудно найти точное выражение для плотности распределения величины перескока χ . Для этого нужно разложить функцию $M_i(\lambda)/P(\lambda)$ при каждом i на простые дроби и подставить полученные выражения в правую часть (5). Тем самым получим линейную комбинацию простых дробей, которые, в свою очередь, являются преобразованиями Лапласа известных функций.

Точные формулы для распределения χ при рассмотрении целочисленного случайного блуждания $\{S_n\}$ найдены в [4].

3. ОЦЕНКА СВЕРХУ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ $\mathbf{E}N$

Для получения оценки сверху для $\mathbf{E}N$ требуются двусторонние оценки для $\mathbf{E}\chi$. Оценка сверху хорошо известна из [5]: равномерно по всем $b \geq 0$

$$\mathbf{E}\chi \leq \frac{\mathbf{E}(Y_1^+)^2}{m},$$

где обозначено $Y_1^+ = \max(0, Y_1)$. К сожалению, не удаётся получить хорошую оценку снизу для $\mathbf{E}\chi$, поэтому последнее слагаемое в правой части (1) приходится оценивать нулём. В итоге получаем

Следствие 2. Пусть $\mathbf{E}Y_1 > 0$ и $\mathbf{E}(Y_1^+)^2 < \infty$. Тогда

$$\mathbf{E}N \leq \frac{d(b + \mathbf{E}(Y_1^+)^2/m)}{m}.$$

Далее будем предполагать, что распределение $\tau_2^{(1)}$ абсолютно непрерывно, что влечёт также наличие плотности у случайной величины Y_1 .

Введём случайную величину $\chi_+ = \chi(0)$, называемую обычно лестничной высотой. Известен следующий результат (см., например, [6, гл. 3.9]).

Теорема 3. Пусть $\mathbf{E}Y_1 > 0$ и $\mathbf{E}(Y_1^+)^2 < \infty$, тогда

$$\mathbf{E}S_\eta = b + \frac{\mathbf{E}\chi_+^2}{2\mathbf{E}\chi_+} + o(1), \quad b \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Как следует из (6), в условиях теоремы 2 остаточный член $o(1)$ в (7) убывает экспоненциально быстро при $b \rightarrow \infty$.

Подставляя соотношение (7) в (1), получаем

Следствие 3. В условиях теоремы 3

$$\mathbf{E}N = \frac{d(b + \mathbf{E}\chi_+^2/2\mathbf{E}\chi_+)}{m} - \frac{\mathbf{E}\chi_+^2}{2k_2\mathbf{E}\chi_+} + o(1), \quad b \rightarrow \infty.$$

Как уже отмечалось, если случайная величина $\tau_2^{(1)}$ имеет показательное распределение с параметром α , то χ_+ также имеет показательное распределение, в соответствии с которым $\mathbf{E}\chi_+ = k_2\alpha^{-1}$, $\mathbf{E}\chi_+^2 = 2k_2^2\alpha^{-2}$. В общем случае вычисление моментов лестничной высоты χ_+ сопряжено с весьма сложными вычислениями (см. [7, 8]). В то же время отметим, что для практических целей достаточно просто и с большой точностью можно оценить $\mathbf{E}\chi_+$ и $\mathbf{E}\chi_+^2$ методом статистического моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 2021.
3. Лотов В.И. Об одном подходе в двуграничных задачах // Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1989. С. 117–121.
4. Лотов В.И. О точных формулах в некоторых граничных задачах для целочисленных случайных блужданий // Изв. РАН. Сер. мат. 2023. Т. 87, № 1. С. 49–64.
5. Lorden G. On the excess over the boundary // Ann. Math. Stat. 1970. V. 41. P. 520–527.
6. Gut A. Stopped Random Walks. Limit Theorems and Applications. N. Y.: Springer-Verl., 1988.
7. Нагаев А.В. Об одном способе вычисления моментов лестничной высоты // Теория вероятн. и её примен. 1985. Т. 30, вып. 3. С. 535–538.
8. Нагаев С.В. Точные выражения для моментов лестничных высот // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 4. С. 848–870.

UDC 519.21

**ON THE TIME OF THE FIRST LEVEL ACHIEVEMENT
FOR THE ASCENDING-DESCENDING PROCESS**

© 2023 V. I. Lotov

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
pr. Acad. Koptiyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: lotov@math.nsc.ru

Received 21.02.2023, revised 01.03.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. We consider a stochastic process whose trajectories are characterized by alternate linear growth and linear decrease during time intervals of random length; the process can also keep its value during random intervals of time between growth and decrease. This process can be considered as a mathematical model of accumulation and consumption of materials, when random periods of time are combined for accumulation, spending and interruptions in operation. We study mean value $\mathbf{E}N$ of the first achievement time a fixed level for trajectories of this process, including finding exact formulas for $\mathbf{E}N$, estimating from above with an inequality and obtaining the asymptotics of $\mathbf{E}N$ under an infinitely receding level.

Keywords: stochastic inventory control models, stochastic process, random walk, first passage time.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.307

REFERENCES

1. Borovkov A.A. Stochastic Processes in Queueing Theory. London: Springer Verl., 1976.
2. Borovkov A.A. Probability Theory. London: Springer Verl., 2013.
3. Lotov V. I. Ob odnom podkhode v dvugranichnykh zadachakh [An approach to problems with two boundaries]. *Statistics and control of random processes* [Statistika i upravlenie sluchainymi protsessami], Moscow: Nauka, 1989, pp. 117–121 (in Russian).
4. Lotov V.I. O tochnykh formulakh v nekotorykh granichnykh zadachakh dlya tselochislennykh sluchainykh bluzhdanii [Exact formulas in some boundary crossing problems for integer-valued random walks]. *Izv. RAN. Ser. Mat.*, 2023, Vol. 87, No. 1, pp. 49–64.
5. Lorden G. On the excess over the boundary. *Ann. Math. Stat.*, 1970, Vol. 41, pp. 520–527.
6. Gut A. Stopped Random Walks. Limit Theorems and Applications. N. Y.: Springer Verl., 1988.
7. Nagaev A.V. Ob odnom sposobe vychisleniya momentov lestnichnoi vysoty [On a method of computing the moments of a ladder variables]. *Theory Probab. Appl.*, 1986, Vol. 30, No. 3, pp. 569–572.
8. Nagaev S.V. Tochnye vyrazheniya dlya momentov lestnichnykh vysot [Exact expressions for the moments of ladder heights]. *Sib. Math. J.*, 2010, Vol. 51, No. 4, pp. 675–695.

УДК 519.632:519.688:53.043

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА В ОБЛАСТИ КОНТАКТНОЙ ЛИНИИ ПРИ ИСПАРЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПУЗЫРЬ

© 2023 Н. Е. Сибиряков^a, Д. Ю. Кочкин^b, О. А. Кабов^c,
А. Л. Карчевский^d

¹*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^akolyasibir@yandex.ru, ^bkochkin1995@mail.ru, ^ckabov@itp.nsc.ru,
^dkarchevs@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 04.06.2022 г.; после доработки 04.06.2023 г.;
принята к публикации 07.06.2023 г.

Описывается способ определения плотности теплового потока на поверхности тонкой фольги, недоступной для тепловизионных измерений по данным тепловизионной съёмки другой стороны фольги, доступной для измерений. Математически задача сводится к решению задачи Коши для эллиптического уравнения, которая является некорректной. Задача решается с использованием сглаживания шума в исходном поле температуры и правильном ограничении на количество членов разложения в рядах Фурье. По результатам измерений плотность теплового потока достигает максимума в области контактной линии и составляет 4200 Вт/м².

Ключевые слова: некорректная задача, задача Коши, уравнение теплопроводности, плотность теплового потока, контактная линия.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.308

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается испарение жидкости в пузырь, лежащий на верхней стенке контейнера, заполненного жидкостью. Сама верхняя стенка представляет из себя лист тонкой фольги, покрытой чёрной краской для определения температуры тепловизором. В качестве рабочей жидкости использовался неполярный хладагент FC-72 с температурой кипения 56 °С.

Задача об определении интенсивности испарения и плотности теплового потока в нагреваемой жидкости в области трёхфазной контактной линии активно исследуется в связи с важными практическими приложениями в энергетике, медицине, химической, фармацевтической и пищевой промышленности [1–3]. Как теоретические, так и экспериментальные исследования подтверждают, что интенсивность теплообмена в области контактной линии может быть более чем на порядок выше средней и вызывает локальный минимум температуры на твёрдой стенке. Однако прямых измерений плотности теплового потока в области микрорегиона произвести пока не представляется возможным. Длина микрорегиона, т. е. переходной области между сухой поверхностью или сверхтонкой плёнкой и относительно толстой плёнкой, по разным оценкам составляет от 0.5 до 10–20 мкм. Поэтому используются различные косвенные методы и численные процедуры.

Задача об испарении жидкости в пузырь и нахождении распределения температуры под ним решалась во многих работах как при кипении [4–7], так и при введении пузырей газа [8, 9],

но во всех этих постановках пузыри быстро росли, испарялись на нижней подложке и впоследствии отрывались от неё, т. е. были нестационарными. В работе [10] получено распределение температуры и расчёт плотности теплового потока при ударе пузыря воздуха, поднимающегося в воде, о верхнюю нагреваемую стенку, однако в такой постановке пузыри были тоже нестационарными и быстро меняли своё местоположение.

Особенность нашей постановки задачи состоит в том, чтобы на верхней стенке контейнера закрепить пузырь, в который будет происходить испарение, причём при слабом перегреве или при отсутствии насыщенного пара в пузыре испарение будет происходить медленно, а сам пузырь будет находиться на месте. Это приводит к медленному изменению температуры стенки и изменению размеров пузыря. Как следствие, это позволяет точнее рассчитать распределение температуры и плотности теплового потока на стороне фольги, содержащей пузырь [11, 12].

Для изучения процессов, протекающих в районе «твёрдое тело-жидкость-пар», перспективным является метод нагретой тонкой фольги (см., например, [13–16]). В этом случае математически в стационарном случае задача сводится к решению задачи Коши для эллиптического уравнения.

Задача Коши для эллиптического уравнения является старейшей некорректной задачей. Некорректность данной задачи заключается в том, что её решение существует, единственно, но неустойчиво, т. е. малым вариациям в данных Коши могут отвечать сколь угодно большие вариации решения. Первым это показал Ж. Адамар [17, 18], заявив, что такие задачи решать нельзя. Тем не менее задачи такого типа постоянно возникали в приложениях, и требовалось находить их решение. Условную устойчивость решения задачи Коши для уравнения Лапласа в двумерном случае доказал Т. Карлеман [19]. Прорывной идеей оказалось предположение, что решение задачи Коши является ограниченным, это предположение позволило доказать условную устойчивость решения, т. е. устойчивость решения в предположении, что оно является ограниченным. Исследование условной устойчивости данной задачи можно найти в работах [20–22]. Первые результаты, относящиеся к построению алгоритма решения задачи Коши для уравнения Лапласа, опубликованы в 1955 году одновременно в работах [23, 24]. В 1956 г. был предложен метод для решения плоской задачи в классе ограниченных функций (на основе формулы Карлемана), а для пространственной задачи получены оценки, характеризующие её устойчивость в классе ограниченных решений [25]. Далее учениками и последователями М. М. Лаврентьева и А. Н. Тихонова было предложено большое количество различных методов решения данной задачи. Это итерационные методы в различных вариантах и модификациях [26–33], метод квазиобращения [34–38], регуляризации [39–46], Бекуса — Гильберта [47, 48], итеративной регуляризации Манна [49], регуляризации производной четвёртого порядка [50, 51], метод Фурье [52, 53], метод вейвлетов [54, 55], Level-Set метод [56], расширяющихся компактов [57], сопряжённого оператора [58], конечно-разностные методы решения [59–61]. В работе [62] приведён современный и подробный обзор теоретических и численных результатов для некорректных задач Коши для уравнений в частных производных.

Как видим, методов решения огромное количество, тем не менее эффективность их применения либо доказывалась теоретически, либо задача решалась на симулированных данных. В научной печати практически отсутствуют работы по решению задачи Коши для эллиптического уравнения на реальных данных. В этой связи можем отметить работы [58, 63–66], в которых был предложен и развит модифицированный метод нагретой тонкой фольги для изучения контактной линии «твёрдое тело-жидкость-пар». В основе численной реализации лежит решение задачи Коши для эллиптического уравнения методом сопряжённого оператора [58]; обрабатывались многочисленные данные, полученные в ходе лабораторных экспериментов.

В данной работе при выборе метода решения задачи Коши для эллиптического уравнения, которая является некорректно поставленной, мы руководствовались соображением, что нам необходим численный метод, который позволил бы в полной мере учесть специфику поставленной задачи. Во-первых, нам необходимо знать не всё решение в области, а только значение

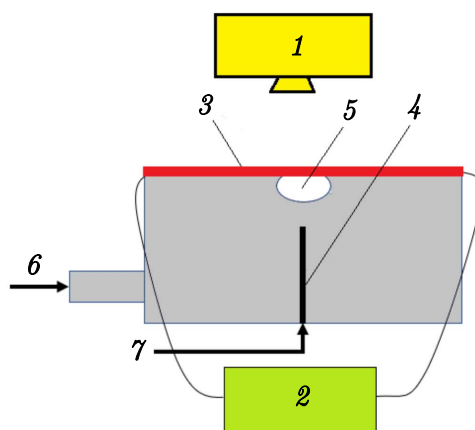
потока тепла на части границы области, недоступной для измерений. Во-вторых, геометрия области является достаточно простой. В-третьих, численный метод должен быть достаточно прост в реализации и должен позволять обрабатывать достаточно большое количество однотипных данных, получаемых в ходе лабораторных экспериментов. Здесь мы обратились к опыту работ [58, 63–66].

1. ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для решения поставленной задачи была создана установка, представленная на рис. 1. Кювета сделана из термостойкого пластика, а верхняя стенка представляет собой лист стальной фольги, толщиной $50\ \mu\text{м}$, покрытый тонким слоем чёрной матовой краски, что позволяет повысить коэффициент черноты в инфракрасном диапазоне почти до 1. Кювета заполняется до верхней стенки неполярным хладагентом FC-72 с температурой кипения $56\ ^\circ\text{C}$, теплотой парообразования $88\ \text{кДж/кг}$, плотностью $1680\ \text{кг/м}^3$, теплопроводностью $0.057\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$, теплоёмкостью $1100\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}$ [67]. Внизу кюветы имеется игла, которая подключена к шприцевому насосу, чтобы медленно вводить пузырь необходимого объёма.



(a)



(b)

Рис. 1. Устройство установки:

(a) готовый стенд; (b) схема экспериментальной установки:

1 — тепловизор Titanium 570 M; 2 — источник питания; 3 — фольга $50\ \mu\text{м}$; 4 — шприц для создания пузыря; 5 — пузырь; 6 — подача жидкости; 7 — подача газа

После отрыва от иглы пузырь попадает на фольгу, и в него происходит испарение жидкости за счёт ненасыщенного пара в пузыре и нагрева электрическим током ($0.266\ \text{В}$; $6.52\ \text{А}$; $1.734\ \text{Вт}$, что соответствует $723\ \text{Вт/м}^2$). Внешняя сторона фольги снимается тепловизором Titanium 570 M с разрешением 640×512 пикселей, физическое разрешение картинки $0.1\ \text{мм/пикс}$. После того, как пузырь перестаёт двигаться и несколько секунд остаётся на одном месте, тепловизор снимает температуру внешней стороны фольги, и эта картинка впоследствии обрабатывается.

Кроме изучения пузыря наклонная подставка позволяет повернуть стенд на 5° относительно любой из осей и изучать плотность теплового потока в протяжённом мениске жидкости.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ЕЁ РЕШЕНИЯ

Стационарный процесс распространения тепла в фольге описывается уравнением

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla \tau) = -q_V, \quad (x, y, z) \in V \equiv \{(0, A) \times (0, B) \times (0, h)\}. \quad (1)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности, q_V — плотность объёмных источников тепла, $h \ll A$ и $h \ll B$, поскольку фольга считается тонкой.

На доступной части границы измеряется температура

$$\tau|_{z=h} = \tau_0(x, y). \quad (2)$$

Также считаем, что на этой поверхности конвективный тепловой поток определяется законом Ньютона — Рихмана

$$\lambda \tau_z|_{z=h} = -\alpha \tau|_{z=h}. \quad (3)$$

Боковые стенки фольги теплоизолированы:

$$\lambda \tau_x|_{x=0} = 0, \quad \lambda \tau_x|_{x=A} = 0, \quad \lambda \tau_y|_{y=0} = 0, \quad \lambda \tau_y|_{y=B} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\tau(x, y, z) = T(x, y, z) - T_a$, $\tau_0(x, y) = T_0(x, y) - T_a$, T — температура, T_a — известная температура окружающей среды; q_V , λ и α считаются известными постоянными.

Постановка задачи (1)–(4) является задачей Коши для эллиптического уравнения.

Необходимо вычислить значение функции $q(x, y) = -\lambda \tau_z|_{z=0}$.

Применим метод сопряжённого оператора [58]. Рассмотрим постановку сопряжённой задачи

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla v) = 0, \quad (x, y, z) \in V, \quad (5)$$

$$\lambda v_x|_{x=0} = 0, \quad \lambda v_x|_{x=A} = 0, \quad \lambda v_y|_{y=0} = 0, \quad \lambda v_y|_{y=B} = 0, \quad (6)$$

$$(\lambda v_z + \alpha v)|_{z=h} = \eta_{kn}(x, y), \quad \lambda v_z|_{z=0} = 0, \quad (7)$$

где функции $\eta_{kn}(x, y)$ будут определены позже, т. е. решение данной задачи (5)–(7) есть функция $v_{kn}(x, y, z)$.

Проинтегрируем тождество

$$\iiint_V [v_{kn}(\operatorname{div}(\lambda \nabla \tau) + q_V) - u \operatorname{div}(\lambda \nabla v_{kn})] dV \equiv 0,$$

откуда получим равенство

$$\begin{aligned} \int_0^A \int_0^B v_{kn}(x, y, 0) q(x, y) dx dy &= q_V \int_0^A \int_0^B \int_0^h v_{kn}(x, y, z) dx dy dz \\ &+ \int_0^A \int_0^B \tau_0(x, y) \eta_{kn}(x, y) dx dy, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Зная функцию $v_{kn}(x, y, z)$ для различных k и n , для определения функции $q(x, y)$ из выражений (8) приходим к задаче типа проблемы моментов: для различных параметров k и n , $k, n = 0, 1, 2, \dots$, выполняются равенства (8) и требуется определить функцию $q(x, y)$.

Выберем функции $\eta_{kn}(x, y)$ так, чтобы они были базисными на прямоугольнике $[0, A] \times [0, B]$. Простота геометрии области V и выбор функций $\eta_{kn}(x, y)$ в виде

$$\eta_{kn}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi k}{A}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{B}y\right), \quad k, n = 0, 1, 2, \dots,$$

позволяет не решать задачу (8). При таком выборе функций $\eta_{nk}(x, y)$ задача (5)–(7) имеет решение

$$v_{kn}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{e^{\nu(z-h)} + e^{-\nu(z+h)}}{(\lambda\nu + \alpha) - (\lambda\nu - \alpha)e^{-2\nu h}} \cos\left(\frac{\pi k}{A}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{B}y\right), & k + n \neq 0, \\ 1/\alpha, & k = n = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $\nu = \sqrt{(\pi k/A)^2 + (\pi n/B)^2}$. Пусть $\mu = \lambda\nu/\alpha$. Подставим (9) в (8), тогда получим

$$\hat{q}_{kn} = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} e^{\nu h} \hat{\tau}_{0, kn} [(\mu + 1) - (\mu - 1)e^{-2\nu h}], & k + n \neq 0, \\ \alpha \hat{\tau}_{0, 00} - q_V h, & k = n = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где \hat{q}_{kn} и $\hat{\tau}_{0, kn}$ являются коэффициентами рядов Фурье для функций $q(x, y)$ и $\tau_0(x, y)$ соответственно. И, следовательно,

$$q(x, y) = \frac{1}{4} \hat{q}_{00} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{q}_{k0} \cos\left(\frac{\pi k}{A}x\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{q}_{0n} \cos\left(\frac{\pi n}{B}y\right) + \sum_{k, n=1}^{\infty} \hat{q}_{kn} \cos\left(\frac{\pi k}{A}x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{B}y\right). \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что неустойчивость решения задачи Коши (1)–(4) проявляется в наличии множителя $e^{\nu h}$ в выражении (10). Если функция $\tau_0(x, y)$ известна с ошибкой, следовательно, значения $\hat{\tau}_{0, kl}$ также известны с ошибкой. Таким образом, с ростом ν растёт ошибка при вычислении \hat{q}_{kl} и, следовательно, $q(x, y)$. Для получения удовлетворительных результатов суммирования таких рядов требуется привлечение результатов работы [68].

3. ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОвого ПОТОКА $q(x, y)$ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ, НЕДОСТУПНОЙ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. Предварительная обработка данных

На полученной с тепловизора термограмме $T_0(x, y)$ имеются «битые» пиксели, а также на точность измерений влияют возможные небольшие пылинки на фольге и ошибки измерений самой матрицы (см. рис. 2(a)). Эти погрешности могут существенно влиять на суммирование ряда Фурье, а это, в свою очередь, значительно влияет на ошибку определения плотности теплового потока $q(x, y)$ на нижней стороне фольги. Поэтому следует провести предварительную подготовку данных, которая проводится в два этапа:

1. Очищение данных от «битых» пикселей. С помощью фильтра Лапласа [69] определяются точки, температура в которых существенно отличается от соседних, значение температуры в этих точках изменяется на средние значения температуры в соседних точках без аномалий.

2. Избавление от теплового шума матрицы. Сглаживание данных осуществлялось скользящим средним по 25 точкам, крайние значения вычислялись по девяти и трём точкам соответственно.

Таким образом, были получены сглаженные данные $\tilde{T}_0(x_k, y_n)$ (рис. 2(b)), которые далее использовались для нахождения значения плотности теплового потока $q(x, y)$ по алгоритму, представленному в разд. 2.

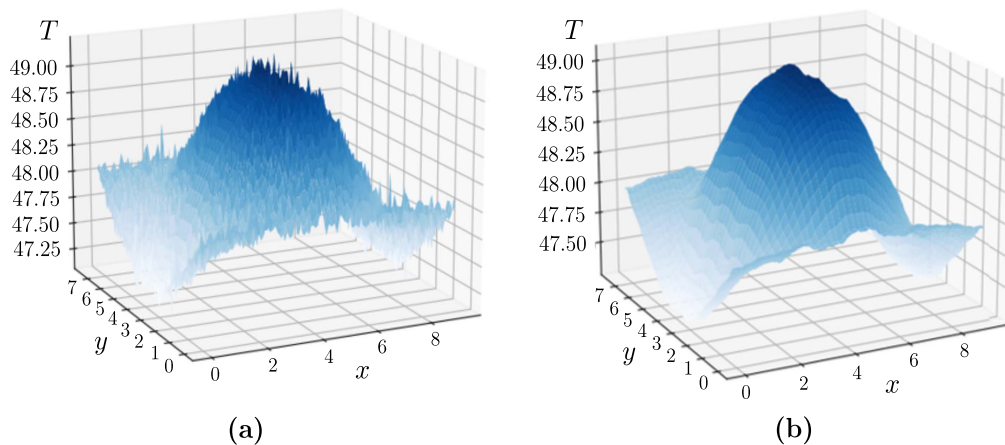


Рис. 2. Распределение температуры:
(а) исходные данные с тепловизора; (б) данные после обработки

3.2. Суммирование ряда (11)

Согласно результатам работы [68] требуется оборвать суммирование ряда на каких-то номерах K и N . Выбор этих значений осуществляется с помощью итерационной процедуры при каждом решении задачи. При обработке большого объёма данных лабораторных экспериментов итерационный выбор данных параметров для получения величины плотности теплового потока $q(x, t)$ является достаточно времязатратной процедурой.

Воспользуемся свойством метода нагретой тонкой фольги, конкретно тем, что фольга является очень тонкой. Это означает, что измерения температуры на поверхностях $\{z = h\}$ и $\{z = 0\}$ мало друг от друга отличаются. Также примем во внимание, что при проведении серии лабораторных экспериментов ошибки для каждого отдельного измерения данных являются однотипными.

Из приведённых выражений нетрудно получить

$$\hat{\tau}_{kn}(0) = \frac{1}{2\mu} e^{\nu h} \hat{\tau}_{0, kn} [(\mu + 1) + (\mu - 1)e^{-2\nu h}] \quad (12)$$

и вычислить ряд

$$\begin{aligned} \tau(x, y, 0) = & \frac{1}{4} \hat{\tau}_{00}(0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \hat{\tau}_{k0}(0) \cos\left(\frac{\pi k}{A} x\right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \hat{\tau}_{0n}(0) \cos\left(\frac{\pi n}{B} y\right) \\ & + \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \hat{\tau}_{kn}(0) \cos\left(\frac{\pi k}{A} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{B} y\right). \quad (13) \end{aligned}$$

В выражении (12) также присутствует растущий множитель $e^{\nu h}$, и, следовательно, суммирование ряда нужно оборвать на каких-то значениях номеров K и N . Выбираем некоторые значения K_0 и N_0 , вычисляем $\tau(x, y, 0)$ и сравниваем с измеренными данными $\tau(x, y, h) = \tau_0(x, y)$, постепенно увеличивая значения K и N . Увеличение данных параметров проводим до тех пор, пока вычисленная функция $\tau(x, y, 0)$ не станет мало отличаться от измеренной функции $\tau_0(x, y)$. Дальнейшее увеличение K и N приведёт к тому, что присутствие растущего множителя $e^{\nu h}$ станет причиной вычисления $\tau(x, y, 0)$ с большими ошибками и росту разницы $\tau(x, y, h) - \tau_0(x, y)$.

Таким образом, зафиксировав выбранные значения K и N , когда разница $\tau(x, y, h) - \tau_0(x, y)$ наименьшая, далее для обработки остальных результатов лабораторных экспериментов используем только эти значения.

Для контроля правильности наших расчётов может быть использовано следующее равенство:

$$\int_0^A \int_0^B q(x, y) dx dy + q_V ABh - \alpha \int_0^A \int_0^B \tau_0(x, y) dx dy = 0, \quad (14)$$

которое является результатом интегрирования равенства (1). Если вычисление функции $q(x, y)$ при помощи суммирования конечного ряда (11) является удовлетворительным, тогда равенство (14) будет удовлетворяться с хорошей точностью.

3.3. Результаты вычислений величины плотности теплового потока

С помощью метода решения задачи Коши получена плотность теплового потока на стороне фольги, содержащей пузырь (рис. 3).

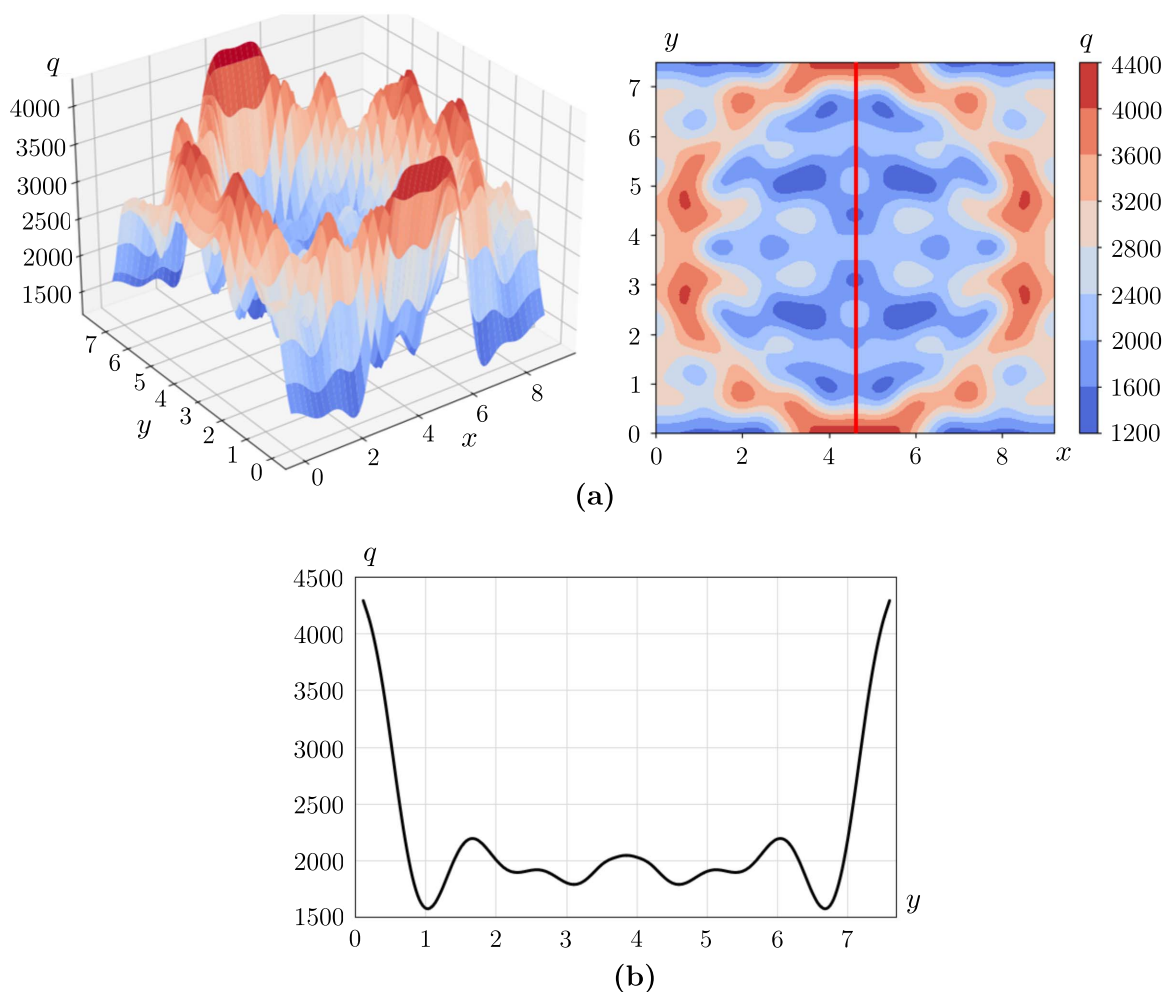


Рис. 3. Результаты расчётов:

- (а) распределение плотности теплового потока на поверхности фольги в месте касания пузыря; вблизи контактной линии «газ-жидкость-твёрдое тело» значительно возрастает плотность теплового потока;
- вертикальной красной линией отмечен срез плотности теплового потока, показанный на рис. (b)

Максимальная достоверность полученных данных оказалась при $K = 19, N = 15$. Результаты расчётов показывают интенсификацию плотности теплового потока вблизи контактной

линии «газ-жидкость-твёрдое тело». В отличие от капли, лежащей на поверхности, пар в пузыре перегревается за счёт малой теплоёмкости, и на границе «твёрдое тело-пар» плотность теплового потока уменьшается, а на границе «жидкость-пар» увеличивается. При этом максимальная плотность теплового потока наблюдается вблизи контактной линии. Он в два-три раза превышает интенсивность охлаждения на поверхности «жидкость-твёрдое тело» и «газ-твёрдое тело». Это говорит о том, что испарение жидкости максимально именно вблизи контактной линии, что согласуется с предыдущими работами, в которых изучалось испарение капель [63–66].

В ходе второй серии экспериментов установка была наклонена на 1° относительно оси x . Проведены эксперименты с испарением жидкости в протяжённый мениск. Из-за протяжённости межфазной границы задача практически сводится к одномерной. Полученные поля температуры поверхности фольги на внешней стороне представлены на рис. 4(a, b).

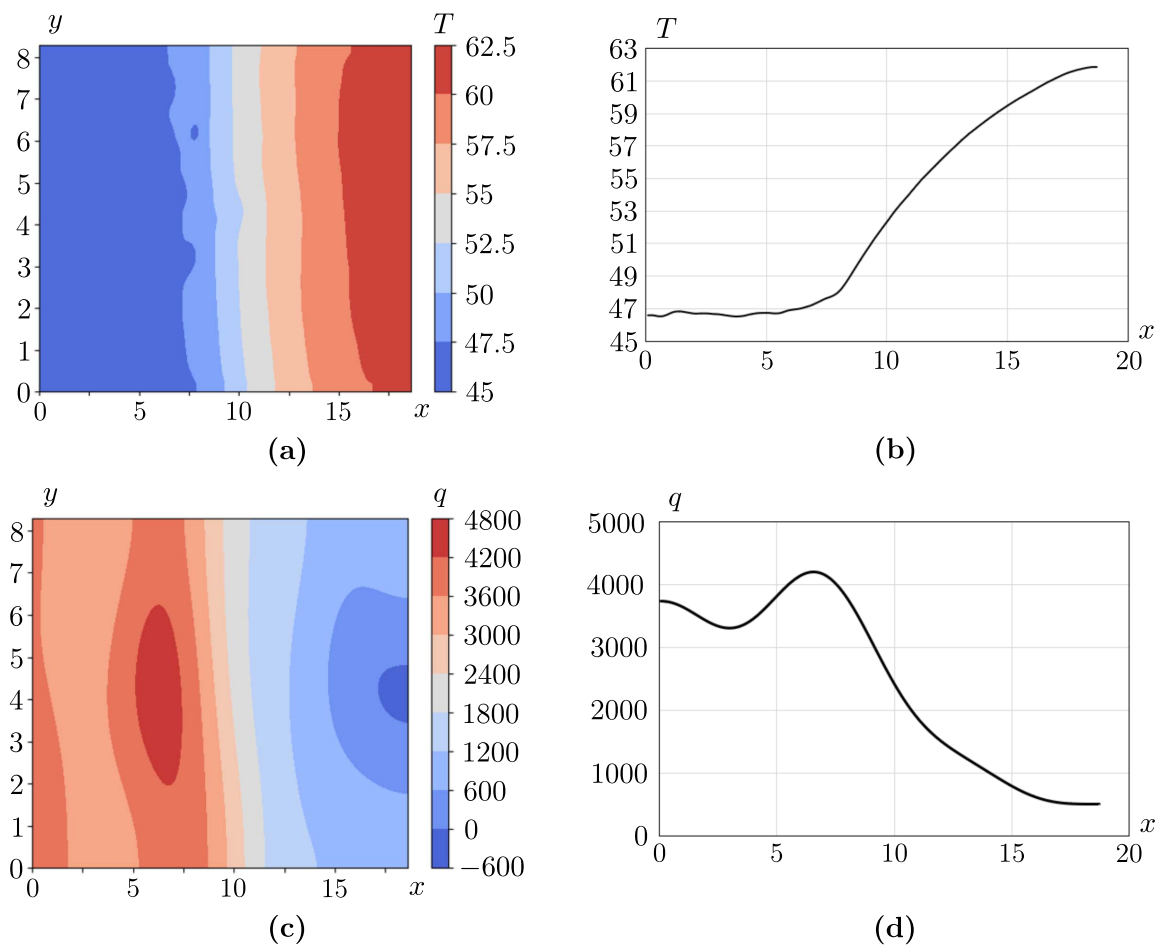


Рис. 4. Поле температуры и поток:

- (a) поле температуры на внешней стороне фольги при испарении жидкости в мениск;
- (b) усреднённая температура по координате y , области контактной линии соответствует область вблизи координаты $x = 10$ мм;
- (c) распределение плотности теплового потока на поверхности фольги, содержащей мениск по данным решения двумерной задачи;
- (d) одномерная по усреднённому полю температура

В отличие от пузыря толщина жидкости вблизи контактной линии меняется слабо из-за смачиваемости фольги FC-72, поэтому практически вся область мениска представляет из себя тонкую плёнку. Однако резкий рост температуры происходит ещё в мениске при $x = 8$ мм. По-

видимому, это связано с механизмом испарения тонкой плёнки. В области до $x = 8$ мм толщина жидкости позволяет преодолеть силы вязкого трения и восполнить испарившуюся жидкость при относительно низком градиенте температур, а в области от 8 до 10 мм такого градиента уже недостаточно из-за преобладания вязких сил в тонком слое, и градиент температуры заметно повышается. Это приводит к увеличению интенсивности испарения и локальному повышению плотности теплового потока.

Как видно из распределения температуры, задача действительно практически одномерная, контактной линии соответствует область вблизи координаты $x = 10$ мм. И можно считать поток по разработанному методу, но уже для одномерной задачи (рис. 4(c, d)). Максимальная достоверность получается для одномерной задачи и при $K = 10$, $N = 3$ — для двумерной задачи. В отличие от испарения в пузырь практически вся область жидкости является тонкой плёнкой, поэтому в ней поддерживается плотность теплового потока на уровне 3800 Вт/м^2 . Из-за протяжённости контактной линии характерный пик плотности теплового потока размазан по пространству. Значение максимальной плотности теплового потока равно 4200 Вт/м^2 , и оно совпадает с максимальным значением при испарении в пузырь. Пар практически не охлаждает фольгу, и сам нагревается за счёт малой теплоёмкости. Кроме того, вблизи контактной линии наблюдается большой градиент температуры, и, как следствие, тепло перетекает по объёму самого нагревателя за счёт большой теплопроводности стальной фольги, поэтому вблизи контактной линии при $x = 10$ мм плотность теплового потока, нормальная к поверхности фольги, падает. Это значит, что жидкость в этой области интенсивно отдаёт тепло перегретому пару, а не нагревателю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам работы получено распределение плотности теплового потока при испарении жидкости в стационарный пузырь, находящийся на верхней стенке сосуда, и в мениск. Причём для определения плотности теплового потока использовался метод решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (см. [58, 63–66]). Показано, что метод можно использовать для определения плотности теплового потока на стороне фольги, обратной той, с которой снимается термограмма, но перед использованием метода необходимо очистить изображение от нефизических значений: битые пиксели и загрязнения на краске, тепловой шум на камере, поскольку они вносят существенную ошибку при дальнейшем расчёте плотности теплового потока, что является следствием некорректности задачи Коши для эллиптического уравнения.

При испарении жидкости в пузырь наблюдается сильный нагрев пузыря за счёт малой теплоёмкости и интенсивное испарение жидкости вблизи контактной линии, которое влечёт увеличение плотности теплового потока при отведении от нагревателя в два-три раза по сравнению с остальным толстым слоем жидкости. При испарении жидкости в мениск на стенке образуется большая область с тонкой плёнкой жидкости, в которой происходит интенсивное испарение, однако непосредственно вблизи контактной линии плотность теплового потока при отведении от нагревателя уменьшается. Это связано как с большим градиентом температур и большими значениями плотности теплового потока в самой фольге в этой области, так и с испарением жидкости непосредственно в перегретый пар без отвода тепла от нагревателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kundan A., Plawsky J.L., Wayner P.C. Jr. Thermophysical characteristics of a wickless heat pipe in microgravity — Constrained vapor bubble experiment // *Internat. J. Heat Mass Transfer*. 2014. V. 78. P. 1105–1113; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.07.044>
2. Deng Q., Braun R.J., Driscoll T.A., King-Smith P.E. A model for the tear film and ocular surface temperature for partial blinks // *Interfacial Phenom. Heat Transfer*. 2013, V. 1, N 4. P. 357–381; <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.40>

3. *Ajaev V.S., Gatapova V.S., Kabov O.A.* Rupture of thin liquid films on structured surfaces // *Phys. Rev. E*. 2011. V. 84. Article 041606; <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.041606>
4. *Golobic I., Petkovsek J., Baselj M., Papez A., Kenning D.B.R.* Experimental determination of transient wall temperature distributions close to growing vapor bubbles // *Heat Mass Transfer*. 2009. V. 45. P. 857–866; <https://doi.org/10.1007/s00231-007-0295-y>
5. *Golobic I., Petkovsek J., Kenning D.B.R.* Bubble growth and horizontal coalescence in saturated pool boiling on a titanium foil, investigated by high-speed IR thermography // *Internat. J. Heat Mass Transfer*. 2012. V. 55, N 4. P. 1385–1402; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.08.021>
6. *Zupančič M., Gregorčič P., Bucci M., Wang C., Aguiar G.M., Bucci M.* The wall heat flux partitioning during the pool boiling of water on thin metallic foils // *Appl. Thermal Engrg.* 2022. V. 200. Article 117638; <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2021.117638>
7. *Surtaev A., Serdyukov V., Malakhov I., Safarov A.* Nucleation and bubble evolution in subcooled liquid under pulse heating // *Internat. J. Heat Mass Transfer*. 2021. V. 169. Article 120911; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.120911>
8. *Voulgaropoulos V., Aguiar G.M., Markides C.N., Bucci M.* Simultaneous laser-induced fluorescence, particle image velocimetry and infrared thermography for the investigation of the flow and heat transfer characteristics of nucleating vapour bubbles // *Internat. J. Heat Mass Transfer*. 2022. V. 187. Article 122525; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.122525>
9. *Shakerur R., McCarthy M.* Nanostructure-supported evaporation underneath a growing bubble // *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 2019. V. 11, N 13. P. 12441–12451; <https://doi.org/10.1021/acsami.8b21260>
10. *Donoghue D.B., Albadawi A., Delauré Y.M.C., Robinson A.J., Murray D.B.* Bubble impingement and the mechanisms of heat transfer // *Internat. J. Heat Mass Transfer*. 2014. V. 71. P. 439–450; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.12.014>
11. *Carlomagno G.M., Cardone G.* Infrared thermography for convective heat transfer measurements // *Exp. Fluids*. 2010. V. 49. P. 1187–1218; <https://doi.org/10.1007/s00348-010-0912-2>
12. *Surtaev A.S., Serdyukov V.S., Moiseev M.I.* Application of high-speed IR thermography to study boiling of liquids // *Instrum. Exp. Tech.* 2016. V. 59. P. 615–620; <https://doi.org/10.1134/S0020441216030222>
13. *Carlomagno G.M., de Luca L.* Infrared Thermography in Heat Transfer: Handbook of Flow Visualization. Washington: Hemisphere, 1989.
14. *Hestroni G., Rozenblit R., Yarin L.P.* A hot-foil infrared technique for studying the temperature field of a wall // *Meas. Sci. Technol.* 1996. V. 7, N 10. P. 1418–1427; <https://doi.org/10.1088/0957-0233/7/10/012>
15. *Sargent S.R., Hedlund C.R., Ligrani P.M.* An infrared thermography imaging system for convective heat transfer measurements in complex flows // *Meas. Sci. Technol.* 1998. V. 9, N 12. P. 1974–1981; <https://doi.org/10.1088/0957-0233/9/12/008>
16. *Astarita T., Cardone G., Carlomagno G.M., Meola C.* A survey of infrared thermography for convective heat transfer measurements // *Opt. Laser Technol.* 2000. V. 32, N 7. P. 593–610; [https://doi.org/10.1016/S0030-3992\(00\)00086-4](https://doi.org/10.1016/S0030-3992(00)00086-4)
17. *Hadamard J.* Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique // *Princeton Univ. Bull.* 1902. P. 49–52.
18. *Hadamard J.* Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations. New Haven: Yale Univ. Press, 1923.
19. *Carleman T.* Les Fonctions Quasi Analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
20. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
21. *Lavrent'ev M.M.* Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics. Springer-Verl., 1967.
22. *Мергелян С.Н.* Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа // *Успехи мат. наук.* 1956. Т. 11, № 5. С. 3–26.
23. *Лаврентьев М.М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // *Докл. АН СССР.* 1955. Т. 102, № 2. С. 205–206.
24. *Pucci C.* Sui problema di Cauchy non ben posti // *Atti Accad. Naz. Lincei.* 1955. V. 18, N 5. P. 473–477.

25. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
26. Козлов В.А., Мазья В.А., Фомин В.А. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31, № 1. С. 64–73.
27. Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L. Method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1995. V. 3, № 1. P. 21–46; <https://doi.org/10.1515/jiip.1995.3.1.21>
28. Hao D.N., Lesnic D. The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method // IMA J. Appl. Math. 2000. V. 65, N 2. P. 199–217; <https://doi.org/10.1093/imamat/65.2.199>
29. Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated to the Helmholtz equation // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 2003. V. 192, N 5–6. P. 709–722; [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00592-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00592-3)
30. Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. Conjugate gradient-boundary element solution to the Cauchy problem for Helmholtz-type equations // Comput. Mech. 2003. V. 31, N 3–4. P. 367–377; <https://doi.org/10.1007/s00466-003-0439-y>
31. Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. BEM solution for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations by the Landweber method // Engrg. Anal. Bound. Element. 2004. V. 28, N 9. P. 1025–1034; <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2004.03.001>
32. Marin L. A meshless method for the numerical solution of the Cauchy problem associated with three-dimensional Helmholtz-type equations // Appl. Math. Comput. 2005. V. 165, N 2. P. 355–374; <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.04.052>
33. Сорокин С.Б. Неявный итерационный метод численного решения задачи Коши для эллиптических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 4. С. 95–106; <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.410>
34. Klibanov M.V., Santosa F.A. Computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation // SIAM J. Appl. Math. 1991. V. 51, N 6. P. 1653–1675; <https://doi.org/10.1137/0151085>
35. Clason C., Klibanov M.V. The quasi-reversibility method for thermoacoustic tomography in a heterogeneous medium // SIAM J. Sci. Comput. 2007. V. 30, N 1. P. 1–23; <https://doi.org/10.1137/06066970X>
36. Bourgeois L. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation // Inverse Problems. 2005. V. 21, N 3. P. 1087–1104; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/3/018>
37. Bourgeois L. Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation // Inverse Problems. 2006. V. 22, N 2. P. 413–430; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/2/002>
38. Bourgeois L., Darde J. A duality-based method of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem in the presence of noisy data // Inverse Problems. 2010. V. 26. Article 095016; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/9/095016>
39. Bourgeois L. About stability and regularization of ill-posed elliptic Cauchy problems: the case of $C^{1,1}$ domains // ESAIM: M2AN. 2010. V. 44, N 4. P. 715–735; <https://doi.org/10.1051/m2an/2010016>
40. Kabanikhin S.I., Gasimov Y.S., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B., Kasenov S.E. Regularization of the continuation problem for elliptic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2014. V. 21, N 6. P. 871–884; <https://doi.org/10.1515/jip-2013-0041>
41. Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., Kasenov S.E. Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation // J. Appl. Math. 2014. V. 2014. Article 786326; <https://doi.org/10.1155/2014/786326>
42. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. (Mathematics and Its Appl. V. 375); <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-1740-8>
43. Klibanov M.V., Timonov A. Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications. Utrecht, Boston: VSP, 2004.

44. Xiong X.-T., Fu C.-L. Two approximate methods of a Cauchy problem for the Helmholtz equation // *Comput. Appl. Math.* 2007. V. 26, N 2. P. 285–307; <https://www.scielo.br/j/cam/a/TxPV5dhMznShZKZJhv6V5YH/?format=pdf&lang=en>
45. Qin H.H., Wen D.W. Tikhonov type regularization method for the Cauchy problem of the modified Helmholtz equation // *Appl. Math. Comput.* 2009. V. 203, N 5. P. 617–628; <https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.05.007>
46. Reginska T., Tautenhahn T. Conditional stability estimates and regularization with applications to Cauchy problems for the Helmholtz equation // *Numer. Funct. Anal. Optim.* 2009. V. 30, N 9–10. P. 1065–1097; <https://doi.org/10.1080/01630560903393170>
47. Cheng J., Hon Y.C., Wei T., Yamamoto M. Numerical computation of a Cauchy problem for Laplace's equation // *Appl. Math. Mech.* 2001. V. 81, N 10. P. 665–674; [https://doi.org/10.1002/1521-4001\(200110\)81:10<665::AID-ZAMM665>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/1521-4001(200110)81:10<665::AID-ZAMM665>3.0.CO;2-V)
48. Hon Y.C., Wei T. Backus–Gilbert algorithm for the Cauchy problem of the Laplace equation // *Inverse Problems.* 2001. V. 17, N 2. P. 261–271; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/17/2/306>
49. Engl H.W., Leita A.A. Mann iterative regularization method for elliptic Cauchy problems // *Numer. Funct. Anal. Optim.* 2001. V. 22, N 7–8, P. 861–884; <https://doi.org/10.1081/NFA-100108313>
50. Qian Z., Fu C.-L., Xiong X.-T. Fourth-order modified method for the Cauchy problem for the Laplace equation // *J. Comput. Appl. Math.* 2006. V. 192, N 2. P. 205–218; <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.04.031>
51. Shi R., Wei T., Qin H.H. A fourth-order modified method for the Cauchy problem of the modified Helmholtz equation // *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.* 2009. V. 2, N 3. P. 326–340; <https://doi.org/10.4208/nmtma.2009.m88032>
52. Fu C.-L., Li H.-F., Qian Z., Xiong X.-T. Fourier regularization method for solving a Cauchy problem for the Laplace equation // *Inverse Probl. Sci. Engrg.* 2008. V. 16, N 2. P. 159–169; <https://doi.org/10.1080/17415970701228246>
53. Yang F. The truncation method for identifying an unknown source in the Poisson equation // *Appl. Math. Comput.* 2011. V. 217, N 22. P. 9334–9339; <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.04.017>
54. Qiu C.-Y., Fu C.-L. Wavelets and regularization of the Cauchy problem for the Laplace equation // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 338, N 2. P. 1440–1447; <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.035>
55. Reginska T., Wakulicz A. Wavelet moment method for the Cauchy problem for the Helmholtz equation // *J. Comput. Appl. Math.* 2009. V. 223, N 1. P. 218–229; <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.01.005>
56. Leita A., Alves M.M. On level set type methods for elliptic Cauchy problems // *Inverse Problems.* 2007. V. 23, N 5. P. 2207–2222; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/5/023>
57. Titarenko V.N., Yagola A.G. Cauchy problems for Laplace equation on compact sets // *Inverse Probl. Sci. Engrg.* 2002. V. 10, N 3. P. 235–254; <https://doi.org/10.1080/10682760290007462>
58. Karchevsky A.L. Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2013. V. 1, N 2. P. 5–20; <https://doi.org/10.32523/2306-3172-2013-1-2-4-20>
59. Сорокин С.Б. Экономичный алгоритм для численного решения задачи идентификации правой части уравнения Пуассона // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2018. Т. 21, № 2. С. 101–107; <https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.209>
60. Сорокин С.Б. Экономичный прямой метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа // *Сиб. журн. вычисл. математики.* 2019. Т. 22, № 1. С. 99–117; <https://doi.org/10.15372/SJNM20190107>
61. Сорокин С.Б. Прямой метод решения обратной коэффициентной задачи для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2021. Т. 24, № 2. С. 134–147; <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.211>
62. Klibanov M.V. Carleman estimates for the regularization of ill-posed Cauchy problems // *Appl. Numer. Math.* 2015. V. 94. P. 46–74; <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2015.02.003>
63. Marchuk I., Karchevsky A., Surtaev A., Kabov O. Heat flux at the surface of metal foil heater under evaporating sessile droplets // *Internat. J. Aerosp. Engrg.* 2015. V. 2015. Article 391036.

64. *Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A.* Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line // *Appl. Math. Model.* 2016. V. 40, N 2. P. 1029–1037.
65. *Чеверда В.В., Марчук И.В., Карчевский А.Л., Орлик Е.В., Кабов О.А.* Экспериментальное исследование теплообмена в стекающем по наклонной фольге ручейке // *Теплофизика и аэромеханика.* 2016. Т. 23, № 3. С. 431–436.
66. *Чеверда В.В., Карчевский А.Л., Марчук И.В., Кабов И.В.* Плотность теплового потока в области контактной линии капли, лежащей на горизонтальной поверхности тонкой нагреваемой фольги // *Теплофизика и аэромеханика.* 2017. Т. 24, № 5. С. 825–828.
67. Technical Data. 3M™ Fluorinert™ Electronic Liquid FC-72.
<https://multimedia.3m.com/mws/media/648920/3m-fluorinert-electronic-liquid-fc72-en.pdf>
68. *Тихонов А.Н.* Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // *Докл. АН СССР.* 1964. Т. 156, № 2, С. 268–271.
69. *Прэтт У.* Цифровая обработка изображений. М.: Мир, 1982.

UDC 519.632:519.688:53.043

**DETERMINATION OF THE HEAT FLUX DENSITY IN THE REGION
OF THE CONTACT LINE DURING EVAPORATION OF A LIQUID
INTO A BUBBLE****© 2023 N. E. Sibiryakov^a, D. Yu. Kochkin^b, O. A. Kabov^c,
A. L. Karchevsky^d***Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrentyeva 1, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^akolyasibir@yandex.ru, ^bkochkin1995@mail.ru, ^ckabov@itp.nsc.ru,
^dkarchevs@math.nsc.ru

Received 04.06.2022, revised 04.06.2023, accepted 07.06.2023

Abstract. The article describes a method for determining the heat flux density on the surface of a thin foil that is inaccessible for thermal imaging measurements according to thermal imaging data from the other side of the foil available for measurements. Mathematically, the problem is reduced to solving the Cauchy problem for an elliptic equation, which is ill-posed. The problem is solved using noise smoothing in the initial temperature field and the correct limit on the number of expansion terms in the Fourier series. According to the measurement results, the heat flux density reaches its maximum in the area of the contact line and amounts to 4200 W/m².

Keywords: ill-posed problem, Cauchy problem, heat equation, heat flux density, contact line.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.308

REFERENCES

1. Kundan A., Plawsky J.L., Wayner P.C. Jr. Thermophysical characteristics of a wickless heat pipe in microgravity — Constrained vapor bubble experiment. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2014, Vol. 78, pp. 1105–1113; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.07.044>
2. Deng Q., Braun R.J., Driscoll T.A., King-Smith P.E. A model for the tear film and ocular surface temperature for partial blinks. *Interfacial Phenom. Heat Transfer*, 2013, Vol. 1, No. 4, pp. 357–381; <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.40>
3. Ajaev V.S., Gatapova V.S., Kabov O.A. Rupture of thin liquid films on structured surfaces. *Phys. Rev. E*, 2011, Vol. 84, article 041606; <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.041606>
4. Golobic I., Petkovsek J., Baselj M., Papez A., Kenning D.B.R. Experimental determination of transient wall temperature distributions close to growing vapor bubbles. *Heat Mass Transfer*, 2009, Vol. 45, pp. 857–866; <https://doi.org/10.1007/s00231-007-0295-y>
5. Golobic I., Petkovsek J., Kenning D.B.R. Bubble growth and horizontal coalescence in saturated pool boiling on a titanium foil, investigated by high-speed IR thermography. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*, 2012, Vol. 55, No. 4, pp. 1385–1402; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.08.021>
6. Zupančič M., Gregorčič P., Bucci M., Wang C., Aguiar G.M., Bucci M. The wall heat flux partitioning during the pool boiling of water on thin metallic foils *Appl. Thermal Engrg.*, 2022, V. 200, article 117638; <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2021.117638>
7. Surtaev A., Serdyukov V., Malakhov I., Safarov A. Nucleation and bubble evolution in subcooled liquid under pulse heating. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2021, Vol. 169, article 120911; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.120911>

8. Voulgaropoulos V., Aguiar G.M., Markides C.N., Bucci M. Simultaneous laser-induced fluorescence, particle image velocimetry and infrared thermography for the investigation of the flow and heat transfer characteristics of nucleating vapour bubbles. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2022, Vol. 187, article 122525; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.122525>
9. Shakerur R., McCarthy M. Nanostructure-supported evaporation underneath a growing bubble. *ACS Appl. Mater. Interfaces*, 2019, Vol. 11, No. 13, pp. 12441–12451; <https://doi.org/10.1021/acsami.8b21260>
10. Donoghue D.B., Albadawi A., Delauré Y.M.C., Robinson A.J., Murray D.B. Bubble impingement and the mechanisms of heat transfer. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2014, Vol. 71, pp. 439–450; <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.12.014>
11. Carlomagno G.M., Cardone G. Infrared thermography for convective heat transfer measurements. *Exp. Fluids*, 2010, Vol. 49, pp. 1187–1218; <https://doi.org/10.1007/s00348-010-0912-2>
12. Surtaev A.S., Serdyukov V.S., Moiseev M.I. Application of high-speed IR thermography to study boiling of liquids. *Instrum. Exp. Tech.*, 2016, Vol. 59, pp. 615–620; <https://doi.org/10.1134/S0020441216030222>
13. Carlomagno G.M., de Luca L. Infrared Thermography in Heat Transfer: Handbook of Flow Visualization. Washington: Hemisphere, 1989.
14. Hestroni G., Rozenblit R., Yarin L.P. A hot-foil infrared technique for studying the temperature field of a wall // *Meas. Sci. Technol.* 1996. V. 7, N 10. P. 1418–1427; <https://doi.org/10.1088/0957-0233/7/10/012>
15. Sargent S.R., Hedlund C.R., Ligrani P.M. An infrared thermography imaging system for convective heat transfer measurements in complex flows. *Meas. Sci. Technol.*, 1998, Vol. 9, No. 12, pp. 1974–1981; <https://doi.org/10.1088/0957-0233/9/12/008>
16. Astarita T., Cardone G., Carlomagno G.M., Meola C. A survey of infrared thermography for convective heat transfer measurements. *Opt. Laser Technol.*, 2000, Vol. 32, No. 7, pp. 593–610; [https://doi.org/10.1016/S0030-3992\(00\)00086-4](https://doi.org/10.1016/S0030-3992(00)00086-4)
17. Hadamard J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton Univ. Bull.*, 1902, pp. 49–52.
18. Hadamard J. Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations. New Haven: Yale Univ. Press, 1923.
19. Carleman T. Les Fonctions Quasi Analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
20. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii V.G. Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. Translations of Mathematical Monographs. Providence: Amer. Math. Soc., 1986, Vol. 64.
21. Lavrent'ev M.M. Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics. Springer-Verl., 1967.
22. Mergelyan S.N. Garmonicheskaya approksimatsiya i priblizhennoe reshenie zadach Koshi dlya uravneniya Laplasa [Harmonic approximation and approximate solution of the Cauchy problem for the Laplace equation]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1956, Vol. 11, No. 5, pp. 3–26 (in Russian).
23. M.M. Lavrent'ev O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasa [On the Cauchy problem for Laplace equation]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1956. Vol. 102, No. 2, pp. 205–206 (in Russian).
24. Pucci C. Sui problema di Cauchy non ben posti. *Atti Accad. Naz. Lincei*, 1955, Vol. 18, No. 5, pp. 473–477.
25. Lavrent'ev M.M. O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasa [On the Cauchy problem for Laplace equation]. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1956, Vol. 20, No. 6, pp. 819–842.
26. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Fomin A. V. Ob odnom iteratsionnom metode resheniya zadachi Koshi dlya elepticheskikh uravnenii [An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations]. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1991, Vol. 31, No. 1, pp. 64–73 (in Russian)
27. Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L. Method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1995, Vol. 3, No. 1, pp. 21–46; <https://doi.org/10.1515/jiip.1995.3.1.21>
28. Hao D.N., Lesnic D. The Cauchy problem for Laplace's equation via the conjugate gradient method. *IMA J. Appl. Math.*, 2000, Vol. 65, No. 2, pp. 199–217; <https://doi.org/10.1093/imamat/65.2.199>
29. Marin L., Elliott L., Heggis P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated to the Helmholtz equation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 2003, Vol. 192, No. 5–6, pp. 709–722; [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00592-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00592-3)

30. Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. Conjugate gradient-boundary element solution to the Cauchy problem for Helmholtz-type equations. *Comput. Mech.*, 2003, Vol. 31, No. 3–4, pp. 367–377; <https://doi.org/10.1007/s00466-003-0439-y>
31. Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. BEM solution for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations by the Landweber method. *Engrg. Anal. Bound. Element*, 2004, Vol. 28, No. 9, pp. 1025–1034; <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2004.03.001>
32. Marin L. A meshless method for the numerical solution of the Cauchy problem associated with three-dimensional Helmholtz-type equations. *Appl. Math. Comput.*, 2005, Vol. 165, No. 2, pp. 355–374; <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.04.052>
33. Sorokin S. B. An Implicit Iterative Method for Numerical Solving the Cauchy Problem for Elliptic Equations. *J. Appl. Ind. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 4, pp. 1–14; <https://doi.org/10.1134/S199047891904001X>
34. Klibanov M.V., Santosa F.A. Computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 1991, Vol. 51, No. 6, pp. 1653–1675; <https://doi.org/10.1137/0151085>
35. Clason C., Klibanov M.V. The quasi-reversibility method for thermoacoustic tomography in a heterogeneous medium. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2007, Vol. 30, No. 1, pp. 1–23; <https://doi.org/10.1137/06066970X>
36. Bourgeois L. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation. *Inverse Problems*, 2005, Vol. 21, No. 3, pp. 1087–1104; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/3/018>
37. Bourgeois L. Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation. *Inverse Problems*, 2006, Vol. 22, No. 2, pp. 413–430; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/2/002>
38. Bourgeois L., Darde J. A duality-based method of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem in the presence of noisy data. *Inverse Problems*, 2010, Vol. 26, article 095016; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/9/095016>
39. Bourgeois L. About stability and regularization of ill-posed elliptic Cauchy problems: the case of $C^{1,1}$ domains. *ESAIM: M2AN*, 2010, Vol. 44, No. 4, pp. 715–735; <https://doi.org/10.1051/m2an/2010016>
40. Kabanikhin S.I., Gasimov Y.S., Nurseitov D.B., Shishlenin M.A., Sholpanbaev B.B., Kasenov S.E. Regularization of the continuation problem for elliptic equations. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2014, Vol. 21, No. 6, pp. 871–884; <https://doi.org/10.1515/jip-2013-0041>
41. Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., Kasenov S.E. Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation. *J. Appl. Math.*, 2014, Vol. 2014, article 786326; <https://doi.org/10.1155/2014/786326>
42. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996.
43. Klibanov M.V., Timonov A. Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications. Utrecht, Boston: VSP, 2004.
44. Xiong X.-T., Fu C.-L. Two approximate methods of a Cauchy problem for the Helmholtz equation. *Comput. Appl. Math.*, 2007, Vol. 26, No. 2, pp. 285–307; <https://www.scielo.br/j/cam/a/TxPV5dhMznShZKZJhv6V5YH/?format=pdf&lang=en>
45. Qin H.H., Wen D.W. Tikhonov type regularization method for the Cauchy problem of the modified Helmholtz equation. *Appl. Math. Comput.*, 2009, Vol. 203, No. 5, pp. 617–628; <https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.05.007>
46. Reginska T., Tautenhahn T. Conditional stability estimates and regularization with applications to Cauchy problems for the Helmholtz equation. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2009, Vol. 30, No. 9–10, pp. 1065–1097; <https://doi.org/10.1080/01630560903393170>
47. Cheng J., Hon Y.C., Wei T., Yamamoto M. Numerical computation of a Cauchy problem for Laplace's equation. *Appl. Math. Mech.*, 2001, Vol. 81, No. 10, pp. 665–674; [https://doi.org/10.1002/1521-4001\(200110\)81:10<665::AID-ZAMM665>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/1521-4001(200110)81:10<665::AID-ZAMM665>3.0.CO;2-V)

48. Hon Y.C., Wei T. Backus–Gilbert algorithm for the Cauchy problem of the Laplace equation. *Inverse Probl.*, 2001, Vol. 17, No. 2, pp. 261–271; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/17/2/306>
49. Engl H.W., Leitao A.A. Mann iterative regularization method for elliptic Cauchy problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2001, Vol. 22, No. 7–8, pp. 861–884; <https://doi.org/10.1081/NFA-100108313>
50. Qian Z., Fu C.-L., Xiong X.-T. Fourth-order modified method for the Cauchy problem for the Laplace equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 2006, Vol. 192, No. 2, pp. 205–218; <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.04.031>
51. Shi R., Wei T., Qin H.H. A fourth-order modified method for the Cauchy problem of the modified Helmholtz equation. *Numer. Math. Theor. Meth. Appl.*, 2009, Vol. 2, No. 3, pp. 326–340; <https://doi.org/10.4208/nmtma.2009.m88032>
52. Fu C.-L., Li H.-F., Qian Z., Xiong X.-T. Fourier regularization method for solving a Cauchy problem for the Laplace equation. *Inverse Probl. Sci. Engrg.*, 2008, Vol. 16, No. 2, pp. 159–169; <https://doi.org/10.1080/17415970701228246>
53. Yang F. The truncation method for identifying an unknown source in the Poisson equation. *Appl. Math. Comput.*, 2011, Vol. 217, No. 22, pp. 9334–9339; <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.04.017>
54. Qiu C.-Y., Fu C.-L. Wavelets and regularization of the Cauchy problem for the Laplace equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 338, No. 2, pp. 1440–1447; <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.06.035>
55. Reginska T., Wakulicz A. Wavelet moment method for the Cauchy problem for the Helmholtz equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 2009, Vol. 223, No. 1, pp. 218–229; <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.01.005>
56. Leitao A., Alves M.M. On level set type methods for elliptic Cauchy problems. *Inverse Problems*, 2007, Vol. 23, No. 5, pp. 2207–2222; <https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/5/023>
57. Titarenko V.N., Yagola A.G. Cauchy problems for Laplace equation on compact sets. *Inverse Probl. Sci. Engrg.*, 2002, Vol. 10, No. 3, pp. 235–254; <https://doi.org/10.1080/10682760290007462>
58. Karchevsky A.L. Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2013, Vol. 1, No. 2, pp. 5–20; <https://doi.org/10.32523/2306-3172-2013-1-2-4-20>
59. Sorokin S. B. An economical algorithm for numerical solution of the problem of identifying the right-hand side of the poisson equation. *J. Appl. Ind. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 2, pp. 362–368; <https://doi.org/10.1134/S1990478918020163>
60. Sorokin S. B. An efficient direct method for numerically solving the cauchy problem for laplace’s equation. *Numer. Anal. Appl.*, 2019, Vol. 12, No. 1, pp. 87–103; <https://doi.org/10.1134/S1995423919010075>
61. Sorokin S. B. A Direct Method for Solving the Inverse Coefficient Problem for an Elliptic Equation with Piecewise Constant Coefficients. *J. Appl. Ind. Math.*, 2021, Vol. 15, No. 2, pp. 331–342; <https://doi.org/10.1134/S1990478921020150>
62. Klivanov M.V. Carleman estimates for the regularization of ill-posed Cauchy problems. *Appl. Numer. Math.*, 2015, Vol. 94, pp. 46–74; <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2015.02.003>
63. Marchuk I., Karchevsky A., Surtaev A., Kabov O. Heat flux at the surface of metal foil heater under evaporating sessile droplets. *Internat. J. Aerosp. Engrg.*, 2015, Vol. 2015, article 391036.
64. Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line. *Appl. Math. Model.*, 2016, Vol. 40, No. 2, pp. 1029–1037.
65. Cheverda V. V., Marchuk I. V., Karchevsky A. L., Orlik E. V., Kabov O. A. Experimental investigation of heat transfer in a rivulet on the inclined foil. *Thermophys. Aeromechanics*, 2016, Vol. 23, No. 3, pp. 415–420; <https://doi.org/10.1134/S0869864316030112>
66. Cheverda V. V., Karchevsky A. L., Marchuk I. V., Kabov O. A. Heat flux density in the region of droplet contact line on a horizontal surface of a thin heated foil. *Thermophys. Aeromechanics*, 2017, Vol. 24, No. 5, pp. 803–806; <https://doi.org/10.1134/S086986431705016X>
67. Technical Data. 3M™ Fluorinert™ Electronic Liquid FC-72. <https://multimedia.3m.com/mws/media/648920/3m-fluorinert-electronic-liquid-fc72-en.pdf>
68. Tikhonov A.N. Ob ustoiichevyh metodah summirovaniya ryadov Fur’e [On stable summation methods for Fourier series]. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 1964, Vol. 156, No. 2, pp. 268–271 (In Russian).
69. Pratt W. K. *Digital Image Processing*. N. Y.: Intersci. Publ., 1978.

УДК 517.977

**ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО СЛЕЖЕНИЯ С ЗАДАННОЙ ЭТАЛОННОЙ
ТРАЕКТОРИЕЙ**© 2023 В. А. Соболев^{1,2}¹ФИЦ «Информатика и управление» РАН,
ул. Вавилова, 44, г. Москва 119333, Россия,²Самарский НИУ им. акад. С. П. Королёва,
Московское шоссе, 34, г. Самара 443086, Россия

E-mail: v.sobolev@ssau.ru

Поступила в редакцию 28.02.2023 г.; после доработки 30.03.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Впервые рассматривается задача оптимального слежения с заданной эталонной траекторией и интегральным квадратичным критерием качества при наличии сингулярных возмущений. Для анализа возникающих при решении этой задачи сингулярно возмущённых дифференциальных систем применяется метод декомпозиции, в основе которого лежит техника интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Построено субоптимальное управление, применение которого приводит к отличию значений минимизируемого функционала для оптимального и субоптимального управлений на величину порядка второй степени малого параметра, характеризующего сингулярные возмущения.

Ключевые слова: задача слежения, сингулярные возмущения, интегральные многообразия, декомпозиция.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.309

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимального слежения относятся к числу традиционных задач как теории, так и практики автоматического управления [1, 2]. Такие задачи возникают при управлении маневрированием движущихся объектов, при управлении сменой режимов технологических процессов, при прецизионном слежении антенной радиолокатора за летательными аппаратами (см., например, [3]). Наличие переменных состояния, изменяющихся с разными скоростями, приводит к необходимости рассмотрения динамических моделей с сингулярными возмущениями. Исследованию различных задач управления с сингулярными возмущениями посвящено значительное число публикаций (см. обзоры [4–6]). При этом в большинстве работ (см., например, [4, 5]) применяется метод пограничных функций Васильевой, это относится и к последним публикациям в этой области (см. обзор [7] и оригинальные статьи [8, 9]). Наряду с методом пограничных функций для исследования таких задач успешно применяются метод усреднения, аппроксимация Паде [10], метод интегральных многообразий [11–14] и метод декомпозиции [14, 15]. При этом автору известна только одна публикация, посвящённая анализу сингулярно возмущённой задачи слежения (не оптимального) [16], в которой рассматривается очень узкий специальный класс таких задач, а исследование основывается на применении метода декомпозиции [14], который авторы называют методом Соболева.

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\varepsilon \dot{x} = Ax + Bu. \quad (1)$$

Здесь $A = A(t, \varepsilon)$, $B = B(t, \varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}^{n+m}$, $u \in \mathbb{R}^r$, $t \in [0, t_f]$, ε — положительный малый параметр. Эталонное движение задаётся в явном виде $\eta = \eta(t)$.

Функционал качества имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [e^T(t)Qe(t) + u^T(t)Ru(t)] dt,$$

где $e(t) = x(t) - \eta(t)$, $Q = Q(t) = Q^T(t) \geq 0$, $R = R(t) = R^T(t) > 0$. Пусть матричные и векторные функции, входящие в (1) и функционал качества, могут быть записаны в блочной форме следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon A_1 & \varepsilon A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \varepsilon B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix},$$

где A_1, Q_1 — $(m \times m)$ -матрицы, A_2, Q_2 — $(m \times n)$ -матрицы, A_3 — $(n \times m)$ -матрица, A_4, Q_3 — $(n \times n)$ -матрицы, B_1 — $(m \times r)$ -матрица, B_2 — $(n \times r)$ -матрица, а R — $(r \times r)$ -матрица; x_1, x_2 и η_1, η_2 — векторы размерностей m, n соответственно. Предполагается, что все матричные блоки зависят только от t и векторы η_1, η_2 достаточное число раз непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, t_f]$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для линейной нестационарной системы (1) рассматривается задача нахождения управляющего воздействия u , которое минимизирует функционал качества J . Известно (см., например, [2, 17]), что решение рассматриваемой задачи при точных измерениях координат вектора x и отсутствии ограничений на управление даётся следующим выражением для оптимального управления:

$$u_{\text{opt}} = -\varepsilon^{-1} R^{-1} B^T (Px - \zeta),$$

здесь P — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} + \varepsilon^{-1} PA + \varepsilon^{-1} A^T P - \varepsilon^{-2} PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad P(t_f) = 0, \quad (2)$$

а ζ — решение линейной дифференциальной системы

$$\dot{\zeta} = -\varepsilon^{-1} (A - SP)^T \zeta - Q\eta = 0, \quad \zeta(t_f) = 0. \quad (3)$$

Представим P и ζ в следующем виде:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \varepsilon P_2 \\ \varepsilon P_2^T & \varepsilon P_3 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \varepsilon \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда для матриц P_1, P_2, P_3 получается нелинейная система матричных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= F_1(P_1, P_2, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{P}_2 &= F_2(P_1, P_2, P_3, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{P}_3 &= F_3(P_2, P_3, t, \varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= B_1 R^{-1} B_1^T, \quad S_2 = B_1 R^{-1} B_2^T, \quad S_3 = B_2 R^{-1} B_2^T, \\ F_1 &= -P_1 A_1 - A_1^T P_1 - P_2 A_3 - A_3^T P_2^T + P_1 S_1 P_1 + P_1 S_2 P_2^T + P_2 S_2^T P_1 + P_2 S_3 P_2^T - Q_1, \\ F_2 &= -P_1 A_2 - P_2 A_4 - \varepsilon A_1^T P_2 - A_3^T P_3 + P_1 S_2 P_3 + P_2 S_3 P_3 + \varepsilon (P_1 S_1 P_2 + P_2 S_2^T P_2) - Q_2, \\ F_3 &= -P_3 A_4 - A_4^T P_3 + P_3 S_3 P_3 + \varepsilon (-P_2^T A_2 - A_2^T P_2 + \varepsilon P_2^T S_1 P_2 + P_2^T S_2 P_3 + P_3 S_2^T P_2) - Q_3 \end{aligned}$$

с граничными условиями $P_1(t_f) = 0$, $P_2(t_f) = 0$, $P_3(t_f) = 0$.

Для анализа этой сингулярно возмущённой системы матричных дифференциальных уравнений применяется метод декомпозиции, в основе которого лежит техника интегральных многообразий быстрых и медленных движений. Этот метод позволяет редуцировать данную систему к одному матричному дифференциальному уравнению для блока, соответствующего блоку медленных переменных P_1 в уравнении Риккати.

Векторы ζ_1 и ζ_2 удовлетворяют линейной дифференциальной системе

$$\dot{\zeta}_1 = -(A_1 - S_1 P_1)^T \zeta_1 - (A_3 - S_2^T P_1 - S_3 P_2^T)^T \zeta_2 - Q_1 \eta_1 - Q_2 \eta_2, \quad (4)$$

$$\varepsilon \dot{\zeta}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1 P_2 - S_2 P_3)^T \zeta_1 - (A_4 - \varepsilon S_2^T P_2 - S_3 P_3)^T \zeta_2 - Q_2^T \eta_1 - Q_3 \eta_2 \quad (5)$$

с граничными условиями $\zeta_1(t_f) = 0$, $\zeta_2(t_f) = 0$.

2. АНАЛИЗ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Уравнения системы матричных дифференциальных уравнений Риккати не зависят от ζ , поэтому можно анализ начать с этой системы, следуя [14, 15]. Эта система имеет медленное интегральное многообразие, которое может быть найдено в виде разложений по степеням малого параметра [14, 15, 18] в виде

$$\begin{aligned} P_2 &= L(P_1, t) + \varepsilon L_1(P_1, t) + \varepsilon^2 \dots, \\ P_3 &= H(P_1, t) + \varepsilon H_1(P_1, t) + \varepsilon^2 \dots \end{aligned}$$

Положив $\varepsilon = 0$, получим следующие соотношения для определения матричных функций $L(P_1, t)$ и $H(P_1, t)$:

$$\begin{aligned} 0 &= -P_1 A_2 - L A_4 - A_3^T H + P_1 S_2 H + L S_3 H - Q_2, \\ 0 &= H^T S_3 H - H A_4 - A_4^T H - Q_3. \end{aligned}$$

Второе уравнение представляет собой матричное уравнение Лурье (в англоязычной литературе применяется термин алгебраическое матричное уравнение Риккати), решение которого $H = M(t)$ представляет собой положительно определённую матрицу, если тройка матриц (\bar{Q}_3, A_4, B_2) стабилизируема и полностью наблюдаема при всех $t \in [0, 1]$, где $\bar{Q}_3^T \bar{Q}_3 = Q_3$ (см., например, [13]). Напомним, что в этом случае матрица $D = A_4 - S_3 M$ является гурвицевой при всех $t \in [0, t_f]$. Теперь можно подставить $H = M(t)$ в первое уравнение и найти

$$L = -(P_1 A_2 + A_3^T M + Q_2 - P_1 S_2 M) D^{-1}.$$

Матричные функции L_1 и H_1 определяются из уравнений инвариантности, которые в рассматриваемом случае с учётом равенства

$$\dot{P}_1 = \bar{F}_1 = F_1(P_1, L(P_1, t) + \varepsilon L_1(P_1, t) + \varepsilon^2, \dots, t, \varepsilon)$$

принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial t} (L(P_1, t) + \varepsilon L_1(P_1, t) + \varepsilon^2, \dots) + \frac{\partial}{\partial P_1} (L(P_1, t) + \varepsilon L_1(P_1, t) + \varepsilon^2, \dots) \bar{F}_1 \right] \\ = F_2(P_1, L + \varepsilon L_1(P_1, t) + \varepsilon^2, \dots, H + H_1 + \varepsilon^2, \dots, t, \varepsilon), \end{aligned}$$

$$\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial t} (H(P_1, t) + \varepsilon H_1(P_1, t) + \varepsilon^2 \dots) + \frac{\partial}{\partial P_1} (H(P_1, t) + \varepsilon H_1(P_1, t) + \varepsilon^2, \dots) \bar{F}_1 \right] = F_3(L + \varepsilon L_1(P_1, t) + \varepsilon^2, \dots, H(P_1, t) + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2, \dots, t, \varepsilon).$$

Приравнивая коэффициенты при первой степени малого параметра, получаем линейные относительно неизвестных матричных функций L_1 и H_1 соотношения

$$\bar{F}_1(P_1, L, t, 0)(-A_2 + S_2 M)D^{-1} + \frac{\partial L}{\partial t} = -L_1 A_4 - A_1^T L - A_3^T H_1 + P_1 S_1 L + P_1 S_2 H_1 + L S_2^T L + L S_3 H_1 + L_1 S_3 M,$$

$$\dot{M} = -L^T A_2 - A_2^T L - A_4^T H_1 + L^T S_2 M + M S_2^T L + H_1 S_3 M + M S_3 H_1,$$

из второго соотношения находим сначала H_1 , подставляем найденное выражение в первое уравнение и находим L_1 . При необходимости аналогичным образом из соответствующих линейных уравнений находятся L_2, H_2, \dots .

Движение по медленному интегральному многообразию описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{P}_1 = -P_1(A_1 - S_2 L^T) - (A_1^T - L S_2^T)P_1 - L A_3 - A_3^T L^T + P_1 S_1 P_1 - Q_1 + \varepsilon(P_1 S_2 L_1^T + L_1 S_2^T P_1 - L_1 A_3 - A_3^T L_1^T + L_1 S_2^T + L S_3 L_1^T) + \varepsilon^2 \dots \quad (6)$$

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ это уравнение является матричным дифференциальным уравнением Риккати

$$\dot{P}_1 = -P_1 \tilde{A}_1 - \tilde{A}_1^T P_1 + P_1 S_1 P_1 - (Q_1 - \tilde{Q}_1 - \tilde{Q}_1^T),$$

где

$$\tilde{A}_1 = A_1 - S_2 L^T, \quad \tilde{Q}_1 = Q_1 + L A_3 + A_3^T L^T.$$

Чтобы исключить медленную матричную переменную P_1 из быстрой подсистемы, вводят новые переменные Z_2 и Z_3 по формулам

$$P_2 = Z_2 + L + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 \dots, \quad P_3 = Z_3 + M + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 \dots$$

В этом представлении функции Z_2 и Z_3 играют роль функций правого пограничного слоя, а $L + \varepsilon L_1 \dots$ и $M + \varepsilon H_1 \dots$ соответствуют регулярным членам асимптотики представления решений [4]. Если ограничиться рассмотрением регулярной составляющей решений до порядка $O(\varepsilon)$ и правых пограничных функций Z_2, Z_3 до порядка $O(1)$ включительно, то Z_2 из уравнения для P_1 удалять не нужно. В противном случае можно использовать технику быстрых интегральных многообразий для удаления переменной Z_2 с требуемой степенью точности [14, 15].

3. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Вернёмся к рассмотрению системы дифференциальных уравнений для ζ_1 и ζ_2 . После анализа решений матричного дифференциального уравнения Риккати коэффициенты этой системы можно считать известными. Более того, как отмечалось выше, в рассматриваемых предположениях матрица D является гурвицевой, и может сложиться впечатление, что для анализа системы (4), (5) можно применить известную методику блочной диагонализации (см., например, [13, 14]) соответствующей однородной системы. Однако при этом могут возникнуть два препятствия, мешающие осуществить процедуру блочной диагонализации. Оба связаны с тем, что матрица P_3 представляет собой сумму матрицы $M(t)$, главной части матрицы Z_3 и слагаемых, содержащих малый параметр в качестве множителя. Аргументом матрицы Z_3 является

$(t - t_f)/\varepsilon$, что влечёт за собой проблемы, связанные с дифференцированием Z_3 по t . Сказанное в равной степени относится и к матрице Z_2 . Второе препятствие связано с тем, что матрица $M + Z_3$ вырождается при $t = t_f$. Если матрица A_4 тоже вырожденная в этой точке, то матрица D не будет иметь обратной при $t = t_f$ и процедура блочной диагонализации станет нереализуемой. Можно предложить несколько способов преодоления этих препятствий. Первый из них — прямое применение метода пограничных функций Тихонова — Васильевой для получения приближений решений. Учитывая то обстоятельство, что рассматриваемая дифференциальная система является линейной, такой подход представляется вполне естественным и может быть эффективно реализован. В основе второго подхода лежит идея модификации метода блочной диагонализации. Суть модификации состоит в следующем. Система (4), (5) представляется в следующем виде:

$$\dot{\zeta}_1 = -(A_1 - S_1 \bar{P}_1)^T \zeta_1 - (A_3 - S_2^T \bar{P}_1 - S_3 \bar{P}_2^T)^T \zeta_2 + f_1, \quad (7)$$

$$\varepsilon \dot{\zeta}_2 = -(A_2 - \varepsilon S_1 \bar{P}_2 - S_2 \bar{P}_3)^T \zeta_1 - (A_4 - \varepsilon S_2^T \bar{P}_2 - S_3 \bar{P}_3)^T \zeta_2 + f_2. \quad (8)$$

Здесь $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ — регулярные компоненты матричных блоков, которые соответствуют решению, принадлежащему интегральному многообразию медленных движений, т. е. \bar{P}_1 удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению (6):

$$P_2 = L + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 \dots, \quad P_3 = M + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 \dots,$$

а функции f_1, f_2 задаются равенствами

$$\begin{aligned} f_1 &= \varepsilon Z_1 S_1 \zeta_1 + (\varepsilon Z_1 S_2 + Z_2 S_3) \zeta_2 - Q_1 \eta_1 - Q_2 \eta_2, \\ f_2 &= (\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3 S_2^T) \zeta_1 + (\varepsilon Z_2^T S_2 + Z_3 S_3) \zeta_2 - Q_2^T \eta_1 - Q_3 \eta_2, \end{aligned}$$

в которых учтено, что матричный блок P_1 представим в виде суммы \bar{P}_1 и функции типа правого пограничного слоя εZ_1 , и рассматриваются как неоднородные члены линейной системы. К соответствующей однородной системе

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -(A_1 - S_1 \bar{P}_1)^T \zeta_1 - (A_3 - S_2^T \bar{P}_1 - S_3 \bar{P}_2^T)^T \zeta_2, \\ \varepsilon \dot{\zeta}_2 &= -(A_2 - \varepsilon S_1 \bar{P}_2 - S_2 \bar{P}_3)^T \zeta_1 - (A_4 - \varepsilon S_2^T \bar{P}_2 - S_3 \bar{P}_3)^T \zeta_2 \end{aligned}$$

применим известный метод приведения к блочно-диагональной форме. Детальное изложение можно найти, например, в [13, 15]. С этой целью сначала вводится новая быстрая переменная $y_2 = \zeta_2 - L \zeta_1$. Используемая этой формуле матричная функция $L = L(t, \varepsilon)$ удовлетворяет несимметричному матричному дифференциальному уравнению Риккати

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{L} + \varepsilon L [-(A_1 - S_1 \bar{P}_1)^T - (A_3 - S_2^T \bar{P}_1 - S_3 \bar{P}_2^T)^T] L \\ = -(A_2 - \varepsilon S_1 \bar{P}_2 - S_2 \bar{P}_3)^T - [(A_4 - \varepsilon S_2^T \bar{P}_2 - S_3 \bar{P}_3)^T] L, \end{aligned}$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра

$$L = L_0(t) + \varepsilon L_1(t) + \varepsilon^2 \dots,$$

где

$$L_0(t) = -[D^T(t)]^{-1} (A_2 - S_2 M)^T,$$

$$\begin{aligned} L_1(t) &= -[D^T(t)]^{-1} [\dot{L}_0 + L_0 (-(A_1 - S_1 \bar{P}_1)^T - (A_3 - S_2^T \bar{P}_1 - S_3 \bar{L}^T)^T L_0 \\ &\quad - L^T S_1 - H_1 S_2^T - (S_2^T L + S_3 H_1)^T L_0]. \end{aligned}$$

Для переменных ζ_1, y_2 получаем систему

$$\dot{\zeta}_1 = [-(A_1 - S_1\bar{P}_1)^T - (A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T L]\zeta_1 - (A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T y_2, \quad (9)$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T\bar{P}_2 - S_3\bar{P}_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T]y_2. \quad (10)$$

На следующем шаге вводится новая медленная переменная $y_1 = \zeta_1 - \varepsilon H y_2$. При этом матричная функция $H = H(t, \varepsilon)$ удовлетворяет линейному матричному дифференциальному уравнению

$$\varepsilon \dot{H} + H[(A_4 - \varepsilon S_2^T\bar{P}_2 - S_3\bar{P}_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T] = -(A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T,$$

из которого она может быть легко найдена в виде разложения по степеням малого параметра

$$H = H_0(t) + \varepsilon H_1(t) + \varepsilon^2 \dots,$$

где

$$H_0(t) = -(A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T [D^T(t)]^{-1}.$$

В результате получаются две независимые подсистемы

$$\dot{y}_1 = [-(A_1 - S_1\bar{P}_1)^T - (A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T L]y_1,$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T\bar{P}_2 - S_3\bar{P}_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T]y_2.$$

Если применить преобразование $y_2 = \zeta_2 - L\zeta_1$, $y_1 = \zeta_1 - \varepsilon H y_2$ к неоднородной системе (7), (8), то получится дифференциальная система вида

$$\dot{y}_1 = [-(A_1 - S_1\bar{P}_1)^T - (A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T L]y_1 + \tilde{f}_1, \quad (11)$$

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T\bar{P}_2 - S_3\bar{P}_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T]y_2 + \tilde{f}_2, \quad (12)$$

где

$$\tilde{f}_1 = (I + \varepsilon HL)f_1 - Hf_2, \quad \tilde{f}_2 = f_2 - \varepsilon Lf_1.$$

Здесь I — единичная матрица.

Поскольку правые части уравнений (11), (12) разнотипны, имеет смысл представить переменные y_1, y_2 в виде сумм переменных v_1, v_2 и z_1, z_2 , т. е. $y_1 = v_1 + z_1$, $y_2 = v_2 + z_2$. Для этих переменных получаются уравнения

$$\dot{v}_1 = [-(A_1 - S_1\bar{P}_1)^T - (A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T L]v_1 + g_{11}, \quad (13)$$

$$\varepsilon \dot{v}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T\bar{P}_2 - S_3\bar{P}_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T]v_2 + g_{12}, \quad (14)$$

$$\dot{z}_1 = [-(A_1 - S_1\bar{P}_1)^T - (A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T L]z_1 + g_{21}, \quad (15)$$

$$\varepsilon \dot{z}_2 = -[(A_4 - \varepsilon S_2^T\bar{P}_2 - S_3\bar{P}_3)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T\bar{P}_1 - S_3\bar{P}_2^T)^T]z_2 + g_{22}. \quad (16)$$

Здесь

$$g_{11} = [HQ_2^T - (I + \varepsilon HL)Q_1]\eta_1 + [HQ_3 - (I + \varepsilon HL)Q_2]\eta_2,$$

$$g_{12} = (\varepsilon LQ_1 - Q_2^T)\eta_1 + (\varepsilon LQ_2 - Q_3)\eta_2,$$

$$g_{21} = [\varepsilon Z_1 S_1 + (\varepsilon Z_1 S_2 + Z_2 S_3)L](v_1 + z_1) + [\varepsilon^2 Z_1 S_1 H + (\varepsilon Z_1 S_2 + Z_2 S_3)(I + \varepsilon LH)](v_2 + z_2),$$

$$g_{22} = [\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3 Z_2^T + (\varepsilon Z_2^T S_2 + Z_3 Z_3)](v_1 + z_1) + [\varepsilon(\varepsilon Z_2^T S_1 + Z_3 S_2^T)H + (\varepsilon Z_2 S_2 + Z_3 S_3)(I + \varepsilon HL)](v_2 + z_2).$$

Вектор v_1 может быть найден с любой степенью точности как решение независимого линейного дифференциального уравнения (13). Ещё проще ситуация с вектором v_2 , который может быть найден из независимого линейного дифференциального уравнения (14) при помощи только алгебраических операций. После того, как найдены v_1 и v_2 , линейные уравнения (15), (16) можно рассматривать как независимые и находить векторы z_1 и z_2 с любой степенью точности.

Таким образом, применение техники интегральных многообразий позволило осуществить декомпозицию задачи построения оптимального управления (2), (3) на несколько независимых подзадач, каждая из которых может быть решена с любой степенью точности по отношению к степеням малого параметра.

4. ПОСТРОЕНИЕ СУБООПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

При построении субоптимального управления ограничимся вычислением регулярной составляющей решений до порядка $O(\varepsilon)$ и главных членов правых пограничных функций Z_2, Z_3 (Z_1 имеет множителем малый параметр).

Из уравнений (13) и (14) переменные v_1 и v_2 могут быть найдены с любой степенью точности в виде асимптотических разложений без особых затруднений в силу линейности уравнений. В уравнении (13) достаточно учитывать члены нулевого и первого порядков по малому параметру. Тогда это уравнение принимает вид

$$\dot{v}_1 = [- (A_1 - S_1 \bar{P}_1)^T - (A_3 - S_2^T \bar{P}_1 - S_3(L + \varepsilon L_1)^T)^T L] v_1 + g_{11},$$

Из уравнения (14), которое можно представить в виде

$$\varepsilon \dot{v}_2 = -[(D - \varepsilon S_2^T L - S_3 \varepsilon H)^T + \varepsilon L(A_3 - S_2^T \bar{P}_1 - S_3 L^T)^T] v_2 + g_{12},$$

последовательно находим

$$\begin{aligned} v_2 &= L_0 + \varepsilon L_1, \quad L_0 = -D^{-1}(Q_2^T \eta_1 + Q_3 \eta_2), \\ L_1 &= D^{-1}[L_0(Q_1 \eta_1 + Q_2 \eta_2)] + D^{-1}[\dot{L} + (S_2^T L + S_3 H) - L_0((A_3 - S_2^T \bar{P}_1 - S_3 L^T)^T)] L. \end{aligned}$$

Для вектора z_2 приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{z}_2 = -D z_2 + (Z_3 Z_2^T + Z_3 S_3) v_1 + Z_3 S_3 (v_2 + z_2),$$

так как в пределах выбранной степени точности вектором z_1 можно пренебречь.

Это означает что и функции ζ_1, ζ_2 могут быть найдены с любой степенью точности на основании формул

$$\zeta_1 = y_1 + \varepsilon H y_2, \quad \zeta_2 = L y_1 + (I + \varepsilon L H) y_2.$$

Учитывая введённые выше ограничения на точность вычислений, можно сделать вывод о том, что при вычислении переменной y_1 правыми пограничными функциями можно пренебречь, а для вычисления ζ_1, ζ_2 можно использовать следующие формулы:

$$\zeta_1 = y_1 + \varepsilon H_0 y_2, \quad \zeta_2 = (L_0 + \varepsilon L_1) y_1 + (I + \varepsilon L_0 H_0) y_2.$$

Для главного члена y_2 имеем задачу

$$\varepsilon \dot{y}_2 = -D(t) y_2 + Z_3 S_3 y_2,$$

где Z_3 является решением задачи

$$\varepsilon \dot{Z}_3 = -Z_3 D - D^T Z_3 + Z_3 S_3 Z_3, \quad Z_3(t_f) = -M(t_f).$$

Заметим, что решение этого матричного уравнения сводится к построению фундаментальной матрицы для линейной однородной системы с матрицей $\varepsilon^{-1}D^T$ [15].

Формула для субоптимального управления может быть представлена следующим образом:

$$u_{\text{subopt}} = -R^{-1}[(B_1^T P_1 + B_2^T P_2^T)x_1 + (\varepsilon B_1^T P_2 + B_2^T P_3)x_2 - B_1^T \zeta_1 - B_2^T \zeta_2]. \quad (17)$$

Здесь P_1 — решение матричного дифференциального уравнения (6) при $\varepsilon = 0$, $P_2 = L + \varepsilon L_1 + Z_2$, где Z_2 является решением задачи

$$\varepsilon \dot{Z}_2 = Z_2 S_3 H + Z_2 S_3 Z_3 + P_1 S_2 Z_3 - A_3^T Z_3 - L S_3 Z_3, \quad Z_2(t_f) = -L(t_f),$$

а при вычислении P_1 достаточно ограничиться приближением нулевого порядка.

Пусть величина J_{opt} соответствует оптимальному значению функционала качества, а значение J_{subopt} получается при использовании субоптимального управления (17). Тогда полученные результаты позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *Существуют такие положительные числа C и ε_0 , что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ справедлива оценка $J_{\text{subopt}} - J_{\text{opt}} \leq C\varepsilon^2$.*

Доказательство. Доказательство проводится по стандартной схеме (см., например, [19, 20]) и основывается на том очевидном факте, что интеграл от пограничной функции представляет собой величину порядка $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Пример. Рассмотрим управляемую систему вида

$$\varepsilon \ddot{x} = u, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Функционал качества имеет вид

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 [x^2(t) + (1 + \varepsilon^2)\dot{x}^2(t) + u^2(t)] dt.$$

В рассматриваемом случае имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \varepsilon^{-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R = (1).$$

Формула для субоптимального управления принимает вид

$$u_{\text{subopt}} = -[p_2 x + p_3 \dot{x} - \zeta_2].$$

Матричное дифференциальное уравнение Риккати для элементов матрицы

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & \varepsilon p_2 \\ \varepsilon p_2 & \varepsilon p_3 \end{pmatrix}$$

может быть записано в виде системы трёх скалярных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= p_2^2 - 1, \\ \varepsilon \dot{p}_2 &= p_2 p_3 - p_1, \\ \varepsilon \dot{p}_3 &= p_3^2 - 2\varepsilon p_2 - 1 - \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Эта система имеет точное инвариантное многообразие $p_2 = p_1 - \varepsilon$, $p_3 = \varepsilon p_1 + 1 - \varepsilon^2$, т. е. $L = P_1$, $L_1 = -1$, $H = 1$, $H_1 = P_1$, движение на котором описывается скалярным дифференциальным уравнением Риккати $\dot{p}_1 = p_1^2 - 2\varepsilon p_1 - (1 + \varepsilon^2)$.

Преобразование $p_2 = p_1 - \varepsilon + Z_2$, $p_3 = 1 + \varepsilon p_1 - \varepsilon^2 + Z_3$ приводит эту систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= (p_1 - \varepsilon + Z_2)^2 - 1, \\ \varepsilon \dot{Z}_2 &= Z_2 Z_3 + Z_2(1 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 - \varepsilon 2p_1) + Z_3(p_1 - \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{Z}_3 &= Z_3^2 + 2Z_3(1 - \varepsilon^2 + \varepsilon p_1) - 2\varepsilon Z_2. \end{aligned}$$

Ограничимся рассмотрением регулярных компонентов [4] решений до порядка $O(\varepsilon)$ и правых пограничных функций Z_2, Z_3 до порядка $O(1)$ включительно. Заметим, что $Z_2(1) = O(\varepsilon)$; это позволяет не принимать во внимание значения Z_2 и перейти к рассмотрению следующих двух уравнений:

$$\dot{p}_1 = (p_1 - \varepsilon)^2 - 1, \quad \varepsilon \dot{Z}_3 = Z_3^2 + 2Z_3$$

с граничными условиями

$$p_1(1) = 0, \quad Z_3(1) = -1.$$

Это уравнения с разделяющимися переменными, поэтому их интегрирование представляет собой простое упражнение. Для p_1, Z_3 имеем

$$\begin{aligned} p_1(t, \varepsilon) &= \varepsilon + \frac{1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon) \exp(2(t - 1))}{1 - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \exp(2(t - 1))}, \quad p_1(t, 0) = \frac{1 - \exp(2(t - 1))}{1 + \exp(2(t - 1))}, \\ Z_3 &= -\frac{2 \exp(2(t - 1)/\varepsilon)}{1 + \exp(2(t - 1)/\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем $p_2 = p_1(t, \varepsilon) - \varepsilon$, $P_3 = 1 + \varepsilon p_1(t, 0) + Z_3$. Отметим равенства $D = -1$, $L = 1 + O(\varepsilon^2)$, $H = p_1 + O(\varepsilon^2)$. Переход к переменным y_1, y_2 совершается по формулам $\zeta_1 = y_1 + \varepsilon P_1 y_2$, $\zeta_2 = y_1 + y_2$.

Уравнение для v_1, v_2 принимает в рассматриваемом случае вид

$$\dot{v}_1 = p_1 v_1 - (1 + p_1(t, 0))\eta_1 + p_1(t, 0)\eta_2.$$

Это скалярное линейное дифференциальное уравнение, решение которого представимо в виде

$$v_1(t, \varepsilon) = -\int_t^1 V_1(t, s, \varepsilon) [-(1 + P_1(s, 0))\eta_1(s) + P_1(s, 0)\eta_2(s)] ds.$$

Здесь

$$V_1(t, s, \varepsilon) = \exp\left(\int_s^t p_1(\tau, \varepsilon) d\tau\right) = \varphi(t, \varepsilon)/\varphi(s, \varepsilon),$$

где

$$\varphi(t, \varepsilon) = \frac{\exp(t - 1)}{1 - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \exp(2(t - 1))}.$$

Из уравнения (14), которое можно представить в виде

$$\varepsilon \dot{v}_2 = [1 + \varepsilon(1 + p_1(t, 0))]v_2 + \varepsilon\eta_1 - \eta_2,$$

последовательно находим

$$\begin{aligned} v_2 &= \phi_0 + \varepsilon\phi_1, \quad \phi_0 = \eta_2, \\ \phi_1 &= \dot{\eta}_2 - (1 + p_1(t, 0))\eta_2 - \eta_1. \end{aligned}$$

Для вектора z_2 приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{z}_2 = z_2 + Z_3^2 v_1 + Z_3(v_2 + z_2) = (1 + Z_3)z_2 + Z_3^2 v_1 + Z_3 v_2,$$

так как в пределах выбранной степени точности вектором z_1 можно пренебречь. Решение этого уравнения может быть представлено в форме

$$V_2(t, 1, \varepsilon)(-\eta(1)) - \varepsilon^{-1} \int_t^1 V_2(t, s, \varepsilon)[Z_3^2(s, \varepsilon)v_1(s, 0) + Z_3(s, \varepsilon)\eta_2(s)] ds.$$

Здесь

$$V_2(t, s, \varepsilon) = \exp\left(\int_s^t \text{th}(2(t-1)/\varepsilon) d(\tau/\varepsilon)\right) = \frac{\text{ch}((t-1)/\varepsilon)}{\text{ch}((s-1)/\varepsilon)}.$$

Разумеется, можно применить асимптотический метод Тихонова — Васильевой и упростить выражение под знаком интеграла, что позволит вычислить его в аналитическом виде.

В результате для функции ζ_2 получено следующее приближённое выражение:

$$\zeta_2 = y_1 + y_2 = v_1 + v_2 + z_2,$$

для каждого из слагаемых в котором получена соответствующая формула, содержащая функции, задающие эталонную траекторию. Таким образом, все необходимые для построения субоптимального управления компоненты найдены. Следует отметить, что решение исходной пятимерной системы дифференциальных уравнений в итоге свелось к решению четырёх независимых скалярных уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для исследования сингулярно возмущённых задач оптимального слежения с заданной эталонной траекторией применяется метод декомпозиции, основанный на геометрическом подходе к анализу дифференциальных систем с быстрыми и медленными переменными. Показано, что применение метода декомпозиции позволяет существенно понизить размерность систем матричных дифференциальных уравнений, возникающих при решении задач оптимального слежения и тем самым упрощает анализ этих задач. Следует заметить, что при наличии случайных возмущений типа гауссовского белого шума в случае точных измерений вектора состояния закон оптимального управления сохраняет свой вид.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егупов Н.Д., Пупков К.А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 4. Теория оптимизации систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004.
2. Sontag E. Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems. N. Y.: Springer-Verl., 1998.
3. Смагин В.И., Параев Ю.И. Синтез следящих систем управления по квадратичным критериям. Томск: Изд-во Томск. гос. ун-та, 1996.
4. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–78.
5. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

6. *Naidu D.S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview // *Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. Algorithms.* 2002. V. 9, N 2. P. 233–278.
7. *Курина Г.А., Калашникова М.А.* Сингулярно возмущённые задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // *Автоматика и телемеханика.* 2022. № 11, С. 3–61.
8. *Kurina G, Kalashnikova M.* Justification of direct scheme for asymptotic solving three-tempo linear-quadratic control problems under weak nonlinear perturbations // *Axioms.* 2022. V. 11, N 11. Article 647; <https://doi.org/10.3390/axioms11110647>
9. *Drăgan V.* On the linear quadratic optimal control for systems described by singularly perturbed Itô differential equations with two fast time scales // *Axioms.* 2019. V. 8, N 1. Article 30; <https://doi.org/10.3390/axioms8010030>
10. *Danik Y., Dmitriev M.* Padé Approximations and the SDRE technique in the design of parametric families of feedback laws // *Internat. Russian Automation Conference (RusAutoCon).* Sochi. 2022. P. 587–594; DOI: 10.1109/RusAutoCon54946.2022.9896329
11. *O'Malley R.E., Mortell M.P., Pokrovskii A., Sobolev V.A.* *Singular Perturbations and Hysteresis.* Philadelphia: SIAM, 2005.
12. *Ghorbel F., Spong M. W.* Integral manifolds of singularly perturbed systems with application to rigid-link flexible-joint multibody systems // *Internat. J. Non-Linear Mech.* 2000. V. 35. P. 133–155.
13. *Kokotović P.V., Khalil H.K., O'Reily J.* *Singular Perturbations Methods in Control. Analysis and Design.* N. Y.: Acad. Press, 1986.
14. *Sobolev V.A.* Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system // *Syst. Control Lett.* 1984. N 5. P. 169–179.
15. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущённых систем. М.: Физматлит, 2009.
16. *Prasov A., Khalil H.K.* Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise // *Internat. J. Adapt. Control Signal Proc.* 2016. V. 30, N 8–10. P. 1228–1243.
17. *Sobolev V.* Dimensional reduction of optimal tracking problems with a given reference trajectory // 16th *Internat. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference).* Moscow. 2022. P. 1–3; DOI: 10.1109/STAB54858.2022.9807563
18. *Кононенко Л.И., Соболев В.А.* Асимптотические разложения медленных интегральных многообразий // *Сиб. мат. журн.* 1994. Т. 35, № 6. С. 1264–1278.
19. *O'Malley R. E. Jr.* On two methods of solution for a singularly perturbed linear state regulator problem // *SIAM Rev.* 1975. V. 17, N 1. P. 16–37.
20. *Drăgan V., Halanay A.* Suboptimal linear controller by singular perturbation techniques // *Rev. Roumaine Sci. Techn. Ser. Electrotechn. Engrg.* 1975. V. 21, N 4. P. 585–591.

UDC 517.977

DECOMPOSITION OF SINGULARLY PERTURBED OPTIMAL TRACKING PROBLEMS WITH A GIVEN REFERENCE TRAJECTORY© 2023 V. A. Sobolev^{1,2}¹*Federal Research Center «Informatics and Management» RAS,
Vavilova 44, Moscow 119333, Russia,*²*Samara Scientific Research University named after Academician S. P. Koroleva,
Moskovskoe shosse 34, Samara 443086, Russia*

E-mail: v.sobolev@ssau.ru

Received 28.02.2023, revised 30.03.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. For the first time, the problem of optimal tracking with a given reference trajectory and an integral quadratic performance criterion in the presence of singular perturbations is considered. To analyze the singularly perturbed differential systems that arise in solving this problem, the decomposition method is used, which is based on the technique of integral manifolds of fast and slow motions. A suboptimal control is constructed, the use of which leads to a difference in the values of the minimized functional for the optimal and suboptimal controls by an amount of the order of the second power of a small parameter characterizing singular perturbations.

Keywords: tracking problem, singular perturbations, integral manifolds, decomposition.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.309

REFERENCES

1. Egupov N.D., Pupkov K.A. *Metody klassicheskoy i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravleniya. T. 4. Teorija optimizacii sistem avtomaticheskogo upravleniya [Methods of classical and modern theory of automatic control. Vol. 4. Theory of optimization of automatic control systems].* Moscow: Bauman Moscow State Tech. Univ. Press, 2004 (in Russian).
2. Sontag E. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite-Dimensional Systems.* N. Y.: Springer-Verl., 1998.
3. Smagin V.I., Paraev Ju.I. *Sintez sledjashhih sistem upravleniya po kvadraticnym kriterijam [Synthesis of tracking control systems by quadratic criteria].* Tomsk: Tomsk State Univ. Press, 1996.
4. Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G., *Singular perturbations in optimal control problems. J. Math. Sci.,* 1986, Vol. 34, pp. 1579–1629.
5. Dmitriev M.G., Kurina G.A. *Singular perturbations in control problems. Autom. Remote Control,* 2006, Vol. 67, pp. 1–43.
6. Naidu D.S. *Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview. Dynam. Continuous, Discrete and Impulsive Syst. Ser. B: Appl. Algorithms,* 2002, Vol. 9, No. 2, pp. 233–278.
7. Kurina G.A., Kalashnikova M.A. *Singulyarno vozmushchennye zadachi s raznotempovymi bystryimi peremennymi [Singularly perturbed problems with different-time fast variables]. Avtomatika i Telemekhanika,* 2022, No. 11, pp. 3–61 (in Russian).

8. Kurina G, Kalashnikova M. Justification of direct scheme for asymptotic solving three-tempo linear-quadratic control problems under weak nonlinear perturbations. *Axioms*, 2022, Vol. 11, No. 11, article 647; <https://doi.org/10.3390/axioms11110647>
9. Drăgan V. On the linear quadratic optimal control for systems described by singularly perturbed Itô differential equations with two fast time scales. *Axioms*, 2019, Vol. 8, No. 1, article 30; <https://doi.org/10.3390/axioms8010030>
10. Danik Y., Dmitriev M. Padé Approximations and the SDRE technique in the design of parametric families of feedback laws. *Internat. Russian Automation Conference (RusAutoCon)*. Sochi, 2022, pp. 587–594; DOI: 10.1109/RusAutoCon54946.2022.9896329
11. O'Malley R.E., Mortell M.P., Pokrovskii A., Sobolev V.A. *Singular Perturbations and Hysteresis*. Philadelphia: SIAM, 2005.
12. Ghorbel F., Spong M. W. Integral manifolds of singularly perturbed systems with application to rigid-link flexible-joint multibody systems. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 2000, Vol. 35, pp. 133–155.
13. Kokotović P.V., Khalil H.K., O'Reily J. *Singular Perturbations Methods in Control. Analysis and Design*. N. Y.: Acad. Press, 1986.
14. Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed system. *Syst. Control Lett.*, 1984, No. 5, pp. 169–179.
15. Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Geometricheskaya dekompozitsiya singulyarno vozmushchennykh sistem [Geometric decomposition of singularly perturbed systems]. Moscow: Fizmatlit, 2009.
16. Prasov A., Khalil H.K. Tracking performance of a highgain observer in the presence of measurement noise. *Internat. J. Adapt. Control Signal Proc.*, 2016, Vol. 30, No. 8–10, pp. 1228–1243.
17. Sobolev V. Dimensional reduction of optimal tracking problems with a given reference trajectory. *16th Internat. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)*. Moscow, 2022, pp. 1–3; DOI: 10.1109/STAB54858.2022.9807563
18. Kononenko L.I., Sobolev V.A. Asymptotic decomposition of slow integral manifolds. *Sib. Math. J.*, 1994, Vol. 35, No. 6, pp. 1119–1132.
19. O'Malley R. E. Jr. On two methods of solution for a singularly perturbed linear state regulator problem. *SIAM Rev.*, 1975, Vol. 17, No. 1, pp. 16–37.
20. Drăgan V., Halanay A. Suboptimal linear controller by singular perturbation techniques. *Rev. Roumaine Sci. Techn. Ser. Electrotechn. Engrg.*, 1975, Vol. 21, No 4, pp. 585–591.

УДК 519.632

РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОТОКА ТЕПЛА НА НЕДОСТУПНОЙ ГРАНИЦЕ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2023 С. Б. Сорокин^{1,2}

¹*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,*
²*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: sorokin@sscc.ru

Поступила в редакцию 28.02.2023 г.; после доработки 03.03.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Рассматривается задача продолжения для уравнения теплопроводности. Определение потока тепла на недоступной границе сводится к обратной задаче. Для численного решения обратной задачи применяется неявная разностная схема. На каждом временном шаге для разностного аналога эллиптического уравнения экономичным прямым методом вычисляется поток тепла на недоступной границе. Предложенный алгоритм существенно расширяет круг решаемых задач и может применяться при создании приборов, способных в реальном масштабе времени определять поток тепла на недоступных для измерения частях неоднородных конструкций, например для определения потока тепла на внутреннем радиусе трубы, выполненной из различных материалов.

Ключевые слова: задача теплопроводности, обратная задача, поток тепла, недоступная граница, математическая модель, численное решение, дискретный аналог, прямой метод.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.310

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание исследователи уделяют теплообменникам. Они активно используются в производстве ядерной энергии, химической и пищевой промышленности, экологической инженерии и многих других инженерных приложениях [1–4].

Теплометрические задачи распространены при моделировании тепловых режимов на газодинамических стендах, в тепловакуумных камерах, при исследовании теплообмена в трубопроводах и газопроводах, при испытании различных двигательных установок, в ходе лётного моделирования, натурных испытаний технических объектов, в различных технологических процессах, связанных с нагревом и охлаждением изделий, и т. д. [5].

Экспериментальные методы изучения теплообменных процессов в ряде случаев слишком дороги или технически невозможны. Поэтому проведение математического моделирования зачастую является единственной возможностью получения необходимых характеристик изделия. Важную часть математических моделей задач теплообмена составляет научное направление, основанное на теории обратных задач.

Одной из классических обратных задач теплопроводности является граничная задача, заключающаяся в нахождении функций, входящих в граничные условия. Она возникает, когда

граничные условия известны не полностью, например часть границы недоступна для непосредственного измерения. Для определения этих граничных условий на границе тела, недоступной для измерений, обычно задаются дополнительные граничные условия (производятся измерения) на доступной части границы.

Математической моделью, описывающей такую практическую задачу, является задача Коши (задача продолжения) для уравнения теплопроводности.

Задача продолжения для уравнения теплопроводности является одной из классических некорректных задач. В общих случаях (сложная геометрия тела, переменные коэффициенты) численные методы её решения основываются на фундаментальных результатах в области некорректных задач (см., например, [6]). Одним из наиболее употребляемых методов, несомненно является метод регуляризации Тихонова, основанный на сведении исходной некорректной задачи к задаче минимизации соответствующего функционала. Поиск минимума функционала осуществляется, как правило, посредством применения итерационных алгоритмов.

Несомненно, имеется обширная литература по алгоритмам решения задачи продолжения для уравнения теплопроводности. Так, в стационарном случае (эллиптическое уравнение) одним из наиболее употребляемых методов решения задачи продолжения является метод фундаментальных решений [7–13]. Другой подход связан со сведением исходной задачи к проблеме моментов [14–16].

Быстрые прямые методы представлены и исследованы в серии работ [17–23].

Оригинальная итерационная процедура решения задачи Коши для эллиптического уравнения предложена в [24] и развита, например, в [25, 26].

Достаточно широкое применение получил способ решения задачи продолжения, основанный на формулировке её в виде операторного уравнения [27]. Решение этого уравнения находится, как правило, итерационным методом [28–30].

В нестационарном случае (параболическое уравнение) алгоритмов решения задачи продолжения представлено значительно меньше. Значительная их часть использует метод фундаментальных решений (см. например, [31–33], а также обзор [34]).

Отдельные модельные задачи продолжения тепловых полей решались путём сведения к интегральным уравнениям [35, 36].

Очень эффективным представляется подход, основанный на операторной записи задачи и итерационном методе минимизации соответствующего функционала [37–40]. В нём необходимость численного решения большого числа прямых задач компенсируется хорошо разработанным аппаратом вычислительной математики.

Наконец, отметим работу [41]. В ней предлагается использовать для решения уравнение с данными о времениподобной поверхности метод сопряжённых операторов из [16]. Рассматривается случай, когда пространственная область имеет форму прямого параллелепипеда. Задача сводится к применению прямого и обратного разложений Фурье и решению интегрального уравнения Вольтерра типа свёртки первого рода. Предложенный алгоритм позволяет быстро решить исходную задачу.

Работа имеет следующую структуру.

В разд. 1 формулируется постановка задачи определения потока тепла на недоступной границе. А именно, формулируется математическая модель, соответствующая этой задаче, которая далее сводится к обратной задаче для уравнения теплопроводности.

В разд. 2 строится дискретный аналог построенной в разд. 1 обратной задачи. В качестве дискретного аналога берётся неявная разностная схема для уравнения теплопроводности. В результате задача определения потока тепла на недоступной границе сводится к решению на каждом временном слое обратной задачи для дискретного аналога стационарной задачи.

Разд. 3 посвящён изложению метода решения обратной задачи для дискретного аналога стационарной задачи на каждом временном слое. В заключение раздела приводится алгоритм расчёта потока тепла на недоступной границе.

Наконец, в разд. 4 описываются и обсуждаются результаты проведённых тестовых расчётов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Математическая модель

При исследовании физических процессов распространения тепла в качестве математической модели обычно используют уравнения параболического или эллиптического типа.

Рассмотрим задачу для параболического уравнения

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial u}{\partial t} - k_1(x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= f(x_1, x_2, t), \\
 (x_1, x_2) \in \Omega &= (a_1, b_1) \times (a_2, b_2), \quad t \in (0, t_F), \\
 0 < c_1 \leq k_i(x_2) \leq c_2, \quad i &= 1, 2, \quad x_2 \in [a_2, b_2], \\
 u(x_1, x_2, 0) &= T_0(x_1, x_2), \\
 -k_1(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} (a_1, x_2, t) &= g_0(x_2, t), \\
 k_1(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} (b_1, x_2, t) &= g_1(x_2, t), \quad x_2 \in (a_2, b_2), \quad t \in (0, t_F), \\
 u(x_1, a_2, t) &= u_0(x_1, t), \\
 -k_2(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} (x_1, a_2, t) &= \alpha(u(x_1, a_2, t) - u_\infty), \quad x_1 \in (a_1, b_1), \quad t \in (0, t_F).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Используя эту задачу, требуется определить функцию $q(x_1, t) = k_2(b_2) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, b_2, t)$ — поток тепла на верхней границе прямоугольной области. Константы ρ , u_∞ — окружающая температура, α , и функции $k_1(x_2)$, $k_2(x_2)$, $f(x_1, x_2, t)$ предполагаются известными.

Известно, что задача (1) некорректна. Переформулируем её в виде обратной задачи [27].

1.2. Обратная задача

Найти функцию $q(x_1, t)$ из соотношений

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial u}{\partial t} - k_1(x_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= f(x_1, x_2, t), \\
 (x_1, x_2) \in \Omega &= (a_1, b_1) \times (a_2, b_2), \quad t \in (0, t_F), \\
 0 < c_1 \leq k_i(x_2) \leq c_2, \quad i &= 1, 2, \quad x_2 \in [a_2, b_2], \\
 u(x_1, x_2, 0) &= T_0(x_1, x_2), \\
 -k_1(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} (a_1, x_2, t) &= g_0(x_2, t), \\
 k_1(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} (b_1, x_2, t) &= g_1(x_2, t), \quad x_2 \in (a_2, b_2), \quad t \in (0, t_F), \\
 -k_2(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} (x_1, a_2, t) &= \alpha(u(x_1, a_2, t) - u_\infty), \\
 k_2(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} (x_1, b_2, t) &= q(x_1, t), \quad x_1 \in (a_1, b_1), \quad t \in (0, t_F),
 \end{aligned} \tag{2}$$

используя дополнительную информацию:

$$u(x_1, a_2, t) = u_0(x_1, t) \quad x_1 \in (a_1, b_1), \quad t \in (0, t_F). \tag{3}$$

То есть из всех задач (2) с разными функциями $q(x_1, t)$ требуется найти такую задачу (такую функцию $q(x_1, t)$), которая имеет решение $u(x_1, x_2, t)$, удовлетворяющее равенству (3).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Разработать эффективный численный алгоритм решения задачи (2), (3).

2. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Будем решать обратную задачу (2), (3) в дискретной форме. Построим сетки

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= \left\{ x_{1,i} = a_1 + ih_1, i = \overline{0, N_1 + 1}, h_1 = \frac{b_1 - a_1}{N_1 + 1} \right\}, \\ \bar{\omega}_2 &= \{x_{2,j} = a_2 + jh_{2,j}, j = \overline{1, N_2 + 1}, x_{2,0} = a_2, x_{2, N_2 + 1} = b_2\}, \\ \bar{\omega} &= \{x_{ij} = (x_{1,i}, x_{2,j}) \mid x_{1,i} \in \bar{\omega}_1, x_{2,j} \in \bar{\omega}_2\}, \\ \omega &= \{x_{ij} = (x_{1,i}, x_{2,j}) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)\}\end{aligned}$$

по пространству;

$$\omega_\tau = \{t_m = m\tau, m = \overline{0, M}, \tau = t_F/M\}$$

по времени.

Зададим скалярные произведения в гильбертовых пространствах сеточных функций $H_{\bar{\omega}_1}$, $H_{\bar{\omega}_2}$ и $H_{\bar{\omega}}$ на сетках $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}$ соответственно следующим образом:

$$(\mu^{h_1}, \nu^{h_1})_{\bar{\omega}_1} = \mu^{h_1}(x_{1,0})\nu^{h_1}(x_{1,0})\frac{h_1}{2} + \sum_{i=1}^{N_1} \mu^{h_1}(x_{1,i})\nu^{h_1}(x_{1,i})h_1 + \mu^{h_1}(x_{1, N_1 + 1})\nu^{h_1}(x_{1, N_1 + 1})\frac{h_1}{2},$$

$$\begin{aligned}(\mu^{h_2}, \nu^{h_2})_{\bar{\omega}_2} &= \mu^{h_2}(x_{2,0})\nu^{h_2}(x_{2,0})\frac{h_{2,1}}{2} \\ &+ \sum_{j=1}^{N_2} \mu^{h_2}(x_{2,j})\nu^{h_2}(x_{2,j})h_{2,j} + \mu^{h_2}(x_{2, N_2 + 1})\nu^{h_2}(x_{2, N_2 + 1})\frac{h_{2, N_2 + 1}}{2},\end{aligned}$$

$$(s^h, w^h)_{\bar{\omega}} = (1, (s^h, w^h)_{\bar{\omega}_2})_{\bar{\omega}_1}.$$

Задаче (2) поставим в соответствие неявную разностную схему [42, 43]

$$\begin{aligned}\rho \frac{u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) - u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_m)}{\tau} + L_h u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) &= f(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}, q^h), \\ u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_0) &= T_0(x_{1,i}, x_{2,j}),\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$L_h u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) \equiv k_1(x_{2,j})\Lambda_1 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) + \Lambda_2 u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}), \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\omega}.$$

Операторы Λ_1 и Λ_2 определяются следующим образом:

$$\Lambda_1 y(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_1} y_{x_1}(x_{1,i}, x_{2,0}, t_{m+1}), & j = 0, \\ -y_{\bar{x}_1 x_1}(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}), & j = \overline{1, N_1}, \\ \frac{2}{h_1} y_{\bar{x}_1}(x_{1,i}, x_{2, N_1 + 1}, t_{m+1}), & j = N_1 + 1, \end{cases}$$

$$\Lambda_2 y(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) = \begin{cases} -\frac{2}{h_{2,1}} k_2(x_{2,0} + 0.5h_2) y_{x_2}(x_{1,i}, x_{2,0}, t_{m+1}) & \\ \qquad \qquad \qquad -\alpha \frac{2}{h_{2,1}} y(x_{1,i}, x_{2,0}, t_{m+1}), & j = 0, \\ -(k_2(x_{2,j} - 0.5h_{2,j}) y_{\bar{x}_2})_{x_2}(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}), & j = \overline{1, N_2}, \\ \frac{2}{h_{2, N_2+1}} k_2(x_{2, N_2+1} - 0.5h_{2, N_2+1}) y_{\bar{x}_2}(x_{1,i}, x_{2, N_2+1}, t_{m+1}), & j = N_2 + 1. \end{cases}$$

Правая часть в (4) имеет вид

$$f^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}, q^h) = \begin{cases} f(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}), & (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \omega, \\ f(x_{1,0}, x_{2,j}, t_{m+1}) + \frac{2}{h_1} g_0(x_{2,j}, t_{m+1}), & j = \overline{1, N_2}, \\ f(x_{1, N_1+1}, x_{2,j}, t_{m+1}) + \frac{2}{h_1} g_1(x_{2,j}, t_{m+1}), & j = \overline{1, N_2}, \\ f(x_{1,i}, x_{2,0}, t_{m+1}) + \frac{2}{h_{2,1}} \alpha(-u_\infty), & i = \overline{0, N_1 + 1}, \\ f(x_{1,i}, x_{2, N_2+1}, t_{m+1}) + \frac{2}{h_{2, N_2+1}} q^h(x_{1,i}, t_{m+1}), & i = \overline{0, N_1 + 1}. \end{cases} \quad (5)$$

Для определения $u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1})$ из (4), (5) по известному на предыдущем слое $u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_m)$ необходимо решить уравнение

$$\gamma u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) + L_h u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) = \gamma u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_m) + f(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}, q^h), \quad (6)$$

$$\gamma = \rho/\tau.$$

Таким образом, на каждом слое t_{m+1} имеем обратную задачу.

Обратная задача. Найти функцию $q^h(x_{1,i}, t_{m+1})$ из соотношений (6), (5), используя дополнительную информацию

$$u(x_{1,i}, a_2, t_{m+1}) = u_0(x_{1,i}, t_{m+1}), \quad x_{1,i} \in \bar{\omega}_1. \quad (7)$$

То есть из всех задач (6), (5) с разными функциями $q^h(x_{1,i}, t_{m+1})$ в (5) требуется найти такую задачу (такую функцию $q^h(x_{1,i}, t_{m+1})$), которая имеет решение $u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1})$, удовлетворяющее равенству (7).

3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НА СЛОЕ t_{m+1}

Функция $q^h(x_{1,i}, t_{m+1})$ будет найдена методом неопределённых коэффициентов в виде разложения

$$q^h(x_{1,i}, t_{m+1}) = \sum_{k=0}^{N_1+1} \alpha_k \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}), \quad i = \overline{0, N_1 + 1}, \quad (8)$$

по базису из собственных функций $\mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i})$, $k = \overline{0, N_1 + 1}$, спектральной задачи

$$\Lambda_1 y^{(1)}(x_{1,i}) = \lambda^{(1)} y^{(1)}(x_{1,i}), \quad x_{1,i} \in \bar{\omega}_1. \quad (9)$$

Нахождение $q^h(x_{1,i}, t_{m+1})$, очевидно, эквивалентно нахождению коэффициентов α_k в разложении (8). Неопределённые коэффициенты будут находиться по имеющейся дополнительной информации о том, что решение $u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1})$ задачи (6), (5) удовлетворяет равенству (7).

Задача (9) имеет аналитическое решение [43, 44], где

$$\begin{aligned}\mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}) &= \sqrt{\frac{2}{b_1 - a_1}} \cos\left(\frac{k\pi(x_{1,i} - a_1)}{b_1 - a_1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N_1, \quad i = \overline{0, N_1 + 1}, \\ \mu_0^{(1h_1)}(x_{1,i}) &= \sqrt{\frac{1}{b_1 - a_1}}, \quad i = \overline{0, N_1 + 1}, \\ \mu_{N_1+1}^{(1h_1)}(x_{1,i}) &= \sqrt{\frac{1}{b_1 - a_1}} \cos\left(\frac{(N_1 + 1)\pi(x_{1,i} - a_1)}{b_1 - a_1}\right), \quad i = \overline{0, N_1 + 1}, \\ (\mu_k^{(1h_1)}, \mu_l^{(1h_1)})_{\overline{\omega_1}} &= \delta_{kl}\end{aligned}$$

— собственные функции;

$$\lambda_k^{(1h_1)} = \frac{4}{h_1^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h_1}{2(b_1 - a_1)}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N_1 + 1,$$

— собственные числа.

Воспользуемся принципом суперпозиции, рассмотрим следующие вспомогательные задачи:

$$\begin{aligned}\gamma v_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) + L_h v_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) &= r_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}), \\ r_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) &= \gamma u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_m) + f(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}, 0)\end{aligned}\tag{10}$$

— специальную задачу;

$$\gamma \bar{v}_k^h(x_{1,i}, x_{2,j}) + L_h \bar{v}_k^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \bar{r}_k^h(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\omega},\tag{11}$$

$$\bar{r}_k^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} 0, & (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \omega, \\ 0, & j = \overline{1, N_2}, \\ 0, & j = \overline{1, N_2}, \\ 0, & i = \overline{0, N_1 + 1}, \\ \frac{2}{h_{2, N_2+1}} \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}), & i = \overline{0, N_1 + 1}. \end{cases}\tag{12}$$

— серию задач одинакового типа для $k = 0, \dots, N_1 + 1$.

Согласно принципу суперпозиции, после решения этих задач решение $u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1})$ задачи (6), (5) с $q^h(x_{1,i}, t_{m+1})$ вида (8) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) &= v_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) + \sum_{k=0}^{N_1+1} \alpha_k \bar{v}_k^h(x_{1,i}, x_{2,j}), \\ i &= \overline{0, N_1 + 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}.\end{aligned}\tag{13}$$

3.1. Решение вспомогательных задач

Решение задачи (10) можно найти методом разложения в одинарный ряд [45].

Рассматривая сеточные функции $v_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1})$ и $r_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1})$ при фиксированном j как сеточные функции аргумента i , разложим их по базису из собственных функций $\mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i})$, $k = 0, 1, \dots, N_1 + 1$:

$$\begin{aligned}v_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) &= \sum_{k=0}^{N_1+1} v_k^0(j) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}), \quad v_k^0(j) = (v_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}), \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}))_{\overline{\omega_1}}, \\ r_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) &= \sum_{k=0}^{N_1+1} g_k^0(j) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}), \quad r_k^0(j) = (r_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}), \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}))_{\overline{\omega_1}}.\end{aligned}\tag{14}$$

Подставляя эти разложения в уравнение (10) и учитывая (9), имеем

$$\sum_{k=0}^{N_1+1} [(\gamma + k_1(x_{2,j})\lambda_k^{(1h_1)})v_k^0(j) + \Lambda_2 v_k^0(j)] \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}) = \sum_{k=0}^{N_1+1} g_k^0(j) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}).$$

Поскольку собственные функции линейно независимы, для каждого числа $k = 0, 1, \dots, N_1 + 1$ получаем следующую систему линейных уравнений:

$$(\gamma + k_1(x_{2,j})\lambda_k^{(1h_1)})v_k^0(j) + \Lambda_2 v_k^0(j) = g_k^0(j), \quad j = 0, \dots, N_2 + 1. \quad (15)$$

Решив все эти системы методом прогонки, можно вычислить решение задачи (10) по формуле (14).

Рассмотрим задачи (11), (12). При фиксированном k решение задачи (11), (12) может быть записано следующим образом:

$$\bar{v}_k^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \beta_k(j) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}), \quad (16)$$

где $\beta_k(j)$ находятся путём решения задачи

$$\begin{aligned} (\gamma + k_1(x_{2,j})\lambda_k^{(1h_1)})\beta_k(j) + \Lambda_2 \beta_k(j) &= 0, \quad j = 0, \dots, N_2, \\ (\gamma + k_1(x_{2,j})\lambda_k^{(1h_1)})\beta_k(j) + \Lambda_2 \beta_k(j) &= \frac{2}{h_{2,N_2+1}}, \quad j = N_2 + 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Формулу (16) можно проверить непосредственно или получить из (11), (12) методом разложения в одинарный ряд.

3.2. Алгоритм расчёта потока тепла на недоступной границе

Для каждого m начиная с $m = 0$ нужно выполнить следующие действия.

1. Решить задачи (10) и (11), (12) описанными выше методами. Согласно (13), (14) и (16) имеем

$$\begin{aligned} u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) &= \sum_{k=0}^{N_1+1} v_k^0(j) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}) + \sum_{k=0}^{N_1+1} \alpha_k \beta_k(j) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}), \\ i &= \overline{0, N_1 + 1}, \quad j = \overline{0, N_2 + 1}. \end{aligned} \quad (18)$$

2. Разложить дополнительную информацию $u_0(x_{1,i}, t_{m+1})$ по базису из собственных функций $\mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i})$, $k = 0, 1, \dots, N_1 + 1$:

$$u_0(x_{1,i}, t_{m+1}) = \sum_{k=0}^{N_1+1} \gamma_k(t_{m+1}) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}). \quad (19)$$

3. Подставить в (7) решение в виде разложения (18) при $j = 0$ и дополнительную информацию в виде (19)

$$\sum_{k=0}^{N_2+1} v_k^0(0) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}) + \sum_{k=0}^{N_1+1} \alpha_k \beta_k(0) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}) = \sum_{k=0}^{N_1+1} \gamma_k(t_{m+1}) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}).$$

Следовательно,

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k(t_{m+1}) - v_k^0(0)}{\beta_k(0)}, \quad k = 0, \dots, N_1 + 1. \quad (20)$$

4. Вычислить поток тепла на недоступной границе для $t = t_{m+1}$:

$$q^h(x_{1,i}, t_{m+1}) = \sum_{k=0}^{N_1+1} \alpha_k \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}), \quad i = \overline{0, N_1 + 1},$$

с α_k из (20).

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для проверки работоспособности представленного алгоритма были проведены тестовые расчёты.

Решалась задача (2) в области $\Omega = (0, \pi) \times (0, 1)$. Величины t_F и ρ выбирались равными $\pi/2$ и 1 соответственно. В качестве коэффициентов в (2) выбирались функции $k_1(x_2) = e^{x_2}$, $k_2(x_2) = e^{-x_2}$. Далее, выбиралась функция $u(x_1, x_2, t) = \cos^2(n x_1) e^{m x_2} \sin t$, по которой из (2) вычислялись необходимые величины: $f(x_1, x_2, t)$, $T_0(x_1, x_2)$, $g_0(x_2, t)$, $g_1(x_2, t)$, $u_0(x_1, t)$ (дополнительная информация), $\alpha = -m$, $u_\infty = 0$ и, наконец, подлежащий определению поток

$$q(x_1, t) = k_2(x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 1, t) = e^{-1} m \cos^2(n x_1) e^m \sin t, \quad x_1 \in (0, \pi), \quad t \in (0, \pi/2).$$

Вычисления проводились для параметров $n = 2$ и $m = 3$.

Некорректность решаемой задачи требует применения регуляризации. В связи с этим при проведении численных экспериментов вместо (20) использовалась формула

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k(t_{m+1}) - v_k^0(0)}{\beta_k(0) + \varepsilon}, \quad k = 0, \dots, N_1 + 1. \quad (21)$$

Поясним смысл (21). Одновременно будет представлена другая трактовка предложенного алгоритма решения обратной задачи на слое t_{m+1} (5)–(7).

Решив две задачи: задачу (10) и задачу

$$\gamma w^h(x_{1,i}, x_{2,j}) + L_h w^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = s^h(x_{1,i}, x_{2,j}), \quad (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \bar{\omega}, \quad (22)$$

$$s^h(x_{1,i}, x_{2,j}) = \begin{cases} 0, & (x_{1,i}, x_{2,j}) \in \omega, \\ 0, & j = \overline{1, N_2}, \\ 0, & j = \overline{1, N_2}, \\ 0, & i = \overline{0, N_1 + 1}, \\ \frac{2}{h_{2, N_2+1}} q^h(x_{1,i}, t_{m+1}), & i = \overline{0, N_1 + 1}, \end{cases} \quad (23)$$

решение $u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1})$ задачи (5), (6) представляется в виде суммы

$$u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) = v_0^h(x_{1,i}, x_{2,j}, t_{m+1}) + w^h(x_{1,i}, x_{2,j}).$$

Среди всех этих решений нас интересует то, которое удовлетворяет (7), т. е. для которого при $j = 0$ выполняется равенство

$$v_0^h(x_{1,i}, x_{2,0}, t_{m+1}) + w^h(x_{1,i}, x_{2,0}) = u_0(x_{1,i}, t_{m+1}). \quad (24)$$

Теперь так же, как это описано, например, в [46], введём оператор

$$A_h q^h(x_{1,i}, t_{m+1}) = w^h(x_{1,i}, x_{2,0}). \quad (25)$$

Оператор A_h ставит в соответствие функции $q^h(x_{1,i}, t_{m+1})$ след решения задачи (22), (23) на нижней части границы расчётной области. Введённый оператор позволяет переписать равенство (24) в виде

$$A_h q^h(x_{1,i}, t_{m+1}) = u_0(x_{1,i}, t_{m+1}) - v_0^h(x_{1,i}, x_{2,0}, t_{m+1}). \quad (26)$$

Таким образом, задача продолжения свелась к решению уравнения (26).

Полученное в п. 4.1 решение (16) задачи (11), (12) позволяет утверждать, что

$$A_h \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}) = \beta_k(0) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}), \quad k = 0, 1, \dots, N_1 + 1.$$

Следовательно, собственные функции в спектральной задаче $A_h \varphi = \nu \varphi$ для оператора A_h совпадают с собственными функциями задачи (9), а собственные числа $\nu_k = \beta_k(0)$, $k = 0, 1, \dots, N_1 + 1$ вычисляются путём решения задач (17).

Если искать решение $q^h(x_{1,i}, t_{m+1})$ уравнения (26) методом неопределённых коэффициентов в виде разложения (8) по собственным функциям $\mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i})$, $k = 0, 1, \dots, N_1 + 1$, оператора A_h и разложить каждую из функций, входящих в правую часть (26) по $\mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i})$, мы очевидным образом (см. (18), (19)) приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{N_1+1} \alpha_k \nu_k \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}) = \sum_{k=0}^{N_1+1} \gamma_k(t_{m+1}) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}) - \sum_{k=0}^{N_2+1} v_k^0(0) \mu_k^{(1h_1)}(x_{1,i}).$$

Откуда

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k(t_{m+1}) - v_k^0(0)}{\nu_k}, \quad k = 0, \dots, N_1 + 1,$$

что, с учётом $\nu_k = \beta_k(0)$, в точности совпадает с (20).

Применяя для регуляризации метод Лаврентьева, а именно, заменяя уравнение (26) на уравнение

$$(A_h + \varepsilon E) q^h(x_{1,i}, t_{m+1}) = u_0(x_{1,i}, t_{m+1}) - v_0^h(x_{1,i}, x_{2,0}, t_{m+1}),$$

мы приходим к формуле (21) для α_k .

На рис. 1 представлены расчёты, выполненные на сетке $N_1 \times N_2 = 159 \times 159$ для $M = 40$ для невозмущённых данных. Сплошная чёрная линия соответствует точному (аналитически заданному) потоку для $t = t_F$: $q(x_1, t_F) = e^{-1} m \cos^2(n x_1) e^m \sin \pi/2$. Цветными графиками (точки соединённые линиями) изображены рассчитанные приближения к точному значению потока, выполненные для различных параметров ε : красная линия соответствует $\varepsilon = 10^{-4}$, синяя — $\varepsilon = 10^{-5}$, зелёная — $\varepsilon = 10^{-6}$.

Результаты расчётов показывают, что имеется сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для $\varepsilon = 10^{-6}$ приближение достаточно близко к аналитическому решению.

Численные эксперименты для возмущённых данных представлены на рис. 2–4. В краевое условие Дирихле (дополнительная информация (3)) на нижней границе $x_2 = 0$

$$u(x_1, 0, t) = u_0(x_1, t), \quad x_1 \in [0, \pi],$$

на каждом слое по времени $t = t_{m+1}$, $m = 0, M - 1$, вносилось случайным образом распределённое возмущение в 1, 3 и 5 %.

Сплошная чёрная линия соответствует точному (аналитически заданному) потоку для $t = t_F$. Три цветных графика соответствуют трём независимым расчётам, в каждом из которых использовалось своё случайным образом распределённое возмущение.

Вычисления производились на сетке $N_1 \times N_2 = 319 \times 319$ для $M = 10$. Использовалось значение $\varepsilon = 10^{-4}$, которое подбиралось экспериментально.

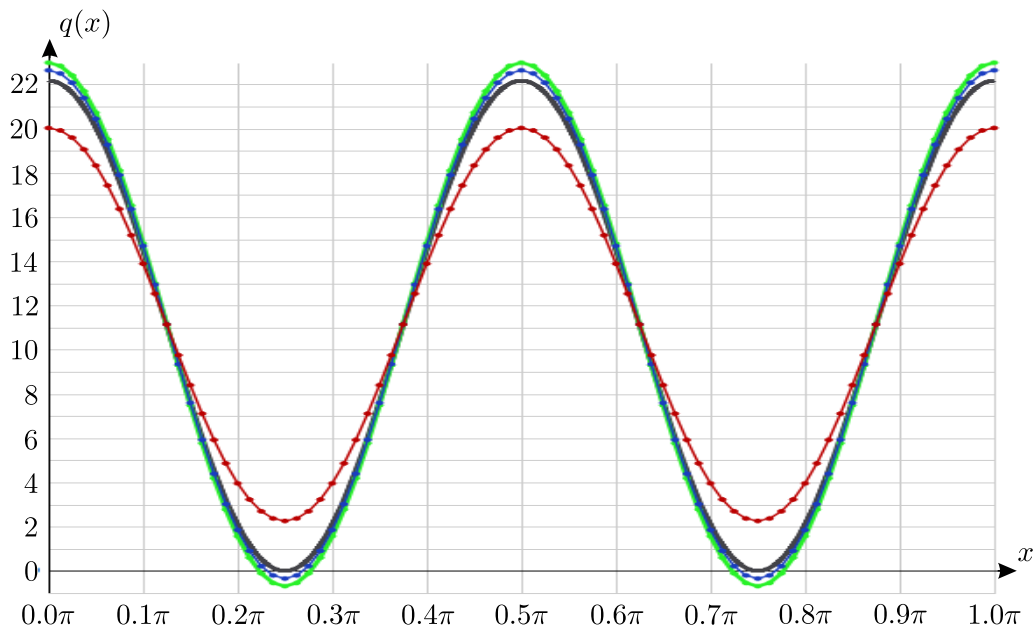


Рис. 1. Невозмущённые данные. Сетка $N_1 \times N_2 = 159 \times 159$, $M = 40$.

Чёрная линия соответствует точному решению.

Цветными графиками (точки, соединённые линиями) изображены рассчитанные приближения к точному значению потока, выполненные для различных параметров ε : красная линия соответствует $\varepsilon = 10^{-4}$, синяя — $\varepsilon = 10^{-5}$, зелёная — $\varepsilon = 10^{-6}$

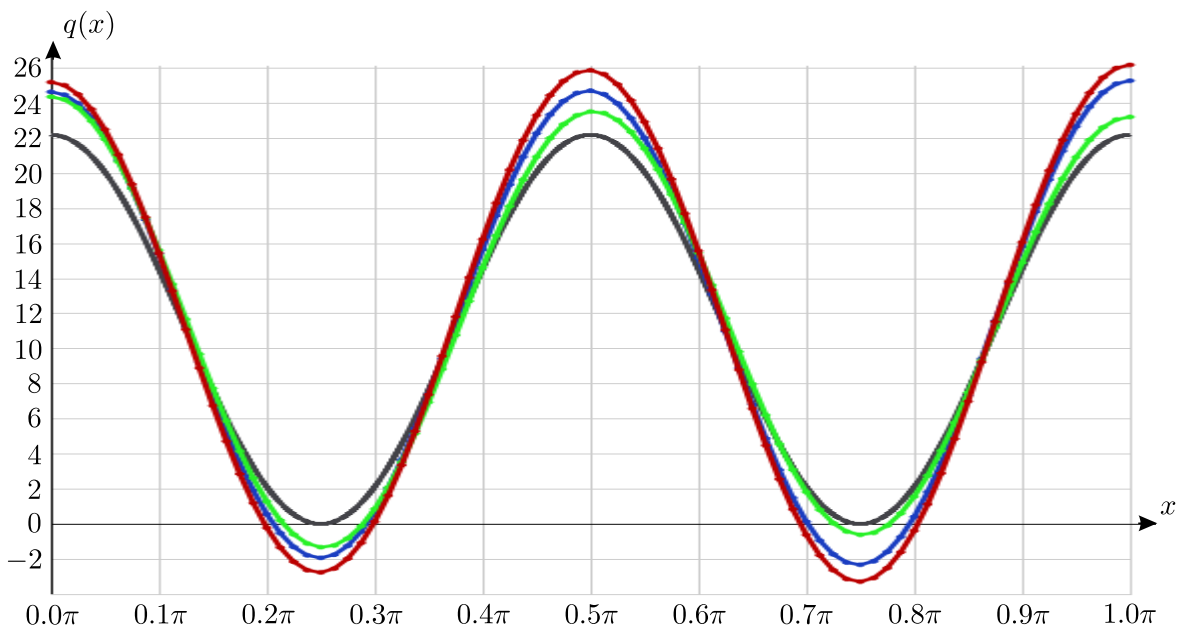


Рис. 2. Возмущённые данные. Сетка $N_1 \times N_2 = 319 \times 319$, $M = 10$.

Чёрная линия соответствует точному решению. Три цветных графика соответствуют трём независимым расчётам, в каждом из которых использовалось своё случайным образом распределённое возмущение; возмущение составляет 1%

Результаты, представленные на рис. 2–4, показывают, что решение задачи чувствительно к возмущению входной информации. В тоже время поведение и основные характеристики (точки минимума и максимума) решения воспроизводятся достаточно уверенно.

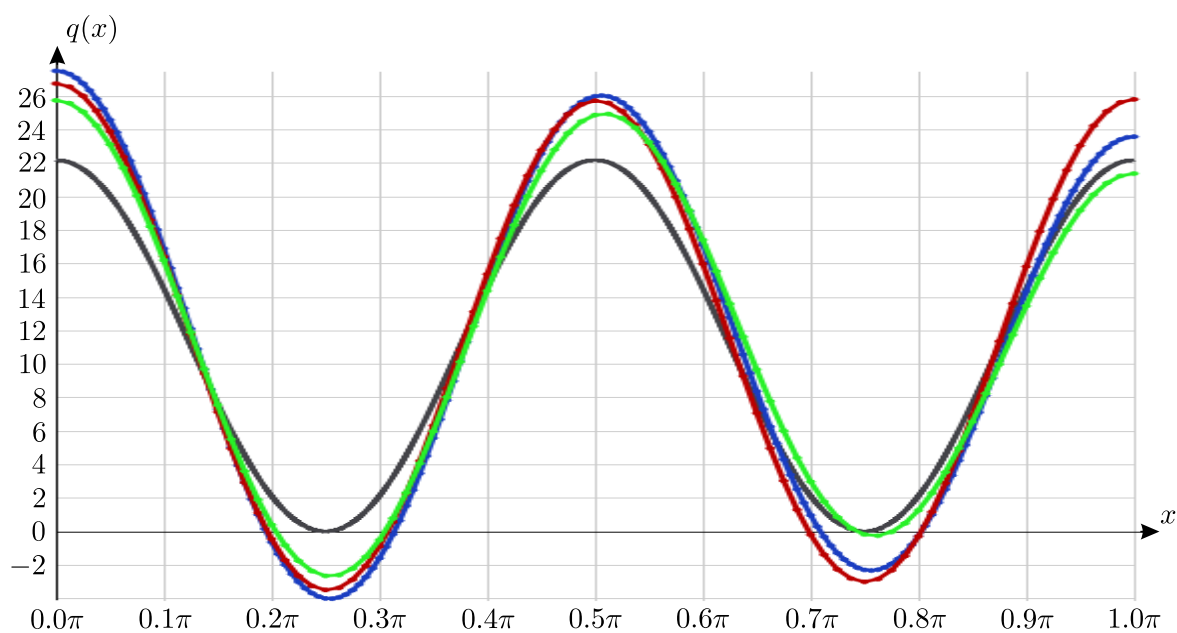


Рис. 3. Возмущённые данные. Сетка $N_1 \times N_2 = 319 \times 319$, $M = 10$.

Чёрная линия соответствует точному решению. Три цветных графика соответствуют трём независимым расчётам, в каждом из которых использовалось своё случайным образом распределённое возмущение; возмущение составляет 3%

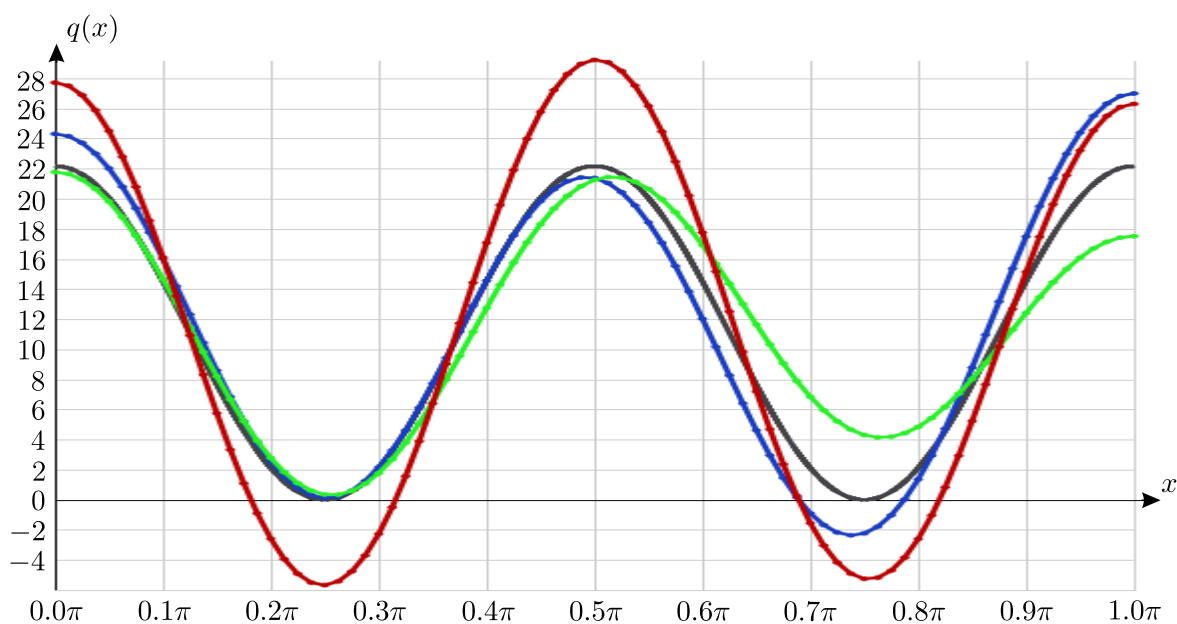


Рис. 4. Возмущённые данные. Сетка $N_1 \times N_2 = 319 \times 319$, $M = 10$.

Чёрная линия соответствует точному решению. Три цветных графика соответствуют трём независимым расчётам, в каждом из которых использовалось своё случайным образом распределённое возмущение; возмущение составляет 5%

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен прямой метод решения задачи продолжения для параболического уравнения с переменными коэффициентами, допускающими разделение переменных.

Метод позволяет значительно быстрее, по сравнению с реализацией для этой задачи ите-

рациональных процедур, восстановить поток тепла на недоступной границе. В качестве дополнительной информации используются значения (измерения) температуры на доступной границе.

Численное исследование алгоритма показало его работоспособность. Для невозмущённой дополнительной информации поток тепла на недоступной границе восстанавливается с приемлемой точностью. Экспериментальный анализ чувствительности алгоритма к возмущению дополнительной информации показал, что в случае неточных данных поведение и основные характеристики (точки минимума и максимума) решения воспроизводятся достаточно уверенно.

Метод может быть использован для получения начальных приближений при реализации итерационных алгоритмов решения задачи продолжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zachár A.* Analysis of coiled-tube heat exchangers to improve heat transfer rate with spirally corrugated wall // *Internat. J. Heat Mass Transfer.* 2010. V. 53, N 19–20. P. 3928–3939.
2. *Kundan A., Plawsky J.L., Wayner Jr P. C.* Thermophysical characteristics of a wickless heat pipe in microgravity–constrained vapor bubble experiment // *Internat. J. Heat Mass Transfer.* 2014. V. 78. P. 1105–1113.
3. *Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A.* Calculation of the heat flux near the liquid-gas-solid contact line // *Appl. Math. Model.* 2016. V. 40, N 2. P. 1029–1037.
4. *Cheverda V.V., Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A.* Heat flux density in the region of droplet contact line on a horizontal surface of a thin heated foil // *Thermophysics and Aeromechanics.* 2017. V. 24, N 5. P. 803–806.
5. *Alifanov O.M.* Inverse Heat Transfer Problems. Springer Sci. & Business Media, 2012.
6. *Tikhonov A.N, Arsenin V.Y.* Methods of Solution of Ill-Posed Problems. M.: Nauka, 1979.
7. *Marin L., Lesnic D.* The method of fundamental solutions for the Cauchy problem associated with two-dimensional Helmholtz-type equations // *Comput. & Structures.* 2005. V. 83, N 4–5. P. 267–278.
8. *Marin L.* A meshless method for the numerical solution of the Cauchy problem associated with three-dimensional Helmholtz-type equations // *Appl. Math. Comput.* 2005. V. 165, N 2. P. 355–374.
9. *Jin B., Zheng Y.* A meshless method for some inverse problems associated with the Helmholtz equation // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006. V. 195, N 19–22. P. 2270–2288.
10. *Wei T., Hon Y.C., Ling L.* Method of fundamental solutions with regularization techniques for Cauchy problems of elliptic operators // *Engrg. Analysis with Boundary Elements.* 2007. V. 31, N 4. P. 373–385.
11. *Marin L., Karageorghis A., Lesni D.* The MFS for numerical boundary identification in two-dimensional harmonic problems // *Engrg. Analysis with Boundary Elements.* 2011. V. 35, N 3. P. 342–354.
12. *Wei T., Chen Y.G.* A regularization method for a Cauchy problem of Laplace’s equation in an annular domain // *Math. Comput. Simulation.* 2012. V. 82, N 11. P. 2129–2144.
13. *Caille L., Marin L., Delvare F.* A meshless fading regularization algorithm for solving the Cauchy problem for the three-dimensional Helmholtz equation // *Numer. Algorithms.* 2019. V. 82, N 3. P. 869–894.
14. *Cheng J., Hon Y.C., Wei T., Yamamoto M.* Numerical computation of a Cauchy problem for Laplace’s equation // *J. Appl. Math. Mech.* 2001. V. 81, N 10. P. 665–674.
15. *Qin H.H., Wei T., Shi R.* Modified Tikhonov regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation // *J. Comput. Appl. Math.* 2009. V. 224, N 1. P. 39–53.
16. *Karchevsky A.L.* Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs // *Euras. J. Math. Comput. Appl.* 2013. V. 1, N 2. P. 4–20.
17. *Colaço M.J., Alves C.J.S.* A fast non-intrusive method for estimating spatial thermal contact conductance by means of the reciprocity functional approach and the method of fundamental solutions // *Internat. J. Heat Mass Transfer.* 2013. V. 60. P. 653–663.
18. *Colaço M.J., Alves C.J.S., Bozzoli F.* The reciprocity function approach applied to the non-intrusive estimation of spatially varying internal heat transfer coefficients in ducts: numerical and experimental results // *Internat. J. Heat Mass Transfer.* 2015. V. 90. P. 1221–1231.

19. Cattani L., Mailliet D., Bozzoli F., Rainieri S. Estimation of the local convective heat transfer coefficient in pipe flow using a 2d thermal quadrupole model and truncated singular value decomposition // *Internat. J. Heat Mass Transfer*. 2015. V. 91. P. 1034–1045.
20. Mocerino A., Colaco M.J., Bozzoli F., Rainieri S. Filtered reciprocity functional approach to estimate internal heat transfer coefficients in 2d cylindrical domains using infrared thermography // *Internat. J. Heat Mass Transfer*. 2018. V. 125. P. 1181–1195.
21. Bazán F.S.V., Bedin L., Bozzoli F. New methods for numerical estimation of convective heat transfer coefficient in circular ducts // *Internat. J. Thermal Sci.* 2019. V. 139. P. 387–402.
22. Sorokin S.B. An efficient direct method for numerically solving the Cauchy problem for Laplace's equation // *Numer. Anal. Appl.* 2019. V. 12. P. 87–103.
23. Sorokin S.B. An implicit iterative method for numerical solution of the Cauchy problem for elliptic equations // *J. Appl. Indust. Math.* 2019. V. 13. P. 759–770.
24. Kozlov V., Maz'ya V., Fomin A. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations // *Comput. Math. Math. Phys.* 1991. V. 31, N 1. P. 45–52.
25. Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated to the Helmholtz equation // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2003. V. 192, N 5–6. P. 709–722.
26. Marin L. Relaxation procedures for an iterative MFS algorithm for two-dimensional steady-state isotropic heat conduction Cauchy problems // *Engrg. Analysis with Boundary Elements*. 2011. V. 35, N 3. P. 415–429.
27. Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L. Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 1995. V. 3, N 1. P. 21–46.
28. Marin L., Elliott L., Heggs P., Ingham D., Lesnic D., Wen X. Conjugate gradient-boundary element solution to the Cauchy problem for Helmholtz-type equations // *Comput. Mech.* 2003. V. 31, N 3–4. P. 367–377.
29. Marin L., Elliott L., Heggs P., Ingham D., Lesnic D., Wen X. Bem solution for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations by the Landweber method // *Engrg. Analysis with Boundary Elements*. 2004. V. 28, N 9. P. 1025–1034.
30. Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., Kasenov S.E. Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation // *J. Appl. Math.* 2014. V. 2014. Article 786326; <https://doi.org/10.1155/2014/786326>
31. Johansson B.T., Lesnic D. A method of fundamental solutions for transient heat conduction // *Engrg. Analysis with Boundary Elements*. 2008. V. 32, N 9. P. 697–703.
32. Johansson B.T., Lesnic D., Reeve T. A method of fundamental solutions for two-dimensional heat conduction // *Internat. J. Comput. Math.* 2011. V. 88, N 8. P. 1697–1713.
33. Cao R. Numerical computation based on the method of fundamental solutions for a Cauchy problem of heat equation // *Turkish J. Anal. Number Theory*. 2014. V. 2, N 3. P. 70–74.
34. Reeve T.H. The method of fundamental solutions for some direct and inverse problems. Thesis Ph. D. Univ. Birmingham, 2013.
35. Yaparova N.M. Numerical methods for solving a boundary-value inverse heat conduction problem // *Inverse Probl. Sci. Engrg.* 2014. V. 22, N 5. P. 832–847.
36. Solodusha S.V., Yaparova N.M. Numerical solving an inverse boundary value problem of heat conduction using Volterra equations of the first kind // *Numer. Anal. Appl.* 2015. V. 8, N 3. P. 267–274.
37. Belonosov A.S., Shishlenin M.A. Continuation problem for the parabolic equation with the data on the part of the boundary // *Sib. Electron. Math. Reports*. 2014. V. 11. P. 22–34.
38. Belonosov A.S., Shishlenin M.A. Regularization methods of the continuation problem for the parabolic equation // *Internat. Conf. Numerical Analysis and Its Applications*. Cham: Springer-Verl., 2017. P. 220–226.
39. Belonosov A., Shishlenin M., Klyuchinskiy D. A comparative analysis of numerical methods of solving the continuation problem for 1D parabolic equation with the data given on the part of the boundary // *Adv. Comput. Math.* 2019. V. 45, N 2. P. 735–755.

40. *Prikhodko A., Shishlenin M.* Comparative analysis of the numerical methods for 3d continuation problem for parabolic equation with data on the part of the boundary // J. Physics. Conf. Ser. 2021. V. 2092, N 1. Article 012010.
41. *Karchevsky A.L.* Development of the heated thin foil technique for investigating nonstationary transfer processes // Interfac. Phenom. Heat Transfer. 2018. V. 6, N 3. P. 179–185.
42. *Marchuk G.I., Brown A.A.* Methods of Numerical Mathematics. V. 2. N. Y.: Springer-Verl., 1982.
43. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. CRC Press, 2001.
44. *Samarskii A.A., Andreev V.B.* Difference Methods for Elliptic Equations. M.: Nauka, 1976.
45. *Samarskii A.A., Nikolaev E.S.* Methods of Solution of Grid Equations. M.: Nauka, 1978.
46. *Kabanikhin S.I.* Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. V. 55. Walter De Gruyter, 2011.

UDC 519.632

DIFFERENCE METHOD FOR CALCULATING THE HEAT FLUX AT AN INACCESSIBLE BOUNDARY IN THE PROBLEM OF HEAT CONDUCTION

© 2023 S. B. Sorokin^{1,2}

¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrent'eva 6, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Novosibirsk State University,
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: sorokin@sscc.ru

Received 28.02.2023, revised 03.03.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. The continuation problem for the heat equation is considered. Determining the heat flux at an inaccessible boundary reduces to an inverse problem. For the numerical solution of the inverse problem, an implicit difference scheme is used. At each time step, for the difference analogue of the elliptic equation, the heat flux at the inaccessible boundary is calculated by an economical direct method. The proposed algorithm significantly expands the range of tasks to be solved and can be used for creation of devices capable of real-time determination of the heat flux on inaccessible measurements of parts of inhomogeneous structures. For example, to determine the heat flux on the internal radius of a pipe made of various materials.

Keywords: heat conduction problem, inverse problem, heat flux, inaccessible boundary, mathematical model, numerical solution, discrete analogue, direct method.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.310

REFERENCES

1. Zachár A. Analysis of coiled-tube heat exchangers to improve heat transfer rate with spirally corrugated wall. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2010, Vol. 53, No. 19–20, pp. 3928–3939.
2. Kundan A., Plawsky J.L., Wayner Jr P. C. Thermophysical characteristics of a wickless heat pipe in microgravity–constrained vapor bubble experiment. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2014, Vol. 78, pp. 1105–1113.
3. Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Calculation of the heat flux near the liquid–gas–solid contact line. *Appl. Math. Model.*, 2016, Vol. 40, No. 2, pp. 1029–1037.
4. Cheverda V.V., Karchevsky A.L., Marchuk I.V., Kabov O.A. Heat flux density in the region of droplet contact line on a horizontal surface of a thin heated foil. *Thermoph. Aeromech.*, 2017, Vol. 24, No. 5, pp. 803–806.
5. Alifanov O.M. *Inverse Heat Transfer Problems*. Springer Sci. & Business Media, 2012.
6. Tikhonov A.N, Arsenin V.Y. *Methods of Solution of Ill-Posed Problems*. Moscow: Nauka, 1979.
7. Marin L., Lesnic D. The method of fundamental solutions for the Cauchy problem associated with two-dimensional Helmholtz-type equations. *Comput. & Structures*, 2005, Vol. 83, No. 4–5, pp. 267–278.
8. Marin L. A meshless method for the numerical solution of the Cauchy problem associated with three-dimensional Helmholtz-type equations. *Appl. Math. Comput.*, 2005, Vol. 165, No. 2, pp. 355–374.
9. Jin B., Zheng Y. A meshless method for some inverse problems associated with the Helmholtz equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2006, Vol. 195, No. 19–22, pp. 2270–2288.

10. Wei T., Hon Y.C., Ling L. Method of fundamental solutions with regularization techniques for Cauchy problems of elliptic operators. *Engrg. Analysis with Boundary Elements*, 2007, Vol. 31, No. 4, pp. 373–385.
11. Marin L., Karageorghis A., Lesni D. The MFS for numerical boundary identification in two-dimensional harmonic problems. *Engrg. Analysis with Boundary Elements*, 2011, Vol. 35, No. 3, pp. 342–354.
12. Wei T., Chen Y.G. A regularization method for a Cauchy problem of Laplace's equation in an annular domain. *Math. Comput. Simulation*, 2012, Vol. 82, No. 11, pp. 2129–2144.
13. Caille L., Marin L., Delvare F. A meshless fading regularization algorithm for solving the Cauchy problem for the three-dimensional Helmholtz equation. *Numer. Algorithms*, 2019, Vol. 82, No 3, pp. 869–894.
14. Cheng J., Hon Y.C., Wei T., Yamamoto M. Numerical computation of a Cauchy problem for Laplace's equation. *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, Vol. 81, No. 10., pp. 665–674.
15. Qin H.H., Wei T., Shi R. Modified Tikhonov regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation *J. Comput. Appl. Math.* 2009. V. 224, No. 1, pp. 39–53.
16. Karchevsky A.L. Reformulation of an inverse problem statement that reduces computational costs. *Euras. J. Math. Comput. Appl.*, 2013, Vol. 1, No. 2, pp. 4–20.
17. Colaço M.J., Alves C.J.S. A fast non-intrusive method for estimating spatial thermal contact conductance by means of the reciprocity functional approach and the method of fundamental solutions. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2013, Vol. 60, pp. 653–663.
18. Colaço M.J., Alves C.J.S., Bozzoli F. The reciprocity function approach applied to the non-intrusive estimation of spatially varying internal heat transfer coefficients in ducts: numerical and experimental results. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2015, Vol. 90, pp. 1221–1231.
19. Cattani L., Maillet D., Bozzoli F., Rainieri S. Estimation of the local convective heat transfer coefficient in pipe flow using a 2d thermal quadrupole model and truncated singular value decomposition. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2015, Vol. 91, pp. 1034–1045.
20. Mocerino A., Colaco M.J., Bozzoli F., Rainieri S. Filtered reciprocity functional approach to estimate internal heat transfer coefficients in 2d cylindrical domains using infrared thermography. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 2018, Vol. 125, pp. 1181–1195.
21. Bazán F.S.V., Bedin L., Bozzoli F. New methods for numerical estimation of convective heat transfer coefficient in circular ducts. *Internat. J. Thermal Sci.*, 2019, Vol. 139, pp. 387–402.
22. Sorokin S.B. An efficient direct method for numerically solving the Cauchy problem for Laplace's equation. *Numer. Anal. Appl.*, 2019, Vol. 12, pp. 87–103.
23. Sorokin S.B. An implicit iterative method for numerical solution of the Cauchy problem for elliptic equations *J. Appl. Indust. Math.* 2019. V. 13, pp. 759–770.
24. Kozlov V., Maz'ya V., Fomin A. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1991, Vol. 31, No. 1, pp. 45–52.
25. Marin L., Elliott L., Heggs P.J., Ingham D.B., Lesnic D., Wen X. An alternating iterative algorithm for the Cauchy problem associated to the Helmholtz equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2003, Vol. 192, No. 5–6, pp. 709–722.
26. Marin L. Relaxation procedures for an iterative MFS algorithm for two-dimensional steady-state isotropic heat conduction Cauchy problems. *Engrg. Analysis with Boundary Elements*, 2011, Vol. 35, No. 3, pp. 415–429.
27. Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L. Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1995, Vol. 3, No. 1, pp. 21–46.
28. Marin L., Elliott L., Heggs P., Ingham D., Lesnic D., Wen X. Conjugate gradient-boundary element solution to the Cauchy problem for Helmholtz-type equations. *Comput. Mech.*, 2003, Vol. 31, No. 3–4, pp. 367–377.
29. Marin L., Elliott L., Heggs P., Ingham D., Lesnic D., Wen X. Bem solution for the Cauchy problem associated with Helmholtz-type equations by the Landweber method. *Engrg. Analysis with Boundary Elements*, 2004, Vol. 28, No. 9, pp. 1025–1034.

30. Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A., Nurseitov D.B., Nurseitova A.T., Kasenov S.E. Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation. *J. Appl. Math.*, 2014, Vol. 2014, article 786326; <https://doi.org/10.1155/2014/786326>
31. Johansson B.T., Lesnic D. A method of fundamental solutions for transient heat conduction. *Engrg. Analysis with Boundary Elements*, 2008, Vol. 32, No. 9, pp. 697–703.
32. Johansson B.T., Lesnic D., Reeve T. A method of fundamental solutions for two-dimensional heat conduction. *Internat. J. Comput. Math.*, 2011, Vol. 88, No. 8, pp. 1697–1713.
33. Cao R. Numerical computation based on the method of fundamental solutions for a Cauchy problem of heat equation. *Turkish J. Anal. Number Theory*, 2014, Vol. 2, No. 3, pp. 70–74.
34. Reeve T.H. The method of fundamental solutions for some direct and inverse problems. Thesis Ph. D. Univ. Birmingham, 2013.
35. Yaparova N.M. Numerical methods for solving a boundary-value inverse heat conduction problem. *Inverse Probl. Sci. Engrg.* 2014. V. 22, No. 5, pp. 832–847.
36. Solodusha S.V., Yaparova N.M. Numerical solving an inverse boundary value problem of heat conduction using Volterra equations of the first kind. *Numer. Anal. Appl.*, 2015, Vol. 8, No. 3, pp. 267–274.
37. Belonosov A.S., Shishlenin M.A. Continuation problem for the parabolic equation with the data on the part of the boundary. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2014, Vol. 11, pp. 22–34.
38. Belonosov A.S., Shishlenin M.A. Regularization methods of the continuation problem for the parabolic equation. *Numer. Anal. Appl.*, 2017, pp. 220–226.
39. Belonosov A., Shishlenin M., Klyuchinskiy D. A comparative analysis of numerical methods of solving the continuation problem for 1D parabolic equation with the data given on the part of the boundary. *Adv. Comput. Math.*, 2019, Vol. 45, No. 2, pp. 735–755.
40. Prikhodko A., Shishlenin M. Comparative analysis of the numerical methods for 3d continuation problem for parabolic equation with data on the part of the boundary. *J. Physics. Conf. Ser.*, 2021, Vol. 2092, No. 1, article 012010.
41. Karchevsky A.L. Development of the heated thin foil technique for investigating nonstationary transfer processes. *Interfac. Phenom. Heat Transfer*, 2018, Vol. 6, No. 3, pp. 179–185.
42. Marchuk G.I., Brown A.A. *Methods of Numerical Mathematics*. V. 2. N. Y.: Springer-Verl., 1982.
43. Samarskii A.A. *The Theory of Difference Schemes*. CRC Press, 2001.
44. Samarskii A.A., Andreev V.B. *Difference Methods for Elliptic Equations*. Moscow: Nauka, 1976.
45. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. *Methods of Solution of Grid Equations*. Moscow: Nauka, 1978.
46. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. V. 55. Walter De Gruyter, 2011.

УДК 517.958:539.3

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЕГУЛЯТОРНЫЙ КОНТУР СИСТЕМЫ МОРФОГЕНЕЗА МЕХАНОРЕЦЕПТОРОВ ДРОЗОФИЛЫ: ЭФФЕКТЫ МУТАЦИЙ

© 2023 Д. П. Фурман^{1,3}, Т. А. Бухарина^{1,3}, В. П. Голубятников^{2c}

¹Федеральный научно-исследовательский центр
Институт цитологии и генетики СО РАН,
просп. Лаврентьева, 10, г. Новосибирск 630090, Россия,
²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,
³Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: ^afurman@bionet.nsc.ru, ^bbukharina@bionet.nsc.ru,
^cvladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Поступила в редакцию 09.02.2023 г.; после доработки 29.03.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Описана математическая модель функционирования центрального регуляторного контура генных сетей морфогенеза механорецепторов дрозофилы с учётом мутаций входящих в него генов. Проведены вычислительные эксперименты, показывающие наличие иерархии эффектов мутаций генов ЦРК на продукцию белков ASC.

Ключевые слова: центральный регуляторный контур, генная сеть, математическая модель, идентификация параметров, компьютерное моделирование, дрозофила, *achaete-scute* комплекс, мутации.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.311

ВВЕДЕНИЕ

Согласно современным представлениям контроль широчайшего спектра биологических процессов, в том числе дифференцировку клеток, рост, развитие и жизнедеятельность организмов, их способность реагировать на сигналы окружающей среды, осуществляют генные сети. Генные сети представляют собой визуализацию сложных взаимосвязей как между входящими в них генами, так и другими компонентами биологических систем, в функционировании которых они участвуют. Реконструкция генных сетей осуществляется на основе анализа и обобщения разнохарактерных экспериментальных данных и даёт наиболее полное и систематизированное феноменологическое описание рассматриваемой биологической системы или процесса.

Концепция генных сетей создаёт возможность формализованного представления и моделирования динамического состояния биологических систем разного уровня сложности — от клетки до организма (см. [1–5]). Сети демонстрируют сложное динамическое поведение, что позволяет системам оперативно реагировать на различные внешние и/или внутренние стимулы. Существенным атрибутом структуры сетей являются регуляторные контуры с положительными и отрицательными связями, позволяющие обеспечивать тонкую автоподстройку

сетей и их корректное функционирование, направленное на реализацию соответствующей генетической программы формирования того или иного фенотипического признака.

Примером такого регуляторного контура является центральный регуляторный контур (ЦРК) — центральное звено трёх генных сетей, обеспечивающих развитие как отдельных органов периферической нервной системы (механорецепторов) дрозофилы, так и формирование их совокупности, так называемого щетиночного рисунка [6–8]. Основной этап этого процесса заключается в формировании родительской клетки механорецептора. Родительская клетка характеризуется определённым уровнем белков — продуктов экспрессии генного комплекса *achaete-scute* (*AS-C*). Их наработку и контролирует ЦРК, модулирующий активность комплекса.

Наряду с генами *AS-C* — основного элемента ЦРК, в его состав входит ещё ряд генов, объединённых положительными и отрицательными связями, и белков, опосредующих эти связи. Анализ построенной нами ранее модели функционирования ЦРК при отсутствии мутаций входящих в него генов показал, что при биологически оправданных параметрах система функционирует без осцилляций. Нарработка белков *ASC* продолжается до достижения уровня, необходимого для детерминации клетки как родительской клетки механорецептора, а затем падает до базового уровня, позволяющего ей перейти к делению (см. [7, 9]).

Однако хорошо известно, что гены подвержены мутациям и гены ЦРК не составляют исключения. В результате возникают отклонения от стереотипной структуры щетиночного рисунка. В зависимости от характера мутаций в главном компоненте ЦРК — генах *AS-C* — наблюдается исчезновение тех или иных механорецепторов, а в наиболее радикальных случаях — отсутствие подавляющего большинства составляющих щетиночного рисунка. Результаты математического моделирования функционирования ЦРК с учётом мутаций генов комплекса *achaete-scute* рассмотрены в работе [9].

Предметом настоящей статьи является построение и анализ математической модели функционирования ЦРК при мутациях входящих в него генов-регуляторов активности комплекса *AS-C*. Для вычислительных экспериментов с такой моделью использовано специально разработанное программное обеспечение.

Здесь и далее наименования генов обозначены курсивом, а названия белков — прямым шрифтом.

1. СТРУКТУРНО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ЦРК

Центральный регуляторный контур — главный управляющий модуль трёх генных сетей морфогенеза механорецепторов. Компоненты контура представлены семьёй генами и десятью белками. Гены *AS-C*, *hairy* (*h*), *extramacrochaeta* (*emc*), *senseless* (*sens*), *charlatan* (*chn*), *scratch* (*scrt*), *phyllopod* (*phyl*) объединены системой активирующих и репрессирующих взаимодействий через одноимённые белки, кодируемые названными генами, или их комплексы. Белки *ASC* могут образовывать комплексы с белками *Daughterless* (*DA*) и *Extramacrochaeta* (*EMC*). В зависимости от того, с каким из них (*DA* или *EMC*) формируется комплекс, белки *ASC* либо усиливают, либо ослабляют активность собственных генов. Белки *ASC* напрямую активируют экспрессию генов *chn*, *sens*, *scrt*, *phyl*. Белок *SCRT* репрессирует ген *hairy*, а *CHN* репрессирует как *hairy*, так и *emc*. Для полноценного функционирования ЦРК необходимы ещё три «вспомогательных» белка, не принимающих непосредственного участия в межгенных взаимодействиях — это белки системы деградации белков *ASC-UB* (*Ubiquitin*, убиквитин) и *SINA* (*Seven in absentia*), а также *GRO* (*Groucho*) — кофактор *Hairy* (см. [10, 11]). Схема контура показана на рис. 1.

Согласно экспериментальным данным белок *ASC* критически важен для определения статуса родительской клетки механорецептора [12, 13]. Только при условии накопления этого белка до некоторого порогового уровня создаётся возможность безальтернативного перехода клетки к нейральному пути развития. Моделирование поведения ЦРК с учётом мутаций

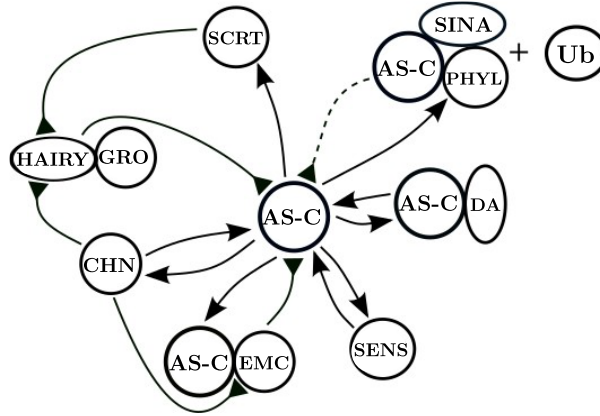


Рис. 1. Схема связей в ЦРК генных сетей системы морфогенеза механорецепторов дрозофилы.

Стрелками с заострёнными концами показаны прямые активирующие воздействия, стрелками с тупыми концами — прямые репрессорные воздействия на целевые гены. Пунктирная линия обозначает не прямое репрессорное воздействие на *AS-C*

в генах *AS-C* было проведено нами ранее и показало, что снижение содержания ASC до 40 % от нормального уровня налагает запрет на детерминацию родительской клетки и последующее формирование механорецептора [9]. Поскольку контур функционирует как единая система, очевидно, что мутации всех входящих в него генов могут оказывать большее или меньшее влияние на наработку белков ASC. Рассмотрим относительные эффекты мутаций этих генов на уровень и характер экспрессии ASC.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦРК

С целью качественного описания мутационных изменений в функционировании рассматриваемого регуляторного контура для всех его компонент в модели задаются неотрицательные, не превосходящие единицы коэффициенты k_x, k_y, k_e и т. д., отражающие влияние мутаций в генах регуляторного контура на уровни кодируемых ими белков. Значение коэффициента 1 соответствует норме функционирования гена, тогда как значение коэффициента 0 означает полную его инактивацию и отсутствие соответствующего белка. Изменение концентраций компонент ЦРК моделируется динамической системой размерности семь:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= k_x \frac{\sigma_1(Dx) + \sigma_4(z) + \sigma_6(w)}{(1 + Gy)(1 + Ex)} - [1 + p(t - \tau)US]m_x x, \\
 \frac{dy}{dt} &= k_y \frac{C_y}{(d_1 + u)(d_2 + w)} - m_y y, & \frac{dE}{dt} &= k_e \frac{C_e}{(d_3 + w)} - m_e E, \\
 \frac{dz}{dt} &= k_z s_4(Dx) - m_z z, & \frac{du}{dt} &= k_u s_5(Dx) - m_u u, \\
 \frac{dw}{dt} &= k_w s_6(Dx) - m_w w, & \frac{dp}{dt} &= k_p \frac{s_7(Dx)h(t - \tau)(t - \tau)^2}{L + h(t - \tau)(t - \tau)^2} - m_p p,
 \end{aligned} \tag{1}$$

составленной согласно общим схемам построения подобных систем уравнений кинетического типа (см. [9, 14]). Здесь $C_y = \text{const}$, $C_e = \text{const}$; также постоянными предполагаются и параметры d_1, d_2, d_3 . Искомые функции в этой системе пропорциональны содержанию белков в ЦРК: $x(t)$ пропорциональна содержанию ASC, $y(t)$ — содержанию Hairy, $E(t)$ — содержанию Extramacrochaete, $z(t)$ — содержанию Senseless, $u(t)$ — содержанию Scratch, $w(t)$ — содержанию Charlatan, $p(t)$ — содержанию Phyllopod.

По сравнению с предыдущими моделями ЦРК, рассмотренными в [7, 9], здесь учитываются ещё две отрицательные связи (см. [11]):

$$CHN \rightsquigarrow \blacktriangleleft HAIRY \quad \text{и} \quad CHN \rightsquigarrow \blacktriangleleft EMC. \quad (2)$$

Так же, как и в [14], будем полагать, что их воздействия описываются во втором и в третьем уравнениях системы (1) сомножителями в знаменателях:

$$d_2 + w, \quad \text{соответственно} \quad d_3 + w.$$

Значения параметров D, G, S, U в системе (1) предполагаются постоянными, поскольку концентрации описываемых ими белков Daughterless (DA), Groucho (GRO), Seven in absentia (SINA) и Ubiquitin (Ub) практически не меняются в процессе формирования родительской клетки. Положительные коэффициенты $m_x, m_y, m_e, m_z, m_u, m_w, m_p$ описывают скорости разложения соответствующих белков.

Положительное слагаемое во втором уравнении системы (1) описывает отрицательные связи SCRT $\rightsquigarrow \blacktriangleleft$ HAIRY, и CHN $\rightsquigarrow \blacktriangleleft$ HAIRY, представленные в верхней левой части рис. 1. Сигмоидные функции $\sigma_\ell, \ell = 1, 4, 6$, в первом уравнении системы (1) и сигмоидные функции $s_i, i = 4, 5, 6, 7$, в соответственно четвёртом, пятом, шестом и седьмом уравнениях этой системы описывают положительные связи, изображённые на рис. 1:

$$\sigma_\ell(q) = \frac{a_\ell q^{n_\ell}}{b_\ell + q^{n_\ell}}; \quad s_i(q) = \frac{\alpha_i q^{\nu_i}}{\beta_i + q^{\nu_i}}$$

(см. [7]). Здесь α_i, β_i, ν_i и a_ℓ, b_ℓ, n_ℓ — положительные параметры, $q \geq 0$. Указанные выше значения индекса ℓ означают, что функция $z(t)$ описывается в четвёртом уравнении системы, а $w(t)$ — в шестом.

Последнее уравнение динамической системы (1) посредством функции Хевисайда $h(t - \tau)$ описывает запаздывание динамики синтеза Phyllopod на время τ . Ранее это уравнение было использовано нами в в шестимерной модели функционирования рассматриваемого ЦРК, которая не учитывала отрицательные связи (2) (см. [9]).

Построение модели осуществлялось для временного интервала 32 часа, соответствующего максимальной продолжительности функционирования ЦРК в родительской клетке механорецептора.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Специально для проведения вычислительных экспериментов с рассматриваемой моделью ЦРК на базе языка R и пакета Shiny (описание доступно в <https://www.r-project.org/> и <https://shiny.rstudio.com/>) был разработан программный комплекс, позволяющий решать систему дифференциальных уравнений (1) с помощью клиент-серверного приложения. Все параметры уравнений системы (1), а также начальные условия для этих уравнений задаются в «клиентской» части разработанного облачного Веб-сервиса в соответствии с литературными данными биологических экспериментов.

Результаты численных экспериментов с системой (1) доступны в веб-браузере <https://gene-nets-simulation.shinyapps.io/crc-asc-modeler/> и представлены в виде графиков решений системы (1), а также таблиц используемых параметров и начальных данных.

Аналогичные программные средства были специально созданы для нашей предыдущей публикации [9], где конструировалась и изучалась более простая модель рассматриваемого ЦРК, не учитывавшая связи (2), и для более ранней работы [15], в которой не предусматривалась возможность мутаций в генах ЦРК. Подобные облачные программные комплексы

и Веб-сервисы были разработаны также для численного моделирования ряда других генных сетей и описаны в [16, 17].

На рис. 2 приведён график, отражающий динамику изменения содержания ASC в условиях отсутствия мутаций всех входящих в ЦПК генов с учётом не рассмотренного ранее в [9] регуляторного воздействия СНН на гены *AS-C* через репрессию *hairy* и *etm* (рис. 1). Параметры для моделирования подобраны на основе экспериментальных данных по динамике изменения белков ASC, согласно которым к моменту деления клетки (32-й час) содержание этого белка снижается до нуля [18].

Использовались следующие значения параметров:

$$\begin{aligned}
 D &= 1.6; & G &= 1; & m_x &= 0.3; & U &= 1.1; & S &= 5.5; \\
 a_1 &= 2.9; & n_1 &= 1; & b_1 &= 1; & a_4 &= 5.8; & n_4 &= 1; & b_4 &= 5.6; \\
 & & a_6 &= 6; & n_6 &= 1; & b_6 &= 5.7; \\
 C_y &= 14.1; & d_1 &= 4.1; & d_2 &= 4.7; & m_y &= 0.5; \\
 C_e &= 2.9; & d_3 &= 7.5; & m_e &= 0.4; \\
 \alpha_4 &= 1.4; & \nu_4 &= 1.9; & \beta_4 &= 1.2; & m_z &= 3; \\
 \alpha_5 &= 14.8; & \nu_5 &= 1.1; & \beta_5 &= 14.8; & m_u &= 2.3; \\
 \alpha_6 &= 2; & \nu_6 &= 1; & \beta_6 &= 1; & m_w &= 1; \\
 \alpha_7 &= 3; & \nu_7 &= 1; & \beta_7 &= 1; & m_p &= 1; & L &= 1.
 \end{aligned} \tag{3}$$

При выборе значений параметров использовались также и методы их идентификации, описанные в [19]. Характер полученной кривой полностью отвечает имеющимся литературным данным. Таким образом, рассматриваемая здесь модель более реалистична, чем полученная в [9].

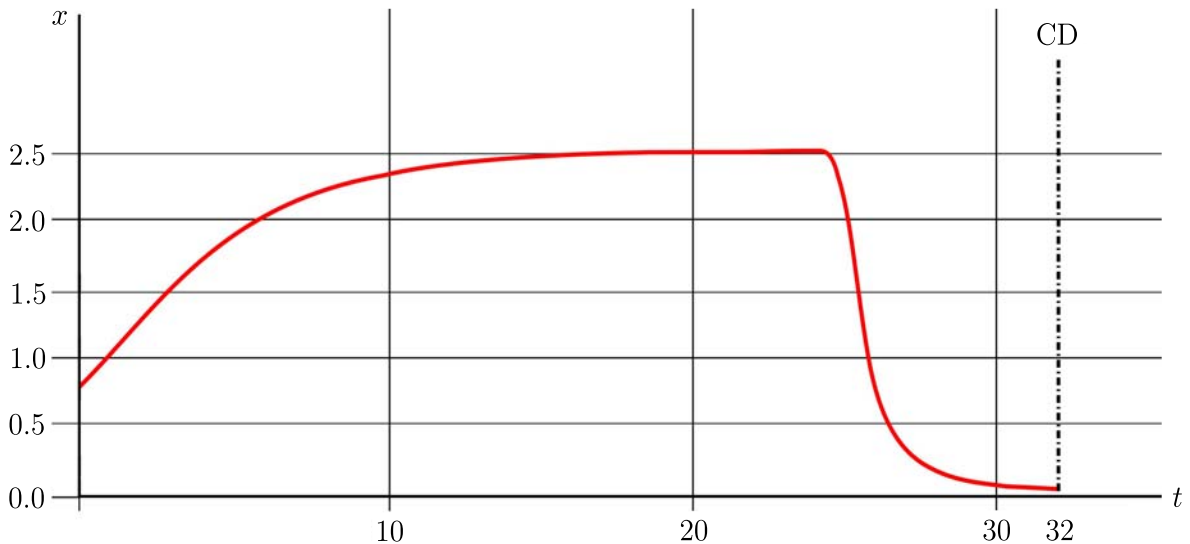


Рис. 2. Динамика изменения содержания белка ASC в норме.
 Ось x — содержание белка ASC в клетке (в условных единицах);
 ось t — время в часах; CD — начало деления родительской клетки

Целью настоящей работы является оценка относительного влияния мутаций генов, входящих в ЦПК, на содержание белка ASC. Было проведено семь численных экспериментов — по числу генов, взаимодействующих с *AS-C*, мутации которых влияют на уровень ASC. В каждом из экспериментов параметры соответствовали (3), а значения коэффициентов мутации k

для каждого гена принимались равными нулю, что с биологической точки зрения означает полную его инактивацию вследствие мутации, влекущую отсутствие соответствующего белка.

Начальные данные в каждом из экспериментов выбирались следующим образом:

при $k_x = 0$ (мутация в *AS-C*)

$$x_0 = 0; y_0 = 1.6; E_0 = 1.1; z_0 = 0.2; u_0 = 0; w_0 = 0; p_0 = 0;$$

при $k_y = 0$ (мутация в *hairy*)

$$x_0 = 0.8; y_0 = 0; E_0 = 1.1; z_0 = 0.2; u_0 = 0; w_0 = 0; p_0 = 0;$$

при $k_e = 0$ (мутация в *emc*)

$$x_0 = 0.8; y_0 = 1.6; E_0 = 0; z_0 = 0.2; u_0 = 0; w_0 = 0; p_0 = 0;$$

при $k_z = 0$ (мутация в *sens*)

$$x_0 = 0.8; y_0 = 1.6; E_0 = 1.1; z_0 = 0; u_0 = 0; w_0 = 0; p_0 = 0;$$

при $k_u = 0$ (мутация в *scrt*)

$$x_0 = 0.8; y_0 = 1.6; E_0 = 1.1; z_0 = 0.2; u_0 = 0; w_0 = 0; p_0 = 0;$$

при $k_w = 0$ (мутация в *chn*)

$$x_0 = 0.8; y_0 = 1.6; E_0 = 1.1; z_0 = 0.2; u_0 = 0; w_0 = 0; p_0 = 0;$$

при $k_p = 0$ (мутация в *phyl*)

$$x_0 = 0.8; y_0 = 1.6; E_0 = 1.1; z_0 = 0.2; u_0 = 0; w_0 = 0; p_0 = 0.$$

Соответствующие графики показаны на рис. 3.

Как и следовало ожидать, график для ASC при мутации в *AS-C* ($k_x = 0$) не выходит из нулевых значений, что соответствует полному отсутствию белка.

При мутировании *phyl* ($k_p = 0$) уровень ASC ожидаемо остаётся на достигнутом плато, поскольку в этом случае отсутствует белок PHYL, ответственный за его деградацию (см. [18]).

Сравнение профилей кривых на рис. 3 показывает, что существует некая иерархия эффектов мутаций в различных генах ЦПК на уровень белков ASC, что отражается в размахе отклонений от кривой, характеризующей динамику этих белков в норме, т. е. в отсутствие мутаций. Наиболее сильное влияние оказывают мутации в *emc* ($k_e = 0$) и *hairy* ($k_y = 0$), значительно отклоняющие уровень ASC относительно его нормальных показателей в большую сторону. Это биологически оправданный результат, поскольку EMC и HAIRY репрессируют *AS-C* (см. [20]), так что снятие этой репрессии должно проявляться увеличением содержания ASC.

Мутация в *chn* ($k_w = 0$), напротив, приводит к заметному снижению уровня ASC (кривая лежит ниже уровня, соответствующего норме). Эффект обусловлен тем, что мутация приводит к отсутствию белка CHN, который напрямую активирует гены *AS-C* и репрессирует гены *emc* и *hairy*. При этом наработка белков ASC не может достигнуть уровня нормы [11, 21].

Менее выраженное снижение уровня белков ASC вызывают мутации в генах *sens* ($k_u = 0$) и *scrt* ($k_z = 0$), что также согласуется с известными данными о функциях этих генов в системе ЦПК и проявлениях мутаций в этих генах: белок SENS известен как коактиватор активности *AS-C*; следовательно, мутация приведёт к некоторому снижению наработки ASC. Белок SCRT репрессирует *hairy*, так что в результате возможно некоторое увеличение уровня ASC, которое, тем не менее, не достигает нормальных значений из-за действия прямых репрессоров активности генов *AS-C* (рис. 1) [22, 23].

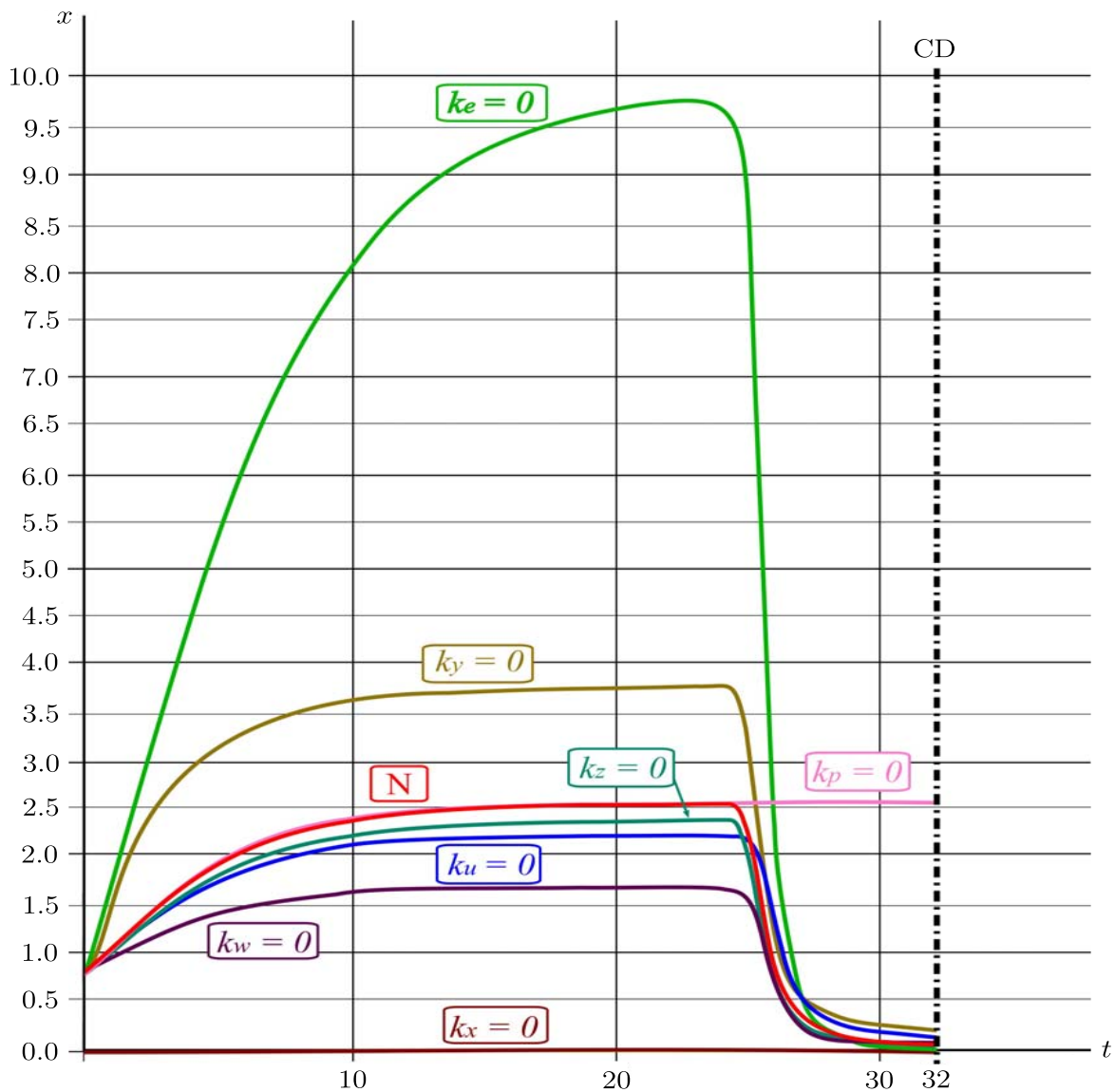


Рис. 3. Относительный вклад мутаций генов ЦПК в динамику уровня белков ASC.

Кривая N получена для случая отсутствия мутаций в генах ЦПК.

Ось x — содержание белка ASC в клетке (в условных единицах);
ось t — время (в часах); CD — начало деления родительской клетки

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формирование полноценного щетиночного рисунка, состоящего из строго определённого числа (двадцати шести) механорецепторов, занимающих строго определённые позиции на голове и теле дрозофилы, возможно лишь при отсутствии мутаций в генах ЦПК. Экспериментально показано, что мутации проявляются в отклонениях от канонической структуры щетиночного рисунка — изменению числа и/или позиционирования механорецепторов. Наиболее серьёзные последствия имеют некоторые мутации главного компонента ЦПК — генов $AS-C$, приводящие к отсутствию подавляющего большинства или даже всех механорецепторов стандартного набора (см. [21], а также [23–31]).

Полученные результаты свидетельствуют, что мутации в генах комплекса в разной степени сказываются на уровне белков ASC. Анализ предложенной модели показывает, что ЦРК как система чувствителен к изменению внутренних межгенных взаимодействий и его полноценное функционирование, результатом которого становится определённая динамика изменения в уровне белков ASC, возможно лишь при согласованной работе всех составляющих компонентов.

Авторы выражают искреннюю благодарность А. А. Акиньшину за полезные советы и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chasman D., Fotuhi Siahpirani A., Roy S. Network-based approaches for analysis of complex biological systems // *Curr. Opin. Biotechnol.* 2016. V. 39. P. 157–166; DOI: 10.1016/j.copbio.2016.04.007
2. Emmert-Streib F., Dehmer M. Networks for systems biology: conceptual connection of data and function // *IET Syst. Biol.* 2011. V. 5, N 3. P. 185–207; DOI: 10.1049/iet-syb.2010.0025
3. Emmert-Streib F., Glazko G.V. Network biology: a direct approach to study biological function // *Wiley Interdiscip. Rev. Syst. Biol. Med.* 2011. V. 3, N 4. P. 379–91; DOI: 10.1002/wsbm.134
4. Schlitt T., Palin K., Rung J., Dietmann S., Lappe M., Ukkonen E., Brazma A. From gene networks to gene function // *Genome Res.* 2003. V. 13, N 12. P. 2568–2576; DOI: 10.1101/gr.1111403
5. Zhu X., Gerstein M., Snyder M. Getting connected: analysis and principles of biological networks // *Genes Dev.* 2007. V. 21, N 9. P. 1010–1024. DOI: 10.1101/gad.1528707
6. Акиньшин А.А., Бухарина Т.А., Голубятников В.П., Фурман Д.П. Математическое моделирование взаимодействия двух клеток в пронейральном кластере крылового имагинального диска *D.melanogaster* // *Сиб. журн. чист. и прикл. математики.* 2014. Т. 14, № 4. С. 3–10.
7. Bukharina T.A., Furman D.P., Golubyatnikov V.P. A model study of the morphogenesis of *D. melanogaster* mechanoreceptors: The central regulatory circuit // *J. Bioinformat. Comput. Biology.* 2015. V. 13, N 01. P. 1540006-1–1540006-15; DOI: 10.1142/S0219720015400065
8. Аюпова Н.Б., Голубятников В.П. Трехклеточная модель ранней стадии развития одного пронейрального кластера // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2017. Т. 20, № 2. С. 15–20; DOI: 10.17377/sibjim.2017.20.202
9. Бухарина Т.А., Акиньшин А.А., Голубятников В.П., Фурман Д.П. Математическая и численная модели центрального регуляторного контура системы морфогенеза механорецепторов дрозофилы // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2020. Т. 23, № 2. С. 41–50; DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.203
10. Бухарина Т.А., Голубятников В.П., Фурман Д.П. Центральный регуляторный контур генной сети морфогенеза макрочет *D. melanogaster*: расширенная модель // *Онтогенез.* 2016. Т. 47, № 5. С. 307–313; DOI: 10.7868/S0475145016050049
11. Yamasaki Y., Lim Y.M., Niwa N., Hayashi S., Tsuda L. Robust specification of sensory neurons by dual functions of charlatan, a Drosophila NRSF/REST-like repressor of extramacrochaetae and hairy // *Genes Cells.* 2011. V. 16, N 8. P. 896–909; DOI: 10.1111/j.1365-2443.2011.01537.x
12. García-Bellido A., de Celis J.F. The complex tale of the achaete-scute complex: a paradigmatic case in the analysis of gene organization and function during development // *Genetics.* 2009. V. 182. N 3. P. 631–639; <https://doi.org/10.1534/genetics.109.104083>
13. Ghysen A., Thomas R. The formation of sense organs in Drosophila: a logical approach // *BioEssays.* 2003. V. 25. P. 802–807; DOI: 10.1002/bies.10311
14. Системная компьютерная биология. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.
15. Golubyatnikov V.P., Kazantsev M.V., Kirillova N.E., Bukharina T.A., Furman D.P. Mathematical and numerical models of two asymmetric gene networks // *Sib. Electron. Math. Reports.* 2018. V. 15. P. 1271–1283; DOI: 10.17377/semi.2018.15.103
16. Akinshin A.A., Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P., Kirillova N.E., Podkolodnaya O.A., Podkolodnyy N.L. On a numerical model of a circadian oscillator // *Numer. Anal. Appl.* 2022. V. 15, N 3. P. 187–196; DOI: 10.1134/S199542392203001

17. Golubyatnikov V.P., Akinshin A.A., Ayupova N.B., Minushkina L.S. Stratifications and foliations in phase portraits of gene network models // Vavilov J. Genetics and Breeding. 2022. V. 26, N 8. P. 758–764; DOI: 10.18699/VJGB-22-91
18. Chang P.J., Hsiao Y.L., Tien A.C., Li Y.C., Pi H. Negative-feedback regulation of proneural proteins controls the timing of neural precursor division // Development. 2008. V. 135, N 18. P. 302–3030; DOI: 10.1242/dev.021923
19. Anikonov Yu.E., Göolgeleyen İ., Yildiz M. Identification problems for systems of nonlinear evolution equations and functional equations // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 1, Article 152; DOI: 10.1186/s13662-016-0877-4
20. Moscoso del Prado J., García-Bellido A. Genetic regulation of the achaete-scute complex of *Drosophila melanogaster* // Wilhelm Roux Arch. Dev. Biology. 1984. V. 193, N 4. P. 242–245; DOI: 10.1007/BF01260345
21. Escudero L.M., Caminero E., Schulze K.L., Bellen H.J., Modolell J. Charlatan, a Zn-finger transcription factor, establishes a novel level of regulation of the proneural achaete/scute genes of *Drosophila* // Development. 2005. V. 132, N 6. P. 1211–1222; DOI: 10.1242/dev.01691
22. Nolo R., Abbott L.A., Bellen H.J. Senseless, a Zn finger transcription factor, is necessary and sufficient for sensory organ development in *Drosophila* // Cell. 2000. V. 102, N 3. P. 349–362; DOI: 10.1016/S0092-8674(00)00040-4
23. Roark M., Sturtevant M.A., Emery J., Vaessin H., Grell E., Bier E. *scratch*, a pan-neural gene encoding a zinc finger protein related to snail, promotes neuronal development // Genes Dev. 1995. V. 9, N 19. P. 2384–2398; DOI: 10.1101/gad.9.19.2384
24. Agol I.J. Step Allelomorphism in *D. melanogaster* // Genetics. 1931. V. 16, N 3. P. 254–266.
25. Dubinin N.P. Step-allelomorphism in *D. melanogaster*. The allelomorphs *achaete2-scute10*, *achaete1-scute11* and *achaete3-scute13* // J. Genet. 1932. V. 25, N 2. P. 163–181; <https://doi.org/10.1007/BF02983250>
26. García-Bellido A., de Celis J.F. The complex tale of the achaete-scute complex: a paradigmatic case in the analysis of gene organization and function during development // Genetics. 2009. V. 182, N 3. P. 631–639; <https://doi.org/10.1534/genetics.109.104083>
27. Ghysen A., Dambly-Chaudière C. From DNA to form: the *achaete-scute* complex // Genes Dev. 1988. V. 2, N 5. P. 495–501; DOI: 10.1101/gad.2.5.495
28. Usui K., Goldstone C., Gibert J.M., Simpson P. Redundant mechanisms mediate bristle patterning on the *Drosophila thorax* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2008. V. 105, N 51. P. 20112–20117; DOI: 10.1073/pnas.0804282105
29. Cabrera C.V., Alonso M.C., Huikeshoven H. Regulation of *scute* function by extramacrochaete in vitro and in vivo // Development. 1994. V. 120, N 12. P. 3595–603; DOI: 10.1242/dev.120.12.3595
30. Acar M., Jafar-Nejad H., Giagtzoglou N., Yallampalli S., David G., He Y., Delidakis C., Bellen H.J. Senseless physically interacts with proneural proteins and functions as a transcriptional co-activator // Development. 2006. V. 133, N 10. P. 1979–1989; DOI: 10.1242/dev.02372
31. Pi H., Wu H.J., Chien C.T. A dual function of phyllopod in *Drosophila* external sensory organ development: cell fate specification of sensory organ precursor and its progeny // Development. 2001. V. 128, N 14. P. 2699–2710; DOI: 10.1242/dev.128.14.2699
32. Ramat A., Audibert A., Louvet-Vallée S., Simon F., Fichelson P., Gho M. Escargot and Scratch regulate neural commitment by antagonizing Notch activity in *Drosophila* sensory organs // Development. 2016. V. 143, N 16. P. 3024–3034; DOI: 10.1242/dev.134387

UDC 517.958:539.3

THE CENTRAL REGULATORY CIRCUIT OF THE MORPHOGENESIS SYSTEM DROSOPHILA MECHANORECEPTORS: MUTATION EFFECTS

© 2023 D. P. Furman^{1,3}, T. A. Bukharina^{1,3}, V. P. Golubyatnikov^{2c}

¹Federal Research Center Institute of Cytology and Genetics SB RAS,
pr. Lavrentieva 10, Novosibirsk 630090, Russia,

²Institute of Mathematics named after S. L. Sobolev SB RAS,
pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk 630090, Russia,

³Novosibirsk State University,
ul. Pirogova 1, Novosibirsk 630090, Russia

E-mails: ^afurman@bionet.nsc.ru, ^bbukharina@bionet.nsc.ru,
^cvladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Received 09.02.2023, revised 29.03.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. A mathematical model of the functioning of the central regulatory circuit of gene networks of morphogenesis of drosophila mechanoreceptors is described, taking into account mutations of its genes. Computational experiments have been carried out showing the presence of a hierarchy of effects of CRK gene mutations on the production of ASC proteins.

Keywords: central regulatory circuit, gene network, mathematical model, parameter identification, computer modeling, fruit fly, *achaete-scute* complex, mutations.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.311

REFERENCES

1. Chasman D., Fotuhi Siahpirani A., Roy S. Network-based approaches for analysis of complex biological systems. *Curr. Opin. Biotechnol.*, 2016. Vol. 39, pp. 157–166; DOI: 10.1016/j.copbio.2016.04.007
2. Emmert-Streib F., Dehmer M. Networks for systems biology: conceptual connection of data and function. *IET Syst. Biol.*, 2011, Vol. 5, No. 3, pp. 185–207; DOI: 10.1049/iet-syb.2010.0025
3. Emmert-Streib F., Glazko G.V. Network biology: a direct approach to study biological function. *Wiley Interdiscip. Rev. Syst. Biol. Med.*, 2011, Vol. 3, No. 4, pp. 379–91; DOI: 10.1002/wsbm.134
4. Schlitt T., Palin K., Rung J., Dietmann S., Lappe M., Ukkonen E., Brazma A. From gene networks to gene function. *Genome Res.*, 2003, Vol. 13, No. 12, pp. 2568–2576; DOI: 10.1101/gr.1111403
5. Zhu X., Gerstein M., Snyder M. Getting connected: analysis and principles of biological networks. *Genes Dev.*, 2007, Vol. 21, No. 9, pp. 1010–1024. DOI: 10.1101/gad.1528707
6. Akinshin A.A., Bukharina T.A., Golubyatnikov V.P., Furman D.P. Mathematical modeling of the interaction of two cells in the proneural cluster of the wing imaginal disk *D.melanogaster* [Matematicheskoe modelirovanie vzaimozheistviya dvukh kletok v proneiral'nom klasterere krylovogo imaginal'nogo diska *D.melanogaster*]. *Sib. Zh. Chist. Prikl. Mat.*, 2014, Vol. 14, No. 4, pp. 3–10 (in Russian).
7. Bukharina T.A., Furman D.P., Golubyatnikov V.P. A model study of the morphogenesis of *D. melanogaster* mechanoreceptors: The central regulatory circuit. *J. Bioinform. Comput. Biology*, 2015, Vol. 13, No. 1, pp. 1540006-1–1540006-15; DOI: 10.1142/S0219720015400065

8. Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P. A Three-cell Model of the Initial Stage of Development of a Proneural Cluster. *J. Appl. Ind. Math.*, 2017. Vol. 11, No. 2, pp. 168–173; DOI: 10.1134/S1990478917020028
9. Bukharina T.A., Akin'shin A.A., Golubjatnikov V.P., Furman D.P. Matematicheskaya i chislennaya modeli central'nogo reguljatornogo kontura sistemy morfogeneza mekhanoreceptorov drozofily. [Mathematical and numerical models of the Central Regulatory Circuit of the mechanoreceptors morphogenesis system of *Drosophila*]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2020, Vol. 23, No. 2, pp. 41–50 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.203
10. Bukharina T.A., Golubyatnikov V.P., Furman D.P. Gene Network Controlling the Morphogenesis of *D. melanogaster* Macrochaetes: An Expanded Model of the Central Regulatory Circuit. *Russian Journal of Developmental Biology*, 2016, Vol. 47, No. 5, pp. 288–293; DOI: 10.1134/S1062360416050040
11. Yamasaki Y., Lim Y.M., Niwa N., Hayashi S., Tsuda L. Robust specification of sensory neurons by dual functions of charlatan, a *Drosophila* NRSF/REST-like repressor of extramacrochaetae and hairy. *Genes Cells*, 2011, Vol. 16, No. 8, pp. 896–909; DOI: 10.1111/j.1365-2443.2011.01537.x
12. García-Bellido A., de Celis J.F. The complex tale of the achaete-scute complex: a paradigmatic case in the analysis of gene organization and function during development. *Genetics*, 2009, Vol. 182, No. 3, pp. 631–639; <https://doi.org/10.1534/genetics.109.104083>
13. Ghysen A., Thomas R. The formation of sense organs in *Drosophila*: a logical approach. *BioEssays*, 2003, Vol. 25, pp. 802–807; DOI: 10.1002/bies.10311
14. Sistemnaja komp'juternaja biologija [System computer biology]. Novosibirsk: Izd-vo SB RAN, 2008 (in Russian).
15. Golubyatnikov V.P., Kazantsev M.V., Kirillova N.E., Bukharina T.A., Furman D.P. Mathematical and numerical models of two asymmetric gene networks. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2018, Vol. 15, pp. 1271–1283; DOI: 10.17377/semi.2018.15.103
16. Akinshin A.A., Ayupova N.B., Golubyatnikov V.P., Kirillova N.E., Podkolodnaya O.A., Podkolodnyy N.L. On a numerical model of a circadian oscillator. *Numer. Anal. Appl.*, 2022, Vol. 15, No. 3, pp. 187–196; DOI: 10.1134/S199542392203001
17. Golubyatnikov V.P., Akinshin A.A., Ayupova N.B., Minushkina L.S. Stratifications and foliations in phase portraits of gene network models. *Vavilov J. Genetics and Breeding*, 2022, Vol. 26, No. 8, pp. 758–764; DOI: 10.18699/VJGB-22-91
18. Chang P.J., Hsiao Y.L., Tien A.C., Li Y.C., Pi H. Negative-feedback regulation of proneural proteins controls the timing of neural precursor division. *Development*, 2008, Vol. 135, No. 18, pp. 302–3030; DOI: 10.1242/dev.021923
19. Anikonov Yu.E., Gölgeleyen İ., Yildiz M. Identification problems for systems of nonlinear evolution equations and functional equations. *Adv. Differ. Equ.*, 2016, Vol. 1, article 152; DOI: 10.1186/s13662-016-0877-4
20. Moscoso del Prado J., García-Bellido A. Genetic regulation of the achaete-scute complex of *Drosophila melanogaster*. *Wilehm Roux Arch. Dev. Biology*, 1984, Vol. 193, No. 4, pp. 242–245; DOI: 10.1007/BF01260345
21. Escudero L.M., Caminero E., Schulze K.L., Bellen H.J., Modolell J. Charlatan, a Zn-finger transcription factor, establishes a novel level of regulation of the proneural achaete/scute genes of *Drosophila*. *Development*, 2005, Vol. 132, No. 6, pp. 1211–1222; DOI: 10.1242/dev.01691
22. Nolo R., Abbott L.A., Bellen H.J. Senseless, a Zn finger transcription factor, is necessary and sufficient for sensory organ development in *Drosophila*. *Cell*, 2000, Vol. 102, No. 3, pp.349–362; DOI: 10.1016/S0092-8674(00)00040-4
23. Roark M., Sturtevant M.A., Emery J., Vaessin H., Grell E., Bier E. *scratch*, a pan-neural gene encoding a zinc finger protein related to snail, promotes neuronal development. *Genes Dev.*, 1995, Vol. 9, No. 19, pp. 2384–2398; DOI: 10.1101/gad.9.19.2384
24. Agol I.J. Step Allelomorphism in *D. melanogaster*. *Genetics*, 1931, Vol. 16, No. 3, pp. 254–266.
25. Dubinin N.P. Step-allelomorphism in *D. melanogaster*. The allelomorphs *achaete2-scute10*, *achaete1-scute11* and *achaete3-scute13*. *J. Genet.*, 1932, Vol. 25, No. 2, pp. 163–181; <https://doi.org/10.1007/BF02983250>

26. García-Bellido A., de Celis J.F. The complex tale of the achaete-scute complex: a paradigmatic case in the analysis of gene organization and function during development. *Genetics*, 2009, Vol. 182, No. 3, pp. 631–639; <https://doi.org/10.1534/genetics.109.104083>
27. Ghysen A., Dambly-Chaudière C. From DNA to form: the *achaete-scute* complex. *Genes Dev.*, 1988, Vol. 2, No. 5, pp. 495–501; DOI: 10.1101/gad.2.5.495
28. Usui K., Goldstone C., Gibert J.M., Simpson P. Redundant mechanisms mediate bristle patterning on the *Drosophila* thorax. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2008, Vol. 105, No. 51, pp. 20112–20117; DOI: 10.1073/pnas.0804282105
29. Cabrera C.V., Alonso M.C., Huikeshoven H. Regulation of *scute* function by extramacrochaete in vitro and in vivo. *Development*, 1994, Vol. 120, No. 12, pp. 3595–603; DOI: 10.1242/dev.120.12.3595
30. Acar M., Jafar-Nejad H., Giagtzoglou N., Yallampalli S., David G., He Y., Delidakis C., Bellen H.J. Senseless physically interacts with proneural proteins and functions as a transcriptional co-activator. *Development*, 2006, Vol. 133, No. 10, pp. 1979–1989; DOI: 10.1242/dev.02372
31. Pi H., Wu H.J., Chien C.T. A dual function of phyllopod in *Drosophila* external sensory organ development: cell fate specification of sensory organ precursor and its progeny. *Development*, 2001, Vol. 128, No. 14, pp. 2699–2710; DOI: 10.1242/dev.128.14.2699
32. Ramat A., Audibert A., Louvet-Vallée S., Simon F., Fichelson P., Gho M. Escargot and Scratch regulate neural commitment by antagonizing Notch activity in *Drosophila* sensory organs. *Development*, 2016, Vol. 143, No. 16, pp. 3024–3034; DOI: 10.1242/dev.134387

УДК 517.958:539.3

О РАВНОВЕСИИ УПРУГИХ ТЕЛ СО СЛАБО ИСКРИВЛЁННОЙ ПЕРЕМЫЧКОЙ

© 2023 А. М. Хлуднев

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: khlud@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 10.04.2023 г.; после доработки 19.04.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Работа посвящена анализу краевой задачи с неизвестной областью контакта, описывающей равновесие двумерных упругих тел с тонкой слабо искривлённой перемычкой. Перемычка отслаивается от упругих тел, образуя тем самым межфазные трещины. На берегах трещин задаются нелинейные краевые условия вида неравенств, исключающие взаимное проникание берегов. Установлена однозначная разрешимость краевой задачи. Проведён анализ предельных переходов по параметру жёсткости тонкой перемычки при стремлении параметра жёсткости к бесконечности и к нулю и исследованы предельные модели.

Ключевые слова: краевая задача, нелинейные краевые условия, упругое тело, тонкая перемычка, трещина.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.312

Задачи о равновесии упругих тел с тонкими включениями различной природы являются предметом анализа большого числа работ. При этом включения могут быть упругими, жёсткими, полужёсткими и т. д. Исследование тонких жёстких включений, расположенных в упругих телах, можно найти в [1–10]; тонкие упругие и полужёсткие включения анализировались в [11–13], где, в частности, можно найти обоснование возможности перехода к пределу по параметру жёсткости тонкого включения, а также дифференцирование функционала энергии по длине отслоения тонких включений. Можно отметить также статьи, касающиеся вопросов усреднения для моделей подобного рода [14, 15]. Имеются и другие работы, примыкающие к данной тематике (см., например, [16, 17]). В случае отслоения тонкого включения от окружающего упругого тела приходится иметь дело с трещиной, на берегах которой следует задавать подходящие краевые условия. С физической точки зрения наиболее правильными являются такие краевые условия, которые обеспечивают взаимное непроникание противоположных берегов трещины [18, 19]. Как правило, такой подход приводит к необходимости исследовать краевые задачи с неизвестными областями контакта.

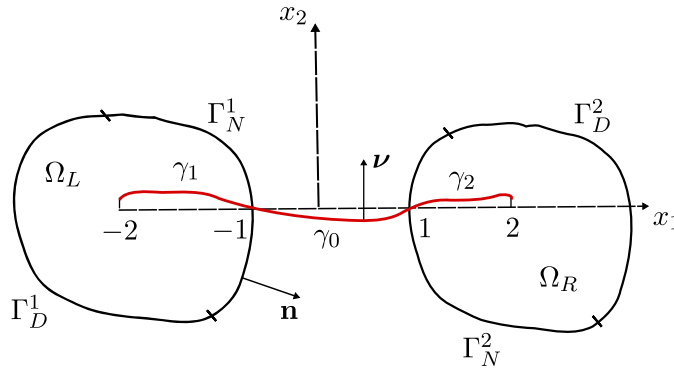
Данная работа посвящена анализу краевой задачи, описывающей равновесие двух упругих тел с тонкой слабо искривлённой перемычкой. Для описания слабо искривлённой перемычки используется модель Кирхгофа — Лява, с которой можно познакомиться по книге [20, с. 27]. Задача о равновесии двумерного упругого тела, содержащего слабо искривлённое включение, впервые исследовалась в [21]. Вопросы сопряжения для слабо искривлённых включений, расположенных в упругом теле, и асимптотические свойства решений представлены в работах [22, 23]. Анализ задач равновесия упругих пластин с тонкой прямолинейной перемычкой выполнен в [24, 25].

Структура работы следующая. Во первом разделе обсуждается постановка задачи и доказывается её разрешимость. Разделы 2, 3 посвящены исследованию предельных переходов при стремлении параметра жёсткости перемычки к бесконечности и к нулю. Для всех рассмат-

риваемых моделей приводятся как вариационные, так и дифференциальные формулировки задач и доказывается их эквивалентность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega_L, \Omega_R \subset \mathbb{R}^2$ — две ограниченные области с липшицевыми границами Γ^1, Γ^2 соответственно, такие что $\overline{\Omega}_L \cap \overline{\Omega}_R = \emptyset$. Предположим, что каждая из границ Γ^1, Γ^2 делится на две гладкие части Γ_N^i и Γ_D^i , $\text{meas } \Gamma_D^i > 0, i = 1, 2$. Через s, s_0, s_1, s_2 обозначим соответственно интервалы $(-2, 2), (-1, 1), (-2, -1), (1, 2)$ на оси x_1 . Пусть φ — заданная функция из пространства $H^1(s)$, такая что $\varphi'' \in L^\infty(s)$. Для простоты будем считать, что график γ функции $x_2 = \varphi(x_1), x_1 \in s$, пересекает границы Γ^1, Γ^2 в точках $(-1, 0), (1, 0)$. Графики функции $x_2 = \varphi(x_1)$ при $x_1 \in s_i$ обозначим соответственно через $\gamma_i, i = 0, 1, 2$. Считаем также, что угол между γ и Γ^i в точках пересечения ненулевой, $i = 1, 2$ (см. рисунок). Через $\nu = (\nu_1, \nu_2), \mathbf{n} = (n_1, n_2)$ будем обозначать единичные нормальные векторы к γ и Γ^i соответственно; $\tau = (\nu_2, -\nu_1), \Omega = \Omega_L \cup \Omega_R, \Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Считаем, что области Ω_L, Ω_R соответствуют упругим телам в естественном состоянии, а γ соответствует срединной линии тонкой слабо искривлённой перемычки.



Геометрия задачи

Обозначим через $A = \{a_{ijkl}\}, i, j, k, l = 1, 2$, заданный положительно определённый тензор модулей упругости:

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

$$A\xi \cdot \xi \geq c_0|\xi|^2 \quad \xi = \{\xi_{ij}\}, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Все величины с двумя нижними индексами считаются симметричными по этим индексам.

Постановка задачи равновесия упругих тел с тонкой слабо искривлённой перемычкой γ состоит в следующем. Найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}, i, j = 1, 2$, упругих тел, определённые в Ω_γ , и перемещения v, w точек перемычки, определённые на s , такие что выполняются уравнения

$$-\text{div } \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1}$$

$$w_{,1111} + k(v_{,1} + kw) = [\sigma_\nu]pq_i \quad \text{на } s_i, \quad i = 0, 1, 2, \tag{2}$$

$$-v_{,11} - (kw)_{,1} = [\sigma_\tau]pq_i \quad \text{на } s_i, \quad i = 0, 1, 2, \tag{3}$$

и краевые условия

$$u = 0 \text{ на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \text{ на } \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \quad (4)$$

$$w_{,11} = w_{,111} = v_{,1} + kw = 0 \text{ при } x_1 = -2, 2, \quad (5)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\tau^-, \quad w = u_\nu^- \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (6)$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (7)$$

$$[v(\pm 1)] = [w(\pm 1)] = [w_{,1}(\pm 1)] = 0, \quad (8)$$

$$[(v_{,1} + kw)(\pm 1)] = [w_{,11}(\pm 1)] = [w_{,111}(\pm 1)] = 0. \quad (9)$$

Здесь $[h] = h^+ - h^-$ — скачок функции h на $\gamma_1 \cup \gamma_2$, где знаки \pm соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали ν ; $p = \sqrt{1 + \varphi_{,1}^2}$; $q_0 = 0$, $q_1 = q_2 = 1$; $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$ — тензор деформаций, $\varepsilon_{ij}(u) = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$, $i, j = 1, 2$; $\sigma n = (\sigma_{1j} n_j, \sigma_{2j} n_j)$, $\sigma_\nu = \sigma_{ij} \nu_j \nu_i$, $\sigma_\tau = \sigma \nu \cdot \tau$, $u_\nu = u \nu$, $u_\tau = u \tau$; $[g(b)] = g(b+) - g(b-)$ — скачок функции g в точке $b \in s$. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Второе и третье равенства (6) следует понимать так: $v(x_1) = u_\tau(x_1, \varphi(x_1))$, $x_1 \in s_1 \cup s_2$. При этом уравнение (1) — уравнение равновесия упругого тела и уравнение состояния (закон Гука), а уравнения (2), (3) представляют уравнения равновесия тонкой слабо искривлённой перемычки. Правые части уравнений (2), (3) описывают силы, действующие на неё со стороны упругого тела; $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$ — заданный вектор внешних сил, действующих на упругие тела, а $k \in L^\infty(s)$ — кривизна срединной линии перемычки. Для простоты коэффициенты упругости в (2), (3) приняты равными единице. В дальнейшем зависимость от этих коэффициентов будет исследована подробно.

Второе и третье соотношения (6) обеспечивают равенство смещений для точек упругого тела и тонкой перемычки на $\gamma_1^- \cup \gamma_2^-$. Что касается краевых условий (5), то они соответствуют нулевому моменту, нулевой перерезывающей силе и нулевой деформации растяжения (сжатия) в концевых точках перемычки. Наконец, краевые условия (8), (9) являются условиями сопряжения в точках пересечения перемычки с внешней границей упругих тел. В целом модель (1)–(9) соответствует задаче с неизвестной областью контакта между берегами трещин. Первое краевое условие (6) описывает взаимное непроникание между противоположными берегами; при этом выполнены краевые условия (7) (см. [19]).

Как будет показано ниже, соотношения (1)–(9) в точности эквивалентны вариационной формулировке задачи минимизации функционала энергии на подходящем пространстве функций. При этом функционал энергии содержит слагаемые, соответствующие энергии деформирования упругого тела, работе внешних сил, энергии изгиба и растяжения тонкой перемычки.

На первом этапе приведём вариационную формулировку задачи (1)–(9) и докажем существование решения. Введём для этого пространство функций

$$H_D^1(\Omega_\gamma)^2 = \{u \in H^1(\Omega_\gamma)^2 \mid u = 0 \text{ на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2\}$$

и функционал энергии $E: W \rightarrow \mathbb{R}$,

$$E(u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma} f u + \frac{1}{2} \int_s w_{,11}^2 + \frac{1}{2} \int_s (v_{,1} + kw)^2,$$

где пространство W с нормой

$$\|(u, v, w)\|_W^2 = \|u\|_{H_D^1(\Omega_\gamma)^2}^2 + \|(v, w)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2$$

определяется следующим образом:

$$W = \{(u, v, w) \in H_D^1(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(s) \times H^2(s) \mid v = u_\tau^-, \quad w = u_\nu^- \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2\}.$$

Здесь $\sigma(u) \varepsilon(u) = \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(u)$, $fu = f_i u_i$, а $\sigma(u)$ определяется из (1), т. е. $\sigma(u) = A \varepsilon(u)$. Отметим, что введённое пространство W является подпространством в рефлексивном пространстве $H_D^1(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(s) \times H^2(s)$. Особенность этого подпространства состоит в том, что оно состоит из функций, следы которых u_τ, u_ν на $\gamma_1^- \cup \gamma_2^-$ являются более гладкими по сравнению со стандартной гладкостью $H^{1/2}(\gamma_1 \cup \gamma_2)$. Эта гладкость обеспечивается выполнением равенств $v = u_\tau^-, w = u_\nu^-$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2$ при $(v, w) \in H^1(s) \times H^2(s)$.

Введём множество допустимых перемещений

$$S = \{(u, v, w) \in W \mid [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2\}.$$

Заметим далее, что задача минимизации

$$E(u, v, w) \rightarrow \inf_S E, \quad (u, v, w) \in S,$$

эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$(u, v, w) \in S, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_s (v_{,1} + kw)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}) \\ & + \int_s \{w_{,11}(\bar{w}_{,11} - w_{,11}) + k(v_{,1} + kw)(\bar{w} - w)\} \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S. \end{aligned} \tag{11}$$

Для доказательства существования решения задачи (10), (11) сначала докажем следующее

Утверждение 1. *Существует постоянная $c > 0$, такая что*

$$\int_{s_1 \cup s_2} (v^2 + w^2) + \int_s \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\} \geq c \|(v, w)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2$$

для всех $(v, w) \in H^1(s) \times H^2(s)$.

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно. Тогда существует последовательность $(v^m, w^m) \in H^1(s) \times H^2(s)$, такая что при $m \rightarrow \infty$

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s) \times H^2(s)} = 1, \tag{12}$$

$$\int_{s_1 \cup s_2} \{(v^m)^2 + (w^m)^2\} + \int_s \{(w_{,11}^m)^2 + (v_{,1}^m + kw^m)^2\} \rightarrow 0. \tag{13}$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность с прежним обозначением, считаем что при $m \rightarrow \infty$

$$(v^m, w^m) \rightarrow (v, w) \quad \text{слабо в } H^1(s) \times H^2(s), \quad \text{сильно в } L^2(s) \times L^2(s). \tag{14}$$

Из (13), (14) следует

$$v \equiv w \equiv 0 \quad \text{на } s_1 \cup s_2. \tag{15}$$

Кроме того,

$$\int_{s_0} \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\} = 0.$$

Это означает, что

$$w(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = 0, \quad v(x_1) = a_2, \quad x_1 \in s_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

С учётом (15) получаем

$$(v, w) \equiv (0, 0) \quad \text{на } s. \quad (16)$$

Далее,

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2 = \|(v^m, w^m)\|_{L^2(s) \times L^2(s)}^2 + \int_s \{(v_{,1}^m)^2 + (w_{,11}^m)^2\}.$$

В силу (13), (14), (16) имеем

$$\int_s \{(v_{,1}^m)^2 + (w_{,11}^m)^2\} \rightarrow 0.$$

Тогда согласно (16) получим

$$\int_s \{(v_{,1}^m)^2 + (w_{,11}^m)^2\} \rightarrow \int_s \{(v_{,1})^2 + (w_{,11})^2\}$$

и поэтому

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2 \rightarrow \|(v, w)\|_{L^2(s) \times L^2(s)}^2 + \int_s \{v_{,1}^2 + w_{,11}^2\} = \|(v, w)\|_{H^1(s) \times H^2(s)}^2.$$

Учитывая (14), будем иметь

$$(v^m, w^m) \rightarrow (v, w) \quad \text{сильно в } H^1(s) \times H^2(s),$$

что в силу (16) приводит к противоречию, поскольку из (12) следует

$$\|(v, w)\|_{H^1(s) \times H^2(s)} = 1.$$

Утверждение 1 доказано. \square

Теорема 1. *Задача (10), (11) имеет единственное решение.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить коэрцитивность функционала E на S . Слабая полунепрерывность снизу функционала E очевидна. Учитывая первое неравенство Корна, имеем для $\beta > 0$ с положительными постоянными c_i :

$$E(u, v, w) \geq c_0 \|u\|_{1, \Omega_\gamma}^2 - c_1 \|u\|_{1, \Omega_\gamma} \pm \frac{\beta}{2} (\|v\|_{L^2(s_1 \cup s_2)}^2 + \|w\|_{L^2(s_1 \cup s_2)}^2) + \frac{1}{2} \int_s w_{,11}^2 + \frac{1}{2} \int_s (v_{,1} + kw)^2, \quad (17)$$

где $\|\cdot\|_{1, \Omega_\gamma}$ — норма в $H_D^1(\Omega_\gamma)^2$. В силу соотношений $v = u_\tau^-$, $w = u_\nu^-$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2$ и теорем вложения для малых $\beta > 0$ получим

$$\frac{c_0}{2} \|u\|_{1, \Omega_\gamma}^2 - \frac{\beta}{2} (\|v\|_{L^2(s_1 \cup s_2)}^2 + \|w\|_{L^2(s_1 \cup s_2)}^2) \geq 0.$$

Таким образом, с учётом утверждения 1, из (17) при малых $\beta > 0$ следует неравенство

$$E(u, v, w) \geq c_2 \|u\|_{1, \Omega_\gamma}^2 - c_1 \|u\|_{1, \Omega_\gamma} + c_3 (\|v\|_{H^1(s)}^2 + \|w\|_{H^2(s)}^2),$$

что и доказывает коэрцитивность функционала E на W , т. е. $E(u, v, w) \rightarrow \infty$ при $\|(u, v, w)\|_W \rightarrow \infty$. Таким образом, получаем доказательство существования решения, удовлетворяющего (10), (11).

Можно доказать, что система соотношений (1)–(9) эквивалентна (10), (11) на гладких решениях. Это означает, что соотношения (1)–(9) следуют из (10), (11) и, наоборот, из (10), (11) можно получить все соотношения (1)–(9). Соответствующие рассуждения полностью приводить не будем, так как в целом они повторяют идеи работы [23]. Обоснования требуют лишь условия сопряжения (9). Итак, пусть выполнены (10), (11) и соотношения (1)–(7) уже получены из (10), (11). Подставим в (11) тестовую функцию $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = (u, v, w) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, где $[\tilde{u}_\nu] = 0$, $(\tilde{v}, \tilde{w}) = (u_\tau^-, u_\nu^-)$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Получим

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f(\tilde{u}) + \int_s (v_{,1} + kw)\tilde{v}_{,1} + \int_s \{w_{,11}\tilde{w}_{,11} + k(v_{,1} + kw)\tilde{w}\} = 0.$$

Интегрируя здесь по частям и пользуясь уравнением равновесия для упругих тел, будем иметь

$$\begin{aligned} - \int_{s_1 \cup s_2} [\sigma_\nu \tilde{u}_\nu + \sigma_\tau \tilde{u}_\tau] - \sum_0^2 \int_{s_i} (v_{,1} + kw)_{,1} \tilde{v} + \sum_0^2 \int_{s_i} w_{,1111} \tilde{w} \\ + \int_s k(v_{,1} + kw)\tilde{w} + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=-2}^{x_1=-1} + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=-1}^{x_1=1} \\ + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=1}^{x_1=2} + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=-2}^{x_1=-1} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=-2}^{x_1=-1} + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=-1}^{x_1=1} \\ - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=-1}^{x_1=1} + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=1}^{x_1=2} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=1}^{x_1=2} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Воспользуемся уравнениями равновесия тонкой перемычки (2), (3) и краевыми условиями (5). Тогда из (18) получим

$$\begin{aligned} (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=-1}^{x_1=-1} + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=-1}^{x_1=1} + (v_{,1} + kw)\tilde{v}|_{x_1=1} \\ + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=-1}^{x_1=-1} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=-1}^{x_1=-1} + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=-1}^{x_1=1} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=-1}^{x_1=1} \\ + w_{,11}\tilde{w}_{,1}|_{x_1=1} - w_{,111}\tilde{w}|_{x_1=1} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции \tilde{v} , \tilde{w} , $\tilde{w}_{,1}$ могут принимать произвольные значения в точках ± 1 . Это обстоятельство позволяет получить из (19) условия сопряжения (9). Таким образом, из (10), (11) вытекают все соотношения (1)–(9). Можно доказать и обратное. Из (1)–(9) следует (10), (11).

Отметим также, что решение задачи (10), (11) единственно. \square

2. ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ ПАРАМЕТРА ЖЁСТКОСТИ ПЕРЕМЫЧКИ К БЕСКОНЕЧНОСТИ

В этом разделе мы исследуем поведение решения задачи (1)–(9) при стремлении параметра жёсткости α тонкой перемычки к бесконечности. Для простоты этот параметр равнялся единице в (1)–(9); в данном случае зависимость от этого параметра будет явно указана в модели. Решение соответствующей краевой задачи будем снабжать символом α . Постановка задачи равновесия при заданном параметре $\alpha > 0$ состоит в следующем. Найти вектор перемещений $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_γ , и перемещения v^α, w^α точек тонкой перемычки, определённые на s , такие что выполняются уравнения

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u^\alpha) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad (20)$$

$$\alpha w_{,1111}^\alpha + \alpha k(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha) = [\sigma_\nu]pq_i \quad \text{на} \quad s_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (21)$$

$$-\alpha v_{,11}^\alpha - \alpha(kw^\alpha)_{,1} = [\sigma_\tau]pq_i \quad \text{на} \quad s_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (22)$$

и краевые условия

$$u^\alpha = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \quad (23)$$

$$w_{,11}^\alpha = w_{,111}^\alpha = v_{,1}^\alpha + kw^\alpha = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = -2, 2, \quad (24)$$

$$[u_\nu^\alpha] \geq 0, \quad v^\alpha = (u_\tau^\alpha)^-, \quad w^\alpha = (u_\nu^\alpha)^- \quad \text{на} \quad \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (25)$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu^\alpha] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (26)$$

$$[v^\alpha(\pm 1)] = [w^\alpha(\pm 1)] = [w_{,1}^\alpha(\pm 1)] = 0, \quad (27)$$

$$[(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\pm 1)] = [w_{,11}^\alpha(\pm 1)] = [w_{,111}^\alpha(\pm 1)] = 0. \quad (28)$$

Как и в предыдущем разделе, задача (20)–(28) допускает вариационную формулировку. Именно, рассмотрим функционал энергии

$$E^\alpha(u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma} f u + \frac{\alpha}{2} \int_s w_{,11}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_s (v_{,1} + kw)^2.$$

Тогда задача минимизации этого функционала на множестве S имеет решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha) \in S, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha) \varepsilon(\bar{u} - u^\alpha) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\alpha) + \alpha \int_s (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}^\alpha) \\ & + \alpha \int_s \{w_{,11}^\alpha(\bar{w}_{,11} - w_{,11}^\alpha) + k(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\bar{w} - w^\alpha)\} \geq 0 \quad \text{для всех} \quad (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S. \end{aligned} \quad (30)$$

На первом этапе получим априорные оценки решений в задаче (29), (30). Сначала заметим, что из (29), (30) следует равенство

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha) \varepsilon(u^\alpha) - \int_{\Omega_\gamma} f u^\alpha + \alpha \int_s (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 + \alpha \int_s (w_{,11}^\alpha)^2 = 0. \quad (31)$$

Так же, как и при доказательстве коэрцитивности функционала E в предыдущем разделе, отсюда получаем равномерно по $\alpha \geq \alpha_0 > 0$

$$\|(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha)\|_W \leq c.$$

Выбирая подпоследовательность, можно считать, что при $\alpha \rightarrow \infty$

$$(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha) \rightarrow (u, v, w) \quad \text{слабо в} \quad W. \quad (32)$$

Кроме того, из (31) следует

$$\int_s (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 + \int_s (w_{,11}^\alpha)^2 \leq c/\alpha.$$

Это означает, что для предельных функций будем иметь

$$\int_s (v_{,1} + kw)^2 + \int_s w_{,11}^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $(v, w) \in L(s)$, где

$$L(s) = \{(v, w) \mid w(x_1) = a_0 + a_1 x_1, v_{,1}(x_1) + k(x_1)w(x_1) = 0, x_1 \in s; a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Введём далее множество допустимых перемещений с произвольными (\bar{v}, \bar{w})

$$S_r = \{\bar{u} \in H_D^1(\Omega_\gamma)^2 \mid [\bar{u}_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2; (\bar{u}_\tau^-, \bar{u}_\nu^-)|_{\gamma_1 \cup \gamma_2} = (\bar{v}, \bar{w}), (\bar{v}, \bar{w}) \in L(s)\}$$

и возьмём произвольный элемент $\bar{u} \in S_r$. Тогда существуют функции \bar{v}, \bar{w} , такие что $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S$. Подставим $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ в качестве тестовой функции в (30) и перейдём к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$. В результате получим

$$u \in S_r, \tag{33}$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) \geq 0 \quad \text{для всех } \bar{u} \in S_r. \tag{34}$$

Итак, доказано следующая

Теорема 2. Решения задачи (29), (30) сходятся в смысле (32) при $\alpha \rightarrow \infty$ к решению задачи (33), (34).

Предельная задача (33), (34) допускает дифференциальную формулировку. Требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_γ , и функции $(v, w) \in L(s)$, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{35}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \quad \text{на } \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \tag{36}$$

$$[u_\nu] \geq 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2; \quad (u_\tau^-, u_\nu^-)|_{\gamma_1 \cup \gamma_2} = (v, w), \tag{37}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu \cdot u] = 0, \quad \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu \cdot \bar{u}] \leq 0 \quad \text{для всех } \bar{u} \in S_r. \tag{38}$$

Можно привести ещё одну дифференциальную формулировку задачи (33), (34). Именно, требуется найти функции $u = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_γ , и функции $(v, w) \in L(s)$, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{39}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \quad \text{на } \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \tag{40}$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\tau^-, \quad w = u_\nu^- \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \tag{41}$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \tag{42}$$

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma_\tau] \bar{v} + \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma_\nu] \bar{w} = 0 \quad \text{для всех } (\bar{v}, \bar{w}) \in L(s). \tag{43}$$

Теорема 3. На классе гладких решений формулировки (33), (34), (35)–(39) и (39)–(43) эквивалентны.

Доказательство. Покажем эквивалентность (33), (34) и (39)–(43). Пусть выполнено (39)–(43). Умножим первое уравнение (39) на $\bar{u} - u$, где $\bar{u} \in S_r$, и проинтегрируем по Ω_γ . Получим

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] + \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) = 0. \tag{44}$$

Заметим, что если

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu (\bar{u} - u)] \leq 0, \quad (45)$$

то из (44) вытекает (34). Однако проверка справедливости (45) с учётом краевых условий (41)–(43) трудностей не доставляет.

В обратную сторону. Пусть выполнено (33), (34). Выбирая в (34) тестовую функцию $\bar{u} = u \pm \psi$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)^2$, легко получим уравнение равновесия в Ω_γ . Краевые условия (42) являются типичными для отслоившихся тонких включений при краевых условиях взаимного непоникания противоположных берегов; их вывод мы опустим. Подставим теперь в (34) тестовую функцию вида $\bar{u} = u \pm \tilde{u}$, где \tilde{u} — произвольная функция из S_r , такая что $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на $\gamma_1 \cup \gamma_2$. Получим

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\tilde{u}) - \int_{\Omega_\gamma} f \tilde{u} = 0. \quad (46)$$

Интегрирование по частям в (46) с учётом справедливости уравнения равновесия приводит к тождеству

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [\sigma \nu \cdot \tilde{u}] = 0. \quad (47)$$

Тождество (47) в точности совпадает с (43), что и требуется. Второе краевое условие (40) можно получить из (34) стандартным образом. Таким образом, из (33), (34) вытекают все соотношения (39)–(43).

Доказательство эквивалентности (33), (34) и (35)–(38) проще, и мы его опустим. \square

3. ПЕРЕХОД К ПРЕДЕЛУ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ ПАРАМЕТРА ЖЁСТКОСТИ ПЕРЕМЫЧКИ К НУЛЮ

Цель данного раздела — исследовать переход к пределу по параметру жёсткости тонкой перемычки при стремлении этого параметра к нулю. Будем предполагать, что параметр жёсткости меняется на интервале s_0 , а на множестве $s_1 \cup s_2$ параметр фиксирован и равен единице. В указанном случае решение соответствующей краевой задачи при каждом фиксированном параметре жёсткости α удовлетворяет вариационному неравенству

$$(u^\alpha, v^\alpha, w^\alpha) \in S, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha) \varepsilon(\bar{u} - u^\alpha) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u^\alpha) \\ & + \alpha \int_{s_0} \{w_{,11}^\alpha (\bar{w}_{,11} - w_{,11}^\alpha) + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}^\alpha + k(\bar{w} - w^\alpha))\} \\ & + \int_{s_1 \cup s_2} \{w_{,11}^\alpha (\bar{w}_{,11} - w_{,11}^\alpha) + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}^\alpha) + k(\bar{w} - w^\alpha)\} \geq 0 \end{aligned}$$

для всех $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S$. (49)

Задача (48), (49) соответствует минимуму функционала энергии

$$E_\alpha(u, v, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(u) - \int_{\Omega_\gamma} f u + \frac{\alpha}{2} \int_{s_0} \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\} + \frac{1}{2} \int_{s_1 \cup s_2} \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\}$$

на множестве S . Можно выписать дифференциальную формулировку задачи (48), (49). Именно, требуется найти вектор перемещений $u^\alpha = (u_1^\alpha, u_2^\alpha)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_γ , и перемещения v^α, w^α точек тонкой перемычки, определённые на s , такие что выполняются уравнения

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u^\alpha) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma, \quad (50)$$

$$\alpha^\beta w_{,1111}^\alpha + \alpha^\beta k(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha) = [\sigma_\nu]pq_i \quad \text{на} \quad s_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (51)$$

$$-\alpha^\beta v_{,11}^\alpha - \alpha^\beta (kw^\alpha)_{,1} = [\sigma_\tau]pq_i \quad \text{на} \quad s_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad (52)$$

и краевые условия

$$u^\alpha = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2; \quad \sigma n = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \quad (53)$$

$$w_{,11}^\alpha = w_{,111}^\alpha = v_{,1}^\alpha + kw^\alpha = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = -2, 2, \quad (54)$$

$$[u_\nu^\alpha] \geq 0, \quad v^\alpha = (u_\tau^\alpha)^-, \quad w^\alpha = (u_\nu^\alpha)^- \quad \text{на} \quad \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (55)$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad \sigma_\tau^+ = 0, \quad \sigma_\nu^+ [u_\nu^\alpha] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (56)$$

$$[v^\alpha(\pm 1)] = [w^\alpha(\pm 1)] = [w_{,1}^\alpha(\pm 1)] = 0, \quad (57)$$

$$(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\mp 1 \mp) = \alpha(v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)(\mp 1 \pm); \quad w_{,11}^\alpha(\mp 1 \mp) = \alpha w_{,11}^\alpha(\mp 1 \pm), \quad (58)$$

$$w_{,111}^\alpha(\mp 1 \mp) = \alpha w_{,111}^\alpha(\mp 1 \pm), \quad (59)$$

где $\beta = 0$ для $i = 1, 2$; $\beta = 1$ для $i = 0$. В формулах (58), (59) следует одновременно брать верхние и нижние знаки.

Сначала получим априорные оценки решений в задаче (48), (49). Как и в предыдущем разделе, из (48), (49) следует соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u^\alpha) \varepsilon(u^\alpha) - \int_{\Omega_\gamma} f u^\alpha + \alpha \int_{s_0} \{ (w_{,11}^\alpha)^2 + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 \} \\ + \int_{s_1 \cup s_2} \{ (w_{,11}^\alpha)^2 + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 \} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Повторяя рассуждения, которые использовались при доказательстве коэрцитивности функционала E в разд. 1, из (60) получим равномерную по α оценку

$$\|u^\alpha\|_{H_D^1(\Omega_\gamma)^2}^2 + \|(v^\alpha, w^\alpha)\|_{H^1(s_1 \cup s_2) \times H^2(s_1 \cup s_2)}^2 \leq c. \quad (61)$$

Кроме того,

$$\alpha \int_{s_0} \{ (w_{,11}^\alpha)^2 + (v_{,1}^\alpha + kw^\alpha)^2 \} \leq c. \quad (62)$$

Из (61) заключаем, что величины $v^\alpha(\pm 1), w^\alpha(\pm 1), w_{,1}^\alpha(\pm 1)$ равномерно ограничены по α .

Пользуясь утверждением 2, доказанным ниже, и (62), получаем что равномерно при малых α

$$\|\sqrt{\alpha}(v^\alpha, w^\alpha)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)} \leq c. \quad (63)$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность, с учётом (61), (63) можно считать, что при $\alpha \rightarrow 0$

$$u^\alpha \rightarrow u \quad \text{слабо в} \quad H_D^1(\Omega_\gamma)^2, \quad (64)$$

$$(v^\alpha, w^\alpha) \rightarrow (v, w) \quad \text{слабо в} \quad H^1(s_1 \cup s_2) \times H^2(s_1 \cup s_2), \quad (65)$$

$$(\sqrt{\alpha}v^\alpha, \sqrt{\alpha}w^\alpha) \rightarrow (\tilde{v}, \tilde{w}) \quad \text{слабо в} \quad H^1(s_0) \times H^2(s_0). \quad (66)$$

Введём в рассмотрение множество допустимых перемещений для предельной задачи

$$S_0 = \{(u, v, w) \in H_D^1(\Omega_\gamma)^2 \times H^1(s_1 \cup s_2) \times H^2(s_1 \cup s_2) \mid (u_\tau^-, u_\nu^-) = (v, w), [u_\nu] \geq 0 \text{ на } \gamma_1 \cup \gamma_2\}.$$

Возьмём произвольный элемент $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S_0$, считая, что функции \bar{v}, \bar{w} продолжены в s_0 с сохранением гладкости, и подставим его в качестве тестового в (49). Отметим при этом, что это допустимый элемент, т. е. $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S$. После перехода к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ на основе (64)–(66) получим

$$(u, v, w) \in S_0, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\gamma} \sigma(u) \varepsilon(\bar{u} - u) - \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{u} - u) + \int_{s_1 \cup s_2} (v_{,1} + kw)(\bar{v}_{,1} - v_{,1}) \\ & + \int_{s_1 \cup s_2} \{w_{,11}(\bar{w}_{,11} - w_{,11}) + k(v_{,1} + kw)(\bar{w} - w)\} \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) \in S_0. \end{aligned} \quad (68)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Решения задач (48), (49) сходятся в смысле (64)–(66) при $\alpha \rightarrow 0$ к решению задачи (67), (68).*

Приведём дифференциальную формулировку задачи (67), (68). Требуется найти вектор перемещений $u = (u_1, u_2)$ и тензор напряжений $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, упругих тел, определённые в Ω_γ , и перемещения v, w точек перемычки, определённые на $s_1 \cup s_2$, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma = f; \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в } \Omega_\gamma, \quad (69)$$

$$w_{,1111} + k(v_{,1} + kw) = [\sigma_\nu]p \quad \text{на } s_1 \cup s_2, \quad (70)$$

$$-v_{,11} - (kw)_{,1} = [\sigma_\tau]p \quad \text{на } s_1 \cup s_2, \quad (71)$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_D^1 \cup \Gamma_D^2, \quad \sigma n = 0 \quad \text{на } \Gamma_N^1 \cup \Gamma_N^2, \quad (72)$$

$$w_{,11} = w_{,111} = v_{,1} + kw = 0 \quad \text{при } x_1 = \pm 1, \pm 2, \quad (73)$$

$$[u_\nu] \geq 0, \quad v = u_\tau^-, \quad w = u_\nu^- \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad (74)$$

$$\sigma_\nu^+ \leq 0, \quad s_\tau^+ = 0, \quad s_\nu^+[u_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_2. \quad (75)$$

Видно, что краевая задача (69)–(75) распадается на две независимые задачи, сформулированные в областях Ω_L, Ω_R . Каждая из этих задач описывает равновесие упругого тела с тонким слабо искривлённым включением.

Имеет место следующая

Теорема 5. *На классе гладких решений формулировки (67), (68) и (69)–(75) эквивалентны.*

В заключение этого раздела докажем утверждение, которое использовалось при доказательстве теоремы 4.

Для гладких функций v, w , заданных на s_0 , обозначим

$$h^2(v, w) = v^2(1) + v^2(-1) + w^2(1) + w^2(-1) + w_{,1}^2(1) + w_{,1}^2(-1).$$

Утверждение 2. *Существует постоянная $c > 0$, такая что*

$$\int_{s_0} \{w_{,11}^2 + (v_{,1} + kw)^2\} + h^2(v, w) \geq c \|(v, w)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)}^2$$

для всех $(v, w) \in H^1(s_0) \times H^2(s_0)$.

Доказательство. Предположим, что сформулированное утверждение не верно. В этом случае существует последовательность $(v^m, w^m) \in H^1(s_0) \times H^2(s_0)$, такая что при $m \rightarrow \infty$

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)} = 1, \quad (76)$$

$$\int_{s_0} \{(w_{,11}^m)^2 + (v_{,1}^m + kw^m)^2\} + h^2(v^m, w^m) \rightarrow 0. \quad (77)$$

Можно считать, выбирая при необходимости подпоследовательность, что при $m \rightarrow \infty$

$$(v^m, w^m) \rightarrow (v, w) \quad \text{слабо в } H^1(s_0) \times H^2(s_0), \quad \text{сильно в } L^2(s_0) \times H^1(s_0). \quad (78)$$

Для предельных функций в силу (77), (78) имеем

$$w_{,11} = 0, \quad v_{,1} + kw = 0 \quad \text{на } s_0; \quad h^2(v, w) = 0. \quad (79)$$

Тогда, учитывая (79), получаем

$$v \equiv w \equiv 0 \quad \text{на } s_0. \quad (80)$$

В силу (77), (78), (80) будем иметь

$$\begin{aligned} \|(v^m, w^m)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)}^2 &= \|(v^m, w^m)\|_{L^2(s_0) \times H^1(s_0)}^2 + \int_{s_0} \{(v_{,1}^m)^2 + (w_{,11}^m)^2\} \\ &\rightarrow \|(v, w)\|_{L^2(s_0) \times H^1(s_0)}^2 + \int_{s_0} \{v_{,1}^2 + w_{,11}^2\} = \|(v, w)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем сходимость норм

$$\|(v^m, w^m)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)} \rightarrow \|(v, w)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)}.$$

Учитывая (78), заключаем

$$(v^m, w^m) \rightarrow (v, w) \quad \text{сильно в } H^1(s_0) \times H^2(s_0),$$

что силу (80) приводит к противоречию, поскольку из (76) следует

$$\|(v, w)\|_{H^1(s_0) \times H^2(s_0)} = 1.$$

Утверждение 2 доказано. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Caillerie D., Nedelec J.C. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // Math. Meth. Appl. Sci. 1980. V. 2. P. 251–270; <https://doi.org/10.1002/mma.1670020302>
2. El Jarroudi M. Homogenization of an elastic material reinforced with thin rigid von Karman ribbons // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24, N 7. P. 1–27; <https://doi.org/10.1177/1081286518810757>
3. Lazarev N. Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // Z. Angew. Math. Phys. 2015. V. 66. P. 2025–2040; <https://doi.org/10.1007/s00033-014-0488-4>
4. Rudoy E. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions // Technologies. 2020. V. 8, N 4. Article 59; <https://doi.org/10.3390/technologies8040059>
5. Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G. Multi-materials with strong interface: Variational modelings // Asymptot. Anal. 2009. V. 61, N 1. P. 1–19; DOI:10.3233/ASY-2008-0903

6. *Khudnev A.M., Fankina I.V.* Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary // *Z. Angew. Math. Phys.* 2021. V. 72, N 121; <https://doi.org/10.1007/s00033-021-01553-3>
7. *Lazarev N.P., Rudoy E.M.* Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies // *J. Comp. Appl. Math.* 2022. V. 403. Article 113710; DOI:10.1016/j.cam.2021.113710
8. *Lazarev N., Itou H.* Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff —Love plates with a crack // *Math. Mech. Solids.* 2019. V. 24. P. 3743–3752; <https://doi.org/10.1177/1081286519850608>
9. *Рудой Е.М., Итоу Х., Лазарев Н.П.* Асимптотическое обоснование моделей тонких включений в упругом теле в рамках антиплоского сдвига // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2021. Т. 24. № 1. С. 103–119; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.108
10. *Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A.* Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion // *Sib. Electron. Math. Rep.* 2022. V. 19, N 2. P. 935–948; DOI: 0.33048/semi.2022.19.078
11. *Shcherbakov V.V.* Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions // *Z. Angew. Math. Phys.* 2017. V. 68, N 26; <https://doi.org/10.1007/s00033-017-0769-9>
12. *Khudnev A.M.* T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter // *J. Comp. Appl. Math.* 2021. V. 393. Article 113540; <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113540>
13. *Furtsev A.I.* On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion // *J. Math. Sci.* 2019. V. 237, N 4. P. 530–545; <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.9>
14. *Bellieud M., Bouchitte G.* Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers // *Asymptotic Anal.* 2002. V. 32. P. 153–183.
15. *Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A.* Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material // *Philos. Trans. R. Soc. Ser. A.* 2022. V. 380. Article 20210354; <https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0354>
16. *Gaudiello A., Sili A.* Limit models for thin heterogeneous structures with high contrast // *J. Differ. Equ.* 2021. V. 302. P. 37–63; <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.08.032>
17. *Kovtunen V.A., Leugering G.* A shape-topological control problem for nonlinear crack — defect interaction: the anti-plane variational model // *SIAM J. Control Optim.* 2016. V. 54. P. 1329–1351; <https://doi.org/10.1137/151003209>
18. *Khudnev A.M., Kovtunen V.A.* *Analysis of Cracks in Solids.* Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
19. *Хлуднев А.М.* *Задачи теории упругости в негладких областях.* М.: Физматлит, 2010.
20. *Вольмир А.С.* *Нелинейная динамика пластинок и оболочек.* М.: Наука, 1972.
21. *Хлуднев А.М.* Слабо искривлённое включение в упругом теле при наличии отслоения // *Изв. РАН.* 2015. № 5. С. 131–144.
22. *Хлуднев А.М.* Асимптотика анизотропных слабо искривлённых включений в упругом теле // *Сиб. журнал индустр. математики.* 2017. Т. 20, № 1. С. 93–104; <https://doi.org/10.17377/sibjim.2017.20.110>
23. *Хлуднев А.М., Попова Т.С.* О задаче сопряжения двух слабо искривлённых включений в упругом теле // *Сиб. мат. журн.* 2020. Т. 61, № 4. С. 932–945; DOI: 10.33048/smzh.2020.61.414
24. *Khudnev A.M.* Asymptotics of solutions for two elastic plates with thin junction // *Sib. Electron. Math. Rep.* 2022. V. 19, N 2. P. 484–501; DOI: 10.33048/semi.2022.19.041
25. *Khudnev A.M.* On the crossing bridge between two Kirchhoff —Love plates // *Axioms.* 2023. V. 12, N 2. Article 120; <https://doi.org/10.3390/axioms12020120>

UDC 517.958:539.3

ON THE EQUILIBRIUM OF ELASTIC BODIES WITH WEAKLY CURVED JUNCTION

© 2023 A. M. Khludnev

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
pr. Acad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: khlud@hydro.nsc.ru

Received 10.04.2023, revised 19.04.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. The work is addressed to the analysis of a boundary value problem with an unknown contact area, which describes equilibrium of two-dimensional elastic bodies with a thin weakly curved junction. It is assumed that the junction exfoliates from the elastic bodies, thereby forming interfacial cracks. Nonlinear boundary conditions of the inequality form are set on the crack faces, excluding the mutual penetration. The unique solvability of the boundary value problem is established. The analysis of limit transitions in terms of the junction stiffness parameter is provided as the parameter tends to infinity and to zero, and limiting models are investigated.

Keywords: boundary value problem, nonlinear boundary conditions, elastic body, thin junction, crack

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.312

REFERENCES

1. Caillerie D., Nedelec J.C. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1980, Vol. 2, pp. 251–270; <https://doi.org/10.1002/mma.1670020302>
2. El Jarroudi M. Homogenization of an elastic material reinforced with thin rigid von Karman ribbons. *Math. Mech. Solids*, 2018, Vol. 24, No. 7, pp. 1–27; <https://doi.org/10.1177/1081286518810757>
3. Lazarev N. Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, Vol. 66, pp. 2025–2040; <https://doi.org/10.1007/s00033-014-0488-4>
4. Rudoy E. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions. *Technologies*, 2020, Vol. 8, No. 4, article 59; <https://doi.org/10.3390/technologies8040059>
5. Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G. Multi-materials with strong interface: Variational modelings. *Asympt. Analysis*, 2009, Vol. 61, No. 1, pp. 1–19; DOI:10.3233/ASY-2008-0903
6. Khludnev A.M., Fankina I.V. Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2021, Vol. 72, No. 121; <https://doi.org/10.1007/s00033-021-01553-3>
7. Lazarev N.P., Rudoy E.M. Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies *J. Comp. Appl. Math.* 2022. V. 403. Article 113710; DOI:10.1016/j.cam.2021.113710
8. Lazarev N., Itou H. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff —Love plates with a crack. *Math. Mech. Solids*, 2019, Vol. 24, pp. 3743–3752; <https://doi.org/10.1177/1081286519850608>

9. Rudoy E.M., Itou H., Lazarev N.P. Asimptoticheskoe obosnovanie modelej tonkih vkljuchenij v uprugom tele v ramkah antiploskogo sdviga [Asymptotic substantiation of models of thin inclusions in an elastic body within the framework of an antiplane shift]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2021, Vol. 24, No. 1, pp. 103–119 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.108
10. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2022, Vol. 19, No. 2, pp. 935–948; DOI: 0.33048/semi.2022.19.078
11. Shcherbakov V.V. Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017, Vol. 68, No. 26; <https://doi.org/10.1007/s00033-017-0769-9>
12. Khludnev A.M. T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter. *J. Comp. Appl. Math.*, 2021, Vol. 393, article 113540; <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113540>
13. Furtsev A.I. On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion. *J. Math. Sci.*, 2019, Vol. 237, No. 4, pp. 530–545; <https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.9>
14. Bellieud M., Bouchitte G. Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers. *Asymptotic Anal.*, 2002, Vol. 32, pp. 153–183.
15. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material. *Philos. Trans. R. Soc. Ser. A*, 2022, Vol. 380, article 20210354; <https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0354>
16. Gaudiello A., Sili A. Limit models for thin heterogeneous structures with high contrast. *J. Differ. Equ.*, 2021, Vol. 302, pp. 37–63; <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.08.032>
17. Kovtunenkov V.A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack — defect interaction: the anti-plane variational model. *SIAM J. Control Optim.*, 2016, Vol. 54, pp. 1329–1351; <https://doi.org/10.1137/151003209>
18. Khludnev A.M., Kovtunenkov V.A. Analysis of Cracks in Solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
19. Khludnev A.M. Zadachi teorii uprugosti v negladkih oblastjakh [Problems of elasticity theory in non-smooth domains]. Moscow: Fizmatlit, 2010 (in Russian).
20. Vol'mir A.S. Nelinejnaja dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian).
21. Khludnev A.M. A weakly curved inclusion in an elastic body with separation. *Mechanics of Solids*, 2015, Vol. 50, No. 5, pp. 591–601; DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654415050106>
22. Khludnev A.M. Asimptotika anizotropnyh slabo iskrivljonyh vkljuchenij v uprugom tele [Asymptotics of anisotropic weakly curved inclusions in an elastic body]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2017, Vol. 20, No. 1, pp. 93–104 (in Russian); <https://doi.org/10.17377/sibjim.2017.20.110>
23. Khludnev A.M., Popova T.C. The junction problem for two weakly curved inclusions in an elastic body. *Sib. Math. J.*, 2020, Vol. 61, No. 4, pp. 743–754.
24. Khludnev A.M. Asymptotics of solutions for two elastic plates with thin junction. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2022, Vol. 19, No 2, pp. 484–501; DOI: 10.33048/semi.2022.19.041
25. Khludnev A.M. On the crossing bridge between two Kirchhoff —Love plates. *Axioms*, 2023, Vol. 12, No. 2, article 120; <https://doi.org/10.3390/axioms12020120>

УДК 519.6

АЛГОРИТМ КОНТРОЛЯ ПРОЦЕССА НАПЫЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ВЫБОРОЧНЫХ ДАННЫХ ШИРОКОПОЛОСНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2023 В. Д. Шинкарев^{1a}, Д. В. Лукьяненко^{1b},
А. В. Тихонравов^{2c}, А. Г. Ягола^{1d}

¹ МГУ им. М. В. Ломоносова,

Ленинские горы, 1, стр. 2, г. Москва 119991, Россия,

² Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,

Ленинские горы, 1, стр. 4, г. Москва 119234, Россия

E-mails: ^ashinkarev.vd17@physics.msu.ru, ^blukyanenko@physics.msu.ru,
^ctikh@srcc.msu.ru, ^dyagola@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 02.04.2023 г.; после доработки 24.04.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Рассмотрен алгоритм контроля процесса напыления оптических покрытий на основе анализа выборочных данных широкополосных измерений для фиксированного набора длин волн. Рассмотренный алгоритм, с одной стороны, использует данные широкополосных измерений, что является преимуществом по сравнению с использованием данных только монохроматических измерений для одной фиксированной длины волны, а с другой — является быстродействующим по сравнению с алгоритмами, использующими полные данные широкополосных измерений. Продемонстрировано, что предложенный алгоритм позволяет получать достаточно точные оценки толщин слоёв напыляемых многослойных оптических покрытий.

Ключевые слова: оптические покрытия, напыление покрытий, широкополосный контроль, монохроматический контроль.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.313

ВВЕДЕНИЕ

Напыление многослойных оптических покрытий является одной из ключевых технологий современной оптики, которая позволяет создавать оптические изделия с желаемыми спектральными характеристиками [1]. Обычно это достигается путём напыления системы тонких слоёв из материалов с различными показателями преломления [2]. Существуют алгоритмы, которые позволяют рассчитывать теоретические толщины слоёв, последующее точное напыление которых даёт возможность получить многослойное оптическое покрытие с требуемыми спектральными характеристиками [3, 4]. Однако в реальных процессах на производстве слои оптического покрытия напыляются с ошибками за счёт несовершенных способов контроля текущей толщины каждого напыляемого слоя [5]. Это приводит к существенным отклонениям спектральных характеристик получаемого оптического изделия от желаемых. Как следствие, возникает потребность в разработке эффективных алгоритмов контроля процесса напыления с целью минимизации отклонений полученных спектральных характеристик от требуемых. Методам решения этой задачи посвящено множество работ (см., например, [5–7]). В частности, в работе [7] авторами был предложен нелокальный алгоритм контроля процесса напыления, основанный на использовании данных монохроматических измерений. Разработанный алгоритм

использовал весь набор данных измерений одной из спектральных характеристик (коэффициента отражения) на фиксированной длине волны в течение всего времени напыления каждого контролируемого слоя. В указанной работе было продемонстрировано, что при малых ошибках в измерениях такой подход даёт довольно хороший результат. Однако при увеличении уровня ошибок в экспериментальных данных результаты обработки могут существенно ухудшаться. В связи с этим возникла идея обобщить предложенный в работе [7] алгоритм на случай использования данных измерений на нескольких длинах волн с целью получения более точных результатов за счёт использования как можно большего объёма экспериментальных данных. При этом возникает вопрос о том, не стоит ли использовать полные данные широкополосных измерений (а не только их часть на выбранных длинах волн)? Такой выбор связан с тем, что: 1) вычислительная сложность предлагаемого в работе алгоритма останется приемлемой для его применения в режиме реального времени on-line, 2) данные широкополосных измерений на каждой из выбранных длин волн являются по сути данными монохроматических измерений, а значит, это даёт возможность использовать разработанные авторами ранее алгоритмы коррекции уже напылённых слоёв [6, 7], что позволит избежать кумулятивного эффекта накопления ошибок [8, 9].

Структура данной работы следующая. В разд. 1 приводится описание обобщённого алгоритма контроля напыления при использовании выборочного набора данных широкополосного мониторинга. В разд. 2 демонстрируются результаты сравнительного анализа работы предложенного алгоритма контроля процесса напыления при различных величинах ошибок в обрабатываемых экспериментальных данных с учётом и без учёта коррекции.

1. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Под алгоритмом контроля процесса напыления оптических покрытий мы подразумеваем алгоритм, который способен оценить время, оставшееся до завершения напыления текущего слоя заданной толщины. Рассматриваемый в данном разделе алгоритм будет использовать выборочные данные широкополосных измерений для фиксированного набора длин волн, полученных в процессе напыления текущего слоя многослойного покрытия. Но сначала опишем алгоритм вычисления коэффициентов пропускания и отражения для имеющегося покрытия, потом приведём описание симуляции процесса напыления и только затем сформулируем предлагаемый алгоритм контроля процесса напыления.

1.1. Вычисление коэффициентов пропускания и отражения

Чтобы вычислить спектральные характеристики (коэффициенты пропускания и/или отражения) многослойного оптического покрытия, необходимо действовать по следующему алгоритму.

1. Определить компоненты матрицы $M_j(\lambda)$ для каждого слоя с номером j :

$$M_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_j & \frac{i}{n_j} \sin \varphi_j \\ in_j \sin \varphi_j & \cos \varphi_j \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Здесь $\varphi_j = \frac{2\pi}{\lambda} n_j d_j$ — фазовая толщина j -го слоя, $n_j \equiv n_j(\lambda)$ — показатель преломления j -го слоя, d_j — толщина j -го слоя.

2. Определить матрицу $M^J(\lambda)$ для всего многослойного покрытия, состоящего из J слоёв:

$$M^J(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} m_{11}^J & m_{12}^J \\ m_{21}^J & m_{22}^J \end{pmatrix} = \prod_{j=J}^1 M_j. \quad (2)$$

3. Найти коэффициенты пропускания $T^{(1)}(\lambda)$ и отражения $R^{(1)}(\lambda)$ без учёта конечной толщины подложки:

$$T^{(1)}(\lambda) = \operatorname{Re} \frac{n_s}{n_a} \left| \frac{2n_a}{n_a m_{11}^J + n_s m_{22}^J + n_a n_s m_{12}^J + m_{21}^J} \right|^2,$$

$$R^{(1)}(\lambda) = \left| \frac{n_a m_{11}^J - n_s m_{22}^J + n_a n_s m_{12}^J - m_{21}^J}{n_a m_{11}^J + n_s m_{22}^J + n_a n_s m_{12}^J + m_{21}^J} \right|^2.$$

Здесь $n_s \equiv n_s(\lambda)$, $n_a \equiv n_a(\lambda)$ — показатели преломления подложки и внешней среды соответственно.

4. Найти коэффициенты пропускания $T^{(2)}(\lambda)$ и отражения $R^{(2)}(\lambda)$ для задней стороны подложки:

$$T^{(2)}(\lambda) = \operatorname{Re} \frac{n_s}{n_a} \left| \frac{2n_a}{n_a + n_s} \right|^2, \quad R^{(2)}(\lambda) = \left| \frac{n_a - n_s}{n_a + n_s} \right|^2.$$

5. Вычислить итоговые коэффициенты пропускания $T(\lambda)$ и отражения $R(\lambda)$ для всего многослойного покрытия, напылённого на подложку конечной толщины D с коэффициентом затухания χ :

$$T(\lambda) = \frac{T^{(1)}T^{(2)}e^{-\frac{4\pi}{\chi}D\chi}}{1 - R^{(1)}R^{(2)}e^{-\frac{8\pi}{\chi}D\chi}}, \quad R(\lambda) = R^{(2)} + \frac{R^{(1)}(T^{(2)})^2e^{-\frac{8\pi}{\chi}D\chi}}{1 - R^{(1)}R^{(2)}e^{-\frac{8\pi}{\chi}D\chi}}.$$

При этом целесообразно получить зависимость $T(\lambda)$ только от толщины последнего слоя. Это связано с тем, что одна из особенностей контроля процесса напыления состоит в том, что в процессе контроля непрерывно проводятся измерения спектральных характеристик (например, коэффициента пропускания T) только при напылении последнего слоя с номером J толщины d_J . Вынесем матрицу последнего слоя из произведения (2): $M^J = M_J M^{J-1}$ и распишем матрицу последнего слоя по формуле (1). После алгебраических преобразований можно получить, что

$$T(\lambda; d_{1,J}, n_{1,J}) = \frac{1}{\alpha \cos 2\varphi_J + \beta \sin 2\varphi_J + \gamma}. \quad (3)$$

Здесь

$$p = \frac{e^{\frac{4\pi}{\chi}D\chi}}{2 \operatorname{Re} \frac{n_s}{n_a} |2n_a|^2 T^{(2)}} (p_+ - p_- R^{(2)} e^{-\frac{8\pi}{\chi}D\chi}) \quad \text{для } p = \alpha, \beta, \gamma,$$

$$\alpha_{\pm} = |A_{\pm}| - |B_{\pm}|, \quad \beta_{\pm} = 2(\operatorname{Im} A_{\pm} \operatorname{Re} B_{\pm} - \operatorname{Re} A_{\pm} \operatorname{Im} B_{\pm}), \quad \gamma_{\pm} = |A_{\pm}| + |B_{\pm}|,$$

$$A_{\pm} = n_a m_{11}^{J-1} \pm n_s m_{22}^{J-1} + n_a n_s m_{12}^{J-1} \pm m_{21}^{J-1},$$

$$B_{\pm} = \frac{n_a n_s}{n_J} m_{22}^{J-1} \pm n_J m_{11}^{J-1} + \frac{n_a}{n_J} m_{21}^{J-1} \pm n_s n_J m_{12}^{J-1}$$

вычисляются на основе предыдущих $J - 1$ слоёв.

1.2. Описание симуляции процесса напыления

Опишем процесс симуляции напыления последнего слоя покрытия с номером J . Предположим, что измерения производятся на наборе длин волн $\{\lambda_k\}$. Если перед началом процесса напыления слоя мы положим счётчик шага (номера измерения) как $m := 0$, то после каждого очередного измерения с шагом по времени τ мы можем вычислить текущее время t_m по формуле $t_m = \tau \cdot m$ и увеличить счётчик шага $m := m + 1$. Текущую толщину напыляемого слоя с номером J в момент времени t_m будем обозначать как $d_J^a(t_m)$. На каждом шаге m симулируется напыление с некоторой непостоянной скоростью $r_J + \delta_m^{rJ}$ (здесь δ_m^{rJ} —

случайная величина, распределённая по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{r,J}^2$). Далее вычисляются величины T_{mk}^{meas} по указанному в предыдущем разделе алгоритму с последующей симуляцией погрешности измерения: $T_{mk}^{\text{meas}} := T_{mk}^{\text{meas}} + \delta_{mk}^T$ (здесь δ_{mk}^T — независимые случайные величины, распределённые по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией σ_T^2). Индекс mk определяет длину волны λ_k , на которой производится симуляция измеренного значения T_{mk}^{meas} в момент времени t_m . По набору значений $\{T_{lk}^{\text{meas}}\}_{l=1,m}$ для каждой из выбранной длин волн λ_k и текущему времени t_m оценивается оставшееся время напыления текущего слоя Δt_m , которое в симуляции учитывается с ошибкой закрытия заслонки δ_m^t , распределённой по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией σ_t^2 . Алгоритм оценки оставшегося времени напыления является главным результатом данной работы и будет описан в следующем разделе. Если это время оказывается меньше τ , текущий слой напыляется в течение времени Δt_m и процесс напыления текущего слоя с номером J останавливается. В противном случае продолжается симуляция напыления текущего слоя.

1.3. Описание алгоритма контроля процесса напыления

Рассмотрим алгоритм контроля процесса напыления слоя с номером J в момент времени t_m напыления этого слоя. Помимо данных измерений $\{T_{lk}^{\text{meas}}\}_{l=1,m}$ для каждой из выбранной длин волн λ_k и текущего момента времени t_m известны теоретические значения толщин $d_{1,J}^{\text{theor}}$, которые необходимо напылить, показатели преломления материалов $n_{1,J}^{\text{est}}$ (измеренные с ошибкой) и среднее значение r_J скорости напыления текущего слоя.

Сначала вычислим целевое значение коэффициента пропускания, которое должно быть получено в конце напыления этого слоя, исходя из предположения, что все слои были напылены точно и их толщины составили теоретические значения $d_{1,J}^{\text{theor}}$: $T_k^* = T(\lambda_k; d_{1,J}^{\text{theor}}, n_{1,J}^{\text{est}})$.

Будем аппроксимировать данные измерений с помощью функции вида (3):

$$T_{mk}^{\text{est}}(t) = \frac{1}{\alpha_{mk}^{\text{est}} \cos 2\varphi_{mk}^{\text{est}}(t) + \beta_{mk}^{\text{est}} \sin 2\varphi_{mk}^{\text{est}}(t) + \gamma_{mk}^{\text{est}}}, \quad (4)$$

где $\varphi_{mk}^{\text{est}}(t) = \frac{2\pi}{\lambda_k} n_J^{\text{est}} r_J t$, а оценки коэффициентов могут быть найдены с помощью метода наименьших квадратов (как вариант, с весами): $(\alpha_{mk}^{\text{est}} \ \beta_{mk}^{\text{est}} \ \gamma_{mk}^{\text{est}})^T = L_{mk}^{-1} f_{mk}$. Здесь матрица L_{mk} и вектор f_{mk} имеют вид

$$L_{mk} = \sum_{l=1}^m \begin{bmatrix} w_{lk}^4 & x_{lk} y_{lk} & x_{lk} \\ x_{lk} y_{lk} & y_{lk}^2 & y_{lk} \\ x_{lk} & y_{lk} & 1 \end{bmatrix}, \quad f_{mk} = \sum_{l=1}^m \begin{bmatrix} w_{lk}^3 & x_{lk} \\ y_{lk} \\ 1 \end{bmatrix},$$

где для удобства введены обозначения

$$w_{lk} = T_{lk}^{\text{meas}}, \quad x_{lk} = \cos 2\varphi_{lk}^{\text{est}}(t_l), \quad y_{lk} = \sin 2\varphi_{lk}^{\text{est}}(t_l).$$

Оценка оставшегося времени напыления может быть найдена как

$$\Delta t_m = \operatorname{argmin}_{\Delta t \geq 0} \sum_{\{k\}} (T_{mk}^{\text{est}}(t_m + \Delta t) - \check{T}_{mk}^*)^2, \quad (5)$$

где $\{\check{T}_{mk}^*\}$ — скорректированные значения целевого коэффициента пропускания.

Мы рассматриваем случаи без коррекции ($\check{T}_{mk}^* \equiv T_k^*$) и коррекцию по «квазисвингу» (см. работы [6, 7]):

$$\check{T}_{mk}^* = T_{mk}^{\text{est} \mu_{mk}} + (T_k^* - T_k^{\text{theor} \mu_{mk}}) \frac{T_{mk}^{\text{est} \max} - T_{mk}^{\text{est} \min}}{T_k^{\text{theor} \max} - T_k^{\text{theor} \min}}.$$

Здесь

$$\mu_{mk} \equiv \begin{cases} \min & \text{при } \frac{d}{dt} T_{mk}^{\text{est}}(t_m) < 0, \\ \max & \text{в противоположном случае} \end{cases}$$

и

$$T_k^{\text{theor } \mu_{mk}} = \mu_{mk} \left[T \left(\lambda_k; d_{1,J-1}^{\text{theor}}, d_J, n_{1,J}^{\text{est}} \right) \right], \quad T_{mk}^{\text{est } \mu_{mk}} = \mu_{mk} \left[T_{mk}^{\text{est}}(t) \right],$$

при этом значения $T(\lambda_k; d_{1,J-1}^{\text{theor}}, d_J, n_{1,J}^{\text{est}})$ вычисляются по формуле (3), а $T_{mk}^{\text{est}}(t)$ — по формуле (4).

В данном случае экстремумы \min , \max соответствующих функций легко вычисляются аналитически. Приведём их значения для T_{mk}^{est} (для T_k^{theor} результат аналогичен):

$$T_{mk}^{\text{est min}} = \frac{1}{\gamma_{mk}^{\text{est}} + \sqrt{(\alpha_{mk}^{\text{est}})^2 + (\beta_{mk}^{\text{est}})^2}}, \quad T_{mk}^{\text{est max}} = \frac{1}{\gamma_{mk}^{\text{est}} - \sqrt{(\alpha_{mk}^{\text{est}})^2 + (\beta_{mk}^{\text{est}})^2}}.$$

1.4. О выборе длин волн

Заметим, что при выборе только одной длины волны предложенный алгоритм вырождается в монохроматический алгоритм контроля, рассмотренный в работе [7]. Задача несколько усложняется тем, что функционал в формуле (5) имеет бесконечное количество равнозначных минимумов, поэтому выбирается ближайший к оценочному времени напыления всего слоя: d_J^{theor}/r_J .

Аппроксимация в виде (4) требует различимости экстремумов \min , \max для корректного определения параметров $\{\alpha_{mk}^{\text{est}}, \beta_{mk}^{\text{est}}, \gamma_{mk}^{\text{est}}\}$, поэтому при её применении не стоит использовать слишком много длин волн, а также не стоит располагать их слишком близко друг к другу. На практике при наличии данных измерений на некотором наборе волн $\{\lambda_k\}$ можно выбрать несколько удалённых друг от друга длин волн с максимальными значениями

$$|T_k^{\text{theor max}} - T_k^{\text{theor min}}|.$$

Здесь индекс k означает измерение коэффициента пропускания на длине волны λ_k . При этом для контроля на разных слоях можно выбирать разные наборы длин волн.

2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Рассмотрим работу предложенного выше алгоритма контроля процесса напыления на примере покрытия, спектральная характеристика и толщины слоёв которого изображены на рис. 1. Здесь теоретические значения толщин составляют

$$d_{1,24}^{\text{theor}} = \{95.792, 152.572, 84.512, 142.998, 83.093, 140.309, 82.536, 139.311$$

$$82.207, 139.066, 81.989, 139.172, 81.916, 139.437, 82.064, 139.839$$

$$82.538, 140.588, 83.556, 142.384, 85.835, 148.074, 86.660, 72.846\} \text{ нм.}$$

В качестве материалов были использованы Nb_2O_5 (при напылении нечётных слоёв) и SiO_2 (при напылении чётных слоёв). Для значений показателя преломления подложки были взяты характеристики оптического стекла SCHOTT, коэффициент затухания χ считался нулевым.

Проведём серию симуляций для монохроматического и широкополосного алгоритмов контроля и сравним полученные результаты. Для монохроматического контроля симуляция измерений проводилась на длине волны $\lambda = 690$ нм, а для широкополосного контроля был заранее выбран набор длин волн согласно рекомендациям из подраздела 1.4:

$$\{\lambda_k\} = \{460, 520, 580, 610, 650, 670, 700\} \text{ нм.}$$

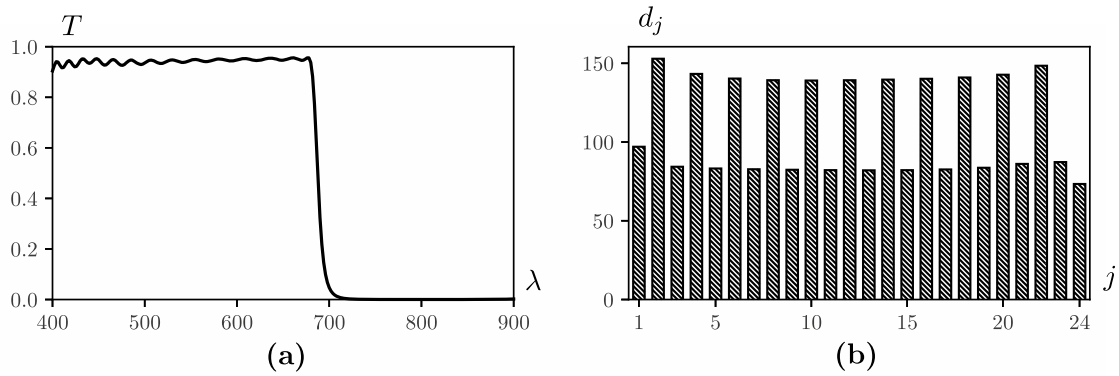


Рис. 1. Теоретический коэффициент пропускания (а) и толщины слоёв покрытия (б)

На рис. 2 приведены среднеквадратичные ошибки $\sqrt{\langle \Delta d_j^2 \rangle}$, здесь $\Delta d_j = d_j^a - d_j^{\text{theor}}$ в толщинах напылённых слоёв при использовании контроля процесса напыления при сравнительно небольших ошибках входных данных.

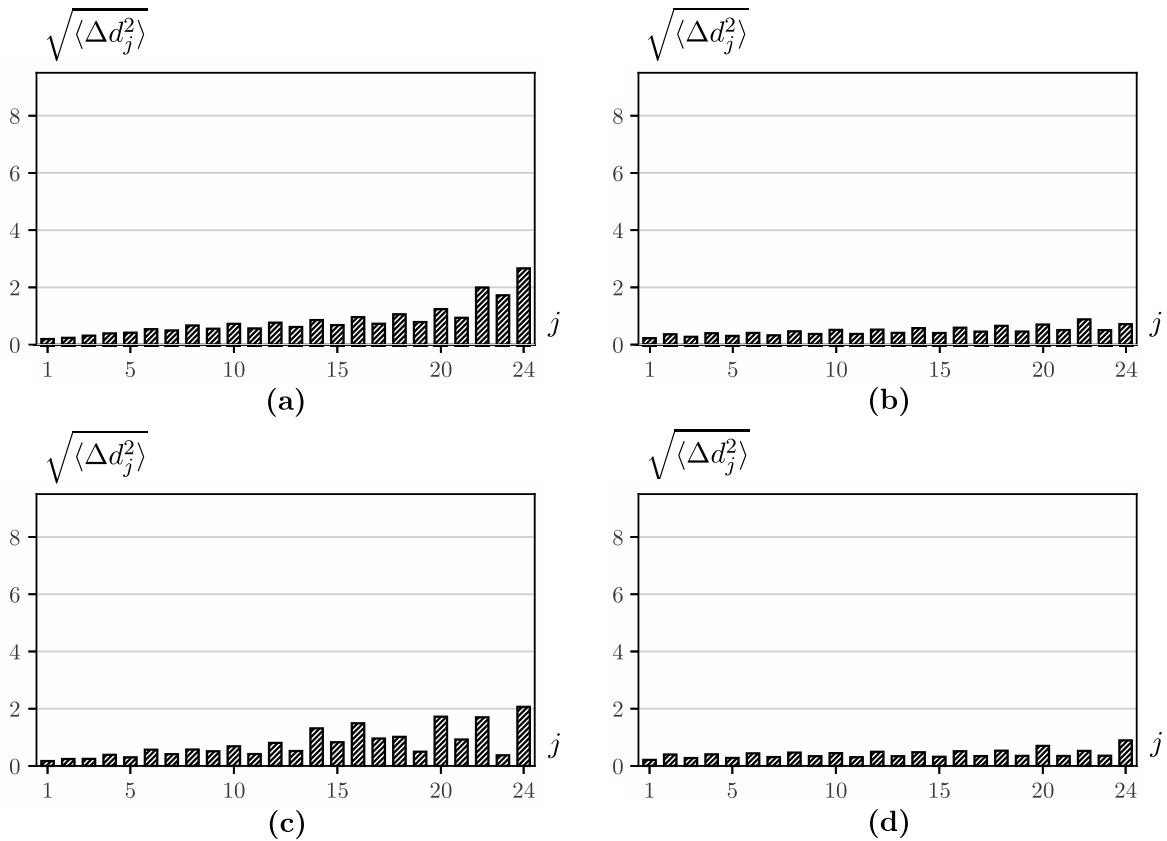


Рис. 2. Среднеквадратичные ошибки определения в толщинах напылённых слоёв (j — номер слоя) для $\sigma_T = 0.1\%$, $\sigma_t = 0.5$ с; в случае монохроматического контроля (а), (б); широкополосного контроля (с), (д); при отсутствии (а), (д) и наличии (б), (с) коррекции по «квазисвингу»

Видно, что без коррекции входных данных монохроматический алгоритм контроля процесса напыления позволяет получать при производстве достаточно качественные покрытия. С коррекцией по «квазисвингу» результаты визуально похожи. Широкополосный алгоритм особых преимуществ в случае небольших ошибок не имеет.

Теперь рассмотрим случай существенных ошибок во входных данных. Из результатов, представленных на рис. 3(a–d), можно сделать вывод, что использование выборочных данных широкополосных измерений позволяет получать покрытия с минимальными ошибками в толщинах напылённых слоёв как в случае с коррекцией, так и без. Для монохроматического алгоритма без коррекции ошибки становятся настолько существенными, что перестаёт работать правило выбора корня уравнения, ближайшего к оценочному времени напыления, из-за кумулятивного накопления ошибок. В связи с этим для слоёв с высокими номерами монохроматический контроль становится неприменимым.

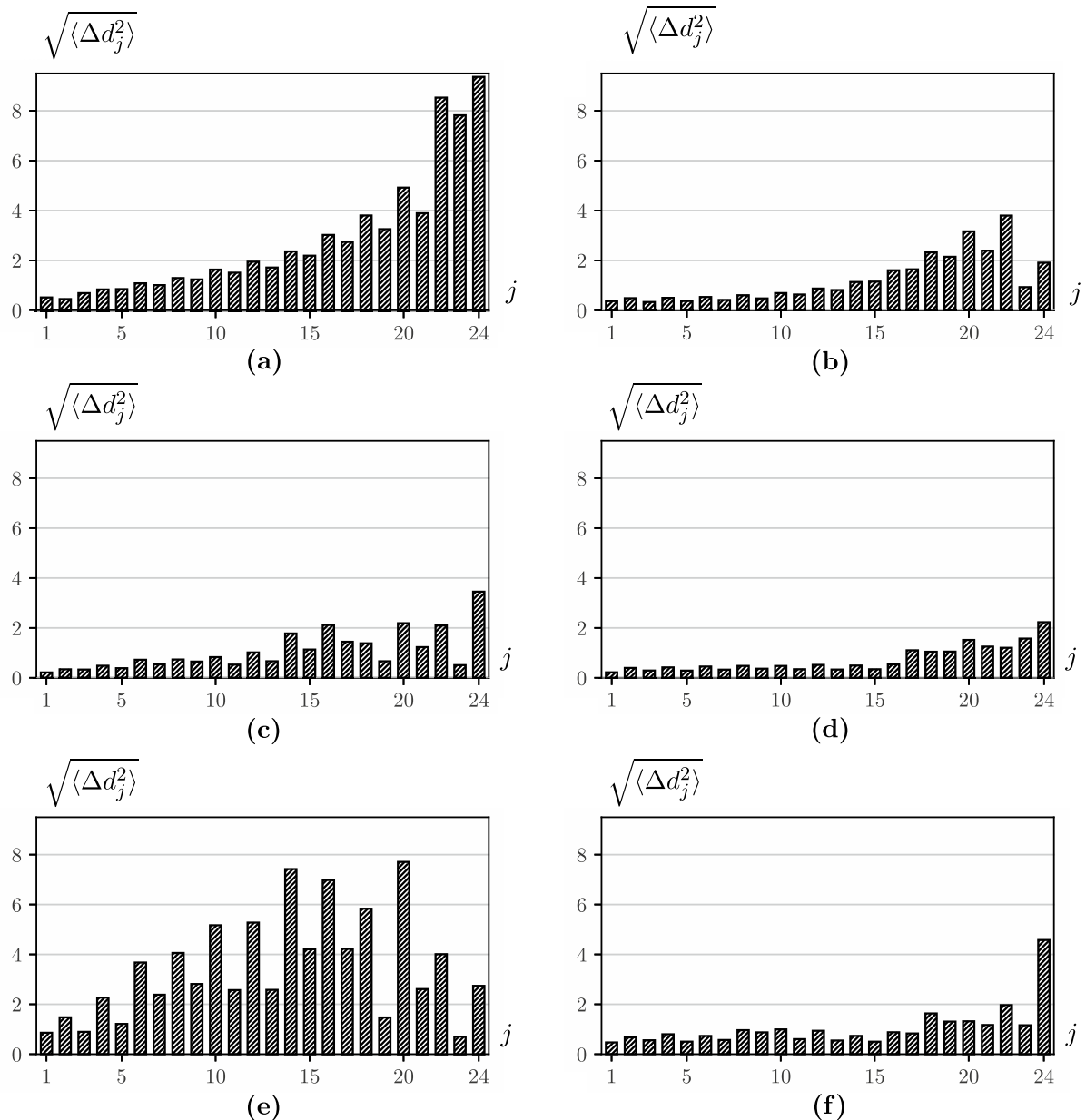


Рис. 3. Среднеквадратичные ошибки определения в толщинах напылённых слоёв (j — номер слоя) для $\sigma_T = 1.0\%$, $\sigma_t = 0.5$ с в случае монохроматического контроля (a), (b); широкополосного контроля (c), (d); широкополосного контроля для неправильно заданного показателя преломления (e), (f); при отсутствии (a), (c), (e) и наличии (b), (d), (f) коррекции по «квасисвингу»

Результаты симуляций напыления покрытий при неправильных данных о показателе пре-

ломления ($n^{\text{est}} = 0.99n$ для нечётных слоёв) приведены на рис. 3 (e, f). Можно сделать вывод о том, что неправильное задание показателя преломления может негативно сказаться на алгоритме контроля, поэтому следует по-возможности минимизировать ошибки при оценке значений показателя преломления.

На основе результатов, представленных на всех графиках, можно сделать вывод о том, что алгоритм коррекции «квазисвинг» существенно улучшает получаемые результаты при напылении покрытий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведённых исследований удалось обобщить монохроматический алгоритм контроля на случай использования данных измерений на нескольких длинах волн, при этом сохраняя возможность использовать коррекцию по «квазисвингу». На рассмотренных примерах было продемонстрировано, что несмотря на то, что предложенный алгоритм контроля и монохроматический алгоритм контроля дают примерно одинаковые результаты при небольших ошибках измерения показателя преломления, при росте ошибок в экспериментальных данных использование данных на нескольких длинах волн позволяет получить более точный результат по сравнению с монохроматическим контролем. Также было показано, что коррекция по «квазисвингу» позволяет существенно улучшить работу методов как в случае монохроматического, так и в случае широкополосного контроля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Born M., Wolf E.* Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. Cambridge: Univ. Press, 2013.
2. *Macleod A.* Monitoring of optical coatings // *Appl. Optim.* 1981. V. 20. P. 82–89.
3. *Piegari A., Flory F.* Optical Thin Films and Coatings. Cambridge: Woodhead Publ., 2018.
4. *Isaev T.F., Kochikov I.V., Lukyanenko D.V., Tikhonravov A.V., Yagola A.G.* Regularizing algorithms for the determination of thickness of deposited layers in optical coating production // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2018. V. 6, N 4. P. 38–47.
5. *Исаев Т.Ф., Лукьяненко Д.В., Тихонравов А.В., Ягола А.Г.* Алгоритмы решения обратных задач оптики слоистых сред на основе сравнения экстремумов спектральных характеристик // *Журн. вычисл. математики и мат. физики* 2017. Т. 57, № 5. С. 867–875.
6. *Kochikov I. V., Lagutin Yu. S., Lagutina A. A., Lukyanenko D. V., Tikhonravov A. V., Yagola A. G.* A nonlocal algorithm for analyzing the data of monochromatic optical control in the process of multilayer coating deposition // *Num. Methods and Programming.* 2020. V. 20, N. 62. P. 471–480.
7. *Kochikov I.V., Lagutin Yu.S., Lagutina A.A., Lukyanenko D.V., Tikhonravov A.V., Yagola A.G.* Raising the accuracy of monitoring the optical coating deposition by application of a nonlocal algorithm of data analysis // *J. Appl. Industr. Math.* 2020. V. 14, N 2. P. 330–339.
8. *Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K., Amotchkina T.V.* Investigation of the effect of accumulation of thickness errors in optical coating production using broadband optical monitoring // *Appl. Optim.* 2006. V. 45. P. 7026–7034.
9. *Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K., Amotchkina T.V.* Statistical approach to choosing a strategy of monochromatic monitoring of optical coating production // *Appl. Optim.* 2006. V. 45. P. 7863–7870.

UDC 519.6

**ALGORITHM FOR CONTROLLING THE PROCESS OF SPRAYING
OPTICAL COATINGS BASED ON SAMPLE BROADBAND
MEASUREMENT DATA**

© 2023 V. D. Shinkarev^{1a}, D. V. Lukyanenko^{1b},
A. V. Tikhonravov^{2c}, A. G. Yagola^{1d}

¹*M. V. Lomonosov Moscow State University,
Leninskie gory 1, build. 2, Moscow 119991, Russia,*
²*MSU Research Computing Center,
Leninskie gory 1, build. 4, Moscow 119234, Russia*

E-mails: ^ashinkarev.vd17@physics.msu.ru, ^blukyanenko@physics.msu.ru,
^ctikh@srcc.msu.ru, ^dyagola@physics.msu.ru

Received 02.04.2023, revised 24.04.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. An algorithm for controlling the deposition process of optical coatings based on the analysis of sample data of broadband measurements for a fixed set of wavelengths is considered. The considered algorithm uses broadband measurement data on the one hand, which is an advantage compared to using only monochromatic measurement data for one fixed wavelength, and on the other hand is fast-acting compared to algorithms using full broadband measurement data. It is demonstrated that the proposed algorithm makes it possible to obtain sufficiently accurate estimates of the thicknesses of layers of sprayed multilayer optical coatings.

Keywords: optical coatings, coating spraying, broadband control, monochromatic control.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.313

REFERENCES

1. Born M., Wolf E. Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. Cambridge: Univ. Press, 2013.
2. Macleod A. Monitoring of optical coatings. *Appl. Optim.*, 1981, Vol. 20, pp. 82–89.
3. Piegari A., Flory F. Optical Thin Films and Coatings. Cambridge: Woodhead Publ., 2018.
4. Isaev T.F., Kochikov I.V., Lukyanenko D.V., Tikhonravov A.V., Yagola A.G. Regularizing algorithms for the determination of thickness of deposited layers in optical coating production. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2018, Vol. 6, No. 4, pp. 38–47.
5. Isaev T.F., Luk'yanenko D.V., Tikhonravov A.V., Yagola A.G. Algoritmy reshenija obratnykh zadach optiki sloistyh sred na osnove sravnenija jekstremumov spektral'nykh harakteristik [Algorithms for solving inverse problems of optics of layered media based on comparison of extremes of spectral characteristics]. *Zhurn. Vychisl. Mat. i Mat. Fiziki*, 2017, Vol. 57, No. 5, pp. 867–875 (in Russian).
6. Kochikov I. V., Lagutin Yu. S., Lagutina A. A., Lukyanenko D. V., Tikhonravov A. V., Yagola A. G. A nonlocal algorithm for analyzing the data of monochromatic optical control in the process of multilayer coating deposition. *Num. Methods and Programming*, 2020, Vol. 20, No. 62, pp. 471–480.
7. Kochikov I.V., Lagutin Yu.S., Lagutina A.A., Lukyanenko D.V., Tikhonravov A.V., Yagola A.G. Raising the accuracy of monitoring the optical coating deposition by application of a nonlocal algorithm of data analysis. *J. Appl. Industr. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 2, pp. 330–339.

8. Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K., Amotchkina T.V. Investigation of the effect of accumulation of thickness errors in optical coating production using broadband optical monitoring. *Appl. Optim.*, 2006, Vol. 45, pp. 7026–7034.
9. Tikhonravov A.V., Trubetskov M.K., Amotchkina T.V. Statistical approach to choosing a strategy of monochromatic monitoring of optical coating production. *Appl. Optim.*, 2006, Vol. 45, pp. 7863–7870.

УДК 51–76

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ОДНОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ИНВАЗИИ РАКА

© 2023 М. В. Шубина

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
НИИ ядерной физики им. Д. В. Скобельцына,
Ленинские горы, 1, стр. 2, г. Москва 119234, Россия*

E-mail: yurova-m@rambler.ru

Поступила в редакцию 13.02.2023 г.; после доработки 13.04.2023 г.;
принята к публикации 27.04.2023 г.

Получены точные аналитические решения уравнений непрерывных математических моделей роста и инвазии опухоли, основанных на модели Чаплейна и Лолас, для случая одного пространственного измерения. Модели представляются системой трёх нелинейных дифференциальных уравнений реакции-диффузии-таксиса в частных производных, описывающих взаимодействие раковых клеток, фермента, разрушающего внеклеточный матрикс и ткани. Построенные решения являются гладкими неотрицательными функциями, зависящими от переменной бегущей волны и определённых условий на модельные параметры.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, точные решения, уравнения типа бегущей волны, инвазия рака, хемотаксис, гаптотаксис.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.314

ВВЕДЕНИЕ

Исчерпывающее изложение биологических и медицинских аспектов, лежащих в основе построения математических моделей в онкологии, можно найти в цитируемой литературе [1–36] и ссылках в ней.

В настоящей работе мы получаем точные аналитические решения системы трёх нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных типа реакция-диффузия-таксис. Эта система основана на непрерывной математической модели роста и инвазии солидных опухолей (solid tumour), предложенной в работе [4], являясь некоторой её модификацией, позволяющей точно решать уравнения системы в переменной бегущей волны.

Исходная модель [4] описывает пространственно-временное поведение и эволюцию опухолевых клеток с плотностью $c(t, \vec{r})$, плотность внеклеточного матрикса (ВКМ) $v(t, \vec{r})$ и концентрацию протеазы (активатора плазминогена, uPA) $u(t, \vec{r})$. Предполагается, что плотность числа клеток изменяется из-за дисперсии, возникающей в результате случайного движения, и направленного миграционного ответа опухолевых клеток на градиенты диффундирующих (uPA) и недиффундирующих (ВКМ) макромолекул [4]. Также предполагается, что в отсутствие какого-либо внеклеточного матрикса пролиферация раковых клеток подчиняется логистическому закону роста и внеклеточный матрикс не движется и изменяется исключительно за счёт ухудшения из-за контакта с протеазой uPA и его реконструкции раковыми и другими клетками; слагаемыми, отвечающими за пролиферацию и восстановление, являются последние слагаемые в первых двух уравнениях ниже. Полная система безразмерных уравнений

имеет вид [4]

$$\begin{aligned}c_t &= D_c \nabla^2 c - \chi_c \nabla(c \nabla u) - \xi_c \nabla(c \nabla v) + \mu_1 c(1 - c - v), \\v_t &= -\delta uv + \mu_2 v(1 - c - v), \\u_t &= D_u \nabla^2 u + \alpha c - \beta u,\end{aligned}\tag{1}$$

где постоянные положительные модельные параметры D_c и D_u — коэффициенты диффузии клеток и uPA соответственно; χ_c и ξ_c — коэффициенты хемотаксиса и гаптотаксиса; δ — скорость разрушения ВКМ под действием uPA; α и β — скорости образования и распада uPA. Преобразование переменных и параметров в уравнениях (1) в безразмерные величины такое же, как и в работах [2–4]:

$$\begin{aligned}t &\rightarrow t/\tau, \quad x \rightarrow x/L, \quad c \rightarrow c/c_0, \quad v \rightarrow v/v_0, \quad u \rightarrow u/u_0; \\D_c &\rightarrow D_c/D, \quad D_u \rightarrow D_u/D, \quad \chi \rightarrow \chi_c u_0/D, \quad \xi \rightarrow \xi_c v_0/D, \quad \alpha \rightarrow \alpha \tau c_0/u_0; \\&\beta \rightarrow \beta \tau, \quad \delta \rightarrow \delta \tau u_0; \mu_1 \rightarrow \mu_1 \tau, \quad \mu_2 \rightarrow \mu_2 \tau,\end{aligned}$$

где c_0 , v_0 и u_0 являются соответствующей эталонной плотностью опухолевых клеток, плотностью внеклеточного матрикса и эталонной концентрацией uPA соответственно; $\tau = L^2/D$, $L = 0.1 - 1$ см — максимальное расстояние инвазии раковых клеток на ранней стадии инвазии, а $D = 10^{-6}$ см²/с — эталонный коэффициент химической диффузии [4]. Поскольку предполагается, что опухолевые клетки и ферменты, разрушающие матрикс, остаются в пределах рассматриваемой области ткани [3], новая переменная $x \in [0; 1]$. Новые параметры обозначаются теми же символами. Следовательно, значения параметров равны: $D_c \sim 10^{-5} - 10^{-3}$, $D_u \sim 10^{-3} - 1$, $\chi_c \sim \xi_c \sim 10^{-3} - 1$, $\alpha \sim 0.05 - 1$, $\beta \sim 0.13 - 0.95$, $\delta \sim 1 - 20$, $\mu_1 \sim 0.05 - 2$ и $\mu_2 \sim 0.15 - 2.5$.

Эта модель, её расширения и обобщения плодотворно изучаются. Однако в большинстве работ анализ подобных систем и их решений проводится численно. Существование решений в переменной бегущей волны для различных моделей опухолевой инвазии с гаптотаксисом было установлено в результате численных расчётов в работе [4], а также в работах [37–40], где проведено детальное исследование поведения бегущей волны. Однако, насколько нам известно, рассмотренные в настоящей статье модели и представленные здесь решения являются новыми.

Становится интересным, можно ли решить эту систему аналитически и получить точные решения, в том числе допускающие удовлетворительную биологическую интерпретацию. Нам представляется, что ответ на этот вопрос отрицательный и, к сожалению, модель (1) не может быть решена аналитически даже в случае одной пространственной переменной.

Целью данной статьи является рассмотрение моделей, которые, по нашему мнению, максимально приближены к модели, представленной выше, и которые могут быть решены точно; мы будем рассматривать модели в одном пространственном измерении. Следуя примеру авторов [4], системы исследуются в предположении, что они безразмерны. При определённых значениях параметров модели мы получаем точные аналитические решения в терминах переменной бегущей волны при скорости, зависящей от этих параметров. Представленные решения содержат как биологически приемлемые, так и решения, не пригодные для биологического анализа. Эти последние решения могут представлять интерес как точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

1. РАССМАТРИВАЕМЫЕ МОДЕЛИ И ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

1.1. Модель без учёта пролиферации

Нам хотелось бы начать с модификации модели, предложенной в работе [3]. Мы исследуем эту модель с логарифмическими функциями хемотактической и гаптотактической чувствительности, без членов, описывающих пролиферацию и восстановление и с немного изменённым уравнением для ВКМ. Можно видеть, что модель (1) более сложная и содержит член, описывающий пролиферацию. Тем не менее, сначала кажется интересным точно решить систему, в которой «пролиферация клеток не учитывалась, чтобы сосредоточиться исключительно на роли миграции раковых клеток в инвазии» [5].

Итак, рассматриваемая нами модель в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} c_t &= D_c c_{xx} - \chi_c \left(c \frac{u_x}{u} \right)_x - \xi_c \left(c \frac{v_x}{v} \right)_x, \\ v_t &= -\delta u v^p, \\ u_t &= D_u u_{xx} + \alpha c - \beta u, \end{aligned} \quad (2)$$

где переменные и параметры модели определены выше. Второе уравнение в (2) отличается от [3, 4] наличием степени p у функции v , и мы считаем, что $0 < p < 1$. Для $p = 1$ мы не получаем биологически приемлемых решений, однако, как мы увидим ниже, p может быть взято очень близко к единице, например, $p = 0.95$. Здесь преобразование переменных и параметров в безразмерные величины такое же, как и выше, за исключением δ , χ_c и ξ_c : $\delta \rightarrow \delta \tau u_0 v_0^{p-1}$, поэтому $\delta \sim 10^{-5(p-1)} - 20 \times 10^{-6(p-1)}$; что касается χ_c и ξ_c , мы берём безразмерные величины как в [4], т. е. $\chi_c \sim \xi_c \sim 10^{-3} - 1$.

В переменной бегущей волны вида $y = x - \nu t$, $\nu = \text{const}$ эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \nu c + D_c c_y - \chi_c c (\ln u)_y - \xi_c c (\ln v)_y &= \lambda, \\ \nu v_y - \delta u v^p &= 0, \\ \nu u_y + D_u u_{yy} + \alpha c - \beta u &= 0, \end{aligned} \quad (2')$$

где $c = c(y)$, $v = v(y)$, $u = u(y)$ и λ — постоянная интегрирования. Далее мы берём $\lambda = 0$. Если ввести функцию

$$F = \frac{v^{1-p}}{1-p}, \quad (3)$$

первые два уравнения в (2') дают

$$\begin{aligned} c &= C_c (e^{-\nu y} v^{\xi_c} u^{\chi_c})^{1/D_c}, \\ u &= \frac{\nu}{\delta} F_y, \end{aligned} \quad (4)$$

где постоянная $C_c > 0$. Подставляя (3) и (4) в третье уравнение системы (2'), получаем

$$D_u F_{yyy} + \nu F_{yy} - \beta F_y + C_1 e^{-\frac{\nu}{D_c} y} F_y^{\frac{\chi_c}{D_c}} F^{\frac{\xi_c}{D_c(1-p)}} = 0, \quad (5)$$

$C_1 = C_c \alpha (\nu/\delta)^{\frac{\chi_c}{D_c} - 1} (1-p)^{\frac{\xi_c}{D_c(1-p)}}$, и далее мы будем исследовать это уравнение.

Как нам кажется, при произвольных значениях параметров системы невозможно получить точное решение в явном виде. Поэтому мы накладываем ряд ограничений на эти параметры. Так, пусть

$$\chi_c/D_c = 1, \quad (6)$$

т. е. $\chi_c = D_c \sim 10^{-3}$. Тогда есть «выбранное» значение скорости бегущих волн, для которого мы получаем два класса различных решений. Пусть

$$\nu^2 = \frac{\beta D_c^2}{D_u - D_c}. \quad (7)$$

Это можно сделать, поскольку $D_u \geq D_c$ и мы не рассматриваем случай $D_u = D_c$. Тогда можно показать, что уравнение (5) приводится к виду

$$F_{yy} - \frac{\nu(D_u - D_c)}{D_u D_c} F_y + \frac{C_1 D_c (1-p)}{D_u (\xi_c + D_c (1-p))} e^{-\frac{\nu}{D_c} y} F^{\frac{\xi_c}{D_c(1-p)} + 1} = 0 \quad (8)$$

с постоянной интегрирования, равной нулю. Для интегрирования этого уравнения воспользуемся методом групп Ли инфинитезимальных преобразований [41]. Находим групповой инвариант второго продолжения вектора однопараметрической группы симметрии (8) и с его помощью преобразуем уравнение (8) в уравнение первого порядка. Оказывается, существуют две нетривиальные группы симметрии, зависящие от соотношения параметров, которые дают два разных типа решений. Рассмотрим первое из них.

1.2. Точное решение

Возможность свести уравнение (8) к уравнению первого порядка и решить его требует выполнения следующего условия:

$$1 - p = \frac{\xi_c (D_u - D_c)}{2D_u D_c}. \quad (9)$$

Введём новую переменную z и новую функцию w :

$$\begin{aligned} z &= F e^{-\frac{\nu(1-p)}{\xi_c} y}, \\ w &= -\frac{D_c}{\nu} F_y e^{-\frac{\nu(1-p)}{\xi_c} y}, \end{aligned} \quad (10)$$

тогда после элементарного интегрирования уравнение (8) превращается в квадратное уравнение на $w(z)$:

$$w^2 + \frac{2(1-p)D_c}{\xi_c} z w + C_2 z^{\frac{\xi_c}{D_c(1-p)} + 2} = 0, \quad (11)$$

где постоянная интегрирования равна нулю и $C_2 = \frac{2C_c D_c^4 (1-p) \frac{\xi_c}{D_c(1-p)} + 2}{\nu^2 (\xi_c + D_c(1-p)) (\xi_c + 2D_c(1-p))}$. Возвращаясь к исходной функции F и переменной y и интегрируя (11), получаем решение для F :

$$F = C_3 (e^{-\frac{\nu}{D_c} y} + C_F)^{-\frac{2D_c(1-p)}{\xi_c}}, \quad (12)$$

где C_F — положительная постоянная и

$$C_3 = \left(C_F \frac{2\nu^2 D_u (\xi_c + D_c(1-p)) (\xi_c + 2D_c(1-p)) (1-p)^{-\frac{\xi_c}{D_c(1-p)}}}{C_c \alpha D_c^2 \xi_c^2} \right)^{\frac{D_c(1-p)}{\xi_c}}.$$

Подставляя это в уравнения (3) и (4), получаем первый тип решений системы (2) в форме

$$\begin{aligned} c(y) &= C_c e^{-\frac{2\nu}{D_c} y} (e^{-\frac{\nu}{D_c} y} + C_F)^{-\frac{D_u(\xi_c + 2D_c(1-p))}{\xi_c} - 2}, \\ v(y) &= C_v (e^{-\frac{\nu}{D_c} y} + C_F)^{-\frac{2D_c}{\xi_c}}, \\ u(y) &= C_u e^{-\frac{\nu}{D_c} y} (e^{-\frac{\nu}{D_c} y} + C_F)^{-\frac{D_u(\xi_c + 2D_c(1-p))}{\xi_c}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где постоянные имеют вид

$$\begin{aligned} C_v &= \left(\frac{C_F}{C_c} \frac{\beta(\xi_c + D_c(1-p))(\xi_c + 2D_c(1-p))}{\alpha D_c \xi_c (1-p)} \right)^{D_c/\xi_c}, \\ C_u &= C_v^{\frac{1}{1-p}} \frac{\beta D_c}{\delta D_u (1-p)}, \\ C_C &= C_c C_u C_v^{\xi_c/D_c}. \end{aligned} \quad (14)$$

Как видно из уравнений (13), эти решения являются положительными функциями, определёнными для всех значений y . Несмотря на то, что в силу биологического контекста нас интересуют решения в ограниченной пространственно-временной области, легко видеть, что при $D_u > D_c$ функции $c(y)$ и $u(y)$ обращаются в нуль при $y \rightarrow \pm\infty$; функция $v(y) \rightarrow C_v C_F^{-2D_c/\xi_c}$ при $\nu y \rightarrow +\infty$ и $v(y) \rightarrow 0$ при $\nu y \rightarrow -\infty$. Также видно, что $c(y)$ и $u(y)$ имеют единственный максимум; его значения, а также асимптотическое значение $v(y)$ при $\nu y \rightarrow +\infty$ зависят от выбранных параметров. Эти функции представлены на рис. 1 при $\nu > 0$ и разных значениях параметров.

1.3. Модель с учётом пролиферации

Рассмотрим теперь модель с членами, описывающими пролиферацию и восстановление, модифицированную следующим образом:

$$\begin{aligned} c_t &= D_c c_{xx} - \chi_c (c(u_x + \lambda_u u))_x - \xi_c \left(c \frac{v_x}{v^p} \right)_x + \mu_1 c(1-c), \\ v_t &= -\delta u v^p + \mu_2 v^p (1 - \lambda_c c - v^{1-p}), \\ u_t &= D_u u_{xx} + \alpha c - \beta u, \end{aligned} \quad (15)$$

где мы снова ввели степень p функции v , $0 < p < 1$, и постоянную $\lambda_c > 0$; другие переменные и параметры модели определены выше, за исключением μ_2 : $\mu_2 \rightarrow \mu_2 \tau v_0^{p-1}$, поэтому $\mu_2 \sim 0.15 \times 10^{-5(p-1)} - 2.5 \times 10^{-6(p-1)}$. Но главным отличием системы (1) от этой является наличие дополнительного члена $\lambda_u (cu)_x$, λ_u — постоянная. Этот член изначально был добавлен в первое уравнение (15), чтобы можно было точно решить систему. Однако графики полученных решений очень близки к графикам численных решений, представленных на рис. 4, 5 в работе [4] для бегущих волн, распространяющихся в ткани. Это предполагает, что добавление вышеуказанного члена не сильно искажает исходную модель, несмотря на то, что коэффициент λ_u нельзя сделать сколь угодно малым; как видно из следующего изложения, $\lambda_u \geq D_c$.

В переменной бегущей волны $y = x - \nu t$, $\nu = \text{const}$ эта система принимает вид

$$\begin{aligned} D_c c_{yy} + \nu c_y - \chi_c (c(u_y + \lambda_u u))_y - \xi_c \left(c \frac{v_y}{v^p} \right)_y + \mu_1 c(1-c) &= 0, \\ \nu v_y - \delta u v^p + \mu_2 v^p (1 - \lambda_c c - v^{1-p}) &= 0, \\ D_u u_{yy} + \nu u_y + \alpha c - \beta u &= 0, \end{aligned} \quad (15')$$

где уже $c = c(y)$, $v = v(y)$, $u = u(y)$. Везде ниже мы считаем $\nu > 0$.

Как и в случае предыдущей модели (2'), мы должны наложить ряд условий на параметры модели, чтобы получить точные решения в явном виде. Итак, степень p и постоянная λ_u выражаются через другие параметры модели соотношениями

$$1 - p = \frac{\xi_c (\delta \alpha + \beta \mu_2 \lambda_c)}{\mu_2 (\chi_c \alpha + \xi_c \mu_2 \lambda_c)}, \quad \lambda_u = \frac{\beta \sqrt{\xi_c \mu_2 \lambda_c - D_c \mu_1}}{\chi_c \alpha}, \quad (16)$$

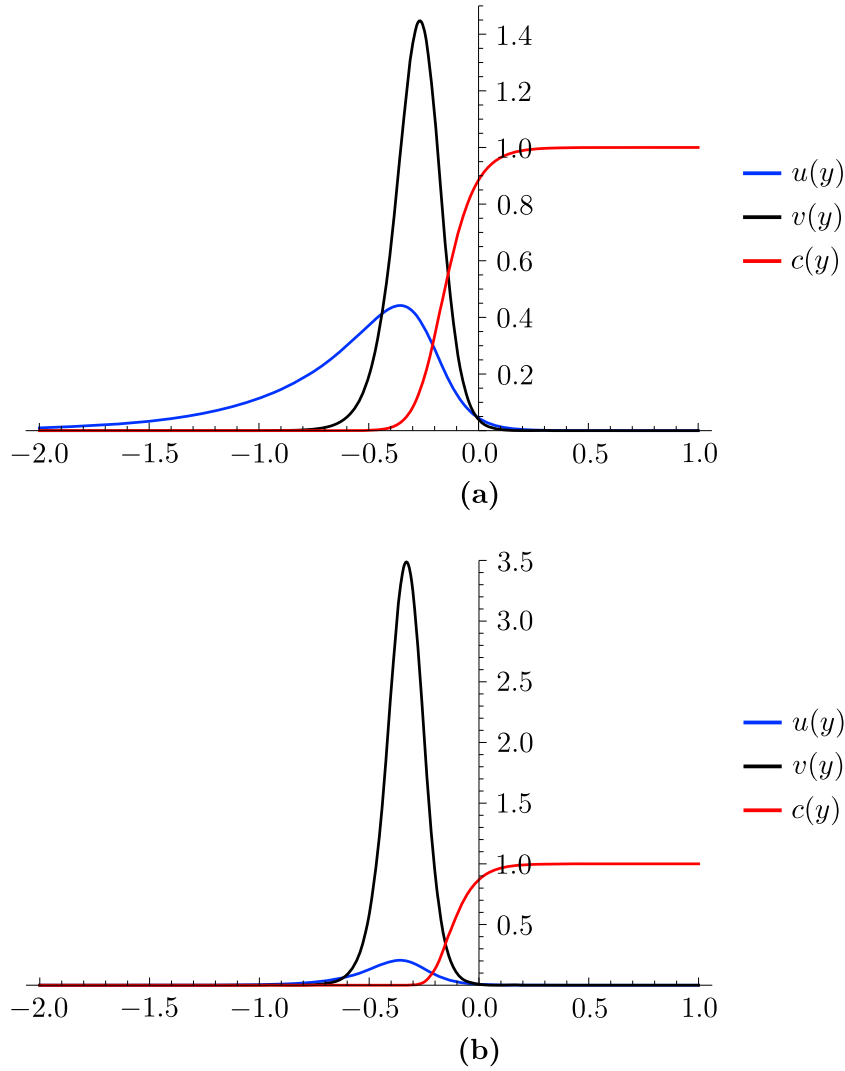


Рис. 1. Графики функций $u(y)$, $v(y)$, $c(y)$ при $\nu > 0$ и разных значениях параметров:

- (a) $p = 0.9$, $D_c = \chi_c = 8 \times 10^{-3}$, $D_u = 10^{-2}$, $\xi_c = 8 \times 10^{-3}$,
 $\alpha = 0.25$, $\beta = 0.3$, $\delta = 10^{0.5}$, $C_F = 15.84$, $C_c = 1$;
 (b) $p = 0.95$, $D_c = \chi_c = 5 \times 10^{-3}$, $D_u = 10^{-2}$, $\xi_c = 10^{-3}$,
 $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.95$, $\delta = 10^{1.25}$, $C_F = 71.25$, $C_c = 1$

где мы ограничены условием $\xi_c \mu_2 \lambda_c - D_c \mu_1 > 0$. «Выбранное» значение скорости бегущих волн равно

$$\nu = \frac{\xi_c \mu_2 \lambda_c}{\sqrt{\xi_c \mu_2 \lambda_c - D_c \mu_1}}. \quad (17)$$

И ещё одно необходимое условие, которое надо наложить на константы модели для получения точных решений, имеет вид

$$D_u (\delta \alpha + \beta \mu_2 \lambda_c) (\xi_c \mu_2 \lambda_c - D_c \mu_1) = \chi_c \alpha \mu_2 \lambda_c (\chi_c \alpha + \xi_c \mu_2 \lambda_c). \quad (18)$$

Тогда второе уравнение (15') можно проинтегрировать, и мы получим

$$v(y) = \left(1 - \frac{\mu_2 \lambda_c D_u (1-p)}{\alpha \nu} u_y - \frac{\delta \alpha + \beta \mu_2 \lambda_c}{\alpha \mu_2} u \right)^{\frac{1}{1-p}}. \quad (19)$$

Далее введём функцию

$$F = c_y + K(c - c^2), \quad K = \frac{\xi_c \mu_2 \lambda_c}{D_c \nu}. \quad (20)$$

Прямой подстановкой можно проверить, что первое уравнение (15') можно привести к виду

$$F_y + \frac{\mu_1 \nu}{\xi_c \mu_2 \lambda_c} F = 0. \quad (21)$$

1.4. Точное решение

Линейное уравнение первого порядка (21) имеет очевидное решение:

$$F = C_F e^{-\frac{\mu_1 \nu}{\xi_c \mu_2 \lambda_c} y}. \quad (22)$$

Рассмотрим случай $C_F = 0$ или $F = 0$. Тогда функция $c(y)$ должна быть решением уравнения Риккати

$$c_y + K(c - c^2) = 0, \quad (23)$$

где левая часть уравнения (23) одновременно представляет собой уравнение Бюргерса, проинтегрированное в переменной бегущей волны. Таким образом, функция $c(y)$ является хорошо известным решением уравнения Бюргерса, и нас интересует решение ограниченной «ударной волны»:

$$c = \frac{1}{1 + C_c e^{K y}}, \quad (24)$$

где C_c — положительная постоянная. Подставляя это выражение в третье уравнение системы (15') и выбирая постоянную интегрирования так, чтобы функция $u(y)$ была ограниченной, мы получаем

$$u(y) = \frac{\alpha}{D_u \Delta k k_+} \left(C_c^{\frac{k_+}{K}} \Gamma\left(1 - \frac{k_+}{K}\right) \Gamma\left(1 + \frac{k_+}{K}\right) e^{k_+ y} - {}_2F_1\left(-\frac{k_+}{K}, 1, 1 - \frac{k_+}{K}, -C_c e^{K y}\right) \right) + \frac{\alpha}{D_u \Delta k k_-} \left({}_2F_1\left(-\frac{k_-}{K}, 1, 1 - \frac{k_-}{K}, -C_c e^{K y}\right) \right), \quad (25)$$

где

$$k_{\pm} = \frac{1}{2D_u} (-\nu \pm \sqrt{\nu^2 + 4\beta D_u}), \quad \Delta k = k_- - k_+; \quad (26)$$

Γ и ${}_2F_1$ — гамма-функция и гипергеометрическая функция Гаусса соответственно. Наконец, подставляя уравнение (24) в (19), получаем явное выражение для функции $v(y)$.

Легко видеть из уравнения (24), что $c(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ и $c(y) \rightarrow 1$ при $y \rightarrow -\infty$. Также при определённом выборе постоянных модели функция $u(y)$ из (25) является гладкой положительно определённой функцией; $u(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ и $u(y) \rightarrow \alpha/\beta$ при $y \rightarrow -\infty$. Что касается функции $v(y)$, то из уравнения (19) можно видеть, что $v(y) \rightarrow 1$ при $y \rightarrow \infty$ и $v(y) \rightarrow 1 - \frac{\delta\alpha + \beta\mu_2\lambda_c}{\beta\mu_2}$ при $y \rightarrow -\infty$ и выбор параметров модели должен обеспечивать условие $v(y) \geq 0$. Эти функции представлены на рис. 2.

Можно заметить, что полученные графики очень близки к графикам на рис. 4, 5 работы [4], показывающих эволюцию $c(x, t)$, $u(x, t)$ и $v(x, t)$.

2. ДРУГИЕ РЕШЕНИЯ

Нам представляется, что других точных решений, приемлемых с биологической точки зрения, нет. Приведём теперь решения, которые могут быть интересны как точные решения систем нелинейных уравнений в частных производных.

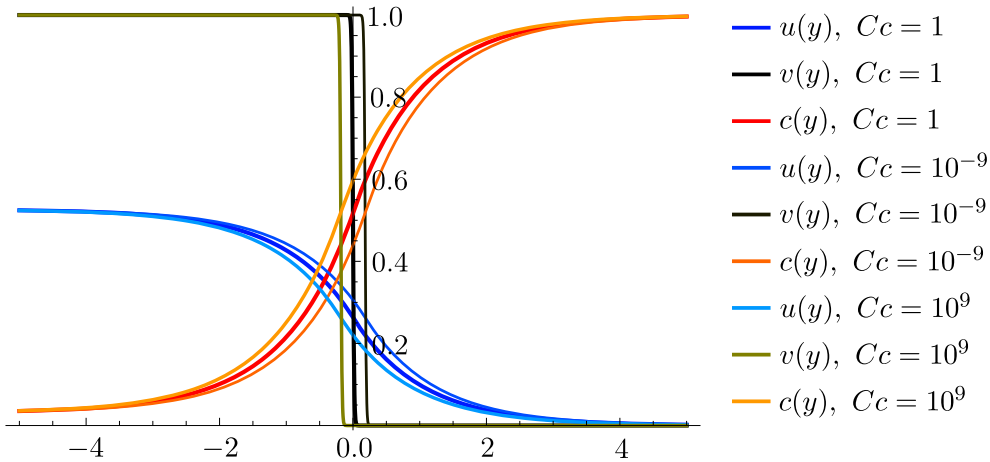


Рис. 2. Графики функций $u(y)$, $v(y)$ и $c(y)$ для различных значений постоянной Cc :
 $p = 0.868$, $D_c = 10^{-5}$, $D_u = 1$, $\chi_c = 0.475$, $\xi_c = 3.4 \times 10^{-2}$,
 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.95$, $\delta = 4.6$, $\mu_1 = 0.05$, $\mu_2 = 2.5$

2.1. Решения модели без учёта пролиферации

Вернёмся к уравнению (8) и рассмотрим соотношение, аналогичное (9):

$$1 - p = \frac{\xi_c(D_u - D_c)}{D_c(2D_c - D_u)}. \quad (27)$$

Следует отметить, что условия (9) и (27) не совпадают ни при каких значениях параметров, так как $D_u > D_c$. Далее, как видно из уравнения (27), ограничение на D_u и D_c становится более строгим: $D_c < D_u < 2D_c$. Как и в случае первого класса решений, введём новую переменную z и новую функцию w :

$$z = F e^{-\frac{\nu(D_u - D_c)}{D_u D_c} y}, \quad w = F - \frac{D_u D_c}{\nu(D_u - D_c)} F y. \quad (28)$$

Тогда уравнение (8) превращается в квадратное уравнение относительно $w(z)$:

$$w^2 + C_4 z^{\frac{D_u}{D_u - D_c}} - C_w = 0, \quad (29)$$

где $C_w > 0$ — постоянная интегрирования, $C_4 = \frac{2C_c \alpha (D_u - D_c)(1-p)^{\frac{\xi_c}{D_c(1-p)}}}{\beta D_c}$. Затем мы находим решения уравнения (29) в параметрической форме с параметром τ :

$$\tau^2 + 1 = \frac{C_w}{C_4} z^{-\frac{D_u}{D_u - D_c}}. \quad (30)$$

Анализ асимптотик решений при $\pm\infty$ (см. [42]) и требование положительности функций $c(y)$, $v(y)$ и $u(y)$ определяют одну из констант интегрирования. Полученные формулы достаточно сложны, поэтому введём обозначения

$$\Theta(\tau) = -\tau {}_2F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{D_c}{D_u}; \frac{3}{2}; -\tau^2\right) + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - D_c/D_u)}{2\Gamma(3/2 - D_c/D_u)} \quad (31)$$

и выразим наши решения через $\Theta(\tau)$. Мы также приводим решения для $\nu > 0$. Это даёт следующие выражения для второго типа решений:

$$y(\tau) = -\frac{D_u}{\sqrt{\beta(D_u - D_c)}} \ln \left(\frac{C_w^{\frac{1}{2} - \frac{D_c}{D_u}} 2(D_u - D_c)}{C_4^{1 - \frac{D_c}{D_u}} D_u} \Theta(\tau) \right), \quad (32)$$

$$v(\tau) = \left(\frac{C_w^{\frac{1}{2}} D_u (1-p)}{2(D_u - D_c)} \right)^{\frac{1}{1-p}} (\tau^2 + 1)^{-\frac{D_u - D_c}{D_u(1-p)}} (\Theta(\tau))^{-\frac{1}{1-p}}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
u(\tau) = & -\frac{C_w^{1/2}\beta D_c}{\delta D_u} \tau(\tau^2 + 1)^{-2+D_c/D_u} \left({}_2F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} - \frac{D_c}{D_u}; \frac{3}{2}; -\tau^2\right) \right. \\
& \left. - \tau^2 \left(1 - \frac{2D_c}{3D_u}\right) {}_2F_1\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2} - \frac{D_c}{D_u}; \frac{5}{2}; -\tau^2\right) \right)^{-1} \\
& + \frac{C_w^{1/2}\beta D_c}{2\delta(D_u - D_c)} (\tau^2 + 1)^{-1+D_c/D_u} (\Theta(\tau))^{-1}. \quad (34)
\end{aligned}$$

С учётом формулы (4) выражение для функции $c(\tau)$ имеет вид

$$c(\tau) = \frac{2\beta D_c(D_u - D_c)}{\alpha D_u^2} (\tau^2 + 1)^{1-\frac{2D_c}{D_u}} (\Theta(\tau))^2 u(\tau). \quad (35)$$

Здесь ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, Γ — гамма-функция. Из выражений (31), (33)–(35) видно, что функции $v(\tau)$, $u(\tau)$ и $c(\tau)$ являются гладкими положительно определёнными функциями для всех τ . Функция $c(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \pm\infty$, функция $u(\tau) \rightarrow u_0$ при $\tau \rightarrow -\infty$ и $u(\tau)$ обращается в нуль при $\tau \rightarrow +\infty$; функция $v(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$ и $v(\tau) \rightarrow v_0$ при $\tau \rightarrow +\infty$, где значения u_0 и v_0 могут быть получены из выражений (33), (34). Однако, как видно из (31), (32), $y \rightarrow y_0$ при $\tau \rightarrow -\infty$, где y_0 — конечное значение, которое может быть сделано < 0 (или ≥ 0) выбором постоянных интегрирования. Это приводит к тому, что решения, полученные как функции от y , можно рассматривать только в ограниченном интервале времени. Другими словами, поскольку $x \in [0; 1]$ и $t \geq 0$, формально $y \in [-\nu t; 1 - \nu t]$ (при $\nu > 0$). Но так как y ограничен слева величиной y_0 , то для каждого y_0 существует значение времени t_0 , после которого никакие решения не определены. Графики этих решений представлены на рис. 3.

2.2. Решения модели с учётом пролиферации

Рассмотрим снова уравнение (22), и пусть $C_F \neq 0$:

$$c_y + K(c - c^2) = C_F e^{-My}, \quad M = \frac{\mu_1 \nu}{\xi_c \mu_2 \lambda_c}. \quad (36)$$

Как и ожидалось, преобразование Коула — Хопфа линеаризует это уравнение. Вводя новую функцию \tilde{c} и новую переменную ξ как

$$c = -\frac{1}{K} \frac{\tilde{c}_y}{\tilde{c}}, \quad (37)$$

$$\xi = \frac{2\sqrt{C_F K}}{M} e^{-\frac{M}{2}y}, \quad (38)$$

получаем уравнение Бесселя при $C_F > 0$ и модифицированное уравнение Бесселя при $C_F < 0$ с порядком $\tilde{\nu}^2 = (K/M)^2$. Нас интересует только гладкое решение, и мы рассматриваем функции Инфельда $I_{\tilde{\nu}}$ и Макдональда $K_{\tilde{\nu}}$. В результате решение для функции $c(y)$ имеет вид

$$c(y) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\tilde{\nu}|}{\tilde{\nu}}\right) + \sqrt{\frac{|C_F|}{K}} e^{-\frac{M}{2}y} \frac{C_I I_{\tilde{\nu}+1}(\xi) - C_K K_{\tilde{\nu}+1}(\xi)}{C_I I_{\tilde{\nu}}(\xi) + C_K K_{\tilde{\nu}}(\xi)}. \quad (39)$$

Легко видеть, что $c \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow -\infty$. Нельзя утверждать, что при произвольных значениях $\tilde{\nu}$ функция $c(y)$ всегда будет неотрицательной и не будет расходиться при $y \rightarrow \infty$, но, по-видимому, можно исправить это путём подходящего выбора C_I и C_K . Тем не менее, экспоненциальный рост при $y \rightarrow -\infty$ является общим свойством полученных решений. Из (15') можно ожидать, что функция $u(y)$ также будет экспоненциально расти при $y \rightarrow -\infty$. Решая

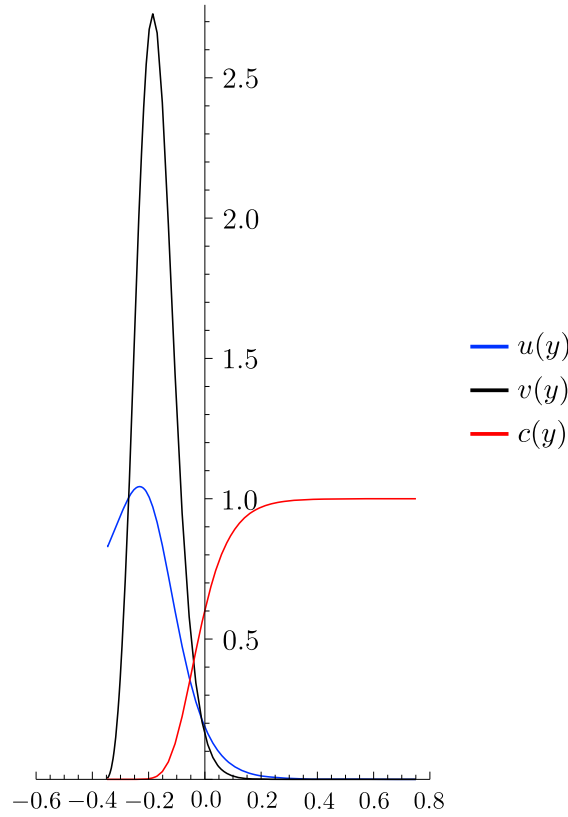


Рис. 3. Графики функций $u(y)$, $v(y)$ и $c(y)$:
 $p = 0.9$, $D_c = \chi_c = 8 \times 10^{-3}$, $D_u = 10^{-2}$, $\xi_c = 2.4 \times 10^{-3}$,
 $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.4$, $\delta = 4$, $C_w = 100$, $C_c = 1$

третье уравнение в (15'), получаем интегралы, которые можно взять точно только для полуцелых $\tilde{\nu}$. В частности, для $\tilde{\nu} = 1/2$ или $\xi_c \mu_2 \lambda_c = 1, 5D_c \mu_1$ при $C_I = \pi C_K$ получаем очень простые выражения для $c(y)$ и $u(y)$:

$$\begin{aligned} c(y) &= \sqrt{|C_F|/K} e^{-Ky}, \\ u(y) &= C_+ e^{k_+ y} + C_- e^{k_- y} - \sqrt{|C_F|/K} \frac{\alpha}{D_u(k_+ + K)(k_- + K)} e^{-Ky}, \end{aligned} \quad (40)$$

где C_{\pm} являются постоянными; можно положить одну из них или обе равными нулю. Не очевидно, могут ли одновременно выполняться требование $u \geq 0$ и условия (16)–(18). Но это не главная проблема данного решения. Наиболее сомнительным в нём является выражение для функции $v(y)$; как видно из выражения (19) она либо расходится при $y \rightarrow -\infty$, либо равна единице для всех y . Всё это даёт основание полагать, что эти решения не отвечают разумным требованиям.

Следующее решение ещё менее реалистично. Выражение для $c(y)$ легко получить подстановкой $c = e^{-Ky} \tilde{c}$, $\xi_c \mu_2 \lambda_c = 1, 5D_c \mu_1$, но при этом функция $u(y)$ не может быть полностью точно проинтегрирована. Так,

$$c(y) = e^{-Ky} \sqrt{\frac{|C_F|}{K}} \frac{1 - \tilde{C}_c e^{-2\sqrt{\frac{|C_F|}{K}} e^{-Ky}}}{1 + \tilde{C}_c e^{-2\sqrt{\frac{|C_F|}{K}} e^{-Ky}}}. \quad (41)$$

Как и решение выше, эта функция очевидно расходится при $y \rightarrow -\infty$. Однако выражение для

$u(y)$ содержит интегралы вида

$$\int \frac{(\ln(t - \tilde{C}_c))^{k_{\pm}/K} dt}{t},$$

которые выражаются через полилогарифм для ограниченного набора k_{\pm} и не могут быть взяты точно для k_{-} . Кроме того, мы предполагаем, что $u(y) \rightarrow$ экспоненциально при $y \rightarrow -\infty$, приводя к расходимости $v(y)$, как в решении выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы рассматриваем систему трёх нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных типа реакция-диффузия-таксис с одним пространственным измерением. Мы получаем точные аналитические решения этой системы, зависящие от переменной бегущей волны. Благодаря тому, что решения выражаются через известные функции и имеют достаточно простой вид, их легко анализировать. Рассматриваемая система является модификацией непрерывной математической модели роста и инвазии опухоли, предложенной в изначальной форме в работах [3, 4]. Авторы решали систему численно, и, как нам представляется, её нельзя решить аналитически. Поэтому мы несколько модифицировали модель, что позволило получить решения в явном виде точно. Приведённые нами графики некоторых полученных решений близки к графикам, полученным численными методами в рамках исходной системы; это позволяет сделать вывод о том, что введённые нами модификации не сильно повлияли на существование первоначальной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Folkman J., Klagsbrun M. Angiogenic Factors, Science. 1987. V. 235, N 4787. P. 442–447.
2. Anderson A.R.A., Chaplain M.A.J. Continuous and discrete mathematical models of tumor-induced angiogenesis // Bull. Math. Biology. 1998. V. 60. P. 857–899.
3. Anderson A.R.A., Chaplain M.A.J., Newman E.L., Steele R.J.C., Thompson A.M. Mathematical modelling of tumour invasion and metastasis // J. Theor. Medicine. 2000. V. 2, N 2. P. 129–154.
4. Chaplain M.A.J., Lolas G. Mathematical modelling of cancer invasion of tissue: dynamic heterogeneity // Amer. Institute Math. Sci. 2006. V. 1, N 3. P. 399–439.
5. Enderling H., Chaplain M.A.J. Mathematical modeling of tumor growth and treatment // Curr. Pharm. Des. 2014. V. 20, N 30, P. 4934–4940.
6. Adam J.A., Bellomo N. A Survey Of models for Tumour-Immune System Dynamics. Boston: Birkhäuser, 1996.
7. Preziosi L. Cancer Modelling and Simulation. Boca Raton: Chapman Hall/CRC Press, 2003.
8. Bellomo N., Chaplain M.A.J., De Angelis E. Selected Topics in Cancer Modeling: Genesis, Evolution, Immune Competition, and Therapy. Boston: Birkhäuser, 2008. (Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology).
9. Araujo R.P., McElwain D.L.S. A history of the study of solid tumour growth: the contribution of mathematical modelling // Bull. Math. Biology. 2004. V. 66, N 5. P. 1039–1091.
10. Lowengrub J.S., Frieboes H.B., Jin F., Chuang Y.-L., Li X., Macklin P., Wise S.M., Cristini V. Nonlinear modelling of cancer: bridging the gap between cells and tumours // Nonlinearity. 2010. V. 23. P. R1–R91.
11. Gatenby R.A., Gawlinski E.T. A reaction-diffusion model of cancer invasion // Cancer Res. 1996. V. 56, N 24. P. 5745–5753.
12. Perumpanani A.J., Sherratt J.A., Norbury J., Byrne H.M. Biological inferences from a mathematical model for malignant invasion // Invasion Metastasis. 1996. V. 16, N 4–5. P. 209–221.
13. Patlak C.S. Random walk with persistence and external bias // Bull. Math. Biophys. 1953. V. 15, N 3. P. 311–338.

14. Keller E.F., Segel L.A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability // J. Theor. Biology. 1970. V. 26, N 3. P. 399–415.
15. Keller E.F., Segel L.A. Model for Chemotaxis // J. Theor. Biology. 1971. V. 30, N 2. P. 225–234.
16. Keller E.F., Segel L.A. Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis // J. Theor. Biology. 1971. V. 30, N 2. P. 235–248.
17. Painter K. J. Mathematical models for chemotaxis and their applications in self-organisation phenomena // J. Theor. Biology. 2019. V. 481. P. 162–182.
18. Anderson A.R.A. A hybrid mathematical model of solid tumour invasion: the importance of cell adhesion // Math. Medicine and Biology. 2005. V. 22, N 2. P. 163–186.
19. Chaplain M.A.J., Lolas G. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: The role of the urokinase plasminogen activation system // Math. Models Methods Appl. Sci. 2005. V. 15. P. 1685–1734.
20. Enderling H., Anderson A.R.A., Chaplain M.A.J., Munro A.J., Vaidya, J.S. Mathematical Modelling of Radiotherapy Strategies for Early Breast Cancer // J. Theor. Biology. 2006. V. 241, N 1. P. 158–171.
21. Andasari V., Gerisch A., Lolas G., South A.P., Chaplain M.A.J. Mathematical modeling of cancer cell invasion of tissue: biological insight from mathematical analysis and computational simulation // J. Math. Biology. 2010, V. 63, N 1. P. 141–171.
22. Gerisch A., Chaplain M.A.J. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: Local and non-local models and the effect of adhesion // J. Theor. Biology. 2008. V. 250, N 4. P. 684–704.
23. Frieboes H.B., Zheng X., Sun C.H., Tromberg B., Gatenby R., Christini V. An integrated computational/experimental model of tumor invasion // Cancer Res. 2006. V. 66. P. 1597–1604.
24. Painter K.J. Modelling cell migration strategies in the extracellular matrix // J. Math. Biology. 2009. V. 58, N 4–5. P. 511–543.
25. Ramis-Conde I., Chaplain M.A.J., Anderson A.R.A. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue // Math. Comput. Model. 2008. V. 47, N 5–6. P. 533–545.
26. Painter K.J., Armstrong N.A., Sherratt J.A. The impact of adhesion on cellular invasion processes in cancer and development // J. Theor. Biology. 2010. V. 264. P. 1057–1067.
27. Peng L., Trucu D., Lin P., Thompson A., Chaplain M.A.J. A multiscale mathematical model of tumour invasive growth // Bull. Math. Biology. 2017. V. 79, N 3. P. 389–429.
28. Domschke P., Trucu D., Gerisch A., Chaplain M.A.J. Structured models of cell migration incorporating molecular binding processes // J. Math. Biology. 2017. V. 75, N 5–6. P. 1517–1561.
29. Bitsouni V., Chaplain M.A.J., Eftimie R. Mathematical modelling of cancer invasion: the multiple roles of TGF- β pathway on tumour proliferation and cell adhesion // Math. Models Methods Appl. Sci. 2017. V. 27, N 10. Article 1929.
30. Bitsouni V., Trucu D., Chaplain M.A.J., Eftimie R. Aggregation and travelling wave dynamics in a two-population model of cancer cell growth and invasion // Math. Medicine and Biology. 2018. V. 35, N 4. P. 541–577.
31. Szymanska Z., Cytowski M., Mitchell E., Macnamara C.K., Chaplain M.A.J. Computational modelling of cancer development and growth: modelling at multiple scales and multiscale modelling // Bull. Math. Biology. 2017. V. 80, N 5. P. 1366–1403.
32. Pang P.Y.H., Wang Y. Global existence of a two-dimensional chemotaxis-haptotaxis model with remodeling of non-diffusible attractant // J. Diff. Equ. 2017. V. 263. P. 1269–1292.
33. Ke Y., Zheng J. A note for global existence of a two-dimensional chemotaxis-haptotaxis model with remodeling of non-diffusible attractant // Nonlinearity. 2018. V. 31, N 10. Article 4602.
34. Bubba F., Pouchol C., Ferrand N., Vidal G., Almeida L., Perthame B., Sabbah M. A chemotaxis-based explanation of spheroid formation in 3d cultures of breast cancer cells // J. Theor. Biology. 2019. V. 479. P. 73–80.
35. Xiang T., Zheng J. A new result for 2D boundedness of solutions to a chemotaxis-haptotaxis model with/without sub-logistic source // Nonlinearity. 2019. V. 32. Article 4890.

36. Tao Y., Winkler M. Global classical solutions to a doubly haptotactic cross-diffusion system modeling oncolytic virotherapy // J. Diff. Equ. 2020. V. 268, N 9. Article 4973.
37. Perumpanani A.J., Sherratt J.A., Norbury J., Byrne H. A two parameter family of travelling waves with a singular barrier arising from the modelling of matrix mediated malignant invasion // Physica. Ser. D: Nonlinear Phenomena. 1999. V. 126. P. 145–159.
38. Marchant B.P., Norbury J., Sherratt J.A. Travelling wave solutions to a haptotaxis-dominated model of malignant invasion // Nonlinearity. 2001. V. 14, N 6. P. 1653–1671.
39. Sherratt J. On the form of smooth-front travelling waves in a reaction-diffusion equation with degenerate nonlinear diffusion // Math. Model. Nat. Phenom. 2010. V. 5, N 5. P. 64–79.
40. Harley K., Van Heijster P., Marangell R., Pettet G.J., Wechselberger M. Existence of traveling wave solutions for a model of tumor invasion // J. Appl. Dynam. Syst. 2014. V. 13, N 1. P. 366–396.
41. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer-Verl., 1986.
42. Bateman H., Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. V. 2. N. Y.; Toronto; London: McGraw-Hill Book Company, 1953.

UDC 51–76

**EXACT TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF ONE-DIMENSIONAL
MODELS OF CANCER INVASION**

© 2023 M. V. Shubina

*M. V. Lomonosov Moscow State University,
Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics (SINP MSU),
Leninskie gory 1, build. 2, GSP-1, Moscow 119991, Russia*

E-mail: yurova-m@rambler.ru

Received 13.02.2023, revised 13.04.2023, accepted 27.04.2023

Abstract. In this paper we obtain exact analytical solutions of equations of continuous mathematical models of tumour growth and invasion based on the model introduced by Chaplain and Lolas for the case of one space dimension. The models consist of a system of three nonlinear reaction-diffusion-taxis partial differential equations describing the interactions between cancer cells, the matrix degrading enzyme and the tissue. The obtained solutions are smooth non-negative functions depending on the traveling wave variable and certain conditions on the model parameters.

Keywords: partial differential equation, exact solution, traveling wave solutions, cancer invasion, chemotaxis, haptotaxis.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.314

REFERENCES

1. Folkman J., Klagsbrun M. Angiogenic Factors. *Science*, 1987, Vol. 235, No. 4787, pp. 442–447.
2. Anderson A.R.A., Chaplain M.A.J. Continuous and discrete mathematical models of tumor-induced angiogenesis. *Bull. Math. Biology*, 1998, Vol. 60, pp. 857–899.
3. Anderson A.R.A., Chaplain M.A.J., Newman E.L., Steele R.J.C., Thompson A.M. Mathematical modelling of tumour invasion and metastasis. *J. Theor. Medicine*, 2000, Vol. 2, No. 2, pp. 129–154.
4. Chaplain M.A.J., Lolas G. Mathematical modelling of cancer invasion of tissue: dynamic heterogeneity. *Amer. Institute Math. Sci.*, 2006, Vol. 1, No. 3, pp. 399–439.
5. Enderling H., Chaplain M.A.J. Mathematical modeling of tumor growth and treatment. *Curr. Pharm. Des.*, 2014, Vol. 20, No. 30, pp. 4934–4940.
6. Adam J.A., Bellomo N. A Survey Of models for Tumour-Immune System Dynamics. Boston: Birkhäuser, 1996.
7. Preziosi L. Cancer Modelling and Simulation. Boca Raton: Chapman Hall/CRC Press, 2003.
8. Bellomo N., Chaplain M.A.J., De Angelis E. Selected Topics in Cancer Modeling: Genesis, Evolution, Immune Competition, and Therapy. Boston: Birkhäuser, 2008. (Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology).
9. Araujo R.P., McElwain D.L.S. A history of the study of solid tumour growth: the contribution of mathematical modelling. *Bull. Math. Biology*, 2004, Vol. 66, No. 5, pp. 1039–1091.
10. Lowengrub J.S., Frieboes H.B., Jin F., Chuang Y.-L., Li X., Macklin P., Wise S.M., Cristini V. Nonlinear modelling of cancer: bridging the gap between cells and tumours. *Nonlinearity*, 2010, Vol. 23, pp. R1–R91.
11. Gatenby R.A., Gawlinski E.T. A reaction-diffusion model of cancer invasion. *Cancer Res.*, 1996, Vol. 56, No. 24, pp. 5745–5753.

12. Perumpanani A.J., Sherratt J.A., Norbury J., Byrne H.M. Biological inferences from a mathematical model for malignant invasion. *Invasion Metastasis*, 1996, Vol. 16, No. 4–5, pp. 209–221.
13. Patlak C.S. Random walk with persistence and external bias. *Bull. Math. Biophys.*, 1953, Vol. 15, No. 3, pp. 311–338.
14. Keller E.F., Segel L.A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *J. Theor. Biology*, 1970, Vol. 26, No. 3, pp. 399–415.
15. Keller E.F., Segel L.A. Model for Chemotaxis. *J. Theor. Biology*, 1971, Vol. 30, No. 2, pp. 225–234.
16. Keller E.F., Segel L.A. Traveling bands of chemotactic bacteria: a theoretical analysis. *J. Theor. Biology*, 1971, Vol. 30, No. 2, pp. 235–248.
17. Painter K. J. Mathematical models for chemotaxis and their applications in self-organisation phenomena. *J. Theor. Biology*, 2019, Vol. 481, pp. 162–182.
18. Anderson A.R.A. A hybrid mathematical model of solid tumour invasion: the importance of cell adhesion. *Math. Medicine and Biology*, 2005, Vol. 22, No. 2, pp. 163–186.
19. Chaplain M.A.J., Lolas G. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: The role of the urokinase plasminogen activation system. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2005, Vol. 15, pp. 1685–1734.
20. Enderling H., Anderson A.R.A., Chaplain M.A.J., Munro A.J., Vaidya, J.S. Mathematical Modelling of Radiotherapy Strategies for Early Breast Cancer. *J. Theor. Biology*, 2006, Vol. 241, No. 1, pp. 158–171.
21. Andasari V., Gerisch A., Lolas G., South A.P., Chaplain M.A.J. Mathematical modeling of cancer cell invasion of tissue: biological insight from mathematical analysis and computational simulation. *J. Math. Biology*, 2010, Vol. 63, No. 1, pp. 141–171.
22. Gerisch A., Chaplain M.A.J. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: Local and non-local models and the effect of adhesion. *J. Theor. Biology*, 2008, Vol. 250, No. 4, pp. 684–704.
23. Frieboes H.B., Zheng X., Sun C.H., Tromberg B., Gatenby R., Christini V. An integrated computational/experimental model of tumor invasion. *Cancer Res.*, 2006, Vol. 66, pp. 1597–1604.
24. Painter K.J. Modelling cell migration strategies in the extracellular matrix. *J. Math. Biology*, 2009, Vol. 58, No. 4–5, pp. 511–543.
25. Ramis-Conde I., Chaplain M.A.J., Anderson A.R.A. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue. *Math. Comput. Model.*, 2008, Vol. 47, No. 5–6, pp. 533–545.
26. Painter K.J., Armstrong N.A., Sherratt J.A. The impact of adhesion on cellular invasion processes in cancer and development. *J. Theor. Biology*, 2010, Vol. 264, pp. 1057–1067.
27. Peng L., Trucu D., Lin P., Thompson A., Chaplain M.A.J. A multiscale mathematical model of tumour invasive growth. *Bull. Math. Biology*, 2017, Vol. 79, No. 3, pp. 389–429.
28. Domschke P., Trucu D., Gerisch A., Chaplain M.A.J. Structured models of cell migration incorporating molecular binding processes. *J. Math. Biology*, 2017, Vol. 75, No. 5–6, pp. 1517–1561.
29. Bitsouni V., Chaplain M.A.J., Eftimie R. Mathematical modelling of cancer invasion: the multiple roles of TGF- β pathway on tumour proliferation and cell adhesion. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2017, Vol. 27, No. 10, article 1929.
30. Bitsouni V., Trucu D., Chaplain M.A.J., Eftimie R. Aggregation and travelling wave dynamics in a two-population model of cancer cell growth and invasion. *Math. Medicine and Biology*, 2018, Vol. 35, No. 4, pp. 541–577.
31. Szymanska Z., Cytowski M., Mitchell E., Macnamara C.K., Chaplain M.A.J. Computational modelling of cancer development and growth: modelling at multiple scales and multiscale modelling. *Bull. Math. Biology*, 2017, Vol. 80, No. 5, pp. 1366–1403.
32. Pang P.Y.H., Wang Y. Global existence of a two-dimensional chemotaxis-haptotaxis model with remodeling of non-diffusible attractant. *J. Diff. Equ.*, 2017, Vol. 263, pp. 1269–1292.
33. Ke Y., Zheng J. A note for global existence of a two-dimensional chemotaxis-haptotaxis model with remodeling of non-diffusible attractant. *Nonlinearity*, 2018, Vol. 31, No. 10, article 4602.
34. Bubba F., Pouchol C., Ferrand N., Vidal G., Almeida L., Perthame B., Sabbah M. A chemotaxis-based explanation of spheroid formation in 3d cultures of breast cancer cells. *J. Theor. Biology*, 2019, Vol. 479, pp. 73–80.

35. Xiang T., Zheng J. A new result for 2D boundedness of solutions to a chemotaxis–haptotaxis model with/without sub-logistic source. *Nonlinearity*, 2019, Vol. 32, article 4890.
36. Tao Y., Winkler M. Global classical solutions to a doubly haptotactic cross-diffusion system modeling oncolytic virotherapy. *J. Diff. Equ.*, 2020, Vol. 268, No. 9, article 4973.
37. Perumpanani A.J., Sherratt J.A., Norbury J., Byrne H. A two parameter family of travelling waves with a singular barrier arising from the modelling of matrix mediated malignant invasion. *Physica. Ser. D: Nonlinear Phenomena*, 1999, Vol. 126, pp. 145–159.
38. Marchant B.P., Norbury J., Sherratt J.A. Travelling wave solutions to a haptotaxis-dominated model of malignant invasion. *Nonlinearity*, 2001, Vol. 14, No. 6, pp. 1653–1671.
39. Sherratt J. On the form of smooth-front travelling waves in a reaction-diffusion equation with degenerate nonlinear diffusion. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2010, Vol. 5, No. 5, pp. 64–79.
40. Harley K., Van Heijster P., Marangell R., Pettet G.J., Wechselberger M. Existence of traveling wave solutions for a model of tumor invasion. *J. Appl. Dynam. Syst.*, 2014, Vol. 13, No. 1, pp. 366–396.
41. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer-Verl., 1986.
42. Bateman H., Erdélyi A. Higher Transcendental Functions. V. 2. N. Y.; Toronto; London: McGraw-Hill Book Company, 1953.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2023. Том 26, № 3

Зав. редакцией Т. А. Звонарева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 07.11.2023 г.
Формат $60 \times 84^{1/8}$. Усл. печ. л. 22,5.
Объём 10,9 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия