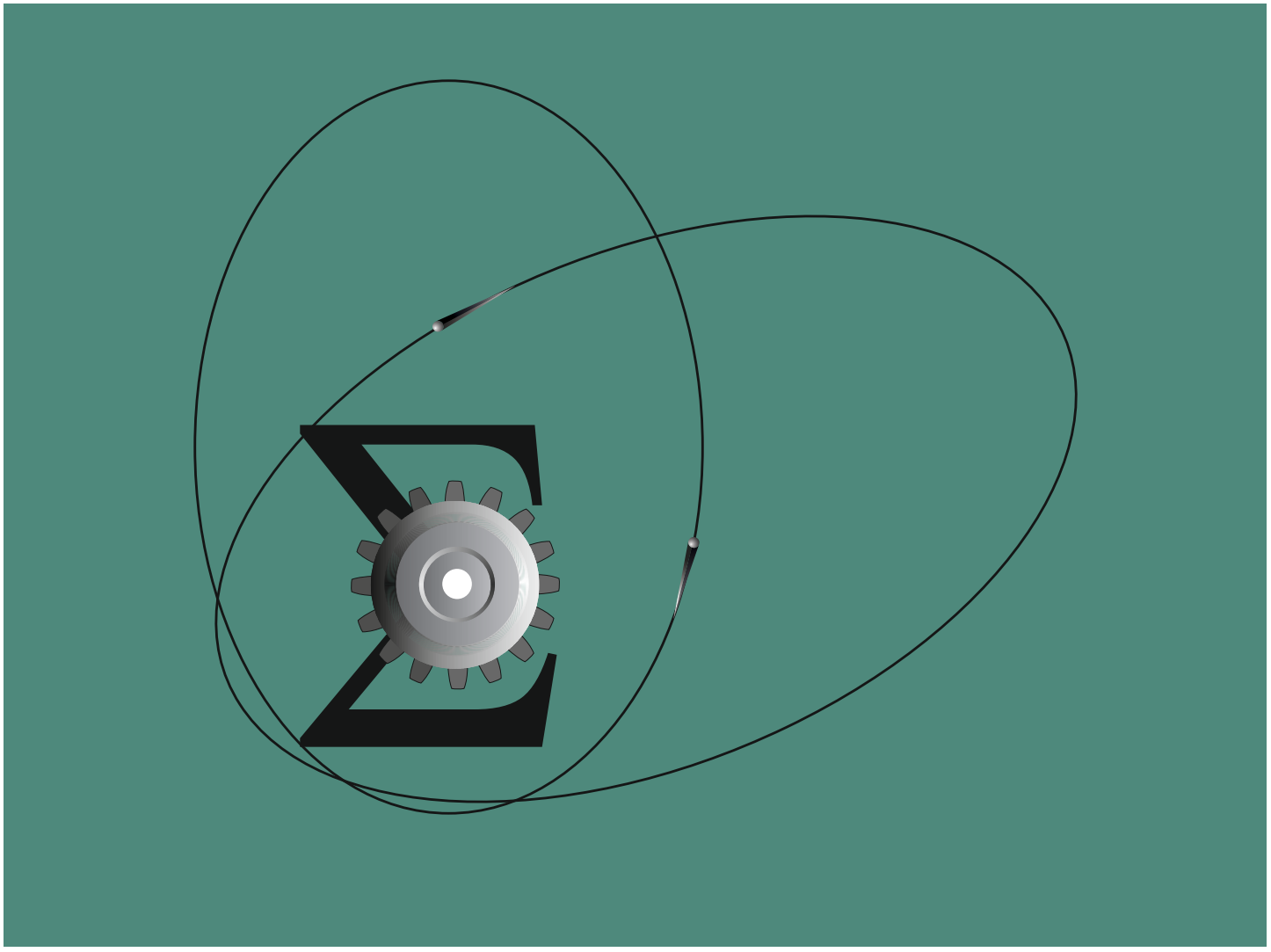
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 26 № 4 2023



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор В. Л. Береснев

Зам. главного редактора М. А. Шишленин

Отв. секретарь В. А. Дедок

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев
Б. Д. Аннин
В. С. Белоносов
В. Н. Белых
Ю. С. Волков
К. В. Воронцов
А. В. Гасников
М. А. Гузеев
В. П. Ильин
С. И. Кабанихин
А. Н. Карапетянц
А. Л. Карчевский
М. В. Клибанов
С. С. Кутателадзе
В. А. Левин
Н. И. Макаренко
С. Б. Медведев
Р. Г. Новиков
Д. Е. Пальчунов
И. Б. Петров
П. И. Плотников
М. И. Протасов
В. Г. Романов
Е. М. Рудой
К. К. Сабельфельд
В. М. Садовский
Д. Н. Сидоров
А. С. Терсенов
В. С. Тимофеев
В. В. Шайдуров
А. А. Шананин

Учредители журнала:
Сибирское отделение РАН
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году | Выходит 4 раза в год

Том 26, № 4(96) | Научный журнал | **Октябрь–декабрь, 2023 г.**

СОДЕРЖАНИЕ

Васюткин С. А., Чупахин А. П. Уравнение для вихря в вязкой гидродинамике в канале сложной геометрии 5

Галанин М. П., Лукин В. В., Родин А. С. Программная платформа TEMETOC и ее применение для решения задач механики сплошной среды 16

Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е. Взаимодействие плоских волн деформаций в разномодульном упругом полупространстве на этапе принудительной остановки его границы после одноосного растяжения-сжатия 32

Куликов И. М. Использование кусочно-параболической реконструкции физических переменных в схеме Русанова. I. Уравнения специальной релятивистской гидродинамики 49

Лазарева Г. Г., Оксогоева И. П., Судников А. В. Влияние параметров математической модели на распределение плотности плазмы в винтовом магнитном поле . . 65

Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А. Существование решений краевой задачи для уравнений баротропного течения многокомпонентной среды. I. Постановка основной задачи. Разрешимость вспомогательной задачи 77

Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л. Алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных уравнений с интервальными параметрами 93

Нещадим М. В., Симонов А. А. Преобразования Бэклунда релятивистского уравнения Шредингера 109

Светов И. Е., Полякова А. П. Восстановление трехмерных векторных полей по значениям нормального, продольных и весовых преобразований Радона 125

Танана В. П., Марков Б. А. О погрешности в определении границы защитного слоя в обратной задаче теплопроводности 143

Тимергалиев С. Н. О существовании решений нелинейных краевых задач для непологих оболочек типа Тимошенко с незакрепленными краями 160

Чеботарев А. Ю., Пак Н. М., Ковтанюк А. Е. Анализ и численное моделирование начально-краевой задачи для квазилинейных уравнений сложного теплообмена . . 180

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СибЖИМ
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
Телефон: +7 (383) 329-76-11
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

© Сибирское отделение РАН, 2023
© Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2023

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998 4 issues per year

Vol. 26, No. 4(96) Scientific journal **October–December, 2023**

CONTENTS

Vasyutkin S. A., Chupakhin A. P. Curl equation in viscous hydrodynamics in a channel of complex geometry 5

Galanin M. P., Lukin V. V., Rodin A. S. Temetos software platform and its applications in problems of continuum mechanics 16

Dudko O. V., Lapteva A. A., Ragozina V. E. Interaction of plane strain waves in a heteromodular elastic half-space at the stage of forced stopping of its boundary after uniaxial tension-compression 32

Kulikov I. M. Using piecewise parabolic reconstruction of physical variables in the Rusanov solver. I. The special relativistic hydrodynamics equations 49

Lazareva G. G., Oksogoeva I. P., Sudnikov A. V. Influence of mathematical model parameters on plasma transfer in a helical magnetic field 65

Mamontov A. E., Prokudin D. A. Existence of solutions of the boundary value problem for the equations of barotropic flows of a multicomponent medium. I. Statement of the main problem. Solvability of an auxiliary problem 77

Morozov A. Yu., Reviznikov D. L. Algorithms for the numerical solution of fractional differential equations with interval parameters 93

Neshchadim M. V., Simonov A. A. Backlund transformations of the relativistic Schrodinger equation 109

Svetov I. E., Polyakova A. P. Reconstruction of three-dimensional vector fields based on values of normal, longitudinal, and weighted radon transform 125

Tanana V. P., Markov B. A. On the error in determining the protective layer boundary in the inverse heat problem 143

Timergaliev S. N. On the existence of solutions of nonlinear boundary value problems for nonshallow Timoshenko-type shells with free edges 160

Chebotarev A. Yu., Pak N. M., Kovtanyuk A. E. Analysis and numerical simulation of the initial-boundary value problem for quasilinear equations of complex heat transfer 180

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:
SibJIM
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
pr. Akad. Koptyuga 4
Novosibirsk 630090, Russia
Phone: +7 (383) 329-76-11
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

© Siberian Branch of RAS, 2023
© Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2023

УДК 532.5

УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВИХРЯ В ВЯЗКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ В КАНАЛЕ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

© 2023 **С. А. Васюткин**[a], **А. П. Чупахин**[b]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]s.vasyutkin@g.nsu.ru, [b]alexander190513@gmail.com

Поступила в редакцию 21.04.2023 г.; после доработки 13.08.2023 г.; принята к публикации 01.11.2023 г.

Рассматриваются уравнения Навье—Стокса для плоского установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости в ортогональной системе координат, в которой линии тока жидкости совпадают с координатными линиями одного из семейств ортогональной системы координат. В этой системе координат вектор скорости имеет только касательную компоненту и система трёх уравнений Навье—Стокса является переопределённой системой для двух функций — касательной компоненты скорости и давления. В работе система приведена в инволюцию, получены условия совместности, которые являются уравнениями для вихря скорости в этой системе координат. В коэффициенты этих уравнений входят кривизны координатных линий и производные от них до второго порядка. Полученные уравнения существенно сложнее уравнений для вихря в канале простой геометрии.

Ключевые слова: уравнения Навье—Стокса, криволинейная система координат, линии тока, кривизна линии тока, условия совместности, уравнение для вихря.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.401

Описание движения вязкой несжимаемой жидкости в каналах сложной геометрии является нетривиальной задачей фундаментальной математической гидродинамики, имеющей многочисленные приложения при описании природных явлений [1–3]. Кривизна канала существенно перестраивает течение, усложняя его топологию, приводя к возникновению вихрей и вторичных течений. На сегодняшний день, единственным безразмерным параметром, определяющим характер медленных течений в слабо изогнутых каналах, является число Дина [2]. Уравнения Навье—Стокса, записанные в специальных системах координат, отвечающих геометрии канала, имеют сложный вид и трудно поддаются качественному анализу [3, 4]. Многочисленные вычислительные работы не могут в полной мере отразить влияние геометрии канала на гидродинамику потока в нём. Ряд работ посвящён формулировке и исследованию начально-краевых задач для уравнений Навье—Стокса на многообразиях и в каналах сложной геометрии, например [5,6]. В этих работах исследуется влияние кривизн границы на топологию и качественные свойства решения. Задаче протекания для уравнения Навье—Стокса посвящено много работ, отметим [7], в которой дан обзор результатов по проблеме Ж. Лерэ, а также близкую к рассматриваемым нами вопросам [8], в которой, в частности, обсуждается влияние вихря, порождённого сложной геометрией стенок канала, на краевые условия задачи. Важную роль при отыскании частных точных решений играют теоретико-групповые методы Ли—Овсянникова [9] и исследование уравнений в лагранжевых координатах [10], которое позволяет строить широкие классы точных решений.

В работе рассматриваются уравнения Навье—Стокса для плоского установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости в ортогональной системе координат [1], в которой ли-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-29-01567).

нии тока жидкости совпадают с координатными линиями одного из семейств ортогональной системы координат. Поскольку в этой системе координат вектор скорости имеет лишь одну компоненту, касательную вдоль этих линий, то система трёх уравнений Навье—Стокса является переопределённой системой для двух функций — касательной компоненты скорости и давления. Возникает задача получения полной системы дифференциальных следствий, условий совместности [11]. Эта система приведена в работе в инволюцию, получены условия совместности, которые являются уравнениями для вихря скорости в этой системе координат. В коэффициенты уравнений входят кривизны координатных линий и производные от них до второго порядка. Полученные уравнения существенно сложнее уравнений для вихря в канале простой геометрии [1].

Задача обтекания вязким потоком плоского профиля сложной геометрии, возникает при исследовании скольжения лыжи по поверхности снега [12] и связана с гидродинамикой вблизи супергидрофобных поверхностей [13]. Проектирование оптимальных форм, обтекаемых потоком жидкости, с минимальным (максимальным) лобовым сопротивлением можно рассматривать как задачу оптимизации формы для уравнений гидродинамики [14].

1. СИСТЕМА КООРДИНАТ, СВЯЗАННАЯ С ЛИНИЯМИ ТОКА

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в плоском случае, используя для этого натуральные координаты на плоскости [1]. Пусть поле течения покрыто ортогональной сеткой, образованной семейством линий тока C и ортогональным им семейством кривых N. Единичный касательный вектор на кривой C, направленный в сторону увеличения длины дуги, обозначим через $\mathbf{t}$, элемент длины дуги через ds и кривизну кривой C через κ_s. Для ортогональной кривой N соответствующие величины обозначим $dn, \mathbf{n}, \kappa_n$. Примем за стандартное такое расположение кривых C и N, при котором вектор $\mathbf{n}$ получается из вектора $\mathbf{t}$ поворотом на прямой угол против часовой стрелки. Запишем уравнения в естественных координатах, вводя в каждой точке угол θ, образуемый вектором $\mathbf{t}$ с осью Ox прямоугольной системы координат Oxy. В этой системе координат

$$\kappa_s = \frac{\partial\theta}{\partial s}, \quad \kappa_n = \frac{\partial\theta}{\partial n}, \tag{1}$$

кроме того

$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta\, ds, \quad dy = \sin\theta\, ds, \\ dx &= -\sin\theta\, dn, \quad dy = \cos\theta\, dn. \end{aligned} \tag{2}$$

Такая система координат для записи уравнений гидродинамики используется в [1]. Для полноты изложения приведём подробные выкладки вывода уравнений для линии тока.

Уравнения репера Френе—Серре в этих координатах имеют вид

$$\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial s} = \kappa_s\mathbf{n}, \qquad \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial n} = -\kappa_n\mathbf{t}, \tag{3}$$

причём $\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle = \langle\mathbf{t},\mathbf{t}\rangle = 1$, $\langle\mathbf{t},\mathbf{n}\rangle = 0$, через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено стандартное скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве. Дифференцируя формулу $\langle\mathbf{t},\mathbf{n}\rangle = 0$ по s и n получим аналогичные формулам (3) выражения для репера Френе—Серре связанного с кривой N:

$$\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial n} = \kappa_n\mathbf{n}, \qquad \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial s} = -\kappa_s\mathbf{t}. \tag{4}$$

Условия совместности уравнений (3) и (4)

$$\frac{\partial^2\mathbf{t}}{\partial s\,\partial n} = \frac{\partial^2\mathbf{t}}{\partial n\,\partial s}, \qquad \frac{\partial^2\mathbf{n}}{\partial n\,\partial s} = \frac{\partial^2\mathbf{n}}{\partial s\,\partial n}$$

выполнены в силу уравнений (1).

Замечание. Базис (1), (2) определяет на плоскости линейную связность, которая не согласована с метрикой [15]. Чтобы убедиться в этом проверим несимметричность объектов связности Γ_{ij}^k исходя из уравнений (3) и (4). Сопоставим вектору $\mathbf{t}$ и координатной линии S индекс "1 а вектору $\mathbf{n}$ и линии N — "2 так что уравнения (3) и (4) выражают производные координатных векторов:

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \, e_k.$$

Имеем тогда следующие выражения для объектов связности:

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \qquad \Gamma_{12}^1 = \kappa_s, \quad \Gamma_{21}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = \kappa_n,$$
$$\Gamma_{11}^2 = -\kappa_s, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{21}^2 = -\kappa_n, \quad \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Таким образом $\Gamma_{12}^1 \neq \Gamma_{21}^1$ и $\Gamma_{12}^2 \neq \Gamma_{21}^2$. Эта связность не согласована с метрикой, но по такой связности можно строить ковариантные производные [16–18].

В данной системе координат вектор скорости $\vec{q}$ имеет представление

$$\vec{q} = q_s \mathbf{t} + q_n \mathbf{n}.$$

Для удобства вычислений введём, следуя [1], дифференциальные операторы

$$\nabla = \mathbf{t}\frac{\partial}{\partial s} + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n}, \quad \langle \vec{q}, \nabla \rangle = q_s \frac{\partial}{\partial s} + q_n \frac{\partial}{\partial n}.$$

Уравнения Навье—Стокса установившегося движения вязкой несжимаемой жидкости имеют тогда вид

$$\langle \vec{q}, \nabla \rangle \vec{q} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu \Delta \vec{q}, \quad \langle \nabla, \vec{q} \rangle = 0, \tag{5}$$

где через $\rho = const$ обозначена плотность жидкости, $\nu = const$ — кинематическая вязкость.

Естественные координаты (1), (2) используется в гидродинамике не слишком часто. В последнее время они используются при анализе движущихся кривых [16–19], где их формализм был разработан достаточно подробно. Для двумерных уравнений их применение представляется более оправданным ввиду наглядного геометрического смысла координатных линии, по сравнению с ортогональными криволинейными координатами Ламе [3]. В работе [19] исследованы условия гладкости и регулярности предлагаемой системы координат: получены условия не самопересечения координатных линий и построено отображение, преобразующее криволинейный четырёхугольник, порождённый этими линиями, в прямоугольник в декартовой системе координат. Тем самым определена область, в которой определена данная система координат.

Далее будет дан краткий вывод уравнений Навье—Стокса исходя из уравнений (5) в координатах (1), (2).

2. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА

Линия тока в установившемся течении жидкости характеризуется тем, что направление касательной линии к ней в каждой точке совпадает с направлением скорости частицы жидкости в этой точке, иными словами частица движется вдоль линии тока [1,3]. Выбирая кривые C в качестве линии тока получаем что скорость жидкости имеет только одну компоненту $q = q_s$, при этом $q_n = 0$, так что

$$\vec{q} = q\mathbf{t}. \tag{6}$$

Получим явный вид уравнений (5) в этом случае. Уравнение неразрывности приводится к виду

$$\langle\nabla,\vec{q}\rangle=\langle\mathbf{t}\frac{\partial}{\partial s}+\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n},q\mathbf{t}\rangle=\langle\mathbf{t}\frac{\partial q}{\partial s}+\mathbf{n}\frac{\partial q}{\partial n},\mathbf{t}\rangle+q\left(\langle\mathbf{t},\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial s}\rangle+\langle\mathbf{n},\frac{\partial\mathbf{t}}{\partial n}\rangle\right)=$$
$$=\frac{\partial q}{\partial s}+q\left(\langle\mathbf{t},\kappa_s\mathbf{n}\rangle+\langle\mathbf{n},\kappa_n\mathbf{n}\rangle\right)=\frac{\partial q}{\partial s}+\kappa_n\,q=0.$$

Левая часть уравнения импульсов в (5) вычисляется аналогичным образом:

$$\begin{gathered}\langle\vec{q},\nabla\rangle\vec{q}+\frac{1}{\rho}\nabla p=\langle q\mathbf{t},\mathbf{t}\frac{\partial}{\partial s}+\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n}\rangle\,q\mathbf{t}+\frac{1}{\rho}\nabla p=q\frac{\partial q}{\partial s}\mathbf{t}+q^2\kappa_s\mathbf{n}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}\mathbf{t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\mathbf{n}=\\=\left(q\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}\right)\mathbf{t}+\left(q^2\kappa_s+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right)\mathbf{n}.\end{gathered}\tag{7}$$

Более громоздким процессом является вычисление лапласиана Δ от вектора скорости $\vec{q}$. Используем формулу

$$\Delta=\langle\nabla,\nabla\rangle=\left\langle\mathbf{t}\frac{\partial}{\partial s}+\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n},\mathbf{t}\frac{\partial}{\partial s}+\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n}\right\rangle=\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial n^2}-\kappa_s\frac{\partial}{\partial n}+\kappa_n\frac{\partial}{\partial s}.$$

Применим оператор Δ к вектору скорости $\vec{q}$:

$$\begin{gathered}\Delta\vec{q}=\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial n^2}-\kappa_s\frac{\partial}{\partial n}+\kappa_n\frac{\partial}{\partial s}\right)q\mathbf{t}=\\\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial q}{\partial s}\mathbf{t}+q\kappa_s\mathbf{n}\right)+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial q}{\partial n}\mathbf{t}+q\kappa_n\mathbf{n}\right)-\kappa_s\left(\frac{\partial q}{\partial n}\mathbf{t}+q\kappa_n\mathbf{n}\right)+\kappa_n\left(\frac{\partial q}{\partial s}\mathbf{t}+q\kappa_s\mathbf{n}\right)=\\\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}\mathbf{t}+2\frac{\partial q}{\partial s}\kappa_s\mathbf{n}+q\frac{\partial\kappa_s}{\partial s}\mathbf{n}-q\kappa_s^2\mathbf{t}+\frac{\partial^2 q}{\partial n^2}\mathbf{t}+2\frac{\partial q}{\partial n}\kappa_n\mathbf{n}+q\frac{\partial\kappa_n}{\partial n}\mathbf{n}-q\kappa_n^2\mathbf{t}-\kappa_s\frac{\partial q}{\partial n}\mathbf{t}+\kappa_n\frac{\partial q}{\partial s}\mathbf{t}=\\\left[\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial n^2}-\kappa_s\frac{\partial q}{\partial n}+\kappa_n\frac{\partial q}{\partial s}-q(\kappa_s^2+\kappa_n^2)\right]\mathbf{t}+\left[2\kappa_s\frac{\partial q}{\partial s}+2\kappa_n\frac{\partial q}{\partial n}+q\left(\frac{\partial\kappa_s}{\partial s}+\frac{\partial\kappa_n}{\partial n}\right)\right]\mathbf{n}.\end{gathered}\tag{8}$$

Собирая вместе полученные представления (7) и (8), получаем покоординатную запись уравнений линий тока для уравнений Навье—Стокса (5):

Теорема 1. *Уравнения Навье—Стокса* (5) *в координатах* (1), (2) *при условии* (6) *имеют вид*

$$q\frac{\partial q}{\partial s}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=\nu\left[\frac{\partial^2 q}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial n^2}-\kappa_s\frac{\partial q}{\partial n}+\kappa_n\frac{\partial q}{\partial s}-q(\kappa_s^2+\kappa_n^2)\right],\tag{9}$$

$$q^2\kappa_s+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}=\nu\left[2\kappa_s\frac{\partial q}{\partial s}+2\kappa_n\frac{\partial q}{\partial n}+q\left(\frac{\partial\kappa_s}{\partial s}+\frac{\partial\kappa_n}{\partial n}\right)\right],\tag{10}$$

$$\frac{\partial q}{\partial s}+\kappa_n q=0.\tag{11}$$

Вычислим представление для вихря $\vec{\omega}$ скорости $\vec{q}$ (6):

$$\vec{\omega}=\nabla\times\vec{q}=\left(\mathbf{t}\frac{\partial}{\partial s}+\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n}\right)\times(qt)=\frac{\partial q}{\partial s}\mathbf{t}\times\mathbf{t}+q\kappa_s\mathbf{t}\times\mathbf{n}+\frac{\partial q}{\partial n}\mathbf{n}\times\mathbf{t}+q\kappa_n\mathbf{n}\times\mathbf{n}=$$
$$=\left(q\kappa_s-\frac{\partial q}{\partial n}\right)\mathbf{t}\times\mathbf{n}.$$

Вектор вихря $\vec{\omega}$ лежит в плоскости ортогональной координатной плоскости Oxy и ортогонален векторам $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$: $\langle\vec{\omega},\mathbf{t}\rangle = \langle\vec{\omega},\mathbf{n}\rangle = 0$. Обозначим через ω единственную ненулевую координату вектора вихря

$$\omega = \left(q\kappa_s - \frac{\partial q}{\partial n}\right). \tag{12}$$

Везде далее кривизны линии тока и ортогональной кривой κ_s, κ_n предполагаются заданными гладкими функциями.

Система трёх уравнений (9)–(11) для двух функций p и q является переопределённой, поскольку содержит больше уравнений, чем искомых функции. Дополняя её уравнением (12) мы получаем переопределённую систему четырёх уравнений для трёх функций p, q и ω. Эта система является активной и порождает условия совместности [11]. Нашей целью является выписывание этих условий совместности, иными словами приведение системы (9)–(11) в инволюцию. Подобные условия для уравнения Навье—Стокса в стандартной системе координат являются уравнениями для вихря [3]. Течение жидкости в более сложной геометрической конфигурации порождает и более сложные условия совместности, являющиеся также уравнениями для вихря в этом случае.

3. УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ

Первым этапом приведения системы (9)–(12) в инволюцию является вывод условий совместности уравнений (11), (12). Уравнение неразрывности (11) и определение вихря (12) даст представление первых производных функции q через саму функцию q и вихрь ω:

$$\frac{\partial q}{\partial s} = -\kappa_n q, \qquad \frac{\partial q}{\partial n} = \kappa_s q - \omega. \tag{13}$$

Систему (13) можно рассматривать как переопределённую относительно функции $q = q(s,n)$, поскольку она задаёт значения её первых производных $\partial q/\partial s, \partial q/\partial n$. При такой трактовке условия совместности, т. е. условия симметричности смешанной производной $\partial^2 q/\partial s\partial n$, будут выражаться в терминах правых частей этой системы, т. е. в терминах ω и производных величины вихря. Такой подход является стандартным при исследовании совместности переопределённых систем. В нашем случае он оправдан тем, что и финальные условия совместности мы получаем в терминах только величины завихренности ω и производных от неё. Так система (13) является переопределённой и порождает условия совместности, являющиеся условием симметричности смешанной производной $\partial^2 q/\partial s\,\partial n$:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial n\,\partial s} = -\kappa_n\frac{\partial q}{\partial n} - \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}q = -\kappa_n(\kappa_s q - \omega) - \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}q = -\left(\frac{\partial \kappa_n}{\partial n} + \kappa_s\kappa_n\right)q + \kappa_n\omega,$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s\,\partial n} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\kappa_s q - \omega\right) = \kappa_s\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_s}{\partial s}q - \frac{\partial \omega}{\partial s} = -\kappa_s\kappa_n q + \frac{\partial \kappa_s}{\partial s}q - \frac{\partial \omega}{\partial s}.$$

Приравнивая правые части последних уравнений, получаем условия совместности системы (13) в терминах функций q, ω и производной $\partial\omega/\partial s$:

$$q\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial s} + \kappa_n\omega. \tag{14}$$

При условии

$$\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n} = \frac{\partial^2\theta}{\partial s^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial n^2} = \Delta\theta \neq 0 \tag{15}$$

из уравнения (14) можно выразить скорость q:

$$q = \frac{1}{\Delta\theta}\left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{\partial \theta}{\partial n}\omega\right). \tag{16}$$

В (15), (16) используются формулы (1) для κ_s и κ_n. Тем самым доказана

Лемма 1. *Условием совместности переопределённой системы* (13) *в терминах величины* ω *является уравнение* (14).

Система (13) в совокупности со вторым уравнением импульсов (10) даёт условия представления величины q через ω и $\partial p/\partial n$. Подставим выражения (13) для производных в уравнение (10), после некоторых преобразований получаем уравнение

$$\kappa_s q^2 - \nu\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right) q + 2\nu\kappa_n\omega + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0. \tag{17}$$

Из (17) при условии $\kappa_s \neq 0$ следует

Лемма 2. *Решение уравнений Навье—Стокса* (9)–(11) *существует при условии*

$$(\nu\Delta\theta)^2 - 4\frac{\partial\theta}{\partial s}\left(2\nu\frac{\partial\theta}{\partial n}\omega + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right) \geqslant 0. \tag{18}$$

Доказательство. Условие (18) есть условие неотрицательности дискриминанта уравнения (17), как квадратного уравнения относительно величины q. Оно является условием, связывающим геометрию течения с физическими величинами — вихрем ω и производной давления по нормали $\partial p/\partial n$. □

Следующим этапом приведения системы (9)–(12) в инволюцию является вычисление смешанных производных $\partial^2 p/\partial s\partial n$ и $\partial^2 p/\partial n\partial s$ из уравнений (9) и (10), подстановка в полученные выражения всех производных $\partial q/\partial s$ и $\partial q/\partial n$ из системы (13). При этом необходимо вычислить через q, ω производные от вихря и производные второго порядка скорости $\partial^2 q/\partial s\partial n$, $\partial^2 q/\partial n\partial s$. Получим выражения для вторых производных функции q из системы (13). Имеем

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = -\frac{\partial \kappa_n}{\partial s} q - \kappa_n \frac{\partial q}{\partial s}, \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} = \frac{\partial \kappa_s}{\partial n} q + \kappa_s \frac{\partial q}{\partial n} - \frac{\partial \omega}{\partial n}.$$

Подставляем в эти формулы выражения (13) для первых производных, получим

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = \left(\kappa_n^2 - \frac{\partial \kappa_n}{\partial s}\right) q, \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial n^2} = \left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial n} + \kappa_s^2\right) q - \kappa_s\omega - \frac{\partial \omega}{\partial n}. \tag{19}$$

После подстановки (13) и (19) в (9) и (10) получаем представление для производных давления в терминах только функции q, ω и $\partial\omega/\partial n$:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \kappa_n q^2 - \nu\left[\frac{\partial \omega}{\partial n} + (\kappa_s^2 + \kappa_n^2) q\right], \tag{20}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = -\kappa_s q^2 + \nu\left[\left(\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right) q - 2\kappa_n\omega\right]. \tag{21}$$

Вычисляя смешанные производные от p из уравнений (20) и (21), подставляя в полученные выражения представления (13) и (19) для первых и вторых производных функции q, получим выражения:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial s\partial n} = 2q(\kappa_s q - \omega)\kappa_n + q^2\frac{\partial \kappa_n}{\partial n} - \nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial n^2} + (\kappa_s q - \omega)(\kappa_s^2 + \kappa_n^2) + 2q\left(\kappa_s\frac{\partial \kappa_s}{\partial n} + \kappa_n\frac{\partial \kappa_n}{\partial n}\right)\right],$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial n\partial s} = 2q^2\kappa_n\kappa_s - q^2\frac{\partial \kappa_s}{\partial s} + \nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2} - \frac{\partial \kappa_n}{\partial s}\omega + \kappa_n\frac{\partial \omega}{\partial s}\right],$$

Приравнивая правые части этих уравнений и упрощая полученное выражение, приходим ко второму условию совместности

$$\nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}+\kappa_n\frac{\partial\omega}{\partial s}+(\kappa_s q-\omega)(\kappa_s^2+\kappa_n^2)-\frac{\partial\kappa_n}{\partial s}\omega+2q\left(\kappa_s\frac{\partial\kappa_s}{\partial n}+\kappa_n\frac{\partial\kappa_n}{\partial n}\right)\right]+$$
$$+2q\omega\kappa_n-q^2\left(\frac{\partial\kappa_s}{\partial s}+\frac{\partial\kappa_n}{\partial s}\right)=0. \quad (22)$$

Таким образом, условиями совместности уравнений (9)–(11) являются два уравнения (14) и (22). При условии (15) уравнение (14) можно разрешить относительно q в виде (16). После подстановки (16) в (22) получается нелинейное уравнение для вихря. Последние два слагаемых в (22) можно упростить, воспользовавшись (14), и переписать (22) в форме

$$\nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}+\kappa_n\frac{\partial\omega}{\partial s}-\omega(\kappa_s^2+\kappa_n^2)-\frac{\partial\kappa_n}{\partial s}\omega\right]+$$
$$+q\left[\nu\kappa_s(\kappa_s^2+\kappa_n^2)+2\nu\left(\kappa_s\frac{\partial\kappa_s}{\partial n}+\kappa_n\frac{\partial\kappa_n}{\partial n}\right)+\kappa_n\omega-\frac{\partial\omega}{\partial s}\right]=0, \quad (23)$$

в которой явно выделены слагаемые, содержащие q в виде множителя. Тем самым доказана основная

Теорема 2. *Условиями совместности двумерных стационарных уравнений Навье—Стокса в естественных координатах, в которых линии тока совпадают с одной из координатных линий, являются уравнения* (14) *и* (23)*. Уравнения* (14)*,* (23) *являются уравнениями для вихря в указанных координатах.*

Замечание. Заметим, что в системе координат, в которой кривые C и N являются прямыми координатными линиями Ox и Oy имеем $\kappa_s=\kappa_n=0$ и уравнение (23) совпадает с уравнением для вихря [3]:

$$\langle\vec{q},\nabla\rangle\vec{\omega}-\langle\vec{\omega},\nabla\rangle\vec{q}=\nu\Delta\vec{\omega}.$$

Учитывая представления (1), имеем

$$\kappa_s^2+\kappa_n^2=|\nabla\theta|^2, \qquad 2\left(\kappa_s\frac{\partial\kappa_s}{\partial n}+\kappa_n\frac{\partial\kappa_n}{\partial n}\right)=\frac{\partial}{\partial n}|\nabla\theta|^2. \quad (24)$$

Уравнение (23) после подстановки (16) и (24) принимает вид

$$\nu\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial n^2}+\frac{\partial\theta}{\partial n}\frac{\partial\omega}{\partial s}-\omega\left(|\nabla\theta|^2+\frac{\partial^2\theta}{\partial n\partial s}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{\Delta\theta}\left(\frac{\partial\omega}{\partial s}+\frac{\partial\theta}{\partial n}\omega\right)\left[\nu\frac{\partial\theta}{\partial s}|\nabla\theta|^2+\nu\frac{\partial}{\partial n}|\nabla\theta|^2+\frac{\partial\theta}{\partial n}\omega-\frac{\partial\omega}{\partial s}\right]=0, \quad (25)$$

и является нелинейным как относительно ω, так и первых производных ω.

4. ПРИМЕР ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Примеры некоторых точных решений уравнений Навье—Стокса хорошо описаны [9]. Построим пример точного решения уравнений Навье—Стокса для системы (9)–(12). Пусть угол θ зависит только от переменной s, т. е. $\theta=\theta(s)$. Тогда из соотношений (1) следует, что кривизна линии N равна нулю $\kappa_n=0$ и кривизна линии тока $\kappa_s=\kappa_s(s)$. Предположим также, что величина q не зависит от n, $q=q(s)$. В таком случае, из соотношений (13), имеем

$$\frac{\partial q}{\partial s}=0, \qquad 0=\kappa_s q-\omega.$$

Из первого уравнения получаем, что величина q также не зависит от s и, следовательно, постоянна $q = const$. Из второго уравнения получаем, что единственная ненулевая компонента вихря пропорциональна кривизне линии тока $\omega(s) = q\kappa_s(s)$. Отметим, что первое условие совместности (14) выполнено в данном случае тождественно. Подставим во второе условие совместности (23) компоненту вихря $\omega = q\kappa_s(s)$:

$$\nu\left[q\kappa_s'' - q\kappa_s^3\right] + q\left[\nu\kappa_s^3 - q\kappa_s'\right] = 0,$$

и преобразуем

$$\kappa_s'' - \frac{q}{\nu}\kappa_s = 0.$$

Таким образом, кривизна линии тока при предположении, что $\theta = \theta(s)$ и $q = q(s)$, вычисляется явно

$$\kappa_s = C_1\frac{\nu}{q}\exp\left(\frac{q}{\nu}s\right) + C_2,$$

а угол θ соответственно имеет вид

$$\theta = \int \kappa_s\, ds = C_1\left(\frac{\nu}{q}\right)^2\exp\left(\frac{q}{\nu}s\right) + C_2 s + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 произвольные константы. Таким образом решение уравнений Навье—Стокса (9)–(12):

$$q = const, \qquad \omega = q\left(C_1\frac{\nu}{q}\exp\left(\frac{q}{\nu}s\right) + C_2\right),$$

и давление p может быть найдено явно из уравнений (9)–(10).

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Очевидной выгодой используемой системы координат является задание течения только одной компонентой скорости $q = q(s, n)$. Вопрос о гидродинамической реализации полученного результата является нетривиальным и требует дальнейшего изучения. В отличие от классического подхода, уравнение для завихренности течения (25) является замкнутым и не включает в себя компонент скорости. Тем самым требуется постановка для него краевых условий в терминах величины вихря. Здесь возможны исследования в нескольких направлениях. Одно из них — постановка краевых условий с использованием вихря, как это делается, например, в работе [5]. Это обусловлено именно влиянием сложной геометрии стенки канала. В последнее время, для уравнений гидродинамики активно исследуется граничные условия проскальзывания типа Навье. Это мотивируется многочисленными приложениями, в которых поток обтекает шероховатую поверхность. Обзор физических постановок возникающих при этом задач, главной из которых является супергидрофобное обтекание, содержится в [20]. Одной из возможных постановок краевых условий является при этом задание тензора скольжения [21]. Одной из таких задач является моделирование скольжения лыжи по снегу [12]. Поверхность снега представляет собой шероховатую поверхность, рельеф которой определяется индивидуальной кристаллической структурой снега. При скольжении лыжи по снегу между её поверхностью и снегом возникает слой жидкости, обусловленный давлением лыжи. На практике замечено, что нанесение на скользящую поверхность лыжи микросетки специального рельефа, так называемой структуры, значительно улучшает скольжение. Этот рельеф зависит от структуры снега, погодных условий, профиля трассы и других факторов и определяется сегодня исключительно из опыта. Тем самым возникает задача моделирования сэндвича: жидкость между двумя шероховатыми поверхностями.

Коэффициенты уравнения (25) зависят от некоторых дифференциальных параметров ортогональных кривых, представляющих координатные линии. Точное решение, описанное в п. 4,

даёт иллюстративные примеры того, когда эти параметры могут принимать частные значения. В этом случае получается решение с постоянной длиной вектора скорости $q = const$ и завихренностью пропорциональной кривизне линии тока $\omega = q\kappa_s$. Анализ этих дифференциальных параметров, классификация возможных типов кривых C и N представляется самостоятельной задачей.

Авторы благодарят П. И. Плотникова за плодотворные обсуждения во время выполнения исследования и рецензента за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания, позволившие улучшить изложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Milne-Thomson L. N.* Theoretical Hydrodynamics. London: The Macmillan And Company, 1962.
2. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary-Layer Theory. Heidelberg: Springer, 2003.
3. *Kochin N. E.,Kibel I. A.,Roze N. V.* Theoretical Hydromechanics. N. Y.: Interscience Publishers, 1964.
4. *Shikhmurzaev Y., Sisoev G.* Spiralling liquid jets: Verifiable mathematical framework, trajectories and peristaltic waves // J. Fluid Mech. 2017. V. 819. P. 352–400.
5. *Chan C. H., Czubak M., Disconzi M. M.* The formulation of the Navier—Stokes equations on Riemannian manifolds // J. Geom. Phys. 2017. V. 121. P. 335–346.
6. *Marusic-Paloka E.* The effects of flexion and torsion on a fluid flow through a curved pipe // Appl. Math. Optim. 2001. V. 44, N 3. P. 245–272.
7. *Chen G. Q., Osborne D., Qian Z.* The Navier—Stokes equations with the kinematic and vorticity boundary conditions on non-flat boundaries // Acta Math. Sci. 2009. V. 29, N 4. P. 919–948.
8. *Коробков М. В.,Пилецкас К.,Пухначёв В. В.,Руссо Р.* Задача протекания для уравнений Навье—Стокса // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 6. С. 115–176.
9. *Пухначев В. В.* Симметрии в уравнениях Навье—Стокса. Новосибирск: НГУ, 2022.
10. *Абрашкин А. А., Якубович Е. И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006.
11. *Pommaret J. F.* Differential Galois Theory. Mathematics and Its Applications: a Series of Monographs and Texts, V. 15. London: Gordon and Breach, Science Publishers, 1983.
12. *Паршин Д. В., Гайфутдинов Р. А. Коптюг А. В., Чупахин А. П* Механика скольжения лыж по снегу: современное состояние дел и перспективы // Прикл. механика и техн. физика. 2023. Т. 64, № 4. С. 161–177.
13. *Агеев А. И.,Осипцов А. Н.* Макро- и микрогидродинамика вязкой жидкости вблизи супергидрофобной поверхности // Коллоидный журн. 2022. Т. 84, № 4. С. 380–395.
14. *Plotnikov P. I., Sokolowski J.* Geometric Aspects of Shape Optimization // J. Geom. Anal. 2023. V. 33. Article 206.
15. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundations of differential geometry. N. Y.: Interscience Publishers, 1963.
16. *Dall'Acqua A., Pozzi P.* A Willmore—Helfrich L^2-flow of curves with natural boundary conditions // Comm. Anal. Geom. 2014. V. 22, N 4. P. 617–669; DOI: 10.4310/cag.2014.v22.n4.a2
17. *Dziuk G., Kuwert E., Schatzle R* Evolution of elastic curves in $\mathbb{R}^n$: Existence and computation // SIAM J. Math. Anal. 2002. V. 33, N 5. P. 1228–1245; DOI: 10.1137/s0036141001383709
18. *Lin C. C.* L^2-flow of elastic curves with clamped boundary conditions // J. Differ. Equ. 2012. V. 252, N 12. P. 6414–6428; DOI: 10.1016/j.jde.2012.03.010
19. *Plotnikov P. I., Sokolowski J.* Gradient flow for Kohn-Vogelius functional // Siberian Electron. Math. Rep. 2023. V. 20, N 1. P. 524–579.
20. *Malkin A. Ya., Patlazhan S. A., Kulichikhin V. G.* Physicochemical phenomena leading to slip of a fluid along a solid surface // Usp. Khim. 2019. V. 88, N 3. P. 319–349.
21. *Bazant M. Z., Vinogradova O. I.* Tensorial Hydrodynamic Slip // J. Fluid Mech. 2008. V. 613. P. 125–134.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 532.5

CURL EQUATION IN VISCOUS HYDRODYNAMICS IN A CHANNEL OF COMPLEX GEOMETRY

© 2023 **S. A. Vasyutkin**[a], **A. P. Chupakhin**[b]

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia

E-mails: [a]s.vasyutkin@g.nsu.ru, [b]alexander190513@gmail.com

Received 21.04.2023, revised 13.08.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. We consider the Navier—Stokes equations for the plane steady motion of a viscous incompressible fluid in an orthogonal coordinate system in which the fluid streamlines coincide with the coordinate lines of one of the families of the orthogonal coordinate system. In this coordinate system, the velocity vector has only the tangential component and the system of three Navier—Stokes equations is an overdetermined system for two functions — the tangential component of velocity and pressure. In the present paper, the system is brought to involution, and the consistency conditions are obtained, which are the equations for the curl of the velocity in this coordinate system. The coefficients of these equations include the curvatures of the coordinate lines and their derivatives up to the second order. The equations obtained are significantly more complicated than the curl equations in a channel of simple geometry.

Keywords: Navier—Stokes equations, curvilinear coordinate system, streamline, streamline curvature, consistency condition, curl equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.401

REFERENCES

1. L. N. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics* (Macmillan, London, 1962).
2. H. Schlichting and K. Gersten, *Boundary-Layer Theory* (Springer, Heidelberg, 2003).
3. N. E. Kochin, I. A. Kibel, and N. V. Roze, *Theoretical Hydromechanics* (Interscience, New York, 1964).
4. Y. Shikhmurzaev and G. Sisoev, "Spiralling liquid jets: Verifiable mathematical framework, trajectories and peristaltic waves," J. Fluid Mech. **819**, 352–400 (2017).
5. C. H. Chan, M. Czubak, and M. M. Disconzi, "The formulation of the Navier—Stokes equations on Riemannian manifolds," J. Geom. Phys. **121**, 335–346 (2017).
6. E. Marusic-Paloka, "The effects of flexion and torsion on a fluid flow through a curved pipe," Appl. Math. Optim. **44** (3), 245–272 (2001).
7. G. Q. Chen, D. Osborne, and Z. Qian, "The Navier–Stokes equations with the kinematic and vorticity boundary conditions on non-flat boundaries," Acta Math. Sci. **29** (4), 919–948 (2009).
8. M. V. Korobkov, K. Pileckas, V. V. Pukhnachov, and R. Russo, "The flux problem for the Navier—Stokes equations," Russ. Math. Surv. **69** (6), 1065–1122 (2014).
9. V. V. Pukhnachov, *Symmetries in the Navier—Stokes Equations* (Novosibirsk. Gos. Univ., Novosibirsk, 2022) [in Russian].
10. A. A. Abrashkin and E. I. Yakubovich, *Vortex Dynamics in the Lagrangian Description* (Fizmatlit, Moscow, 2006) [in Russian].
11. J. F. Pommaret, *Differential Galois Theory. Mathematics and Its Applications: A Series of Monographs and Texts. Vol. 15* (Gordon and Breach, London, 1983).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 892–900.

12. D. V. Parshin, R. A. Gaifutdinov, A. V. Koptyug, and A. P. Chupakhin, "Mechanics of ski sliding on snow: Current status and prospects," J. Appl. Mech. Tech. Phys. **64** (4), 693–706 (2023).
13. A. I. Ageev and A. N. Osiptsov, "Macro- and microhydrodynamics of a viscous fluid on a superhydrophobic surface," Colloid J. **84**, 379–393 (2022).
14. P. I. Plotnikov and J. Sokolowski, "Geometric aspects of shape optimization," J. Geom. Anal. **33**, 206 (2023).
15. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (Interscience, New York, 1963).
16. A. Dall'Acqua and P. Pozzi, "A Willmore—Helfrich L^2-flow of curves with natural boundary conditions," Commun. Anal. Geom. **22** (4), 617–669 (2014). https://doi.org/10.4310/cag.2014.v22.n4.a2
17. G. Dziuk, E. Kuwert, and R. Schatzle, "Evolution of elastic curves in $\mathbb{R}^n$: Existence and computation," SIAM J. Math. Anal. **33** (5), 1228–1245 (2002). https://doi.org/10.1137/s0036141001383709
18. C. C. Lin, "L^2-flow of elastic curves with clamped boundary conditions," J. Differ. Equ. **252** (12), 6414–6428 (2012). https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.03.010
19. P. I. Plotnikov and J. Sokolowski, "Gradient flow for Kohn—Vogelius functional," Sib. Electron. Math. Rep. **20** (1), 524–579 (2023).
20. A. Ya. Malkin, S. A. Patlazhan, and V. G. Kulichikhin, "Physicochemical phenomena leading to slip of a fluid along a solid surface," Usp. Khim. **88** (3), 319–349 (2019).
21. M. Z. Bazant and O. I. Vinogradova, "Tensorial hydrodynamic slip," J. Fluid Mech. **613**, 125–134 (2008).

УДК 519.63

ПРОГРАММНАЯ ПЛАТФОРМА ТЕМЕТОС И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

© 2023 **М. П. Галанин[a], В. В. Лукин[b], А. С. Родин[c]**

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Миусская пл., 4, г. Москва 125047, Россия

E-mails: [a]galan@keldysh.ru, [b]vvlukin@gmail.com, [c]rals@bk.ru

Поступила в редакцию 08.08.2023 г.; после доработки 27.10.2023 г.; принята к публикации 15.11.2023 г.

Платформа Теметос разработана для проведения вычислительного эксперимента на всех стадиях анализа и исследования моделей механики сплошной среды. Разработан модуль для изучения напряжённо-деформированного состояния системы тел с учётом неупругих деформаций и контактного взаимодействия. Он применён для анализа тепловыделяющего элемента, включавшего до 100 топливных таблеток и оболочку. Решатели платформы применены к задачам астрофизики. Построены модели образования аккреционных дисков в двойных звёздных системах, позволяющие интерпретировать наблюдательные результаты.

Ключевые слова: математическое моделирование, программная платформа Теметос, механика сплошной среды, вычислительный эксперимент.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.402

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование состояния сплошной среды, находящейся под действием различных сил, является важным методом решения многих фундаментальных и прикладных задач. В центре внимания при этом находятся вопросы, связанные с разработкой эффективных, высокоточных и надёжных численных методов, а также с исследованием математических моделей и решением задач научной и инженерной практики.

В то же время для интерпретации результатов моделирования, выяснения уровня адекватности модели реальному объекту важно оснастить исследователя средствами визуализации на каждом этапе вычислительного эксперимента. Это касается конструирования, подготовки модели к расчёту, а также этапа анализа результатов расчётов. Последний должен быть организован так, чтобы позволить провести непосредственное сопоставление результатов расчётов с данными наблюдений в натурном эксперименте.

Целью разработки программной платформы Теметос [1, 2] является сопровождение вычислительного эксперимента на всех стадиях анализа и исследования математических моделей физических процессов и технических объектов. Платформа Теметос предоставляет интерфейсы задания геометрической и физической моделей исследуемой конструкции или физического процесса и позволяет оснастить проблемно-ориентированный решатель инструментами подготовки, проведения и анализа результатов вычислительного эксперимента. Интерфейсы платформы включают инструменты работы с геометрическими моделями расчётных областей, сетками, физическими таблицами и зависимостями свойств сред и материалов, начальными и граничными условиями, настройками численных методов и расчётных программ-решателей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00260).

Платформа содержит ряд служебных модулей для подготовки, запуска и анализа результатов расчётов на супер-ЭВМ, включая визуализацию полученного решения. В частности, она позволяет запускать параллельную расчётную программу на удалённом управляющем узле вычислительного кластера, в то время как подготовка расчёта и анализ его результатов выполняются на рабочей станции оператора платформы.

Физическому наполнению платформы Теметос соответствуют разработанные вычислительные модули, ориентированные на конкретный класс задач. В качестве таких модулей разработаны независимые расчётные параллельные программные комплексы, предназначенные для численного решения многомерных задач механики твёрдого деформируемого тела с использованием метода конечных элементов, уравнений Максвелла в квазистационарном приближении конечно-разностными и конечно-элементными методами [2], системы уравнений магнитной газовой динамики с использованием разрывного метода Галеркина.

В разделе 1 данной статьи описан термомеханический модуль, позволяющий производить моделирование твэлов ядерных реакторов. Реализованные в данном модуле вычислительные алгоритмы дали возможность исследовать состояние участка твэла, включающего в себя до 100 топливных таблеток, с учётом значительного изменения итоговой конфигурации контактных поверхностей относительно начального состояния.

В разделе 2 рассмотрена задача моделирования кривых блеска двойных звёздных систем. Программы-решатели, включённые в состав платформы, позволяют проводить моделирование и прямое сопоставление результатов исследования двойных звёзд как с усреднёнными наблюдательными данными, так и с индивидуальными кривыми. Такой подход в силу сложности решения трёхмерных нестационарных задач позволяет получать существенно новые результаты.

Несмотря на существенные различия областей применения платформы Теметос, в обоих случаях используются общие архитектурные решения построения программных комплексов, общие стандарты хранения и передачи данных.

1. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО МОДУЛЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УЧАСТКА ТВЭЛА

Разработан термомеханический модуль для платформы Теметос, предназначенный для моделирования напряжённо-деформированного состояния системы тел с учётом образования различных неупругих деформаций и контактного взаимодействия тел между собой.

Данный модуль использован для моделирования термомеханического состояния участка тепловыделяющего элемента (твэла), который занимает множество $G = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{N} G_\alpha$ с границей ∂G ($\bar{G} = G \cup \partial G$). Множество G представляет собой участок цилиндрической оболочки G_N, внутри которой расположен столб из одинаковых цилиндрических топливных таблеток $G_1, \cdot, G_{N-1}$, имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах. Участок расчётного множества, соответствующий половине продольного сечения и включающий в себя половины двух таблеток и кусок оболочки, приведён ниже на рис. 1–2.

В начальной конфигурации твэла между таблетками и оболочкой, как правило, существует зазор. При нагревании таблетки расширяются, зазор уменьшается, а затем чаще всего происходит механический контакт между таблетками и оболочкой. Условия теплообмена существенно зависят от деформаций тел в твэле, поэтому тепловая и механическая задачи являются связанными и их нужно решать вместе.

Тепловая задача включает в себя уравнение теплопроводности [3]:

$$c(\mathbf{x}, T)\frac{\partial T}{\partial t} = (\lambda_{ij}(\mathbf{x}, T)T_{,j})_{,i} + \phi(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in G \times (0, t_M]\,. \tag{1}$$

Здесь x_i — компоненты радиус-вектора $\mathbf{x}$, t — время, $T(\mathbf{x},t)$ — температура, $T_{,j} = \frac{\partial T}{\partial x_j}$, $\lambda_{ij}(\mathbf{x},T)$ — компоненты тензора теплопроводности среды, $\phi(\mathbf{x},t)$ — мощность внутренних источников (стоков) тепла, $c(\mathbf{x},T)$ — объёмная теплоёмкость среды.

Уравнение (1) дополняется начальным условием и граничными условиями: на разных поверхностях могут быть заданы условия 1, 2 и 3 рода, а также условия идеального или неидеального теплового контакта.

Механическая задача включает в себя уравнения равновесия системы деформируемых тел в каждый момент времени для каждого тела α ($\alpha = 1, ..., N,\ i, j = \overline{1,3}$) [3]:

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{u},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in G_\alpha. \tag{2}$$

Уравнения (2) дополняются граничными условиями: кинематическими или силовыми.

В рассматриваемой задаче использован линейный тензор полных деформаций

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x},t) + u_{j,i}(\mathbf{x},t)), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha; \tag{3}$$

и определяющее уравнение (закон Гука), связывающее приращения компонент тензора напряжений с приращениями компонент различных деформаций [3],

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl}(\mathbf{x},t) - d\varepsilon^0_{kl}(\mathbf{x},t)), \quad \mathbf{x} \in G_\alpha. \tag{4}$$

Здесь $d\varepsilon^0_{kl}$ — компоненты тензора неупругой деформации; u_i — компоненты вектора перемещения; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных.

Различные тела контактируют друг с другом, всего в конструкции есть q пар потенциально контактирующих поверхностей $\left(\Gamma^k_{c,1},\ \Gamma^k_{c,2}\right)$, $k = 1, ..., q$. Будем использовать обозначение $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{q} \left(\Gamma^k_{c,1} \cup \Gamma^k_{c,2}\right)$. При постановке на контактных границах условия скольжения без трения дополнительные граничные условия на $\Gamma^k_{c,1}$ состоят из следующих соотношений (для границы $\Gamma^k_{c,2}$ можно записать аналогичные соотношения) [4]:

$$\begin{gathered} \sigma_\tau(\mathbf{x}) = 0, \\ \sigma_n(\mathbf{x}) = \sigma_n(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant 0, \\ u_n(\mathbf{x}) + u_n(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant \delta_{0n}(\mathbf{x}), \\ \sigma_n(\mathbf{x})\left[u_n(\mathbf{x}) + u_n(\bar{\mathbf{x}}) - \delta_{0n}(\mathbf{x})\right] = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma^k_{c,2}$ — сходственная (ближайшая) точка для $\mathbf{x} \in \Gamma^k_{c,1}$, $\delta_{0n}(\mathbf{x}) \geqslant 0$ — функция, задающая начальный зазор (участки поверхностей в начальный момент могут не соприкасаться друг с другом), $u_\tau = \mathbf{u} \cdot \tau$, $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$, $\sigma_\tau = (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \tau$, $\sigma_n = (\sigma \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ и τ — вектор внешней нормали и касательный вектор в рассматриваемой точке.

Условия (5) гарантируют, что реализуется один из двух следующих вариантов (заранее неизвестно, какой именно):

1) Точка $\mathbf{x}$ находится в контакте, и тогда верны соотношения $\sigma_n(\mathbf{x}) = \sigma_n(\bar{\mathbf{x}})$, $u_n(\mathbf{x}) + u_n(\bar{\mathbf{x}}) = \delta_{0n}(\mathbf{x})$, т. е. выполнено условие равенства нормальных компонент векторов координат и поверхностных сил для двух точек, причём контактные силы могут быть только сжимающими, если возникают растягивающие силы ($\sigma_n > 0$), то точка должна выйти из контакта по силовому критерию;

2) Точка $\mathbf{x}$ не находится в контакте, и тогда верны соотношения $\sigma_n = 0$, $u_n(\mathbf{x}) + u_n(\bar{\mathbf{x}}) < \delta_{0n}(\mathbf{x})$, то есть между точками возникает зазор, при этом контактные силы равны нулю.

Таким образом, один из двух множителей в последнем условии (5) всегда равен нулю, что и обеспечивает выполнение данного условия.

В рассматриваемой системе тел учитываются $N-2$ контактные пары таблетка/таблетка и $N-1$ контактные пары таблетка/оболочка. Итоговая конфигурация контактных поверхностей заранее неизвестна, поэтому задача (2)–(5) является нелинейной.

При функционировании тепловыделяющего элемента наблюдается большое количество разнообразных физических явлений. Например, в общем случае приращение неупругих деформаций включает в себя приращения температурных ($d\varepsilon_{ij}^T$) и радиационных деформаций ($d\varepsilon_{ij}^v$), деформаций ползучести ($d\varepsilon_{ij}^c$) и растрескивания ($d\varepsilon_{ij}^{crk}$):

$$d\varepsilon_{ij}^0 = d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^v + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^{crk}.$$

Для описания реалистичных характеристик материалов (сплав циркония для оболочки и диоксид урана для топливных таблеток) использованы процедуры из библиотеки MATPRO [5].

Дискретизация задачи термомеханики выполнена с использованием метода конечных элементов [4]. Для решения контактной задачи применён модифицированный метод Неймана—Дирихле (один из вариантов метода декомпозиции области (МДО) без перехлёста подобластей) [6]. Для моделирования системы, включающей в себя большое количество тел, разработан численный алгоритм, основанный на применении двухуровневого аддитивного метода Шварца (вариант МДО с перекрытием подобластей) [6]. Данный алгоритм предполагает разбиение исходной области на ряд пересекающихся подобластей, при этом любая подобласть может включать в себя участки нескольких тел. В ходе итерационного процесса решение глобальной задачи сводится к решению локальных задач в каждой подобласти. Локальные задачи могут быть нелинейными (например, учитывать контакт или пластичность), они решаются независимо друг от друга. В конце итерации вычисляется новое приближение глобального решения. Для ускорения сходимости итерационного процесса использована дополнительная грубая сетка, на которой решалась вспомогательная задача, позволяющая на каждой итерации вычислить дополнительный вклад в вектор глобального решения. Более подробно данные алгоритмы описаны в [7]. С использованием разработанного модуля выполнена серия расчётов для моделирования выхода на номинальную мощность участка твэла, соответствующего $N-1$ топливным таблеткам, в термоупругом приближении ($d\varepsilon_{ij}^0 = d\varepsilon_{ij}^T$). Считалось, что мощность тепловыделения в таблетке за 1 час менялась по линейному закону от 0 до номинального значения, температура оболочки являлась постоянной, между таблетками и оболочкой происходил теплообмен с постоянным коэффициентом теплоотдачи. Начальный зазор между таблетками и оболочкой равен 0. Нижние торцы оболочки и нижней таблетки закреплены по вертикали, к верхнему торцу верхней таблетки приложено постоянное давление 50 МПа, а на внешнюю поверхность оболочки действует постоянное давление 10 МПа.

В [7] представлены результаты расчётов для осесимметричной постановки. Количество таблеток $N-1$ менялось от 1 до 100. Полученные результаты продемонстрировали, что построенный алгоритм (двухуровневый аддитивный метод Шварца) обеспечивает аккуратное выполнение граничных условий на контактных поверхностях. С увеличением количества таблеток время расчёта возрастало по зависимости, близкой к $O(N)$. В дальнейшем удалось получить аналогичные результаты для расчётов в трёхмерной постановке (для сектора 90°).

Представим результаты моделирования участка из 10 таблеток в следующей осесимметричной постановке. Температура в оболочке вычисляется после решения уравнения теплопроводности, на внешней поверхности оболочки поставлено условие 1 рода, между внутренней поверхностью оболочки и внешними поверхностями таблеток происходит теплообмен (значение коэффициента теплообмена зависит от разности температур и расстояния между сходственными точками). На тех участках тел, которые вступают в механический контакт (таблетка/таблетка и таблетка/оболочка), ставится условие идеального теплового контакта (для сходственных точек должны совпадать температуры и тепловые потоки). Для реализации условий теплового контакта использован метод Дирихле—Неймана (один из вариантов МДО).

Выход на номинальную мощность происходит за 10 шагов по времени, на каждом шаге в рамках итерационного цикла решается связанная термомеханическая задача.

Оболочка считается термоупругопластическим телом (использована модель пластического течения для материала с изотропным упрочнением, $d\varepsilon_{ij}^0 = d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^p$), таблетка считается термоупругим телом с учётом растрескивания (хрупкого разрушения) материала ($d\varepsilon_{ij}^0 = d\varepsilon_{ij}^T + d\varepsilon_{ij}^{crk}$). Для описания растрескивания применена модель размазанных трещин [8], которая предполагает следующую связь векторов приращений упругой деформации и деформации растрескивания с вектором приращений напряжений:

$$\{\Delta\varepsilon^e\} + \left\{\Delta\varepsilon^{crk}\right\} = \begin{bmatrix} 1/E_r & -\nu/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E_z & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{rr} \\ \Delta\sigma_{zz} \\ \Delta\sigma_{\varphi\varphi} \\ \Delta\sigma_{rz} \end{Bmatrix}.$$

Здесь модифицированные модули Юнга E_i в зависимости от текущих значений напряжений σ_i ($i = r, \varphi, z$) меняются по линейному закону от номинального значения E (если $\sigma_i < -20$ МПа) до некоторого предельного значения E_∞ (если $\sigma_i > 20$ МПа). В расчётах использовано значение $E_\infty = E/100$ [8].

Анализ результатов проведённых расчётов показал, что использованный численный алгоритм позволяет добиться выполнения граничных условий (и тепловых и механических) на контактирующих поверхностях.

На рис. 1 показаны распределения радиальных, окружных и осевых напряжений на участке G, соответствующем 5-й и 6-й таблеткам, в расчёте с учётом растрескивания материала таблеток, а на рис. 2 — аналогичные величины в расчёте без учёта растрескивания. Координаты и перемещения нормированы на 1 мм, напряжения — на 1 МПа.

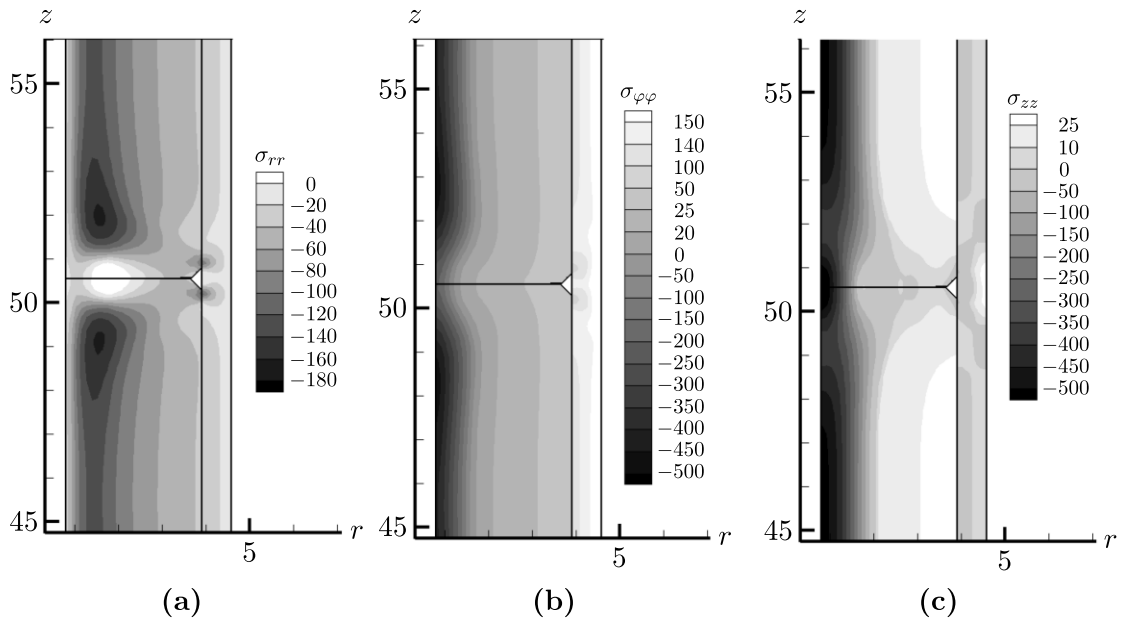


Рис. 1. Распределения напряжений в расчёте с растрескиванием таблеток: (a) — радиальных, (b) — окружных, (c) — осевых

Из распределения радиальных напряжений видно, что в местах контакта с оболочкой углов фасок таблеток ($z = 50.5$) возникают концентраторы напряжений: в этих зонах контактные давления (в зависимости от степени подробности сетки) могут в несколько раз превосходить значения давлений в центральных зонах.

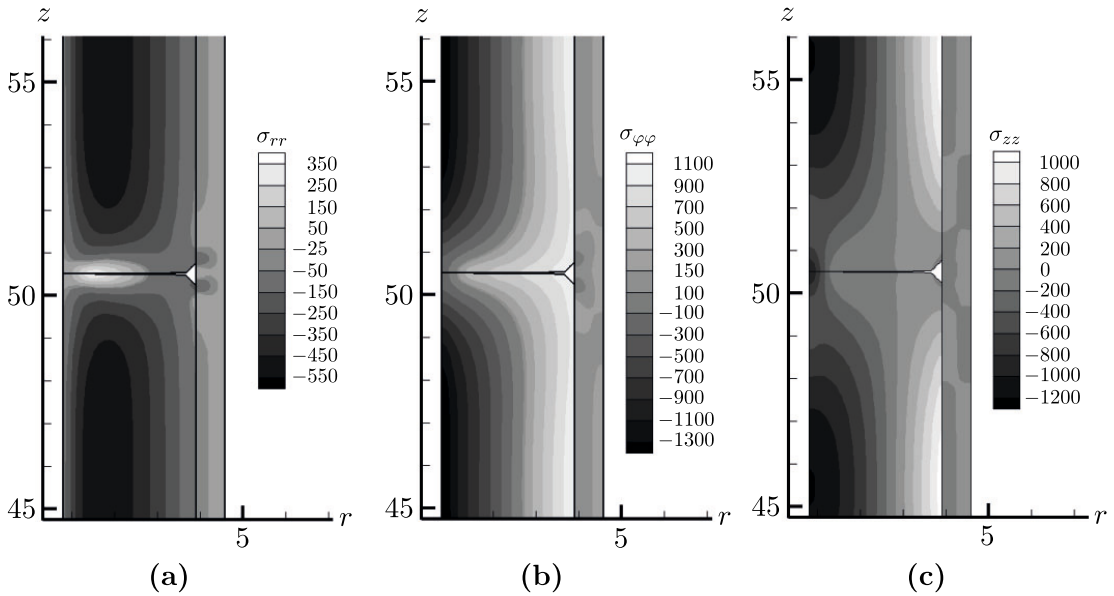


Рис. 2. Распределения напряжений в расчёте без растрескивания таблеток: (a) — радиальных, (b) — окружных, (c) — осевых

Сравнение рисунков показывает, что, если считать материал таблеток термоупругим, то в результате нагрева ближе к внешней поверхности таблеток возникают огромные растягивающие окружные и осевые напряжния (порядка 1 ГПа), что является физически недостоверным (реальный материал не выдерживает таких нагрузок). Использованная модель растрескивания позволяет снизить уровень растягивающих напряжений до 20–30 МПа, при этом в разы уменьшается и уровень сжимающих напряжений.

На рис. 3 показаны графики распределений интенсивности пластических деформаций ε_i^p вдоль внутренней поверхности оболочки в расчётах, в которых начальный зазор δ_{0n} между таблетками и оболочкой принимал значения 0 (верхний график), 0.01 (средний график) и 0.02 мм (нижний график). Увеличение зазора приводит к уменьшению величины контактного давления, которое действует со стороны таблеток на оболочку и, следовательно, к уменьшению величины пластических деформаций.

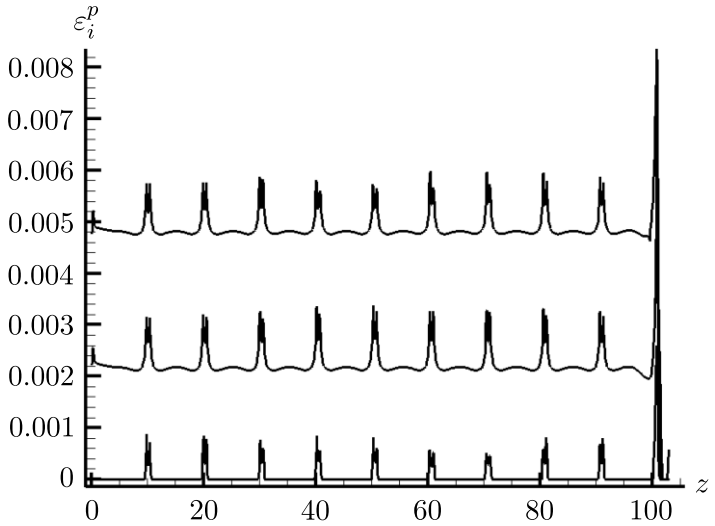


Рис. 3. Распределения интенсивности пластических деформаций в расчётах с различными величинами начальных зазоров

На рис. 3 видно, что для нулевого зазора среднее значение интенсивности пластических деформаций составляет 0.48%, в местах контакта углов фасок наблюдаются локальные максимумы деформации. Для величины зазора 0.01 среднее значение интенсивности пластических деформаций уменьшается до 0.22%, для величины зазора 0.02 пластические деформации образуются только на участках возле контакта углов фасок таблеток.

Показанные результаты расчётов демонстрируют возможность разработанного термомеханического модуля решать сложные мультиконтактные многомерные задачи с учётом различных неупругих деформаций, образующихся в моделируемых телах.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ БЛЕСКА ДВОЙНЫХ ЗВЁЗДНЫХ СИСТЕМ

Другая сфера применения платформы Теметос — моделирование течений газа в астрофизических объектах, в частности, в аккреционных дисках двойных звёздных систем [9]. В задачах астрофизики, которые предусматривают необходимость сопоставления подробной математической модели удалённого объекта с имеющими существенно ограниченное разрешение результатами наблюдений, важно не только провести расчёт параметров течений газа, но и вычислить интегральные характеристики, доступные к регистрации в эксперименте.

К таким характеристикам, например, относится интегральный по звёздной системе поток энергии излучения в зависимости от времени — кривая блеска. Кривые блеска ряда астрофизических объектов, таких как, например, PHL1445 [10] и V1239Her [11] имеют ряд особенностей, для объяснения которых необходимо исследовать внутреннюю структуру течения газа между компонентами двойной звёздной системы. В этом случае задача платформы Теметос состоит в объединении нескольких программных средств, позволяющих решать задачи как газовой динамики, так и теории переноса излучения, таким образом, чтобы в ходе исследования можно было и рассмотреть модель внутренних механизмов поведения звёздной системы, и показать зависимость наблюдательных проявлений от этих механизмов.

Примером спорного механизма является, например, характер взаимодействия струи плазмы, истекающей с поверхности звезды-донора через внутреннюю точку Лагранжа L_1 в полость Роша звезды-аккретора, с аккреционным диском — вращающимся облаком плазмы вокруг аккретора. Обычно рассматриваются два основных варианта. Первый — взаимодействие через образование небольшой области ударного торможения струи, так называемого „горячего пятна“ (см., например, [10, 12]). Второй — образование контактного разрыва и боковой ударной волны в протяжённой области слияния струи и диска, так называемой „горячей линии“ (см. [13], а также рис. 4).

Результаты трёхмерного газодинамического моделирования аккреционных дисков в работах [9, 14] не дают оснований для использования модели горячего пятна при построении синтетической кривой блеска. Расчёт гидродинамики взаимодействия струи, истекающей из точки L_1, и аккреционного диска показывает, что вход струи в диск происходит безударным образом. В месте слияния диска и струи образуется „горячая линия“, связанная с формированием ударной волны на всём протяжении струи вследствие набегания на струю вещества диска. Обтекание сверхзвуковым потоком вещества диска плотной и холодной струи и приводит к возникновению боковой ударной волны — горячей линии.

С использованием платформы Теметос построена модель кривой блеска системы PHL1445 [10, 12].

Рассмотрим трёхмерную гидродинамическую модель аккреционного диска вместе со струёй, истекающей из точки L_1 и являющейся для него источником вещества. Кроме того, элементами модели, дающими вклад в блеск системы, будем считать звезду-донор (коричневый карлик), а также аккретор (белый карлик). При этом, поскольку нас больше всего интересуют моменты времени (фазы вращения системы) в окрестности затмения, использование газодинамической модели в указанных в [9] предположениях (невязкий частично-ионизованный газ,

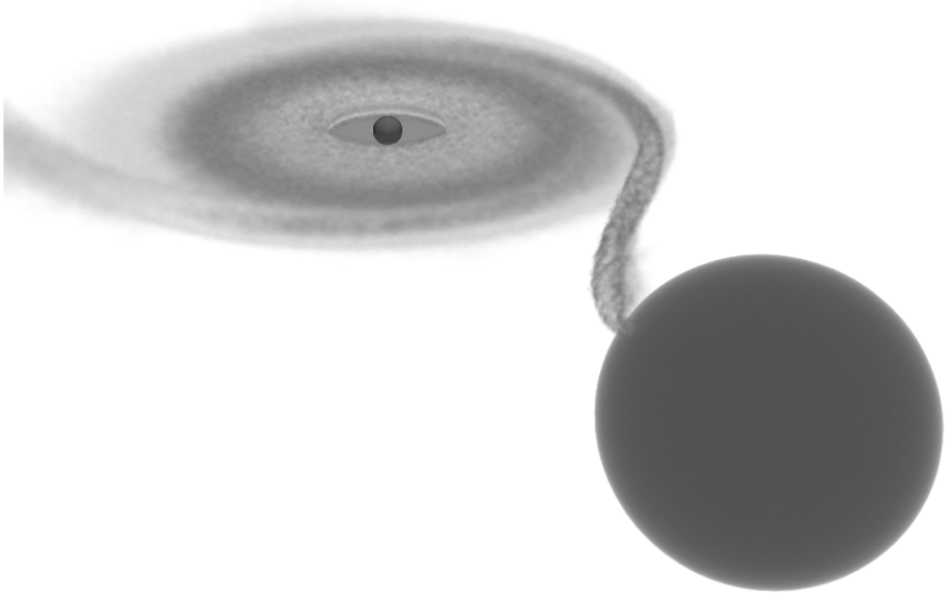


Рис. 4. Модель двойной звёздной системы с аккреционным диском

функция охлаждения чистого водорода) может оказаться недостаточным. Поэтому заменим внутреннюю часть расчётной области газодинамической модели (радиусом $\approx 4\ R_{wd}$ с центром в аккреторе) на модельный тонкий диск с заданным потоком излучения с его поверхности.

Газодинамическая модель аккреционного диска строится на базе следующих предположений:

- течение частично-ионизованной водородной плазмы описывается системой уравнений динамики сжимаемого газа;
- самогравитация газа и воздействие магнитного поля не учитываются;
- плазма рассматривается как идеальный невязкий газ, нагревание которого происходит только за счёт преобразования гравитационной энергии аккрецирующего вещества во внутреннюю энергию газа;
- охлаждение газа происходит за счёт радиационных потерь в оптически тонкой среде.

2.1. Математическая модель

В соответствии со сделанными предположениями математическая модель включает в себя следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\vec{v} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{v}\vec{v} + p\hat{I}\right) = -\rho\vec{\nabla}\Phi + 2\rho\vec{v}\times\vec{\Omega}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\,(e+p)) = -\rho\vec{\nabla}\Phi\cdot\vec{v} - \Lambda(\rho,T), \tag{8}$$

где ρ — плотность, $\vec{v}$ — скорость, p — давление, e — полная энергия единицы объёма газа, $\vec{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения системы, $\Lambda(\rho,T)$ – функция радиационного охлаждения газа из [9], T — температура, гравитационный потенциал Роша

$$\Phi = -\frac{GM_d}{\|\vec{r}-\vec{r}_d\|} - \frac{GM_a}{\|\vec{r}-\vec{r}_a\|} - \frac{1}{2}\|\vec{\Omega}\times(\vec{r}-\vec{r}_c)\,\|^2, \tag{9}$$

$\vec{r}$ — радиус-вектор, M_d, M_a — массы компонент звёздной системы, $\vec{r}_d$, $\vec{r}_a$ — их радиус-веторы, $\vec{r}_c$ — радиус-вектор центра тяжести системы, G — гравитационная постоянная. Система уравнений газовой динамики замыкается уравнением состояния частично ионизованного газа в виде [15]

$$e = \frac{3}{2}p + \rho\frac{\mathrm{Ry}}{m_p}i + \frac{\rho\|\vec{v}\|^2}{2}, \quad p = \rho kT\frac{1+i}{m_p}, \tag{10}$$

$$i = \left[1 + p\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_e}\right)^{3/2}(kT)^{-5/2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{Ry}/kT}\right]^{-1/2}, \tag{11}$$

где i — степень ионизации, ε — удельная внутренняя энергия газа, k — постоянная Больцмана, $\hbar$ — приведённая постоянная Планка, Ry — энергия активации Ридберга, m_p и m_e — массы протона и электрона соответственно.

Для численного решения задачи моделирования течения плазмы в аккреционном диске использован трёхмерный решатель, описанный в [9,14]. Он предполагает использование метода типа конечных объёмов для неструктурированных тетраэдральных сеток с интегрированием потоков на гранях ячеек с применением модифицированного HLLC решателя для газодинамической задачи Римана. Учёт радиационного охлаждения на каждом шаге интегрирования системы уравнений производится путём дополнительного дробления шага и решения уравнения для энергии с функцией охлаждения в правой части методом Дормана—Принса 5(4) [16]. Программный комплекс распараллелен с использованием разбиения расчётной области на подобласти и технологии MPI. Расчёты выполнены на кластере К-60 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН с использованием вплоть до 500 вычислительных ядер.

2.2. Расчёт синтетической кривой блеска

Для вычисления потока энергии от системы и формирования кривой блеска применён следующий подход. Полный поток энергии F, получаемый от звёздной системы, может быть получен в результате вычисления интеграла вида

$$F = \int_S I(x,y)\,\frac{dS}{d^2}\,,$$

где $I(x,y)$ — интенсивность излучения в плоскости, перпендикулярной оси зрения (картинной плоскости), x и y — координаты в этой плоскости, d — расстояние до источника.

Интенсивность $I(x,y)$ может быть получена из уравнения переноса излучения интегрированием вдоль луча, связывающего наблюдателя с моделируемой системой:

$$I(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{\bar{\Lambda}(x,y,z)}{4\,\pi} e^{-\tau(x,y,z)}dz,$$
$$\tau(x,y,z) = \int_0^{z} \alpha_{\mathrm{Pl}}(\rho(x,y,z), T(x,y,z))ds',$$

где z — координата вдоль луча зрения, $\bar{\Lambda}$ — функция охлаждения Λ, усреднённая по газодинамическому временному шагу, τ — оптическая толща среды между наблюдателем и текущей точкой, α_{Pl} — усреденный по Планку коэффициент поглощения.

Коэффициент поглощения α_{Pl} принят равным бесконечности на поверхностях звезды-донора и аккретора, а также на поверхности тонкого диска вокруг аккретора. Во всех остальных точках, как и в [9], эта величина получается усреднением по Планку с использованием данных из газодинамического расчёта об излучённом потоке энергии:

$$\alpha_{\mathrm{Pl}}(\rho,T) = \frac{\Lambda(\rho,T)}{4\sigma_{\mathrm{SB}}T^4},$$

где σ_{SB} — постоянная Стефана—Больцмана.

При прохождении луча через поверхность донора, аккретора или тонкого диска в окрестности аккретора, интегрирование уравнения переноса прекращалось и для соответствующей точки картинной плоскости задавалась интенсивность, соответствующая объекту на луче зрения. При этом поверхность донора не совпадает с поверхностью его полости Роша. Радиус донора взят равным 0.9 от размера полости Роша в направлении оси вращения системы.

2.3. Результаты моделирования

Проведено 3D газодинамическое моделирование истечения газа из окрестности точки L_1 в полость Роша аккретора, соответствующего системе PHL1445. При обезразмеривании модели (6)–(11) в качестве масштабов основных величин выбраны расстояние между компонентами $a = 0.55R_\odot$, где $R_\odot$ — радиус Солнца, период обращения системы $T_{orb} = 76.3$ мин., плотность газа $\rho_0 = 10^{-10}$ г/см^3. Массы компонент: масса донора $M_d = 0.064M_\odot$ и масса аккретора $M_a = 0.73M_\odot$, где $M_\odot$ — масса Солнца.

Аккреционный диск формируется примерно за 5 орбитальных периодов. Трёхмерное изображение аккреционного диска вместе с донором, аккретором и тонким диском в случае положения диска в экваториальной плоскости в момент времени $t = 5$ приведено на рис. 4.

Средняя толшина диска равна 0.06, отношение толщины диска к диаметру — 1/10. Характерными чертами течения являются отошедшая ударная волна и уплотнение струи при входе в диск. Газ в диске является холодным (его температура слабо меняется внутри диска и не превосходит $5 \cdot 10^3$ K) и достаточно слабо ионизованным (коэффициент ионизации в диске не превышает 0.2).

Видно, что вход струи в диск является безударным, струя существенно отклоняется как действием сил инерции, так и давлением вещества диска на боковую поверхность. Область взаимодействия струи и диска тонкая и протяжённая, что не позволяет говорить о наличии горячего пятна. При этом распределение плотности показывает, что существенная часть вещества диска срывается с его поверхности, совершая полный оборот после попадания в диск из струи. В районе отошедшей ударной волны толщина диска увеличивается, что создаёт своего рода газовую оболочку вокруг этой части диска и струи, исходящей из точки L_1.

За счёт столкновения с обтекающей „оболочкой“ на наветренной стороне струи образуется сильно излучающая кромка. Выделяемая на этой кромке энергия сравнима с энерговыделением в центральных областях диска. Это означает, что кромка должна быть хорошо различима на наблюдательных кривых блеска, особенно после затмения. Действительно, как правило, на кривых блеска сразу после затмения имеется своеобразная „полка“, что связано с выходом указанной кромки из затмения (см. рис. 5). Положение этой „полки“ позволяет определять положение струи относительно аккретора, а следовательно — скорость струи в точке L_1. Чем ближе полка к фазе затмения, тем выше скорость струи.

Плотность вещества струи в точке L_1 выбрана так, чтобы темп перетока массы между компонентами составлял $\dot{M}_s \approx \eta \cdot 10^{-11}\, M_\odot$ год$^{-1}$, где $\eta = 0.68$; 0.91; 1.13; 1.36 для скоростей $v = 150$; 200; 250; 300 км/с соответственно. Выбранные сравнительно высокие скорости течения газа в точке L_1 сравнимы с орбитальной скоростью системы $\sqrt{G\frac{M_a+M_d}{a}} \approx 532.8$ км/с. Отметим, что в работе [17], где моделировалось свободное истечение плазмы с поверхности донора, соотношение между орбитальной скоростью и скоростью плазмы в точке L_1 оказалось аналогичным.

Полученные синтетические кривые блеска показывают хорошее соответствие между результатами моделирования и усреднёнными данными наблюдений. Синтетическая кривая блеска, как и наблюдательные кривые, является асимметричной. Анализ вклада компонент (аккреционный диск, аккретор, донор, тонкий диск) в итоговую кривую блеска показывает, что такой характер кривой обеспечивается асимметрией блеска аккреционного диска, который после затмения оказывается несколько прикрыт срывающейся с его поверхности оболочкой.

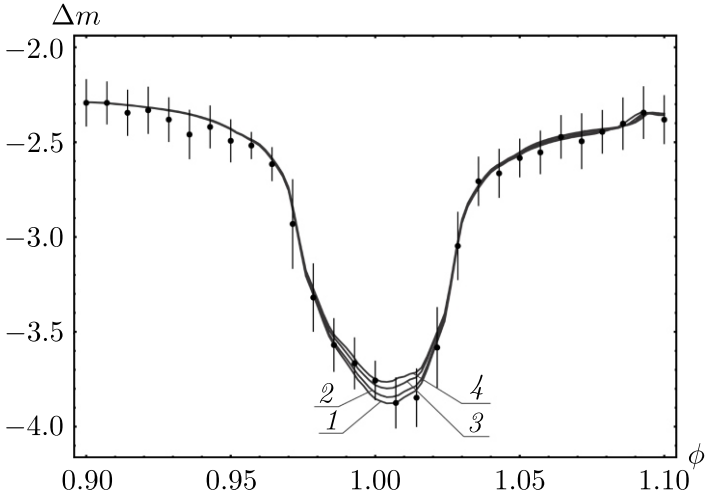


Рис. 5. Кривые блеска (зависимость светимости Δm от фазы ϕ) для различных скоростей струи в точке L_1: *1* — 300 км/с, *2* — 250 км/с, *3* — 200 км/с, *4* — 150 км/с. Наблюдательные данные отмечены чёрными точками с указанием средней погрешности

Как уже было отмечено, наличие оболочки обусловлено характером обтекания струи веществом диска. Также, по-видимому, на формирование срыва газа с поверхности диска влияет относительно высокая скорость струи в точке L_1 — при уменьшении скорости втекания кривая становится более симметричной.

Видно формирование „полки“ после затмения, тем более резкой, чем выше скорость газа в точке L_1. В то же время соответствие между наблюдательными и синтетическими кривыми блеска достигается за счёт высокой скорости потока в точке L_1. Положение полки и минимума на рис. 5 могут быть сдвинуты вправо по оси фаз (как это имеет место в наблюдениях) либо за счёт высокой скорости струи в точке L_1, либо в случае приближения области взаимодействия струи и диска к аккретору. При положении диска в экваториальной плоскости системы в случае отсутствии вязкости работает только первый механизм.

2.4. Случай наклонного диска

Расчёты показали, что несмотря на положение струи, истекающей от донора, в экваториальной плоскости системы, в системе возможно формирование наклонного по отношению к этой плоскости аккреционного диска. Наклон диска развивается по следующему сценарию.

В начальный момент времени расчётная область заполнена газом низкой плотности, что с одной стороны необходимо для обеспечения корректности моделирования в рамках модели газовой динамики, а с другой выглядит естественным в силу существования слабого ветра от донора, распространяющегося во всех направлениях, а не только через внутреннюю точку Лагранжа. Сразу после запуска расчёта этот газ формирует тонкую дисковую структуру, в которую входит струя, истекающая из точки L_1. Струя увеличивает массу этого диска, так что диск быстро отклоняет струю от её первоначального положения. Сдвиг струи в радиальном направлении составляет $0.1a$ в течение первого орбитального периода и $0.05a$ — в течение второго.

В процессе этого движения около верхней и нижней поверхностей диска вблизи входа в него струи формируются обратные вихри, неустойчивость и асимметричность которых приводит к наклону внутренней (лёгкой) части диска. Также к увеличению наклона в случае его возникновения приводит неоднородность распределения массы в диске и гравитационного поля аккретора, возмущённого донором (приливные силы). Угол наклона достигает 7°.

Сформировавшийся диск в течение одного орбитального периода практически не меняет своего наклона относительно наблюдателя и проходит все фазы вращения относительно

системы отсчёта, связанной с двойной звездой. Наклонный диск ретроградно прецессирует с периодом около 40–50 орбитальных периодов системы (см. рис. 6).

Наклон диска влияет на вид синтетических кривых блеска, получаемых путём интегрирования энерговыделения диска, аккретора и донора в направлении наблюдателя. Кривые блеска, соответствующие разным фазам прецессии, объясняют различие в характере затмения в разные дни наблюдений.

В большинстве наблюдений кривые блеска демонстрируют асимметричность в момент затмения, зачастую сопряжённую с формированием нисходящей ступеньки. Такие кривые соответствуют наклону диска в сторону донорской звезды, когда струя входит в верхнюю поверхность диска. Можно говорить о формировании горячего пятна на поверхности диска в некоторых фазах прецессии. Характерный вид кривых блеска в сопоставлении с наблюдениями и вид соответствующей фазы наклона диска в этом случае изображены в верхнем ряду на рис. 6.

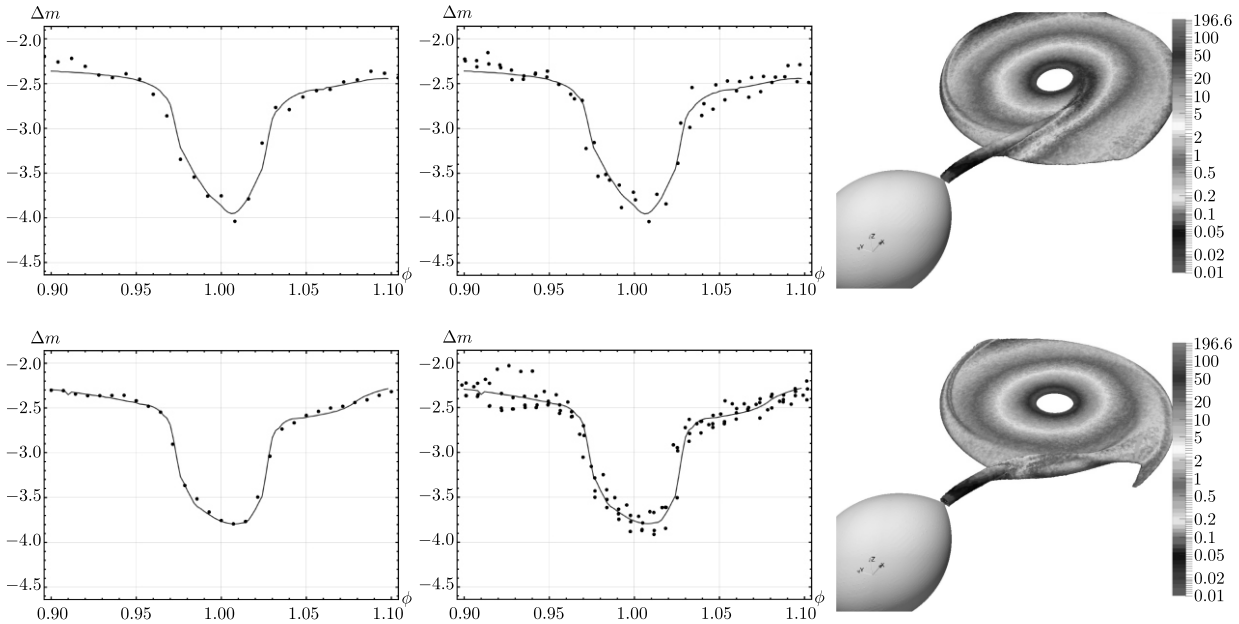


Рис. 6. Кривые блеска вместе с усреднёнными (левая панель) и полными (средняя панель) наблюдательными данными, а также поверхность уровня плотности в соответствующей фазе наклона диска с распределением усреднённой Λ (правая панель). Верхний ряд — случай формирования на поверхности диска горячего пятна, нижний — формирования на кромке диска горячей линии. Наблюдательные данные [18] даны точками

Более симметричные кривые без формирования ярко выраженной ступеньки соответствуют проходу диска через нейтральное положение в экваториальной плоскости. Этот вариант больше соответствует представлениям о формировании на кромке диска горячей линии [13]. Характерный вид кривых блеска в сопоставлении с наблюдениями и соответствующая фаза наклона диска в этом случае изображены в нижнем ряду на рис. 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена платформа Теметос и её возможности по решению задач механики сплошной среды. В частности, рассмотрен термомеханичекий модуль, позволяющий решать контактные задачи, возникающие при моделировании тепловыделяющих элементов атомных реакторов. Показано, что использование моделей с учётом растрескивания позволяет существенно снизить эффективные напряжения в топливной таблетке.

Также представлены результаты моделирования кривых блеска двойной звёздной системы с использованием совместно газодинамического модуля и модуля, реализующего трассировку лучей через триангулированную пространственную область. В ходе расчётов получен как стандартный режим формирования аккреционного диска в экваториальной плоскости звёздной системы, так и режим с образованием наклонного диска. Последний позволяет интерпретировать индивидуальные кривые блеска.

Результаты расчётов моделей хорошо соответствуют наблюдениям, а платформа Теметос позволяет как анализировать скрытые механизмы, объясняющие поведение технических систем и физических явлений, так и проводить прямое сопоставление результатов моделирования с наблюдательными данными. При этом важными являются и средства платформы для подготовки и проведения расчётов, и её возможности, связанные с постобработкой результатов моделирования и их визуализации (в широком смысле).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галанин М. П., Горбунов-Посадов М. М., Ермаков А. В., Лукин В. В., Родин А. С., Шаповалов К. Л.* Прототип интегрированной программной платформы для сопровождения вычислительного эксперимента в комплексных задачах математического моделирования // Труды ИСП РАН. 2014. Т. 26, № 3. С. 51–68; DOI: 10.15514/ISPRAS-2014-26(3)-2
2. *Галанин М. П., Лукин В. В., Родин А. С., Сорокин Д. Л.* Применение программной платформы Теметос для разработки среды моделирования электромагнитного ускорителя // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. Статья 44; DOI: 10.20948/prepr-2018-44
3. *Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: МГТУ, 2008.
4. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics. Heidelberg: Springer, 2006; DOI: 10.1007/978-3-540-32609-0
5. *Hagrman D. L., Reymann G. A.* A handbook of materials properties for use in the analysis of lightwater reactor fuel rod behavior. Idaho: INEL, 1979.
6. *Toselli A., Widlund O.* Domain Decomposition methods — Algorithms and Theory. Heidelberg: Springer, 2005; DOI 10.1007/b137868
7. *Галанин М. П., Родин А. С.* Исследование и применение метода декомпозиции области для моделирования тепловыделяющего элемента // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 4. С. 659–676; DOI: 10.31857/S004446692204007X
8. *Suzuki M., Saitou H.* Light water reactor fuel analysis code FEMAXI-6 (Ver.1); Detailed structure and user's manual. Tokai: JAEA, 2006; DOI: 10.11484/JAEA-Data-Code-2005-003
9. *Lukin V. V., Malanchev K. L., Shakura N. I., Postnov K. A., Chechetkin V. M., Utrobin V. P.* 3D-modeling of accretion disc in eclipsing binary system V1239 Her // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2017. V. 467, N 3. P. 2934–2942.; DOI: 10.1093/mnras/stx309
10. *Savoury C. D. J., Littlefair S. P., Dhillon V. S., Marsh T. R., Gaensicke B. T, Copperwheat C. M., Kerry P., Hickman R. D. G., Parsons S. G.* Cataclysmic variables below the period gap: mass determinations of 14 eclipsing systems // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2011. V. 415, N 3. P. 2025–2041; DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.18707.x
11. *Khruzina T. S., Golysheva P. Y., Katysheva N. A., Shugarov S. Y., Shakura N. I.* The Dwarf Nova V1239 Herculis In Quiescence // Astron. Rep. 2015. V. 59, N 4. P. 288–312; DOI: 10.1134/S1063772915040034
12. *McAllister M. J., Littlefair S. P., Baraffe I., Dhillon V. S., Marsh T. R., Bento J., Bochinski J., Bours M. C. P., Breedt E., Copperwheat C. M., Hardy L. K., Kerry P., Parsons S. G., Rostron J. W., Sahman D. I., Savoury C. D. J., Tunnicliffe R. L.* PHL 1445: an eclipsing cataclysmic variable with a substellar donor near the period minimum // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2015. V. 451, N 1. P. 114–125; DOI: 10.1093/mnras/stv956
13. *Bisikalo D. V., Boyarchuk A. A., Chechetkin V. M., Kuznetsov O. A., Molteni D.* Three-dimensional numerical simulation of gaseous flow structure in semidetached binaries // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1998. V. 300, N 1. P. 39–48; DOI: 10.1046/j.1365-8711.1998.01815.x

14. *Galanin M. P., Lukin V. V., Chechetkin V. M.* 3D hydrodynamical simulation of accretion disk in binary star system using RKDG CFD solver // J. Phys. Conf. Ser. 2018. V. 1103. Article 012019; DOI: 10.1088/1742-6596/1103/1/012019

15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Статистическая физика. Часть I. М.: Наука, 1976.

16. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

17. *Nagae T., Oka K., Matsuda T., Fujiwara H., Hachisu I., Boffin H. M. J.* Wind accretion in binary stars I. Mass accretion ratio // Astron. Astrophys. 2004. V. 419. P. 335–343; DOI: 10.1051/0004-6361:20040070

18. *Голышева П. Ю.* Фотометрические исследования катаклизмических переменных звёзд: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.03.02. М.: МГУ, 2020.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.63

TEMETOS SOFTWARE PLATFORM AND ITS APPLICATIONS IN PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

© 2023 **M. P. Galanin[a], V. V. Lukin[b], A. S. Rodin[c]**

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia

E-mails: [a]galan@keldysh.ru, [b]vvlukin@gmail.com, [c]rals@bk.ru

Received 08.08.2023, revised 27.10.2023, accepted 15.11.2023

Abstract. The Temetos platform is designed to conduct computational experiments at all stages of analysis and study of continuum mechanics models. A module has been developed to study the stress-strain state of a system of bodies with allowance for inelastic strains and contact interaction. It was used to analyze a fuel element that included up to 100 fuel pellets and a shell. The platform's solvers are applied to astrophysics problems. Models of the formation of accretion disks in binary star systems that allow the interpretation of observation results are constructed.

Keywords: mathematical modelling, Temetos software platform, continuum mechanics, computational experiment.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.402

REFERENCES

1. M. P. Galanin, M. M. Gorbunov-Posadov, A. V. Ermakov, V. V. Lukin, A. S. Rodin, and K. L. Shapovalov, "A prototype of an integrated software platform to support computational experiments in complex mathematical modeling problems," Tr. Inst. Sist. Progr. Ross. Akad. Nauk **26** (3), 51–68 (2014). https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2014-26(3)-2
2. M. P. Galanin, V. V. Lukin, A. S. Rodin, and D. L. Sorokin, "Application of the Temetos software platform for the development of an electromagnetic accelerator simulation environment," Preprint no. 44 (Moscow: Keldysh Inst. Appl. Math. Russ. Acad. Sci., 2018). https://doi.org/10.20948/prepr-2018-44
3. V. S. Zarubin and G. N. Kuvyrkin, *Mathematical Models of Continuum Mechanics and Electrodynamics* (MGTU, Moscow, 2008) [in Russian].
4. P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics* (Springer, Heidelberg, 2006). https://doi.org/10.1007/978-3-540-32609-0
5. D. L. Hagrman and G. A. Reymann, *A Handbook of Materials Properties for Use in the Analysis of Lightwater Reactor Fuel Rod Behavior* (INEL, Idaho, 1979).
6. A. Toselli and O. Widlund, *Domain Decomposition methods — Algorithms and Theory* (Springer, Heidelberg, 2005). https://doi.org/10.1007/b137868
7. M. P. Galanin and A. S. Rodin, "Investigation and application of the domain decomposition method for simulating fuel elements," Comput. Math. Math. Phys. **62** (4), 641–657 (2022). https://doi.org/10.1134/S0965542522040078
8. M. Suzuki and H. Saitou, "Light water reactor fuel analysis code FEMAXI-6 (Ver.1); Detailed structure and user's manual," (JAEA, Tokai, 20060). https://doi.org/10.11484/JAEA-Data-Code-2005-003
9. V. V. Lukin, K. L. Malanchev, N. I. Shakura, K. A. Postnov, V. M. Chechetkin, and V. P. Utrobin, "3D-modeling of accretion disc in eclipsing binary system V1239 Her," Mon. Not. R. Astron. Soc. **467** (3), 2934–2942 (2017). https://doi.org/10.1093/mnras/stx309

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 724–736.

10. C. D. J. Savoury, S. P. Littlefair, V. S. Dhillon, T. R. Marsh, B. T. Gaensicke, C. M. Copperwheat, P. Kerry, R. D. G. Hickman, and S. G. Parsons, "Cataclysmic variables below the period gap: Mass determinations of 14 eclipsing systems," Mon. Not. R. Astron. Soc. **415** (3), 2025–2041 (2011). https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18707.x

11. T. S. Khruzina, P. Y. Golysheva, N. A. Katysheva, S. Y. Shugarov, and N. I. Shakura, "The dwarf nova V1239 herculis in quiescence," Astron. Rep. **59** (4), 288–312 (2015). https://doi.org/10.1134/S1063772915040034

12. M. J. McAllister, S. P. Littlefair, I. Baraffe, V. S. Dhillon, T. R. Marsh, J. Bento, J. Bochinski, M. C. P. Bours, E. Breedt, C. M. Copperwheat, L. K. Hardy, P. Kerry, S. G. Parsons, J. W. Rostron, D. I. Sahman, C. D. J. Savoury, and R. L. Tunnicliffe, "PHL 1445: An eclipsing cataclysmic variable with a substellar donor near the period minimum," Mon. Not. R. Astron. Soc. **451** (1), 114–125 (2015). https://doi.org/10.1093/mnras/stv956

13. D. V. Bisikalo, A. A. Boyarchuk, V. M. Chechetkin, O. A. Kuznetsov, and D. Molteni, "Three-dimensional numerical simulation of gaseous flow structure in semidetached binaries," Mon. Not. R. Astron. Soc. **300** (1), 39–48 (1998). https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1998.01815.x

14. M. P. Galanin, V. V. Lukin, and V. M. Chechetkin, "3D hydrodynamical simulation of accretion disk in binary star system using RKDG CFD solver," J. Phys. Conf. Ser. **1103**, 012019 (2018). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1103/1/012019

15. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theoretical Physics. Statistical Physics. Part I* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].

16. E. Hairer, S. P. Norsett, and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations. Part I. Nonstiff Problems* (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York—London—Paris—Tokyo, 1987; Mir, Moscow, 1990).

17. T. Nagae, K. Oka, T. Matsuda, H. Fujiwara, I. Hachisu, and H. M. J. Boffin, "Wind accretion in binary stars I. Mass accretion ratio," Astron. Astrophys. **419**, 335–343 (2004). https://doi.org/10.1051/0004-6361:20040070

18. P. Yu. Golysheva, "Photometric studies of cataclysmic variables," *Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation,* (Moscow State Univ. Moscow, 2020) [in Russian].

УДК 539.3:517.958

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В РАЗНОМОДУЛЬНОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НА ЭТАПЕ ПРИНУДИТЕЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ ЕГО ГРАНИЦЫ ПОСЛЕ ОДНООСНОГО РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ

© 2023 О. В. Дудко[a], А. А. Лаптева[b], В. Е. Рагозина[c]

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, г. Владивосток 690041, Россия

E-mails: [a]dudko@iacp.dvo.ru, [b]lanastal@mail.ru, [c]ragozina@vlc.ru

Поступила в редакцию 01.06.2023 г.; после доработки 10.07.2023 г.; принята к публикации 09.08.2023 г.

Исследуется эволюция волновой картины в разномодульном упругом полупространстве при нестационарном одноосном кусочно-линейном движении его границы в режиме «растяжение — сжатие — останов». В решение краевой задачи включаются все случаи взаимодействия плоских волн деформаций, в том числе отражённых фронтов малой интенсивности. Выявлен ряд новых особенностей динамики одномерного упругого деформирования разномодульной среды, некоторые из которых (например, появление отражённой ударной волны на удалении от нагружаемой границы, циклические переходы узкой движущейся зоны от сжатого состояния в жёсткое и обратно, ступенчатое снижение уровня деформаций растяжения в приграничной зоне после остановки границы) можно получить при заданном граничном воздействии только с учётом эффектов отражения.

Ключевые слова: разномодульная упругость, нестационарное деформирование, кусочно-линейное краевое условие, одноосное растяжение-сжатие, принудительная остановка, сильный разрыв, столкновение волн деформаций, отражённая ударная волна.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.403

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что многие природные и конструкционные материалы в той или иной степени анизотропны. Одна из форм проявления анизотропии — разномодульность упругих свойств. Такое поведение характерно, например, для горных пород [1], различных композитов [2–4], некоторых металлических сплавов [5], дерева [6], кости [7] и т.д. Как правило, разномодульность твёрдых сред связывают с особенностями их внутренней структуры (микронеоднородностью, микровключениями, микронарушениями сплошности и т.п.).

Механика сплошных сред описывает деформируемые материалы на макроскопическом уровне. Гипотеза сплошности совместно с другими упрощающими предположениями относительно механических свойств среды (изотропией, однородностью, линейной гиперупругостью и т.п.) позволяет решать достаточно широкий круг статических и динамических задач деформирования [8], но при этом упускает из рассмотрения часть важных особенностей, связанных с внутренним строением реальных материалов. В определённом смысле переходным звеном между микро – и макро – подходами являются физико-механические модели сплошной среды, в которых частичный учёт структуры происходит за счёт специальных математических приёмов. Известные модели разномодульных сред основаны, например, на зависимости упругих модулей от напряжённо-деформированного состояния [9–11], неаналитических формах упругого потенциала [12, 13], особых конфигурациях реологических схем [14, 15] и т.д. Ключевым моментом в данных моделях является сохранение гипотезы сплошности.

Динамическое деформирование сред с разномодульной неаналитической нелинейностью в окрестности свободного состояния и материалов с гладкой связью «напряжения-деформации» имеет качественные различия. Так, в [16,17] на примере анализа в терминах малого параметра показано, что даже слабая разномодульность приводит к отличиям нелинейной динамики плоских упругих волн от известных результатов классической (линейной) теории упругости. Поэтому тем более интересным в нестационарных задачах упругого деформирования представляется учёт разномодульности без ограничения малости этого эффекта. В нашей работе для описания разномодульных свойств принят неаналитический трехконстантный упругий потенциал [12], обобщённый в [13] до пятиконстантного варианта. Согласно [13], параметры разномодульности этих моделей не всегда могут считаться малыми относительно двух упругих модулей линейной части модельных соотношений. Исходя из этого, как и ранее [18–20], будем рассматривать динамику деформирования разномодульной упругой среды без привлечения приближенных методов малого параметра [21].

В [18] показано, что при одноосном нагружении разномодульная упругая среда [12] ведёт себя как линейная в зонах с неизменным типом деформированного состояния и имеет разные характеристические скорости процессов растяжения и сжатия. Физическая нелинейность выбранной модели в этом случае проявляется в образовании разнотипных (в том числе ударных) плоских волн деформаций. Даже двигаясь в одном направлении, фронты растяжения и сжатия могут взаимодействовать из-за разницы в их скоростях. Эта особенность динамики одномерных деформаций, отмеченная в [17, 19, 22], является общим физическим свойством разномодульной упругой среды и не зависит от выбора модели. Единственное попутное столкновение волновых фронтов, произошедшее на начальном этапе деформирования, может инициировать цепочку отражений и взаимодействий плоских волн друг с другом и с границами среды, увеличивая тем самым сложность волновой картины с течением времени. Подобные ситуации рассматривались в [19,20,22] для разномодульно-упругих полуограниченных тел при кусочно-линейном одномерном движении их границ в различных режимах, не имеющих этапов останова. Такая идеализация позволила представить процесс построения решения одномерных краевых задач динамики деформирования разномодульной упругой среды в форме алгоритма [20], работающего на произвольных временах.

В настоящей работе рассмотрим более реалистичный сценарий нестационарного одноосного нагружения разномодульного упругого полупространства, а именно, принудительную фиксацию его границы после предварительного знакопеременного импульса растяжения-сжатия. При этом сосредоточим основное внимание на новых, не отмеченных ранее особенностях, связанных с эффектами взаимодействия и отражения волновых фронтов. Покажем, что даже на этапе останова продолжает существовать и эволюционировать сложная волновая система, которая динамически перераспределяет деформации и перемещения в окрестности жёстко закреплённой границы разномодульного упругого полупространства.

1. МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим динамику адиабатического деформирования изотропной разномодульной упругой среды [12], предполагая малость деформаций и тем самым уравнивая эйлерово и лагранжево представления. В этом случае система определяющих уравнений без учёта массовых сил имеет вид

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{\Sigma}=\rho\dot{\mathbf{v}},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\frac{\partial W(\epsilon_1,\epsilon_2)}{\partial\mathbf{e}},\quad \frac{\rho}{\rho_0}\approx 1-\epsilon_1,\quad \mathbf{e}=0.5\left(\nabla\otimes\mathbf{u}+(\nabla\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right),\\ \mathbf{v}=\dot{\mathbf{u}},\quad W(\epsilon_1,\epsilon_2)=0.5\lambda\epsilon_1^2+\mu\epsilon_2-\nu\epsilon_1\sqrt{\epsilon_2},\quad \epsilon_1=\mathrm{tr}(\mathbf{e}),\quad \epsilon_2=\mathrm{tr}(\mathbf{e}^2).\end{gathered}\tag{1}$$

В (1) все неизвестные функции зависят от декартовых координат $\mathbf{x}=\{x_1,x_2,x_3\}$ и времени t, $\boldsymbol{\Sigma}$ — тензор напряжений Коши, $\mathbf{e}$ — тензор малых деформаций с инвариантами ϵ_1 и ϵ_2, ρ/ρ_0 —

отношение актуальной и начальной плотности среды, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — вектор перемещений и вектор скорости перемещений точек среды соответственно, ∇ — набла-оператор, точкой над символом обозначена частная производная по времени. В упругом потенциале $W(\epsilon_1, \epsilon_2)$ константы λ, μ соответствуют линейной части модели, константа ν является параметром неаналитической нелинейности (разномодульности) модели [12] (для определённости выбираем материалы, у которых $\nu > 0$).

В одномерном случае малых деформаций ($x = x_1$, $\mathbf{u} = \{u(x,t), 0, 0\}$, $e = \partial u/\partial x = u_x$, $\rho \approx \rho_0$) из (1) можно записать линеаризованную форму уравнения движения и его решение в форме Д'Аламбера для продольного перемещения $u(x,t)$:

$$(c(e))^2 u_{xx} = \ddot{u}, \quad u(x,t) = f(t - x/c(e)) + g(t + x/c(e)). \tag{2}$$

В (2) неизвестные функции $f(t - x/c(e))$, $g(t + x/c(e))$ вычисляются с учётом краевых условий задачи. Характеристическая скорость $c(e)$ является кусочно-постоянной функцией деформаций и принимает различные значения в зависимости от типа деформированного состояния:

$$c(e) = \sqrt{\left(\lambda + 2\mu - 2\nu\frac{e}{|e|}\right)\rho^{-1}} = \begin{cases} a = \sqrt{(\lambda + 2\mu + 2\nu)\,\rho^{-1}}, & e < 0, \\ b = \sqrt{(\lambda + 2\mu - 2\nu)\,\rho^{-1}}, & e > 0, \end{cases} \quad \nu{>}0 \Rightarrow a{>}b. \tag{3}$$

При определённых краевых условиях (например, приложении разнополярного граничного импульса) решение уравнения движения (2) принимает обобщённую форму. Согласно [23], под обобщённым решением уравнения (2) будем понимать кусочно-гладкую функцию перемещений $u(x,t)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую дифференциальным законам сохранения всюду, кроме конечного числа плоских поверхностей сильных разрывов первого рода, на которых выполняются следствия интегральных законов сохранения. Таким образом, обобщённое решение объединяет зоны локальных решений, где перемещения гладкие и деформации непрерывные. Фронты сильных разрывов являются подвижными границами этих зон. Следствия интегральных законов сохранения — условия Гюгонио [23], связывающие локальные решения на плоском фронте сильного разрыва $x = D(t)$, для разномодульной упругой среды [12] с учётом малости деформаций можно записать в форме

$$\left((c^+)^2 - \dot{D}^2\right) e^+ = \left((c^-)^2 - \dot{D}^2\right) e^-, \tag{4}$$

$$u^- = u^+, \tag{5}$$

где $\dot{D} = \dot{D}(t)$ — скорость движения фронта $x = D(t)$, индексами «+» и «−» обозначены предельные значения функций в малых окрестностях $x \to D(t) \pm 0$ перед и за фронтом разрыва соответственно. Из уравнения (4) получаем общую формулу для скорости движения фронта сильного разрыва $x = D(t)$ в случае одномерных деформаций:

$$\dot{D}(t) = \sqrt{\frac{(c^+)^2 e^+ - (c^-)^2 e^-}{e^+ - e^-}}, \quad e^\pm = e^\pm(D(t), t). \tag{6}$$

Накладывая в (6) различные ограничения на значения e^+ и e^- ($e^+ \neq e^-$) аналогично [23], определяем свойства и скорости всех типов сильных разрывов, которые возможны в рамках линеаризованного варианта модели разномодульной упругой среды [12]:

1) если $e^+ e^- > 0$, то сильный разрыв движется с характеристической скоростью $\dot{D} = c^+ = c^-$, не изменяя тип деформированного состояния среды (т.е. $\dot{D} = b$ при $e^+ > 0$, $e^- > 0$; $\dot{D} = a$ при $e^+ < 0$, $e^- < 0$);

2) при $e^+ e^- = 0$ сильный разрыв движется с характеристической скоростью, но при этом он или является передним фронтом граничных возмущений ($e^+ = 0$, $e^- \neq 0$ и $\dot{D} = c^-$),

или переводит предварительно деформированную область в недеформированное состояние ($e^+ \neq 0$, $e^- = 0$ и $\dot{D} = c^+$);

3) если $e^+ > 0$ и $e^- < 0$, то сильный разрыв скачком изменяет тип деформаций с растяжения на сжатие и движется со скоростью $\dot{D} \in (b; a)$, отличной от характеристических скоростей (случай $e^+ < 0$ и $e^- > 0$ невозможен в силу требования неубывания энтропии на фронте сильного разрыва [24]).

Скорости перечисленных сильных разрывов, полученные из (6), согласуются с общей теорией решений уравнения движения разномодульной упругой среды [23]. Для обозначения сильных разрывов разных типов используем принятую в [23] терминологию и различные символы вместо $D(t)$: сильный разрыв первого типа — *простой разрыв* $x = \xi(t)$, второго типа — *полусигнотон* $x = \gamma(t)$, третьего типа — *ударная волна* $x = S(t)$. Аргумент t у функций-координат фронтов сильных разрывов для сокращения записи в дальнейшем будем опускать. Простые разрывы и полусигнотоны, которые движутся с характеристическими скоростями, пометим соответствующим нижним индексом: ξ_a, γ_a — быстрые фронты сжатия со скоростью a; ξ_b, γ_b — медленные фронты растяжения со скоростью b.

В [19, 20, 22] для разномодульной упругой среды показано, что взаимодействие двух попутных разнотипных фронтов сильных разрывов (когда более быстрый фронт настигает бегущий впереди более медленный) приводит к появлению пары расходящихся волн и новой зоны локального решения между ними. Таким образом, обобщённое решение уравнения (2) с переменной характеристической скоростью (3) может эволюционировать не только вследствие приложения динамической нагрузки на границе деформируемой среды, но и за счёт учёта всех эффектов столкновения и отражения волновых фронтов. Продемонстрируем это на примере решения нестационарной краевой задачи о движении границы разномодульного полупространства в режиме «растяжение — сжатие — останов». Описанную классификацию сильных разрывов используем в качестве исходных данных задачи.

2. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Полагаем, что до начала воздействия разномодульное упругое полупространство $x \geqslant 0$ было недеформированным. Пусть в момент времени $t = 0$ к границе $x = 0$ прикладывается нормальная нагрузка, которая при $t \in [0, t_2)$ действует в режиме одномерного растяжения, при $t \in [t_2, t_3)$ — в режиме одномерного сжатия, а с момента времени $t = t_3$ удерживает границу полупространства в одном положении.

Постановку задачи проведём в перемещениях. На рис. 1 представлены некоторые варианты кусочно-линейной функции граничного перемещения $u(0, t) = u_0(t)$, соответствующего указанному режиму нагружения «растяжение — сжатие — останов». Константой $K = u_0(t_3)$ обозначен уровень граничного перемещения, достигнутый к моменту остановки границы.

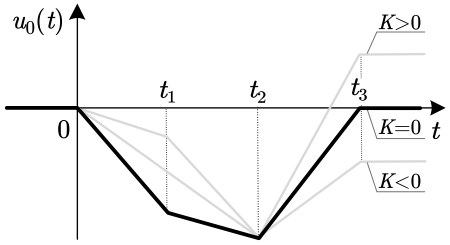


Рис. 1. Заданное граничное перемещение

Количество дополнительных узловых точек функции $u_0(t)$ на этапах растяжения и сжатия можно выбрать любым. Остановимся на четырехточечном варианте с одной дополнительной узловой точкой $t_1 \in (0; t_2)$ на этапе растяжения (рис. 1). Уравнение функции $u_0(t)$ запишем

через угловые коэффициенты линейных участков:

$$u_0(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0), \quad k_0 = 0, \\ k_1 t, & t \in [0, t_1), \quad k_1 < 0, \\ k_2(t - t_1) + u_0(t_1), & t \in [t_1, t_2), \quad k_2 < 0, \\ k_3(t - t_2) + u_0(t_2), & t \in [t_2, t_3), \quad k_3 > 0, \\ K = u_0(t_3), & t \in [t_3, +\infty), \quad k_4 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Задавая граничное перемещение (7), саму координату границы $x = 0$ при решении задачи будем считать неизменной ввиду принятого предположения о малости деформаций и линеаризованной формы уравнения движения (5).

При кусочно-линейном движении границы перемещение в некоторой i-ой локальной зоне можно записать в виде линейной функции, учитывающей обе части решения Д'Аламбера (2):

$$u_i(x,t) = A_i + B_i(t - T_i) + C_i x, \quad x \in [L_i(t); R_i(t)], \quad t \geqslant T_i, \quad i = 1, 2, 3 \ldots, \tag{8}$$

откуда

$$e_i(x,t) = \partial u_i(x,t)/\partial x = C_i.$$

В (8) $T_i \geqslant 0$ — момент времени возникновения i-ой локальной зоны, $L_i(t)$ и $R_i(t)$ — координаты её левой и правой границ: $L_i(t) = X_i + \dot{L}_i(t - T_i)$, $R_i(t) = X_i + \dot{R}_i(t - T_i)$, причём $L_i(t) \geqslant 0$ — фронт сильного разрыва или граница полупространства, $R_i(t) \geqslant L_i(t)$ — всегда фронт сильного разрыва, $X_i = L_i(T_i) = R_i(T_i)$ — начальная координата движущихся границ i-ой локальной зоны ($X_i \neq 0$, если это координата столкновения волновых фронтов, или $X_i = 0$, если новая зона растёт от границы полупространства). Три уравнения для вычисления неизвестных констант A_i, B_i, C_i в i-ой локальной зоне получаем, записывая условие непревывности перемещений (5) на границах $L_i(t)$, $R_i(t)$ и отдельно приравнивая коэффициенты при нулевой и первой степенях множителя $(t - T_i)$:

$$\begin{gathered} A_L + B_L(T_i - T_L) + C_L X_i = A_i + C_i X_i, \\ B_L + C_L \dot{L}_i = B_i + C_i \dot{L}_i, \quad B_R + C_R \dot{R}_i = B_i + C_i \dot{R}_i. \end{gathered} \tag{9}$$

Константы A_L, B_L, C_L, A_R, B_R, C_R в (9) известны из локальных решений $u_L(x,t)$ и $u_R(x,t)$ слева и справа от i-ой зоны, которые возникли в моменты времени $T_L < T_i$ и $T_R < T_i$ соответственно. Если у i-ой зоны какая-либо из границ — ударная волна, то для вычисления её неизвестной скорости к системе (9) необходимо добавить уравнение (6), записанное на соответствующей границе ($\dot{S} = \dot{L}_i$ или $\dot{S} = \dot{R}_i$).

Краевое условие (7) можно представить как линейную комбинацию кусочно-линейных функций с меньшим числом узловых точек. Для линейно-упругой среды это означает, что решение задачи с условием (7) при любом $t \in [0; +\infty)$ также будет линейной комбинацией решений с частями функции (7) на соответствующих интервалах времени. Покажем, что из-за существования разнотипных волновых фронтов и возможности их столкновения разномодульная упругая среда [12] не подчиняется такому правилу, несмотря на линеаризованую форму уравнения движения (2).

3. ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО РЕШЕНИЯ

Проследим за изменением функций $u(x,t)$, $e(x,t)$ во всей деформируемой области, которую фронты сильных разрывов делят на локальные зоны гладких перемещений и непрерывных деформаций. Обобщённое решение будем строить в виде объединения локальных решений (8) на последовательных этапах времени. В множество точек, разбивающих полуоткрытый интервал $t \in [0; +\infty)$ на этапы, включим T_i — моменты времени возникновения новых

зон локальных решений (8), а именно: $\{0, t_1, t_2, t_3\}$ — узловые точки краевого условия (7) и $\{t_1^*, t_2^*, \ldots\}$ — моменты времени столкновения волновых фронтов между собой и с границей полупространства (если такие инциденты произойдут).

Рассмотрим волновую картину, которая формируется в разномодульном упругом полупространстве на «активном» этапе граничного перемещения (7) при $t \in [0; t_3]$. Сильные разрывы, последовательно возникающие на границе полупространства в моменты скачкообразного изменения углового коэффициента функции $u_0(t)$, назовём *первичными* и обозначим верхним индексом 0. Считаем, что константы разномодульной упругой среды [12] и параметры краевого условия (7) заданы так, чтобы в решении сначала возникли все первичные сильные разрывы, а затем произошло их первое попутное столкновение.

Тип каждого первичного сильного разрыва определяем согласно принятой классификации по известной предварительной деформации e^+ и неизвестному состоянию e^-, которое прогнозируем по актуальной части функции (7). Так, при $t = 0$ возникает медленный полусигнотон $\gamma_b^0 = bt$, несущий деформацию растяжения от границы в недеформированное полупространство: $e^+|_{\gamma_b^0} = 0$, $e^-|_{\gamma_b^0} > 0$. При $t = t_1$ появляется медленный простой разрыв $\xi_b^0 = b(t - t_1)$, который движется за γ_b^0, не меняя тип деформированного состояния среды: $e^+|_{\xi_b^0} > 0$, $e^-|_{\xi_b^0} > 0$, $e^+|_{\xi_b^0} \neq e^-|_{\xi_b^0}$ при $k_1 \neq k_2$. В момент времени $t = t_2$ возникает первичная ударная волна $S^0 = \dot{S}^0(t - t_2)$, скачком изменяющая состояние растяжения на сжатие: $e^+|_{S^0} > 0$, $e^-|_{S^0} < 0$. Её скорость $\dot{S}^0$ вычисляется из (6) при $c^+ = b$, $c^- = a$. Зона сжатия $x \in [0; S^0]$ развивается на этапе $t \in [t_2; t_3)$, затем при $t = t_3$ граница полупространства фиксируется: $v(0,t)|_{t \geqslant t_3} = 0$. В этот момент возникает ситуация, когда граничное перемещение постоянно ($u(0,t)|_{t \geqslant t_3} = u_0(t_3) = \text{const}$), а задняя граница зоны сжатия движется с характеристической скоростью $a > \dot{S}_0$ по динамическому полю $u(x,t)$ за ударной волной S_0. Непротиворечивым вариантом кусочно-линейного решения между этим «быстрым» последним фронтом сжатия и фиксированным перемещением на границе $x = 0$ является образование приграничной зоны растяжения, которую от зоны сжатия отделяет переходный растущий жёсткий слой $x \in [\gamma_{b0}^0; \gamma_{0a}^0]$ с нулевой деформацией (здесь и далее полусигнотонам-границам жёстких слоёв в нижнем индексе будем с нужной стороны приписывать ноль). Отметим, что появление движущегося жёсткого слоя как переходной области происходит и при фиксации границы разномодульной упругой среды, и в результате граничного импульса сжатия-растяжения [17, 18, 22].

Описанный пакет первичных сильных разрывов к некоторому моменту времени $\theta_1 = t_3 + \delta$ ($\delta \ll 1$с) уже полностью сформирован. Обобщённое решение $u^0(x,t)$, построенное в форме (8) для первичной волновой картины, объединяет пять локальных зон с различными деформированными состояниями $e_i^0(x,t)$ и существует в таком виде до первого столкновения волн:

$$u^0(x,t) = \begin{cases} A_1 + B_1 t + C_1 x, & x \in [\xi_b^0; \gamma_b^0], \quad t \geqslant 0, \\ A_2 + B_2(t - t_1) + C_2 x, & x \in [S^0; \xi_b^0], \quad t \geqslant t_1, \\ A_3 + B_3(t - t_2) + C_3 x, & x \in [\gamma_{0a}^0; S^0], \quad t \geqslant t_2, \\ A_4 + B_4(t - t_3) + C_4 x, & x \in [\gamma_{b0}^0; \gamma_{0a}^0], \quad t \geqslant t_3, \\ A_5 + B_5(t - t_3) + C_5 x, & x \in [0; \gamma_{b0}^0], \quad t \geqslant t_3, \end{cases} \qquad \begin{array}{l} e_i^0(x,t) = C_i, \\ i = 1, 2, ..., 5, \end{array} \tag{10}$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = u_0(t_1), \quad A_3 = u_0(t_2), \quad A_4 = A_5 = K,$$

$$B_1 = k_1, \quad B_2 = k_2, \quad B_3 = k_3, \quad B_4 = B_3 + C_3 a, \quad B_5 = 0,$$

$$C_1 = -\frac{k_1}{b}, \quad C_2 = -\frac{k_2}{b}, \quad C_3 = -\frac{k_3 b + k_2(\dot{S}^0 - b)}{b\dot{S}^0}, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = \frac{B_4}{b},$$

$$\dot{S}^0 = \sqrt{a^2 - \frac{(a^2 - b^2)k_2/b}{k_2/b - N/a}}, \quad N = \frac{(a^2 + b^2)k_2}{ab} - \sqrt{\left(\frac{(a^2 + b^2)k_2}{ab}\right)^2 - 4k_3(2k_2 - k_3)}.$$

Коэффициенты A_i, B_i, C_i в (10) последовательно вычислены из систем уравнений (9), (6), записанных на границах первичных локальных зон с учётом актуальных частей условия (7).

После полного формирования первичной волновой картины в процесс изменения полей перемещений и деформаций включаются механизмы взаимодействия волн. В результате столкновений волновых фронтов возникают новые зоны локальных решений, ограниченные расходящимися *вторичными* сильными разрывами. Пользуясь стандартной терминологией, вторичную волну, бегущую к границе $x = 0$, назовём *отражённой* и отметим минусом в нижнем индексе. *Прямой* будем называть любую волну, движущуюся в сторону увеличения координаты x.

В [19, 20, 22] для нестационарных одномерных задач с кусочно-гладкой формой нестационарного краевого условия и линеаризованными соотношениями разномодульной упругости показано, что если актуальная волновая картина содержит более одной пары подходящих для столкновения фронтов сильных разрывов, то в процедуре решения задачи появляется *точка ветвления*. Так, в нашей задаче изменение первичной волновой картины $\{\gamma_{b0}^0\gamma_{0a}^0 S^0 \xi_b^0 \gamma_b^0\}$ может произойти при некотором $t_1^* > \theta_1$ в результате одного из двух инцидентов: «ударная волна S^0 догонит медленный простой разрыв ξ_b^0» или «быстрый полусигнотон γ_{0a}^0 догонит ударную волну S^0».

Момент времени столкновения двух фронтов $x_j(t) = X_j + \dot{x}_j(t - T_j)$, $x_k(t) = X_k + \dot{x}_k(t - T_k)$ вычисляется из условия совпадения их координат $x_j(t^*) = x_k(t^*)$:

$$t^* = \frac{X_j - X_k + \dot{x}_j T_j - \dot{x}_k T_k}{\dot{x}_j - \dot{x}_k}. \tag{11}$$

В (11) $\dot{x}_j \neq 0$, $X_j \neq 0$ и $\dot{x}_k \neq 0$, $X_k \neq 0$, если $x_j(t)$ и $x_k(t)$ — координаты сильных разрывов; $\dot{x}_j \neq 0$, $X_j \neq 0$ и $\dot{x}_k = 0$, $X_k = 0$, когда $x_k(t) = 0$ — граница полупространства, на которую падает волновой фронт $x_j(t)$.

Вычисляя по формуле (11) время столкновения для всех возможных в актуальной волновой картине инцидентов, выбираем среди них тот, для которого t^* имеет меньшее значение. Такой выбор необходимо делать всякий раз, когда при решении краевой задачи возникает очередная точка ветвления. Определившись с инцидентом, прогнозируем его результат — типы расходящихся вторичных сильных разрывов и тип деформированного состояния ($e > 0$, $e < 0$ или $e = 0$) в новой растущей локальной зоне между ними. «Старая» зона между волнами-участниками столкновения при этом исчезает. При построении прогноза учитываем свойства взаимодействующих сильных разрывов и уже известные деформированные состояния слева и справа от координаты столкновения. Используя (9) и (6) (при необходимости), строим решение (8) в новой i-ой локальной зоне и проверяем его корректность. Полученный результат считаем корректным (единственным), если выбранные фронты-границы новой зоны эволюционны [24], что в нашем случае выражается в выполнении неравенства $c^+ \leqslant |\dot{D}| \leqslant c^-$ для их скоростей. Согласно (3), в этом неравенстве значения $c^+ = c(e^+)$ слева и справа от i-ой зоны известны, а значение $c^- = c(e_i)$ зависит от искомого решения в i-ой зоне. Если новое локальное решение удовлетворяет указанному критерию, то переходим к выбору следующего инцидента в изменённой волновой картине. При нарушении эволюционности на какой-либо из границ i-ой зоны корректируем прогноз, заменяя неэволюционный вторичный сильный разрыв на пару попутных фронтов — быстрый и медленный полусигнотоны. По аналогии с [22] можно показать, что такая замена обеспечивает бездиссипативный переход от состояния e^+ к состоянию e_i через промежуточный жёсткий слой и удовлетворяет требованию неубывания энтропии [24]. В [20] подобная схема действий сведена к алгоритму поиска пути на графе для решения нестационарной краевой задачи о продольном деформировании полубесконечного разномодульного упругого стержня.

Применим описанный подход к решению нашей краевой задачи для разномодульной упругой среды с параметрами $\lambda = 19.8$ ГПа, $\mu = 26.9$ ГПа, $\nu = 15.3$ ГПа [13] и $\rho =$

7600 кг/м^3 [25]. Согласно (3), в этом случае характеристическая скорость $c(e)$ принимает значения $a = 3702.77$ м/с при сжатии и $b = 2378.63$ м/с при растяжении. Для краевого условия (7) зададим два набора параметров (см. таблицу), которые при указанных a, b удовлетворяют требованию отсутствия столкновений фронтов сильных разрывов до полного формирования первичной волновой картины.

Параметры краевого условия (7)

№	t_1 [$\cdot 10^{-3}$ с]	t_2 [$\cdot 10^{-3}$ с]	t_3 [$\cdot 10^{-3}$ с]	k_1 [м/с]	k_2 [м/с]	k_3 [м/с]	K [$\cdot 10^{-3}$ м]
I	0.3	0.5	0.8	-15.0	-2.50	16.67	0.0
II	0.1	0.5	0.7	-25.0	-6.25	2.50	-4.5

Обобщённые решения краевой задачи, полученные с выбранными параметрами граничного перемещения (см. таблицу), представим в графическом виде на характеристической плоскости $\{x - t\}$ (рис. 2). Аналитическую запись рекуррентной последовательности локальных решений здесь не приводим, так как при $t > \theta_1$ формулы для вычисления A_i, B_i, C_i и $\dot{S}$ становятся довольно громоздкими. Разнотипные сильные разрывы на рис. 2 обозначены сплошными линиями разного стиля: ударная волна — чёрная толстая линия, быстрые фронты сжатия — чёрные тонкие линии, медленные фронты растяжения — серые линии. Типы деформированного состояния отмечены фоном разной интенсивности: незакрашенные зоны соответствуют недеформированной части полупространства и жёстким слоям A, B, C, D и E, тёмный фон — зонам сжатия, светлый — областям растяжения 1 и 2. Мгновенные конфигурации волновой картины в выбранные моменты времени $t = \theta_1, \theta_2, \ldots$ выделены вертикальными линиями и соответствующими метками.

На рис. 3 показаны графики деформаций $e(\tilde{x}, \theta_i)$, соответствующие моментам времени $t = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6\}$ в первом решении (рис. 2(a)), а на рис. 4 — моментам времени $t = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ второго решения (рис. 2(b)). Для наглядности, на каждом графике ось абсцисс нормирована на координату переднего фронта возмущений ($\tilde{x} = x/\gamma_b(\theta_i)$, $\tilde{x}|_{\gamma_b(\theta_i)} = 1$ или $\tilde{x} = x/\gamma_a(\theta_i)$, $\tilde{x}|_{\gamma_a(\theta_i)} = 1$), ось ординат имеет степенной масштаб. Нормированные координаты фронтов сильных разрывов обозначены вертикальными пунктирными линиями и соответствующими надписями. Верхним индексом «$*$» отмечена ударная волна с изменённой скоростью $\dot{S}^* \neq \dot{S}^0$ ($b < \dot{S}^* < a$) после попутного столкновения с убегающим медленным или догоняющим быстрым фронтом.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Анализируя результаты вычислений, выделим ряд характерных особенностей этапа $t \in (t_3; +\infty)$ эволюции волновой картины в разномодульном упругом полупространстве при движении его границы в режиме «растяжение — сжатие — останов».

1) Первая особенность касается множества возможных взаимодействий волновых фронтов в решении задачи с кусочно-линейным краевым условием (7). Оказалось, что это множество ограничено и содержит всего восемь различных инцидентов (рис. 2), которые схематически опишем в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
E_1(S + \xi_b) = \xi_{-a} S^*, \qquad E_2(\gamma_{0a} + S) = \gamma_{-0a} S^*, \qquad E_3(S + \gamma_b) = \xi_{-a}\gamma_a, \\
E_4(\gamma_{0a} + \xi_{-a}) = \begin{bmatrix} \gamma_{-0a}\xi_a & \text{(a)}, \\ \gamma_{-0b}\gamma_{b0}\gamma_{0a} & \text{(b)}, \end{bmatrix} \qquad E_5(\gamma_{b0} + \gamma_{-0a}) = \begin{bmatrix} S_- \xi_a & \text{(a)}, \\ \xi_{-b}\gamma_{b0}\gamma_{0a} & \text{(b)}, \end{bmatrix} \\
E_6(\gamma_{b0} + S_-) = \xi_{-b}\gamma_{b0}\gamma_{0a}, \qquad E_7(\gamma_{b0} + \gamma_{-0b}) = \xi_{-b}\xi_b, \qquad E_8(0 + \xi_{-b}) = 0\xi_b.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Сильные разрывы в левой и правой частях каждого равенства (12) упорядочены по возрастанию координат. Слагаемые-аргументы в левой части — взаимодействующие фронты (или

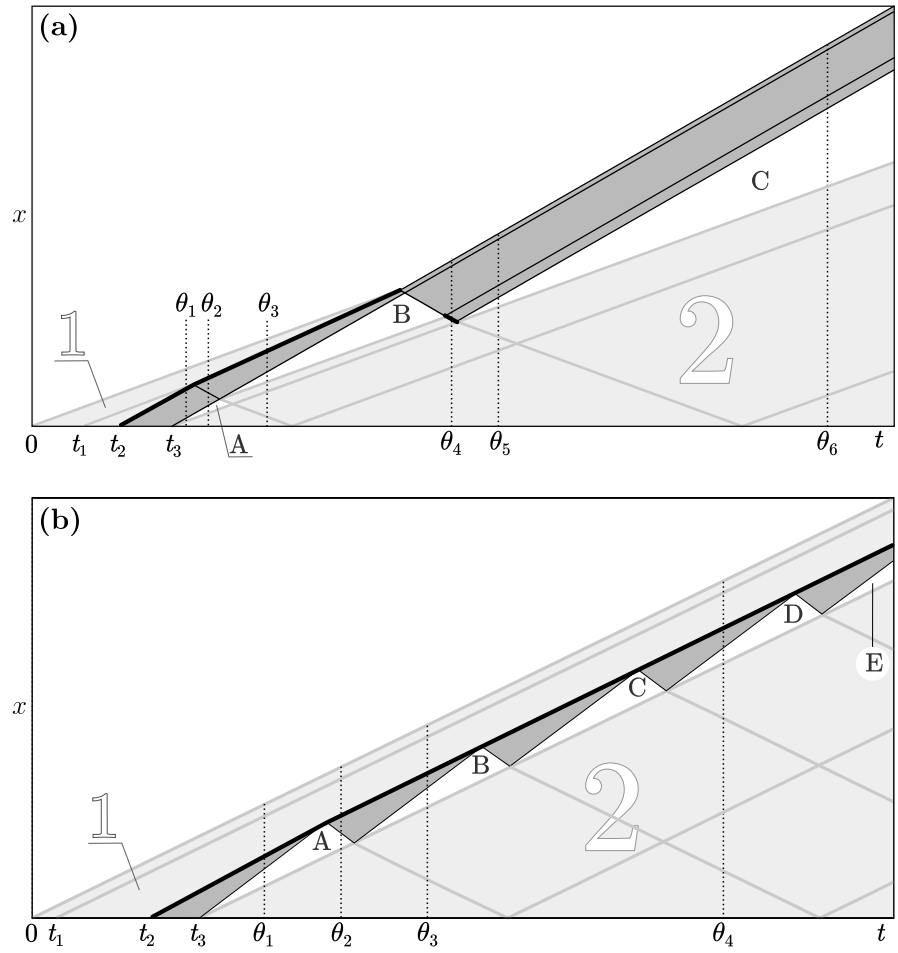


Рис. 2. Характеристические плоскости решений с параметрами I (a), II (b) (см. таблицу)

граница $x = 0$ и падающая на неё волна в случае E_8), пакет вторичных сильных разрывов в правой части — результат столкновения. Деформированное состояние каждой новой локальной зоны, возникшей в результате инцидента, определяется свойствами её подвижных границ: зона сжатия между расходящимися быстрыми фронтами (или быстрым фронтом и ударной волной), зона растяжения между расходящимися медленными фронтами, жёсткая зона между попутными полусигнотонами (быстрым и медленным). Инциденты E_1, E_2, E_3 описывают попутные столкновения разнотипных сильных разрывов. В частности, первому столкновению фронтов после формирования первичной волновой картины отвечает один из случаев E_1, E_2. Инциденты E_4, E_5, …, E_8 соответствуют встречным столкновениям.

Особо выделим неоднозначные случаи E_4 и E_5, в каждом из которых для продолжения решения задачи необходима проверка и, возможно, корректировка ожидаемой волновой картины. Так, вычислительный эксперимент с различными параметрами граничного перемещения (см. таблицу) показал, что в результате инцидента $E_4(\gamma_{0a} + \xi_{-a})$ может возникнуть или одна новая зона сжатия между расходящимися быстрыми фронтами γ_{-0a} и ξ_a (E_4(a)), или сразу две новых области — зона растяжения $[\gamma_{-0b}\gamma_{b0}]$ между расходящимися медленными полусигнотонами и жёсткий слой $[\gamma_{b0}\gamma_{0a}]$ (E_4(b)). Подобная ситуация складывается и для инцидента $E_5(\gamma_{b0} + \gamma_{-0a})$, но в отличие от E_4 здесь отражённым фронтом оказывается или вторичная ударная волна S_- (E_5(a)), или медленный простой разрыв ξ_{-b} (E_5(b)). Решая в общем виде уравнения (9), (6) с учётом прогноза знаков деформаций в новых локальных зонах инцидентов

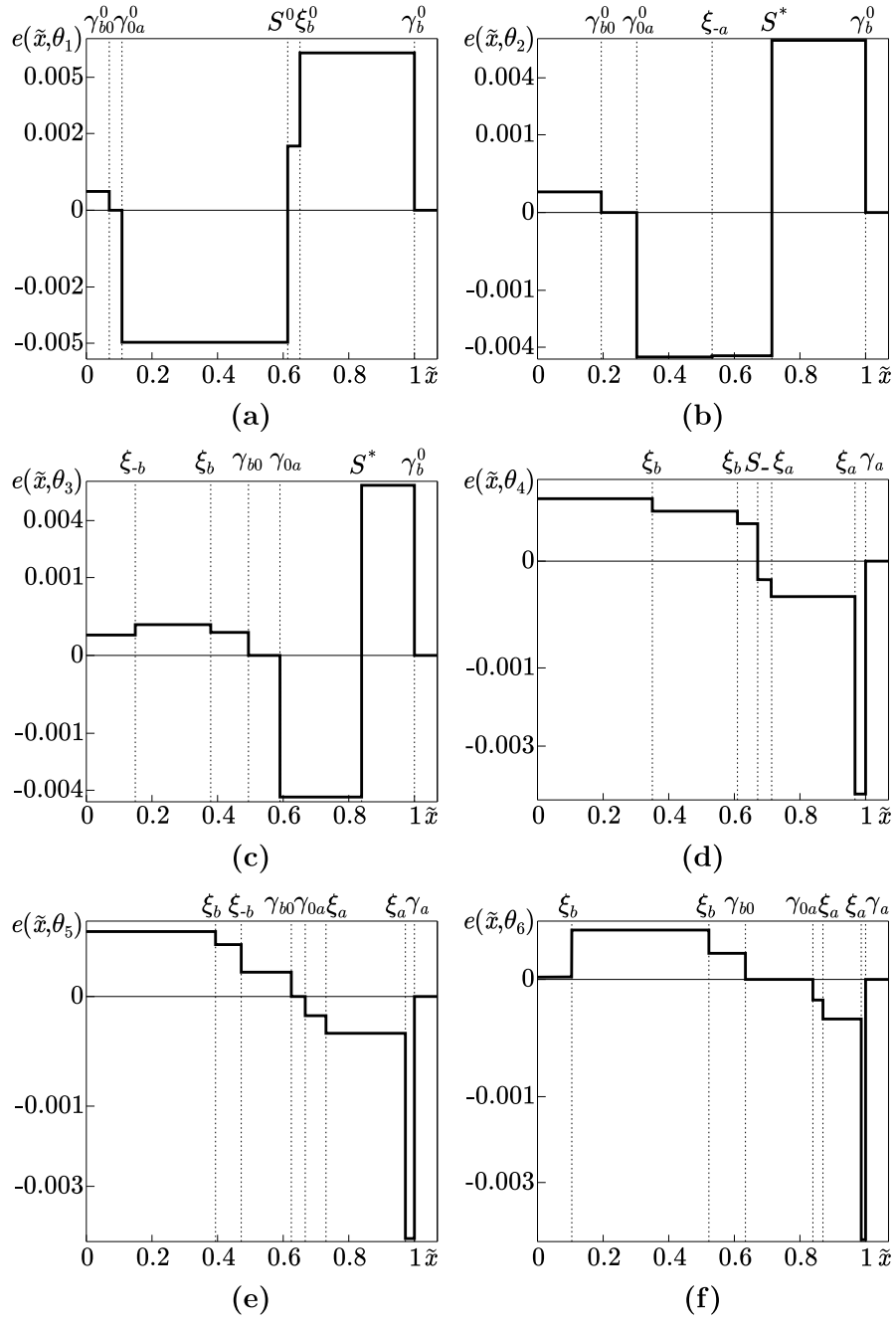


Рис. 3. Мгновенные диаграммы деформаций в решении с параметрами I (см. таблицу)

E_4, E_5, получаем условия реализации каждого варианта:

$$M < 0 \;\Rightarrow\; E_4(\text{a}), \quad M > 0 \;\Rightarrow\; E_4(\text{b}),$$
$$\frac{M}{C_L} \in (-b; b) \cup (a; +\infty) \;\Rightarrow\; E_5(\text{a}), \quad \frac{M}{C_L} \in (-\infty; -b) \cup (b; a) \;\Rightarrow\; E_5(\text{b}), \tag{13}$$
$$M = B_R - B_L + aC_R.$$

Значения коэффициентов B_L, B_R, C_L, C_R в (13) известны из локальных решений $u_L(x,t)$, $u_R(x,t)$ слева и справа от координаты столкновения.

Рис. 2 показывает, что инциденты E_4(a), E_4(b), E_5(a), E_5(b) могут возникать в решении задачи в разных количествах и сочетаниях. Так, решение на рис. 2(a) содержит случаи E_4(a),

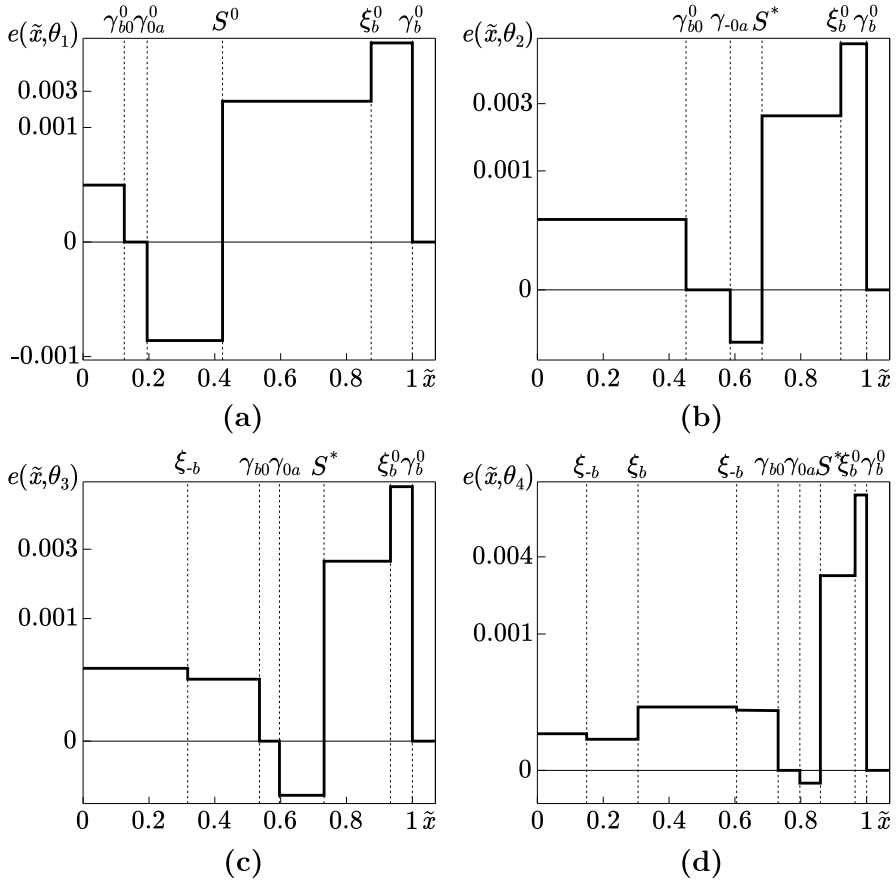


Рис. 4. Мгновенные диаграммы деформаций в решении с параметрами II (см. таблицу)

E_4(b) и E_5(a), а решение на рис. 2(b) — только случай E_5(b), создающий совместно с инцидентом E_2 цикл переходов среды из недеформированного состояния в сжатое и обратно в узкой зоне между двумя областями растяжения 1, 2.

2) Следующая особенность связана с зависимостью решения задачи на открытом интервале $t > t_3$ от части краевого условия (7), задающей импульс растяжения-сжатия на ограниченном этапе $t \in [0; t_3]$.

Согласно описанной в разделе 3 процедуре вычисления $u_i(x,t)$, $e_i(x,t)$ в новых локальных зонах, обобщённое решение нашей задачи строится рекуррентно и, следовательно, в любой момент времени $t > t_3$ «помнит» все предшествующие локальные решения (в том числе, решение (10) первичной волновой картины). За счёт этого формулы (6), (8), (9), (11) и (13) при любом $t > t_3$ скрытым образом содержат параметры функции (7). Таким образом, часть граничного перемещения $u_0(t)$, активная на ограниченном интервале времени $t \in [0; t_3]$, даже после остановки границы продолжает влиять на динамические процессы распространения деформаций в разномодульном упругом полупространстве.

Пользуясь этим фактом, можно, например, ещё на этапе постановки задачи предсказать, по какому из сценариев (a) или (b) на рис. 2 будет развиваться её решение после полного формирования первичной волновой картины (т.е. при $t \geqslant \theta_1 > t_3$). Для этого, задавая диапазон изменения одного из параметров краевого условия (6) и учитывая (10), строим зависимости (11) для времени наступления инцидентов E_1, E_2 с участием первичных волновых фронтов γ_{0a}^0, S^0, ξ_b^0. Ниже представлены графики функций $t_1^*(k_2)$ и $t_1^*(k_3)$, полученные при $k_2 \in [-8.0; -1.0]$, $k_3 = 2.5$ (рис. 5(a)), $k_3 \in [2.0; 20.0]$, $k_2 = -6.25$ (рис. 5(b)) и фиксированных значениях t_1, t_2, t_3, k_1, K из набора II (см. таблицу). Пересечение графиков на рис. 5 показывает, что существуют

значения k_2^*, k_3^*, при отклонении от которых сценарий развития волновой картины на рис. 2 меняется с варианта (a) на вариант (b) или наоборот. Одновременное наступление событий $E_1(S^0+\xi_b^0)$, $E_2(\gamma_{0a}^0+S^0)$ (столкновение сразу трёх первичных волновых фронтов) возможно, но его достаточно трудно обеспечить, т.к. значения k_2^*, k_3^* вычисляются приближенно.

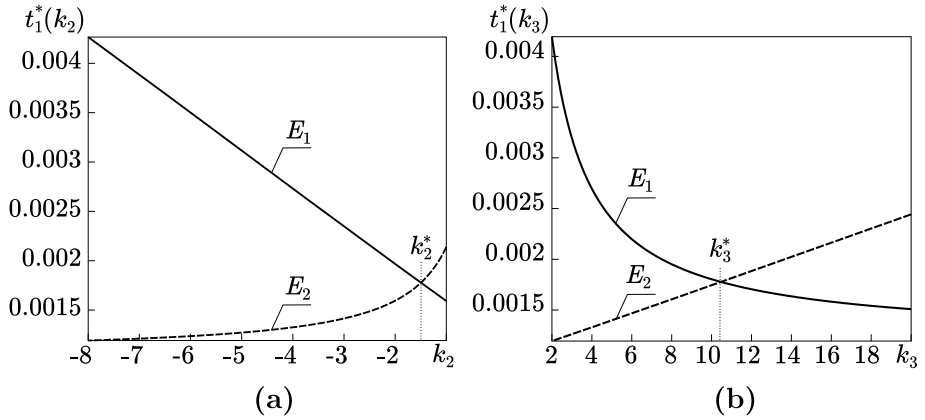


Рис. 5. Момент времени первого столкновения волн в решении с параметрами II (см. таблицу)

Очевидно, что подобные зависимости времени столкновения волновых фронтов от параметров краевого условия (6) можно получить для любых инцидентов (12), конкурирующих в произвольной точке ветвления при решении задачи. Ограничением здесь выступает только нарастающая сложность формулы (11) при отдалённом от t_3 моменте времени.

3) Ряд нелинейных эффектов в решении описанной задачи проявляется исключительно за счёт учёта отражённых волновых фронтов, возникающих внутри разномодульного полупространства после остановки его границы.

Согласно принятому предположению об отсутствии столкновений первичных волновых фронтов на этапе $t\in[0;t_3]$, первый отражённый сильный разрыв появляется при $t>t_3$ после одного из попутных инцидентов E_1, E_2. Результатом любого из встречных инцидентов E_2, E_3, ..., E_7 также являются как минимум два расходящихся сильных разрыва — прямой и отражённый, каждый их которых вносит свой вклад в решение задачи. Так, многократные встречные столкновения отражённых фронтов с разнотипными прямыми волнами приводят к изменениям функций $u(x,t)$ и $e(x,t)$, в том числе динамически перераспределяют поле растяжения в объединённой области 2 (рис. 2), сводя деформации в приграничных локальных зонах $[0;\xi_{\pm b}]$ к близким к нулю значениям: $e(x,\theta_6)|_{x\in[0;\xi_b]}\sim 10^{-18}$ на рис. 3(f), $e(x,\theta_4)|_{x\in[0;\xi_{-b}]}\sim 10^{-7}$ на рис. 4(d). Встречное столкновение вторичных полусигнотонов γ_{b0} и γ_{-0a} при выполнении соответствующего условия (13) вызывает появление отражённой ударной волны S_- (рис. 2(a)). Инциденты E_4(b), E_5(b), E_6 с участием отражённых фронтов сжатия S_-, ξ_{-a}, γ_{-0a} порождают в глубине полупространства вторичные жёсткие слои B, C, D, E (рис. 2) с ненулевыми начальными координатами $X_{\rm B}\neq 0$, ..., $X_{\rm E}\neq 0$ (в отличие от первичного жёсткого слоя A, возникающего на границе $x=0$).

Безусловно, включение отражённых сильных разрывов в обобщённое решение уравнения (2) усложняет вычислительный процесс из-за быстро нарастающего количества зон локальных решений и их движущихся границ, на которых необходимо соблюдать условия (4), (5). Для упрощения процедуры решения подобных краевых задач можно, например, отказаться от учёта отражённых фронтов как от волн второго порядка малости [17] или ограничить сверху временной интервал решения, тем самым исключая саму возможность взаимодействия волн [18,26]. Однако в этих случаях описанные выше нелинейные эффекты в разномодульной упругой среде получить невозможно.

Таким образом, несмотря на относительно невысокую интенсивность отражённых фронтов (например, $(e^+ - e^-)|_{S_-} = 1.43 \cdot 10^{-4}$ против $(e^+ - e^-)|_{S^0} = 5.45 \cdot 10^{-3}$ на рис. 3), включение их в решение оправдано, если целью является подробное (насколько это возможно) описание динамики одномерного деформирования разномодульной упругой среды.

4) Наконец, рассмотрим, как в нашей задаче изменяется скорость ударной волны в результате её попутных столкновений с быстрыми и медленными фронтами сильных разрывов.

Согласно (6), скорость ударной волны есть кусочно-постоянная функция

$$\dot{S}(t) = \sqrt{\frac{b^2 e^+ - a^2 e^-}{e^+ - e^-}}, \tag{14}$$

зависящая от деформаций $e^+ > 0$, $e^- < 0$ по обе стороны от фронта $S(t)$. Всякий раз, когда прямая ударная волна попутно взаимодействует с убегающими медленными или догоняющими быстрыми фронтами сильных разрывов, её скорость согласно (14) изменяется скачком. Графики таких изменений показаны на рис. 6, где $\dot{S}^0_{\mathrm{I}}$ и $\dot{S}^0_{\mathrm{II}}$ — скорости первичной ударной волны в решениях с параметрами I (рис. 2(a)) и II (рис. 2(b)) соответственно, a и b — скорости быстрой и медленной характеристик, $\tau = t \cdot 10^3$с.

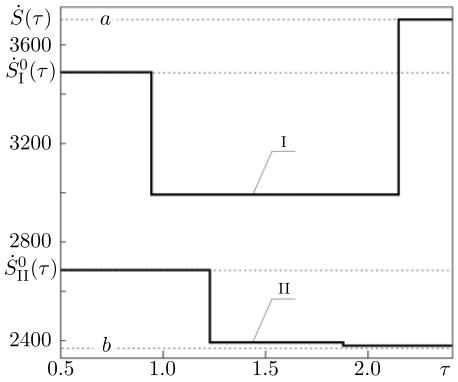


Рис. 6. Изменение скорости ударной волны

Рис. 6 позволяет заключить, что в разномодульной упругой среде ударная волна в результате серии столкновений может как разогнаться от своей первоначальной скорости $\dot{S}^0$ до скорости быстрой характеристики (кривая I), так и замедлиться, приближаясь по скорости к медленной характеристике (кривая II). В первом случае ударная волна уничтожает область предварительного растяжения 1 перед собой (рис. 2(a)) и при выходе в недеформированное полупространство превращается в быстрый полусигнотон γ_a (рис. 3(f)). Во втором случае можно говорить о затухании ударной волны (рис. 2(b)), поскольку уровень деформаций сжатия e^- позади неё после каждого столкновения падает (рис. 4(c,d)).

Подобное поведение ударной волны отражает её нелинейные свойства и одновременно является характерной особенностью распространения деформаций в разномодульной упругой среде.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При решении задачи о нормальном нестационарном нагружении упругого полупространства в режиме «растяжение — сжатие — останов» выявлен ряд особенностей одномерной динамики деформирования разномодульной упругой среды [12], возникающих за счёт столкновений фронтов разнотипных сильных разрывов. Показано, что часть из этих особенностей (неоднозначность результатов некоторых инцидентов, появление отражённой ударной волны и движущихся жёстких слоёв на отдалении от нагружаемой границы, циклические переходы

между сжатым и недеформированным состоянием в узком слое, затухание ударной волны при попутных столкновениях с другими волнами и т.д.) проявляется только в случае включения отражённых фронтов в обобщённое решении задачи.

Перечисленные эффекты являются следствием неаналитичной разномодульной нелинейности модели [12] и не отражаются линейной теорией упругости. Полученные результаты развивают общие представления о динамике упругого деформирования разномодульных материалов под действием нестационарных нагрузок. Как теоретическая база, они могут быть интересны для разработчиков технологий ударной обработки конструкционных материалов, а также исследователей процессов распространения деформаций в земной коре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баклашов И. В., Картозия Б. А.* Механика горных пород. М.: Недра, 1975.
2. *Бессонов Д. Е., Зезин Ю. П., Ломакин Е. В.* Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров // Изв. СГУ. Нов. сер. Сер. мат. мех. информ. 2009. Т. 9. №. 4 (2). С. 9–13; DOI: 10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-9-13
3. *Lomakin E. V., Fedulov B. N.* Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. V. 50. N 6. P. 1527–1535; DOI: 10.1007/s11012-015-0104-5
4. *Makeev A., He Y., Carpentier P., Shonkwiler B.* A method for measurement of multiple constitutive properties for composite materials // Composites Part A. 2012. V. 43. N 12. P. 2199–2210; DOI: 10.1016/j.compositesa.2012.07.021
5. *Жуков А. М.* Модули упругости материалов при растяжении и сжатии // Прикл. мех. техн. физ. 1985. № 4. С. 128–131.
6. *Katz J. L., Spencer P., Wang Y., Misra A., Marangos O., Friis L.* On the anisotropic elastic properties of woods // J. Mater. Sci. 2008. V. 43. P. 139–145; DOI: 10.1007/s10853-007-2121-9
7. *Li S., Demirci E., Silberschmidt V. V.* Variability and anisotropy of mechanical behavior of cortical bone in tension and compression // J. Mech. Behav. Biomed. Mater. 2013. V. 21. P. 109–120; DOI: 10.1016/j.jmbbm.2013.02.021
8. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
9. *Ломакин Е. В., Работнов Ю. Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 6. С. 29–34.
10. *Амбарцумян С. А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982.
11. *Цвелодуб И. Ю.* О разномодульной теории упругости // Прикл. мех. техн. физ. 2008. Т. 49, № 1. С. 157–164.
12. *Ляховский В. А., Мясников В. П.* О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. № 10. С. 71–75.
13. *Мясников В. П., Олейников А. И.* Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред. Владивосток: Дальнаука, 2007.
14. *Sadovskaya O. V., Sadovskii V. M.* The theory of finite strains of a granular material // J. Appl. Math. Mech. 2007. V. 71. P. 93–110; DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.03.005.
15. *Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Petrakov I. E.* On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension // Compos. Struct. 2021. V. 268. Article 113921; DOI: 10.1016/j.compstruct.2021.113921
16. *Назаров В. Е.* Упругие волны в средах с разномодульной нелинейностью с учётом эффектов отражения от ударных фронтов // Журн. техн. физ. 2021. Т. 91. №. 11. С. 1747–1755; DOI: 10.21883/JTF.2021.11.51539.118-21.
17. *Gavrilov S. N., Herman G. C.* Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // J. Sound Vibr. 2012. V. 331. N 40. P. 4464–4480; DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.022

18. *Дудко О. В., Лаптева А. А., Семенов К. Т.* О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Дальневост. матем. журн. 2005. Т. 6, № 1–2. С. 94–105.

19. *Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е.* Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2019. № 4. С. 37–47; DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.04

20. *Дудко О. В., Лаптева А. А., Рагозина В. Е.* Эволюция волновой картины кусочно-линейного одноосного растяжения и сжатия разномодульного упругого стержня // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25. № 4. С. 54–70; DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.405.

21. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.

22. *Kuznetsova M., Khludyakov M., Sadovskii V.* Wave propagation in continuous bimodular media // Mech. Adv. Mater. Struct. 2021. P. 1–16; DOI: 10.1080/15376494.2021.1889725

23. *Maslov V. P., Mosolov P. P.* General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // J. Appl. Math. Mech. 1985. V. 49. N 3. P. 322–336; DOI: 10.1016/0021-8928(85)90031-0

24. *Куликовский А. Г., Свешникова Е. И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998.

25. *Бабичев А. П., Бабушкина Н. А., Братковский А. М. и др.* Физические величины: Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991.

26. *Дудко О. В., Рагозина В. Е.* О движении ударных волн с постоянной скоростью в разномодульных упругих средах // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 1. С. 134–144.

UDC 539.3:517.958

INTERACTION OF PLANE STRAIN WAVES IN A HETEROMODULAR ELASTIC HALF-SPACE AT THE STAGE OF FORCED STOPPING OF ITS BOUNDARY AFTER UNIAXIAL TENSION-COMPRESSION

© 2023 O. V. Dudko[a], A. A. Lapteva[b], V. E. Ragozina[c]

Institute of Automation and Control Processes, Far East Branch, Russian Academy of Sciences,
Vladivostok, 690041 Russia

E-mails: [a]dudko@iacp.dvo.ru, [b]lanastal@mail.ru, [c]ragozina@vlc.ru

Received 01.06.2023, revised 10.07.2023, accepted 09.08.2023

Abstract. The evolution of the wave pattern in a multimodulus elastic half-space with a boundary moving in nonstationary uniaxial piecewise linear "tension — compression — stop" mode is studied. The solution of the boundary value problem includes all cases of interaction between plane one-dimensional strain waves, including reflected weak-intensity fronts. A number of new features of one-dimensional elastic deformation dynamics in a multimodulus medium are revealed, some of which (e. g., the appearance of a reflected shock wave at a distance from the loaded boundary, cyclic transitions of a narrow moving zone from a compressed to rigid state and back, and a stepwise decrease in the tensile strain level in the near-boundary zone after the boundary is stopped) can be obtained with a given boundary loading only taking into account reflection effects.

Keywords: multimodulus elasticity, unsteady deformation, piecewise linear boundary condition, uniaxial tension-compression, forced stopping, strong rupture, collision of strain waves, reflected shock wave.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.403

REFERENCES

1. I. V. Baklashov and B. A.Kartozija, *Mechanics of Rocks* (Nedra, Moscow, 1975) [in Russian].
2. D. E. Bessonov, Yu. P. Zezin, and E. V. Lomakin, "Multimodulus behavior of the grained composites on the base of unsaturated polyethers," Izv. Saratov.Gos. Univ. Nov. Ser. Ser. Mat. Mekh. Inf. **9** (4), 9–13 (2009) [in Russian]. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-9-13
3. E. V. Lomakin and B. N. Fedulov, "Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites," Meccanica **50** (6), 1527–1535 (2015). https://doi.org/10.1007/s11012-015-0104-5
4. A. Makeev, Yihong He, P. Carpentier, and B. Shonkwiler, "A method for measurement of multiple constitutive properties for composite materials," Composites. Part A: Appl. Sci. Manuf. **43** (12), 2199–2210 (2012). https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2012.07.021
5. A. M. Zhukov, "Moduli of elasticity of materials in extension and compression," J. Appl. Mech. Tech. Phys. (26), 568–571 (1985). https://doi.org/10.1007/BF01101643
6. J. L. Katz, P. Spencer, Yong Wang, A. Misra, O. Marangos, and L. Friis, "On the anisotropic elastic properties of woods," J. Mater. Sci. (43), 139–145 (2008). https://doi.org/10.1007/s10853-007-2121-9
7. Simin Li, Emrah Demirci, and V. V. Silberschmidt, "Variability and anisotropy of mechanical behavior of cortical bone in tension and compression," J. Mech. Behav. Biomed. Mater. (21), 109–120 (2013). https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2013.02.021

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 710–723.

8. V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Bashelejshvili, and T. V. Burchuladze, *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity* (North-Holland Publishing Co., New York, 1979).
9. E. V. Lomakin and Yu. N. Rabotnov, "A theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression," Mech. Solids **13** (6), 25–30 (1978).
10. S. A. Ambartsumyan, *Theory of Elasticity for Materials with Variable Moduli* (Nauka, Moscow, 1982) [in Russian].
11. I. Yu. Tsvelodub, "Multimodulus elasticity theory," J. Appl. Mech. Tech. Phys. (49), 129–135 (2008). https://doi.org/10.1007/s10808-008-0019-1
12. V. A. Lyakhovskii and V. P. Myasnikov, "On the behavior of elastic cracked solid," Izv. Akad. Nauk SSSR. Fiz. Zemli (10), 71–75 (1984) [in Russian].
13. V. P. Myasnikov and A. I. Oleinikov, *Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous-Resisting Media* (Dal'nauka, Vladivostok, 2007) [in Russian].
14. O. V. Sadovskaya and V. M. Sadovskii, "The theory of finite strains of a granular material," J. Appl. Math. Mech. (71), 93–110 (2007). https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.03.005
15. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and I. E. Petrakov, "On the theory of constitutive equations for composites with different resistance in compression and tension," Compos. Struct. (268), 113921 (2021). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113921
16. V. E. Nazarov, "Elastic waves in media with bimodular nonlinearity taking into account the effects of reflection from shock fronts," Tech. Phys. **67** (14), 2261–2269 (2022). https://doi.org/10.21883/TP.2022.14.55229.118-21
17. S. N. Gavrilov and G. C. Herman, "Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading," J. Sound Vib. **331** (40), 4464–4480 (2012). https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.022
18. O. V. Dudko, A. A. Lapteva, and K. T. Semyonov, "About the distribution of plane one-dimensional waves and their interaction with a barrier in a media differently reacting to tension and compression," Dal'nevost. Mat. Zh. **6** (1–2), 94–105 (2005) [in Russian].
19. O. V. Dudko, A. A. Lapteva, and V. E. Ragozina, "Nonstationary 1D dynamics problems for heteromodular elasticity with piecewise-linear approximation of boundary conditions," Vestn. PNIPU. Mekh. (4), 37–47 (2019) [in Russian]. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2019.4.04
20. O. V. Dudko, A. A. Lapteva, and V. E. Ragozina, "Evolution of the wave pattern for piecewise linear uniaxial tension and compression of a heteromodular elastic bar," J. Appl. Ind. Math. **16** (4), 645–658 (2022). https://doi.org/10.1134/S1990478922040068
21. Ali H. Nayfeh, *Perturbation Methods* (John Wiley & Sons, New York, 1973).
22. M. Kuznetsova, M. Khludyakov, and V. Sadovskii, "Wave propagation in continuous bimodular media," Mech. Adv. Mater. Struct. (2021). https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1889725
23. V. P. Maslov and P. P. Mosolov, "General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli," J. Appl. Math. Mech. **49** (3), 322–336 (1985). https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90031-0
24. A. G. Kulikovskii and E. I. Sveshnikova, *Nonlinear Waves in Elastic Media* (CRC Press, New York, 1995).
25. *Handbook of Physical Quantities,* I. S. Grigoriev and E. Z. Meilikhov, Eds., (CRC Press, New York, 1997).
26. O. V. Dudko and V. E. Ragozina, "On the motion of shock waves at constant speed in multimodulus elastic media," Mech. Solids **53** (1), 111–119 (2018). https://doi.org/10.3103/S0025654418010132

УДК 519.6

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В СХЕМЕ РУСАНОВА. I. УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

© 2023 И. М. Куликов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mail: kulikov@ssd.sscc.ru

Поступила в редакцию 04.06.2023 г.; после доработки 07.07.2023 г.;
принята к публикации 09.08.2023 г.

Схема Русанова для решения гидродинамических уравнений является одной из самых робастных в классе схем численного решения задачи Римана. В случае уравнений специальной релятивистской гидродинамики условие робастности схемы является наиболее ключевым свойством, особенно при достаточно высоких значениях фактора Лоренца. В то же время известно, что схема Русанова достаточно диссипативна. В статье предлагается использование кусочно-параболического представления физических переменных для уменьшения диссипации схемы Русанова. Использование такого подхода позволило получить схему с такими же диссипативными свойствами как схемы типа Рое и семейство схем Хартена—Лакса—Ван Леера. На задаче о распаде релятивистского гидродинамического разрыва показано преимущество авторского варианта схемы Русанова при воспроизведении контактного разрыва. Проведена верификация схемы на классических задачах о распаде разрыва и на задаче о взаимодействии двух релятивистских джетов в трёхмерной постановке.

Ключевые слова: вычислительная астрофизика, релятивистская гидродинамика, численные методы, метод Русанова, кусочно-параболический метод.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.404

ВВЕДЕНИЕ

Эволюция многих астрофизических объектов происходит со скоростями, сравнимыми со скоростью света, или характерная величина гравитационного потенциала порядка квадрата скорости света. В этих случаях исследование подобных процессов требует привлечения аппарата релятивистской гидродинамики. К таким объектам исследования относятся релятивистские джеты в активных ядрах галактик [1], их взаимодействие с межзвёздной средой [2, 3], массивные [4] и нейтронные звёзды [5, 6], сверхновые [7], гравитационные волны [8]. Несмотря на то, что для ряда процессов можно поставить лабораторные эксперименты [9, 10], основным инструментом для их изучения являются аппарат математического моделирования [11].

Оригинальная схема Русанова [12] появилась вскоре после появления метода Годунова с целью упростить решение задачи Римана. Простота и робастность метода позволила эффективно расширить применение схемы Русанова на уравнения мелкой воды с учётом двухфазности течения [13], уравнения магнитной гидродинамики [14], ультра-релятивистские уравнения Эйлера [15], транспортных потоков [16]. Использование схемы Русанова в методах

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-11-00014; https://rscf.ru/project/23-11-00014/).

Рое [17] и HLLC [18] позволяют избавить численное решение от карбункул-эффектов. Предложены также подходы к минимизации диссипации схемы Русанова без использования кусочно-полиномиальных реконструкций, которые состоят в определении местоположения контактных разрывов относительно узлов расчётной сетки [19]. Схема Русанова успешно используется в расчётах на треугольных сетках [20] и в составе метода сглаженных частиц [21]. В целом анализ и сравнение методов решения задач Римана на основе линеаризованного распада разрыва приведён в работе [22].

Основным недостатком схемы Русанова является её высокая диссипативность. Это плата за робастность схемы и возможность воспроизведения сложных гидродинамических течений без особенностей. В работах [23–26] было показано, что использование кусочно-параболического представления физических переменных позволяет построить малодиссипативную схему. В настоящей работе предлагается авторская конструкция схемы Русанова для решения уравнений специальной релятивистской гидродинамики с использованием кусочно-параболического представления решения для уменьшения диссипации. Эксперименты показали, что такой подход не только имеет такой же порядок схемы, как схемы типа Рое и схемы семейства HLL, но и превосходит эти схемы в части воспроизведения отдельных компонентов решения. При этом сохраняется робастность схемы Русанова, что экспериментально подтверждено на задаче о столкновении двух релятивистских джетов в трёхмерной постановке.

В первом разделе описаны уравнения специальной релятивистской гидродинамики и процедура восстановления физических переменных из консервативных. Во втором разделе приведена конструкция численного метода. Третий раздел посвящён верификации разработанного численного метода на классических тестах и на астрофизическом приложении. В четвертом разделе подняты некоторые дискуссионные моменты. Затем сформулировано заключение. Для заинтересованных в использовании схемы Русанова для численного решения уравнений специальной релятивистской гидродинамики читателей исходный код метода размещён на ресурсе GitFlic: https://gitflic.ru/project/igorkulikov/rusanovrhd1d.

1. УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

При описании уравнений специальной релятивистской гидродинамики будем предполагать единичное значение скорости света $c \equiv 1$ и введём два класса переменных — физические переменные: ρ — плотность, $\vec{v}$ — вектор скорости, p — давление, а также консервативные переменные: $D = \Gamma\rho$ — релятивистская плотность, $M_j = \Gamma^2 \rho h v_j$ — релятивистский импульс, $E = \Gamma^2 \rho h - p$ — полная релятивистская энергия, где v_j — компоненты вектора скорости $\vec{v}$ при $j = x, y, z$, фактор Лоренца Γ определяется уравнением:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Уравнения для специальной энтальпии h записывается в виде:

$$h = 1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho},$$

где γ — показатель адиабаты. В этом случае скорость звука c_s определяется по формуле:

$$c_s^2 = \frac{\gamma p}{\rho h}.$$

Запишем систему уравнений в векторной консервативной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \Gamma\rho \\ \Gamma^2\rho h v_j \\ \Gamma^2\rho h - p \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{pmatrix} \rho\Gamma v_k \\ \rho h \Gamma^2 v_j v_k + p\delta_{jk} \\ (\Gamma^2\rho h - p)v_k + p v_k \end{pmatrix} = 0,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Если консервативные переменные тривиально пересчитываются из физических переменных, то в обратную сторону требуется разрешение нелинейного уравнения:

$$f(p) = \Gamma^2 \rho h - p - E = 0.$$

Для этого используется итерационный метод Ньютона:

$$p_{m+1} = p_m - \frac{f(p_m)}{f'(p_m)},$$

где производная рассматриваемой функции $f'(p)$ имеет вид:

$$f'(p) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\Gamma^2 - \frac{M^2\Gamma^3}{(E+p)^3}\left(D + 2\frac{\gamma}{\gamma-1}p\Gamma\right) - 1.$$

Итерационный процесс мы останавливаем при достижении требуемой точности. Далее для одномерного аналога уравнений запишем численную схему.

2. КОНСТРУКЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Будем конструировать численный метод для одномерной постановки задачи. Расширение на многомерный случай производится тривиально. Введём вектор консервативных переменных U и вектор потока консервативных переменных F по направлению x следующим образом:

$$U = \begin{pmatrix} \Gamma\rho \\ \Gamma^2\rho h v_x \\ \Gamma^2\rho h v_y \\ \Gamma^2\rho h v_z \\ \Gamma^2\rho h - p \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho\Gamma v_x \\ \rho h\Gamma^2 v_x v_x + p \\ \rho h\Gamma^2 v_y v_x \\ \rho h\Gamma^2 v_z v_x \\ (\Gamma^2\rho h - p)v_x + p v_x \end{pmatrix}.$$

В этом случае уравнения специальной релятивистской гидродинамики в векторной форме записываются в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Для решения системы уравнений введём на некотором интервале $[a; b]$ равномерную сетку с пространственным шагом Δx, определив консервативные переменные в ячейках с дробным индексом и потоки консервативных переменных на интерфейсах между ячейками целочисленным индексом. Схема Годунова для такой дискретизации имеет следующий вид:

$$\frac{U^{n+1}_{i+1/2} - U^n_{i+1/2}}{\tau} + \frac{F^n_{i+1} - F^n_i}{\Delta x} = 0.$$

Для реализации схемы Годунова необходимо найти решение задачи Римана для величин F^n_i. Для этого рассмотрим конфигурацию из левой (L) и правой (R) ячеек и запишем схему Русанова для произвольной величины F для такой конструкции ячеек:

$$F^n = \frac{F^n_L + F^n_R}{2} + \frac{\lambda}{2}\left(U^n_L - U^n_R\right),$$

где λ — максимальный наклон характеристики на конфигурации двух соседних ячеек, вычисляемая по формуле:

$$\lambda = \max\left(|\lambda_{\min,L}|, |\lambda_{\max,R}|\right),$$

$$\lambda_{\min} = v_x \frac{\left(1 - c_s^2\right) - c_s\Gamma^{-1}\omega}{1 - c_s^2 v^2},$$

$$\lambda_{\max} = v_x \frac{\left(1 - c_s^2\right) + c_s \Gamma^{-1} \omega}{1 - c_s^2 v^2},$$

где $\omega = \sqrt{1 - v_x^2 - c_s\left(v_y^2 + v_z^2\right)}$. Для уменьшения диссипации численного решения используется кусочно-параболическое представление физических переменных. Интегрирование по параболе на каждом интерфейсе между ячейками происходит по максимальному наклону характеристики λ. Подробное описание реконструкции было многократно описано (например, в работах [11, 25, 26]), а также обосновано его применение именно для физических переменных [27]. Поэтому для полноты изложения опишем процедуру реконструкции в приложении.

Шаг по времени определяется из условия Куранта:

$$\frac{\max\left(|\lambda^n_{\max,i+1/2}|, |\lambda^n_{\min,i+1/2}|\right)\tau}{\Delta x} = CFL < 1,$$

где CFL — число Куранта. Для проведения тестирования на одномерных задачах использовалось число Куранта $CFL = 0.1$ для многомерных вычислительных экспериментов было использовано $CFL = 0.2$.

3. ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Верификация численного метода проведено на трёх задачах о распаде разрыва, на этих задачах исследована сходимость численной схемы. В качестве астрофизического приложения выбрана задача о взаимодействии двух релятивистских джетов.

3.1. Задача о распаде разрыва

В качестве первого теста рассмотрим задачу о распаде разрыва с образованием всех гидродинамических волн. Для этого на интервале $[0; 1]$ рассмотрим разрывное в точке $x_0 = 0.5$ в начальный момент времени решение с параметрами газа слева: $p^L = 40/3$ — давление, $\rho^L = 10$ — плотность, $v^L = 0$ — скорость, и справа: $p^R = 10^{-8}$ — давление, $\rho^R = 1$ — плотность, $v^R = 0$ — скорость. Решение приведено на момент времени $t = 0.4$. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Были использованы неотражающие граничные условия и расчётная сетка 200 ячеек. В качестве численной схемы решения задачи Римана были использованы: (a) — излагаемая в настоящей статье схема Русанова, (b) — предельный случай схемы Русанова с $\lambda \equiv c \equiv 1$ или схема Лакса-Фридрихса [28], (c) — схема HLL [29], (d) — схема Рое [30]. На рис. 1 изображена функция плотности, полученная с помощью указанных схем.

При том, что все методы достаточно корректно воспроизвели все компоненты решения, отметим важные особенности. Так, при использовании любой из схем на ударной волне диссипация составляет всего две ячейки. В целом схемы Русанова и Лакса-Фридрихса более диссипативны, чем схемы Рое и HLL. Это подтверждает число ячеек, на которых диссипирует контактный разрыв: схемы Русанова — 6 ячеек, схема Лакса-Фридрихса — 8 ячеек, схема HLL — 5 ячеек, схема Рое — 5 ячеек. На краю волны разрежения схема Лакса-Фридрихса даёт дополнительную диссипацию. Следует также отметить, что схема Русанова свободна от численных артефактов в области основания волны разрежения, в отличие от схем Рое и HLL. Если схема Рое даёт небольшой "провал" численного решения, то схема HLL приобретает нефизичные осциллирующие свойства. Этот эффект имеет место и в функции давления (см. рис. 2) и в функции скорости (см. рис. 3). Таким образом, схема Русанова при чуть более диссипативных свойствах корректно воспроизвела все компоненты решения.

3.2. Задача о распаде разрыва с сильной ударной волной

В качестве второго теста на отрезке $[0; 1]$ с первоначальным разрывом в точке $x_0 = 0.5$ рассмотрим более сильную ударную волну с параметрами газа слева: $p^L = 1000$ — давление,

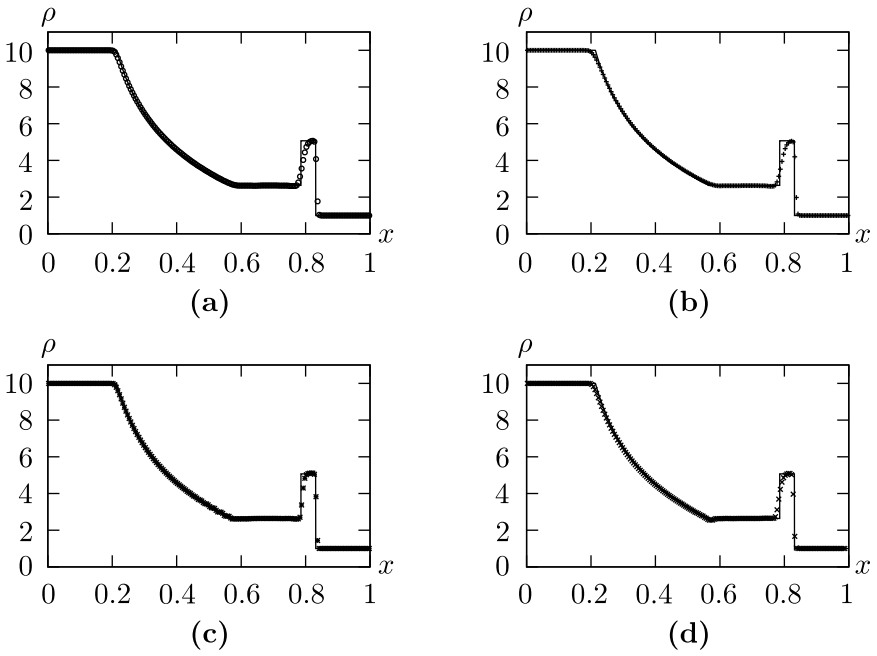


Рис. 1. Задача о распаде разрыва — функция плотности. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками для схем: (a) Русанова, (b) Лакса-Фридрихса, (c) HLL, (d) Poe

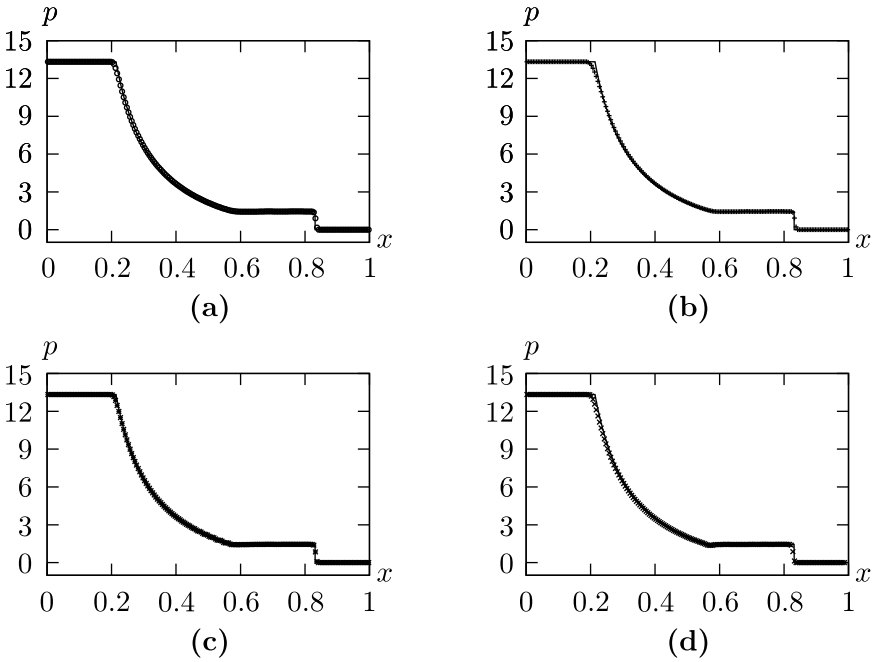


Рис. 2. Задача о распаде разрыва — функция давления. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками для схем: (a) Русанова, (b) Лакса-Фридрихса, (c) HLL, (d) Poe

$\rho^L = 1$ — плотность, $v^L = 0$ — скорость. Справа от разрыва параметры газа: $p^R = 10^{-2}$ — давление, $\rho^R = 1$ — плотность, $v^R = 0$ — скорость. Решение приведено на момент времени $t = 0.4$. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Были использованы неотражающие граничные условия и расчётная сетка 200 ячеек. Для численного решения задачи Римана используем схему Русанова. Результаты моделирования показаны на рис. 4. Особенностью данного теста явля-

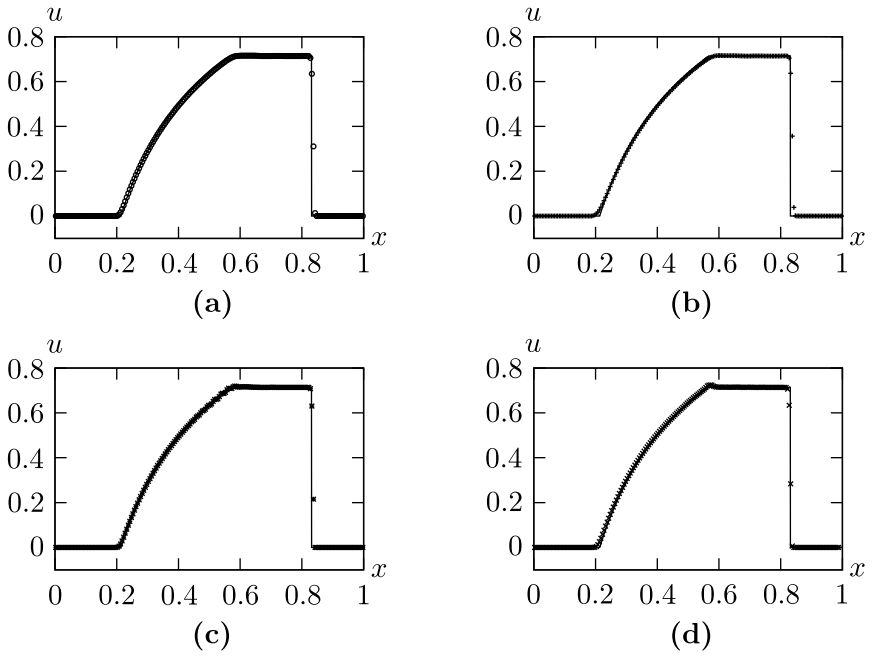


Рис. 3. Задача о распаде разрыва — функция скорости. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками для схем: (a) Русанова, (b) Лакса-Фридрихса, (c) HLL, (d) Poe

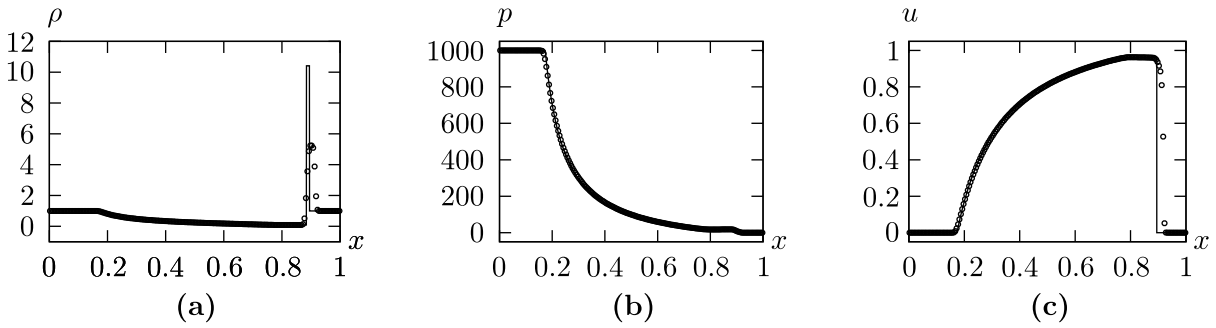


Рис. 4. Задача о распаде разрыва с сильной ударной волной. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками: (a) плотность, (b) давление, (c) скорость

ется наличие за фронтом ударной волны тонкой оболочки. Заметим, что масса оболочки воспроизведена достаточно корректно несмотря на диссипацию решения. Остальные компоненты решения воспроизведены корректно и без лишней диссипации. Отметим, что из-за наличия достаточно тонкой оболочки в функции плотности имеет место формирование большей скорости распространения ударной волны по сравнению с аналитическим решением. Разумеется увеличение пространственного разрешения позволяет уменьшить эту разницу, но такой численный артефакт из-за недостаточности разрешения отдельных участков решения остаётся.

3.3. Задача о распаде разрыва с сильной ударной волной при ненулевой тангенциальной скорости

Усложним второй тест на отрезке $[0;1]$ с первоначальным разрывом в точке $x_0 = 0.5$ наличием ненулевой тангенциальной (поперечной) начальной скорости. Слева от разрыва параметры газа: $p^L = 1000$ — давление, $\rho^L = 1$ — плотность, $v_x^L = 0$ — нормальная компонента скорости, $v_y^L = 0$ — тангенциальная компонента скорости. Справа от разрыва параметры газа: $p^R = 10^{-2}$ — давление, $\rho^R = 1$ — плотность, $v_x^R = 0$ — нормальная компонента скорости,

$v_y^R = 0.99$ — тангенциальная компонента скорости. Решение приведено на момент времени $t = 0.4$. Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Были использованы неотражающие граничные условия и расчётная сетка 200 ячеек. Для численного решения задачи Римана используем схему Русанова. Результаты моделирования показаны на рис. 5. В связи с нелинейностью фактора Лорен-

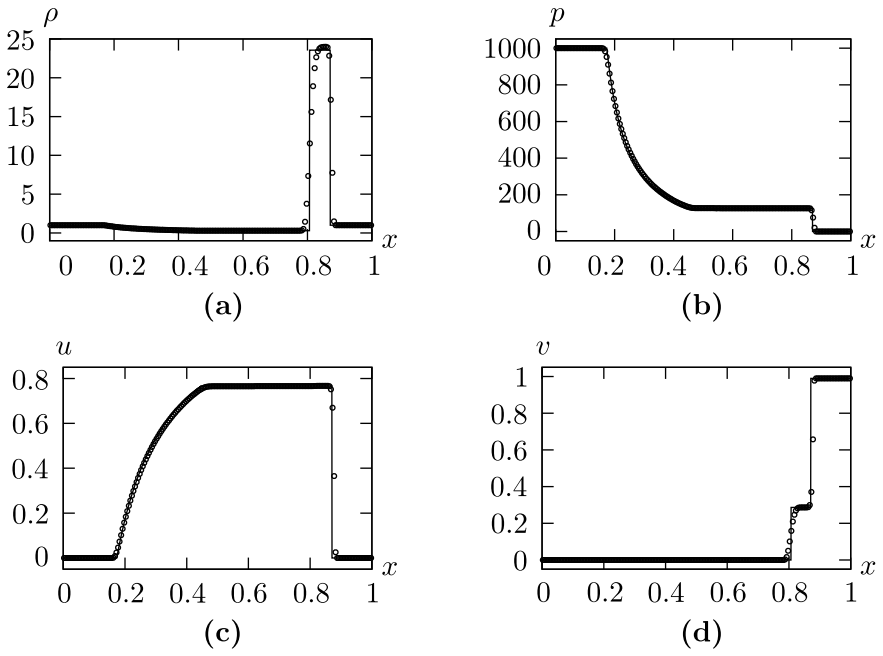


Рис. 5. Задача о распаде разрыва с сильной ударной волной при ненулевой тангенциальной скорости. Точное решение обозначено сплошной линией, численное решение обозначено кружками: (a) плотность, (b) давление, (c) нормальная компонента скорости, (d) тангенциальная компонента скорости

ца тангенциальная компонента скорости достаточно сильно влияет не только на нормальную компоненту, но и на решение в целом. Сложность теста заключается в наличии тангенциальной скорости в холодном газе, что требует от метода корректного воспроизведения ударного воздействия со стороны горячего газа. Предложенный численный метод с малой диссипацией корректно справился с воспроизведением всех компонент решения. Отметим, что несмотря на наличие в тесте оболочки плотного газа, её разрешение достаточно для корректного воспроизведения скорости распространения ударной волны, что не имело место в предыдущем тесте.

3.4. Исследование сходимости численной схемы

Приведём также результаты анализа порядка сходимости метода в норме L_1:

$$L_1 = \sum_i \Delta x |u_i - u(x_i)|,$$

где $u(x_i)$ — точное решение в точке x_i, u_i — численный результат, Δx — шаг равномерной сетки. Порядок сходимости Q будем оценивать как логарифм по основанию два отношения погрешности на последовательности измельчённых сеток.

Из таблицы видно, что в первой тестовой задаче воспроизведение профиля плотности достаточно сложная численная проблема. Особенно эта проблема возникает в области основания контактного разрыва и на волне разрежения. Порядок сходимости в этом случае достигает 0.7, при этом порядок сходимости для функций давления и скорости соответствует величине 0.9. Во второй тестовой задаче функция плотности также имеет порядок сходимости 0.7 из-за

Погрешность L_1 и порядок сходимости Q воспроизведения физических переменных для задач: (a) — о распаде разрыва, (b) — о распаде разрыва с сильной ударной волной, (c) — о распаде разрыва с сильной ударной волной при ненулевой тангенциальной скорости

Физические переменные	Размер сетки	L_1^a	Q^a	L_1^b	Q^b	L_1^c	Q^c
Плотность	100	1.107×10^{-1}		2.126×10^{-1}		6.150×10^{-1}	
	200	6.385×10^{-2}	0.794	1.584×10^{-1}	0.425	3.348×10^{-1}	0.877
	400	3.186×10^{-2}	1.003	1.024×10^{-1}	0.629	2.096×10^{-1}	0.675
	800	1.999×10^{-2}	0.673	5.591×10^{-2}	0.873	1.306×10^{-1}	0.683
	1600	1.177×10^{-2}	0.763	3.077×10^{-2}	0.861	6.573×10^{-2}	0.991
	3200	7.257×10^{-3}	0.698	1.921×10^{-2}	0.680	3.630×10^{-2}	0.857
Давление	100	6.561×10^{-2}		5.116		8.466	
	200	3.575×10^{-2}	0.876	2.470	1.051	4.301	0.977
	400	1.818×10^{-2}	0.975	1.139	1.116	2.215	0.957
	800	1.003×10^{-2}	0.858	5.179×10^{-1}	1.137	1.141	0.956
	1600	5.413×10^{-3}	0.890	2.594×10^{-1}	0.997	5.726×10^{-1}	0.996
	3200	2.942×10^{-3}	0.879	1.292×10^{-1}	1.006	2.881×10^{-1}	0.991
Продольная скорость	100	1.276×10^{-2}		4.658×10^{-2}		1.833×10^{-2}	
	200	7.047×10^{-3}	0.857	2.384×10^{-2}	0.966	9.720×10^{-3}	0.916
	400	2.508×10^{-3}	1.490	1.286×10^{-2}	0.890	5.361×10^{-3}	0.858
	800	1.686×10^{-3}	0.573	5.909×10^{-3}	1.122	3.144×10^{-3}	0.770
	1600	9.092×10^{-4}	0.891	3.239×10^{-3}	0.867	1.514×10^{-3}	1.054
	3200	5.054×10^{-4}	0.847	1.802×10^{-3}	0.845	8.396×10^{-4}	0.851
Поперечная скорость	100					1.315×10^{-2}	
	200					7.089×10^{-3}	0.892
	400					4.169×10^{-3}	0.766
	800					2.434×10^{-3}	0.776
	1600					1.176×10^{-3}	1.049
	3200					6.482×10^{-4}	0.860

сложности воспроизведения тонкой оболочки, функция скорости воспроизводится чуть лучше с порядком 0.9, а функция давления имеет первый порядок сходимости. В третьем тесте при наличии тангенциальной составляющей скорости при более сложном характере течения порядок сходимости для функций плотности и обеих компонент скорости соответствует величине 0.9, в то время как для функции давления достигается первый порядок. Отметим, что в целом величины погрешности и порядки сходимости разработанного в статье численного метода соответствуют результатам для методов Roe [11] и HLL [29], в которых используется кусочно-параболическая реконструкция физических переменных. Отметим, что анализ порядка точности на разрывных решениях весьма условен и говорит о диссипативных свойствах построенного метода, а не о порядке точности метода на гладких решениях. В работе [25] было показано, что на достаточно гладких решениях достигается второй порядок точности при использовании кусочно-параболической аппроксимации.

3.5. Задача о взаимодействии двух релятивистских джетов

Рассмотрим задачу о взаимодействии двух релятивистских струй, движущихся навстречу друг другу с фактором Лоренца $\Gamma = 10$ и релятивистским числом Маха $\mathcal{M} = 8$. Плотность джетов $\rho_J = 10^{-3}$ см$^{-3}$, радиус джетов $R_J = 200$ парсек. Атмосфера галактики имеет температуру $T_A = 10^7$ Кельвинов и плотность $\rho_A = 10^{-2}$ см$^{-3}$. Показатель адиабаты выбран $\gamma = 5/3$. На рис. 6 представлены результаты моделирования взаимодействия галактических струй. Из рис. 6 видна характерная картина взаимодействующих джетов. В обеих джетах впереди идёт сферическая ударная волна, распространяющаяся со скоростью света. Заметим, что численная методика не вносит артефактов вдоль координатных линий в виде "карбункл"-эффектов.

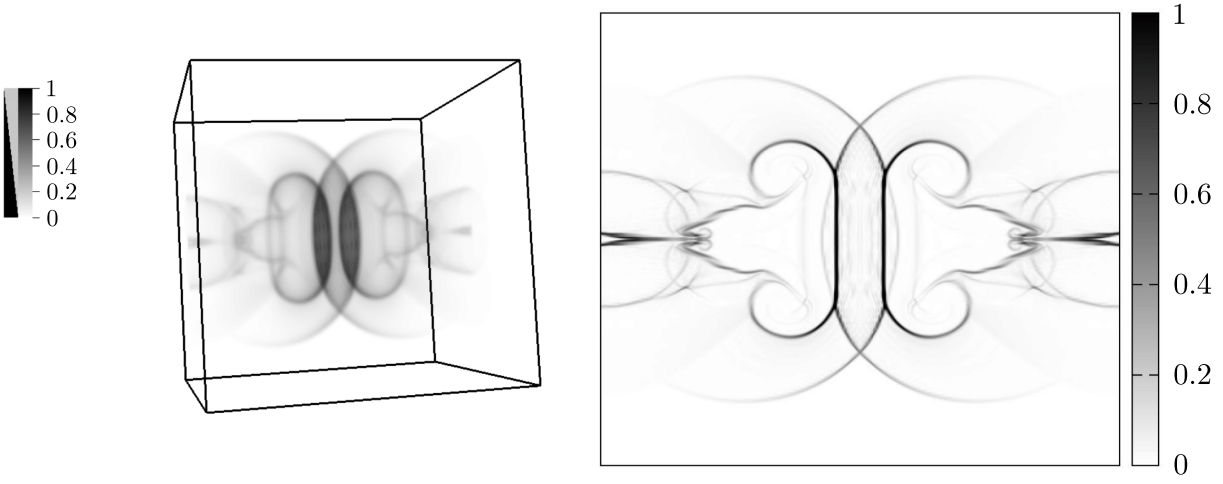


Рис. 6. Относительный шлирен плотности газа на момент времени 2000 лет

За ударным фронтом лежит оболочка с системой взаимодействующих ударных волн. Внутри оболочки лежит разреженная область кокона. При взаимодействии струй область горячей точки становится достаточно протяжённой и составляет порядка одного килопарсек.

4. ДИСКУССИЯ

Отметим следующие дискуссионные моменты, касающиеся построенной модификации схемы Русанова:

1. Вне зависимости от использованной численной схемы решения задачи Римана (схемы Русанова, Лакса-Фридрихса, HLL или Poe) диссипация на ударной волне происходит всего на две ячейки. Это связано с тем, что основе влияние на диссипацию ударной волны оказывает тип использованной кусочно-полиномиальной реконструкции, а не схема решения задачи Римана.

2. Диссипативность схемы Русанова достаточно хорошо компенсируется робастностью и отсутствием численных артефактов. Тем не менее перспективным развитием схемы является её комбинация со схемой типа Poe [11] для получения робастной безартефактной схемы с пониженной диссипативностью. Основной задачей является нахождение надёжного (и робастного) подхода к определению весовых коэффициентов.

3. В статье предложена кусочно-параболическая реконструкция физических переменных. Для дальнейшего уменьшения диссипации схемы планируется использовать кусочно-кубическую реконструкцию на основе работы [31].

4. Результаты трёхмерных вычислительных экспериментов показали, что в численном решении отсутствуют артефакты вдоль координатных линий. Такой эффект наблюдается даже в схемах типа HLLC [32].

5. Вычислительные эксперименты показали, что схема Русанова успешно может быть расширена на уравнения специальной релятивистской магнитной гидродинамики. С учётом сложности построения устойчивого решения полной спектральной задачи Римана для такой модели использование схемы Русанова позволит получить надёжный численный метод для решения этих задач.

6. Открытым остаётся вопрос об использовании дополнительного уравнения для энтропии в уравнениях специальной релятивистской гидродинамики. Уравнение для энтропии используется для достижения устойчивости численного решения при восстановлении физических переменных [33] и в задачах коллапса при образовании чёрных дыр [34]. Использованию уравнения для энтропии при регуляризации уравнений гидродинамики посвящены работы [35–37].

7. Также открытым остаётся вопрос о виде уравнения полной энергии. Как известно эквивалентность энергии и массы позволяет записать уравнение энергии в различных формах [29]. По всей видимости требуется формулировка эталонного теста, который покажет область применения различных форм уравнений полной энергии. Это применимо и для озвученного выше энтропийного уравнения.

8. Традиционно диссипативные свойства численных методов верифицируются на задачах о распаде разрыва. Для задач гидродинамики, магнитной гидродинамики, релятивистской гидродинамики, магнитной релятивистской гидродинамики построены аналитические решения, с которыми происходит сравнение и анализируется порядок точности. Это апробированный подход лежит в основе многих статей. Однако, важно дисспативные свойства учитывать при развитии неустойчивостей. Такой анализ позволяет оценить (хотя бы на качественном уровне) возможность метода не подавлять развитие как физической неустойчивости, так и оценивать масштаб численных артефактов, создаваемых численным методом. В задачах релятивистской гидродинамики такими эталонными задачами могут служить задача о развитии неустойчивости типа Кельвина-Гельмгольца и задача о двумерном распаде разрыва с четырьмя различными состояниями газа. В дальнейших работах на этих двух задачах планируется провести детальное сравнение разработанных численных схем в части диссипативных свойств, влияющих на воспроизведение физических неустойчивостей и генерацию численных артефактов.

Разумеется приведённые моменты являются дискуссионными, отражают только личную позицию автора и скорее являются планом возможного развития численной методики, приведённой в настоящей статье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен новый вариант схемы Русанова на основе кусочно-параболического представления физических переменных для уменьшения диссипации численного метода. Проведена верификация разработанной схемы на классических задачах о распаде разрыва и на задаче о взаимодействии двух релятивистских джетов в трёхмерной постановке. На первой задаче о распаде разрыва показано преимущество разработанной схемы над схемами HLL и Рое в части отсутствия численных артефактов в различных компонентах решения. На второй и третьей задаче о распаде разрыва показана возможность метода воспроизводить течения с "тонкими" областями высокой плотности, в том числе и при наличии тангенциальной скорости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для уменьшения диссипации численного метода мы будем использовать кусочно-параболическую реконструкцию физических переменных. Для определённости будем конструировать кусочно-параболическую функцию физической переменной $q(x)$ на регулярной сетке с шагом Δx, на интервале $[x_i, x_{i+1}]$. Для простоты будем использовать индекс i. В общем виде парабола может быть записана как:

$$q(x) = q_i^L + \xi \left(\triangle q_i + q_i^{(6)} (1 - \xi) \right),$$

где q_i — значение в центре ячейки, $\xi = (x - x_i)\Delta x^{-1}$, $\triangle q_i = q_i^L - q_i^R$ и $q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$ при условии сохранения консервативности, то есть:

$$q_i = \Delta x^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)dx.$$

Опишем конструирование параболы по шагам.

На первом шаге конструируем значения $\delta q_i = 1/2(q_{i+1} - q_{i-1})$. Для избежания экстремумов функций используем формулу:

$$\delta_m q_i = \begin{cases} min(|\delta q_i|, 2|q_{i+1} - q_i|, 2|q_i - q_{i-1}|)sign(\delta q_i), & (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) > 0, \\ 0, & (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) \leqslant 0. \end{cases}$$

После чего пересчитываем значения на границе с помощью интерполянта четвёртого порядка точности:

$$q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2} = 1/2(q_i + q_{i+1}) - 1/6(\delta_m q_{i+1} - \delta_m q_i).$$

На втором шаге алгоритма начинаем конструировать саму локальную параболу с помощью формулы:

$$\triangle q_i = q_i^L - q_i^R, \qquad q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R)).$$

В случае немонотонности локальной параболы (такое имеет место на разрывах) перестраиваем значения на границах q_i^L, q_i^R по формулам:

$$q_i^L = q_i, q_i^R = q_i, (q_i^L - q_i)(q_i - q_i^R) \leqslant 0,$$

$$q_i^L = 3q_i - 2q_i^R, \triangle q_i q_i^{(6)} > (\triangle q_i)^2,$$

$$q_i^R = 3q_i - 2q_i^L, \triangle q_i q_i^{(6)} < -(\triangle q_i)^2.$$

Таким образом, граничные значения удовлетворяют условиям монотонности.

На третьем шаге перестроим параметры параболы с учётом новых значений на границах ячеек:

$$\triangle q_i = q_i^L - q_i^R,$$

$$q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R)).$$

Напомним, что локальные параболы используются как составная часть задачи Римана, так как могут быть разрывны на интерфейсах.

На четвёртом шаге происходит финальная перестройка параболы с учётом новых значений на границах ячеек:

$$\triangle q_i = q_i^L - q_i^R,$$

$$q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R)).$$

В результате локальная парабола в каждой ячейке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ получена.

Левые и правые значения физических переменных пересчитываются по формулам:

$$q_L(-\lambda_L \tau) = q_i^R - \frac{\lambda_L \tau}{2h} \left(\triangle q_i - q_i^6 \left(1 - \frac{2\lambda_L \tau}{3\Delta x} \right) \right),$$

в противном случае

$$q_R(\lambda_R \tau) = q_i^L + \frac{\lambda_R \tau}{2h} \left(\triangle q_i + q_i^6 \left(1 - \frac{2\lambda_R \tau}{3\Delta x} \right) \right),$$

где $\lambda_{L,R}$ — соответствующее собственное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chechetkin V. M., D'yachenko V. F., Ginzburg S. L., Paleichik V. V., Fimin N. N., Sudarikov A. L.* On the generation mechanism of hard cosmic gamma-ray emission from AGN jets // Astron. Rep. 2009. V. 53. P. 501–509.
2. *Barkov M. V., Bisnovatyi-Kogan G. S.* Interaction of a cosmological gamma-ray burst with a dense molecular cloud and the formation of jets // Astron. Rep. 2005. V. 49. P. 24–35.
3. *Sotomayor P., Romero G.* Nonthermal radiation from the central region of super-accreting active galactic nuclei // Astron. Astrophys. 2022. V. 664. Article A178.
4. *Sokolov V. V., Bisnovatyi-Kogan G. S., Kurt V. G., Gnedin Yu. N., Baryshev Yu. V.* Observational constraints on the angular and spectral distributions of photons in gamma-ray burst sources // Astron. Rep. 2006. V. 50. P. 612–625.
5. *Komissarov S. S.* Simulations of the axisymmetric magnetospheres of neutron stars // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2006. V. 367. P. 19–31.
6. *Tutukov A. V., Bogomazov A. I.* Radio pulsars in close binaries with neutron stars // Astron. Rep. 2008. V. 52. P. 390–402.
7. *Istomin Ya. N., Komberg B. V.* Gamma-ray bursts as a result of the interaction of a shock from a supernova and a neutron-star companion // Astron. Rep. 2002. V. 46. P. 908–917.
8. *Fateev V. F., Davlatov R. A.* Space-Based Gravitational-Wave Detectors: Development of Ground-Breaking Technologies for Future Space-Based Gravitational Gradiometers // Astron. Rep. 2019. V. 63. P. 699–709.
9. *Belyaev V. S., Bisnovatyi-Kogan G. S., Gromov A. I., Zagreev B. V., Lobanov A. V., Matafonov A. P., Moiseenko S. G., Toropina O. D.* Numerical Simulations of Magnetized Astrophysical Jets and Comparison with Laboratory Laser Experiments // Astron. Rep. 2018. V. 62. P. 162–182.
10. *Krauz V. I., Mitrofanov K. N., Kharrasov A. M., Il'ichev I. V., Myalton V. V., Anan'ev S. S., Beskin V. S.* Laboratory Modeling of the Rotation of Jets Ejected from Young Stellar Objects at Studies the Azimuthal Structure of an Axial Jet at the PF-3 Facility // Astron. Rep. 2021. V. 65. P. 26–44.
11. *Kulikov I.* A new code for the numerical simulation of relativistic flows on supercomputers by means of a low-dissipation scheme // Comput. Phys. Commun. 2020. V. 257. Article 107532.
12. *Rusanov V. V.* The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers // Comput. Math. Math. Phys. 1961. V. 1. P. 267–279.
13. *Mohamed K., Benkhaldoun F.* A modified Rusanov scheme for shallow water equations with topography and two phase flows // Eur. Phys. J. Plus. 2016. V. 131. Article 207.
14. *Wu C., Walker R., Dawson J.* A three dimensional MHD model of the Earth's magnetosphere // Geophys. Res. Lett. 1981. V. 8, N 5. P. 523–526.
15. *Mohamed K., Abdelrahman M.* The modified Rusanov scheme for solving the ultra-relativistic Euler equations // Eur. J. Mech. B Fluids. 2021. V. 90. P. 89–98
16. *Mohammadian S., Moghaddam A., Sahaf A.* On the performance of HLL, HLLC, and Rusanov solvers for hyperbolic traffic models // Comput. Fluids. 2021. V. 231. Article 105161.
17. *Nishikawa H., Kitamura K.* Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. P. 2560–2581.
18. *Townsend J., Koenoezsy L., Jenkins K.* On the development of a rotated-hybrid HLL/HLLC approximate Riemann solver for relativistic hydrodynamics // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2020. V. 496, N 2. P. 2493–2505.
19. *Jaisankar S., Raghurama Rao S.* Diffusion regulation for Euler solvers // J. Comput. Phys. 2007. V. 221, N 2. P. 577–599.
20. *Mazaheri A., Nishikawa H.* High-order shock-capturing hyperbolic residual-distribution schemes on irregular triangular grids // Comput. Fluids. 2016. V. 131. P. 29–44.
21. *Rossi G., Dumbser M., Armanini A.* A well-balanced path conservative SPH scheme for nonconservative hyperbolic systems with applications to shallow water and multi-phase flows // Comput. Fluids. 2017. V. 154. P. 102–122.

22. *Balsara D.* Three dimensional HLL Riemann solver for conservation laws on structured meshes; Application to Euler and magnetohydrodynamic flows // J. Comput. Phys. 2015. V. 295. P. 1–23.

23. *Popov M., Ustyugov S.* Piecewise parabolic method on local stencil for gasdynamic simulations // Comput. Math. Math. Phys. 2007. V. 47, N 12. P. 1970–1989.

24. *Popov M., Ustyugov S.* Piecewise parabolic method on a local stencil for ideal magnetohydrodynamics // Comput. Math. Math. Phys. 2008. V. 48, N 3. P. 477–499.

25. *Kulikov I., Vorobyov E.* Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // J. Comput. Phys. 2016. V. 317. P. 318–346.

26. *Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A.* A New Hydrodynamic Code with Explicit Vectorization Instructions Optimizations that Is Dedicated to the Numerical Simulation of Astrophysical Gas Flow. I. Numerical Method, Tests, and Model Problems // Astrophys. J. Suppl. Ser. 2019. V. 243. Article 4.

27. *Kriksin Y. A., Tishkin V. F.* Variational Entropic Regularization of the Discontinuous Galerkin Method for Gasdynamic Equations // Math. Models Comput. Simul. 2019. V. 11. P. 1032–1040.

28. *Kulikov I., Chernykh I., Karavaev D., Prigarin V., Sapetina A., Ulyanichev I., Zavyalov O.* A New Parallel Code Based on a Simple Piecewise Parabolic Method for Numerical Modeling of Colliding Flows in Relativistic Hydrodynamics // Mathematics. 2022. V. 10, N 11. Article 1865.

29. *Kulikov I. M., Karavaev D. A.* A Piecewise-Parabolic Reconstruction of the Physical Variables in a Low-Dissipation HLL Method for the Numerical Solution of the Equations of Special Relativistic Hydrodynamics // Numer. Anal. Appl. 2023. V. 16. P. 45–60.

30. *Kulikov I. M.* A Low-Dissipation Numerical Scheme Based on a Piecewise Parabolic Method on a Local Stencil for Mathematical Modeling of Relativistic Hydrodynamic Flows // Numer. Anal. Appl. 2020. V. 13. P. 117–126.

31. *Lee D., Faller H., Reyes A.* The Piecewise Cubic Method (PCM) for computational fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2017. V. 341. P. 230–257.

32. *Wang P., Abel T., Zhang W.* Relativistic Hydrodynamic Flows Using Spatial and Temporal Adaptive Structured Mesh Refinement // Astrophys. J. Suppl. Ser. 2008. V. 176. P. 467–483.

33. *Bhoriya D., Kumar H.* Entropy-stable schemes for relativistic hydrodynamics equations // Z. Angew. Math. Phys. 2020. V. 71. Article 29.

34. *Guercilena F., Radice D., Rezzolla L.* Entropy-limited hydrodynamics: a novel approach to relativistic hydrodynamics // Comput. Astrophys. Cosmol. 2017. V. 4. Article 3.

35. *Zlotnik A. A.* Spatial discretization of the one-dimensional quasi-gasdynamic system of equations and the entropy balance equation // Comput. Math. Math. Phys. 2012. V. 52. P. 1060–1071.

36. *Gavrilin V. A., Zlotnik A. A.* On spatial discretization of the one-dimensional quasi-gasdynamic system of equations with general equations of state and entropy balance // Comput. Math. Math. Phys. 2015. V. 55. P. 264–281.

37. *Zlotnik A. A.* Entropy-conservative spatial discretization of the multidimensional quasi-gasdynamic system of equations // Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. P. 706–725.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.6

USING PIECEWISE PARABOLIC RECONSTRUCTION OF PHYSICAL VARIABLES IN THE RUSANOV SOLVER. I. THE SPECIAL RELATIVISTIC HYDRODYNAMICS EQUATIONS

© 2023 I. M. Kulikov

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia

E-mail: kulikov@ssd.sscc.ru

Received 04.06.2023, revised 07.07.2023, accepted 09.08.2023

Abstract. The Rusanov solver for solving hydrodynamic equations is one of the most robust schemes in the class of Riemann solvers. For special relativistic hydrodynamics, the robustness condition of the scheme is the most important property, especially for sufficiently high values of the Lorentz factor. At the same time, the Rusanov solver is known to be very dissipative. It is proposed to use a piecewise parabolic representation of physical variables to reduce the dissipation of the Rusanov scheme. Using this approach has made it possible to obtain a scheme with the same dissipative properties as Roe-type schemes and the family of Harten—Lax—van Leer schemes. Using the problem of the decay of a relativistic hydrodynamic discontinuity, it is shown that the present author's version of the Rusanov scheme is advantageous in terms of reproducing a contact discontinuity. The scheme is verified on classical problems of discontinuity decay and on the problem of the interaction of two relativistic jets in the three-dimensional formulation.

Keywords: computational astrophysics, relativistic hydrodynamics, numerical method, Rusanov solver, piecewise parabolic method.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.404

REFERENCES

1. V. M. Chechetkin, V. F. D'yachenko, S. L. Ginzburg, V. V. Paleichik, N. N. Fimin, and A. L. Sudarikov, "On the generation mechanism of hard cosmic gamma-ray emission from AGN jets," Astron. Rep. **53**, 501–509 (2009).
2. M. V. Barkov and G. S. Bisnovatyi-Kogan, "Interaction of a cosmological gamma-ray burst with a dense molecular cloud and the formation of jets," Astron. Rep. **49**, 24–35 (2005).
3. P. Sotomayor and G. Romero, "Nonthermal radiation from the central region of super-accreting active galactic nuclei," Astron. Astrophys. **664**, A178 (2022).
4. V. V. Sokolov, G. S. Bisnovatyi-Kogan, V. G. Kurt, Yu. N. Gnedin, and Yu. V. Baryshev, "Observational constraints on the angular and spectral distributions of photons in gamma-ray burst sources," Astron. Rep. **50**, 612–625 (2006).
5. S. S. Komissarov, "Simulations of the axisymmetric magnetospheres of neutron stars," Mon. Not. R. Astron. Soc. **367**, 19–31 (2006).
6. A. V. Tutukov and A. I. Bogomazov, "Radio pulsars in close binaries with neutron stars," Astron. Rep. **52**, 390–402 (2008).
7. Ya. N. Istomin and B. V. Komberg, "Gamma-ray bursts as a result of the interaction of a shock from a supernova and a neutron-star companion," Astron. Rep. **46**, 908–917 (2002).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 737–749.

8. V. F. Fateev and R. A. Davlatov, "Space-based gravitational-wave detectors: Development of groundbreaking technologies for future space-based gravitational gradiometers," Astron. Rep. **63**, 699–709 (2019).
9. V. S. Belyaev, G. S. Bisnovatyi-Kogan, A. I. Gromov, B. V. Zagreev, A. V. Lobanov, A. P. Matafonov, S. G. Moiseenko, and O. D. Toropina, "Numerical simulations of magnetized astrophysical jets and comparison with laboratory laser experiments," Astron. Rep. **62**, 162–182 (2018).
10. V. I. Krauz, K. N. Mitrofanov, A. M. Kharrasov, I. V. Il'ichev, V. V. Myalton, S. S. Anan'ev, and V .S. Beskin, "Laboratory modeling of the rotation of jets ejected from young stellar objects at studies the azimuthal structure of an axial jet at the PF-3 facility," Astron. Rep. **65**, 26–44 (2021).
11. I. Kulikov, "A new code for the numerical simulation of relativistic flows on supercomputers by means of a low-dissipation scheme," Comput. Phys. Commun. **257**, 107532 (2020).
12. V. V. Rusanov, "The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers," Comput. Math. Math. Phys. **1**, 267–279 (1961).
13. K. Mohamed and F. Benkhaldoun, "A modified Rusanov scheme for shallow water equations with topography and two phase flows," Eur. Phys. J. Plus **131**, 207 (2016).
14. C. Wu, R. Walker, and J. Dawson, "A three dimensional MHD model of the Earth's magnetosphere," Geophys. Res. Lett. **8** (5), 523–526 (1981).
15. K. Mohamed and M. Abdelrahman, "The modified Rusanov scheme for solving the ultra-relativistic Euler equations," Eur. J. Mech. — B/Fluids **90**, 89–98 (2021).
16. S. Mohammadian, A. Moghaddam, and A. Sahaf, "On the performance of HLL, HLLC, and Rusanov solvers for hyperbolic traffic models," Comput. Fluids **231**, 105161 (2021).
17. H. Nishikawa and K. Kitamura, "Very simple, carbuncle-free, boundary-layer-resolving, rotated-hybrid Riemann solvers," J. Comput. Phys. **227**, 2560–2581 (2008).
18. J. Townsend, L. Koenoezsy, and K. Jenkins, "On the development of a rotated-hybrid HLL/HLLC approximate Riemann solver for relativistic hydrodynamics," Mon. Not. R. Astron. Soc. **496** (2), 2493–2505 (2020).
19. S. Jaisankar and S. Raghurama Rao, "Diffusion regulation for Euler solvers," J. Comput. Phys. **221** (2), 577–599 (2007).
20. A. Mazaheri and H. Nishikawa, "High-order shock-capturing hyperbolic residual-distribution schemes on irregular triangular grids," Comput. Fluids **131**, 29–44 (2016).
21. G. Rossi, M. Dumbser, and A. Armanini, "A well-balanced path conservative SPH scheme for nonconservative hyperbolic systems with applications to shallow water and multi-phase flows," Comput. Fluids **154**, 102–122 (2017).
22. D. Balsara, "Three dimensional HLL Riemann solver for conservation laws on structured meshes: Application to Euler and magnetohydrodynamic flows," J. Comput. Phys. **295**, 1–23 (2015).
23. M. Popov and S. Ustyugov, "Piecewise parabolic method on local stencil for gasdynamic simulations," Comput. Math. Math. Phys. **47** (12), 1970–1989 (2007).
24. M. Popov and S. Ustyugov, "Piecewise parabolic method on a local stencil for ideal magnetohydrodynamics," Comput. Math. Math. Phys. **48** (3), 477–499 (2008).
25. I. Kulikov and E. Vorobyov, "Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operatorsplitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows," J. Comput. Phys. **317**, 318–346 (2016).
26. I. Kulikov, I. Chernykh, and A. Tutukov, "A new hydrodynamic code with explicit vectorization instructions optimizations that is dedicated to the numerical simulation of astrophysical gas flow. I. Numerical method, tests, and model problems," Astrophys. J. Suppl. Ser. **243**, 4 (2019).
27. Y. A. Kriksin and V. F. Tishkin, "Variational entropic regularization of the discontinuous Galerkin method for gasdynamic equations," Math. Models Comput. Simul. **11**, 1032–1040 (2019).
28. I. Kulikov, I. Chernykh, D. Karavaev, V. Prigarin, A. Sapetina, I. Ulyanichev, and O. Zavyalov, "A new parallel code based on a simple piecewise parabolic method for numerical modeling of colliding flows in relativistic hydrodynamics," Mathematics **10** (11), 1865 (2022).

29. I. M. Kulikov and D. A. Karavaev, "A piecewise-parabolic reconstruction of the physical variables in a low-dissipation HLL method for the numerical solution of the equations of special relativistic hydrodynamics," Numer. Anal. Appl. **16**, 45–60 (2023).
30. I. M. Kulikov, "A low-dissipation numerical scheme based on a piecewise parabolic method on a local stencil for mathematical modeling of relativistic hydrodynamic flows," Numer. Anal. Appl. **13**, 117–126 (2020).
31. D. Lee, H. Faller, and A. Reyes, "The piecewise cubic method (PCM) for computational fluid dynamics," J. Comput. Phys. **341**, 230–257 (2017).
32. P. Wang, T. Abel, and W. Zhang, "Relativistic hydrodynamic flows using spatial and temporal adaptive structured mesh refinement," Astrophys. J. Suppl. Ser. **176**, 467–483 (2008).
33. D. Bhoriya and H. Kumar, "Entropy-stable schemes for relativistic hydrodynamics equations," Z. Angew. Math. Phys. **71**, 29 (2020).
34. F. Guercilena, D. Radice, and L. Rezzolla, "Entropy-limited hydrodynamics: A novel approach to relativistic hydrodynamics," Comput. Astrophys. Cosmol. **4**, 3 (2017).
35. A. A. Zlotnik, "Spatial discretization of the one-dimensional quasi-gasdynamic system of equations and the entropy balance equation," Comput. Math. Math. Phys. **52**, 1060–1071 (2012).
36. V. A. Gavrilin and A. A. Zlotnik, "On spatial discretization of the one-dimensional quasi-gasdynamic system of equations with general equations of state and entropy balance," Comput. Math. Math. Phys. **55**, 264–281 (2015).
37. A. A. Zlotnik, "Entropy-conservative spatial discretization of the multidimensional quasi-gasdynamic system of equations," Comput. Math. Math. Phys. **57**, 706–725 (2017).

УДК 519.63

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

© 2023 **Г. Г. Лазарева**[1a], **И. П. Оксогоева**[1b], **А. В. Судников**[2c]

[1] *Российский университет дружбы народов, ул. Миклухо-Маклая, 6, г. Москва 117198, Россия,*
[2] *Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 11, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]lazareva-gg@rudn.ru, [b]oksogi@mail.ru, [c]a.v.sudnikov@inp.nsk.su

Поступила в редакцию 16.05.2023 г.; после доработки 17.10.2023 г.;
принята к публикации 01.11.2023 г.

В работе представлены результаты математического моделирования переноса плазмы в спиральном магнитном поле с использованием новых экспериментальных данных, полученных на установке СМОЛА, созданной в ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН. Удержание плазмы в установке осуществляется за счёт передачи импульса от магнитного поля с винтовой симметрией вращающейся плазме. Математическая модель основана на стационарном уравнении переноса плазмы в аксиально-симметричной постановке. Полученное с помощью численного моделирования распределение концентрации вещества подтвердило эффект удержания, полученный в эксперименте. Получены зависимости интегральных характеристик вещества от глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Проведено сравнение численной реализации модели методом установления и методом Зейделя.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнение переноса, винтовое магнитное поле.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.405

ВВЕДЕНИЕ

Исследования течения плазмы в магнитном поле представляют существенный интерес для управляемого термоядерного синтеза [1], изучения стойкости материалов под воздействием мощных тепловых нагрузок [2], лабораторного моделирования астрофизических процессов [3] и ряда других фундаментальных и прикладных научных задач. Для решения задач управляемого термоядерного синтеза необходимо удерживать высокотемпературную плазму достаточной плотности в ограниченной области пространства. Для положительного энергетического выхода произведение плотности плазмы и энергетического времени жизни должно превышать пороговую величину (для смеси дейтерия и трития — $n\tau \sim 10^{20}$ с/м^3, для чистого дейтерия — $n\tau \sim 10^{22}$ с/м^3) [4]. Повышение времени жизни достигается за счёт снижения потерь энергии из области удержания. Основным методом термоизоляции плазмы, рассматриваемым на сегодняшний день, является её удержание в магнитном поле с различными конфигурациями [1]. Наибольший прогресс достигнут в системах с тороидальной топологией магнитного поля. Альтернативным подходом является удержание плазмы в открытых магнитных системах, где поле

Работа Лазаревой Галины Геннадьевны и Оксогоевой Ирины Павловны выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение 075-15-2022-1115). Работа Судникова Антона Вячеславовича, относящаяся к постановке задачи на основе экспериментальных данных, выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-12-00133).

близко к осесимметричному, а его силовые линии пересекают границу области удержания в двух точках [5]. Плюсами данного подхода являются более эффективное использование энергии магнитного поля, масштабируемость и инженерная простота системы. Основной научной задачей физики открытых ловушек является снижение потерь частиц и энергии вдоль силовых линий магнитного поля в областях, где они покидают область удержания.

Достигнут большой прогресс в понимании физики открытых магнитных конфигураций и достигнутых параметров плазмы [6]. На сегодняшний день предложен и экспериментально проверен ряд возможных решений задачи продольного удержания, в том числе, подавление продольных потерь периодическим магнитным полем (многопробочное удержание) [5]. Удержание плазмы магнитным полем с винтовой симметрией было предложено в качестве развития метода многопробочного удержания [7]. В системе отсчёта вращающейся плазмы движение магнитных возмущений имеет компоненту скорости, сонаправленную с магнитным полем, что позволяет передавать импульс запертым частицам. Столкновения между пролётными и запертыми частицами обеспечивают эффективную силу, действующую на плазму в целом и способствующую возврату ионов в область удержания. Установка СМОЛА (Спиральная Магнитная Открытая Ловушка) разработана и построена в 2017 году в Институте ядерной физики СО РАН им. Г. И. Будкера для экспериментальной проверки этой идеи [8, 9]. Область, в которой удерживается плазма в установке СМОЛА, с одной стороны ограничена классической пробкой, с другой — многопробочной секцией с винтовым магнитным полем. В эксперименте варьируются такие параметры, как продольное магнитное поле, соотношение продольного и винтового магнитных полей, плотность и скорость вращения плазмы. Установка СМОЛА предназначена для моделирования эффектов винтового удержания при низкой (а потому легко достижимой) температуре плазмы. Для масштабирования винтового удержания на системе термоядерного класса необходимо детальное сравнение экспериментально наблюдаемых потоков вещества с модельными и дальнейший расчёт эффективности системы большего масштаба на основе математической модели. В настоящее время показано соответствие наблюдаемых результатов приближённым теоретическим оценкам. В то же время, точного аналитического решения для теории винтового удержания не построено, поэтому сравнение может опираться на результаты численного решения уравнений движения плазмы.

Математическая модель переноса вещества в винтовом магнитном поле построена на основе уравнений из работ [7, 10] и параметров установки СМОЛА. Математическое моделирование процесса было проведено впервые в работе [11]. Цель работы состоит в валидации модели и в оптимизации параметров эксперимента.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение плазмы в центральной части ловушки, имеющей форму цилиндра (см. рис. 1). Вещество входит в область удержания из источника плазмы через левый торец цилиндра и выходит в расширитель через правую границу. Рассмотрим поперечное сечение цилиндра в плоскости (r, z). В статье [12] получены выражения для компонентов радиального и продольного переноса частиц в винтовом магнитном поле. Система уравнений описывает динамику плазмы в МГД-приближении в аксиально-симметричной постановке. Различия в движении запертых и пролётных ионов учитываются в виде эффективной силы трения, зависящей от взаимной скорости компонент и доли запертых частиц. Продольная сила, действующая на плазму, возникает в результате взаимодействия радиального электрического тока захваченных ионов с азимутальной компонентой винтового магнитного поля. Учитывается диффузия плазмы поперёк магнитного поля. Исключение зависимых переменных сводит систему уравнений к уравнению неразрывности потока:

$$l\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial(Tu)}{\partial z} + l(1+\kappa(r))\kappa(r)\frac{\partial u}{\partial z}\left(\zeta(r)\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\right) + \kappa(r)\frac{\partial}{\partial r}l\frac{1}{Z}\zeta(r)\frac{\partial(Tu)}{\partial z} + \kappa(r)\frac{\partial}{\partial r}lD\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

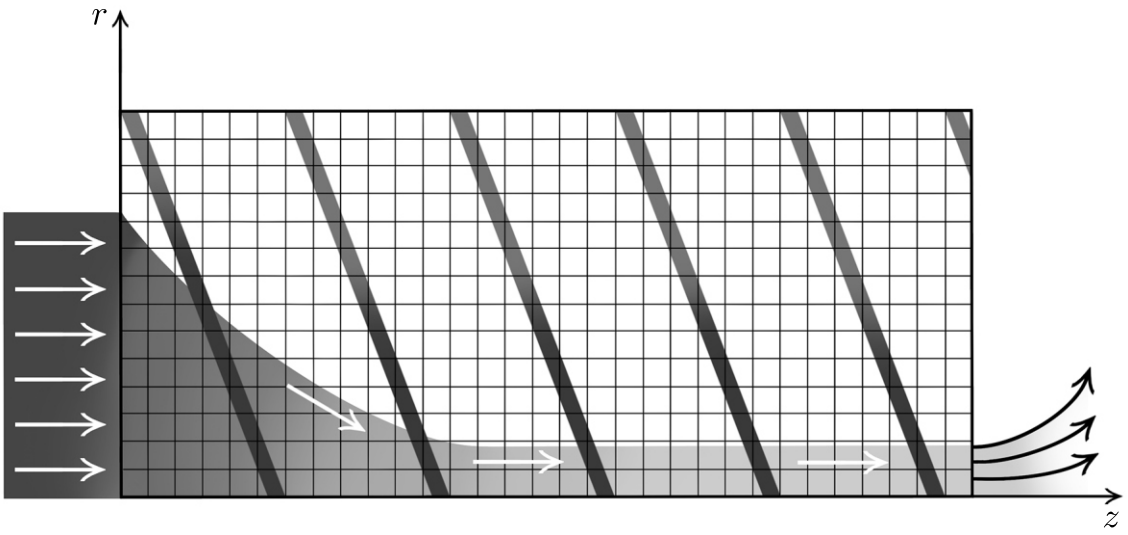


Рис. 1. Схема центральной части ловушки

где u — концентрация вещества, $T = T_i + T_e$, $T_i = 4$ Эв и $T_e = 30(1 - (r/r_0)^2)$ — ионная и электронная температуры, Λ — отношение длины системы к длине свободного пробега λ иона, $\kappa(r, R_m)$ — доля запертых частиц, $l = 216$ см — длина системы вдоль силовой линии, Z — среднее зарядовое число одного иона, D — коэффициент диффузии в поперечном поле. Доля запертых частиц $\kappa(r, R_m) = 1 - 1/R(r, R_m)$, $R(r, R_m) = 2(R_m - 1)(r/a)^2 + 1$, где $R_m = 1.52$ — глубина гофрировки. Параметр $\zeta = c/V_z$ является отношением скорости звука $c_s = (T_e/M)^{1/2}$ и продольной скорости V_z движения магнитных возмущений при вращении плазмы в собственном амбиполярном электрическом поле. В уравнении (1) физические величины обезразмерены на: $r_0 = a$, $z_0 = l$, $\phi_0 = T_e/e$, $u_0 = u_{max}$, $T_0 = T_e$, где $a = 8$ см — граница камеры, в которой может существовать плазма. Потенциал электрического поля $\phi(r)$ введён в виде полинома, интерполирующего экспериментальные данные [13]:

$$\phi(r) = -2.21776 + 1.31r - 7.79r^2 + 31.18r^3 - 33.43r^4 + 10.94r^5.$$

В моделируемом эксперименте происходит установление параметров плазмы и электромагнитного поля в течении 40 мс и затем наступает фаза, когда процесс стационарен в течении 120 мс, после чего разряд отключается. Основная задача экспериментов и математического моделирования состоит в исследовании удержания плазмы, при которых все параметры постоянны. Измеряемый с помощью зондов потенциал плазмы в экспериментах на установке СМОЛА зависит от параметров эксперимента. Максимум ϕ варьируется в пределах от $2T_e/e$ до $3T_e/e$. Максимальное значение безразмерного потенциала ϕ для установок следующего поколения, в которых возможно использование принципа винтового удержания, также лежит в этих же пределах [14, 15]. Экспериментально наблюдаемое распределение потенциала в центральной области плазмы (при значениях радиуса меньших 0.6 в безразмерных величинах) близко к квадратичному, далее в периферийной области плазмы производная потенциала по радиусу снижается. Погрешность измерения потенциала в эксперименте составляет около 5%. Степень и коэффициенты аппроксимирующего полинома подобраны таким образом, чтобы его отклонение от экспериментально измеренных в референсном эксперименте значений было сопоставимым с экспериментальной погрешностью.

Для задания влияния поля в радиальном направлении в модели используется производная абсолютной величины электрического поля:

$$q(r) = \frac{\partial|\phi(r)|}{\partial r} = |1.31 - 7.79r + 31.18r^2 - 33.43r^3 + 10.94r^4|.$$

Известно, что величина потенциала снижается с увеличением z за счёт наличия поперечной проводимости плазмы. Его распределение в пространстве задаётся следующим образом:

$$\Phi(r,z) = (1 - \frac{0.002z}{h})q(r).$$

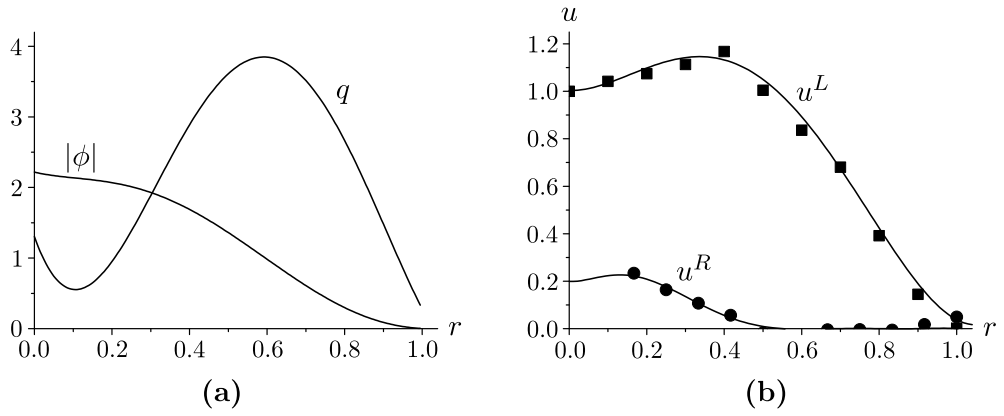


Рис. 2. Зависимости от радиуса установки модуля потенциала электрического поля и его производной (a) и граничного распределения плазмы (b) на входе (квадратики) и на выходе (кружочки)

Рассмотрим область $[0, r_{max}] \times [0, z_{max}]$ в поперечном сечении центральной части установки (рис. 1). В безразмерных величинах область является единичным квадратом. Считаем, что вещество не достигает стенок ловушки, на оси z ставим условие симметрии, на входе и выходе вещества задаём граничное распределение концентрации вещества $u(r,0) = u^L(r)$ и $u(r, z_{max}) = u^R(r)$. Для расчётов использованы экспериментальные данные [6] для распределения концентрации на границах. На рис. 2(b) приведены экспериментальные значения концентрации плазмы и их интерполяция вида:

$$u^L(r) = 1.03 + 0.46r - 1.52r^2 + 14.48r^3 - 44.17r^4 + 43.77r^5 - 14.05r^6,$$

$$u^R(r) = 0.2 - 0.12r + 9.11r^2 - 73.43r^3 + 210.13r^4 - 285.64r^5 + 188.54r^6 - 48.78r^7.$$

Таким образом, стационарная задача имеет вид:

$$\begin{gathered} C^1(r)\frac{\partial^2 u(r,z)}{\partial z^2} + C^2(r)\frac{\partial(\Phi(r,z)u(r,z))}{\partial z} + C^3(r)\frac{\partial}{\partial r}C^4(r)\frac{\partial u(r,z)}{\partial z} + C^5(r)\frac{\partial^2 u(r,z)}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0,z) = 0,\ u(r,0) = u^L(r),\ \frac{\partial u}{\partial r}(1,z) = 0,\ u(r,1) = u^R(r), \end{gathered} \tag{2}$$

где коэффициенты уравнения:

$$C^1(r) = lT(r)/\Lambda,\ C^2(r) = l(1+\kappa(r))\kappa(r)\zeta(r),\ C^3(r) = \kappa(r),$$
$$C^4(r) = l\zeta(r)T(r)/Z,\ C^5(r) = lD\kappa(r).$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В статье [11] реализован метод установления [12]. Выбор такого подхода определялся надёжностью метода и простотой контроля правильности решения. В этой работе представлена реализация задачи (2) более экономичным методом Зейделя. В ходе расчётов выяснилось, что выбор шаблона при аппроксимации смешанной производной влияет на решение. При

использовании сеточного оператора для смешанной производной на четырехточечном [11] и шеститочечном [13] шаблоне: $\Lambda_{rz} = C^3(r)(C^4(r)u_{\bar{z}})_r$ и $\Lambda_{rz} = C^3(r)(C^4(r)(u_{\bar{z}} + u_z)/2)_r$ возникали осцилляции при коэффициенте диффузии D меньшем, чем 0.001. Здесь $u_z, u_{\bar{z}}$ — разностные производные вперёд и назад. Поэтому оба метода решения (метод установления и метод Зейделя) потребовали тщательного подбора шаблона для аппроксимации смешанной производной $\kappa(r)\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{l\zeta(r)T(r)}{Z}\dfrac{\partial u(r,z)}{\partial z}$ конечными разностями. При использовании оператора $\Lambda_{rz} = C^3(r)((C^4(r)u_{\bar{z}})_r + (C^4(r)u_r)_{\bar{z}})/2$ [16] осцилляций не возникает.

Зададим на сетке с узлами $r_i = ih$, $i = 1, \ldots, N_r$, $z_k = kh$, $k = 1, \ldots, N_z$ сеточные функции $u^n_{i,k} = (u(r_i, z_k))^n$, $\Phi_{i,k} = \Phi(r_i, z_k)$, $C^1_i = C^1(r_i)$, $C^2_i = C^2(r_i)$, $C^3_i = C^3(r_i)$, $C^4_i = C^4(r_i)$, $C^5_i = C^5(r_i)$, $u^L_i = u^L(r_i)$, $u^R_i = u^R(r_i)$. Критерий сходимости $|u^{n+1}_{i,k} - u^n_{i,k}| \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-8}$.

Для реализации задачи (2) методом установления при $\tau = 10^{-4}$ использована безусловно устойчивая схема стабилизирующей поправки и метод прогонки [17]. Новый вариант разностной схемы имеет вид:

$$\begin{gathered}
\frac{u^*_{i,k} - u^n_{i,k}}{\tau} = C^1_i(u^*_{i,k+1} - 2u^*_{i,k} + u^*_{i,k-1})/h^2 + C^2_i(\Phi_{i,k+1}u^*_{i,k+1} - \Phi_{i,k-1}u^*_{i,k-1})/2h + \\
+C^3_i(C^4_{i+1/2}(u^n_{i+1,k} - u^n_{i,k} - u^n_{i+1,k-1} + u^n_{i,k-1}) + \\
+C^4_{i-1/2}(u^n_{i,k+1} - u^n_{i,k} - u^n_{i-1,k+1} + u^n_{i-1,k}))/2h^2 + C^5_i(u^n_{i+1,k} - 2u^n_{i,k} + u^n_{i-1,k})/h^2, \\
i = 1, \ldots, N_r, \quad k = 2, \ldots, N_z - 1, \quad u^*_{1,k} = u^*_{2,k}, \quad u^*_{N_r,k} = u^*_{N_r-1,k}, \\
\frac{u^{n+1}_{i,k} - u^*_{i,k}}{\tau} = C^1_i(u^{n+1}_{i+1,k} - 2u^{n+1}_{i,k} + u^{n+1}_{i-1,k})/h^2 - C^1_i(u^n_{i+1,k} - 2u^n_{i,k} + u^n_{i-1,k})/h^2, \\
i = 2, \ldots, N_r - 1, \quad k = 1, \ldots, N_z, \quad u^{n+1}_{i,1} = u^L_i, \quad u^{n+1}_{i,N_z} = u^R_i.
\end{gathered} \tag{3}$$

Решение уравнения (2) методом Зейделя [18] на каждом шаге по времени позволяет построить экономичный алгоритм. Разностная схема, основанная на методе Зейделя, имеет вид:

$$\begin{gathered}
u^{n+1}_{i,k} = (\beta^1_+ u^n_{i+1,k} + \beta^1_- u^{n+1}_{i-1,k} + \beta^2_+ u^n_{i,k+1} + \beta^2_- u^{n+1}_{i,k-1} + \beta^3_+ u^n_{i+1,k-1} + \beta^3_- u^n_{i-1,k+1})/\beta, \\
\beta = 2(C^1_i + C^5_i) + C^3_i(C^4_{i+1/2} + C^4_{i-1/2})/2, \\
\beta^1_\pm = C^5_i + (C^3_i C^4_{i\pm1/2})/2, \\
\beta^2_\pm = C^1_i \pm (hC^2_i\Phi_{i,k\pm1} + C^3_i C^4_{i\mp1/2})/2, \\
\beta^3_\pm = -(C^3_i C^4_{i\pm1/2})/2, \\
i = 2, \ldots, N_r - 1,\ k = 2, \ldots, N_z - 1,\ u^{n+1}_{1,k} = u^{n+1}_{2,k}, \\
u^{n+1}_{N_r,k} = u^{n+1}_{N_r-1,k},\ u^{n+1}_{i,1} = u^L_i,\ u^{n+1}_{i,N_z} = u^R_i.
\end{gathered} \tag{4}$$

Можно заметить, что задача (3) и алгоритм решения (4) содержат параметр $\zeta(r) = 1/Ar$, полученный аппроксимацией экспериментальных данных, здесь $A = 20$. На оси при $r = 0$ параметр ζ ограничен значением при $r = \rho_B$, где $\rho_B = V_{T_i}mc/eB$ — ларморовский радиус. Для параметров установки СМОЛА $\rho_B \approx 0.3 - 0.4$ см. Это обусловлено тем, что ион движется по ларморовской орбите (вращается в магнитном поле), поэтому его радиальная координата осциллирует. В рассматриваемой модели все воздействия осредняются, иону приписывается координата центра окружности, по которой он движется в магнитном поле. То есть координата равна нулю для ионов, которые облетают ось вокруг и находятся на расстоянии ларморовского радиуса от неё. Поэтому для исключения особенностей решения при расчётах в окрестности оси симметрии безразмерный параметр ζ задаётся следующим образом:

$$\zeta(r) = \begin{cases} 1/Ar, & \text{если} \quad r > \rho_B, \\ 1/A\rho_B, & \text{если} \quad \rho_B \geqslant r \geqslant 0. \end{cases}$$

Наряду с другими преимуществами, метод Зейделя интересен удобством использования в цилиндрических координатах. Принцип выражения искомого элемента через соседние по схеме точек вида «крест» универсально и не зависит от выбора системы координат.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

В качестве тестовой задачи рассмотрено уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial r}-\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}=0,\\ u(r,0)=0,\quad u(0,z)=0,\quad u(r,1)=\sin\left(\frac{5\pi r}{2m}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial r}(m,z)=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Задача (5) имеет аналитическое решение (рис. 3(a)):

$$u_{ex}(r,z)=\frac{\exp\left(\frac{5\pi}{2m}z\right)-\exp\left(-\frac{5\pi}{2m}z\right)}{\exp\left(\frac{5\pi}{2m}\right)-\exp\left(-\frac{5\pi}{2m}\right)}\sin\left(\frac{5\pi r}{2m}\right).$$

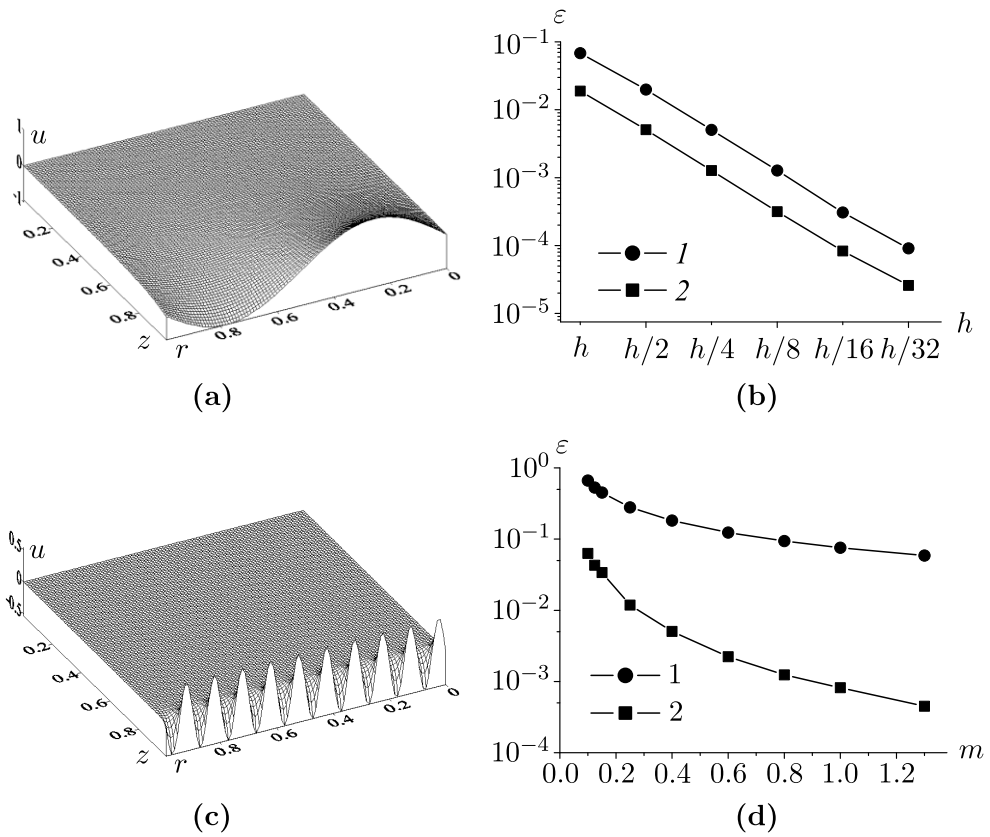


Рис. 3. Распределение функции решения тестовой задачи при $m=1.3$ (a) и $m=0.124$ (c), график точности сходимости к решению в зависимости от шага сетки (b) и параметра задачи m (d) при использовании метода установления (кружочки) и метода Зейделя (квадратики)

Аппроксимация смешанных производных в уравнении (5) конечными разностями даёт результат, зависящий от порядка дифференцирования по координатам:

$$\Lambda_{rz}=((u_{\bar r})_z+(u_r)_{\bar z})/2,\quad \Lambda_{zr}=((u_z)_r+(u_{\bar z})_{\bar r})/2.$$

Получены графики (рис. 3(b)) относительной погрешности $\varepsilon = \dfrac{\|u^{n+1} - u_{ex}\|}{\|u_{ex}\|}$ для достижения критерия сходимости итерационного процесса $\varepsilon_n = 10^{-8}$ на последовательности измельчающихся сеток. Метод Зейделя более экономичен и прост в реализации, чем метод установления. Необходимое число итераций метода установления превышает 4000. Метод Зейделя требует до тысячи итераций, причём в случае предлагаемого шаблона для аппроксимации смешанной производной сходимость происходит в два раза быстрее. С убыванием коэффициента m граничного условия задачи (5) число полных периодов функции синус на границе растёт (рис. 3(a, c)). Во время увеличения числа точек сетки на период синуса, наблюдается равномерное экспоненциальное убывание погрешности (рис. 3(d)) вида $\varepsilon = A_0^m + A_1^m \exp(-m/m_1) + A_2^m \exp(-m/m_2)$. С ростом m растёт скорость сходимости каждого метода. Например, при $m = 0.124$ для расчёта полного периода синуса используется 10 точек сетки по радиусу (рис. 3(c)). При $m = 1.3$ полный период (рис. 3(a)) занимает всю границу расчётной области (100 точек) и скорость сходимости каждого метода в два раза выше, чем при $m = 0.124$.

В ходе моделирования переноса вещества в винтовом магнитном поле получены распределения концентрации при различных значениях глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Распределение концентрации плазмы показано в расчётной области, имеющей в безразмерном виде форму единичного квадрата (рис. 4(a)). Для дальнейшего анализа результатов расчётов и сравнения с данными экспериментов приводятся сечения вдоль оси z (рис. 4(b)). Расчёты показывают убывание плотности плазмы, что подтверждает эффект удержания, наблюдаемый в экспериментах.

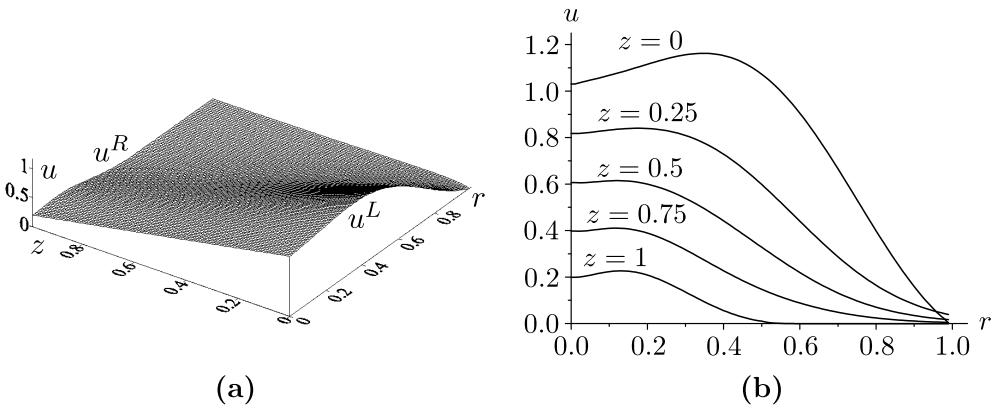


Рис. 4. Распределение концентрации плазмы в винтовом магнитном поле (a) и концентрация вещества по сечениям оси z (b)

Так как есть экспериментальные данные о концентрации плазмы в сечении $z = 0.4$, то приведены результаты расчётов только в этом сечении (рис. 5). Проведены вычислительные эксперименты для различных допустимых значений коэффициента диффузии, производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки. Для дальнейшего использования модели введён расчёт интеграла от плотности по поперечному сечению: $I(z) = \int\limits_0^1 u(r, z)dr$.

Расчёты показали, что при уменьшении коэффициента диффузии в поперечном поле вещество начинает прижиматься к оси (рис. 5(a)). Совпадение расчётных распределений с экспериментальными с учётом конечной точности экспериментальных изменений достигается при коэффициенте диффузии в диапазоне $D = 0.01 - 0.1$. Дальнейшие расчёты проводились при $D = 0.1$. С увеличением производной абсолютной величины электрического поля и глубины гофрировки наблюдается сжатие плазменного шнура к оси. Полученные результаты соответствуют экспериментальным данным.

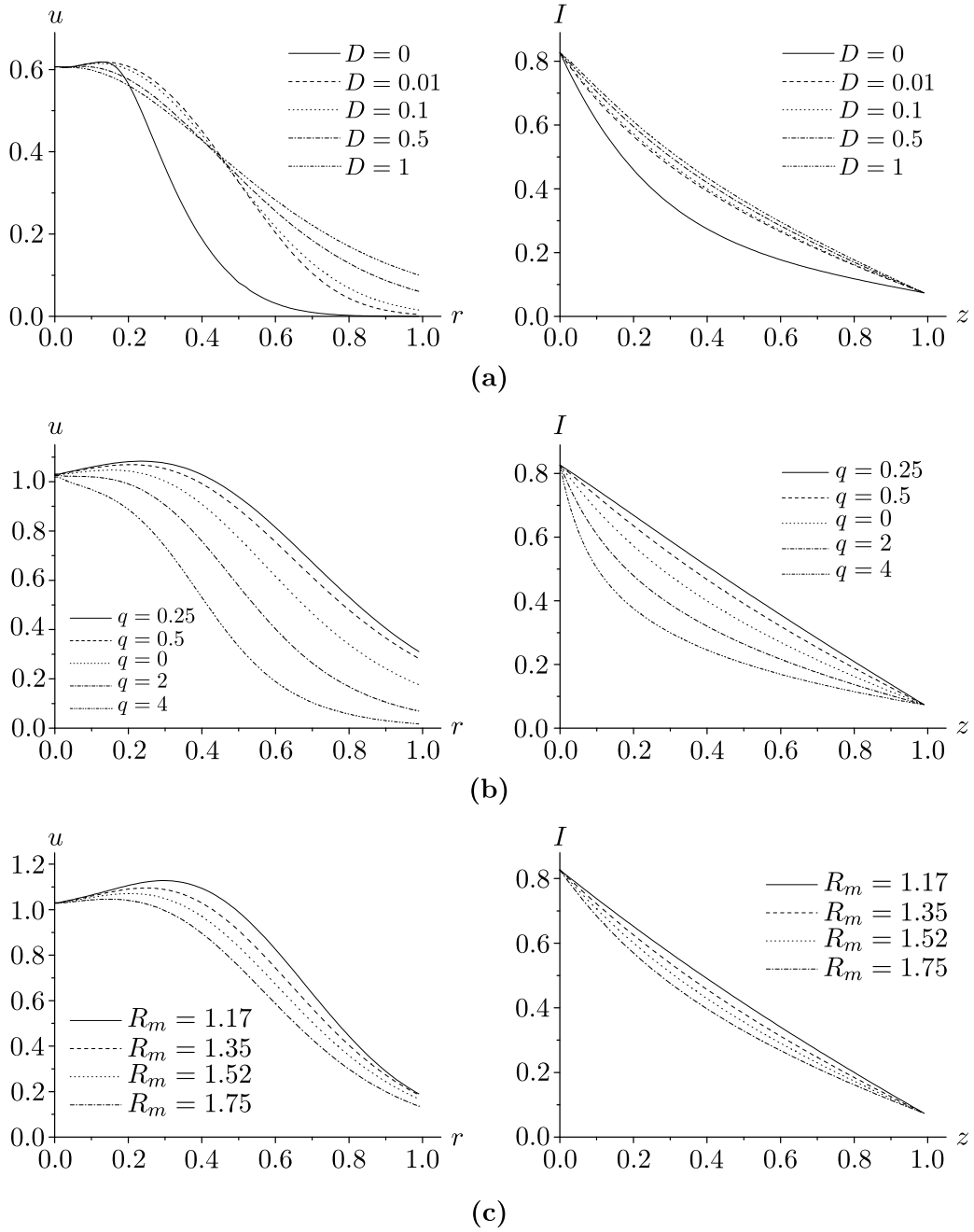


Рис. 5. Распределение концентрации плазмы по сечению оси $z = 0.4$ (левый столбец) и интеграл от плотности по поперечному сечению (правый столбец) при различных значениях коэффициента диффузии (a), производной абсолютной величины электрического поля (b) и глубины гофрировки (c)

Для прогноза результатов работы проектируемых установок для удержания плазмы в винтовом магнитном поле необходимо определить более точно коэффициент диффузии. Для этого планируется проведение расчётов при малых значениях потенциала плазмы с использованием граничных условий Неймана и экспериментальных данных, полученных на установке СМОЛА в ИЯФ СО РАН.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты математического моделирования переноса плазмы в

спиральной открытой магнитной ловушке СМОЛА. Стационарное уравнение переноса вещества в аксиально-симметричной постановке содержит вторые производные по пространству. Выбран оптимальный шаблон для аппроксимации смешанной производной. Для численной реализации использованы метод установления и более экономичный метод Зейделя. Получены зависимости интегральной характеристики плотности вещества от глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Наблюдается качественное соответствие смоделированных зависимостей экспериментальным данным при значениях безразмерного коэффициента диффузии $D = 0.01 - 0.1$ и средней по сечению глубины гофрировки $R_m = 1.52$. В расчётах наблюдается эффект пинчевания (уменьшения среднего радиуса) плазменной струи, проявляющийся и в эксперименте. Дальнейшая работа будет направлена на расширение области параметров, при которых модель обладает достаточной предсказательной силой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сковорода А. А.* Магнитные ловушки для удержания плазмы. М.: Физматлит, 2019.
2. *Linsmeier C., Unterberg B., Coenen J. W., Doerner R. P., Greuner H., Kreter A., Maier H.* Material testing facilities and programs for plasma-facing component testing // Nucl. Fusion. 2017. V. 57, N 9. Article 092012; DOI: 10.1088/1741-4326/aa4feb
3. *Forest C. B., Flanagan K., Brookhart M., Clark M., Cooper C. M., Dsangles V., Egedal J., Endrizzi D., Khalzov I. V., Li H., Miesch M., Milhone J., Nornberg M., Olson J., Peterson E., Roesler F., Schekochihin A., Schmitz O., Siller R, Spitkovsky A., Stemo A., Wallace J., Weisberg D., Zweibel E.* The Wisconsin Plasma Astrophysics Laboratory // J. Plasma Phys. 2015. V. 81, N 5. Article 345810501; DOI: 10.1017/S0022377815000975
4. *Lawson J. D.* Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor // Proc. Phys. Soc. 1957. V. 70, N 1. P. 6–10; DOI: 10.1088/0370-1301/70/1/303
5. *Бурдаков А. В., Поступаев В. В.* Многопробочная ловушка: путь от пробкотрона Будкера к линейному термоядерному реактору // Успехи физ. наук. 2018. Т. 188, № 6. С. 651–671; DOI: 10.3367/UFNr.2018.03.038342
6. *Bagryansky P. A., Beklemishev A. D., Postupaev V. V.* Encouraging Results and New Ideas for Fusion in Linear Traps // J. Fusion Energy. 2019. V. 38. P. 162–181; DOI: 10.1007/s10894-018-0174-1
7. *Beklemishev A. D.* Helicoidal System for Axial Plasma Pumping in Linear Traps // Fusion Sci. Technol. 2013. V. 63, N 1. P. 355–357; DOI: 10.13182/FST13-A16953
8. *Postupaev V. V., Sudnikov A. V., Beklemishev A. D., Ivanov I. A.* Helical mirrors for active plasma flow suppression in linear magnetic traps // Fusion Eng. Des. 2016. V. 106. P. 29–31.
9. *Sudnikov A. V., Ivanov I. A., Inzhevatkina A. A., Larichkin M. V., Lomov K. A., Postupaev V. V., Tolkachev M. S., Ustyuzhanin V. O.* Plasma flow suppression by the linear helical mirror system // J. Plasma Phys. 2022. V. 88, N 1. Article 905880102; DOI: 10.1017/S0022377821001276
10. *Beklemishev A. D.* Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771. Article 040006; DOI: 10.1063/1.4964191
11. *Lazareva G. G., Oksogoeva I. P., Sudnikov A. V.* Mathematical Modeling of Plasma Transport in a Helical Magnetic Field // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, N 10. P. 2685–2691; DOI: 10.1134/S1995080222130248
12. *Самарский А. А., Гулин А. Л.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
13. *Волков В. М., Проконина Е. В.* Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2018. Т. 54, № 4. С. 454–459; DOI: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459
14. *Sudnikov A. V., Beklemishev A. D., Postupaev V. V., Burdakov A. V., Ivanov I. A., Vasilyeva N. G., Kuklin K. N., Sidorov E. N.* SMOLA device for helical mirror concept exploration // Fusion Eng. Des. 2017. V. 122. P. 86–93; DOI: 10.1016/j.fusengdes.2017.09.005

15. *Сковородин Д. И., Черноштанов И. С., Амиров В. Х. Астрелин В. Т., Багрянский П. А., Беклемишев А. Д., Бурдаков А. В., Горбовский А. И., Котельников И. А., Магоммедов Э. М., Полосаткин С. В., Поступаев В. В., Приходько В. В.,Савкин В. Я., Солдаткина Е. И., Соломахин А. Л., Сорокин А. В., Судников А. В., Христо М. С., Шиянков С. В., Яковлев Д. В., Щербаков В. И.* Газодинамическая многопробочная ловушка ГДМЛ. Новосибирск, 2023. (Препр. / ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН).

16. *Самарский А. А., Мажукин В. И., Матус П. П., Шишкин Г. И.* Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными // Матем. моделирование. 2001. Т. 13, № 2. С. 17–26.

17. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

18. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

UDC 519.63

INFLUENCE OF MATHEMATICAL MODEL PARAMETERS ON PLASMA TRANSFER IN A HELICAL MAGNETIC FIELD

© 2023 **G. G. Lazareva[1a], I. P. Oksogoeva[1b], A. V. Sudnikov[2c]**

[1] *RUDN University, Moscow, 117198 Russia,*
[2] *Budker Institute of Nuclear Physics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]lazareva-gg@rudn.ru, [b]oksogi@mail.ru, [c]a.v.sudnikov@inp.nsk.su

Received 16.05.2023, revised 17.10.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. The paper presents the results of mathematical modeling of plasma transfer in a helical magnetic field using new experimental data obtained at the SMOLA trap created at the Budker Institute of Nuclear Physics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Plasma is confined in the trap by transmitting a pulse of magnetic field with helical symmetry to the rotating plasma. The mathematical model is based on a stationary plasma transfer equation in the axially symmetric formulation. The distribution of the concentration of the substance obtained by numerical simulation confirmed the confinement effect obtained in the experiment. The dependences of the integral characteristics of the substance on the depth of magnetic field corrugation and on plasma diffusion and potential are obtained. The numerical implementations of the model by the relaxation method and by the method of successive overrelaxation (Seidel method) are compared.

Keywords: mathematical modeling, transfer equation,helical magnetic field.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.405

REFERENCES

1. A. A. Skovoroda, *Magnetic Traps for Plasma Confinement* (Fizmatlit, Moscow, 2019) [in Russian].
2. C. Linsmeier, B. Unterberg, J. W. Coenen, R. P. Doerner, H. Greuner, A. Kreter, and H. Maier, "Material testing facilities and programs for plasma-facing component testing," Nucl. Fusion **57** (9), 092012 (2017). https://doi.org/10.1088/1741-4326/aa4feb
3. C. B. Forest, K. Flanagan, M. Brookhart, M. Clark, C. M. Cooper, V. Dsangles, J. Egedal, D. Endrizzi, I. V. Khalzov, H. Li, M. Miesch, J. Milhone, M. Nornberg, J. Olson, E. Peterson, F. Roesler, A. Schekochihin, O. Schmitz, R. Siller, A. Spitkovsky, A. Stemo, J. Wallace, D. Weisberg, and E. Zweibel, "The Wisconsin plasma astrophysics laboratory," J. Plasma Phys. **81** (5), 345810501 (2015). https://doi.org/10.1017/S0022377815000975
4. J. D. Lawson, "Some criteria for a power producing thermonuclear reactor," Proc. Phys. Soc. **70** (1), 6–10 (1957). https://doi.org/10.1088/0370-1301/70/1/303
5. A. V. Burdakov and V. V. Postupaev, "Multiple-mirror trap: A path from Budker magnetic mirrors to linear fusion reactor," Phys. — Usp. **61** (6), 582–600 (2018). https://doi.org/10.3367/UFNe.2018.03.038342
6. P. A. Bagryansky, A. D. Beklemishev, and V. V. Postupaev, "Encouraging results and new ideas for fusion in linear traps," J. Fusion Energy **38**, 162–181 (2019). https://doi.org/10.1007/s10894-018-0174-1
7. A. D. Beklemishev, "Helicoidal system for axial plasma pumping in linear traps," Fusion Sci. Technol. **63** (1), 355–357 (2013). https://doi.org/10.13182/FST13-A16953

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 750–759.

8. V. V. Postupaev, A. V. Sudnikov, A. D. Beklemishev, and I. A. Ivanov, "Helical mirrors for active plasma flow suppression in linear magnetic traps," Fusion Eng. Des. **106**, 29–31 (2016).
9. A. V. Sudnikov, I. A. Ivanov, A. A. Inzhevatkina, M. V. Larichkin, K. A. Lomov, V. V. Postupaev, M. S. Tolkachev, and V. O. Ustyuzhanin, "Plasma flow suppression by the linear helical mirror system," J. Plasma Phys. **88** (1), 905880102 (2022). https://doi.org/10.1017/S0022377821001276
10. A. D. Beklemishev, "Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation," AIP Conf. Proc. **1771**, 040006 (2016). https://doi.org/10.1063/1.4964191
11. G. G. Lazareva, I. P. Oksogoeva, and A. V. Sudnikov, "Mathematical modeling of plasma transport in a helical magnetic field," Lobachevskii J. Math. **43** (10), 2685–2691 (2022). https://doi.org/10.1134/S1995080222130248
12. A. A. Samarskii and A. L. Gulin, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1989) [in Russian].
13. V. M. Volkov and E. V. Prokonina, "Difference schemes and iteration methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives," Izv. NAN Belarusi. Ser. Fiz.-Mat. Nauk **54** (4), 454–459 (2018) [in Russian]. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2018-54-4-454-459
14. A. V. Sudnikov, A. D. Beklemishev, V. V. Postupaev, A. V. Burdakov, I. A. Ivanov, N. G. Vasilyeva, K. N. Kuklin, and E. N. Sidorov, "SMOLA device for helical mirror concept exploration," Fusion Eng. Des. **122**, 86–93 (2017). https://doi.org/10.1016/j.fusengdes.2017.09.005
15. D. I. Skovorodin, I. S. Chernoshtanov, V. Kh., V. T. Astrelin, P. A. Bagryanskii, A. D. Beklemishev, A. V. Burdakov, A. I. Gorbovskii, I. A. Kotel'nikov, E. M. Magommedov, S. V. Polosatkin, V. V. Postupaev, V. V. Prikhod'ko, V. Ya. Savkin, E. I. Soldatkina, A. L. Solomakhin, A. V. Sorokin, A. V. Sudnikov, M. S. Khristo, S. V. Shiyankov, D. V. Yakovlev, and V. I. Shcherbakov, "Gas dynamic multimirror trap GDMMT," *Preprint* (Budker Inst. Nucl. Phys. Sb RAS, Novosibirsk, 2023).
16. A. A. Samarskii, V. I. Mazhukin, P. P. Matus, and G.I. Shishkin, "Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives," Mat. Model. **13** (2), 17–26 (2001) [in Russian].
17. N. N. Yanenko, *Method of Fractional Steps for Solving Multidimensional Problems of Mathematical Physics* (Nauka, Novosibirsk, 1967) [in Russian].
18. A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Methods for Solving Grid Equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].

УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БАРОТРОПНОГО ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ. I. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ. РАЗРЕШИМОСТЬ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

© 2023 **А. Е. Мамонтов**[1,2a], **Д. А. Прокудин**[3b]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, ул. Кирова, 86, г. Новосибирск 630102, Россия,*
[3] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]aem@hydro.nsc.ru, [b]prokudin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 30.08.2022 г.; после доработки 18.09.2023 г.;
принята к публикации 01.11.2023 г.

Сформулирована задача о стационарном баротропном движении многокомпонентной среды, состоящей из вязких сжимаемых жидкостей, в ограниченной области трёхмерного пространства. Матрицы вязкостей предполагаются произвольными (недиагональными). Доказана разрешимость вспомогательной задачи.

Ключевые слова: теорема существования, стационарное баротропное течение, вязкая сжимаемая многокомпонентная среда, матрица вязкостей.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.406

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена проблеме разрешимости уравнений для модели, описывающей движение многокомпонентной среды, состоящей из вязких сжимаемых жидкостей. По поводу происхождения этой модели можно обратиться к монографиям [1] и [2], а также за уточнениями для подмодели, рассматриваемой в данной работе, — к статье [3]. Смежные модели рассматривались в таких работах как [4] и [5]. Несмотря на имеющиеся результаты о разрешимости для моделей динамики многокомпонентных сред, такие как [3, 6–8], остаётся не изученным вариант стационарных трёхмерных движений в случае, если матрицы вязкостей являются не диагональными и не треугольными, а уравнения состояния для давления и обмена импульсом имеют достаточно общий вид. Именно этот случай будет рассматриваться в предлагаемой работе. Таким образом, новизна работы состоит в одновременном учёте таких факторов как заполненность матриц вязкостей и снижение ограничений на вид уравнений состояния для давления и обмена импульсом. Работа состоит из двух частей. Первая часть работы излагается в данной статье и состоит в постановке основной задачи и доказательстве разрешимости вспомогательной (приближенной) задачи. Во второй части работы, в подготовленном авторами продолжении данной статьи, будет совершён предельный переход по параметру приближения и доказана разрешимость основной задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Математического Центра в Академгородке и Минобрнауки РФ (соглашение 075-15-2022-282).

При исследовании уравнений динамики многокомпонентных сред имеется опасность загромождения записи, ввиду появления дополнительных индексов отвечающих за нумерацию компонент среды. Здесь существенное облегчение приносит инвариантная запись, исключающая явное упоминание компонент векторов и тензоров, которой мы будем придерживаться в течение всей статьи, и правила которой мы здесь уточним во избежание разночтений. А именно, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы («столбцы») размерности n (с компонентами a_i, b_i), а $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — тензоры второго ранга («матрицы»), действующие в $\mathbb{R}^n$ (с компонентами A_{ij}, B_{ij}), то

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \quad \mathbb{A} : \mathbb{B} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

$\mathbb{A}\boldsymbol{a}$ и $\operatorname{div} \mathbb{A}$ — векторы («столбцы») с компонентами

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{a})_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_j, \quad (\operatorname{div} \mathbb{A})_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i};$$

и, наконец, $\mathbb{A}^T$ и $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ — тензоры с компонентами $(\mathbb{A}^T)_{ij} = A_{ji}$ и $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ij} = a_i b_j$ соответственно. При применении этих обозначений в статье как правило $n = 3$ (размерность течения), но иногда $n = N$ (число компонент среды), $N \geqslant 2$.

В статье будут использоваться общепринятые (см., например, [9,10]) обозначения функциональных пространств: $L_p(\Omega)$ ($W_p^l(\Omega)$) — пространство функций, интегрируемых со степенью $p \geqslant 1$ (вместе с обобщёнными производными до порядка $l \geqslant 0$ включительно); $C^l(\overline{\Omega})$ ($C_0^l(\Omega)$) — пространство функций, обладающих непрерывными частными производными до порядка $l \geqslant 0$ включительно в $\overline{\Omega}$ (с компактными носителями, лежащими в Ω). Мы не будем различать обозначения пространств векторных функций и скалярных функций.

1. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

В замыкании $\overline{\Omega}$ ограниченной области течения Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ точек $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, граница $\partial\Omega$ которой принадлежит классу C^2, требуется найти скалярное поле плотности многокомпонентной среды $\rho \geqslant 0$ и векторные поля скоростей $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$ для каждой компоненты с номером $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяющие следующим уравнениям и краевым условиям:

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} \rho \, d\boldsymbol{x} = m, \quad m = \text{const} > 0. \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{u}_j$ — средневзвешенная скорость многокомпонентной среды, где $\alpha_j = \text{const}$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, \ldots, N$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$; $\rho_i = \alpha_i \rho$, $i = 1, \ldots, N$ — плотности компонент; p — давление в среде, которое определяется плотностью ρ, т. е. функция $p(\cdot)$ предполагается заданной, причём

$$p \in C^1[0, +\infty), \quad p(0) = 0, \quad \forall\, s \geqslant 0 \quad \frac{1}{c_1} s^{\gamma - 1} - c_2 \leqslant p'(s) \leqslant c_1 s^{\gamma - 1} + c_2 \quad \text{и} \quad p'(s) \geqslant 0 \tag{5}$$

с некоторыми постоянными $c_1 \geqslant 1$, $c_2 > 0$ и $\gamma > 3$ (простейшим примером ситуации, когда наложенные требования на давление выполнены, является политропный закон $p(\rho) = K\rho^\gamma$, $K = \text{const} > 0$), а ∇p — вектор («столбец») с компонентами $(\nabla p)_i = \dfrac{\partial p}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$. Далее $\mathbb{S}_i$, $i = 1, \ldots, N$ — тензоры вязких напряжений компонент, которые определяются равенствами

$$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N} \left(\lambda_{ij}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j)\right), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{6}$$

где $\mathbb{I}$ — единичный тензор, $\mathbb{D}(\boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{2}\left((\nabla \otimes \boldsymbol{w}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{w})^T\right)$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{w}$, а числовые коэффициенты вязкостей λ_{ij}, μ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, N$ образуют соответственно матрицы $\boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^N$ такие, что

$$\mathbf{M} > 0, \quad \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0. \tag{7}$$

Векторные поля

$$\boldsymbol{J}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(1 + \rho)(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i), \quad i = 1, \ldots, N \tag{8}$$

отвечают за интенсивность обмена импульсом между компонентами, где постоянные $a_{ij} = a_{ji} > 0$, $i, j = 1, \ldots, N$; и наконец, известные векторные поля внешних сил

$$\boldsymbol{f}_i \in C\big(\overline{\Omega}\big), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{9}$$

Замечание 1. Из условий (5), в частности, вытекает, что при всех $s \geqslant 0$

$$\frac{1}{c_1\gamma}s^\gamma - c_2 s \leqslant p(s) \leqslant \frac{c_1}{\gamma}s^\gamma + c_2 s,$$

откуда, в свою очередь, следует

$$B_1 s^\gamma - B_2 \leqslant s\int\limits_1^s \frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta \leqslant B_3 s^\gamma + B_4,$$

где положительные постоянные B_1, B_2, B_3, B_4 зависят только от c_1, c_2 и γ (условимся через $B_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$ обозначать величины, принимающие конечные положительные значения и зависящие от объектов, указанных в скобках или перечисленных в комментариях).

Замечание 2. Ввиду равенства (см. (3))

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_\Omega \mu_{ij}(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i)\cdot(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_j)\,d\boldsymbol{x} + \\ + \sum_{i,j=1}^{N}\int\limits_\Omega (\lambda_{ij} + 2\mu_{ij})\,(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_i)(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\,d\boldsymbol{x},$$

в котором $(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i)_1 = \left(\dfrac{\partial u_{i3}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_{i2}}{\partial x_3}\right)$, $(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i)_2 = \left(\dfrac{\partial u_{i1}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_{i3}}{\partial x_1}\right)$, $(\operatorname{rot} \boldsymbol{u}_i)_3 = \left(\dfrac{\partial u_{i2}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_{i1}}{\partial x_2}\right)$, $i = 1, \ldots, N$, условия (7) обеспечивают важное соотношение

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} \geqslant B_5(\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M})\sum_{i=1}^{N}\int\limits_\Omega |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}. \tag{10}$$

Определение 1. Пусть в уравнениях (2) (с уточняющими соотношениями (6), (8)) функция $p(\cdot)$, входящая в определение давления p по плотности ρ, удовлетворяет ограничениям (5), коэффициенты вязкостей — условиям (7), а внешние силы в задаче (1)–(4) удовлетворяют условиям (9). Слабым решением задачи (1)–(4) называется набор функций

$$\rho \in L_{2\gamma}(\Omega), \quad \rho \geqslant 0, \quad \boldsymbol{u}_i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N,$$

удовлетворяющих (4) и следующим условиям:

1) Плотность ρ удовлетворяет уравнению неразрывности (1) в том смысле, что $\forall\, \psi \in C^\infty\bigl(\overline{\Omega}\bigr)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \psi \, d\boldsymbol{x} = 0;$$

2) Скорости $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$ удовлетворяют уравнениям импульсов (2) (с определяющими уравнениями (6)) в том смысле, что $\forall\, \boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^\infty\bigl(\Omega\bigr)$, $i = 1, \ldots, N$ выполнены интегральные тождества

$$\int\limits_\Omega \Bigl((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \alpha_i p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i - \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \boldsymbol{J}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \Bigr) \, d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

$\bigl($краевые условия (3) выполнены автоматически — в смысле функционального класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\bigr)$.

2. ПОСТАНОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Будем искать слабое решение задачи (1)–(4) как предел приближенных решений, а именно, решений следующей краевой задачи (индекс ε у величин, зависящих от ε, мы пока опускаем):

$$-\varepsilon \Delta \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) + \varepsilon \rho = \varepsilon \frac{m}{|\Omega|}, \tag{11}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \rho_i \boldsymbol{u}_i + \frac{\varepsilon}{2} \frac{m}{|\Omega|} \alpha_i \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2} \rho_i (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \alpha_i \nabla p = \\ = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \nabla \rho \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Здесь $\varepsilon \in (0, 1]$ — параметр, который впоследствии будет устремлён к нулю; $|\Omega| = \operatorname{meas}(\Omega)$; $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали к $\partial\Omega$.

Задача (11)–(13) представляет собой равномерно эллиптическую регуляризацию задачи (1)–(4) с дополнительными слагаемыми и граничными условиями, призванными сохранить полезные свойства исходной задачи, например интегральную ортогональность конвективных членов скоростям.

Определение 2. Сильным решением задачи (11)–(13) называются неотрицательная функция $\rho \in W_\sigma^2(\Omega)$ с некоторым $\sigma > 3$ и векторные поля $\boldsymbol{u}_i \in W_\sigma^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ такие, что уравнения (11), (12) выполнены п. в. в Ω, и п. в. на $\partial\Omega$ верны краевые условия (13).

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Существование сильного решения краевой задачи (11)–(13) будем доказывать используя теорему о неподвижных точках Лерэ—Шаудера (см., например, [11], теорема 3, стр. 406), которую применим к оператору $\mathbf{A}$, сформированному далее.

3.1. Построение оператора A

Сначала определим несколько промежуточных операторов, суперпозицией которых и будет оператор $\mathbf{A}$.

Для этого рассмотрим краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{a}) + \varepsilon\rho = \varepsilon b, \quad \nabla\rho\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0 \tag{14}$$

с неизвестной функцией ρ и заданными векторным полем $\boldsymbol{a}$ и функцией b.

Как известно (см., например, [12], предложение 4.29, стр. 213 и [13], лемма 3.1, стр. 795), что если $\boldsymbol{a}\in W^1_\infty(\Omega)$, $\boldsymbol{a}|_{\partial\Omega}=0$, $b\in L_\infty(\Omega)$, то:
1) существует единственное сильное решение ρ задачи (14) класса $W^2_\sigma(\Omega)$;
2) имеет место оценка

$$\|\rho\|_{W^2_\sigma(\Omega)} \leqslant B_6(\varepsilon,\sigma,\Omega)\left(1+\|\boldsymbol{a}\|_{W^1_\infty(\Omega)}\right)\|b\|_{L_\sigma(\Omega)}; \tag{15}$$

3) имеет место равенство $\int\limits_\Omega \rho\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega b\,d\boldsymbol{x}$;
4) если $b\geqslant 0$ п. в. в Ω, то $\rho\geqslant 0$ п. в. в Ω.

Итак, первым промежуточным оператором определим оператор $\mathcal{R}:\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)\to W^2_\sigma(\Omega)$, где $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)=\{\,\boldsymbol{a}\in W^2_\sigma(\Omega):\ \boldsymbol{a}|_{\partial\Omega}=0\,\}$, действующий по закону $\mathcal{R}:\ \boldsymbol{a}\mapsto\rho$, согласно которому $\forall\,\boldsymbol{a}\in\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ функция $\rho\in W^2_\sigma(\Omega)$ однозначно определяется как решение краевой задачи

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{a}) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}, \quad \nabla\rho\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0.$$

Очевидно, что $\int\limits_\Omega \rho\,d\boldsymbol{x} = m$ и $\rho=\mathcal{R}(\boldsymbol{a})\geqslant 0$ п. в. Ω (отметим, что пространство $W^2_\sigma(\Omega)$ вложено в пространство $C^1\big(\overline{\Omega}\big)\big)$. Кроме того, при всех $\boldsymbol{a}_k\in\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, $k=1,2$ выполняются неравенства

$$\|\rho_1-\rho_2\|_{W^2_\sigma(\Omega)} \leqslant B_7(B_6,\varepsilon,\sigma,m,\Omega)\left(1+\|\boldsymbol{a}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right)\left(1+\|\boldsymbol{a}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right)\|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leqslant$$
$$\leqslant B_8(B_7,\sigma,\Omega)\left(1+\|\boldsymbol{a}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right)\left(1+\|\boldsymbol{a}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}\right)\|\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2\|_{W^2_\sigma(\Omega)}, \tag{16}$$

где $\rho_k=\mathcal{R}(\boldsymbol{a}_k)$, $k=1,2$. Действительно, для $\rho_k=\mathcal{R}(\boldsymbol{a}_k)$, $k=1,2$ справедливы следующие равенства:

$$-\varepsilon\Delta(\rho_1-\rho_2)+\operatorname{div}((\rho_1-\rho_2)\boldsymbol{a}_1)+\varepsilon(\rho_1-\rho_2)=\varepsilon\left(-\frac{\operatorname{div}(\rho_2(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2))}{\varepsilon}\right),\ \nabla(\rho_1-\rho_2)\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0.$$

Из данных равенств, вложения $W^2_\sigma(\Omega)$ в $C^1\big(\overline{\Omega}\big)$ и оценки (15) с $b=-\dfrac{\operatorname{div}(\rho_2(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2))}{\varepsilon}$ непосредственно следует (16).

Вторым промежуточным оператором определим оператор $\mathcal{U}:\ L_\sigma(\Omega)\to\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, действующий по правилу $\mathcal{U}:\ \mathbf{g}\mapsto\mathbf{u}$, где по заданному вектору $\mathbf{g}=(\boldsymbol{g}_1,\ldots,\boldsymbol{g}_N)$ с векторными

компонентами $\boldsymbol{g}_i \in L_\sigma(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ однозначно строится вектор $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_N)$ с векторными компонентами $\boldsymbol{u}_i \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ как решение краевой задачи для сильно эллиптической системы уравнений второго порядка

$$-\sum_{j=1}^{N} (\mu_{ij}\Delta \boldsymbol{u}_j + (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{g}_i, \quad \boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, N$$

(отметим, что $\operatorname{div} \mathbb{S}_i = \sum\limits_{j=1}^{N} (\mu_{ij}\Delta \boldsymbol{u}_j + (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)$, $i = 1, \ldots, N$). Из классических результатов для эллиптических систем уравнений (см., например, [14–16]) следует, что при любых $\mathbf{g}_k \in L_\sigma(\Omega)$, $k = 1, 2$ верно неравенство

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{W^2_\sigma(\Omega)} \leqslant B_9(\sigma, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}, \Omega) \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{L_\sigma(\Omega)}, \tag{17}$$

где $\mathbf{u}_k = \mathcal{U}(\mathbf{g}_k)$, $k = 1, 2$.

Наконец, в соответствии со структурой уравнений (12), третий набор промежуточных операторов $\mathcal{G}_i : \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega) \to C\big(\overline{\Omega}\big)$, $i = 1, \ldots, N$ определим следующим образом:

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{w}) = -\frac{\varepsilon}{2}\alpha_i\rho\boldsymbol{w}_i - \frac{\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{w}_i - \frac{1}{2}\alpha_i\rho\left(\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_j\right)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{w}_i - \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(\alpha_i\rho\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_j\right)\otimes\boldsymbol{w}_i\right) -$$
$$- \alpha_i\nabla p(\rho) + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(1+\rho)(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{w}_i) + \alpha_i\rho\boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где по заданному вектору $\mathbf{w} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_N)$ с векторными компонентами $\boldsymbol{w}_i \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$ строится $\rho = \mathcal{R}\left(\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_j\right) \in W^2_\sigma(\Omega)$. В силу вложения $W^2_\sigma(\Omega)$ в $C^1\big(\overline{\Omega}\big)$ из условий $\mathbf{w} \in W^2_\sigma(\Omega)$, $\rho \in W^2_\sigma(\Omega)$ следует, что $\mathcal{G}_i \in C\big(\overline{\Omega}\big)$, $i = 1, \ldots, N$. Кроме того, для всех $\mathbf{w}_k = (\boldsymbol{w}_{k1}, \ldots, \boldsymbol{w}_{kN}) \in W^2_\sigma(\Omega)$, $k = 1, 2$ и соответствующих $\rho_k = \mathcal{R}\left(\sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_{kj}\right) \in W^2_\sigma(\Omega)$, $k = 1, 2$ имеют место оценки

$$\|\mathcal{G}_i(\mathbf{w}_1) - \mathcal{G}_i(\mathbf{w}_2)\|_{L_\sigma(\Omega)} \leqslant B_{10}(\sigma, \Omega)\|\mathcal{G}_i(\mathbf{w}_1) - \mathcal{G}_i(\mathbf{w}_2)\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{11}\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^1(\overline{\Omega})} +$$
$$+ B_{12}\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{w}_{1i} - \boldsymbol{w}_{2i}\|_{C^1(\overline{\Omega})} + B_{10}\|\rho_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}\|p'(\rho_1) - p'(\rho_2)\|_{C(\overline{\Omega})}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{18}$$

где $B_{11} = B_{11}\left(B_{10}, \|\mathbf{w}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|\rho_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \left\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\right\}, c_1, c_2, N, \{a_{ij}\}, \gamma\right)$, $B_{12} = B_{12}\Big(B_{10}, \|\mathbf{w}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|\mathbf{w}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|\rho_2\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \left\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\right\}, m, N, \{a_{ij}\}, \Omega\Big)$, причём зависимость в B_{11} и B_{12} от $\|\rho_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $\|\mathbf{w}_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $k = 1, 2$ является локально ограниченной, т. е. конечны $\sup B_{11}$ и $\sup B_{12}$ по любому множеству вида $\|\rho_1\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|\rho_2\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|\mathbf{w}_1\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|\mathbf{w}_2\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leqslant \text{const}$.

В итоге определим оператор $\mathbf{A} : \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega) \to \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, действующий по правилу $\mathbf{A} = \mathcal{U} \circ (\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_N)$, т. е. для любых $\mathbf{w} = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_N) \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ полагаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}) = \mathcal{U}(\mathcal{G}_1(\mathbf{w}), \ldots, \mathcal{G}_N(\mathbf{w})).$$

Заметим, что неподвижная точка $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_N)$ оператора $\mathbf{A}$ (если она существует), вместе с соответствующей функцией $\rho = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{u}_j\right)$ являются решением вспомогательной задачи (11)–(13), поскольку построение образа $\mathbf{A}(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ заключается в последовательном решении задачи

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}, \quad \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_j, \quad \nabla\rho \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

откуда определяется $\rho = \mathcal{R}(\boldsymbol{v})$, и краевой задачи

$$-\sum_{j=1}^{N} (\mu_{ij}\Delta\boldsymbol{u}_j + (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j) = -\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{w}_i - \frac{\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{w}_i - -\frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{w}_i - \frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}_i) -$$

$$-\alpha_i\nabla p(\rho) + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(1+\rho)(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{w}_i) + \rho_i\boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad \boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\rho_i = \alpha_i\rho$, $i = 1, \dots, N$.

Покажем, что оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям теоремы Лерэ—Шаудера.

Установим сначала непрерывность оператора $\mathbf{A}$. Пусть $\mathbf{w}_m = (\boldsymbol{w}_{1m}, ..., \boldsymbol{w}_{Nm}) \in \mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{w}_m \longrightarrow \mathbf{w} = (\boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_N)$ при $m \to \infty$ сильно в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$. Тогда в силу непрерывности оператора $\mathcal{R}$ из $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ в $W^2_\sigma(\Omega)$ (см. (16)) имеем, что при $m \to \infty$

$$\rho_m = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_{jm}\right) \longrightarrow \rho = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_j\right)$$

в норме пространства $W^2_\sigma(\Omega)$. Из непрерывности вложения $W^2_\sigma(\Omega)$ в $C^1\big(\overline{\Omega}\big)$ и свойств (18) операторов $\mathcal{G}_i$, $i = 1, \dots, N$ получаем, что при $m \to \infty$

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{w}_m) \longrightarrow \mathcal{G}_i(\mathbf{w}), \quad i = 1, \dots, N$$

в нормах пространств $L_\sigma(\Omega)$ и $C\big(\overline{\Omega}\big)$. Наконец, из непрерывности оператора $\mathcal{U}$ из $L_\sigma(\Omega)$ в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ (см. (17)) следует, что при $m \to \infty$

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}_m) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})$$

сильно в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, что означает непрерывность оператора $\mathbf{A}$.

Для доказательства компактности (вполне непрерывности) оператора $\mathbf{A}$ возьмём в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ ограниченную последовательность $\mathbf{w}_m$, $m \in \mathbb{N}$. В силу компактности вложения $W^2_\sigma(\Omega)$ в $C^1\big(\overline{\Omega}\big)$ из последовательности $\mathbf{w}_m$, $m \in \mathbb{N}$ выделим подпоследовательность, сохранив за ней прежнее обозначение, такую что при $m \to \infty$

$$\mathbf{w}_m \longrightarrow \mathbf{w} \text{ сильно в } C^1\big(\overline{\Omega}\big).$$

Тогда из оценки (16) следует, что при $m \to \infty$

$$\rho_m = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_{jm}\right) \longrightarrow \rho = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \boldsymbol{w}_j\right)$$

в норме пространства $W^2_\sigma(\Omega)$. Повторяя предыдущие рассуждения получим, что при $m \to \infty$

$$\mathbf{A}(\mathbf{w}_m) \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w})$$

сильно в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, что завершает доказательство компактности оператора $\mathbf{A}$.

Чтобы завершить проверку условий теоремы Лерэ—Шаудера и, тем самым, доказательство существования сильного решения краевой задачи (11)–(13) осталось показать, что множество всех решений класса $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ операторного уравнения

$$\lambda \mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad \lambda \in (0, 1] \tag{19}$$

ограничено в $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$, т. е. требуется получить равномерную по параметру λ априорную оценку решений уравнения (19) в пространстве $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$.

3.2. Задача с параметром λ и первая оценка

Для получения равномерной по λ априорной оценки решений уравнения (19) в пространстве $\mathcal{W}^2_\sigma(\Omega)$ необходимо оценить равномерно по λ в пространстве $W^2_\sigma(\Omega)$ предполагаемое решение $(\rho, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N)$ краевой задачи (индекс λ у величин, зависящих от λ, опускаем)

$$-\varepsilon\Delta\rho + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}, \tag{20}$$

$$\frac{\lambda\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i + \frac{\lambda}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i + \frac{\lambda}{2}\operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) + \\ + \lambda\alpha_i\nabla p(\rho) = \operatorname{div}\mathbb{S}_i + \lambda\boldsymbol{J}_i + \lambda\rho_i\boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \nabla\rho\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{22}$$

где $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^N \alpha_j\boldsymbol{u}_j$, $\rho_i = \alpha_i\rho$, $\mathbb{S}_i = \sum\limits_{j=1}^N (\lambda_{ij}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I} + 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j))$, $\boldsymbol{J}_i = \sum\limits_{j=1}^N a_{ij}(1+\rho)(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Для этого умножим сначала (21) скалярно на $\dfrac{\boldsymbol{u}_i}{\lambda}$, проинтегрируем по Ω и просуммируем по $i = 1, \ldots, N$, в результате получим

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon m}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^N \alpha_i \int\limits_\Omega |\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\int\limits_\Omega (1+\rho)|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|^2\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega p(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}. \tag{23}$$

Проинтегрируем теперь уравнение (20) по области Ω, получим равенство

$$\int\limits_\Omega \rho\,d\boldsymbol{x} = m. \tag{24}$$

Умножая далее уравнение (20) на функцию $G'(\rho)$ (где $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция), приходим к равенству

$$\varepsilon G''(\rho)|\nabla\rho|^2 - \varepsilon\operatorname{div}(G'(\rho)\nabla\rho) + (\rho G'(\rho) - G(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \\ + \operatorname{div}(G(\rho)\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho G'(\rho) = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}G'(\rho). \tag{25}$$

Полагая в (25) $G(\rho) = (\rho + l)\int\limits_1^{\rho+l} \dfrac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta$ с произвольным $l \in (0,1]$, выведем равенство

$$\int\limits_\Omega p(\rho+l)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = l\int\limits_\Omega \frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + l\int\limits_\Omega \left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} +$$
$$+\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)d\boldsymbol{x} + \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x} - \varepsilon\int\limits_\Omega\rho\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)d\boldsymbol{x} -$$
$$-\varepsilon\int\limits_\Omega\frac{\rho p(\rho+l)}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x} - \varepsilon\int\limits_\Omega\frac{p'(\rho+l)}{\rho+l}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}. \quad (26)$$

Рассмотрим подробнее слагаемые в правой части (26). Для первого слагаемого верна оценка (см. условия (5) и замечание 1)

$$l\int\limits_\Omega\frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} \leqslant B_{13}\,(B_3,B_4,\gamma)\,l\int\limits_\Omega(\rho^{\gamma-1}+1)\left(\sum_{i=1}^N|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|\right)d\boldsymbol{x}. \quad (27)$$

Второе слагаемое в правой части (26), ввиду условий (5) и замечания 1, оценим следующим образом:

$$l\int\limits_\Omega\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = l\int\limits_{\{\Omega\colon\,\rho\geqslant 1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}\geqslant 0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} +$$
$$+l\int\limits_{\{\Omega\colon\,\rho\geqslant 1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}<0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + l\int\limits_{\{\Omega\colon\,0\leqslant\rho<1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}\geqslant 0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} +$$
$$+l\int\limits_{\{\Omega\colon\,0<\rho<1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}<0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} + l\int\limits_{\{\Omega\colon\,\rho=0,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}<0\}}\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant B_{14}(B_3,B_4,c_1,\gamma)\,l\int\limits_\Omega(\rho^{\gamma-1}+1)\left(\sum_{i=1}^N|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|\right)d\boldsymbol{x} + B_{15}(c_2)\,l\ln l\sum_{i=1}^N\int\limits_\Omega|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|\,d\boldsymbol{x} -$$
$$-B_2 l\int\limits_{\{\Omega\colon\,0<\rho<1-l,\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}<0\}}\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{v}}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x}. \quad (28)$$

Для третьего слагаемого в правой части (26) получим, используя (5), замечание 1 и неравенство Юнга, что

$$\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\left(\int\limits_1^{\rho+l}\frac{p(\eta)}{\eta^2}\,d\eta\right)d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\left(B_1+\frac{1}{c_1\gamma}\right)\int\limits_\Omega\rho^\gamma\,d\boldsymbol{x} + B_{16}(B_1,B_3,B_4,c_1,m,\gamma,\Omega). \quad (29)$$

Снова используя замечание 1 и неравенство Юнга, четвёртое слагаемое в правой части (26) оценим так:

$$\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\frac{p(\rho+l)}{\rho+l}\,d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\left(B_1+\frac{1}{c_1\gamma}\right)\int\limits_\Omega\rho^\gamma\,d\boldsymbol{x} + B_{17}(B_1,c_1,c_2,m,\gamma,\Omega). \quad (30)$$

Ввиду замечания 1, для пятого слагаемого в правой части (26) справедлива оценка

$$-\varepsilon \int\limits_\Omega \rho \left(\int\limits_1^{\rho+l} \frac{p(\eta)}{\eta^2}\, d\eta \right) d\boldsymbol{x} \leqslant -\varepsilon B_1 \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + B_{18}(B_2, \Omega). \tag{31}$$

Используя замечание 1 и формулу (24), для предпоследнего слагаемого в правой части (26) получим, что

$$-\varepsilon \int\limits_\Omega \frac{\rho p(\rho+l)}{\rho+l}\, d\boldsymbol{x} \leqslant -\frac{\varepsilon}{c_1 \gamma} \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + B_{19}(c_2, m). \tag{32}$$

Последнее слагаемое в правой части (26) неположительно (см. (5)).

Таким образом, из (26), ввиду (27)–(32) и неположительности последнего слагаемого в правой части (26), следует неравенство

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega p(\rho+l) \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} \leqslant -\frac{\varepsilon}{2} \left(B_1 + \frac{1}{c_1 \gamma} \right) \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + B_{13}\, l \int\limits_\Omega (\rho^{\gamma-1} + 1) \left(\sum_{i=1}^N |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i| \right) d\boldsymbol{x} + \\ + B_{14}\, l \int\limits_\Omega (\rho^{\gamma-1} + 1) \left(\sum_{i=1}^N |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i| \right) d\boldsymbol{x} + B_{15}\, l \ln l \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|\, d\boldsymbol{x} - \\ - B_2 l \int\limits_{\{\Omega\colon\, 0<\rho<1-l,\ \operatorname{div} \boldsymbol{v}<0\}} \frac{\operatorname{div} \boldsymbol{v}}{\rho+l}\, d\boldsymbol{x} + B_{20}(B_{16}, B_{17}, B_{18}, B_{19}). \end{aligned} \tag{33}$$

Перейдём в (33) к пределу при $l \to +0$, используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, и в итоге получим оценку

$$\int\limits_\Omega p(\rho) \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} \leqslant -\frac{\varepsilon}{2} \left(B_1 + \frac{1}{c_1 \gamma} \right) \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + B_{20}. \tag{34}$$

Далее, из соотношения (23), в силу (10), (34) и того факта, что $\dfrac{1}{\lambda} \geqslant 1$, следует неравенство

$$\begin{aligned} B_5 \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon m}{2|\Omega|} \sum_{i=1}^N \alpha_i \int\limits_\Omega |\boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2} \left(B_1 + \frac{1}{c_1 \gamma} \right) \int\limits_\Omega \rho^\gamma \, d\boldsymbol{x} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \int\limits_\Omega (1+\rho) |\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{u}_j|^2\, d\boldsymbol{x} \leqslant \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i\, d\boldsymbol{x} + B_{20}, \end{aligned}$$

откуда ввиду оценок (здесь используются неравенство Фридрихса и неравенство Юнга)

$$B_5 \sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} \geqslant B_{21}(B_5, \Omega) \sum_{i=1}^N \|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

$$\sum_{i=1}^N \int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i\, d\boldsymbol{x} \leqslant \frac{B_{21}}{2} \sum_{i=1}^N \|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4} \left(B_1 + \frac{1}{c_1 \gamma} \right) \|\rho\|^\gamma_{L_\gamma(\Omega)} + B_{22} \left(B_1, B_{21}, \left\{ \|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})} \right\}, c_1, N, \gamma, \varepsilon, \Omega \right),$$

получаем равномерную по λ оценку

$$\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{u}_i\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\rho\|_{L_\gamma(\Omega)} \leqslant B_{23}\left(B_1, B_{20}, B_{21}, B_{22}, c_1, N, \gamma, \varepsilon\right). \tag{35}$$

Отсюда, в частности, следует (здесь используется вложение $W_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$)

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_6(\Omega)} \leqslant B_{24}\left(B_{23}, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{36}$$

3.3. Дальнейшие оценки

Перепишем уравнение (20) в виде

$$-\varepsilon\Delta\rho = \operatorname{div}(\boldsymbol{h} - \rho\boldsymbol{v}), \tag{37}$$

где векторное поле $\boldsymbol{h}$, в свою очередь, является решением задачи

$$\operatorname{div}\boldsymbol{h} = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|} - \varepsilon\rho, \quad \boldsymbol{h}|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{0}. \tag{38}$$

Из оценки (35), свойств решений задачи (38) (см., например, [12], стр. 169) и вложения $W_\gamma^1(\Omega)$ в $C\big(\overline{\Omega}\big)$ следует, что

$$\|\boldsymbol{h}\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} \leqslant B_{25}(\gamma, \Omega)\|\boldsymbol{h}\|_{W_\gamma^1(\Omega)} \leqslant B_{26}(B_{25}, \gamma, \Omega)\left\|\varepsilon\frac{m}{|\Omega|} - \varepsilon\rho\right\|_{L_\gamma(\Omega)} \leqslant B_{27}(B_{23}, B_{26}, m, \gamma, \Omega). \tag{39}$$

Ввиду (35), (36) и (39), из (20) (т. е. (37)) и (22), в силу оценок для решений эллиптических краевых задач (см., например, [12], стр. 211) вытекает, что

$$\|\nabla\rho\|_{L_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)} \leqslant B_{28}\left(\gamma, \varepsilon, \Omega\right)\left(\|\boldsymbol{h}\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} + \sum_{i=1}^{N}\|\rho\boldsymbol{u}_i\|_{L_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)}\right) \leqslant B_{29}(B_{23}, B_{24}, B_{27}, B_{28}, N),$$

а значит

$$\|\rho\|_{W^1_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)} \leqslant B_{30}(B_{23}, B_{29}, \gamma, \Omega).$$

Поскольку при $\gamma > 6$ пространство $W^1_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)$ вложено в пространство $C\big(\overline{\Omega}\big)$, то при $\gamma > 6$

$$\|\rho\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} \leqslant B_{31}\left(B_{30}, \gamma, \Omega\right). \tag{40}$$

Для получения оценки вида (40) при $\gamma \in (3, 6]$ необходимо повторить рассуждения выше. Т. к. пространство $W^1_{\frac{6\gamma}{6+\gamma}}(\Omega)$ вложено при $\gamma \in (3, 6)$ в пространство $L_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)$, а при $\gamma = 6$ — в пространство $L_{12}(\Omega)$, то при $\gamma \in (3, 6)$

$$\|\rho\|_{L_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)} \leqslant B_{32}\left(B_{30}, \gamma, \Omega\right), \tag{41}$$

а при $\gamma = 6$

$$\|\rho\|_{L_{12}(\Omega)} \leqslant B_{33}\left(B_{30}, \Omega\right). \tag{42}$$

Используя оценки (41), (42), свойства решений задачи (38) и вложения пространств $W^1_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)$, $W_{12}^1(\Omega)$ в $C\big(\overline{\Omega}\big)$, приходим к неравенствам

$$\|\boldsymbol{h}\|_{C\left(\overline{\Omega}\right)} \leqslant B_{34}(\gamma, \Omega)\|\boldsymbol{h}\|_{W^1_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)} \leqslant B_{35}(B_{34}, \gamma, \Omega)\left\|\varepsilon\frac{m}{|\Omega|} - \varepsilon\rho\right\|_{L_{\frac{6\gamma}{6-\gamma}}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant B_{36}(B_{32}, B_{35}, m, \gamma, \Omega), \quad 3 < \gamma < 6, \tag{43}$$

$$\|\boldsymbol{h}\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{37}(\Omega)\|\boldsymbol{h}\|_{W^1_{12}(\Omega)} \leqslant B_{38}(B_{37},\Omega)\left\|\varepsilon\frac{m}{|\Omega|}-\varepsilon\rho\right\|_{L_{12}(\Omega)} \leqslant B_{39}(B_{33},B_{38},m,\Omega),\ \gamma=6. \quad (44)$$

Учитывая (36), (41), (42), (43) и (44), из (20) (т. е. (37)) и (22), в силу оценок для решений эллиптических краевых задач получаем теперь, что

$$\|\nabla\rho\|_{L_\gamma(\Omega)} \leqslant B_{40}(\gamma,\varepsilon,\Omega)\left(\|\boldsymbol{h}\|_{C(\overline{\Omega})}+\sum_{i=1}^N\|\rho\boldsymbol{u}_i\|_{L_\gamma(\Omega)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant B_{41}(B_{24},B_{32},B_{35},B_{40},N),\quad 3<\gamma<6,$$

$$\|\nabla\rho\|_{L_4(\Omega)} \leqslant B_{42}(\varepsilon,\Omega)\left(\|\boldsymbol{h}\|_{C(\overline{\Omega})}+\sum_{i=1}^N\|\rho\boldsymbol{u}_i\|_{L_4(\Omega)}\right)\leqslant B_{43}(B_{24},B_{33},B_{39},B_{42},N),\ \gamma=6.$$

Тогда

$$\|\rho\|_{W^1_\gamma(\Omega)} \leqslant B_{44}(B_{23},B_{43},\gamma),\quad 3<\gamma<6 \quad \text{и} \quad \|\rho\|_{W^1_4(\Omega)} \leqslant B_{45}(B_{33},B_{43},\Omega),\quad \gamma=6.$$

Ввиду вложений пространств $W^1_\gamma(\Omega)$, $W^1_4(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$, получаем требуемое:

$$\|\rho\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{46}(B_{44},B_{45},\gamma,\Omega),\quad 3<\gamma\leqslant 6. \quad (45)$$

Из (36), (40) и (45), в частности, следует, что

$$\|\rho\boldsymbol{u}_i\|_{L_6(\Omega)} \leqslant B_{47}(B_{24},B_{46}),\quad i=1,\dots,N.$$

Введём обозначения

$$\boldsymbol{\zeta}_i=\frac{1}{2|\Omega|}\int\limits_\Omega \rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x},\quad i=1,\dots,N,$$

$$\boldsymbol{H}_i=\lambda\left(-\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i-\frac{\varepsilon m}{2|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i+\boldsymbol{J}_i+\rho_i\boldsymbol{f}_i-\boldsymbol{\zeta}_i\right),\quad i=1,\dots,N.$$

Обозначим через $\mathbb{V}_i$, $i=1,\dots,N$ решения краевых задач

$$\operatorname{div}\mathbb{V}_i=\frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{\zeta}_i,\quad \mathbb{V}_i|_{\partial\Omega}=0,\quad i=1,\dots,N, \quad (46)$$

и положим $\mathbb{G}_i=\lambda\left(-\alpha_i p(\rho)\mathbb{I}-\frac{1}{2}\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i-\mathbb{V}_i\right)$, $i=1,\dots,N$. В этих обозначениях уравнения (21) принимают вид

$$-\operatorname{div}\mathbb{S}_i=\boldsymbol{H}_i+\operatorname{div}\mathbb{G}_i,\quad i=1,\dots,N. \quad (47)$$

Так как правые части уравнений (46) равномерно ограничены по λ в пространстве $L_{\frac{3}{2}}(\Omega)$, то, в силу свойств решений задач (46) (см., например, [12], стр. 169), для $\mathbb{V}_i$, $i=1,\dots,N$ справедливы неравенства

$$\|\mathbb{V}_i\|_{W^1_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leqslant B_{48}(B_{23},B_{24},B_{31},B_{46},N,\Omega),\quad i=1,\dots,N.$$

В результате заключаем, что имеют место оценки (здесь используется вложение $W^1_{\frac{3}{2}}(\Omega)$ в $L_3(\Omega)$)

$$\|\boldsymbol{H}_i\|_{L_6(\Omega)}+\|\mathbb{G}_i\|_{L_3(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant B_{49}\left(B_{23}, B_{24}, B_{46}, B_{47}, B_{48}, c_1, c_2, \left\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\right\}, \{a_{ij}\}, N, m, \gamma, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Следовательно, из уравнений (21) (т. е. (47)) и граничных условий (22), в силу оценок для решений эллиптических задач (см., например, [14–16]) вытекает, что

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W_3^1(\Omega)} \leqslant B_{50}\left(B_{49}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, N, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

и, ввиду вложения $W_3^1(\Omega)$ в $L_{2\sigma}(\Omega)$, приходим к соотношениям

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_{2\sigma}(\Omega)} \leqslant B_{51}\left(B_{50}, \sigma, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Из (20) (т. е. (37)) и (22), в силу оценок для решений эллиптических краевых задач получаем теперь, что

$$\|\nabla\rho\|_{L_{2\sigma}(\Omega)} \leqslant B_{52}\left(B_{27}, B_{31}, B_{46}, B_{51}, N, \varepsilon, \sigma, \Omega\right),$$

а значит

$$\|\rho\|_{W_{2\sigma}^1(\Omega)} \leqslant B_{53}\left(B_{31}, B_{46}, \sigma, \Omega\right).$$

Тогда, благодаря оценкам для решений эллиптических задач, из (20) (т. е. (37)) и (22) получаем, что

$$\|\nabla\rho\|_{W_3^1(\Omega)} \leqslant B_{54}\left(B_{24}, B_{27}, B_{31}, B_{46}, B_{50}, B_{51}, B_{52}, N, m, \varepsilon, \sigma, \Omega\right).$$

Поэтому

$$\|\rho\|_{W_3^2(\Omega)} \leqslant B_{55}\left(B_{31}, B_{46}, B_{54}, \Omega\right).$$

Отсюда, ввиду вложения $W_3^2(\Omega)$ в $W_{2\sigma}^1(\Omega)$, следует неравенство

$$\|\rho\|_{W_{2\sigma}^1(\Omega)} \leqslant B_{56}\left(B_{55}, \sigma, \Omega\right).$$

Таким образом, для функций $\boldsymbol{H}_i$, $\mathbb{G}_i$, $i = 1, \ldots, N$ получаем оценки

$$\|\boldsymbol{H}_i\|_{L_{2\sigma}(\Omega)} + \|\mathbb{G}_i\|_{L_\sigma(\Omega)} \leqslant B_{57}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где $B_{57} = B_{57}\left(B_{31}, B_{46}, B_{50}, B_{51}, c_1, c_2, \{\|\boldsymbol{f}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\}, \{a_{ij}\}, N, m, \gamma, \sigma, \Omega\right)$, благодаря которым приходим к соотношениям

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W_\sigma^1(\Omega)} \leqslant B_{58}\left(B_{57}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, \sigma, N, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

и

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{59}\left(B_{58}, \sigma, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

С помощью этих неравенств и оценок для решений эллиптических задач из (20) (т. е. (37)) и (22) выводим, что

$$\|\rho\|_{W_\sigma^2(\Omega)} \leqslant B_{60}\left(B_{27}, B_{31}, B_{46}, B_{56}, B_{58}, B_{59}, N, m, \varepsilon, \sigma, \Omega\right),$$

откуда

$$\|\nabla\rho\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant B_{61}\left(B_{60}, \sigma, \Omega\right).$$

Для функций $\mathbb{G}_i$, $i = 1, \ldots, N$ теперь справедливы следующие неравенства:

$$\|\operatorname{div}\mathbb{G}_i\|_{L_\sigma(\Omega)} \leqslant B_{62}\left(B_{31}, B_{46}, B_{58}, B_{59}, B_{61}, c_1, c_2, N, \gamma, \sigma, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Тогда из (21) (т. е. (47)), (22) и оценок для решений эллиптических задач следует, наконец, что

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W_\sigma^2(\Omega)} \leqslant B_{63}\left(B_{57}, B_{62}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, \sigma, N, \Omega\right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

3.4. Результат о разрешимости

Итак, выполнены все условия теоремы Лерэ—Шаудера, поэтому можно утверждать, что краевая задача (11)–(13) имеет по крайней мере одно сильное решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для доказательства разрешимости исходной краевой задачи (1)–(4) (см. определение 1) остаётся совершить предельный переход по параметру ε, отличающему задачу (11)–(13) от исходной задачи (1)–(4), на основании оценок, равномерных по этому параметру. Это предполагается сделать в следующей работе.

Авторы выражают благодарность уважаемому рецензенту за конструктивные замечания, позволившие улучшить качество работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rajagopal K. L., Tao L.* Mechanics of mixtures. N. J.: World Scientific, 1995.
2. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред, ч. 1. М.: Наука, 1987.
3. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory // Siberian Electron. Math. Rep. 2017. V. 14. P. 388–397.
4. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.* Феноменологическое описание двухскоростных сред с релаксирующими касательными напряжениями // Прикл. механика и техн. физика. 1992. № 3. С. 97–104.
5. *Блохин А. М., Доровский В. Н.* Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск: ОИГГМ, 1994.
6. *Frehse J., Goj S., Malek J.* On a Stokes-like system for mixtures of fluids // SIAM J. Math. Anal. 2005. V. 36, N 4. P. 1259–1281.
7. *Frehse J., Weigant W.* On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids // Appl. Math. 2008. V. 53, N 4. P. 319–345.
8. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений политропного движения вязких сжимаемых многожидкостных сред // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 664–693.
9. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
10. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
11. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.
12. *Novotný A., Straškraba I.* Introduction to the mathematical theory of compressible flow. Oxford: Oxford University Press, 2004.
13. *Mucha P., Pokorny M.* Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids // Math. Models Methods Appl. Sci. 2010. V. 20, N 5. P. 785–813.
14. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
15. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем эллиптических уравнений в смысле А. Дуглиса — Л. Ниренберга. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 42. С. 233–297.
16. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35–92.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF BAROTROPIC FLOWS OF A MULTICOMPONENT MEDIUM. I. STATEMENT OF THE MAIN PROBLEM. SOLVABILITY OF AN AUXILIARY PROBLEM

© 2023 **A. E. Mamontov**[1,2a], **D. A. Prokudin**[3b]

[1] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2] *Siberian State University of Telecommunications and Information Science, Novosibirsk, 630102 Russia,*
[3] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]aem@hydro.nsc.ru, [b]prokudin@hydro.nsc.ru

Received 30.08.2022, revised 18.09.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. The problem of steady barotropic motion of a multicomponent medium consisting of viscous compressible fluids in a bounded domain of three-dimensional space is formulated. The viscosity matrices are assumed to be arbitrary (nondiagonal). The solvability of a regularized (approximate) problem is proved.

Keywords: existence theorem, steady barotropic flow, viscous compressible multifluid, viscosity matrix.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.406

REFERENCES

1. K. L. Rajagopal and L. Tao, *Mechanics of Mixtures* (World Scientific, N. J., 1995).
2. R. I. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media. Part 1* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].
3. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: Barotropic existence theory," Sib. Electron. Math. Rep. **14**, 388–397 (2017).
4. V. N. Dorovskii and Yu. V. Perepechko, "Phenomenological description of two-velocity media with relaxing tangential stresses," Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. (3), 97–104 (1992) [in Russian].
5. A. M. Blokhin and V. N. Dorovskii, *Problems of Mathematical Modeling in the Theory of Multivelocity Continuum* (OIGGM, Novosibirsk, 1994) [in Russian].
6. J. Frehse, S. Goj, and J. Malek, "On a Stokes-like system for mixtures of fluids," SIAM J. Math. Anal. **36** (4), 1259–1281 (2005).
7. J. Frehse and W. Weigant, "On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids," Appl. Math. **53** (4), 319–345 (2008).
8. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Solvability of a stationary boundary value problem for equations of polytropic motion of viscous compressible multifluid media," Sib. Elektron. Mat. Izv. **13**, 664–693 (2016) [in Russian].
9. V. G. Maz'ya, *Sobolev Spaces* (Izd. Leningrad. Univ., Leningrad, 1985) [in Russian].
10. S. M. Nikol'skii, *Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 802–814.

11. V. A. Trenogin, *Functional Analysis* (Fizmatlit, Moscow, 2002) [in Russian].
12. A. Novotny and I. Straskraba, *Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2004).
13. P. Mucha and M. Pokorny, "Weak solutions to equations of steady compressible heat conducting fluids," Math. Models Methods Appl. Sci. **20** (5), 785–813 (2010).
14. O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
15. L. A. Solonnikov, "On general boundary value problems for systems of Douglis—Nirenberg elliptic equations. II," Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **42**, 233–297 (1966) [in Russian].
16. S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II," Commun. Pure Appl. Math. **17**, 35–92 (1964).

УДК 519.63

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2023 **А. Ю. Морозов**[1,2a], **Д. Л. Ревизников**[1,2b]

[1] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, ул. Вавилова, 44, корп. 2, г. Москва 119333, Россия,*
[2] *Московский авиационный институт, Волоколамское шоссе, 4, г. Москва 125993, Россия*

E-mails: [a]morozov@infway.ru, [b]reviznikov@mai.ru

Поступила в редакцию 01.08.2023 г.; после доработки 28.09.2023 г.;
принята к публикации 01.11.2023 г.

В работе рассматриваются вопросы численного решения дробно-дифференциальных уравнений с интервальными параметрами в показателях производных, описывающих процессы аномальной диффузии. Представлены вычислительные алгоритмы решения начально-краевых задач, а также соответствующих обратных задач для уравнений, содержащих интервальные дробные производные по времени и по пространству. В основе алгоритмов лежит ранее разработанный, теоретически обоснованный и апробированный на ряде прикладных задач алгоритм адаптивной интерполяции для моделирования динамических систем с интервальными параметрами, позволяющий в явном виде получать параметрические множества состояний динамических систем. На нескольких задачах продемонстрирована эффективность и работоспособность предлагаемых алгоритмов.

Ключевые слова: дробная производная, аномальная диффузия, разностная схема, обратные задачи, параметрическая идентификация, интервальные параметры, динамические системы, алгоритм адаптивной интерполяции.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.407

ВВЕДЕНИЕ

Исторически вопрос обобщения производных на дробный порядок возник практически сразу с появлением дифференциального исчисления. Первыми в этой области были Г. В. Лейбниц, Г. Ф. Лопиталь, Л. Эйлер, П.-С. Лаплас, Н. Х. Абель. Существует несколько определений дробных интегралов и производных, однако наиболее распространёнными являются определения Г. Ф. Б. Римана и Ж. Лиувилля. Левосторонняя и правосторонняя дробные производные Римана—Лиувилля произвольного порядка α для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[L, R]$, определяются формулами [1]:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma([\alpha]+1-\alpha)} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} \int\limits_L^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-[\alpha]}} d\xi,$$
$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{(-1)^{[\alpha]+1}}{\Gamma([\alpha]+1-\alpha)} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} \int\limits_x^R \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-[\alpha]}} d\xi,$$

где Γ — гамма-функция, $[\alpha]$ — целая часть числа α. Отметим, что дробная производная является нелокальным оператором свёртки. Для левосторонней производной значение дробной

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 075-15-2020-799).

производной зависит от значений функции во всех точках левее x, а для правосторонней — правее x.

В основе семейства конечно-разностных методов решения дробно-дифференциальных уравнений лежит подход, разработанный А. Грюнвальдом и А. В. Летниковым. А. В. Летников доказал [2], что дробная производная, задаваемая формулой:

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{M} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(x-kh),$$

где M — положительное целое число и $h = \dfrac{x-L}{M}$, совпадает с соответствующим определением дробной производной Римана—Лиувилля.

В настоящий момент дробно-дифференциальное исчисление применяется в задачах химической физики, математической экономики, теории гравитации, вязкоупругости и др. Зачастую прикладные задачи, описывающиеся дифференциальными уравнениями с дробными производными, не имеют аналитического решения, поэтому перспективным является развитие соответствующих численных методов. Вопросы аппроксимации и устойчивости конечно-разностных схем решения дробно-дифференциальных уравнений обсуждались в работах [3,4]. В [5] исследуются дробно-пространственные уравнения адвекции-дисперсии с переменными параметрами, в [6] дробно-дифференциальная модель процесса теплопроводности сегнетоэлектрических материалов в условиях интенсивного нагрева. Теоретический и численный анализ модели сегнетоэлектрического гистерезиса Ландау—Халатникова выполняется в работе [7]. Работа [8] посвящена построению и программной реализации вычислительного алгоритма моделирования процесса аномальной диффузии. Численное моделирование аномальной диффузии бильярдного газа в полигональном канале представлено в [9]. В публикации [10] используется дробное уравнение Риккати для математического моделирования динамических процессов с эффектом насыщения и памяти. В [11] разработан линеаризованный спектральный подход Галеркина для нелинейных уравнений диффузии-реакции переменного дробного порядка с фиксированным запаздыванием.

Как правило, для получаемых из эксперимента данных характерно наличие разброса в значениях. В основном это связано с погрешностями проводимых измерений или с внешними факторами, влияние которых нельзя исключить. Наиболее простым описанием неопределённости является интервальная оценка возможных значений. В связи с этим возникает отдельный интервальный класс задач, для которого существует соответствующий математический аппарат [12–15]. Традиционно рассматриваются математические модели динамических систем с интервальными параметрами. Преимущество в использовании интервальных моделей заключается в том, что они дают ограничения на интересующие величины, в отличие от классических моделей, которые аппроксимируют их.

Можно выделить два типа задач. Первый тип — прямые задачи: когда все интервальные параметры модели определены и необходимо построить коридоры возможных значений для интересующих величин. Для решения таких задач авторами работы ранее был разработан алгоритм адаптивной интерполяции [16–20], позволяющий в рамках заданной области неопределённости параметров в явном виде получать параметрические множества состояний динамической системы. Второй тип — обратные задачи: когда известна экспериментальная информация относительно состояний динамической системы, но при этом неизвестными являются интервальные параметры. В работах [18,19] на основе алгоритма адаптивной интерполяции был разработан подход для решения таких задач интервальной параметрической идентификации.

Существует несколько подходов к решению интервальных задач: одни основаны на использовании классической интервальной арифметики [12–15], другие — на аппроксимации

множества решений с помощью геометрических примитивов [20–22], а в основе третьих лежит определение явной зависимости решения задачи от значений интервальных параметров [26–30]. Алгоритм адаптивной интерполяции относится к последней группе. Вопросы решения задач интервальной параметрической идентификации рассматриваются в работах [28–30]. В [28] представлен итеративный интервальный метод для прогнозирования границ параметров заданной модели в условиях неопределённости измеренных данных. В диссертационном исследовании [29] предлагается структурно-параметрическая идентификация линейных либо допускающих линеаризацию динамических объектов по интервальным исходным данным. Работа [30] посвящена развитию методов параметрической идентификации на основе нейронных сетей, применяемых для решения обратных задач теплофизики в условиях интервальной неопределённости параметров.

В контексте дробно-дифференциальных уравнений интерес представляют уравнения, в которых порядок производной является интервальным параметром. В настоящей работе рассматривается уравнение аномальной диффузии с интервальными порядками производных по времени и по пространству. Выполняется построение методов, являющихся комбинацией ранее разработанных интервальных подходов [13, 18] с явной и неявной конечно-разностной схемой решения уравнения аномальной диффузии [31].

1. УРАВНЕНИЕ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Приведём описание уравнения аномальной диффузии в соответствии с работой [31]. Уравнение аномальной диффузии записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^{\gamma} c\,(x,t)}{\partial t^{\gamma}} = d\,(x)\,\frac{\partial^{\alpha} c\,(x,t)}{\partial x^{\alpha}} + q\,(x,t)\,, \tag{1}$$

и получается из классического дифференциального уравнения диффузии

$$\frac{\partial c\,(x,t)}{\partial t} = d\,(x)\,\frac{\partial^{2} c\,(x,t)}{\partial x^{2}} + q\,(x,t)$$

заменой производной второго порядка по пространственной координате на дробную производную порядка $1 < \alpha \leqslant 2$ и производной по времени первого порядка на дробную производную порядка $0 < \gamma \leqslant 1$. Здесь $c\,(x,t)$ — функция концентрации вещества на отрезке $L \leqslant x \leqslant R$; $q\,(x,t)$ — функция источника (стока) на данном отрезке; $d\,(x) \geqslant 0$ — коэффициент диффузии. Уравнение (1) дополняется начальным условием $c\,(x, t=0) = F_0\,(x)$ и граничными условиями $c\,(x=L,t) = F_L\,(t)$ и $c\,(x=R,t) = F_R\,(t)$ для всех $t \geqslant 0$.

В случае с интервальными порядками производных имеем $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, $\gamma \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]$, где $1 < \underline{\alpha} \leqslant \overline{\alpha} \leqslant 2$, $0 < \underline{\gamma} \leqslant \overline{\gamma} \leqslant 1$ — нижние и верхние границы интервалов. Концентрация в каждой точке x в момент времени t является параметрическим множеством:

$$C\,(x,t) = \left\{ c\,(x,t,\xi_{\alpha},\xi_{\gamma}) \,\middle|\, \xi_{\alpha} \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]\,, \xi_{\gamma} \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right] \right\}, \tag{2}$$

где $c\,(x,t,\xi_{\alpha},\xi_{\gamma})$ — значение концентрации в точке x в момент времени t, найденное при значениях порядков дробных производных $\alpha = \xi_{\alpha}$ и $\gamma = \xi_{\gamma}$.

Интервальную оценку концентрации можно записать следующим образом:

$$c\,(x,t) \in [\underline{c}\,(x,t)\,, \overline{c}\,(x,t)]\,, \tag{3}$$

где $\underline{c}\,(x,t) = \min\limits_{\xi_{\alpha} \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], \xi_{\gamma} \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]} c\,(x,t,\xi_{\alpha},\xi_{\gamma})$, $\overline{c}\,(x,t) = \max\limits_{\xi_{\alpha} \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], \xi_{\gamma} \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]} c\,(x,t,\xi_{\alpha},\xi_{\gamma})$.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Сначала приведём описание явной и неявной схемы решения уравнения (1) для нахождения $c\,(x,t)$ для неинтервальных значений α и γ, а далее — алгоритм адаптивной интерполяции для построения (2) и (3).

Воспользуемся формулой Грюнвальда—Летникова определения дробной производной:

$$\frac{\partial^\gamma f\,(x,t)}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{\Gamma\,(-\gamma)} \lim_{M\to\infty} \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{k=0}^{M} \frac{\Gamma\,(k-\gamma)}{\Gamma\,(k+1)} f\,(x, t-k\tau),$$
$$\frac{\partial^\alpha f\,(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma\,(-\alpha)} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^{N} \frac{\Gamma\,(i-\alpha)}{\Gamma\,(i+1)} f\,(x-ih, t).$$

Для схемы численной аппроксимации введём следующие обозначения: τ — шаг по времени; $t_k = k\tau$ на рассматриваемом отрезке $0 \leqslant t_k \leqslant T$; n — число отрезков, на которое делится исходный отрезок $[L,R]$; $h = \dfrac{R-L}{n} > 0$ — шаг сетки по пространственной координате; $x_i = L + ih$, $i = 0,...,n$; $c_i^k = c\,(x_i,t_k)$, $d_i = d\,(x_i)$ и $q_i^k = q\,(x_i,t_k)$ — для сокращения записи.

Используются следующие конечно-разностные операторы:

$$\frac{\partial^\gamma c\,(x_i,t_k)}{\partial t^\gamma} \approx \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{l=0}^{k} g_{\gamma,l} c_i^{k-l},$$
$$\frac{\partial^\alpha c\,(x_i,t_k)}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} g_{\alpha,j} c_{i-j+1}^{k},$$

где $g_{\alpha,j} = \dfrac{\Gamma\,(j-\alpha)}{\Gamma\,(-\alpha)\,\Gamma\,(j+1)}$ и $g_{\gamma,l} = \dfrac{\Gamma\,(l-\gamma)}{\Gamma\,(-\gamma)\,\Gamma\,(l+1)}$ — нормированные веса Грюнвальда—Летникова.

Явная схема для решения уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{gathered} c_i^0 = F_0\,(x_i)\,, \\ c_0^{k+1} = F_L\,(t_{k+1})\,, \\ \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{l=0}^{k+1} g_{\gamma,l} c_i^{k+1-l} = \frac{d_i}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} g_{\alpha,j} c_{i-j+1}^{k} + q_i^{k+1},\ i = 1,...,n-1, \\ c_n^{k+1} = F_R\,(t_{k+1})\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Согласно теоремам 1 и 3 из работы [31] конечно-разностная схема (4) при условии $F_0(x) = 0$ и $F_L(t) = 0$ аппроксимирует дифференциальную задачу (1) с порядком $O\,(h+\tau)$ и является условно устойчивой при $\dfrac{\tau^\gamma}{h^\alpha} \max\limits_i d_i \leqslant \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Для дальнейшего удобства выразим c_i^{k+1} из выражения (4):

$$c_i^{k+1} = d_i \frac{\tau^\gamma}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} g_{\alpha,j} c_{i-j+1}^{k} - \sum_{l=1}^{k+1} g_{\gamma,l} c_i^{k+1-l} + \tau^\gamma q_i^{k+1},\ i = 1,...,n-1.$$

И запишем схему в матричном виде:

$$\mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{A_{ex}} \mathbf{c}^k - \sum_{l=2}^{k+1} g_{\gamma,l} \mathbf{c}^{k+1-l} + \tau^\gamma \mathbf{q}^{k+1}, \tag{5}$$

где $\mathbf{c}^k = \left(c_0^k, c_1^k, ..., c_n^k\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{q}^k = \left(q_0^k, q_1^k, ..., q_n^k\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A_{ex}}$ — матрица размера $(n+1) \times (n+1)$, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & j \geqslant i+2, \\ g_{\alpha,0} d_i \tau^\gamma / h^\alpha, & j = i+1, \\ -g_{\gamma,1} + g_{\alpha,1} d_i \tau^\gamma / h^\alpha, & j = i, \\ g_{\alpha,i+1-j} d_i \tau^\gamma / h^\alpha, & j \leqslant i-1, \end{cases}$$
$$i = 1, ..., n-1,\ j = 0, ..., n,$$
$$a_{0,0} = a_{n,n} = 1,$$
$$a_{0,j} = 0, j = 1, ..., n,$$
$$a_{n,j} = 0, j = 0, ..., n-1.$$

Неявная схема имеет вид:

$$\begin{gathered} c_i^0 = F_0\left(x_i\right), \\ c_0^{k+1} = F_L\left(t_{k+1}\right), \\ \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{l=0}^{k+1} g_{\gamma,l} c_i^{k+1-l} = \frac{d_i}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} g_{\alpha,j} c_{i-j+1}^{k+1} + q_i^{k+1},\ i = 1, ..., n-1, \\ c_n^{k+1} = F_R\left(t_{k+1}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Данная схема является абсолютно устойчивой и, так же как и явная схема, имеет порядок аппроксимации $O\left(h + \tau\right)$ при условии $F_0(x) = 0$ и $F_L(t) = 0$. Представленный подход применим и при неоднородных начальных и граничных условиях, но в этом случае асимптотические свойства схемы требуют специального рассмотрения в силу нелокального характера дробных производных.

Запишем (6) в матричном виде:

$$\mathbf{A_{im}} \mathbf{c}^{k+1} = -\sum_{l=1}^{k+1} g_{\gamma,l} \mathbf{c}^{k+1-l} + \tau^\gamma \mathbf{q}^{k+1}, \tag{7}$$

где $\mathbf{c}^k = \left(c_0^k, c_1^k, ..., c_n^k\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{q}^k = \left(q_0^k, q_1^k, ..., q_n^k\right)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A_{im}}$ — матрица размера $(n+1) \times (n+1)$, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & j \geqslant i+2, \\ -g_{\alpha,0} d_i \tau^\gamma / h^\alpha, & j = i+1, \\ 1 - g_{\alpha,1} d_i \tau^\gamma / h^\alpha, & j = i, \\ -g_{\alpha,i+1-j} d_i \tau^\gamma / h^\alpha, & j \leqslant i-1, \end{cases}$$
$$i = 1, ..., n-1,\ j = 0, ..., n,$$
$$a_{0,0} = a_{n,n} = 1,$$
$$a_{0,j} = 0, j = 1, ..., n,$$
$$a_{n,j} = 0, j = 0, ..., n-1.$$

Выразим из уравнения (7) вектор $\mathbf{c}^{k+1}$:

$$\mathbf{c}^{k+1} = \mathbf{A_{im}^{-1}} \left(\tau^\gamma \mathbf{q}^{k+1} - \sum_{l=1}^{k+1} g_{\gamma,l} \mathbf{c}^{k+1-l} \right). \tag{8}$$

В рамках интервальной постановки задачи далее вектор $\mathbf{c}^k$ будем рассматривать как вектор-функцию $\mathbf{c}^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) = \left(c_0^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right), c_1^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right), ..., c_n^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)\right)^{\mathrm{T}}$, а матрицы $\mathbf{A_{ex}}$ и $\mathbf{A_{im}}$ — как матрицы функций $\mathbf{A_{ex}}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)$ и $\mathbf{A_{im}}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)$, где $\xi_\alpha \in \left[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}\right], \xi_\gamma \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]$.

Решение в каждый k-й момент времени можно представить в виде прямого произведения интервалов:

$$C^k = \left[\underline{c_0^k}, \overline{c_0^k}\right] \times \left[\underline{c_2^k}, \overline{c_2^k}\right] \times ... \times \left[\underline{c_n^k}, \overline{c_n^k}\right], \tag{9}$$

где

$$\underline{c_i^k} = \min_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], \xi_\gamma \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]} c_i^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right),$$
$$\overline{c_i^k} = \max_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], \xi_\gamma \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]} c_i^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right),$$
$$i = 0, ..., n.$$

Цель алгоритма адаптивной интерполяции заключается в построении вектор-функции $\mathbf{P}^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) = \left(P_0^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right), P_1^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right), ..., P_n^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)\right)^{\mathrm{T}}$, интерполирующей $\mathbf{c}^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)$ с контролируемой точностью.

Дальнейшее построение (9) сводится к задачам условной оптимизации для явных функций, которые можно решить, например, с помощью методов, представленных в работах [32–34].

Построение вектор-функций $\mathbf{P}^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)$, $k \geqslant 0$ происходит последовательно. $\mathbf{P}^0\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)$ определяется явным образом:

$$\mathbf{P}^0\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) = \left(F_0\left(x_0\right), F_0\left(x_1\right), ..., F_0\left(x_n\right)\right)^{\mathrm{T}}.$$

Отметим, что $\mathbf{P}^0$ не зависит от ξ_α и ξ_γ. Построим $\mathbf{P}^{k+1}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)$ для произвольного k. Получение $\mathbf{P}^{k+1}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)$ заключается в интерполяции функции $\mathbf{f}^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) = \left(f_0^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right), f_1^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right), ..., f_n^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)\right)^{\mathrm{T}}$, заданной в соответствии или с явной схемой (5):

$$\mathbf{f}^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) = \mathbf{A_{ex}}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)\mathbf{P}^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) - \sum_{l=2}^{k+1} g_{\xi_\gamma, l}\mathbf{P}^{k+1-l}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) + \tau^{\xi_\gamma}\mathbf{q}^{k+1},$$

или с неявной схемой (8):

$$\mathbf{f}^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) = \mathbf{A_{im}^{-1}}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)\left(\tau^{\xi_\gamma}\mathbf{q}^{k+1} - \sum_{l=1}^{k+1} g_{\xi_\gamma, l}\mathbf{P}^{k+1-l}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)\right),$$

где $f_0^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) = F_L\left(t_{k+1}\right)$ и $f_n^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) = F_R\left(t_{k+1}\right)$.

Традиционно интерполяционный полином $\mathbf{P}^k$ строится по определённому набору узлов, которые образуют сетку. Поэтому сначала выполняется перенос решений, которые соответствуют узлам, на $k+1$ временной слой, а далее в зависимости от значения погрешности интерполяции происходит адаптация. Погрешность для любой точки $\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)$ оценивается как $\max\limits_i \left|P_i^{k+1}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) - f_i^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)\right|$. В тех местах сетки, где погрешность большая, происходит добавление новых узлов, а в тех местах, где погрешность приемлемая, — разрежение сетки. Процедура адаптации останавливается, когда $\max\limits_i \left|P_i^{k+1}\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) - f_i^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)\right| < \varepsilon$, где ε — некоторое заранее определённое значение, характеризующее точность.

В общем случае интерполяционный полином $\mathbf{P}$ может быть любым, необходимо только, чтобы была возможность контролировать погрешность интерполяции.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Задача параметрической идентификации возникает, когда модель того или иного физического процесса уже определена, но неизвестными остаются параметры этой модели. Будем

предполагать, что в уравнении аномальной диффузии (1) неизвестными являются границы интервальных оценок порядков производных $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$, $\left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]$.

Пусть известна экспериментальная информация о концентрации в моменты времени t_k, заданная в виде интервальных оценок:

$$\hat{C}^k = \left[\underline{\hat{c}_0^k}, \overline{\hat{c}_0^k}\right] \times \left[\underline{\hat{c}_2^k}, \overline{\hat{c}_2^k}\right] \times ... \times \left[\underline{\hat{c}_n^k}, \overline{\hat{c}_n^k}\right].$$

Отметим, что здесь для упрощения изложения предполагается, что информация известна в узлах схемы аппроксимации.

Задача интервальной параметрической идентификации заключается в нахождении таких границ интервалов $\underline{\alpha}$, $\overline{\alpha}$, $\underline{\gamma}$, $\overline{\gamma}$, чтобы $\hat{C}^k \subseteq C^k$ или чтобы степень непересечения C^k и $\hat{C}^k$ была минимальна.

Выполним переход к задаче минимизации отклонения модельного решения от экспериментальных данных. Минимизируется следующая целевая функция:

$$J\left(\underline{\alpha}, \overline{\alpha}, \underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right) = \sum_k \rho\left(C^k, \hat{C}^k\right), \tag{10}$$

где $\rho\left(C^k, \hat{C}^k\right)$ характеризует степень непересечения множеств C^k и $\hat{C}^k$, и если $\hat{C}^k \subseteq C^k$, то $\rho\left(C^k, \hat{C}^k\right) = 0$. Так как C^k и $\hat{C}^k$ являются многомерными прямоугольными параллелепипедами, то в качестве ρ удобно использовать сумму квадратов расстояний по каждому $i = 0, ..., n$ между интервалом $\left[\underline{c_i^k}, \overline{c_i^k}\right]$ и каждой из границ интервала $\left[\underline{\hat{c}_i^k}, \overline{\hat{c}_i^k}\right]$:

$$\rho\left(C^k, \hat{C}^k\right) = \sum_{i=0}^{n} \left[\rho\left(\left[\underline{c_i^k}, \overline{c_i^k}\right], \underline{\hat{c}_i^k}\right)^2 + \rho\left(\left[\underline{c_i^k}, \overline{c_i^k}\right], \overline{\hat{c}_i^k}\right)^2\right],$$

где

$$\rho\left(\left[\underline{c_i^k}, \overline{c_i^k}\right], b\right) = \min_{c \in \left[\underline{c_i^k}, \overline{c_i^k}\right]} |c - b| \tag{11}$$

— расстояние между интервалом $\left[\underline{c_i^k}, \overline{c_i^k}\right]$ и скаляром b.

При построении градиента целевой функции ключевую роль играют прообразы точек минимума (11) в пространстве параметров $[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \times \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]$. Поэтому важным является явное представление $\mathbf{c}^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right)$, которое возможно получить с помощью алгоритма адаптивной интерполяции. Выражение (11) запишется следующим образом:

$$\rho\left(\left[\underline{c_i^k}, \overline{c_i^k}\right], b\right) = \min_{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], \xi_\gamma \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]} \left|P_i^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) - b\right|,$$

и целевая функция (10) примет итоговый вид:

$$J\left(\underline{\alpha}, \overline{\alpha}, \underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right) = \sum_k \sum_{i=0}^{n} \left(\min_{\substack{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], \\ \xi_\gamma \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]}} \left[P_i^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) - \underline{\hat{c}_i^k}\right]^2 + \min_{\substack{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], \\ \xi_\gamma \in \left[\underline{\gamma}, \overline{\gamma}\right]}} \left[P_i^k\left(\xi_\alpha, \xi_\gamma\right) - \overline{\hat{c}_i^k}\right]^2 \right). \tag{12}$$

Определим выражения для градиента:

$$\frac{dJ}{d\underline{\alpha}} = 2\sum_k \sum_{i=0}^{n} \left(\left[P_i^k \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k \right) - \underline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k \right)}{d\underline{\xi}_\alpha} \right)^{[+]} + \left(\left[P_i^k \left(\overline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right) - \overline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k \left(\overline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right)}{d\xi_\alpha} \right)^{[+]},$$

$$\frac{dJ}{d\overline{\alpha}} = 2\sum_k \sum_{i=0}^{n} \left(\left[P_i^k \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k \right) - \underline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k \right)}{d\underline{\xi}_\alpha} \right)^{[-]} + \left(\left[P_i^k \left(\overline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right) - \overline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k \left(\overline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right)}{d\xi_\alpha} \right)^{[-]},$$

$$\frac{dJ}{d\underline{\gamma}} = 2\sum_k \sum_{i=0}^{n} \left(\left[P_i^k \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k \right) - \underline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k \right)}{d\underline{\xi}_\gamma} \right)^{[+]} + \left(\left[P_i^k \left(\overline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right) - \overline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k \left(\overline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right)}{d\xi_\gamma} \right)^{[+]},$$

$$\frac{dJ}{d\overline{\gamma}} = 2\sum_k \sum_{i=0}^{n} \left(\left[P_i^k \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k \right) - \underline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k \right)}{d\underline{\xi}_\gamma} \right)^{[-]} + \left(\left[P_i^k \left(\overline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right) - \overline{\hat{c}}_i^k \right] \frac{dP_i^k \left(\overline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right)}{d\xi_\gamma} \right)^{[-]},$$

где $(z)^{[+]} = \max(z, 0)$, $(z)^{[-]} = \min(z, 0)$,

$$\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \underline{\xi}_{\gamma,i}^k = \underset{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]}{\arg\min} \left[P_i^k (\xi_\alpha, \xi_\gamma) - \underline{\hat{c}}_i^k \right]^2,$$

$$\overline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k = \underset{\xi_\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], \xi_\gamma \in [\underline{\gamma}, \overline{\gamma}]}{\arg\min} \left[P_i^k (\xi_\alpha, \xi_\gamma) - \overline{\hat{c}}_i^k \right]^2.$$

Приведём дополнительные правила сужения границ интервалов:

$$\underline{\alpha} = \min_{\substack{i=0,\ldots,n, \\ k}} \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\alpha,i}^k \right), \quad \frac{dJ}{d\underline{\alpha}} = 0,$$

$$\overline{\alpha} = \max_{\substack{i=0,\ldots,n, \\ k}} \left(\underline{\xi}_{\alpha,i}^k, \overline{\xi}_{\alpha,i}^k \right), \quad \frac{dJ}{d\overline{\alpha}} = 0,$$

$$\underline{\gamma} = \min_{\substack{i=0,\ldots,n, \\ k}} \left(\underline{\xi}_{\gamma,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right), \quad \frac{dJ}{d\underline{\gamma}} = 0,$$

$$\overline{\gamma} = \max_{\substack{i=0,\ldots,n, \\ k}} \left(\underline{\xi}_{\gamma,i}^k, \overline{\xi}_{\gamma,i}^k \right), \quad \frac{dJ}{d\overline{\gamma}} = 0.$$

Таким образом, решение исходной задачи параметрической идентификации сводится к минимизации целевой функции (12) с помощью градиентных методов. Сначала задаётся начальное приближение $\left[\underline{\alpha}^{(0)}, \overline{\alpha}^{(0)}\right]$, $\left[\underline{\gamma}^{(0)}, \overline{\gamma}^{(0)}\right]$. На каждом шаге оптимизации решается прямая задача, далее с использованием полученных интерполяционных полиномов $\mathbf{P}^k$ вычисляется градиент и определяется новое приближение. Правила сужения применяются после каждого шага оптимизации. Процесс останавливается, когда $J < \varepsilon_J$ или $\|\nabla J\| < \varepsilon_\nabla$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Выполним численное решение одномерного дифференциального уравнения с дробными интервальными производными по пространству и времени:

$$\frac{\partial^\gamma c(x,t)}{\partial t^\gamma} = d(x) \frac{\partial^\alpha c(x,t)}{\partial x^\alpha} + q(x,t), \tag{13}$$

где

$$\alpha \in [1.2, 1.8], \gamma \in [0.2, 0.8],$$
$$q(x,t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.3)} x^2 t^{1.3} - x^2 t^2,$$
$$d(x) = \frac{\Gamma(1.3)}{\Gamma(3)} x^{1.7},$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, t \geqslant 0.$$

Начальные и граничные условия:

$$c\,(x, t = 0) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$c\,(x = 0, t) = 0,\ t \geqslant 0,$$
$$c\,(x = 1, t) = t^2,\ t \geqslant 0.$$

Решение задачи осуществлялось с помощью алгоритма адаптивной интерполяции с использованием неявной схемы аппроксимации. Параметр ε, отвечающий за точность интерполяции на каждом шаге в алгоритме, задавался равным 10^{-6}. Параметры схемы аппроксимации: $h = 0.05$ и $\tau = 0.05$.

На рис. 1 представлены полученные интервальные значения концентраций в различные моменты времени.

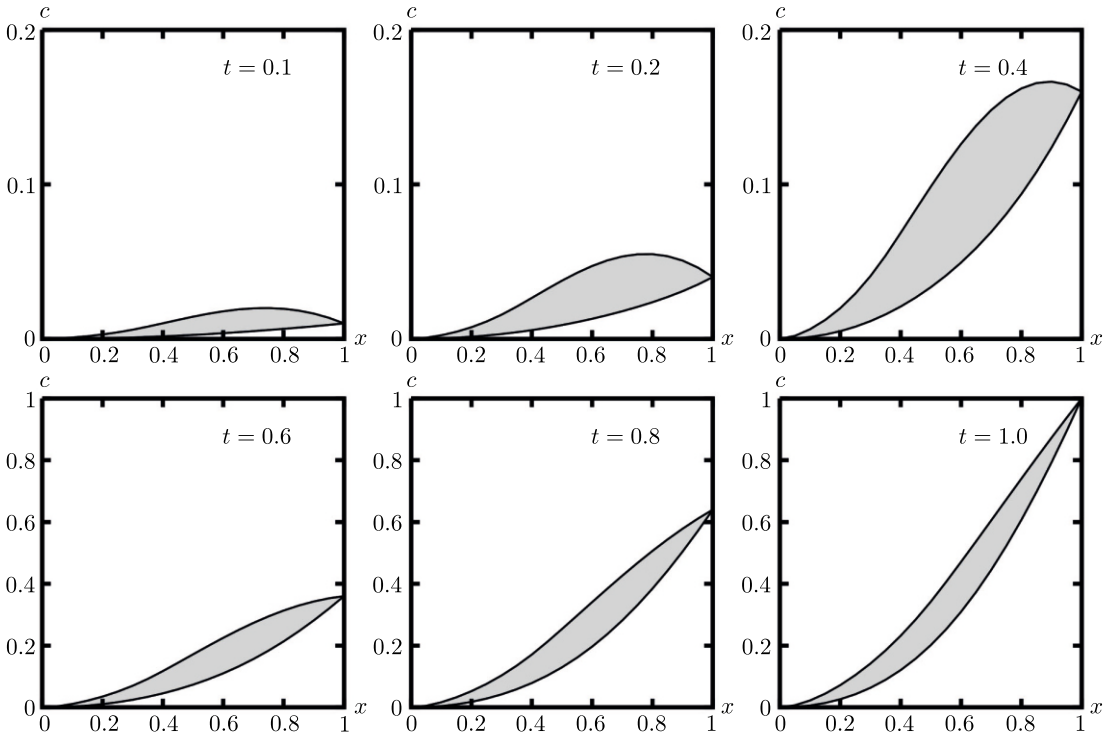


Рис. 1. Интервальная оценка решения задачи (13) в различные моменты времени

Интервальные значения порядков производных приводят к тому, что концентрация в каждой точке, за исключением граничных, становится тоже интервальной. На начальных временах на верхней границе оценки концентрации наблюдается выпуклость.

Далее рассмотрим задачу параметрической идентификации интервального порядка производной по времени γ. В качестве экспериментальных данных будут использоваться квазиэкспериментальные. Решается прямая задача со значениями порядков производных $\alpha = 1.7$ и $\gamma \in [0.6, 0.9]$. Из найденных интервальных оценок концентраций в моменты времени $t_k = 0.1k$, $k = 1, ..., 10$ выбираются случайные подынтервалы, которые далее используются в качестве экспериментальных данных. На рис. 2 показаны полученные таким образом квазиэкспериментальные значения для трёх моментов времени.

Начальное приближение в методе градиентного спуска $\gamma^{(0)} \in [0.2, 0.3]$, параметры остановки $\varepsilon_J = \varepsilon_\nabla = 10^{-10}$. На рис. 3 показан процесс параметрической идентификации.

В процессе минимизации целевой функции модельное решение стремится покрыть экспериментальные данные, о чём свидетельствует уменьшение отклонения между ними. На 26-й

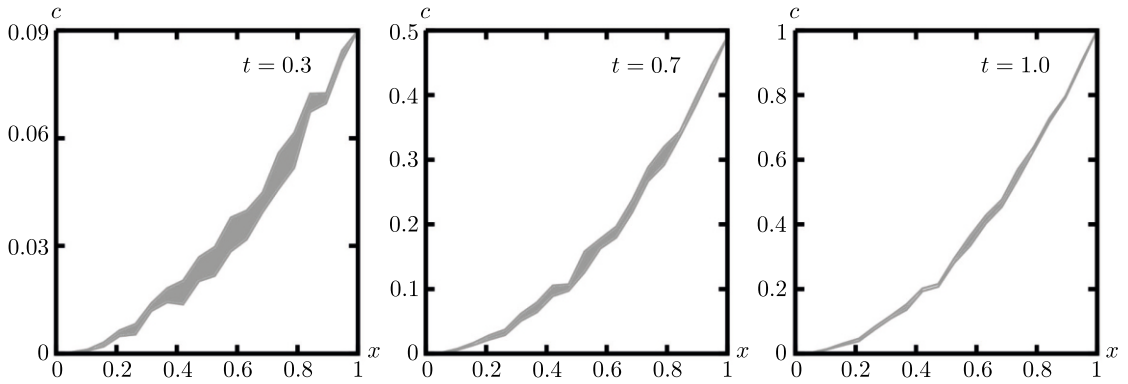


Рис. 2. Экспериментальные интервальные значения концентраций

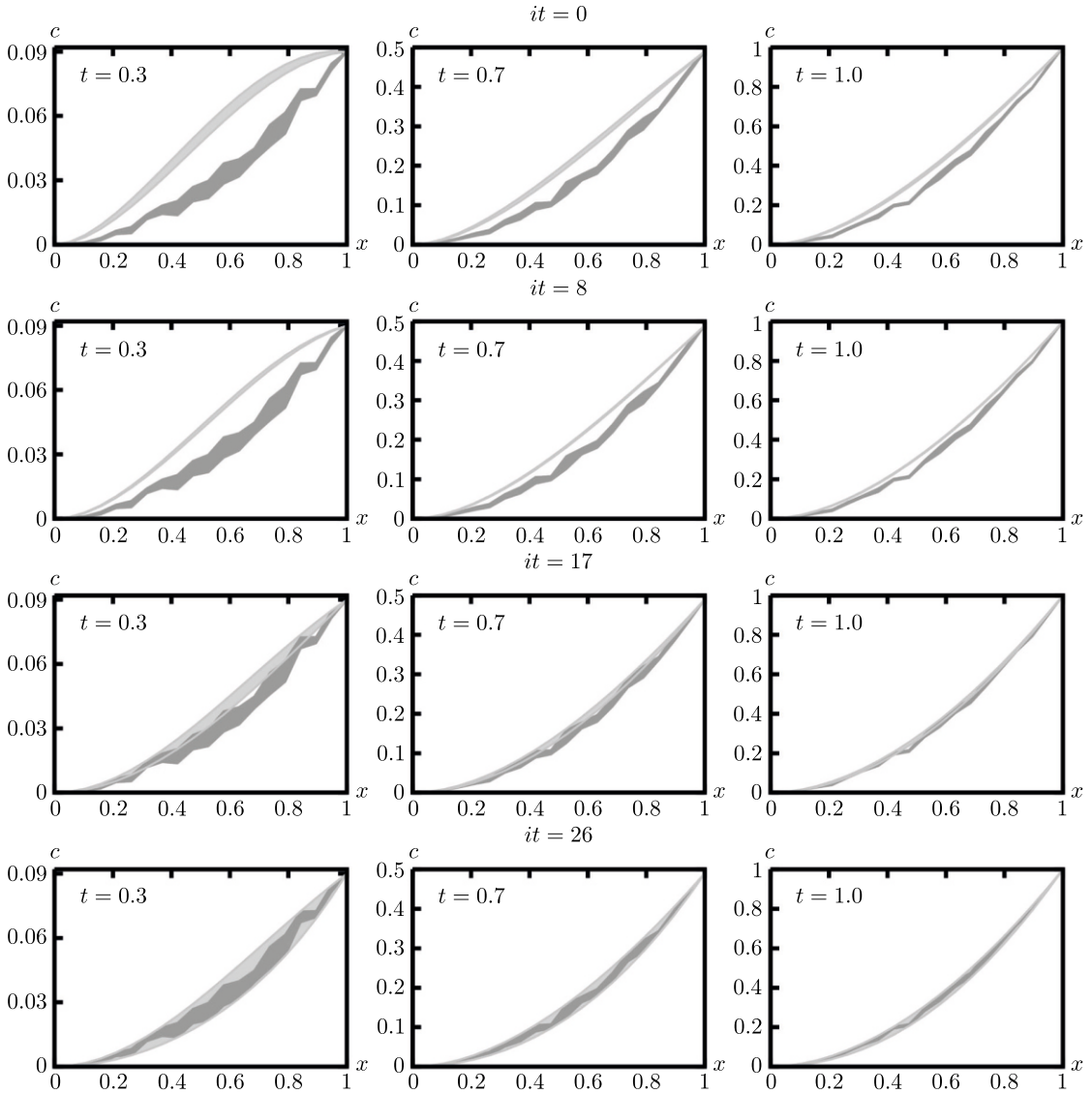


Рис. 3. Интервальные значения концентраций, получающиеся в процессе параметрической идентификации на разных итерациях градиентного спуска (светло-серый цвет), и экспериментальные интервальные значения концентраций (тёмно-серый цвет) в различные моменты времени. Переменная *it* обозначает номер итерации градиентного спуска

итерации метод градиентного спуска завершает свою работу, так как достигнут минимум целевой функции, который равен 0. Полученная интервальная оценка $\gamma^{(27)} \in [0.6, 0.9]$ совпадает с исходной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен подход к решению дробно-дифференциальных уравнений с интервальными параметрами в показателях производных, описывающих процессы аномальной диффузии. Рассмотрена как прямая задача, заключающаяся в получении интервальной оценки концентрации по известным интервальным значениям показателей производных, так и задача интервальной параметрической идентификации, заключающаяся в определении интервальных оценок порядков дробных производных по известной экспериментальной информации о концентрации, заданной в виде интервалов значений. Выполнено обобщение ранее разработанных интерполяционных подходов на рассматриваемые классы задач. Описан вычислительный алгоритм решения прямой задачи, являющийся комбинацией алгоритма адаптивной интерполяции с явной и неявной конечно-разностной схемой решения уравнения аномальной диффузии. Задача интервальной параметрической идентификации сводится к задаче минимизации определённой целевой функции, для которой получен градиент. На двух модельных примерах продемонстрирована эффективность и работоспособность предлагаемых алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
3. *Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткин И. А., Юрков Ю. И.* Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии. Препринт IBRAE-2002-01. М.: ИБРАЭ РАН, 2002.
4. *Meerschaert M. M., Tadjeran C.* Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations // Appl. Numer. Math. 2006. V. 56, N 1. P. 80–90.
5. *Zhang Y., Benson D. A., Meerschaert M. M., LaBolle E. M.* Space-fractional advection-dispersion equations with variable parameters: Diverse formulas, numerical solutions, and application to the MADE-site data // Water Resour. Res. 2007. V. 43. Article W05439.
6. *Мороз Л. И., Масловская А. Г.* Дробно-дифференциальная модель процесса теплопроводности сегнетоэлектрических материалов в условиях интенсивного нагрева // Математика и мат. моделирование. 2019. Т. 2. С. 29–47.
7. *Maslovskaya A. G., Moroz L. I., Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E.* Theoretical and numerical analysis of the Landau–Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2021. V. 93. Article 105524.
8. *Мороз Л. И., Масловская А. Г.* Численное моделирование процесса аномальной диффузии на основе схемы повышенного порядка точности // Матем. моделирование. 2020. Т. 32, № 10. С. 62–76; DOI: 10.20948/mm-2020-10-05
9. *Ревизников Д. Л., Сластушенский Ю. В.* Численное моделирование аномальной диффузии бильярдного газа в полигональном канале // Матем. моделирование. 2013. Т. 25, № 5. С. 3–14.
10. *Tverdyi D., Parovik R.* Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect // Fractal Fract. 2022. V. 6, N 3. Article 163; DOI: 10.3390/fractalfract6030163
11. *Zaky M. A., Van Bockstal K., Taha T. R., Suragan D., Hendy A. S.* An L1 type difference/Galerkin spectral scheme for variable-order time-fractional nonlinear diffusion–reaction equations with fixed delay // J. Comput. Appl. Math. 2023. V. 420. Article 114832; DOI: 10.1016/j.cam.2022.114832
12. *Moore R.* Interval analysis. N. J.: Prentice-Hall, 1966.

13. *Moore R. E., Kearfott R. B., Cloud M. J.* Introduction to Interval Analysis. Philadelphia: SIAM, 2009.

14. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2019.

15. *Добронец Б. С.* Интервальная математика. Красноярск: Красноярский государственный университет, 2007.

16. *Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.* Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 7. С. 963–974; DOI: 10.1134/S0374064118070130

17. *Морозов А. Ю., Журавлев А. А., Ревизников Д. Л.* Анализ и оптимизация алгоритма адаптивной интерполяции численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 7. С. 960–974; DOI: 10.1134/S0374064120070122

18. *Morozov A. Yu., Zhuravlev A. A., Reviznikov D. L.* Sparse Grid Adaptive Interpolation in Problems of Modeling Dynamic Systems with Interval Parameters // Mathematics. 2021. V. 9. Article 298; DOI: 10.3390/math9040298

19. *Гидаспов В. Ю., Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.* Алгоритм адаптивной интерполяции с использованием TT-разложения для моделирования динамических систем с интервальными параметрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61, № 9. С. 1416–1430; DOI: 10.31857/S0044466921090106

20. *Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.* Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределённостями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 7. С. 976–987; DOI: 10.31857/S0374064121070104

21. *Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.* Интервальный подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 7. С. 962–976; DOI: 10.31857/S0374064122070081

22. *Морозов А. Ю., Ревизников Д. Л.* Алгоритм подвижного окна для параметрической идентификации динамических систем с прямоугольными и эллипсоидными областями неопределённости параметров // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 6. С. 814–827; DOI: 10.31857/S0374064123060110

23. *Eijgenraam P.* The Solution of Initial Value Problems Using Interval Arithmetic. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1981.

24. *Lohner R. J.* Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems // Comput. Arith. Sci. Comput. Program. Lang. 1987. P. 255–286.

25. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазовых состояний динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.

26. *Makino K., Berz M.* Models and Their Applications // Numer. Softw. Verificat. 2017. P. 3–13.

27. *Nataraj P. S. V., Sondur S.* The Extrapolated Taylor Model // Reliab. Comput. 2011. V. 15, N 3. P. 251–278.

28. *Рогалев А. Н.* Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 102–116.

29. *Fu C., Ren X., Yang Y.-F., Lu K., Qin W.* Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. V. 68. P. 240–256; DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.08.004

30. *Fu C., Xu Y., Yang Y., Lu K., Gu F., Ball A.* Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables
J. Sound Vib. 2020. V. 466. Article 115047; DOI: 10.1016/j.jsv.2019.115047

31. *Xiao N., Fedele F., Muhanna R. L.* Inverse Problems Under Uncertainties — An Interval Solution for the Beam Finite Element // Proc. 11th Internat. Conf. Struct. Safety Reliab. 2013; DOI: 10.1201/b16387-430

32. *Петрикевич Я. И.* Структурно-параметрическая идентификация динамических объектов по интервальным исходным данным: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18. Кемерово: КГУ, 2006.

33. *Дилигенская А. Н., Самокиш А. В.* Параметрическая идентификация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределённости на основе нейронных сетей // Вестник СГТУ. 2020. Т. 28, № 4. С. 6–18.

34. *Петухов А. А., Ревизников Д. Л.* Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений // Вестник МАИ. 2009. Т. 16, № 6. С. 228–243.

35. *Gill Ph., Murray W., Wright M.* Practical Optimization. London–New York: Academic Press, 1981.

36. *Shary S. P.* Randomized algorithms in interval global optimization // Numer. Anal. Appl. 2008. V. 1. P. 376–389; DOI: 10.1134/S1995423908040083

37. *Shary S. P.* A Surprising Approach in Interval Global Optimization // Reliab. Comput. 2001. V. 7, N 6. P. 497–505; DOI: 10.1023/A:1014754803382

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.63

ALGORITHMS FOR THE NUMERICAL SOLUTION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INTERVAL PARAMETERS

© 2023 **A. Yu. Morozov**[1,2a], **D. L. Reviznikov**[1,2b]

[1] *Federal Research Center "Computer Science and Control," Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia,*
[2] *Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993 Russia*

E-mails: [a]morozov@infway.ru, [b]reviznikov@mai.ru

Received 01.08.2023, revised 28.09.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. The paper deals with the numerical solution of fractional differential equations with interval parameters in terms of derivatives describing anomalous diffusion processes. Computational algorithms for solving initial-boundary value problems as well as the corresponding inverse problems for equations containing interval fractional derivatives with respect to time and space are presented. The algorithms are based on the previously developed and theoretically substantiated adaptive interpolation algorithm tested on a number of applied problems for modeling dynamical systems with interval parameters; this makes it possible to explicitly obtain parametric sets of states of dynamical systems. The efficiency and workability of the proposed algorithms are demonstrated in several problems.

Keywords: fractional derivative, anomalous diffusion, difference scheme, inverse problem, parametric identification, interval parameter, dynamical system, adaptive interpolation algorithm.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.407

REFERENCES

1. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives and Some Applications* (Nauka Tekh., Minsk, 1987) [in Russian].
2. A. M. Nakhushev, *Fractional Calculus and Applications* (Fizmatlit, Moscow, 2003) [in Russian].
3. V. M. Goloviznin, V. P. Kiselev, I. A. Korotkin, and Yu. I. Yurkov, "Some features of computational algorithms for fractional diffusion equations," Preprint IBRAE-2002-01 (Nuclear Safety Institute, Russia Academy of Sciences, Moscow, 2002).
4. M. M. Meerschaert and C. Tadjeran, "Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations," Appl. Numer. Math. **56** (1), 80–90 (2006).
5. Zhang Yong, D. A. Benson, M. M. Meerschaert, and E. M. LaBolle, "Space-fractional advection–dispersion equations with variable parameters: Diverse formulas, numerical solutions, and application to the MADE-site data," Water Resour. Res. **43**, W05439 (2007).
6. L. I. Moroz and A. G. Maslovskaya, "Fractional-differential model of the process of thermal conduction of ferroelectric materials under conditions of intense heating," Mat. Mat. Model. **2**, 29–47 (2019) [in Russian].
7. A. G. Maslovskaya, L. I. Moroz, A. Yu. Chebotarev, and A. E. Kovtanyuk, "Theoretical and numerical analysis of the Landau—Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **93**, 105524 (13) (2021).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 815–827.

8. L. I. Moroz and A. G. Maslovskaya, "Numerical simulation of an anomalous diffusion process based on the higher-order accurate scheme," Math. Models Comput. Simul. **13** (3), 492–501 (2021). https://doi.org/10.1134/S207004822103011X
9. D. L. Reviznikov and Yu. V. Slastushenskij, "Numerical simulation of anomalous diffusion of billiard gas in a polygonal channel," Mat. Model. **25** (5), 3–14 (2013) [in Russian].
10. D. Tverdyi and R. Parovik, "Application of the fractional Riccati equation for mathematical modeling of dynamic processes with saturation and memory effect," Fractal Fractional **6** (3), 163 (2022). https://doi.org/DOI:10.3390/fractalfract6030163
11. M. A. Zaky, K. van Bockstal, T. R. Taha, D. Suragan, and A. S. Hendy, "An L1 type difference/Galerkin spectral scheme for variable-order time-fractional nonlinear diffusion–reaction equations with fixed delay," J. Comput. Appl. Math. **420**, 114832 (2023). https://doi.org/10.1016/j.cam.2022.114832
12. R. Moore, *Interval Analysis* (Prentice-Hall, New Jork, 1966).
13. R. E. Moore, R. B. Kearfott, and M. J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis* (SIAM, 2009).
14. S. P. Shary, *Finite-Dimensional Interval Analysis* (XYZ, Novosibirsk, 2019) [in Russian].
15. B. S. Dobronets, *Interval Mathematics* (Krasnoyarsk. Gos. Univ., Krasnoyarsk, 2007) [in Russian].
16. A. Yu. Morozov and D. L. Reviznikov, "Adaptive interpolation algorithm based on a kd-tree for numerical integration of systems of ordinary differential equations with interval initial conditions," Differ. Equations **54** (7), 945–956 (2018). https://doi.org/10.1134/S0012266118070121
17. A. Yu. Morozov, A. A. Zhuravlev, and D. L. Reviznikov, "Analysis and optimization of an adaptive interpolation algorithm for the numerical solution of a system of ordinary differential equations with interval parameters," Differ. Equations **56** (7), 935–949 (2020). https://doi.org/10.1134/s0012266120070125
18. A. Yu. Morozov, A. A. Zhuravlev, and D. L. Reviznikov, "Sparse grid adaptive interpolation in problems of modeling dynamical systems with interval parameters," Mathematics **9**, 298 (2021). https://doi.org/10.3390/math9040298
19. V. Yu. Gidaspov, A. Yu. Morozov, and D. L. Reviznikov, "Adaptive interpolation algorithm using TT-decomposition for modeling dynamical systems with interval parameters," Comput. Math. Math. Phys. **61** (9), 1387–1400 (2021). https://doi.org/10.1134/S0965542521090098
20. A. Yu. Morozov and D. L. Reviznikov, "Adaptive interpolation algorithm on sparse meshes for numerical integration of systems of ordinary differential equations with interval uncertainties," Differ. Equations **57** (7), 947–958 (2021). https://doi.org/10.1134/S0012266121070107
21. A. Yu. Morozov and D. L. Reviznikov, "Interval approach to solving parametric identification problems for dynamical systems," Differ. Equations **58** (7), 952–965 (2022). https://doi.org/10.1134/S0012266122070084
22. A. Yu. Morozov and D. L. Reviznikov, "Sliding window algorithm for parametric identification of dynamical systems with rectangular and ellipsoid parameter uncertainty domains," Differ. Equations **59** (6), 833–846 (2023). https://doi.org/10.1134/S0012266123060113
23. P. Eijgenraam, *The Solution of Initial Value Problems Using Interval Arithmetic. Mathematical Centre Tracts no. 144* (Stichting Math. Centr., Amsterdam, 1981).
24. R. J. Lohner, "Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems," in *Computer Arithmetic: Scientific Computation and Programming Languages* (1987), pp. 255–286.
25. F. L. Chernous'ko, *Estimation of Phase States of Dynamical Systems. Ellipsoid Method* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
26. K. Makino and M. Berz, "Models and their applications," *Numerical Software Verification 2017: Conf. (Heidelberg, Germany, July 22–23, 2017)* (Springer, 2017), pp. 3–13.
27. P. S. V. Nataraj and S. Sondur, "The extrapolated Taylor model," Reliable Comput. 251–278 (2011).
28. A. N. Rogalev, "Guaranteed methods for solving systems of ordinary differential equations based on the transformation of symbolic formulas," Vychisl. Tekhnol. **8** (5), 102–116 (2003) [in Russian].
29. C. Fu, X. Ren, Y.-F. Yang, K. Lu, and W. Qin, "Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **68**, 240–256 (2019). https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.08.004

30. C. Fu, Y. Xu, Y. Yang, K. Lu, F. Gu, and A. Ball, "Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables," J. Sound Vib. **466**, 115047 (2020). https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.115047

31. N. Xiao, F. Fedele, and R. L. Muhanna, "Inverse problems under uncertainties — An interval solution for the beam finite element," *11th Int. Conf. Struct. Safety & Reliab.* (New York, NY, USA, 2013). https://doi.org/10.1201/b16387-430

32. Ya. I. Petrikevich, "Structural-parametric identification of dynamical objects by interval initial data," *Cand. Sci. (Eng.) Dissertation,* (Kemerov. State Univ, Kemerovo, 2006) [in Russian].

33. A. N. Diligenskaya and A. V. Samokish, "Parametric identification in inverse problems of heat conduction under conditions of interval uncertainty based on neural networks," Vestn. Samarsk. Gos. Tekh. Univ. **28** (4 (68)), 6–18 (2020) [in Russian].

34. A. A. Petukhov and D. L. Reviznikov, "Algorithms for numerical solutions of fractional differential equations," Vestn. MAI. **16** (6), 228–243 (2009) [in Russian].

35. P. Gill, W. Murray, and M.Wright, *Practical Optimization* (Academic Press., London—New York, 1981).

36. S. P. Shary, "Randomized algorithms in interval global optimization," Numer. Anal. Appl. **1**, 376–389 (2008). https://doi.org/10.1134/S1995423908040083

37. S. P. Shary, "A surprising approach in interval global optimization," Reliab. Comput. **7** (6), 497–505 (2001). https://doi.org/10.1023/A:1014754803382

УДК 517.9

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

© 2023 **М. В. Нещадим**[1,2a], **А. А. Симонов**[2b]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]neshch@math.nsc.ru, [b]a.simonov@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 23.07.2023 г.; после доработки 12.10.2023 г.;
принята к публикации 01.11.2023 г.

Исследуется система уравнений, которая получена на основе релятивистского уравнения Шредингера и связывает функции потенциала, амплитуды и фазы. Методами теории совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных находятся вполне интегрируемые системы, связывающие только две функции из указанных трёх. Найденные системы связаны преобразованиями Бэклунда.

Ключевые слова: релятивистское уравнение Шредингера, преобразования Бэклунда, условия совместности.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.408

ВВЕДЕНИЕ

Для построения точных решений дифференциальных уравнений, исследования их симметрийных свойств и поисков законов сохранения используются методы группового анализа дифференциальных уравнений [1–4], метод дифференциальных подстановок [5] и, более общим образом, метод преобразований Ли—Бэклунда [6, 7] в пространстве джетов продолженного уравнения [8, 9]. На практике, как правило, встречаются более частные случаи преобразований Ли—Бэклунда — дифференциальные соответствия между двумя системами дифференциальных уравнений, получившие название преобразований Бэклунда [10–12]. Такие соответствия представляют собой дифференциальную связь между двумя системами дифференциальных уравнений, позволяющую по известному решению одной системы конструктивно находить решение второй системы. Преобразования Бэклунда для определённых уравнений имеют как правило именное название: каскадный метод Лапласа, преобразование Эйлера—Дарбу, преобразование Бианки, преобразование Мутара, метод билинейных уравнений Хироты и т. д. [2–4, 13, 14]. Так, например, преобразование Коула—Хопфа связывает уравнение теплопроводности и уравнение Бюргерса [15]. Преобразование Миуры связывает мКдФ и КдФ [16]. Отметим, что прямое и обратное преобразования Бэклунда, как правило, имеют разные качественные свойства. Так, например, дифференциальная подстановка Коула—Хопфа $u = 2v_x/v$ переводит уравнение теплопроводности $v_t = v_{xx}$ в уравнения Бюргерса $u_t = uu_x + u_{xx}$, а обратный переход связан с нелокальным разрешением $v = \exp(-\frac{1}{2}\int u dx)$. На преобразовании Коула—Хопфа основан метод прогонки [17]. С помощью этой замены были найдены общие

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

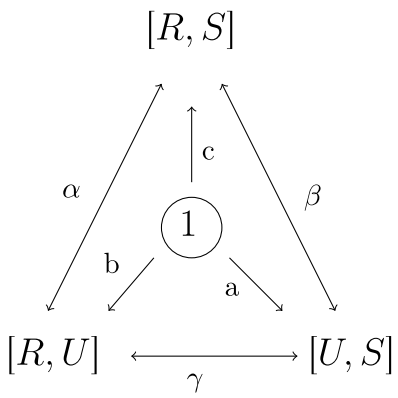
решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений второго порядка для горизонтально-слоистых сред [18–21]. Преобразования Бэклунда используются при построении солитонных решений нелинейных уравнений, изучении симметрий и законов сохранения, а также являются важнейшим инструментом при изучении уравнений в частных производных и представляют собой отображения, связывающие разные решения этих уравнений [13]. Ранние исследования таких отображений для нелинейного уравнения Шредингера можно найти в [22–24]. Интерес к преобразованиям Бэклунда обусловлен также обнаруженными связями с квантовыми интегрируемыми системами и феноменом разделения переменных [25, 26]. Нахождение соответствий Бэклунда для актуальных уравнений математической физики есть трудоёмкая самостоятельная задача. Примеры преобразований Бэклунда и их применение можно найти в [13, 14, 27].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение Клейна—Гордона—Фока [28] (релятевистское уравнение Шредингера):

$$W_{tt} = W_{xx} + UW, \tag{1}$$

где $W = Re^{iS}$, i — мнимая единица и U, R, S — некоторые вещественнозначные функции переменных t, x. Для сокращения записи используются обозначения $W_t = \frac{\partial W}{\partial t}$, $W_{tt} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, $W_x = \frac{\partial W}{\partial x}$, $W_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ и т. д. для частных производных. Функции U, R, S называются соответственно, потенциалом, амплитудой и фазой. Рассматривается задача исключения из соотношения (1) одной из функций U, R, S. Такие преобразования являются частью общей теории переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных. Условно такие преобразования можно выразить следующей диаграммой



где через $[R, U]$, $[U, S]$, $[R, S]$ обозначены системы дифференциальных уравнений, полученные исключением функций S, R, U из уравнения (1), стрелки a, b, c соответствуют исключению функций R, S, U из уравнения (1), а стрелки α, β, γ по сути являются преобразованиями Бэклунда.

Отметим, что аналогичная задача была рассмотрена в работе [29] для классического уравнения Шредингера.

Уравнение (1) для комплекснозначной функции W равносильно системе двух вещественных уравнений в виде системы

$$R_{tt} - RS_t^2 = R_{xx} - RS_x^2 + UR, \quad 2R_tS_t + RS_{tt} = 2R_xS_x + RS_{xx}. \tag{2}$$

В работе получены дифференциальные соотношения $[U, S]$ (теорема 1), содержащие только функции U, S, и соотношения $[U, R]$ (теорема 2), содержащие только функции U, R. При

этом мы пользуемся алгоритмом теории совместности [30, 31] приведения в инволюцию переопределённой системы. Переход от соотношения $[U, S]$ к соотношению $[U, R]$ осуществляется введением дифференциальных соотношений для функции R и, фактически, представляет собой преобразования Бэклунда [10]. Обратный переход от соотношения $[U, R]$ к соотношению $[U, S]$ осуществляется введением дифференциальных соотношений для функции S и представляет собой обратное преобразование Бэклунда.

Если считать, что в (2) функции U, R известны, то это будет переопределённой системой на функцию S. Если U, S известны, то это будет переопределённой системой на функцию R. В каждом из этих случаев система (2) разрешима при дополнительных условиях — условиях совместности на известные функции. Основная цель данной работы — найти эти условия совместности. В качестве следствия получаются вполне интегрируемые системы, решение которых даёт точное решение уравнения (1).

Приведены примеры построения точных решений для системы $[R, S]$. Так как восстановление функции U по амплитуде R и фазе S — это решение обратной задачи, когда по рассеянной частице/волне с параметрами (R, S) можно восстановить вид потенциальной ямы U.

Все рассматриваемые функции предполагаются аналитическими.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ a — ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ R ИЗ СИСТЕМЫ (2)

Перепишем (2) в виде

$$R_{tt} = R_{xx} + R(S_t^2 - S_x^2 + U), \quad R_t = R_x \frac{S_x}{S_t} + R\frac{S_{xx} - S_{tt}}{2S_t}. \tag{3}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции A, B, C, D_0, D_1, E_0, E_1, F_0, F_1, G_0, G_1, H_0, H_1 определяются по функциям $S = S(t, x)$, $U = U(t, x)$ следующей рекуррентной системой равенств:*

$$A = S_t^2 - S_x^2 + U, \quad B = \frac{S_x}{S_t}, \quad C = \frac{S_{xx} - S_{tt}}{2S_t}, \tag{4}$$

$$D_1 = \frac{B_t + 2BC + BB_x}{1 - B^2}, \quad D_0 = \frac{BC_x + C_t + C^2 - A}{1 - B^2}, \tag{5}$$

$$E_1 = B_x + BD_1 + C, \quad E_0 = C_x + BD_0, \tag{6}$$

$$F_1 = D_{1t} + D_1E_1 + D_0B, \quad F_0 = D_{0t} + D_1E_0 + D_0C, \tag{7}$$

$$G_1 = E_{1x} + E_1D_1 + E_0, \quad G_0 = E_{0x} + E_1D_0, \tag{8}$$

$$H_0 = \frac{G_0 - F_0}{F_1 - G_1}, \quad H_1 = BH_0 + C. \tag{9}$$

Тогда функции (S, U, R), где

1) функции (S, U) — решение уравнения

$$H_{1x} = H_{0t},$$

2) функция R — решение системы

$$R_x = H_0R, \quad R_t = H_1R,$$

совместной в силу 1), являются решением системы (2), и, следовательно, $W = Re^{iS}$ — решение уравнения Клейна—Гордона (1) с потенциалом U.

Доказательство. В силу обозначения (4) система (3) принимает вид

$$R_{tt} = R_{xx} + AR, \quad R_t = BR_x + CR. \tag{10}$$

Из второго соотношения (10) находим

$$R_{tx} = B_xR_x + BR_{xx} + C_xR + CR_x = BR_{xx} + (B_x + C)R_x + C_xR, \tag{11}$$

$$R_{tt} = B_tR_x + BR_{tx} + C_tR + CR_t =$$

в силу (10)

$$= B_tR_x + BR_{tx} + C_tR + CBR_x + C^2R =$$

$$= BR_{tx} + (B_t + BC)R_x + (C_t + C^2)R =$$

в силу (11)

$$= B^2R_{xx} + B(B_x + C)R_x + BC_xR + (B_t + BC)R_x + (C_t + C^2)R =$$

$$= B^2R_{xx} + (B_t + 2BC + BB_x)R_x + (BC_x + C_t + C^2)R. \tag{12}$$

Из (10) и (12) получаем

$$R_{xx} + AR = B^2R_{xx} + (B_t + 2BC + BB_x)R_x + (BC_x + C_t + C^2)R,$$

$$R_{xx} = \frac{B_t + 2BC + BB_x}{1 - B^2}R_x + \frac{BC_x + C_t + C^2 - A}{1 - B^2}R.$$

В силу обозначения (5)

$$R_{xx} = D_1R_x + D_0R. \tag{13}$$

В силу (13) соотношение (11) принимает вид

$$R_{tx} = BD_1R_x + BD_0R + (B_x + C)R_x + C_xR =$$

$$= (BD_1 + B_x + C)R_x + (BD_0 + C_x)R.$$

В силу обозначения (6)

$$R_{tx} = E_1R_x + E_0R. \tag{14}$$

Из (13) находим

$$R_{xxt} = D_{1t}R_x + D_1R_{tx} + D_{0t}R + D_0R_t.$$

В силу (10) и (14)

$$R_{xxt} = D_{1t}R_x + D_1(E_1R_x + E_0R) + D_{0t}R + D_0(BR_x + CR) =$$

$$= (D_{1t} + D_1E_1 + D_0B)R_x + (D_{0t} + D_1E_0 + D_0C)R.$$

В силу обозначения (7)

$$R_{xxt} = F_1R_x + F_0R. \tag{15}$$

Из (14) находим

$$R_{txx} = E_{1x}R_x + E_1R_{xx} + E_{0x}R + E_0R_x.$$

В силу (13)

$$R_{txx} = E_{1x}R_x + E_1(D_1R_x + D_0R) + E_{0x}R + E_0R_x =$$

$$= (E_{1x} + E_1D_1 + E_0)R_x + (E_{0x} + E_1D_0)R.$$

В силу обозначения (8)

$$R_{txx} = G_1 R_x + G_0 R. \tag{16}$$

Из (15) и (16) находим

$$F_1 R_x + F_0 R = G_1 R_x + G_0 R, \quad R_x = \frac{G_0 - F_0}{F_1 - G_1} R.$$

В силу обозначения (9)

$$R_x = H_0 R. \tag{17}$$

В силу (17) второе соотношение (10) принимает вид

$$R_t = (BH_0 + C)R.$$

В силу обозначения (9)

$$R_t = H_1 R. \tag{18}$$

Из (17) и (18), в силу условия совместности $R_{tx} = R_{xt}$, получаем

$$H_{1x} R + H_1 R_x = H_{0t} R + H_0 R_t.$$

В силу (17) и (18)

$$H_{1x} R + H_1 H_0 R = H_{0t} R + H_0 H_1 R,$$

то есть

$$H_{1x} = H_{0t}. \tag{19}$$

Соотношение (19) — искомое соотношение на функции S, U. При его выполнении функция R находится из совместной системы (17), (18).

Теорема доказана. □

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ b — ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ S ИЗ СИСТЕМЫ (2)

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции A, B_1, B_2, D_1, D_2, D_3, D_4, E_1, E_2, E_3, E_4, F_1, F_2, F_3, F_5, F_6, F_7, F_8, G_1, G_2, G_3, G_4, H_1, H_3, H_5, H_6, H_7, H_8, ψ, φ определяются по функциям $R = R(t,x)$, $U = U(t,x)$ следующей рекуррентной системой равенств:*

$$A = \frac{R_{tt} - R_{xx}}{R} - U, \quad B_1 = 2\frac{R_x}{R}, \quad B_2 = -2\frac{R_t}{R}, \tag{20}$$

$$D_1 = \frac{A_t}{2A}, \quad D_2 = -\frac{B_2}{A}, \quad D_3 = \frac{A_x}{2A}, \quad D_4 = -\frac{B_1}{A}, \tag{21}$$

$$E_1 = D_3 - AD_4, \quad E_2 = D_4, \quad E_3 = D_1, \quad E_4 = D_2, \tag{22}$$

$$\begin{gathered} F_1 = E_{1x} + E_3 D_1 + E_1^2 - 2AE_3E_4, \\ F_2 = E_3 D_2, \\ F_3 = E_{2x} + E_4 D_1 + 4E_1E_2 - 2E_3E_4 - 2AE_4^2, \\ F_5 = E_4 D_2 + 2E_4^2, \\ F_6 = E_{3x} + E_3 D_3 + E_1 E_3, \\ F_7 = E_{4x} + E_3 D_4 + E_4 D_3 + 3E_1E_4 + 3E_2E_3, \\ F_8 = E_4 D_4 + 5E_2E_4, \end{gathered} \tag{23}$$

$$G_1 = E_3 - AE_4, \quad G_2 = E_4, \quad G_3 = E_1, \quad G_4 = E_2, \tag{24}$$

$$
\begin{gathered}
H_1 = D_{1t} + D_3E_1 + D_1G_1 - 2AD_4G_3,\\
H_3 = D_{2t} + D_3E_2 + D_4E_1 + D_1G_2 + 3D_2G_1 -\\
2AD_4G_4 + 2D_4G_3,\\
H_5 = D_4E_2 + 3D_2G_2 + 2D_4G_4,\\
H_6 = D_{3t} + D_3E_3 + D_1G_3,\\
H_7 = D_{4t} + D_3E_4 + D_4E_3 + D_1G_4 + 3D_2G_3 + 2D_4G_1,\\
H_8 = D_4E_4 + 3D_2G_4 + 2D_4G_2,
\end{gathered}
\tag{25}
$$

$$
\psi = \sqrt{w^2 - A}, \quad \varphi = \sqrt{A + \psi^2},
$$

где w — решение алгебраического уравнения 10-й степени

$$
((H_1 - F_1)w - F_2w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5)^2 =
$$

$$
(w^2 - A)((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4)^2.
$$

Тогда функции (R, U, S), где
1) функции (R, U) — решение уравнения

$$
\varphi_t = \psi_x,
$$

2) функция S — решение системы

$$
S_t = \varphi, \quad S_x = \psi,
$$

совместной в силу 1), являются решением системы (11)*, и, следовательно, $W = Re^{iS}$ — решение уравнения Клейна—Гордона* (1) *с потенциалом U.*

Доказательство. Исключаем функцию S из (2)

$$
S_t^2 = \frac{R_{tt} - R_{xx}}{R} - U + S_x^2, \quad S_{tt} = S_{xx} + 2\frac{R_x}{R}S_x - 2\frac{R_t}{R}S_t. \tag{26}
$$

В силу обозначения (20) система (26) примет вид

$$
S_t = \sqrt{A + S_x^2}, \quad S_{tt} = S_{xx} + B_1S_x + B_2\sqrt{A + S_x^2}. \tag{27}
$$

Из первого соотношения системы (27) находим

$$
S_{tx} = \frac{A_x + 2S_xS_{xx}}{2\sqrt{A + S_x^2}}, \tag{28}
$$

$$
S_{tt} = \frac{A_t + 2S_xS_{tx}}{2\sqrt{A + S_x^2}} =
$$

в силу (28)

$$
\begin{gathered}
= \frac{A_t}{2\sqrt{A + S_x^2}} + \frac{S_x}{\sqrt{A + S_x^2}}\frac{A_x + 2S_xS_{xx}}{2\sqrt{A + S_x^2}} =\\
= \frac{A_t}{2\sqrt{A + S_x^2}} + \frac{S_xA_x}{2(A + S_x^2)} + \frac{S_x^2S_{xx}}{A + S_x^2}.
\end{gathered}
\tag{29}
$$

В силу (29) и второго соотношения (27) получаем

$$
\frac{A_t}{2\sqrt{A + S_x^2}} + \frac{S_xA_x}{2(A + S_x^2)} + \frac{S_x^2S_{xx}}{A + S_x^2} = S_{xx} + B_1S_x + B_2\sqrt{A + S_x^2},
$$

$$\frac{AS_{xx}}{A+S_x^2}=\frac{A_t}{2\sqrt{A+S_x^2}}+\frac{S_xA_x}{2(A+S_x^2)}-B_1S_x-B_2\sqrt{A+S_x^2},$$

$$S_{xx}=\frac{A_t}{2A}\sqrt{A+S_x^2}+\frac{A_x}{2A}S_x-\frac{B_1}{A}(A+S_x^2)S_x-\frac{B_2}{A}(A+S_x^2)^{3/2}.$$

Далее будем записывать все соотношения в виде

$$f(w)+S_xg(w),$$

где $w=\sqrt{A+S_x^2}$ и f, g — рациональные функции от w. В силу этого соглашения

$$S_{xx}=\frac{A_t}{2A}w-\frac{B_2}{A}w^3+S_x\left(\frac{A_x}{2A}-\frac{B_1}{A}w^2\right).$$

В силу обозначения (21) система (27) свелась к виду

$$S_t=w,\quad S_{xx}=D_1w+D_2w^3+S_x\left(D_3+D_4w^2\right). \tag{30}$$

Составим условие совместности $(S_t)_{xx}=(S_{xx})_t$.

Соотношение (28) в силу системы (30) принимает вид

$$S_{tx}=\frac{A_x}{2}w^{-1}+S_xw^{-1}S_{xx}=$$

$$=\frac{A_x}{2}w^{-1}+S_x\left(D_1+D_2w^2+S_x(D_3w^{-1}+D_4w)\right)=$$

$$=\frac{A_x}{2}w^{-1}+S_x(D_1+D_2w^2)+S_x^2(D_3w^{-1}+D_4w)=$$

(в силу равенства $S_x^2=w^2-A$)

$$=\frac{A_x}{2}w^{-1}+S_x(D_1+D_2w^2)+(w^2-A)(D_3w^{-1}+D_4w)=$$

$$=\frac{A_x}{2}w^{-1}+S_x(D_1+D_2w^2)+D_3w+D_4w^3-AD_3w^{-1}-AD_4w=$$

$$=(\frac{A_x}{2}-AD_3)w^{-1}+(D_3-AD_4)w+D_4w^3+S_x(D_1+D_2w^2).$$

В силу обозначения (21)

$$\frac{A_x}{2}-AD_3=\frac{A_x}{2}-A\frac{A_x}{2A}=0.$$

В силу обозначения (22)

$$S_{tx}=E_1w+E_2w^3+S_x(E_3+E_4w^2). \tag{31}$$

Так как $S_t=w$, то

$$w_x=E_1w+E_2w^3+S_x(E_3+E_4w^2).$$

Из (31) находим

$$S_{txx}=E_{1x}w+E_{2x}w^3+S_x(E_{3x}+E_{4x}w^2)+$$

$$+S_{xx}(E_3+E_4w^2)+(E_1w+3E_2w^2+2E_4S_xw)w_x=$$

$$=E_{1x}w+E_{2x}w^3+S_x(E_{3x}+E_{4x}w^2)+$$

$$+(E_3+E_4w^2)(D_1w+D_2w^3+S_x(D_3+D_4w^2))+$$

$$+(E_1w+3E_2w^2+2E_4S_xw)(E_1w+E_2w^3+S_x(E_3+E_4w^2))=$$

$$= E_{1x}w + E_{2x}w^3 + S_x(E_{3x} + E_{4x}w^2)+$$
$$+E_3D_1w + E_3D_2w^2 + E_4D_1w^3 + E_4D_2w^5+$$
$$+S_x(E_3D_3 + E_3D_4w^2 + E_4D_3w^2 + E_4D_4w^4)+$$
$$+E_1^2w + E_2E_1w^3 + 2E_1E_4w^2S_x+$$
$$+E_1E_2w^3 + 3E_2^2w^5 + 2E_2E_4S_xw^4+$$
$$+S_x(E_1E_3 + E_1E_4w^2 + 3E_2E_3w^2 + 3E_2E_4w^4)+$$
$$+S_x^2(2E_3E_4w + 2E_4^2w^3) =$$
$$= (E_{1x} + E_3D_1 + E_1^2)w + E_3D_2w^2+$$
$$+(E_{2x} + E_4D_1 + 4E_1E_2)w^3 + E_4D_2w^5+$$
$$+S_x\left[E_{3x} + E_{4x}w^2 + E_3D_3 + E_3D_4w^2+\right.$$
$$+E_4D_3w^2 + E_4D_4w^4 + 2E_1E_4w^2 + 2E_2E_4w^4+$$
$$\left.+ E_1E_3 + E_1E_4w^2 + 3E_2E_3w^2 + 3E_2E_4w^4\right] +$$
$$+S_x^2(2E_3E_4w + 2E_4^2w^3) =$$
$$= (E_{1x} + E_3D_1 + E_1^2)w + E_3D_2w^2 + (E_{2x} + E_4D_1 + 4E_1E_2)w^3 + E_4D_2w^5+$$
$$+S_x\left[(E_{3x} + E_3D_3 + E_1E_3) + w^2(E_{4x} + E_3D_4 + E_4D_3 + 3E_1E_4 + 3E_2E_3)\right.$$
$$\left.+ w^4(E_4D_4 + 5E_2E_4)\right] + (w^2 - A)(2E_3E_4w + 2E_4^2w^3) =$$
$$= (E_{1x} + E_3D_1 + E_1^2 - 2AE_3E_4)w + E_3D_2w^2+$$
$$+(E_{2x} + E_4D_1 + 4E_1E_2 - 2E_3E_4 - 2AE_4^2)w^3 + (E_4D_2 + 2E_4^2)w^5+$$
$$+S_x\left[(E_{3x} + E_3D_3 + E_1E_3) + w^2(E_{4x} + E_3D_4 + E_4D_3 + 3E_1E_4 + 3E_2E_3)\right.$$
$$\left.+ w^4(E_4D_4 + 5E_2E_4)\right].$$

В силу обозначения (23)

$$S_{txx} = F_1w + F_2w^2 + F_3w^3 + F_5w^5 + S_x(F_6 + F_7w^2 + F_8w^4). \tag{32}$$

Далее находим

$$w_t = \frac{A_t + 2S_xS_{tx}}{2w} =$$

в силу (31)

$$= \frac{A_t}{2w} + \frac{S_x}{w}(E_1w + E_2w^3 + S_x(E_3 + E_4w^2)) =$$
$$= \frac{A_t}{2w} + S_x(E_1 + E_2w^2) + \frac{S_x^2}{w}(E_3 + E_4w^2) =$$
$$= \frac{A_t}{2w} + S_x(E_1 + E_2w^2) + \frac{w^2 - A}{w}(E_3 + E_4w^2) =$$
$$= \frac{A_t}{2w} + S_x(E_1 + E_2w^2) + E_3w + E_4w^3 - \frac{AE_3}{w} - AE_4w =$$
$$= (\frac{A_t}{2} - AE_3)w^{-1} + (E_3 - AE_4)w + E_4w^3 + S_x(E_1 + E_2w^2) =$$

в силу (21) и (22)

$$= (E_3 - AE_4)w + E_4w^3 + S_x(E_1 + E_2w^2).$$

В силу обозначения (24)

$$w_t = G_1 w + G_2 w^3 + S_x(G_3 + G_4 w^2).$$

Далее из второго соотношения (30) находим $(S_{xx})_t$

$$S_{xxt} = D_{1t}w + D_{2t}w^3 + S_x(D_{3t} + D_{4t}w^2) +$$

$$+S_{tx}(D_{3t} + D_{4t}w^2) + (D_1 + 3D_2w^2 + 2S_xD_4w)w_t =$$

$$= D_{1t}w + D_{2t}w^3 + S_x(D_{3t} + D_{4t}w^2) +$$

$$+(D_3 + D_4w^2)(E_1w + E_2w^3 + S_x(E_3 + E_4w^2)) +$$

$$+(D_1 + 3D_2w^2 + 2S_xD_4w)(G_1w + G_2w^3 + S_x(G_3 + G_4w^2)) =$$

$$= (D_{1t}w + D_{2t}w^3) + (D_3 + D_4w^2)(E_1w + E_2w^3) +$$

$$+(D_1 + 3D_2w^2)(G_1w + G_2w^3) + 2S_x^2D_4w(G_3 + G_4w^2) +$$

$$+S_x\left[(D_{3t} + D_{4t}w^2) + (D_3 + D_4w^2)(E_3 + E_4w^2) +\right.$$

$$\left. + (D_1 + 3D_2w^2)(G_3 + G_4w^2) + 2D_4w(G_1w + G_2w^3)\right] =$$

$$= D_{1t}w + D_{2t}w^3 + D_3E_1w + D_3E_2w^3 + D_4E_1w^3 + D_4E_2w^5 +$$

$$+D_1G_1w + D_1G_2w^3 + 3D_2G_1w^3 + 3D_2G_2w^5$$

$$+2D_4(w^2 - A)(G_3 + G_4w^2)w +$$

$$+S_x\left[D_{3t} + D_{4t}w^2 + D_3E_3 + D_3E_4w^2 + D_4E_4w^4) +\right.$$

$$\left. + D_1G_3 + D_1G_4w^2 + 3D_2G_3w^2 + 3D_2G_4w^4 + 2D_4G_1w^2 + 2D_4G_2w^4\right] =$$

$$= w(D_{1t} + D_3E_1 + D_1G_1 - 2AD_4G_3) +$$

$$+w^3(D_{2t} + D_3E_2 + D_4E_1 + D_1G_2 + 3D_2G_1 - 2AD_4G_4 + 2D_4G_3) +$$

$$+w^5(D_4E_2 + 3D_2G_2 + 2D_4G_4) + S_x\left[(D_{3t} + D_3E_3 + D_1G_3) +\right.$$

$$+w^2(D_{4t} + D_3E_4 + D_4E_3 + D_1G_4 + 3D_2G_3 + 2D_4G_1) +$$

$$\left. + w^4(D_4E_4 + 3D_2G_4 + 2D_4G_2)\right].$$

В силу обозначения (25)

$$S_{xxt} = H_1w + H_3w^3 + H_5w^5 + S_x(H_6 + H_7w^2 + H_8w^4). \tag{33}$$

В силу (32) и (33) условие совместности $S_{txx} = S_{xxt}$ принимает вид

$$(H_1 - F_1)w - F_2w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5 +$$

$$+S_x((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4) = 0. \tag{34}$$

Из соотношения (34) находим

$$S_x = \psi,$$

где ψ зависит только от функций R и U и их производных. Далее из первого соотношения (27) получаем

$$S_t = \varphi,$$

где

$$\varphi = \sqrt{A + \psi^2}.$$

И остаётся составить условие совместности

$$\varphi_x = \psi_t$$

— искомое соотношение на функции R и U.

Отметим, что для того чтобы найти S_x из (34) надо составить равенство

$$(H_1 - F_1)w - F_2w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5 =$$

$$-S_x((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4),$$

возвести его в квадрат

$$((H_1 - F_1)w - F_2w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5)^2 =$$

$$S_x^2((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4)^2,$$

подставить $S_x^2 = w^2 - A$

$$((H_1 - F_1)w - F_2w^2 + (H_3 - F_3)w^3 + (H_5 - F_5)w^5)^2 =$$

$$(w^2 - A)((H_6 - F_6) + (H_7 - F_7)w^2 + (H_8 - F_8)w^4)^2$$

решить полученное уравнение степени 10 относительно w и найти

$$S_x = \sqrt{w^2 - A}$$

— функцию от R и U и их производных.

Теорема доказана. □

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ c — ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ U ИЗ СИСТЕМЫ (2)

Из первого соотношения (2) находим

$$U = \frac{1}{R}(R_{tt} - R_{xx}) + (S_x^2 - S_t^2). \tag{35}$$

На функции R и S остаётся второе соотношение системы (2).

$$S_{tt} - S_{xx} = 2\left(\frac{R_x}{R}S_x - \frac{R_t}{R}S_t\right). \tag{36}$$

Пример 1. Если R, S пара гармонически сопряжённых функций

$$R_t = S_x, \quad R_x = -S_t,$$

то (36) принимает вид

$$S_{tt} - S_{xx} = 0.$$

Следовательно,

$$S = f(x + t) + g(x - t),$$

где f, g — некоторые функции одного аргумента. Тогда на функцию R имеем систему

$$R_t = f'(x + t) + g'(x - t), \quad R_x = -f'(x + t) + g'(x - t).$$

Из условия совместности $R_{tx} = R_{xt}$ получаем

$$f''(x + t) + g''(x - t) = 0.$$

Так как $x+t$, $x-t$ — независимые переменные, то

$$f''(x+t)=\lambda,\quad g''(x-t)=-\lambda,\quad \lambda=const$$

и

$$f=\frac{\lambda}{2}(x+t)^2+a_1(x+t)+a_0,\quad g=-\frac{\lambda}{2}(x-t)^2+b_1(x-t)+b_0,$$

где a_1, a_0, b_1, b_0 — некоторые константы. Далее находим

$$S=2\lambda xt+a_1(x+t)+b_1(x-t)+a_0+b_0.$$

Из системы

$$R_t=S_x=2\lambda t+a_1+b_1,\quad R_x=-S_t=-2\lambda x-a_1+b_1$$

находим

$$R=\lambda(t^2-x^2)+a_1(t-x)+b_1(t+x)+a_0+c_0,$$

где c_0 — некоторая константа. По формуле (3) находим U

$$U=\frac{4\lambda}{R}+4\lambda^2(t^2-x^2)+4\lambda\left(t(a_1+b_1)+x(b_1-a_1)\right)+4a_1b_1.$$

Итак, функции

$$R=\lambda(t^2-x^2)+a_1(t-x)+b_1(t+x)+a_0+c_0,$$

$$S=2\lambda xt+a_1(x+t)+b_1(x-t)+a_0+b_0,$$

$$U=\frac{4\lambda}{R}+4\lambda^2(t^2-x^2)+4\lambda\left(t(a_1+b_1)+x(b_1-a_1)\right)+4a_1b_1,$$

где a_1, a_0, b_1, b_0, c_0 — некоторые константы, являются решением системы (2).

Пример 2. Пусть

$$S_t=\varphi(R),\quad S_x=\psi(R),$$

где φ, ψ — некоторые функции одного аргумента. Тогда из условия совместности $S_{xt}=S_{tx}$ получаем

$$\varphi'(R)R_x=\psi'(R)R_t.$$

Следовательно, функция R является решением неявного уравнения

$$t\varphi'(R)+x\psi'(R)=f(R),$$

где f — некоторая функция одного аргумента.

Уравнение (36) принимает вид

$$\varphi'(R)R_t-\psi'(R)R_x=\frac{2}{R}(\psi(R)R_x-\varphi(R)R_t)$$

или

$$\left(\psi'(R)+\frac{2\psi(R)}{R}\right)R_x=\left(\varphi'(R)+\frac{2\varphi(R)}{R}\right)R_t.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix}\psi'(R) & \varphi'(R)\\ \varphi'(R)+\frac{2\varphi(R)}{R} & \psi'(R)+\frac{2\psi(R)}{R}\end{pmatrix}$$

должна быть вырожденной. Отсюда

$$\psi'(R)\left(\psi'(R)+\frac{2\psi(R)}{R}\right)=\varphi'(R)\left(\varphi'(R)+\frac{2\varphi(R)}{R}\right).$$

Итак, функции $\varphi(R)$ и $\psi(R)$ не могут быть любыми. Они связаны этим соотношением. Для функции U имеем формулу (35)

$$U = \frac{1}{R}(R_{tt} - R_{xx}) + (\psi^2(R) - \varphi^2(R)).$$

Вывод. Пусть функции $\varphi(R)$ и $\psi(R)$ связаны дифференциальным соотношением

$$\psi'^2(R) - \varphi'^2(R) = \frac{1}{R}((\varphi^2(R))' - (\psi^2(R))'). \tag{37}$$

Тогда функции R, S, U такие, что

1) R — решение уравнения

$$t\varphi'(R) + x\psi'(R) = f(R),$$

где f — некоторая функция одного аргумента,

2) S — решение системы

$$S_t = \varphi(R), \quad S_x = \psi(R),$$

совместной в силу 1),

3)

$$U = \frac{1}{R}(R_{tt} - R_{xx}) + (\psi^2(R) - \varphi^2(R))$$

удовлетворяют системе (2).

Покажем, что общее решение уравнения (37) даётся формулами

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(b + \exp\left(-\int \frac{b'}{(Rb)'}dR\right)\right), \quad \psi = \frac{1}{2}\left(b - \exp\left(-\int \frac{b'}{(Rb)'}dR\right)\right),$$

где $b = b(R)$ — произвольная функция.

Действительно, перепишем (10) в виде:

$$R(\varphi'^2 - \psi'^2(R)) + (\varphi^2 - \psi^2)' = 0,$$

или

$$R(\varphi' - \psi')(\varphi' + \psi') + ((\varphi - \psi)(\varphi + \psi))' = 0.$$

Введём обозначения

$$a = \frac{1}{2}(\varphi + \psi), \quad b = \frac{1}{2}(\varphi - \psi).$$

Тогда уравнение примет вид

$$Ra'b' + a'b + ab' = 0$$

или

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{Rb' + b}.$$

Интегрированием находим

$$a = \exp\left(-\int \frac{b'}{(Rb)'}dR\right)$$

и возвращаемся к функциям φ, ψ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представляется интересным провести аналогичный анализ уравнений, связывающих функции амплитуды, потенциала и фазовую функцию для многомерного уравнения Шредингера, а также применить полученные результаты к нелинейным уравнениям Шредингера, когда потенциал является функцией от амплитуды. Например, для кубического уравнения Шредингера [13, 32]. Отметим также, что некоторые результаты, связанные с конструктивным подходом исследования уравнений математической физики и применением их к поиску коэффициентов и решений можно найти в работах [15, 16, 33–36].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
3. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
4. *Виноградов А. М.* Симметрии и законы сохранений уравнений математической физики. М.: Факториал, 1997.
5. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
6. *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли-Бэклунда // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 1. С. 25–36.
7. *Ибрагимов Н. Х., Шабат А. Б.* О бесконечных алгебрах Ли-Бэклунда // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, № 4. С. 79–80.
8. *Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
9. *Виноградов А. М.* Когомологический анализ уравнений с частными производными и вторичное исчисление. М.: МЦНМО, 2021.
10. *Miura R. M.* Backlund transformations. Lecture Notes in Mathematics, V. 515. Heidelberg: Springer, 1976.
11. *Жаринов В. В.* О соответствии Бэклунда // Матем. сб. 1988. Т. 136, № 2. С. 274–291.
12. *Жаринов В. В.* О соответствии Бэклунда для эволюционных уравнений в многомерном пространстве // Теор. и мат. физика. 2006. Т. 147, № 1. С. 3–13.
13. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
14. *Капцов О. В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
15. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Обобщённое преобразование Коула-Хопфа // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 21, № 3. С. 18–25; DOI: 10.17377/sibjim.2018.21.302
16. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Метод дифференциальных связей и нелинейные обратные задачи. Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18, № 2. С. 36–47.
17. *Гельфанд И. М., Локуциевский О. В.* Метод “прогонки” для решения разностных уравнений // Введение в теорию разностных схем. 1962. С. 283–309.
18. *Аккуратов Г. В., Дмитриев В. И.* Метод расчёта поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24, № 2. С. 272–286.
19. *Фатьянов А. Г., Михайленко Б. Г.* Метод расчёта нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Доклады РАН. 1988. Т. 301, № 4. С. 834–839.
20. *Карчевский А. Л.* Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и Геофизика. 2007. Т. 48, № 8. С. 889–898.
21. *Карчевский А. Л.* Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. матем. 2020. Т. 23, № 4. С. 48–68

22. *Konopelchenko B. G.* The group structure of Backlund transformations // Phys. Lett. A. 1979. V. 74, N 3–4. P. 189–192.

23. *Sasaki R.* Canonical structure of Backlund transformations // Phys. Lett. A. 1980. V. 78, N 5–6. P. 7–10.

24. *Konopelchenko B. G.* Elementary Backlund transformations, nonlinear superposition principle and solution of the integrable equations // Phys. Lett. A. 1982. V. 87, N 9. P. 445–448.

25. *Kuznetsov V. B., Sklyanin E. K.* On Backlund transformations for many-body systems // J. Physics A. 1998. V. 31, N 9. P. 2241–2251.

26. *Белоусов Н. М.* Преобразование Бэклунда для нелинейного уравнения Шредингера // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Т. 494. С. 6–22.

27. *Мива Т., Джимбо М., Датэ Э.* Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры. М.: МЦНМО, 2005.

28. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Теоретическая физика. Квантовая электродинамика, Т. IV. Издание 4-е, исправленное. М.: Физматлит, 2002.

29. *Нещадим М. В.* Преобразования Бэклунда для одномерного уравнения Шредингера // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 2. С. 116–125; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.209

30. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИИТЛ, 1948.

31. *Поммаре Ж.* Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983.

32. *Нещадим М. В., Чупахин А. П.* Частично-инвариантные решения кубического уравнения Шредингера // Вестник УдГУ. 2008. № 3. С. 35–41.

33. *Anikonov Yu. E., Neshchadim M. V.* Algebraic-Analytic Methods for Constructing Solutions to Differential Equations and Inverse Problems // J. Math. Sci. 2016. V. 215, N 4. P. 444–459.

34. *Anikonov Yu. E., Neshchadim M. V.* Representations for the solutions and coefficients of second-order differential equations // J. Appl. Ind. Math. 2013. V. 7, N 1. P. 1–7.

35. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 2. С. 40–49.

36. *Нещадим М. В.* Обратная задача теории совместимости и функционально-инвариантные решения волнового уравнения в двумерном пространстве // Вестн. ЮУрГУ. Сер. матем. моделир. и программир. 2012. № 14. С. 99–107.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.9

BACKLUND TRANSFORMATIONS OF THE RELATIVISTIC SCHRODINGER EQUATION

© 2023 **M. V. Neshchadim**[1,2a], **A. A. Simonov**[2b]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]neshch@math.nsc.ru, [b]a.simonov@g.nsu.ru

Received 23.07.2023, revised 12.10.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. We study the system of equations obtained on the basis of the relativistic Schrodinger equation and relating the potential, amplitude, and phase functions. Using the methods of the theory of consistency of systems of partial differential equations, we obtain completely integrable systems that relate only two functions of the above three. The systems found are related by Backlund transformations.

Keywords: relativistic Schrodinger equation, Backlund transformation, consistency condition.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.408

REFERENCES

1. L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
2. N. Kh. Ibragimov, *Transformation Groups in Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
3. P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer, New York—Berlin—Heidelberg—Tokyo, 1986; Mir, Moscow, 1989).
4. A. M. Vinogradov, *Symmetries and Conservation Laws of Equations of Mathematical Physics* (Faktorial, Moscow, 1997) [in Russian].
5. A. F. Sidorov, V. P. Shapeev, and N. N. Yanenko, *The differential Constraint Method and Application in Gas Dynamics* (Nauka, Novosibirsk, 1984) [in Russian].
6. N. Kh. Ibragimov and A. B. Shabat, "Evolution equations with a nontrivial Lie—Backlund group," Funkts. Anal. Pril. **14** (1), 25–36 (1980) [in Russian].
7. N. Kh. Ibragimov and A. B. Shabat, "On infinite Lie—Backlund algebras," Funkts. Anal. Pril. **14** (4), 79–80 (1980) [in Russian].
8. A. M. Vinogradov, I. S. Krasil'shchik, and V. V. Lychagin, *Introduction to the Geometry of Nonlinear Differential Equations* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
9. A. M. Vinogradov, *Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus* (MTsNMO, Moscow, 2021) [in Russian].
10. R. M. Miura, *Backlund Transformations. Lect. Notes Math., Vol. 515* (Springer, Heidelberg, 1976).
11. V. V. Zharinov, "On Backlund correspondences," Math. USSR-Sb. **64** (1), 277–293 (1989).
12. V. V. Zharinov, "Backlund correspondences for evolution equations in a multidimensional space," Theor. Math. Phys. **147** (1), 449–459 (2006).
13. M. Ablowitz and H. Segur, *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981; Mir, Moscow, 1987).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 828–841.

14. O. V. Kaptsov, *Methods for Integrating Partial Differential Equations* (Fizmatlit, Moscow, 2009) [in Russian].
15. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "Generalized Cole—Hopf transformation," Sib. Zh. Ind. Mat. **21** (3), 18–25 (2018) https://doi.org/10.17377/sibjim.2018.21.302 [J. Appl. Ind. Math. **12** (3), 409–416 (2018) https://doi.org/10.1134/S199047891803002X].
16. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "The method of differential relations and nonlinear inverse problems," Sib. Zh. Ind. Mat. **18** (2), 36–47 (2015) [in Russian].
17. I. M. Gel'fand and O. V. Lokutsievskii, "The "sweep" method for solving difference equations," in *Introduction to the Theory of Difference Schemes* (1962), pp. 283–309 [in Russian].
18. G. V. Akkuratov and V. I. Dmitriev, "Method for calculating the field of steady elastic vibrations in a layered medium," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **24** (2) 272–286 (1984) [U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. **24** (1), 166–176 (1984)].
19. A. G. Fat'yanov and B. G. Mikhailenko, "Method for calculating unsteady wave fields in inelastic layered inhomogeneous media," Dokl. Akad. Nauk SSSR **301** (4), 834–839 (1988) [in Russian].
20. A. L. Karchevsky, "Analytical solution of Maxwell's equations in the frequency domain for horizontally layered anisotropic media," Geol. Geophys. **48** (8), 889–898 (2007) [in Russian].
21. A. L. Karchevsky, "Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types," Sib. Zh. Ind. Mat. **23** (4), 48–68 (2020) [J. Appl. Industrial. Math. **14** (4), 648–665 (2020)].
22. B. G. Konopelchenko, "The group structure of Backlund transformations," Phys. Lett. A **74** (3–4), 189–192 (1979).
23. R. Sasaki, "Canonical structure of Backlund transformations," Phys. Lett. A **78** (5–6), 7–10 (1980).
24. B. G. Konopelchenko, "Elementary Backlund transformations, nonlinear superposition principle and solution of the integrable equations," Phys. Lett. A **87** (9), 445–448 (1982).
25. V. B. Kuznetsov and E. K. Sklyanin, "On Backlund transformations for many-body systems," J. Phys. A **31** (9), 2241–2251 (1998).
26. N. M. Belousov, "Backlund transformation for the nonlinear Schrodinger equation," Zap. Nauchn. Semin. POMI **494**, 6–22 (2020) [in Russian].
27. T. Miwa, M. Jimbo, and E. Date, *Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000; MTsNMO, Moscow, 2005).
28. V. B. Berestetsky, E. M. Lifshits, and L. P. Pitaevsky, *Theoretical Physics. Quantum Electrodynamics, Vol. IV* (Fizmatlit, Moscow, 2002) [in Russian].
29. M. V. Neshchadim, "Backlund transformations for the one-dimensional Schrodinger equation," Sib. Zh. Ind. Mat. **24** (2), 116–125 (2021) https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.209 [J. Appl. Ind. Math. **15** (2), 307–314 (2021) https://doi.org/10.1134/S1990478921020125].
30. S. P. Finikov, *Cartan Method of Exterior Forms* (GIITL, Moscow—Leningrad, 1948) [in Russian].
31. J. F. Pommaret, *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups* (CRC Press, New York, 1978; Mir, Moscow, 1983).
32. M. V. Neshchadim and A. P. Chupakhin, "Partially invariant solutions of the cubic Schrodinger equation," Vestn. UdGU (3), 35–41 (2008) [in Russian].
33. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "Algebraic-analytic methods for constructing solutions to differential equations and inverse problems," J. Math. Sci. **215** (4), 444–459 (2016).
34. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "Representations for the solutions and coefficients of secondorder differential equations," J. Appl. Ind. Math. **7** (1), 1–7 (2013).
35. Yu. E. Anikonov and M. V. Neshchadim, "Representations for the solutions and coefficients of evolution equations," Sib. Zh. Ind. Mat. **16** (2), 40–49 (2013) [J. Appl. Ind. Math. **7** (3), 326–334 (2013)].
36. M. V. Neshchadim, "Inverse problem of consistency theory and functionally invariant solutions of the wave equation in two-dimensional space," Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. Model. Program. (14), 99–107 (2012) [in Russian].

УДК 517.44

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРЁХМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ПО ЗНАЧЕНИЯМ НОРМАЛЬНОГО, ПРОДОЛЬНЫХ И ВЕСОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНА

© 2023 И. Е. Светов[a], А. П. Полякова[b]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]apolyakova@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 19.05.2023 г.; после доработки 13.09.2023 г.;
принята к публикации 01.11.2023 г.

В работе рассматривается задача векторной томографии по восстановлению трёхмерного векторного поля по значениям безвесовых (нормального и продольных) и весовых преобразований Радона. С использованием полученного в работе детального разложения векторных полей установлены связи безвесовых и весовых преобразований Радона, действующих на векторные поля, и преобразования Радона, действующего на функции. В частности, описаны ядра томографических интегральных операторов, действующих на векторные поля. Рассмотрены некоторые варианты постановок задач томографии по восстановлению векторных полей и получены формулы обращения для их решения.

Ключевые слова: векторная томография, разложение векторного поля, нормальное преобразование Радона, продольное преобразование Радона, весовое преобразование Радона, формула обращения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.409

ВВЕДЕНИЕ

Задача вычислительной томографии, состоящая в определении неизвестной функции по семействам её интегралов вдоль прямых или плоскостей, хорошо известна. Методы её решения по исходным данным — преобразованию Радона [1–3] или лучевым преобразованиям [4], — многочисленны и включают в себя как точные формулы обращения, так и разнообразные численные алгоритмы. Значительное число исследований посвящено задачам тензорной томографии, в которых требуется по известным лучевым преобразованиям тензорного поля найти это поле целиком или какую-либо его часть. Наиболее известна постановка, в которой необходимо определить соленоидальную часть векторного или симметричного тензорного поля по его продольному лучевому преобразованию [5–7]. Едва ли меньшее число работ посвящено теоретическому исследованию и решению задач скалярной и векторной томографии по исходным данным в форме обобщённых 2D или 3D преобразований Радона, особенно если к ним отнести и задачу эмиссионной томографии.

В рамках целей настоящей работы нас интересуют нормальное, продольные и весовые преобразования Радона трёхмерных векторных полей, являющиеся исходными данными для решения задачи векторной томографии. Нормальное преобразование Радона представляет собой семейство интегралов по плоскостям от скалярного произведения вектора нормали к плоскости интегрирования и векторного поля. Продольное преобразование Радона — множество

Работа выполнена в рамках госзадания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

интегралов по плоскостям от скалярного произведения вектора, параллельного плоскости интегрирования, и векторного поля. Точные определения интегральных операторов приведены в разделе 1. Известно [8,9], что по нормальному преобразованию Радона возможно восстановить лишь потенциальную часть векторного поля. Для полного восстановления векторного поля в $\mathbb{R}^3$ в общем случаем необходимо знать значения нормального и обоих продольных преобразований Радона [10].

Сравнительно недавно предложенный подход восстановления трёхмерного векторного поля использует в качестве исходной информации совместные измерения электромагнитных и акустических сигналов. Такой подход получил название магнито-акусто-электрической томографии [11,12], а математическими представлениями данных при этом выступают продольные и так называемые весовые преобразования Радона. Для решения задачи необходимы значения всех продольных и одного весового преобразований. Предложенный в [13] алгоритм направлен на восстановление полного векторного поля, и для определения потенциальной его части требуется опереться на предварительно восстановленную соленоидальную часть искомого векторного поля. Авторы алгоритма отмечают, что при численной реализации он оказался очень чувствителен к наличию шумов в исходных данных. Это обстоятельство наводит на гипотезу о существенной степени некорректности задачи, поэтому требуется как углублённое её теоретическое исследование, так и тщательная численная проработка методами вычислительного эксперимента. Здесь важно не только точно установить степень некорректности рассматриваемой задачи, но и развить иные формулы обращения, конструктивные методы решения и алгоритмы.

Томографические интегральные операторы (преобразования Радона и лучевое преобразование), действующие на заданные в пространстве или на плоскости векторные поля, обладают нетривиальными ядрами, что существенно осложняет решение задач векторной томографии. Оказалось, что намного более естественными являются разложения Гельмгольца—Ходжа полей на потенциальную и соленоидальную части, нежели их покомпонентные разложения. Детальные разложения 2D векторных полей и их представления через потенциалы дают возможность получить формулы обращения для томографических операторов, действующих на векторные поля, с использованием формул обращения для преобразования Радона, действующего на компоненты полей или их потенциалы [14, 15]. В трёхмерном случае известны разложения векторных полей на потенциальную, соленоидальную и гармоническую части (см., например, [16]), но при этом имеющиеся представления соленоидальных векторных полей через скалярные потенциалы не являются общепризнанными [17–19].

В разделе 1 данной работы приводятся необходимые предварительные сведениях о дифференциальных и томографических интегральных операторах, разложения векторных полей. В разделе 2 предлагается один из вариантов детального разложения векторных полей на ортогональные слагаемые в пространстве интегрируемых с квадратом векторных полей, каждое из которых при этом строится с использованием лишь одного скалярного потенциала. Раздел 3 посвящён определению нормальных, продольных и весовых преобразований Радона, действующих на заданные в трёхмерном пространстве векторные поля, и изучению их свойств, с систематическим использованием введённого в предыдущем разделе разложения 3D векторного поля. В разделе 4 сформулированы некоторые варианты задач 3D векторной томографии и получены формулы обращения для их решения. В частности, предлагаемые подходы решения задачи 3D векторной томографии по известным продольным и весовым преобразованиям Радона векторного поля позволяют восстанавливать потенциальную и соленоидальную части поля независимо друг от друга, что выгодно отличает разработанные методы от предложенного в работе [13]. Заключение содержит краткое резюме основных результатов работы и выводы.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\mathrm{x} = (x, y, z)$ — точка в пространстве $\mathbb{R}^3$. Плоскость $P_{s,\xi}$ в $\mathbb{R}^3$ задаётся нормальным уравнением $(\xi \cdot \mathrm{x}) - s = 0$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — единичный нормальный вектор плоскости, а s — расстояние (со знаком) от начала координат до плоскости. Точки на плоскости $P_{s,\xi}$ будем задавать равенством $\mathbf{x} = s\xi + \mathrm{y}$, $\mathrm{y} \in \xi^\perp$, где $\xi^\perp$ — плоскость, перпендикулярная ξ и проходящая через начало координат.

Преобразование Радона $\mathcal{R}f$ функции f задаётся формулой

$$\mathcal{R}f(s,\xi) = \int_{P_{s,\xi}} f(\mathrm{x})\, d\mathrm{x} = \int_{\xi^\perp} f(s\xi + \mathrm{y})\, d\mathrm{y}.$$

Множество переменных в пространстве образов $\mathcal{R}$ обозначим $Z = \{(s,\xi) : s \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{S}^2\}$. Свойства преобразования Радона традиционно изучаются для функций $f(\mathrm{x})$ из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Напомним, что этот класс состоит из всех $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ функций, все производные которых убывают на бесконечности быстрее любой рациональной функции. Приведём некоторые свойства и формулы обращения для преобразования Радона (подробнее см., например, [4]).

Утверждение 1. (Проекционная теорема) Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, то

$$F_1\left[\mathcal{R}f\right](\widetilde{s},\xi) = 2\pi\, F_3[f](\widetilde{s}\xi), \qquad \widetilde{s} \in \mathbb{R},$$

где через $F_1[\cdot]$ обозначено одномерное преобразование Фурье, применяемое к первому аргументу, $F_3[\cdot]$ — трёхмерное преобразование Фурье.

Проекционная теорема даёт один из подходов для обращения преобразования Радона. Из утверждения 1 следуют равенства

$$\mathcal{R}\varphi'_x(s,\xi) = \xi_1(\mathcal{R}\varphi)'_s(s,\xi), \qquad \mathcal{R}\varphi'_y(s,\xi) = \xi_2(\mathcal{R}\varphi)'_s(s,\xi), \qquad \mathcal{R}\varphi'_z(s,\xi) = \xi_3(\mathcal{R}\varphi)'_s(s,\xi). \tag{1}$$

Двойственный оператор $\mathcal{R}^\#$ *по отношению к преобразованию Радона* $\mathcal{R}$ определяется формулой

$$\mathcal{R}^\# g(\mathrm{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} g((\mathrm{x}\cdot\xi),\xi)\, d\xi.$$

Для $0 \leqslant \alpha < 3$ *потенциал Рисса* I^α определяется формулой $F_n[\mathrm{I}^\alpha f](z) = |z|^{-\alpha} F_n[f](z)$ и применяется к функциям определённым на $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$) и на Z ($n = 1$, преобразование Фурье применяется по первой переменной). Оператор $\mathrm{I}^{-\alpha}$ определяется равенством $\mathrm{I}^{-\alpha}\mathrm{I}^\alpha f = f$. С использованием потенциала Рисса и двойственного оператора конструируется целое семейство формул обращения.

Утверждение 2. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Тогда для любого $0 \leqslant \alpha < 3$

$$f = \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{I}^{-\alpha}\mathcal{R}^\#\mathrm{I}^{\alpha-2} g, \qquad g = \mathcal{R}f.$$

В частности, при $\alpha = 0$ имеем

$$f = -\frac{1}{8\pi^2}\mathcal{R}^\# g''_{ss} = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2} g''_{ss}(s,\xi)\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}\, d\xi. \tag{2}$$

Мы рассматриваем векторные поля $\mathbf{v}(\mathrm{x}) = (v_1(\mathrm{x}), v_2(\mathrm{x}), v_3(\mathrm{x}))$ с компонентами из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Множество таких полей обозначим через $\mathcal{S}(S^1(\mathbb{R}^3))$. Векторное поле $\mathbf{v}(\mathrm{x})$ называется *потенциальным*, если существует функция $\varphi(\mathrm{x})$ такая, что её градиент равен $\mathbf{v}(\mathrm{x})$:

$$\mathbf{v}(\mathrm{x}) = \nabla\varphi(\mathrm{x}) = \big(\varphi'_x(\mathrm{x}), \varphi'_y(\mathrm{x}), \varphi'_z(\mathrm{x})\big), \qquad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Векторное поле $\mathbf{w}(\mathrm{x})$ является *соленоидальным*, если его дивергенция равна нулю:

$$\delta\mathbf{w}(\mathrm{x}) = (w_1)'_x(\mathrm{x}) + (w_2)'_y(\mathrm{x}) + (w_3)'_z(\mathrm{x}) = 0, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Хорошо известно [5], что n-мерное векторное поле $\mathbf{w}(\mathrm{x})$ единственным образом представимо в виде суммы потенциального $\nabla\varphi(\mathrm{x})$ и соленоидального ${}^s\mathbf{w}(\mathrm{x})$ полей

$$\mathbf{w}(\mathrm{x}) = {}^s\mathbf{w}(\mathrm{x}) + \nabla\varphi(\mathrm{x}), \qquad \lim_{|x|\to\infty} \varphi(\mathrm{x}) = 0.$$

Также известно [20], что трёхмерное векторное поле $\mathbf{w}(\mathrm{x})$ соленоидально тогда и только тогда, когда существует векторное поле $\mathbf{u}(\mathrm{x})$ такое, что его ротор равен $\mathbf{w}(\mathrm{x})$

$$\mathbf{w}(\mathrm{x}) = \operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathrm{x}) = \big((u_3)'_y(\mathrm{x}) - (u_2)'_z(\mathrm{x}), (u_1)'_z(\mathrm{x}) - (u_3)'_x(\mathrm{x}), (u_2)'_x(\mathrm{x}) - (u_1)'_y(\mathrm{x})\big), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Напомним, что для любого $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ имеет место равенство $\operatorname{rot}\nabla\phi = 0$. Здесь и далее переменные, от которых зависит функция, опускаются, если это не вызывает путаницы.

Нормальное преобразование Радона $\mathcal{R}^0$ векторного поля $\mathbf{w}$ задаётся формулой

$$\mathcal{R}^0\mathbf{w}(s,\xi) = \int_{P_{\xi,s}} (\xi \cdot \mathbf{w}(\mathrm{x}))d\mathrm{x}. \tag{3}$$

Пусть $\mathbf{e}^1 = (e^1_1, e^1_2, e^1_3)$, $\mathbf{e}^2 = (e^2_1, e^2_2, e^2_3)$ — единичные взаимно ортогональные векторы, компланарные плоскости $\xi^\perp$. Тогда для $\mathrm{y} \in \xi^\perp$ имеем представление $\mathrm{y} = u\mathbf{e}^1 + v\mathbf{e}^2$, $u, v \in \mathbb{R}$. *Продольные преобразования Радона* $\mathcal{R}^k$, $k = 1, 2$, действующие на векторное поле $\mathbf{w}$, задаются формулами

$$\mathcal{R}^k\mathbf{w}(s,\xi) = \int_{P_{s,\xi}} (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{w}(\mathrm{x}))d\mathrm{x}. \tag{4}$$

Весовые преобразования Радона $\mathcal{W}^k_l$, $k = 0, 1, 2$, $l = 1, 2$ действуют на векторное поле $\mathbf{w}$ по правилам

$$\mathcal{W}^0_l\mathbf{w}(s,\xi) = \int_{P_{s,\xi}} (\mathrm{x} \cdot \mathbf{e}^l)(\xi \cdot \mathbf{w}(\mathrm{x}))d\mathrm{x}, \qquad l = 1, 2,$$
$$\mathcal{W}^k_l\mathbf{w}(s,\xi) = \int_{P_{s,\xi}} (\mathrm{x} \cdot \mathbf{e}^l)(\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{w}(\mathrm{x}))d\mathrm{x}, \qquad k, l = 1, 2.$$

2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Известно (см., например, [17, 18]) ортогональное разложение соленоидального векторного поля в $\mathbb{R}^3$ на тороидальную и полоидальную части. В данном разделе предлагается иной способ построения ортогонального разложения соленоидального векторного поля. В [19] введены операторы rot_i, $i = 1, 2, 3$, действующие на трёхмерные симметричные тензорные поля. В частности, на функцию $\varphi(\mathrm{x})$ они действуют по формулам

$$\operatorname{rot}_1\varphi = \operatorname{rot}\big(\varphi, 0, 0\big) = \big(0, \varphi'_z, -\varphi'_y\big),$$
$$\operatorname{rot}_2\varphi = \operatorname{rot}\big(0, \varphi, 0\big) = \big(-\varphi'_z, 0, \varphi'_x\big),$$
$$\operatorname{rot}_3\varphi = \operatorname{rot}\big(0, 0, \varphi\big) = \big(\varphi'_y, -\varphi'_x, 0\big).$$

Дополнительно введём операторы rot^i, $i = 1, 2, 3$, которые задаются равенствами

$$\operatorname{rot}^i\varphi = \operatorname{rot}\big(\operatorname{rot}_i\varphi\big), \quad i = 1, 2, 3.$$

Далее мы будем нумеровать поля и потенциалы верхними индексами. Эта нумерация соответствует нумерации используемых дифференциальных операторов: 0 — для оператора ∇, 1 — для rot_i и 2 — для rot^i, где $i = 1, 2, 3$ фиксировано.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, *тогда для каждого* $i = 1,2,3$ *поля* $\nabla\varphi^0$, $\operatorname{rot}_i \varphi^1$, $\operatorname{rot}^i \varphi^2$ *попарно ортогональны в* $L_2(S^1(\mathbb{R}^3))$.

Доказательство. Приведём доказательство для $i = 3$, для $i = 1,2$ доказательство производится аналогично. Имеем $\nabla\varphi^0 = \big((\varphi^0)'_x, (\varphi^0)'_y, (\varphi^0)'_z\big)$, $\operatorname{rot}_3 \varphi^1 = \big((\varphi^1)'_y, -(\varphi^1)'_x, 0\big)$, $\operatorname{rot}^3 \varphi^2 = \big((\varphi^2)''_{xz}, (\varphi^2)''_{yz}, -(\varphi^2)''_{xx} - (\varphi^2)''_{yy}\big)$. Вычисляем скалярное произведение

$$\langle \nabla\varphi^0, \operatorname{rot}_3 \varphi^1\rangle_{L_2(S^1(\mathbb{R}^3))} = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla\varphi^0 \cdot \operatorname{rot}_3\varphi^1)dx\,dy\,dz = \int_{\mathbb{R}^3} \Big((\varphi^0)'_x(\varphi^1)'_y - (\varphi^0)'_y(\varphi^1)'_x\Big)dx\,dy\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} \Big((\varphi^0)'_x(\varphi^1)'_y - (\varphi^0)'_y(\varphi^1)'_x \pm \varphi^0(\varphi^1)''_{xy}\Big)dx\,dy\,dz = \int_{\mathbb{R}^3} \Big((\varphi^0(\varphi^1)'_y)'_x - (\varphi^0(\varphi^1)'_x)'_y\Big)dx\,dy\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\lim_{r\to+\infty} \varphi^0(\varphi^1)'_y\Big|_{x=-r}^{x=r}\Big)dy\,dz - \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\lim_{r\to+\infty} \varphi^0(\varphi^1)'_x\Big|_{y=-r}^{y=r}\Big)dx\,dz = 0.$$

Аналогично получаем

$$\langle \nabla\varphi^0, \operatorname{rot}^3 \varphi^2\rangle_{L_2(S^1(B))} = \int_{\mathbb{R}^3} \Big((\varphi^0)'_x(\varphi^2)''_{xz} + (\varphi^0)'_y(\varphi^2)''_{yz} - (\varphi^0)'_z((\varphi^2)''_{xx} + (\varphi^2)''_{yy})\Big)dx\,dy\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} \Big(((\varphi^0)'_x(\varphi^2)''_{xz} - (\varphi^0)'_z(\varphi^2)''_{xx}) + ((\varphi^0)'_y(\varphi^2)''_{yz} - (\varphi^0)'_z(\varphi^2)''_{yy})\Big)dx\,dy\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} \Big(((\varphi^0(\varphi^2)''_{xz})'_x - (\varphi^0(\varphi^2)''_{xx})'_z) + ((\varphi^0(\varphi^2)''_{yz})'_y - (\varphi^0(\varphi^2)''_{yy})'_z)\Big)dx\,dy\,dz$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\lim_{r\to+\infty} \varphi^0(\varphi^2)''_{xz}\Big|_{x=-r}^{x=r}\Big)dy\,dz - \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\lim_{r\to+\infty} \varphi^0(\varphi^2)''_{xx}\Big|_{z=-r}^{z=r}\Big)dx\,dy$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\lim_{r\to+\infty} \varphi^0(\varphi^2)''_{yz}\Big|_{y=-r}^{y=r}\Big)dx\,dz - \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\lim_{r\to+\infty} \varphi^0(\varphi^2)''_{yy}\Big|_{z=-r}^{z=r}\Big)dx\,dy = 0,$$
$$\langle \operatorname{rot}_3 \varphi^1, \operatorname{rot}^3 \varphi^2\rangle_{L_2(S^1(B))} = \int_{\mathbb{R}^3} \Big((\varphi^1)'_y(\varphi^2)''_{xz} - (\varphi^1)'_x(\varphi^2)''_{yz}\Big)dx\,dy\,dz$$
$$= \langle \operatorname{rot}_3 \varphi^1, \nabla(\varphi^2)'_z\rangle_{L_2(S^1(B))} = 0.$$

□

Лемма 2. *Для каждого фиксированного* $i = 1,2,3$ *любое соленоидальное векторное поле* $\mathbf{u}$ *можно представить в виде* $\mathbf{u} = \operatorname{rot}_i \varphi^1 + \operatorname{rot}^i \varphi^2$ *для некоторых функций* φ^1, φ^2.

Доказательство. Приведём доказательство для $i = 3$, для $i = 1,2$ доказательство производится аналогично. Знаем, что для $\mathbf{u}$ существует некоторое векторное поле $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ такое, что $\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$. Для двумерного векторного поля (v_1, v_2) известно [21], что его можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей

$$(v_1, v_2) = (\phi'_x, \phi'_y) + (\psi'_y, -\psi'_x)$$

для некоторых функций ϕ и ψ. Следовательно имеем

$$(v_1, v_2, v_3) = (0,0,v_3) + (\phi'_x, \phi'_y, 0) + (\psi'_y, -\psi'_x, 0) = (0,0,v_3 - \phi'_z) + (\phi'_x, \phi'_y, \phi'_z) + (\psi'_y, -\psi'_x, 0).$$

Вводя обозначения $\varphi^1 = v_3 - \phi'_z$, $\varphi^2 = \psi$, получаем

$$\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}_3 \varphi^1 + \operatorname{rot}\nabla\phi + \operatorname{rot}^3 \varphi^2 = \operatorname{rot}_3 \varphi^1 + \operatorname{rot}^3 \varphi^2.$$

□

Из леммы 1 и леммы 2 следует

Теорема 1. *Для каждого фиксированного $i = 1, 2, 3$ любое векторное поле $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(S^1(\mathbb{R}^3))$ может быть единственным образом представлено в виде суммы*

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi^0 + \mathrm{rot}_i\,\varphi^1 + \mathrm{rot}^i\,\varphi^2, \qquad \varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3).$$

3. ОПИСАНИЕ ЯДЕР И ОБРАЗОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНА, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

3.1. Нормальное и продольные преобразования Радона

Отметим связь преобразования Радона, действующего на функции, и преобразований Радона, действующих на векторное поле $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^0\mathbf{w} &= \xi_1(\mathcal{R}w_1) + \xi_2(\mathcal{R}w_2) + \xi_3(\mathcal{R}w_3),\\
\mathcal{R}^1\mathbf{w} &= e^1_1(\mathcal{R}w_1) + e^1_2(\mathcal{R}w_2) + e^1_3(\mathcal{R}w_3),\\
\mathcal{R}^2\mathbf{w} &= e^2_1(\mathcal{R}w_1) + e^2_2(\mathcal{R}w_2) + e^2_3(\mathcal{R}w_3).
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь и далее переменные (s, ξ) опускаются для краткости. Учитывая ортонормированность системы векторов $\{\xi, \mathbf{e^1}, \mathbf{e^2}\}$, разрешаем эту систему относительно $\mathcal{R}w_1$, $\mathcal{R}w_2$ и $\mathcal{R}w_3$:

$$\mathcal{R}w_j = \xi_j(\mathcal{R}^0\mathbf{w}) + e^1_j(\mathcal{R}^1\mathbf{w}) + e^2_j(\mathcal{R}^2\mathbf{w}), \qquad j = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Таким образом, для восстановления векторного поля в общем случае необходимо и достаточно знать значения всех трёх операторов $\mathcal{R}^k$, $k = 0, 1, 2$. Эти связи и известные подходы для обращения преобразования Радона позволяют получить формулы обращения и алгоритмы для численного обращения интегральных операторов (3), (4). Например, при использовании формулы (2) получаем формулы обращения для покомпонентного восстановления $\mathbf{w}$

$$w_j(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\Big(\xi_j(\mathcal{R}^0\mathbf{w})''_{ss}(s,\xi) + e^1_j(\mathcal{R}^1\mathbf{w})''_{ss}(s,\xi) + e^2_j(\mathcal{R}^2\mathbf{w})''_{ss}(s,\xi)\Big)\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}\,d\xi, \quad j = 1, 2, 3. \tag{7}$$

В силу неоднозначности выбора системы векторов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ операторы $\mathcal{R}^k$, $k = 1, 2$ также будут определяться неоднозначно. Для описания ядер и областей значений операторов $\mathcal{R}^k$, $k = 1, 2$ выберем один из наиболее естественных наборов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ (см., например, [13]):

$$\mathbf{e}^1 = \frac{1}{\rho}\,(\xi_2,\, -\xi_1,\, 0)\,, \qquad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{\rho}\,\Big(\xi_1\xi_3,\, \xi_2\xi_3,\, -(\xi_1)^2 - (\xi_2)^2\Big)\,, \qquad \text{где } \ \rho = \sqrt{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2}. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ — потенциалы полей $\Phi^0 = \nabla\varphi^0$, $\Phi^1 = \mathrm{rot}_3\varphi^1$ и $\Phi_2 = \mathrm{rot}^3\varphi^2$ соответственно. Тогда имеют место равенства:*

$$\begin{gathered}
\mathcal{R}^k\Phi^l = 0, \quad k, l = 0, 1, 2, \quad k \neq l,\\
\mathcal{R}^0\Phi^0 = \big(\mathcal{R}\varphi^0\big)'_s\,, \qquad \mathcal{R}^1\Phi^1 = \rho\,\big(\mathcal{R}\varphi^1\big)'_s\,, \qquad \mathcal{R}^2\Phi^2 = \rho\,\big(\mathcal{R}\varphi^2\big)''_{ss}\,.
\end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство. Для оператора $\mathcal{R}^0$ имеем

$$\mathcal{R}^0\Phi^0 \overset{(5)}{=} \xi_1\left(\mathcal{R}(\varphi^0)'_x\right) + \xi_2\left(\mathcal{R}(\varphi^0)'_y\right) + \xi_3\left(\mathcal{R}(\varphi^0)'_z\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \xi_1\xi_1\left(\mathcal{R}\varphi^0\right)'_s + \xi_2\xi_2\left(\mathcal{R}\varphi^0\right)'_s + \xi_3\xi_3\left(\mathcal{R}\varphi^0\right)'_s = \left(\mathcal{R}\varphi^0\right)'_s,$$

$$\mathcal{R}^0\Phi^1 \overset{(5)}{=} \xi_1\left(\mathcal{R}(\varphi^1)'_y\right) - \xi_2\left(\mathcal{R}(\varphi^1)'_x\right) \overset{(1)}{=} \xi_1\xi_2\left(\mathcal{R}\varphi^1\right)'_s - \xi_2\xi_1\left(\mathcal{R}\varphi^1\right)'_s = 0,$$

$$\mathcal{R}^0\Phi^2 \overset{(5)}{=} \xi_1\left(\mathcal{R}(\varphi^2)''_{xz}\right) + \xi_2\left(\mathcal{R}(\varphi^2)''_{yz}\right) - \xi_3\left(\mathcal{R}(\varphi^2)''_{xx}\right) - \xi_3\left(\mathcal{R}(\varphi^2)''_{yy}\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \left(\xi_1\xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_2\xi_3 - \xi_3(\xi_1\xi_1 + \xi_2\xi_2)\right)\left(\mathcal{R}\varphi^2\right)''_{ss} = 0.$$

Для операторов $\mathcal{R}^1$ и $\mathcal{R}^2$ равенства получаются аналогично. □

В силу теорем 1 и 2 имеет место

Следствие 1. *Для поля общего вида*

$$\mathbf{w} = \Phi^0 + \Phi^1 + \Phi^2 = \nabla\varphi^0 + \mathrm{rot}_3\varphi^1 + \mathrm{rot}^3\varphi^2, \qquad \varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \tag{10}$$

имеют место равенства:

$$\mathcal{R}^0\mathbf{w} = \mathcal{R}^0\Phi^0 = \left(\mathcal{R}\varphi^0\right)'_s, \qquad \mathcal{R}^1\mathbf{w} = \mathcal{R}^1\Phi^1 = \rho\left(\mathcal{R}\varphi^1\right)'_s, \qquad \mathcal{R}^2\mathbf{w} = \mathcal{R}^2\Phi^2 = \rho\left(\mathcal{R}\varphi^2\right)''_{ss}.$$

Из следствия 1 и утверждения 1 следует проекционная теорема для векторного случая.

Следствие 2. *Для векторного поля (10) выполнены тождества*

$$F_1\left[\mathcal{R}^0\mathbf{w}\right](\widetilde{s},\xi) = 2\pi\mathrm{i}\,\widetilde{s}F_3[\varphi^0](\widetilde{s}\xi),$$
$$F_1\left[\mathcal{R}^1\mathbf{w}\right](\widetilde{s},\xi) = 2\pi\mathrm{i}\rho\,\widetilde{s}F_3[\varphi^1](\widetilde{s}\xi),$$
$$F_1\left[\mathcal{R}^2\mathbf{w}\right](\widetilde{s},\xi) = -2\pi\rho\,\widetilde{s}^2F_3[\varphi^2](\widetilde{s}\xi),$$

Используя следствие 1 и формулы (2), (6), получим формулы обращения для восстановления компонент векторного поля и потенциалов его частей. Пусть векторное поле $\mathbf{w}$ имеет вид (10) с потенциалами $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, тогда имеют место формулы

$$\varphi^0(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}(\mathcal{R}^0\mathbf{w})'_s(s,\xi)\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}\,d\xi,$$
$$\varphi^1(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\frac{1}{\rho}(\mathcal{R}^1\mathbf{w})'_s(s,\xi)\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}\,d\xi,$$
$$\varphi^2(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\frac{1}{\rho}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})((\mathrm{x}\cdot\xi),\xi)\,d\xi.$$

Для восстановления компонент полей Φ^k, $k = 0, 1, 2$ получаем формулы

$$\Phi^0_j(\mathrm{x}) = \left(\mathrm{d}\varphi^0\right)_j(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\xi_j(\mathcal{R}^0\mathbf{w})''_{ss}(s,\xi)\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}\,d\xi, \qquad j = 1,2,3, \tag{11}$$

$$\Phi^1_j(\mathrm{x}) = \left(\mathrm{rot}_3\varphi^1\right)_j(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}e^1_j(\mathcal{R}^1\mathbf{w})''_{ss}(s,\xi)\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}\,d\xi, \qquad j = 1,2,3, \tag{12}$$

$$\Phi^2_j(\mathrm{x}) = \left(\mathrm{rot}^3\varphi^2\right)_j(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}e^2_j(\mathcal{R}^2\mathbf{w})''_{ss}(s,\xi)\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}\,d\xi, \qquad j = 1,2,3. \tag{13}$$

3.2. Весовые преобразования Радона

При задании точки $\mathrm{x} = s\xi + u\mathbf{e}^1 + v\mathbf{e}^2$ на плоскости $P_{s,\xi}$ через u, v интегрирование по переменным u, v производится по плоскости $\mathbb{R}^2$. Отметим связи операторов $\mathcal{W}_l^k$ и $\mathcal{R}^k$

$$\mathcal{W}_1^k\mathbf{w} = \mathcal{R}^k(u\mathbf{w}), \qquad \mathcal{W}_2^k\mathbf{w} = \mathcal{R}^k(v\mathbf{w}), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Для исследования весовых преобразований Радона рассмотрим набор $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$, задаваемый формулами (8). В сферической системе координат ($\alpha \in [0, 2\pi),\ \beta \in (0, \pi)$) имеем

$$\xi = (\cos\alpha\,\sin\beta,\ \sin\alpha\,\sin\beta,\ \cos\beta), \qquad \mathbf{e^1} = (\sin\alpha, -\cos\alpha, 0),$$
$$\mathbf{e^2} = (\cos\alpha\,\cos\beta,\ \sin\alpha\,\cos\beta,\ -\sin\beta), \qquad \rho = \sin\beta.$$

Следовательно, координаты точки x могут быть записаны следующим образом

$$\begin{aligned} x &= s\,\cos\alpha\,\sin\beta + u\,\sin\alpha + v\,\cos\alpha\,\cos\beta,\\ y &= s\,\sin\alpha\,\sin\beta + u\,(-\cos\alpha) + v\,\sin\alpha\,\cos\beta,\\ z &= s\,\cos\beta + v\,(-\sin\beta). \end{aligned}$$

Запишем свойство преобразования Радона (1) во введённых обозначениях

$$\mathcal{R}\varphi'_x = \cos\alpha\sin\beta(\mathcal{R}\varphi)'_s, \qquad \mathcal{R}\varphi'_y = \sin\alpha\sin\beta(\mathcal{R}\varphi)'_s, \qquad \mathcal{R}\varphi'_z = \cos\beta(\mathcal{R}\varphi)'_s. \tag{14}$$

Приведём некоторые формулы, которые потребуются в дальнейшем. Для производных функций имеют место выражения:

$$\varphi'_u = \varphi'_x\sin\alpha - \varphi'_y\cos\alpha, \tag{15}$$
$$\varphi'_v = \varphi'_x\cos\alpha\cos\beta + \varphi'_y\sin\alpha\cos\beta - \varphi'_z\sin\beta, \tag{16}$$
$$\varphi'_\alpha = \varphi'_x\big(-s\sin\alpha\sin\beta + u\cos\alpha - v\sin\alpha\cos\beta\big) + \varphi'_y\big(s\cos\alpha\sin\beta + u\sin\alpha + v\cos\alpha\cos\beta\big), \tag{17}$$
$$\varphi'_\beta = \varphi'_x\big(s\cos\alpha\cos\beta - v\cos\alpha\sin\beta\big) + \varphi'_y\big(s\sin\alpha\cos\beta - v\sin\alpha\sin\beta\big) + \varphi'_z\big(-s\sin\beta - v\cos\beta\big). \tag{18}$$

В процессе вычислений будут возникать интегралы вида:

$$\int_{\mathbb{R}^2} u\varphi'_u du\,dv = \int_{\mathbb{R}} \lim_{r\to+\infty}(u\varphi)\Big|_{u=-r}^{u=r} dv - \int_{\mathbb{R}^2}\varphi\,du\,dv = -\mathcal{R}\varphi, \tag{19}$$
$$\int_{\mathbb{R}^2} u\varphi'_v dv\,du = \int_{\mathbb{R}} \lim_{r\to+\infty}(u\,\varphi)\Big|_{v=-r}^{v=r} du - 0 = 0. \tag{20}$$

Используя формулы (15), (17), (20) и (18), (20), находим формулы для вычисления производных преобразования Радона $\mathcal{R}$ по переменным α и β соответственно:

$$(\mathcal{R}\varphi)'_\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} u\Big(\varphi'_x\cos\alpha + \varphi'_y\sin\alpha\Big)\,du\,dv, \tag{21}$$
$$(\mathcal{R}\varphi)'_\beta = -\int_{\mathbb{R}^2} v\big(\varphi'_x\cos\alpha\sin\beta + \varphi'_y\sin\alpha\sin\beta + \varphi'_z\cos\beta\big)\,du\,dv. \tag{22}$$

Перейдём к вычислению образов полей $\Phi^0 = \nabla\varphi^0$, $\Phi^1 = \mathrm{rot}_3\varphi^1$ и $\Phi_2 = \mathrm{rot}^3\varphi^2$ под действием весовых преобразований Радона. Если вычисления заключаются лишь в непосредственном использовании формул, то мы указываем на эти формулы без приведения вычислений.

Теорема 3. *Пусть базис $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ на плоскости интегрирования задаётся формулами (8), $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ — потенциалы полей $\Phi^0 = \nabla\varphi^0$, $\Phi^1 = \mathrm{rot}_3\varphi^1$ и $\Phi_2 = \mathrm{rot}^3\varphi^2$ соответственно. Тогда имеют место равенства (для переменных $s, \xi(\alpha, \beta)$):*

$$\mathcal{W}_1^0\Phi^0 = \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}\varphi^0)'_\alpha, \qquad \mathcal{W}_1^0\Phi^1 = \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^1), \qquad \mathcal{W}_1^0\Phi^2 = 0. \tag{23}$$

Доказательство. Используя формулу (21), для поля Φ^0 имеем

$$\mathcal{W}_1^0\Phi^0 = \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^0)'_\alpha + \cos\beta\int_{\mathbb{R}^2} u(\varphi^0)'_z du\,dv.$$

Для рассмотрения интеграла во втором слагаемом введём вспомогательную функцию ψ такую, что $\varphi^0 = \psi'_x$. Отметим связь

$$\mathcal{R}\varphi^0 = \mathcal{R}\psi'_x \overset{(14)}{=} \cos\alpha\sin\beta(\mathcal{R}\psi)'_s \overset{(14)}{=} \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}(\mathcal{R}\psi'_z). \tag{24}$$

Имеем

$$\begin{gathered}
\int_{\mathbb{R}^2} u(\varphi^0)'_z du\,dv = \int_{\mathbb{R}^2} u\psi''_{xz} du\,dv = \int_{\mathbb{R}^2} u\Big(\psi''_{xz}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) \pm \psi''_{yz}\sin\alpha\cos\alpha\Big)du\,dv \\
= \sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big(\psi''_{xz}\sin\alpha - \psi''_{yz}\cos\alpha\Big)du\,dv + \cos\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big(\psi''_{xz}\cos\alpha + \psi''_{yz}\sin\alpha\Big)du\,dv \\
\overset{(15,21)}{=} \sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\psi''_{zu} du\,dv + \cos\alpha(\mathcal{R}\psi'_z)'_\alpha \\
\overset{(19)}{=} -\sin\alpha(\mathcal{R}\psi'_z) + \cos\alpha(\mathcal{R}\psi'_z)'_\alpha = \Big(\cos\alpha(\mathcal{R}\psi'_z)\Big)'_\alpha \overset{(24)}{=} \frac{\cos\beta}{\sin\beta}(\mathcal{R}\varphi^0)'_\alpha.
\end{gathered}$$

В итоге получаем $\mathcal{W}_1^0\Phi^0 = \Big(\sin\beta + \dfrac{\cos^2\beta}{\sin\beta}\Big)(\mathcal{R}\varphi^0)'_\alpha = \dfrac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}\varphi^0)'_\alpha$.

Результат для Φ^1 получается с использованием формул (15) и (19). Для поля Φ^2 имеем

$$\begin{gathered}
\mathcal{W}_1^0\Phi^2 = \int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xz}\cos\alpha\sin\beta + (\varphi^2)''_{yz}\sin\alpha\sin\beta - (\varphi^2)''_{xx}\cos\beta - (\varphi^2)''_{yy}\cos\beta\Big)dv\,du \\
\overset{(21)}{=} \sin\beta(\mathcal{R}(\varphi^2)'_z)'_\alpha - \cos\beta\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xx}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) \pm (\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha\sin\alpha\Big)dv\,du \\
- \cos\beta\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{yy}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) \pm (\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha\sin\alpha\Big)dv\,du \\
\overset{(14)}{=} \cos\beta\Big(\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\alpha} \\
- \cos\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xx}\cos\alpha + (\varphi^2)''_{xy}\sin\alpha\Big)dv\,du - \sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xx}\sin\alpha - (\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha\Big)dv\,du \\
- \sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha + (\varphi^2)''_{yy}\sin\alpha\Big)dv\,du + \cos\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xy}\sin\alpha - (\varphi^2)''_{yy}\cos\alpha\Big)dv\,du\Big) \\
\overset{(21,15)}{=} \cos\beta\Big(\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\alpha} - \cos\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_x)'_\alpha - \sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u(\varphi^2)''_{xu} dv\,du \\
- \sin\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_y)'_\alpha + \cos\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u(\varphi^2)''_{yu} dv\,du\Big) \\
\overset{(14,19)}{=} \cos\beta\Big(\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\alpha} - \sin\beta\cos^2\alpha(\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\alpha} + \sin\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_x) \\
- \sin\beta\sin^2\alpha(\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\alpha} - \cos\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_y)\Big) \overset{(14)}{=} 0.
\end{gathered}$$

□

Из теоремы 3 следует, что оператор $\mathcal{W}_1^0$ обладает нетривиальным ядром состоящим из соленоидальных векторных полей вида $\mathrm{rot}^3\varphi^2$, $\varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 4. *Пусть базис* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ *на плоскости интегрирования задаётся формулами (8),* $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ *— потенциалы полей* $\Phi^0 = \nabla\varphi^0$, $\Phi^1 = \mathrm{rot}_3\varphi^1$ *и* $\Phi_2 = \mathrm{rot}^3\varphi^2$ *соответственно. Тогда имеют место равенства (для переменных* $s, \xi(\alpha, \beta)$*):*

$$\mathcal{W}_2^0\Phi^0 = -(\mathcal{R}\varphi^0)'_\beta, \qquad \mathcal{W}_2^0\Phi^1 = 0, \qquad \mathcal{W}_2^0\Phi^2 = \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^2)'_s. \tag{25}$$

Доказательство. Результаты для полей Φ^0 и Φ^1 получаются с использованием формул (22) и (15), (20) соответственно. Для поля Φ^2 имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_2^0\Phi^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{xz}\cos\alpha\sin\beta + (\varphi^2)''_{yz}\sin\alpha\sin\beta - (\varphi^2)''_{xx}\cos\beta - (\varphi^2)''_{yy}\cos\beta\Big)du\,dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} v\Big(-(\varphi^2)''_{xx}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\cos\beta \pm (\varphi^2)''_{xy}\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + (\varphi^2)''_{xz}\cos\alpha\sin\beta\Big)du\,dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} v\Big(\pm(\varphi^2)''_{yx}\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta - (\varphi^2)''_{yy}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\cos\beta + (\varphi^2)''_{yz}\sin\alpha\sin\beta\Big)du\,dv \\
&\overset{(16)}{=} -\cos\alpha\int_{\mathbb{R}^2} v(\varphi^2)''_{xv}du\,dv + \sin\alpha\cos\beta\int_{\mathbb{R}^2} v\Big(-(\varphi^2)''_{xx}\sin\alpha + (\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha\Big)du\,dv \\
&\quad -\sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} v(\varphi^2)''_{yv}du\,dv + \cos\alpha\cos\beta\int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{xy}\sin\alpha - (\varphi^2)''_{yy}\cos\alpha\Big)du\,dv \\
&\overset{(19,15)}{=} \cos\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_x) - \sin\alpha\cos\beta\int_{\mathbb{R}^2} v(\varphi^2)''_{xu}du\,dv + \sin\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_y) + \cos\alpha\cos\beta\int_{\mathbb{R}^2} v(\varphi^2)''_{yu}du\,dv \\
&\overset{(14,20)}{=} \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^2)'_s.
\end{aligned}$$

□

Оператор $\mathcal{W}_2^0$ обладает нетривиальным ядром состоящим из соленоидальных векторных полей вида $\mathrm{rot}_3\varphi^1$, $\varphi^1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 5. *Пусть базис* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ *на плоскости интегрирования задаётся формулами (8),* $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ *— потенциалы полей* $\Phi^0 = \nabla\varphi^0$, $\Phi^1 = \mathrm{rot}_3\varphi^1$ *и* $\Phi_2 = \mathrm{rot}^3\varphi^2$ *соответственно. Тогда имеют место равенства (для переменных* $s, \xi(\alpha, \beta)$*):*

$$\mathcal{W}_1^1\Phi^0 = -\mathcal{R}\varphi^0, \qquad \mathcal{W}_1^1\Phi^1 = (\mathcal{R}\varphi^1)'_\alpha, \qquad \mathcal{W}_1^1\Phi^2 = -\cos\beta(\mathcal{R}\varphi^2)'_s. \tag{26}$$

Доказательство. Результаты для полей Φ^0, Φ^1 и Φ^2 получаются с использованием формул (15), (19), (21) и (14), (15), (19) соответственно. □

Из теоремы 5 следует, что у оператора $\mathcal{W}_1^1$ отсутствует нетривиальное ядро.

Теорема 6. *Пусть базис* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ *на плоскости интегрирования задаётся формулами (8),* $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ *— потенциалы полей* $\Phi^0 = \nabla\varphi^0$, $\Phi^1 = \mathrm{rot}_3\varphi^1$ *и* $\Phi_2 = \mathrm{rot}^3\varphi^2$ *соответственно. Тогда имеют место равенства (для переменных* $s, \xi(\alpha, \beta)$*):*

$$\mathcal{W}_2^1\Phi^0 = 0, \qquad \mathcal{W}_2^1\Phi^1 = -\Big(\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^1)\Big)'_\beta, \qquad \mathcal{W}_2^1\Phi^2 = 0.$$

Доказательство. Результаты для полей Φ^0 и Φ^2 получаются с использованием формул (15) и (20). Для поля Φ^1 получаем

$$\mathcal{W}_2^1\Phi^1 = \int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^1)'_y\sin\alpha + (\varphi^1)'_x\cos\alpha\Big)du\,dv$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^1)'_x\cos\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta) + (\varphi^1)'_y\sin\alpha(\sin^2\beta+\cos^2\beta) \pm (\varphi^1)'_z\sin\beta\cos\beta\Big)du\,dv$$
$$= \cos\beta\int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^1)'_x\cos\alpha\cos\beta + (\varphi^1)'_y\sin\alpha\cos\beta - (\varphi^1)'_z\sin\beta\Big)du\,dv$$
$$+\sin\beta\int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^1)'_x\cos\alpha\sin\beta + (\varphi^1)'_y\sin\alpha\sin\beta + (\varphi^1)'_z\cos\beta\Big)du\,dv$$
$$\overset{(16,22)}{=} \cos\beta\int_{\mathbb{R}^2} v(\varphi^1)'_v du\,dv - \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^1)'_\beta \overset{(19)}{=} -\cos\beta(\mathcal{R}\varphi^1) - \sin\beta(\mathcal{R}\varphi^1)'_\beta = -\Big(\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^1)\Big)'_\beta.$$

□

Оператор $\mathcal{W}_2^1$ обладает нетривиальным ядром состоящим из потенциальных полей $\nabla\varphi^0$ и соленоидальных полей вида $\mathrm{rot}^3\varphi^2$, $\varphi^0,\varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. По его значениям можно надеяться восстановить только соленоидальные поля вида $\mathrm{rot}_3\varphi^1$, $\varphi^1\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 7. *Пусть базис $\{\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2\}$ на плоскости интегрирования задаётся формулами (8), $\varphi^0,\varphi^1,\varphi^2\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ — потенциалы полей $\Phi^0=\nabla\varphi^0$, $\Phi^1=\mathrm{rot}_3\varphi^1$ и $\Phi_2=\mathrm{rot}^3\varphi^2$ соответственно. Тогда имеют место равенства (для переменных $s,\xi(\alpha,\beta)$):*

$$\mathcal{W}_1^2\Phi^0 = 0, \qquad \mathcal{W}_1^2\Phi^1 = \cos\beta(\mathcal{R}\varphi^1), \qquad \mathcal{W}_1^2\Phi^2 = (\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\alpha}. \tag{27}$$

Доказательство. Результаты для полей Φ^0 и Φ^1 получаются с использованием формул (16) и (15), (19) соответственно. Для поля Φ^2 получаем

$$\mathcal{W}_1^2\Phi^2 = \int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xz}\cos\alpha\cos\beta + (\varphi^2)''_{yz}\sin\alpha\cos\beta + (\varphi^2)''_{xx}\sin\beta + (\varphi^2)''_{yy}\sin\beta\Big)dv\,du$$
$$\overset{(17)}{=} \cos\beta\int_{\mathbb{R}^2}(\varphi^2)''_{z\alpha}dv\,du + \sin\beta\Big(\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xx}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) \pm (\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha\sin\alpha\Big)dv\,du$$
$$+\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{yy}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) \pm (\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha\sin\alpha\Big)dv\,du\Big)$$
$$\overset{(21)}{=} \cos\beta(\mathcal{R}(\varphi^2)'_z)'_\alpha + \sin\beta\Big(\cos\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xx}\cos\alpha + (\varphi^2)''_{xy}\sin\alpha\Big)dv\,du$$
$$+\sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xx}\sin\alpha - (\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha\Big)dv\,du$$
$$+\sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha + (\varphi^2)''_{yy}\sin\alpha\Big)dv\,du - \cos\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u\Big((\varphi^2)''_{xy}\sin\alpha - (\varphi^2)''_{yy}\cos\alpha\Big)dv\,du\Big)$$
$$\overset{(21,15)}{=} \cos\beta(\mathcal{R}(\varphi^2)'_z)'_\alpha + \sin\beta\Big(\cos\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_x)'_\alpha + \sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u(\varphi^2)''_{xu}dv\,du + \sin\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_y)'_\alpha$$
$$-\cos\alpha\int_{\mathbb{R}^2} u(\varphi^2)''_{yu}dv\,du\Big) \overset{(14,19)}{=} (\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\alpha} - \sin\beta\big(\sin\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_x) + \cos\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_y)\big) \overset{(14)}{=} (\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\alpha}.$$

□

Из теоремы 7 следует, что оператор $\mathcal{W}_1^2$ обладает нетривиальным ядром состоящим из потенциальных векторных полей $\nabla\varphi^0$, $\varphi^0\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 8. *Пусть базис* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ *на плоскости интегрирования задаётся формулами (8),* $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ *— потенциалы полей* $\Phi^0 = \nabla\varphi^0$, $\Phi^1 = \mathrm{rot}_3\varphi^1$ *и* $\Phi_2 = \mathrm{rot}^3\varphi^2$ *соответственно. Тогда имеют место равенства (для переменных* $s, \xi(\alpha, \beta)$*):*

$$\mathcal{W}_2^2\Phi^0 = -\mathcal{R}\varphi^0, \qquad \mathcal{W}_2^2\Phi^1 = 0, \qquad \mathcal{W}_2^2\Phi^2 = -\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\beta}. \tag{28}$$

Доказательство. Результаты для полей Φ^0 и Φ^1 получаются с использованием формул (16), (19) и (15), (20) соответственно. Для поля Φ^2 получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_2^2\Phi^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{xz}\cos\alpha\cos\beta + (\varphi^2)''_{yz}\sin\alpha\cos\beta + (\varphi^2)''_{xx}\sin\beta + (\varphi^2)''_{yy}\sin\beta\Big)\,du\,dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{xx}\sin\beta + (\varphi^2)''_{xz}\cos\alpha\cos\beta\Big)\,du\,dv + \int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{yy}\sin\beta + (\varphi^2)''_{yz}\sin\alpha\cos\beta\Big)\,du\,dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{xx}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin\beta \pm (\varphi^2)''_{xy}\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta + (\varphi^2)''_{xz}\cos\alpha\cos\beta\Big)\,du\,dv \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} v\Big(\pm(\varphi^2)''_{yx}\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta + (\varphi^2)''_{yy}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin\beta + (\varphi^2)''_{yz}\sin\alpha\cos\beta\Big)\,du\,dv \\
&= \cos\alpha\int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{xx}\cos\alpha\sin\beta + (\varphi^2)''_{xy}\sin\alpha\sin\beta + (\varphi^2)''_{xz}\cos\beta\Big)\,du\,dv \\
&\quad + \sin\alpha\sin\beta\int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{xx}\sin\alpha - (\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha\Big)\,du\,dv \\
&\quad + \sin\alpha\int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{xy}\cos\alpha\sin\beta + (\varphi^2)''_{yy}\sin\alpha\sin\beta + (\varphi^2)''_{yz}\cos\beta\Big)\,du\,dv \\
&\quad - \cos\alpha\sin\beta\int_{\mathbb{R}^2} v\Big((\varphi^2)''_{yx}\sin\alpha - (\varphi^2)''_{yy}\cos\alpha\Big)\,du\,dv \\
&\overset{(22,15)}{=} -\cos\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_x)'_\beta + \sin\alpha\sin\beta\int_{\mathbb{R}^2} v(\varphi^2)''_{xu}\,du\,dv - \sin\alpha(\mathcal{R}(\varphi^2)'_y)'_\beta - \cos\alpha\sin\beta\int_{\mathbb{R}^2} v(\varphi^2)''_{yu}\,du\,dv \\
&\overset{(14,20)}{=} -\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^2)''_{s\beta}.
\end{aligned}$$

□

Оператор $\mathcal{W}_2^2$ обладает нетривиальным ядром состоящим из соленоидальных полей вида $\mathrm{rot}_3\varphi^1$, $\varphi^1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ПО ЗНАЧЕНИЯМ БЕЗВЕСОВЫХ И ВЕСОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РАДОНА

В случае, когда для векторного поля $\mathbf{w}(\mathrm{x})$ общего вида (10) известны значения всех безвесовых преобразований Радона $\mathcal{R}^k\mathbf{w}$, $k = 0, 1, 2$, для его восстановления можно воспользоваться формулами (7). Пусть базис $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ на плоскости интегрирования задаётся формулами (8). В этом случае, если известны значения только одного или двух из этих операторов, с использованием формул (11)–(13) можно восстановить только соответствующие части поля $\mathbf{w}(\mathrm{x})$. В разделе 3.2 установлены связи весовых преобразований частей векторного поля (10) и преобразования Радона от соответствующих потенциалов. Почти все весовые преобразования Радона (кроме оператора $\mathcal{W}_1^1$) обладают нетривиальными ядрами. Рассмотрим некоторые варианты наборов данных, достаточных для восстановления всего поля $\mathbf{w}(\mathrm{x})$. В частности, в постановках задач 1 и 2 рассматривается тот же набор данных, что и в статье [13]. Отметим, что в решениях всех рассмотренных задач каждая часть поля (10) восстанавливается независимо от других.

Задача 1. Восстановить поле $\mathbf{w}(\mathrm{x})$ по значениям $\mathcal{W}_1^1\mathbf{w}$, $\mathcal{R}^1\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^2\mathbf{w}$.

Решение: Компоненты полей $\Phi^1(\mathrm{x})$ и $\Phi^2(\mathrm{x})$ восстанавливаются по значениям $\mathcal{R}^1\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^2\mathbf{w}$ с использованием формул (12) и (13) соответственно. Для восстановления компонент поля $\Phi^0(\mathrm{x})$ воспользуемся связью

$$\mathcal{R}^0\Phi^0 \overset{(9)}{=} \big(\mathcal{R}\varphi^0\big)'_s \overset{(26)}{=} -(\mathcal{W}_1^1\Phi^0)'_s = \big(\mathcal{W}_1^1\Phi^1 + \mathcal{W}_1^1\Phi^2 - \mathcal{W}_1^1\mathbf{w}\big)'_s.$$

Имеем

$$(\mathcal{W}_1^1\Phi^1)'_s \overset{(26)}{=} (\mathcal{R}\varphi^1)''_{s\alpha} \overset{(9)}{=} \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^1\Phi^1)'_\alpha = \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^1\mathbf{w})'_\alpha,$$
$$(\mathcal{W}_1^1\Phi^2)'_s \overset{(26)}{=} -\cos\beta(\mathcal{R}\varphi^2)''_{ss} \overset{(9)}{=} -\frac{\cos\beta}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\Phi^2) = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w}).$$

Поэтому $\mathcal{R}^0\Phi^0 = \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^1\mathbf{w})'_\alpha - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w}) - (\mathcal{W}_1^1\mathbf{w})'_s$. Используя формулу (11), получаем формулу для покомпонентного восстановления поля $\Phi^0(\mathrm{x})$ по данным задачи

$$\Phi_j^0(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\xi_j\Big(\frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^1\mathbf{w})'_\alpha(s,\xi) - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})(s,\xi) - (\mathcal{W}_1^1\mathbf{w})'_s(s,\xi)\Big)''_{ss}\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}\,d\xi,$$

где $j = 1,2,3$.

Задача 2. Восстановить поле $\mathbf{w}(\mathrm{x})$ по значениям $\mathcal{W}_2^2\mathbf{w}$, $\mathcal{R}^1\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^2\mathbf{w}$.

Решение: Компоненты полей $\Phi^1(\mathrm{x})$ и $\Phi^2(\mathrm{x})$ восстанавливаются по значениям $\mathcal{R}^1\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^2\mathbf{w}$ с использованием формул (12) и (13) соответственно. Для восстановления компонент поля $\Phi^0(\mathrm{x})$ воспользуемся следующей связью:

$$\mathcal{R}^0\Phi^0 \overset{(9)}{=} \big(\mathcal{R}\varphi^0\big)'_s \overset{(28)}{=} -(\mathcal{W}_2^2\Phi^0)'_s = \big(\mathcal{W}_2^2\Phi^1 + \mathcal{W}_2^2\Phi^2 - \mathcal{W}_2^2\mathbf{w}\big)'_s,$$

где $\mathcal{W}_2^2\Phi^1 = 0$ и

$$(\mathcal{W}_2^2\Phi^2)'_s \overset{(28)}{=} -\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^2)'''_{ss\beta} \overset{(9)}{=} -\sin\beta\Big(\frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\Phi^2)\Big)'_\beta = -\sin\beta\Big(\frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})\Big)'_\beta.$$

Поэтому

$$\mathcal{R}^0\Phi^0 = -\sin\beta\Big(\frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})\Big)'_\beta - (\mathcal{W}_2^2\mathbf{w})'_s.$$

Используя формулу (11), получаем формулу для восстановления поля $\Phi^0(\mathrm{x})$:

$$\Phi_j^0(\mathrm{x}) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\xi_j\Big(\sin\beta\Big(\frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})(s,\xi)\Big)'_\beta + (\mathcal{W}_2^2\mathbf{w})'_s(s,\xi)\Big)''_{ss}\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}\,d\xi, \qquad j = 1,2,3.$$

Отметим, что если даны только значения $\mathcal{W}_2^2\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^2\mathbf{w}$, то предложенный подход даёт возможность восстановить потенциальную часть $\Phi^0(\mathrm{x})$ искомого векторного поля $\mathbf{w}$.

Задача 3. Восстановить поле $\mathbf{w}(\mathrm{x})$ по значениям $\mathcal{W}_1^2\mathbf{w}$, $\mathcal{W}_2^2\mathbf{w}$, $\mathcal{R}^2\mathbf{w}$.

Решение. Компоненты $\Phi^2(\mathrm{x})$ восстанавливаются по значениям $\mathcal{R}^2\mathbf{w}$ с использованием формулы (13). Для восстановления компонент полей $\Phi^0(\mathrm{x})$ и $\Phi^1(\mathrm{x})$ воспользуемся следующими равенствами:

$$\mathcal{R}^0\Phi^0 \overset{(9)}{=} \big(\mathcal{R}\varphi^0\big)'_s \overset{(28)}{=} -(\mathcal{W}_2^2\Phi^0)'_s = \big(\mathcal{W}_2^2\Phi^1 + \mathcal{W}_2^2\Phi^2 - \mathcal{W}_2^2\mathbf{w}\big)'_s,$$
$$\mathcal{R}^1\Phi^1 \overset{(9)}{=} \sin\beta\,\big(\mathcal{R}\varphi^1\big)'_s \overset{(27)}{=} \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\mathcal{W}_1^2\Phi^1)'_s = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\big(\mathcal{W}_1^2\mathbf{w} - \mathcal{W}_1^2\Phi^0 - \mathcal{W}_1^2\Phi^2\big)'_s,$$

где $\mathcal{W}_2^2\Phi^1 = \mathcal{W}_1^2\Phi^0 = 0$ и

$$(\mathcal{W}_1^2\Phi^2)'_s \overset{(27)}{=} (\mathcal{R}\varphi^2)'''_{ss\alpha} \overset{(9)}{=} \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\Phi^2)'_\alpha = \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})'_\alpha,$$
$$(\mathcal{W}_2^2\Phi^2)'_s \overset{(28)}{=} -\sin\beta(\mathcal{R}\varphi^2)'''_{ss\beta} \overset{(9)}{=} -\sin\beta\Big(\frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\Phi^2)\Big)'_\beta = -\sin\beta\Big(\frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})\Big)'_\beta.$$

Поэтому

$$\mathcal{R}^0\Phi^0 = -\sin\beta\Big(\frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})\Big)'_\beta - (\mathcal{W}_2^2\mathbf{w})'_s, \qquad \mathcal{R}^1\Phi^1 = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\mathcal{W}_1^2\mathbf{w})'_s - \frac{1}{\cos\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})'_\alpha.$$

Используя формулы (11) и (12), получаем формулы для восстановления полей $\Phi^0(\mathrm{x})$ и $\Phi^1(\mathrm{x})$

$$\Phi_j^0(\mathrm{x}) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}\xi_j\Big(\sin\beta\Big(\frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})\Big)'_\beta(s,\xi) + (\mathcal{W}_2^2\mathbf{w})'_s(s,\xi)\Big)''_{ss}\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}d\xi, \qquad j=1,2,3,$$
$$\Phi_j^1(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}e_j^1\Big(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\mathcal{W}_1^2\mathbf{w})'_s(s,\xi) - \frac{1}{\cos\beta}(\mathcal{R}^2\mathbf{w})'_\alpha(s,\xi)\Big)''_{ss}\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}d\xi, \qquad j=1,2,3.$$

Необходимо отметить, что предложенный подход даёт возможность восстановить соленоидальную часть $\Phi^1(\mathrm{x})$ поля $\mathbf{w}$ в случае, когда даны только значения $\mathcal{W}_1^2\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^2\mathbf{w}$.

Замечание. Набор данных $\mathcal{W}_1^1\mathbf{w}$, $\mathcal{W}_2^1\mathbf{w}$, $\mathcal{R}^1\mathbf{w}$ недостаточен, так как по значениям каждого из операторов $\mathcal{W}_2^1\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^1\mathbf{w}$ можно надеяться восстановить только поле Φ^1.

В первых трёх задачах данными выступают только операторы, которые определяются с использованием скалярного произведения искомого векторного поля и вектора параллельного плоскости интегрирования. В последней задаче в качестве исходных данных используются операторы, в определении которых фигурирует скалярное произведение вектора нормали к плоскости интегрирования и векторного поля, подлежащего восстановлению.

Задача 4. Восстановить поле $\mathbf{w}(\mathrm{x})$ по значениям $\mathcal{W}_1^0\mathbf{w}$, $\mathcal{W}_2^0\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^0\mathbf{w}$.

Решение: Компоненты $\Phi^0(\mathrm{x})$ восстанавливаются по значениям $\mathcal{R}^0\mathbf{w}$ с использованием формулы (11). Для восстановления компонент полей $\Phi^1(\mathrm{x})$ и $\Phi^2(\mathrm{x})$ воспользуемся следующими равенствами:

$$\mathcal{R}^1\Phi^1 \overset{(9)}{=} \sin\beta\,\big(\mathcal{R}\varphi^1\big)'_s \overset{(23)}{=} (\mathcal{W}_1^0\Phi^1)'_s = \big(\mathcal{W}_1^0\mathbf{w} - \mathcal{W}_1^0\Phi^0 - \mathcal{W}_1^0\Phi^2\big)'_s,$$
$$\mathcal{R}^2\Phi^2 \overset{(9)}{=} \sin\beta\,\big(\mathcal{R}\varphi^2\big)''_{ss} \overset{(25)}{=} (\mathcal{W}_2^0\Phi^2)'_s = \big(\mathcal{W}_2^0\mathbf{w} - \mathcal{W}_2^0\Phi^0 - \mathcal{W}_2^0\Phi^1\big)'_s,$$

где $\mathcal{W}_1^0\Phi^2 = \mathcal{W}_2^0\Phi^1 = 0$ и

$$(\mathcal{W}_1^0\Phi^0)'_s \overset{(23)}{=} \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}\varphi^0)''_{s\alpha} \overset{(9)}{=} \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^0\Phi^0)'_\alpha = \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^0\mathbf{w})'_\alpha,$$
$$(\mathcal{W}_2^0\Phi^0)'_s \overset{(25)}{=} -(\mathcal{R}\varphi^0)''_{s\beta} \overset{(9)}{=} -(\mathcal{R}^0\Phi^0)'_\beta = -(\mathcal{R}^0\mathbf{w})'_\beta.$$

Поэтому

$$\mathcal{R}^1\Phi^1 = (\mathcal{W}_1^0\mathbf{w})'_s - \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^0\mathbf{w})'_\alpha, \qquad \mathcal{R}^2\Phi^2 = (\mathcal{W}_2^0\mathbf{w})'_s + (\mathcal{R}^0\mathbf{w})'_\beta.$$

Используя формулы (12) и (13), получаем формулы для покомпонентного восстановления полей $\Phi^1(\mathrm{x})$ и $\Phi^2(\mathrm{x})$

$$\Phi_j^1(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}e_j^1\Big((\mathcal{W}_1^0\mathbf{w})'_s(s,\xi) - \frac{1}{\sin\beta}(\mathcal{R}^0\mathbf{w})'_\alpha(s,\xi)\Big)''_{ss}\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}d\xi, \qquad j=1,2,3,$$
$$\Phi_j^2(\mathrm{x}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{S}^2}e_j^2\Big((\mathcal{W}_2^0\mathbf{w})'_s(s,\xi) + (\mathcal{R}^0\mathbf{w})'_\beta(s,\xi)\Big)''_{ss}\Big|_{s=(\mathrm{x}\cdot\xi)}d\xi, \qquad j=1,2,3.$$

Предложенный подход позволяет восстанавливать соленоидальную часть вида $\Phi^1(x)$ по значениям $\mathcal{W}_1^0\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^0\mathbf{w}$ и соленоидальную часть вида $\Phi^2(x)$ по значениям $\mathcal{W}_2^0\mathbf{w}$ и $\mathcal{R}^0\mathbf{w}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована задача векторной томографии по восстановлению трёхмерного векторного поля по значениям нормального, продольных и весовых преобразований Радона. С использованием полученного в работе детального разложения векторных полей установлены связи интегральных операторов, действующих на векторные поля, и преобразования Радона, действующего на функции. А именно, описаны ядра и образы нормального, продольных и весовых преобразований Радона, действующих на трёхмерные векторные поля. Рассмотрены некоторые варианты постановок задач томографии по восстановлению векторных полей и получены формулы обращения для их решения. Отметим, что предлагаемые подходы решения задачи 3D векторной томографии по известным безвесовым и весовым преобразованиям Радона векторного поля позволяют восстанавливать потенциальную и соленоидальную части поля независимо друг от друга, что выгодно отличает разработанные методы от предложенного в работе [13]. Установленные в работе взаимосвязи между весовыми и безвесовыми преобразованиями Радона векторных полей и преобразованием Радона скалярных полей могут быть использованы для построения новых конструктивных методов и алгоритмов решения задач векторной томографии.

Авторы благодарят Институт математических наук им. Исаака Ньютона (Кембридж, Великобритания) за поддержку и гостеприимство во время программы “Rich and Nonlinear Tomography — a multidisciplinary approach”, в течение которой проводилась работа над этой статьёй. Программа поддержана грантом EPSRC номер EP/R014604/1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ludwig D.* The Radon transform on Euclidean space // Commun. Pure Appl. Math. 1966. V. 19. P. 49–81; DOI: 10.1002/cpa.3160190105
2. *Helgason S.* The Radon Transform. Progress in Mathematics, V. 5. N. Y.: Springer, 1999.
3. *Louis A. K.* Uncertainty, ghosts, and resolution in Radon problems // The Radon Transform. 2019. P. 169–188; DOI: 10.1515/9783110560855-008
4. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
5. *Шарафутдинов В. А.* Интегральная геометрия тензорных полей. Новосибирск: Наука, 1993.
6. *Sparr G., Strahlen K., Lindstrem K., Persson H. W.* Doppler tomography for vector fields // Inverse Probl. 1995. V. 11, N 5. P. 1051–1061; DOI: 10.1088/0266-5611/11/5/009
7. *Schuster T.* 20 years of imaging in vector field tomography: a review // Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Dariation Therapy (IMRT). 2008. P. 389–424.
8. *Полякова А. П.* Восстановление векторного поля в шаре по его нормальному преобразованию Радона // Вестн. НГУ. Сер. мат. мех. информ. 2013. Т. 13, № 4. С. 119–142.
9. *Светов И. Е.* Метод приближённого обращения для операторов преобразования Радона функций и нормального преобразования Радона векторных и симметричных 2-тензорных полей в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 1073–1087; DOI: 10.33048/semi.2020.17.081
10. *Prince J. L.* Tomographic reconstruction of 3-d vector fields using inner product probes // IEEE Trans. Image Process. 1995. V. 3, N 2. P. 216–219; DOI: 10.1109/83.277903
11. *Kunyansky L.* A mathematical model and inversion procedure for magneto-acousto-electric tomography // Inverse Probl. 2012. V. 28, N 3. Article 035002; DOI: 10.1088/0266-5611/28/3/035002
12. *Ammari H., Grasland-Mongrain P., Millien P., Seppecher L, Seo J.-K.* A mathematical and numerical framework for ultrasonically-induced Lorentz force electrical impedance tomography // J. Math. Pures Appl. 2015. V. 103, N 6. P. 1390–1409; DOI: 10.1016/j.matpur.2014.11.003

13. *Kunyansky L., McDugald E., Shearer B.* Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography // Inverse Problems. 2023. V. 39, N 6. Article 065014; DOI: 10.1088/1361-6420/acd07a

14. *Derevtsov E. Yu., Svetov I. E.* Tomography of tensor fields in the plain // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 2. P. 24–68.

15. *Louis A. K.* Inversion formulae for ray transforms in vector and tensor tomography // Inverse Probl. 2022. V. 38, N 6. Article 065008; DOI: 10.1088/1361-6420/ac6379

16. *Borchers W., Sohr H.* On the equations $\operatorname{rot} v = g$ and $\operatorname{div} u = f$ with zero boundary conditions // Hokkaido Math. J. 1990. V. 19. P. 67–87; DOI: 10.14492/HOKMJ/1381517172

17. *Backus G. E.* Poloidal and toroidal fields in geomagnetic field modeling // Rev. Geophys. 1986. V. 24, N 1. P. 75–109; DOI: 10.1029/rg024i001p00075

18. *Казанцев С. Г., Кардаков В. Б.* Полоидально-тороидальное разложение соленоидальных векторных полей в шаре // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 3. С. 74–95; DOI: 10.33048/sibjim.2019.22.307

19. *Светов И. Е., Полякова А. П.* Разложение симметричных тензорных полей в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. журн. индустр. матем. 2023. Т. 26, № 1. С. 161–178; DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.115

20. *Weyl H.* The method of ortogonal projection in potential theory // Duke Math. J. 1940. V. 7, N 1. P. 411–444; DOI: 10.1215/S0012-7094-40-00725-6

21. *Svetov I. E., Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.* A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium // Math. Comput. Simul. 2014. V. 97. P. 207–223; DOI: 10.1016/j.matcom.2013.10.002

UDC 517.44

RECONSTRUCTION OF THREE-DIMENSIONAL VECTOR FIELDS BASED ON VALUES OF NORMAL, LONGITUDINAL, AND WEIGHTED RADON TRANSFORMS

© 2023 **I. E. Svetov**[a], **A. P. Polyakova**[b]

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]apolyakova@math.nsc.ru

Received 19.05.2023, revised 13.09.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. The paper considers the vector tomography problem of reconstructing a three-dimensional vector field based on the values of unweighted (normal and longitudinal) and weighted Radon transforms. Using the detailed decomposition of vector fields obtained in the paper, connections are established between the unweighted and weighted Radon transforms acting on vector fields and the Radon transform acting on functions. In particular, the kernels of tomographic integral operators acting on vector fields are described. Some statements of tomography problems for the reconstruction of vector fields are considered, and inversion formulas for their solution are obtained.

Keywords: vector tomography, decomposition of vector field, normal Radon transform, longitudinal Radon transform, weighted Radon transform, inversion formula.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.409

REFERENCES

1. D. Ludwig, "The Radon transform on Euclidean space," Commun. Pure Appl. Math. **19**, 49–81 (1966). https://doi.org/10.1002/cpa.3160190105
2. S. Helgason, *The Radon Transform. Vol. 5 of Progress in Mathematics* (Springer, New York, 1999).
3. A. K. Louis, "Uncertainty, ghosts, and resolution in Radon problems," in *The Radon Transform: The First 100 Years and Beyond* (Berlin—Boston: De Gruyter, 2019), pp. 169–188. https://doi.org/10.1515/9783110560855-008
4. F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography* (SIAM, Philadelphia, 1986; Mir, Moscow, 1990).
5. V. A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields* (Nauka, Novosibirsk, 1993; De Gruyter, Berlin, 1994). https://doi.org/10.1515/9783110900095
6. G. Sparr, K. Strahlen, K. Lindstrem, and H. W. Persson, "Doppler tomography for vector fields," Inverse Probl. **11** (5), 1051–1061 (1995). https://doi.org/10.1088/0266-5611/11/5/009
7. T. Schuster, "20 years of imaging in vector field tomography: A review," in *Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Radiation Therapy (IMRT)* (2008), pp. 389–424.
8. A. P. Polyakova, "Reconstruction of a vector field in a ball from its normal Radon transform," Vestn. NGU. Ser. Mat. Mekh. Inf. **13** (4), 119–142 (2013) [J. Math. Sci. **205** (3), 418–439 (2015) https://doi.org/10.1007/s10958-015-2256-1].
9. I. E. Svetov, "Approximate inversion method for the Radon transform operators of functions and the normal Radon transform of vector and symmetric 2-tensor fields in $\mathbb{R}^3$," Sib. Elektron. Mat. Izv. **17**, 1073–1087 (2020) [in Russian]. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.081

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 842–858.

10. J. L. Prince, "Tomographic reconstruction of 3-d vector fields using inner product probes," IEEE Trans. Image Process. **3** (2), 216–219 (1995). https://doi.org/10.1109/83.277903

11. L. Kunyansky, "A mathematical model and inversion procedure for magneto-acousto-electric tomography," Inverse Probl. **28** (3), 035002 (2012). https://doi.org/10.1088/0266-5611/28/3/035002

12. H. Ammari, P. Grasland-Mongrain, P. Millien, L. Seppecher, and J.-K. Seo, "A mathematical and numerical framework for ultrasonically-induced Lorentz force electrical impedance tomography," J. Math. Pures Appl. **103** (6), 1390–1409 (2015). https://doi.org/10.1016/j.matpur.2014.11.003

13. L. Kunyansky, E. McDugald, and B. Shearer, "Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography," Inverse Probl. **39** (6), 065014 (2023). https://doi.org/10.1088/1361-6420/acd07a

14. E. Yu. Derevtsov and I. E. Svetov, "Tomography of tensor fields in the plain," Eurasian J. Math. Comput. Appl. **3** (2), 24–68 (2015).

15. A. K. Louis, "Inversion formulae for ray transforms in vector and tensor tomography," Inverse Probl. **38** (6), 065008 (2022). https://doi.org/10.1088/1361-6420/ac6379

16. W. Borchers and H. Sohr, "On the equations rot $v = g$ and $\operatorname{div} u = f$ with zero boundary conditions," Hokkaido Math. J. **19**, 67–87 (1990). https://doi.org/10.14492/HOKMJ/1381517172

17. G. E. Backus, "Poloidal and toroidal fields in geomagnetic field modeling," Rev. Geophys. **24** (1), 75–109 (1986). https://doi.org/10.1029/rg024i001p00075

18. S. G. Kazantsev and V. B. Kardakov, "Poloidal-toroidal decomposition of solenoidal vector fields in the ball," Sib. Zh. Ind. Mat. **22** (3), 74–95 (2019) https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.307 [J. Appl. Ind. Math. **13** (3), 480–499 (2019) https://doi.org/10.1134/S1990478919030098].

19. I. E. Svetov and A. P. Polyakova, "Decomposition of symmetric tensor fields in $\mathbb{R}^3$," Sib. Zh. Ind. Mat. **26** (1), 161–178 (2023) https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2023.26.115 [J. Appl. Ind. Math. **17** (1), 199–212 (2023) https://doi.org/10.1134/S1990478923010222].

20. H. Weyl, "The method of orthogonal projection in potential theory," Duke Math. J. **7** (1), 411–444 (1940). https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00725-6

21. I. E. Svetov, E. Yu. Derevtsov, Yu. S. Volkov, and T. Schuster, "A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium," Math. Comput. Simul. **97**, 207–223 (2014). https://doi.org/10.1016/j.matcom.2013.10.002

УДК 517.948

О ПОГРЕШНОСТИ В ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЦЫ ЗАЩИТНОГО СЛОЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2023 В. П. Танана[a], Б. А. Марков[b]

Южно-Уральский государственный университет,
просп. Ленина, 78, г. Челябинск 454080, Россия

E-mails: [a]tananavp@susu.ru, [b]markovba@susu.ru

Поступила в редакцию 12.09.2023 г.; после доработки 28.10.2023 г.;
принята к публикации 16.11.2023 г.

В статье изучается задача об определении погрешности, вносимой неточностью определения толщины защитного теплостойкого покрытия для композиционных материалов. Математическая задача представляет собой уравнение теплопроводности на неоднородной полупрямой. Температура на внешней стороне полупрямой ($x = 0$) считается неизвестной на бесконечном интервале времени. Для её отыскания измеряется температура на разделе сред в точке $x = x_0$. В работе проведено аналитическое исследование прямой задачи, которое позволило дать строгую постановку обратной задачи и определить функциональные пространства, в которых естественно решать обратную задачу. Основная трудность, на решение которой направлена статья, заключается в получении оценки погрешности приближенного решения. Для оценки модуля условной корректности используется метод проекционной регуляризации, который позволяет получить точные по порядку оценки.

Ключевые слова: оценка погрешности, модуль условной корректности, преобразование Фурье, некорректная задача.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.410

ВВЕДЕНИЕ

В современной технике встречаются конструкции, узлы которых подвержены тепловому воздействию. В результате этого могут меняться свойства материалов.

Чтобы защитить компоненты от избыточного теплового воздействия, необходимо контролировать температуру поверхности. Но, как правило, прямое измерение температуры невозможно. Покрытие на некоторое время защитит устройство, однако делает невозможным непосредственное измерение температуры на поверхности. Устройство измеряет температуру под защитным слоем, то есть более низкую, чем на поверхности слоя. Следовательно, необходимо решать обратную граничную задачу, позволяющую по данным измерения найти истинное значение температуры. Практическая значимость таких задач описана в работах [1–9], а постановка и решение — в работах [9–12].

Покрытие может разрушаться под действием нагрева и других факторов. Соответственно меняется толщина защитного слоя и термическое воздействие источника тепла на материал.

В настоящей работе мы предлагаем рассмотреть нагрев композитной среды с известной подвижной границей. При этом мы будем считать, что процесс разрушения защитного слоя не сопровождается выделением тепла, идущим на его разрушение, а просто слой меняет свою толщину, не внося никаких иных изменений в уравнение теплопроводности. Более того, разрушившись, этот слой исчезает из рассмотрения. Наша задача состоит в том, чтобы, зная свойства материала и свойства среды, найти допустимую погрешность в определении толщины защитного слоя.

В настоящей работе нами рассмотрено точное решение прямой задачи, сформулирована обратная задача, построена оценка порядка точности.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим композитный материал, который подвергают нагреву. $x \in [0;+\infty)$ — пространственная координата, $t \in [0;+\infty)$ — временная координата. Разобьём область на две части: в первой, $x \in [0;x_0]$, располагается защитный слой. Его температуропроводность постоянна и равна $k_1(x,t) = a_1^2$. Во второй области, $x \in [x_0;+\infty)$, располагается материал, который не разрушается, имеет температуру $u_2(x,t)$, и коэффициент температуропроводности среды $k_2(x,t) = a_2^2$. Здесь a_1, a_2 – некоторые вещественные числа.

Для дальнейшего введём функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & x \in [0;x_0], \quad t \in [0;+\infty), \\ u_2(x,t), & x \in [x_0;+\infty), \quad t \in [0;+\infty), \end{cases}$$

операторы Δ:

$$\Delta u(x,t) = \begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}, & x \in (0;x_0), \quad t \in (0;+\infty), \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}, & x \in (x_0;+\infty), \quad t \in (0;+\infty) \end{cases}$$

и D:

$$Du(x,t) = \begin{cases} a_1 \dfrac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}, & x \in (0;x_0), \quad t \in (0;+\infty), \\ a_2 \dfrac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}, & x \in (x_0;+\infty), \quad t \in (0;+\infty). \end{cases}$$

С учётом предложенных обозначений задача теплопроводности будет иметь вид:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t), \quad x \in (0;+\infty), \quad t \in (0;+\infty), \\ u_1(0,t) = q(t), \quad t \in (0;+\infty), \quad u_2(+\infty,t) = 0, \quad t \in (0;+\infty), \\ u(x,0) = 0, \quad x \in [0;+\infty). \end{gathered} \tag{1}$$

Определение. Решением задачи (1) будем называть такую функцию $u(x,t)$, что:

1. $u(x,t) \in C(x \in [0;+\infty), t \in [0;+\infty))$,
2. $Du(x,t) \in C(x \in (0;+\infty), t \in (0;+\infty))$,
3. $u(x,t)$ удовлетворяет всем соотношениям (1),
4. $u(x,t)$ непрерывно примыкает ко всем граничным и начальным условиям.

2. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Покажем, что формальное решение задачи (1) может быть представлено в виде интегральных соотношений.

Лемма 1. *Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (1). Тогда*

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= \int\limits_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}} e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} q(\tau)d\tau, \\ u_2(x,t) &= \int\limits_0^t \frac{x+l_1}{\sqrt{4\pi a_2^2(t-\tau)^3}} e^{-\frac{(x+l_1)^2}{4a_2^2(t-\tau)}} q(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Доказательство может быть проведено непосредственным вычислением. Приведём только сами значения производных, так как несложно видеть, что их подстановка в основное уравнение (1) даст истинное равенство.

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{3}{2}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} \frac{xq(\tau)d\tau}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^5}} + \frac{1}{4a_1^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} \frac{x^3q(\tau)d\tau}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^7}},$$

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = \int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} \frac{q(\tau)d\tau}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}} - \frac{1}{2a_1^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} \frac{x^2q(\tau)d\tau}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^5}},$$

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{3}{2a_1^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} \frac{xq(\tau)d\tau}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^5}} + \frac{1}{4a_1^4}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} \frac{x^3q(\tau)d\tau}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^7}}.$$

Несложно видеть, что эти выражения соответствуют уравнению (1). Сходным образом доказательство проводится и для случая $u_2(x,t)$. □

Лемма 2. *Пусть*

$$u_1(0,t) \equiv q(t) = \lim_{x\to 0+0} \int\limits_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}} e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} q(\tau)d\tau.$$

Тогда выполнены все краевые условия и условия сопряжения для (2).

Доказательство. То, что $u_2(+\infty,t) = 0$, следует из [18].
Покажем выполнение прочих условий: $u_1(x_0,t) = u_2(x_0,t)\ \forall t > 0$.

$$\int\limits_0^t \frac{x_0q(\tau)}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}} e^{-\frac{x_0^2}{4a_1^2(t-\tau)}} d\tau = \int\limits_0^t \frac{(x_0+l_1)q(\tau)}{\sqrt{4\pi a_2^2(t-\tau)^3}} e^{-\frac{(x_0+l_1)^2}{4a_2^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Условия сопряжения выполнены, если

$$\frac{x_0}{a_1} = \frac{x_0+l_1}{a_2},$$

отсюда следует, что $l_1 = \dfrac{a_2-a_1}{a_1}x_0$.

При тех же условиях непрерывен поток тепла на разделах сред $\forall t > 0$ $a_1\dfrac{\partial u_1(x_0,t)}{\partial x} =$

$a_2\dfrac{\partial u_2(x_0,t)}{\partial x}$. Действительно, соотношения

$$a_1\int\limits_0^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x_0^2}{4a_1^2(t-\tau)}}d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{x^2q(\tau)}{\sqrt{4\pi a_1^4(t-\tau)^5}}e^{-\frac{x_0^2}{4a_1^2(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=a_2\int\limits_0^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{4\pi a_2^2(t-\tau)^3}}e^{-\frac{(x_0+l_1)^2}{4a_2^2(t-\tau)}}d\tau-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{(x+l_1)^2q(\tau)}{\sqrt{4\pi a_2^4(t-\tau)^5}}e^{-\frac{(x_0+l_1)^2}{4a_2^2(t-\tau)}}d\tau$$

верны при этих же условиях. □

Таким образом, формально построенное решение (2) удовлетворяет уравнениям и условиям (1).

Выясним теперь некоторые свойства этого решения, которые будем использовать дальше.

Лемма 3. *Пусть* $q(t)\in C^1(t>0)$ *и* $\exists M_0>0\ \sup\limits_{t\in[0;+\infty)}(|q(t)|,|q'(t)|)<M_0$. *Тогда интегралы* $J(x,t)$, $J_1(x,t)$, $J_2(x,t)$, *где*

$$J(x,t)=\int\limits_0^t \frac{xq(\tau)}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}}d\tau,\quad J_1(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t \frac{xq(\tau)}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}}d\tau,$$

$$J_2(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^t \frac{xq(\tau)}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}}d\tau,$$

равномерно ограничены $\forall x\in[0;x_0]$, $\forall t\geqslant 0$.

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Преобразуем $J(x,t)$ следующим образом:

$$J(x,t)=-\int\limits_0^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}}d\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t-\tau)}}\right).$$

Введём переменную $\xi=\dfrac{x}{2a_1\sqrt{t-\tau}}$ и оцениваем интеграл сверху:

$$\int\limits_0^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}}d\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t-\tau}}\right)\leqslant\frac{M_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\xi^2}d\xi\leqslant M_0.$$

Равномерная сходимость интегралов $J_1(x,t)$ и $J_2(x,t)$ $\forall x\in[0;x_0]$, $\forall t\geqslant 0$ может быть доказана сходным способом. Действительно, сделав замену переменной $\xi=\dfrac{x}{2a_1\sqrt{t-\tau}}$ и продифференцировав по x, а затем вернувшись к исходным значениям, получим интеграл вида

$$J_1(x,t)=\int\limits_0^t \frac{q'(\tau)}{\sqrt{\pi a_1^2(t-\tau)}}e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}}d\tau,$$

который равномерно сходится $\forall x\in[0;x_0]$, $\forall t\geqslant 0$.

Продифференцировав его ещё раз, получим выражение вида $J(x,t)$, где вместо функции $q(\tau)$ под интегралом будет расположена $q'(\tau)$. Повторив доказательство для сходимости интеграла $J(x,t)$, получим утверждение леммы. □

Таким образом, справедлива

Лемма 4. *Решение задачи (1) существует и определяется формулой (2).*

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1)

Теорема 1. *Пусть* $q(t) \in C^1(t>0)$ *и* $\exists M_0 > 0$, *что* $\sup\limits_{t\geqslant 0}(|q(t)|, |q'(t)|) < M_0$. *Тогда решение задачи (1) существует, единственно и определяется формулой (2).*

Доказательство. Существование решения доказано в лемме 4, там же приведён вид решения, т. е. решение задачи существует.

Предположим, что решение неединственно. Построим разность решений $z(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, $x \in [0;+\infty)$, $t \in [0;+\infty)$, которая удовлетворяет задаче:

$$\begin{gathered}\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = \Delta z(x,t), \quad x \in (0;+\infty), \quad t \in (0;+\infty),\\ z_1(0,t) = q(t), \quad t \in (0;+\infty), \quad z_2(+\infty,t) = 0, \quad t \in (0;+\infty),\\ z(x,0) = 0, \quad x \in [0;+\infty).\end{gathered}$$

Решение этого уравнения может быть построено, оно ограничено на $\forall x \in [0;+\infty)$, $\forall t \in [0;+\infty)$, и, следовательно, существует его преобразование Лапласа по t: $\tilde{z}(x,p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} z(x,t)dt$. В результате получим задачу:

$$\begin{gathered}p\tilde{z}(x,p) = \Delta\hat{z}(x,p), \quad x \in (0;+\infty), \quad p \in \mathbb{Z},\\ \tilde{z}_1(0,p) = 0, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad \hat{z}(+\infty,p) = 0, \quad p \in \mathbb{Z}.\end{gathered}$$

Несложно видеть, что решение этого уравнения единственно и равно нулю. В силу однозначной обратимости преобразования Лапласа получаем, что, раз $\tilde{z}(x,p) = 0$, то и $z(x,t) = 0$ $\forall x \in [0;+\infty)$, $t \in [0;+\infty)$. □

4. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Приступим теперь к решению обратной задачи. Для этого будем считать, что нам неизвестно значение функции $u_1(0,t) = q(t)$, но известно значение $u_2(x_0,t) = f(t)$, то есть значение решения на разделе сред. Мы поступим следующим образом: решим задачу для $u_2(x,t)$ в области $x \in [x_0;+\infty)$, $t \in [0;+\infty)$, найдём функции $u_2(x_0,t)$ и $\dfrac{\partial u_2(x_0,t)}{\partial x}$, а затем, пользуясь условиями согласования, получим краевую задачу для $u_1(x,t)$ в области $x \in [0;x_0]$, $t \in [0;+\infty)$. Для вновь полученной задачи применим соответствующий метод решения, который рассмотрим в следующих разделах.

Итак, сначала рассмотрим задачу для $u_2(x,t)$:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} = a_2^2\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (x_0;+\infty), \quad t \in (0;+\infty),\\ u_2(x_0,t) = f(t), \quad t \in (0;+\infty), \quad u_2(+\infty,t) = 0, \quad t \in (0;+\infty),\\ u_2(x,0) = 0, \quad x \in [0;+\infty).\end{gathered} \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема, доказанная в [18]:

Теорема 2. *Решение задачи (3) существует, единственно и может быть записано в виде:*

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t \frac{(x-x_0)f(\tau)}{\sqrt{4\pi a_2^2(t-\tau)^3}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Далее нам понадобится производная $\dfrac{\partial u_2(x_0,t)}{\partial x}$. Поэтому определим её по приближенным данным $f_\delta(t)$, δ.

Из системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=a_2^2\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2},\quad x\in(x_0;+\infty),\quad t\in(0;\infty),\\ u_2(x,0)=0,\quad x\in[x_0;+\infty),\quad u_2(+\infty,t)=0,\quad t>0,\\ u_2(x_0,t)=f(t),\quad t\geqslant 0\end{gathered}\tag{4}$$

найдём функцию $u_2(x,t)$ на $x_0\leqslant x$, $t\geqslant 0$:

$$u_2(x,t)=\int\limits_0^t \frac{x-x_0}{\sqrt{4\pi a_2^2(t-\tau)^3}}f(\tau)\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Из леммы 3 следует, что функция $u_2(x,t)\in C^{1,2}((0,\infty)\times(x_0,+\infty))$. При $f(t)=f_0(t)$ существует решение $u_2(x,t)$ задачи (4).

Предположим, что точное значения функции $f_0(t)$ не известно, а вместо него даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t)\in C[0,\infty)$, $f_\delta(0)=0$ и уровень погрешности $\delta>0$ такие, что

$$\sup_{t\in[0,\infty)}|f_\delta(t)-f_0(t)|\leqslant\delta.\tag{5}$$

Поэтому, наряду с задачей (4) с условием $u_2(x_0,t)=f(t)$, рассмотрим задачу (4) с другим условием

$$u_2(x_0,t)=f_\delta(t),\ t\geqslant 0.\tag{6}$$

Решение задачи (4), (6) обозначим через $u_2(x_0,t,\delta)$.

Лемма 5. *Пусть* $\phi(x,t)=u_2(x,t)-u_2(x,t,\delta)$. *Тогда для любых* $x\in(x_0;+\infty)$, $t\geqslant 0$ *следует, что* $|\phi(t,x)|\leqslant\delta$.

Доказательство. Функция $\phi(t,x)$ является решением задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial\phi_2(x,t)}{\partial t}=a_2^2\frac{\partial^2\phi_2(x,t)}{\partial x^2},\quad x\in(x_0;+\infty),\quad t\in(0;+\infty),\\ \phi(x,0)=0,\quad x\in[x_0;+\infty),\quad \phi(x_0,t)=f_\delta(t)-f_0(t),\quad t\geqslant 0,\quad \phi(t,+\infty)=0,\quad t\geqslant 0.\end{gathered}\tag{7}$$

Пусть $\overline{\Omega}=[x_0;+\infty)\times[0,\infty)$ множество, на котором определена задача (7), а $\partial\overline{\Omega}=\Gamma_1\bigcup\Gamma_2$, где $\Gamma_1=\{(x,t):x_0\leqslant x\leqslant+\infty\},\Gamma_2=\{(x_0,t):0\leqslant t<\infty\}$. Тогда $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}|\overline{\phi}(x,t)|\leqslant\sup\limits_{(x,t)\in\partial\overline{\Omega}}|\overline{\phi}(x,t)|$.

Так как $\sup\limits_{(x,t)\in\Gamma_1}|\overline{\phi}(x,t)|=0$, а $\sup\limits_{(x,t)\in\Gamma_2}|\overline{\phi}(x,t)|\leqslant\delta$, то по принципу максимума [18] $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}|\overline{\phi}(x,t)|\leqslant\delta$. □

Производную $\dfrac{\partial u_2(x_0,t)}{\partial x}$ обозначим через $g_0(t)$,

$$\frac{\partial u_2(x_0,t)}{\partial x} = \int\limits_0^t \frac{f_0(\tau)}{\sqrt{4\pi a_2^2(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right) d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \frac{(x-x_0)f_0(\tau)}{\sqrt{16\pi a_2^6(t-\tau)^5}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4a_2^2(t-\tau)}\right) d\tau \equiv g_0(t).$$

Требуется, используя данные $(u_2(x_0,t,\delta),\delta)$, определить функцию $g_\delta(t)$ и число $\sigma(\delta)$ такие, что $\sup\limits_{t\in[0;+\infty)} |g_\delta(t) - g_0(t)| < \sigma(\delta)$.

Так как задача вычисления производной в пространстве $C[a;b]$ некорректна (см. [13,14]), то построим регуляризующее семейство операторов $\{R_\nu : \nu > 0\}$, которое для любого $\nu > 0$ пространство $C[0;+\infty)$ отображает в $C[0;+\infty)$ и определяется формулой $R_\nu f(t) = \dfrac{u_2(x_0+\nu,t) - f_0(t)}{\nu}$, $f(t) \in C[0;+\infty)$, $f(0) = 0$, $\nu > 0$, $t \in [0;+\infty)$.

В точках (x_0,t) производную $\dfrac{\partial u_2(x_0,t)}{\partial x}$, существование которой следует из теоремы 1, заменим отношением приращений

$$R_\nu f_0(t) = \frac{u_2(x_0+\nu,t) - f_0(t)}{\nu}, \tag{8}$$

а $R_\nu u_2(x_0,t,\delta) = \dfrac{u_2(x_0+\nu,t,\delta) - u_2(x_0,t,\delta)}{\nu}$.

Рассмотрим оценку $||R_\nu u_2(x_0,t,\delta) - g_0(t)||_{C[0;\infty)} \leqslant ||R_\nu u_2(x_0,t,\delta) - R_\nu f_0(t)||_{C[0;\infty)} + ||R_\nu f_0(t) - g_0(t)||_{C[0;\infty)}$.

Лемма 6. *Пусть $R_\nu f_0(t)$ определено формулой (8), а $d \geqslant ||\dfrac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}||_{C([0;\infty)\times[x_0;\infty)}$. Тогда* $\sup\limits_{t\geqslant 0} |g_0(t) - R_\nu f_0(t)| \leqslant d\cdot\nu$.

Доказательство. Из (8) следует существование $\theta_1(t) \in [0;1]$ такого, что

$$R_\nu f_0(t) = \frac{\partial u_2(x_0+\theta_1(t)\nu,t)}{\partial x}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$R_\nu f_0(t) - g_0(t) = \frac{\partial u_2(x_0+\theta_1(t)\nu,t)}{\partial x} - g_0(t), \tag{10}$$

а также существует функция $\theta_2(t) \in [0;1]$ такая, что при $t \geqslant 0$ $0 \leqslant \theta_2(t) \leqslant 1$

$$\frac{\partial u_2(x_0+\theta_1(t)\nu,t}{\partial x} - g_0(t) = \frac{\partial^2 u_2(x_0+\theta_2(t)\nu,t)}{\partial x^2}\cdot\theta_1(t)\cdot\nu. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует утверждение леммы. □

Из (5) получим $\|R_\nu u_2(x_0,t,\delta) - R_\nu f_0(t)\|_{C[0,\infty)} \leqslant \|R_\nu\|_{C[0,\infty)}\cdot\delta$, а из определения нормы оператора — $\|R_\nu\| \leqslant 2/\nu$. Тогда

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |R_\nu u_2(x_0,t,\delta) - R_\nu f_0(t)| \leqslant \frac{2\delta}{\nu}. \tag{12}$$

Значение параметра $\nu = \nu(\delta)$ определим, используя известную схему М. М. Лаврентьева [10], из уравнения $d \cdot \nu(\delta) = \dfrac{2\delta}{\nu(\delta)}$. Тогда

$$\nu(\delta) = \sqrt{\frac{2\delta}{d}}. \tag{13}$$

Таким образом, ввиду (12), (13) и леммы 6 получим, что

$$\sup_{t\in[0,\infty)} |R_\nu w_2(t, x_0, \delta) - g_0(t)| \leqslant 2\sqrt{2d \cdot \delta},$$

а $\sigma(\delta) = 2\sqrt{2d \cdot \delta}$.

Теперь поставим обратную задачу.

Нам известна функция $u_2(x_0, t)$, а также производная $\dfrac{\partial u_2(x_0,t)}{\partial x}$. Необходимо найти решение такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0; x_0), \quad t \in (0; +\infty),\\ u_1(0,t) = q(t), \quad t \in (0; +\infty), u_1(x_0, t) = f(t), \quad t \in (0; +\infty),\\ \frac{\partial u_1(x_0,t)}{\partial x} = g(t), \quad t \in [0; +\infty), \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0; +\infty).\end{gathered} \tag{14}$$

5. ОЦЕНКИ ДЛЯ ПОГРЕШНОСТИ СЛОЯ

Теперь рассмотрим следующую ситуацию: допустим, теплозащитный слой разрушился в процесс нагревания тела на толщину ζ. Пусть эта величина ζ невелика в сравнении с толщиной x_0: $\dfrac{\zeta}{x_0} \ll 1$. Выясним, какая толщина разрушения слоя теплозащиты внесёт погрешность, не выходящую за пределы ошибки δ — измерения величин температуры и теплового потока.

Для этого проведём ряд оценок. Допустим, что разрушение (по существу, отслоение части защиты) произошло в самом начале теплового процесса, и в действительности при $x = x_0$ измеряется не температура $f(t) = u_2(x_0, t)$, а $f_1(t) = u_2(x_0 - \zeta, t)$ — температура, соответствующая тепловому слою, отличающемуся от исходного на толщину ζ. Тогда разность температур на поверхности $\delta q(t)$, вызванная этими факторами, составит величину:

$$\delta q(t) = \int_0^t \frac{f_1(\tau)(x_0 - \zeta)}{\sqrt{4\pi a_1^2 (t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{(x_0-\zeta)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right) d\tau - \int_0^t \frac{x_0 f(\tau)}{\sqrt{4\pi a_1^2 (t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right) d\tau. \tag{15}$$

Мы предполагаем, что $\max\limits_{t\in[0;+\infty)} |f(t) - f_1(t)| < \delta$. Тогда (15) может быть представлен так:

$$\begin{aligned}||\delta q(t)||_C \leqslant \zeta ||f(t)||_C \cdot \int_0^t \frac{x_0}{\sqrt{4\pi a_1^2 (t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{(x_0-\zeta)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right) d\tau +\\ + ||f(t)||_C \int_0^t \frac{x_0}{\sqrt{4\pi a_1^2 (t-\tau)^3}} \left\{\exp\left(-\frac{x_0^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x_0-\zeta)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right)\right\} d\tau,\end{aligned} \tag{16}$$

где $||f(t)||_C = \sup\limits_{t\geqslant 0} |f(t)|$. Интегралы несложно оценить. Справедлива оценка

$$\left| \int_0^t \frac{x_0}{\sqrt{4\pi a_1^2 (t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{(x_0-\zeta)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right) d\tau \right| \leqslant 1 \tag{17}$$

и равенства

$$\int\limits_0^t \frac{x_0}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right) d\tau = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_0}{2a_1\sqrt{t}}\right), \tag{18}$$

$$\int\limits_0^t \frac{(x_0-\zeta)}{\sqrt{4\pi a_1^2(t-\tau)^3}} \exp\left(-\frac{(x_0-\zeta)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right) d\tau = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{x_0-\zeta}{2a_1\sqrt{t}}\right), \tag{19}$$

где $\Phi(s)$ — функция Лапласа.

В силу соотношений (17), (18), (19) оценка (16) принимает вид:

$$||\delta q(t)||_C \leqslant \zeta||f(t)||_C + ||f(t)||_C \left|\Phi\left(\frac{x_0}{2a_1\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x_0-\zeta}{2a_1\sqrt{t}}\right)\right|. \tag{20}$$

Оценим разность функций Лапласа. Получаем:

$$\left|\Phi\left(\frac{x_0}{2a_1\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x_0-\zeta}{2a_1\sqrt{t}}\right)\right| \leqslant \frac{\zeta}{2a_1\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{4a_1^2 t}\right). \tag{21}$$

Выражение с экспонентой ограничено и достигает наибольшего значения при $t = \dfrac{x_0^2}{2a_1^2}$. Следовательно, верна оценка сверху:

$$\frac{\zeta}{2a_1\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{4a_1^2 t}\right) \leqslant \frac{\zeta}{x_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}. \tag{22}$$

Из формул (22), (21) и (20) следует, что истинна оценка:

$$||\delta q(t)||_C \leqslant \zeta||f(t)||_C + ||f(t)||_C \frac{\zeta}{x_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}. \tag{23}$$

Так как слагаемые справа в формуле (23) содержат параметр ζ, то, для получения окончательной оценки, потребуем, чтобы ζ удовлетворяло уравнению:

$$\delta = \frac{\zeta}{x_0}||f(t)||_C \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right).$$

6. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (14) К ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Введём класс корректности $M_{\overline{b}}$

$$M_{\overline{b}} = \left\{q(t)\cdot e^{-t} : q(t) \in C^2(0;\infty),\ \int_0^{+\infty} |q(t)\cdot e^{-t}|^2 dt + \int_0^{+\infty} |q'(t)\cdot e^{-t}|^2 dt \leqslant \overline{b}^2\right\},$$

$\overline{b}$ — известное положительное число. Предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in C^1[0,\infty)$ и $g(t) = g_0(t) \in C^1[0,\infty)$ существует решение $q_0(t)$ обратной задачи (14), но функции $f(t)$ и $g(t)$ нам не известны, а вместо них даны некоторые приближенные функции $f_\delta(t) \in C^1[0;\infty)$, $g_\delta(t) \in C^1[0;\infty)$ и уровни погрешности $\delta > 0$ и $\sigma(\delta)$ такие, что

$$\sup_{t\in[0;\infty)} |f_\delta(t) - f(t)| \leqslant 2\delta, \quad \sup_{t\in[0;\infty)} |g_\delta(t) - g(t)| \leqslant 2\sqrt{2\cdot d\cdot \delta}, \tag{24}$$

причём отметим, что 2δ в выражении $\sup\limits_{t\in[0;\infty)} |f_\delta(t) - f(t)| \leqslant 2\delta$ обусловлено как погрешностью измерения $f_\delta(t)$, так и погрешностью, вносимой разрушением защитного слоя.

Требуется, используя $f_\delta(t)$, $g_\delta(t)$, δ и $M_{\bar{b}}$, определить приближенное решение q_δ задачи (14).

Заметим, что для получения оценки погрешности приближенного решения обратной задачи важную роль играет преобразование Фурье по t. Для использования преобразования Фурье, следуя [15], сделаем замену

$$z(x,t) = e^{-t} w_1(x,t), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \ t > 0. \tag{25}$$

Тогда задачу

$$\frac{\partial w_1(t,x)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 w_1(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x \leqslant x_0, \quad t > 0,$$
$$w_1(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0; w_1(x_0,t) = f(t), \quad \frac{\partial w_1(x_0,t)}{\partial x} = \frac{a_2}{a_1} \cdot g(t), \quad t \geqslant 0$$

сведём к следующей системе

$$\begin{gathered} \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} - z(x,t), \quad 0 < x < x_0, \quad t \geqslant 0, \\ z(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ z(x_0,t) = s(t), \quad s(t) = f(t) \cdot e^{-t}, \quad t \geqslant 0, \\ \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{\partial z(x_0,t)}{\partial x} = p(t), \quad p(t) = g(t) \cdot e^{-t}, \quad t \geqslant 0, \end{gathered} \tag{26}$$

где $q(t) \cdot e^{-t} \in M_{\bar{b}}$.

Из теоремы 1 следует, что

$$z(x,t), \ z'_x(x,t) \in C([0,x_0] \times [0,\infty)), \ z''_{xx}(x,t) \in C((0,x_0) \times [0,\infty)) \tag{27}$$

и существует $c_3 > 0$ такое, что для любой точки $(x,t) \in [0,x_0] \times [0,\infty)$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant x_0} \{|z(x,t)|, \ |z'_x(x,t)|\} \leqslant c_3 \cdot e^{-t}, \tag{28}$$

а также для любого $\varepsilon > 0$ существует $c_4(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $(x,t) \in [\varepsilon, x_0] \times [0;+\infty)$ выполняется оценка

$$\sup_{\varepsilon\leqslant x\leqslant x_0} |z''_{xx}(x,t)| \leqslant c_4(\varepsilon) \cdot e^{-t}. \tag{29}$$

Из (27)–(29) на основании утверждения, доказанного в [16], гл. XVII, утверждение 6, получим

Теорема 3. *Пусть $z(x,t)$ определена формулой* (25) *и выполняются условия* (27)–(29), *тогда*

$$\int_0^\infty z'_x(x,t)dt = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty z(x,t)dt\right], \quad (x,t) \in [0,x_0] \times [0,\infty),$$
$$\int_0^\infty z''_{xx}(x,t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\int_0^\infty z(x,t)dt\right], \quad (x,t) \in (0,x_0) \times [0,\infty).$$

Введём оператор F, отображающий $L_2[0;\infty) \bigcap L_1[0;\infty)$ в $L_2(-\infty;\infty) \bigcap C_0(-\infty;\infty)$ и определяемый формулой

$$\begin{gathered} \hat{q}(\tau) = F_t[q(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{-it\tau} dt, \\ q(t) \in L_2[0;\infty) \bigcap L_1[0;\infty), \quad q(t) = \begin{cases} q(t), & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{30}$$

Из теоремы 3 следует применимость преобразования F, определяемого формулой (30), к решению задачи (26):

$$\begin{gathered}(1+i\tau)\hat{z}(x,\tau)=a_1^2\frac{\partial^2\hat{z}(x,\tau)}{\partial x^2},\quad x\in(h_0,x_0),\\ \widehat{z}(x_0,\tau)=\widehat{s}(\tau),\quad \frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{\partial\widehat{z}(x_0,\tau)}{\partial x}=\widehat{p}(\tau),\quad -\infty<\tau<\infty.\end{gathered}\tag{31}$$

Решение (31) имеет вид

$$\hat{z}(\tau,x)=A_1(\tau)\cdot\exp\left\{x\frac{\sqrt{1+i\tau}}{a_1}\right\}+A_2(\tau)\cdot\exp\left\{-x\frac{\sqrt{1+i\tau}}{a_1}\right\},\tag{32}$$

где $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ — функции, которые необходимо определить.

Используя функции $\widehat{s}(\tau)$ и $\widehat{p}(\tau)$, определим функцию

$$\widehat{m}(\tau)=\widehat{z}(0,\tau),\quad -\infty<\tau<\infty.\tag{33}$$

Решая систему уравнений (31), (32), с учётом (33), получим

$$\widehat{m}(\tau)=T^1(\tau)\cdot\widehat{s}(\tau)+T^2(\tau)\cdot\widehat{p}(\tau),\tag{34}$$

где $T^1(\tau)=\operatorname{ch}\left(\dfrac{x_0\sqrt{1+i\tau}}{a_1}\right)$, $T^2(\tau)=-\dfrac{a_2}{\sqrt{1+i\tau}}\operatorname{sh}\left(\dfrac{x_0\sqrt{1+i\tau}}{a_1}\right)$. Обозначим $T^1(\tau)\widehat{s}(\tau)+T^2(\tau)\widehat{p}(\tau)$ через $T\{\widehat{s}(\tau),\widehat{p}(\tau)\}$,

$$D(T)=\{\widehat{s}(\tau),\ \widehat{p}(\tau):\widehat{s}(\tau)\in L_2(-\infty,\infty),\ \widehat{p}(\tau)\in L_2(-\infty,\infty)\quad\text{и}\quad T\{\widehat{s}(\tau),\widehat{p}(\tau)\}\in L_2(-\infty,\infty)\}.$$

Из (34) следует, что оператор T линеен, неограничен.

Пусть $\hat{m}_0(\tau)=T\{\widehat{s}_0(\tau),\widehat{p}_0(\tau)\}$, $\hat{s}_0(\tau)=F[s_0(t)]$, $\hat{p}_0(\tau)=F[p_0(t)]$, $\hat{s}_\delta(\tau)=F[s_\delta(t)]$, $\hat{p}_\delta(\tau)=F[p_\delta(t)]$.

Из формулы (24) следует, что

$$\|\hat{s}_\delta(\tau)-\hat{s}_0(\tau)\|_{L_2[0,\infty)}\leqslant\frac{2\delta}{\sqrt{2}},\quad \|\hat{p}_\delta(\tau)-\hat{p}_0(\tau)\|_{L_2[0,\infty)}\leqslant 2\sqrt{d\cdot\delta}.\tag{35}$$

Множество $M_{\overline{b}}$ при преобразовании F перейдёт в множество $\widehat{M_{\overline{b}}}\supset F[M_{\overline{b}}]$, определяемое формулой

$$\widehat{M_{\overline{b}}}=\left\{\hat{m}(\tau):\hat{m}(\tau)\in L_2[0,\infty),\ \int_{-\infty}^{\infty}(1+\tau^2)|\hat{m}(\tau)|^2d\tau\leqslant 2\overline{b}^2\right\}.\tag{36}$$

Из того, что $m_0(t)\in M_{\overline{b}}$, получаем $\hat{m}_0(\tau)\in\widehat{M_{\overline{b}}}$.

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (34)–(36)

Для решения задачи (34)–(36) используем метод проекционной регуляризации (см. [17], гл. 4, п. 4.1). В основе этого метода лежит регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha:\alpha>0\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha\{\hat{s}(\tau),\hat{p}(\tau)\}=\begin{cases}T\{\hat{s}(\tau),\hat{p}(\tau)\}, & |\tau|\leqslant\alpha,\\ 0, & |\tau|>\alpha.\end{cases}$$

Регуляризованное решение $\hat{q}_\delta^\alpha(\tau)$ задачи (34) определим формулой

$$\hat{m}_\delta^\alpha(\tau)=T_\alpha\{\hat{s}_\delta(\tau),\hat{p}_\delta(\tau)\},\quad |\tau|\geqslant 0,\quad \alpha>0,\quad \delta>0.\tag{37}$$

Для выбора параметра регуляризации $\overline{\alpha}=\overline{\alpha}(\delta,\overline{b})$ в формуле (37), рассмотрим оценку

$$\|\hat{m}_\delta^\alpha(\tau)-\hat{m}_0(\tau)\|\leqslant\|\hat{h}_\delta^\alpha(\tau)-\hat{m}_0^\alpha(\tau)\|+\|\hat{m}_0^\alpha(\tau)-\hat{m}_0(\tau)\|,\tag{38}$$

где $\hat{m}_0^\alpha(\tau)=T_\alpha\{\hat{s}_0(\tau),\hat{p}_0(\tau)\}$. Перейдём к оценке $\|T_\alpha\|$.

Лемма 7. *Существует число $\alpha_1 > 0$ такое, что для любого α, $\alpha \geqslant \alpha_1$ справедливо соотношение*

$$\|T_\alpha(\tau)\| \leqslant 4 \cdot e^{\sqrt{\alpha/2}\cdot\frac{x_0}{a_1}}.$$

Доказательство. По определению, норма оператора $\|T_\alpha\| = \sup\limits_{0\leqslant|\tau|\leqslant\alpha} |T(\tau)|$.

Рассмотрим $|T(\tau)| \leqslant |T^1(\tau)| + |T^2(\tau)|$. Из $|\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$, $z = x + iy$ и

$$\sqrt{1+i\tau} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}-1}{2}}$$

получим

$$\left|\operatorname{ch}\left(\frac{x_0\sqrt{1+i\tau}}{a_1}\right)\right| \leqslant \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+\tau^2}+1}{2}}\cdot\frac{x_0}{a_1}\right) \leqslant \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\tau}{2}}\cdot\frac{x_0}{a_1}\right).$$

Таким образом,

$$|T^1(\tau)| \leqslant 2\exp\left\{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x_0}{a_1}\right\}.$$

С учётом $|\operatorname{sh} z_2| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x_2 - \cos^2 y_2}$, $z_2 = x_2 + iy_2$ получим существование числа $c_5 > 0$, что

$$|T^2(\tau)| = \left|\frac{a_2}{\sqrt{1+i\tau}}\operatorname{sh}\left(\frac{x_0\sqrt{1+i\tau}}{a_1}\right)\right| \leqslant \frac{c_5\cdot\exp\left\{\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x_0}{a_1}\right\}}{\sqrt{1+|\tau|}}.$$

Из вышесказанного будет следовать существование $\tau_1 > 0$ такого, что для любого τ, $|\tau| \geqslant \tau_1$ справедливы соотношение

$$|T^2(\tau)| \leqslant |T^1(\tau)| \leqslant 2\exp\left\{\sqrt{\tau/2}\cdot\frac{x_0}{a_1}\right\}.$$

Пусть $\alpha_1 = \tau_1$ тогда для всех α, $\alpha \geqslant \alpha_1$ справедливо соотношение

$$\|T_\alpha(\tau)\| \leqslant 4 \cdot e^{\sqrt{\alpha/2}\cdot\frac{x_0}{a_1}}.$$

Тем самым лемма доказана. □

Теперь получим оценку для $\|\hat{m}_0^\alpha(\tau) - \hat{m}_0(\tau)\|$ в формуле (38). Пусть

$$\Delta_1^2(\alpha) = \sup\left\{\int_{-\infty}^{-\alpha}|\hat{m}_0(\tau)|^2 d\tau + \int_\alpha^\infty |\hat{m}_0(\tau)|^2 d\tau : \hat{m}_0(\tau) \in \widehat{M_{\overline{b}}}\right\}. \tag{39}$$

Тогда из (36) получаем, что при условии $\hat{m}_0(\tau) \in \widehat{M_{\overline{b}}}$

$$\int_{-\infty}^{-\alpha}(1+\tau^2)|\hat{m}_0(\tau)|^2 d\tau + \int_\alpha^\infty (1+\tau^2)|\hat{m}_0(\tau)|^2 d\tau \leqslant 2\overline{b}^2. \tag{40}$$

Из (39) и (40) следует, что $\Delta_1^2(\alpha) \leqslant 2\overline{b}^2/(1+\alpha^2)$.

Таким образом, из (38), (40), предыдущего соотношения и леммы 7 получим, что

$$\|\hat{m}_0^\alpha(\tau) - \hat{m}_0(\tau)\| \leqslant 2\sqrt{2}\cdot\overline{b}/\sqrt{1+\alpha^2}, \quad \|\hat{m}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{m}_0^\alpha(\tau)\| \leqslant 8\cdot(\delta + \sqrt{d\cdot\delta})\cdot e^{\frac{x_0}{a_1}\sqrt{\alpha/2}}.$$

Из вышесказанного получим существование числа $c_6 > 0$ такого, что

$$\|\hat{m}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{m}_0(\tau)\| \leqslant 2\sqrt{2}\cdot\overline{b}/\sqrt{1+\alpha^2} + 8\cdot c_6\cdot\sqrt{\delta}\cdot e^{\frac{x_0}{a_1}\sqrt{\alpha/2}}.$$

Параметр регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ в формуле (37) выберем из условия

$$\sqrt{1+\alpha^2} \cdot \|T_\alpha\| \cdot c_6 \cdot \sqrt{\delta} = 2\sqrt{2} \cdot \overline{b}. \tag{41}$$

Учитывая вышесказанное, получим

$$\|\hat{m}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\tau) - \hat{m}_0(\tau)\| \leqslant 4\sqrt{2} \cdot \overline{b}/\sqrt{1+\overline{\alpha}^2(\delta)}. \tag{42}$$

Так как функция $\sqrt{1+\alpha^2}\exp\left\{\dfrac{x_0}{a_1}\sqrt{\alpha/2}\right\}$ строго возрастает по α и изменяется от 1 до ∞, то существует единственное решение $\overline{\alpha}(\delta, \overline{b})$ уравнения (41) и $\overline{\alpha}(\delta, \overline{b}) \geqslant \alpha_1$.

Ввиду того, что уравнение (41) не имеет решения в элементарных функциях, аппроксимируем его парой уравнений

$$\exp\left\{\frac{x_0}{a_1}\sqrt{\alpha_1/2}\right\} = \frac{\overline{b}}{\sqrt{\delta}}, \quad \exp\left\{\frac{2x_0}{a_1}\sqrt{\alpha_2/2}\right\} = \frac{\overline{b}}{4\cdot\sqrt{\delta}}. \tag{43}$$

Решения уравнений (43) обозначим через $\overline{\alpha}_1(\delta, \overline{b})$ и $\overline{\alpha}_2(\delta, \overline{b})$ соответственно.

Тогда при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$\overline{\alpha}_2(\delta, \overline{b}) \leqslant \overline{\alpha}(\delta, \overline{b}) \leqslant \overline{\alpha}_1(\delta, \overline{b}). \tag{44}$$

Из (43) будем иметь

$$\overline{\alpha}_1(\delta, d) = \frac{2a_1^2}{x_0^2}\ln^2\left(\frac{\overline{b}}{\sqrt{\delta}}\right) \quad \text{и} \quad \overline{\alpha}_2(\delta, d) = \frac{a_1^2}{2x_0^2}\ln^2\left(\frac{\overline{b}}{4\cdot\sqrt{\delta}}\right),$$

а из (44) следует, что

$$\overline{\alpha}(\delta, \overline{b}) \sim \ln^2\delta \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{45}$$

Решение задачи (34)–(36) определим формулой $\hat{m}_\delta(\tau) = \hat{m}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta,\overline{b})}(\tau)$.

Тогда из соотношения (42) следует, что

$$\|\hat{m}_\delta(\tau) - \hat{m}_0(\tau)\| \leqslant \frac{4\overline{b}}{\sqrt{1+\overline{\alpha}_1^2(\delta, \overline{b})}}. \tag{46}$$

Обозначим через $\overline{\omega}(\tau, \overline{b})$ модуль условной корректности задачи (34)–(36) (модуль непрерывности оператора T на множестве $\hat{M}_{\overline{b}}$)

$$\overline{\omega}(\tau, \overline{b}) = \sup\{\|T\widehat{f}\| : T\widehat{f} \in \widehat{M}_{\overline{b}},\ |\widehat{f}\| \leqslant \tau\}, \quad \tau, \overline{b} > 0. \tag{47}$$

Теорема 4. *Задача* (34)–(36) *условно-корректна и для модуля условной корректности этой задачи на множестве* $\hat{M}_{\overline{b}}$ *при достаточно малых значениях* δ *справедлива оценка*

$$\overline{\omega}(\tau, \overline{b}) \leqslant \frac{8\overline{b}}{\sqrt{1+\alpha_1^2(\tau, \overline{b})}}.$$

Доказательство следует из формул (46), (47).

Таким образом, решение $m_\delta(t)$ обратной задачи (26), (35) определим формулой

$$m_\delta(t) = \begin{cases} ReF^{-1}[\overline{m}_\delta(\tau)], & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где F^{-1} оператор, обратный F.

Учитывая вышесказанное, для $m_\delta(t)$ будет справедлива оценка

$$\|m_\delta(t) - m_0(t)\| \leqslant \frac{4\overline{b}}{\sqrt{1 + \overline{\alpha}_1^2(\delta, \overline{b})}}. \tag{48}$$

Из (45) и (48) следует существование числа $d_1 > 0$ такого, что для любого достаточно малого δ справедлива оценка

$$\|m_\delta(t) - m_0(t)\| \leqslant d_1 \cdot \overline{b} \cdot \ln^{-2} \delta.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотренная нами задача позволяет оценить уровень погрешности, в том числе и в погрешности толщины слоя. В том случае, если погрешность определения толщины теплозащитного слоя ζ совпадает с погрешностью измерений δ, выполнено соотношение

$$\frac{\delta}{\sup\limits_{t \geqslant 0} |f(t)|} = \frac{\zeta}{x_0} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\right).$$

Уровень погрешности при этом определяется формулой

$$\|m_\delta(t) - m_0(t)\| \leqslant d_1 \cdot \overline{b} \cdot \ln^{-2}(\delta).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988.
2. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твёрдых тел. М.: Наука, 1964.
3. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почв. М.: Наука, 1976.
4. *Тихонов А. Н., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995.
5. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
6. *Денисов В. Я.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.
7. *Леонов А. С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: УРСС, 2013.
8. *Ягола А. Г., Ван Янфей, Степанова И. Э., Титаренко В. Н.* Обратные задачи и методы их решения. М.: Лаборатория знаний, 2014.
9. *Тихонов А. Н., Гласко В. Б.* К вопросу о методах определения температуры поверхности тела // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1967. № 4. С. 910–914.
10. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некоторые задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
11. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
12. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и её приложения. М.: Наука, 1978.

13. *Васин В. В.* Об устойчивом вычислении производной в пространстве $C(-\infty, \infty)$ // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1973. Т. 13. № 6. С. 1383–1389.

14. *Долгополова Т. Ф., Иванов В. К.* О численном дифференцировании // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1966. Т. 6. № 3. С. 570–576.

15. *Танана В. П.* О сведении обратной граничной задачи к последовательному решению двух некорректных задач // Сиб. журн. вычисл. матем. 2020. Т. 23. № 2. С. 219–232.

16. *Зорич В. А.* Математический анализ, Т. 2. М.: Наука, 1984.

17. *Tanana V., Sidikova A.* Optimal Methods for Ill-Posed Problems With Applications to Heat Conduction. Berlin: De Gruyter, 2018.

18. *Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В.* Лекции по математической физике. М.: МГУ, 2004.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.948

ON THE ERROR IN DETERMINING THE PROTECTIVE LAYER BOUNDARY IN THE INVERSE HEAT PROBLEM

© 2023 **V. P. Tanana**[a], **B. A Markov**[b]

South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia

E-mails: [a]tananavp@susu.ru, [b]markovba@susu.ru

Received 12.09.2023, revised 28.10.2023, accepted 16.11.2023

Abstract. The paper studies the problem of determining the error introduced by inaccuracy in determining the thickness of a protective heat-resistant coating of composite materials. The mathematical problem is the heat equation on an inhomogeneous half-line. The temperature on the outer side of the half-line ($x = 0$) is considered unknown over an infinite time interval. To find it, the temperature is measured at the interface of the media at the point $x = x_0$. An analytical study of the direct problem is carried out and enables a rigorous statement of the inverse problem and determining the functional spaces in which it is natural to solve the inverse problem. The main difficulty that the present paper aims at solving is obtaining an estimate for the error of the approximate solution. To estimate the conditional correctness modulus, the projection regularization method is used; this allows obtaining order-accurate estimates.

Keywords: error estimate, conditional correctness modulus, Fourier transform, ill-posed problem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.410

REFERENCES

1. O. M. Alifanov, E. A. Artyukhin, and S. V. Rumyantsev, *Extreme Methods for Solving Ill-Posed Problems and Applications to Inverse Heat Transfer Problems* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
2. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids* (Clarendon, Oxford, 1959; Nauka, Moscow, 1964).
3. A. F. Chudnovskii, *Thermophysics of Soils* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
4. A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, and A. G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems* (Fizmatlit, Moscow, 1995) [in Russian].
5. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
6. V. Ya. Denisov, *Introduction to the Theory of Inverse Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1994) [in Russian].
7. A. S. Leonov, *Solving Ill-Posed Inverse Problems. An Outline of the Theory, Practical Algorithms, and Demonstrations in MATLAB* (URSS, Moscow, 2013) [in Russian].
8. A. G. Yagola, Wang Yanfei, I. E. Stepanova, and V. N. Titarenko, *Inverse Problems and Methods for Their Solution* (Lab. Znanii, Moscow, 2014) [in Russian].
9. A. N. Tikhonov and V. B. Glasko, "Methods of determining the surface temperature of a body," USSR Comput. Math. Math. Phys. **7** (4), 267–273 (1967).
10. M. M. Lavrentyev, V. G. Romanov, and S. P. Shishatskii, *Some Problems of Mathematical Physics and Analysis* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 859–873.

11. S. I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed problems* (Sib. Nauchn. Izd., Novosibirsk, 2009) [in Russian].
12. V. K. Ivanov, V. V. Vasin, and V. P. Tanana, *Theory of Linear Ill-Posed Problems and Applications* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
13. V. V. Vasin, "The stable evaluation of a derivative in space $C(-\infty, \infty)$," USSR Comput. Math. Math. Phys. **13** (6), 16–24 (1973).
14. T. F. Dolgopolova and V. K. Ivanov, "On numerical differentiation," USSR Comput. Math. Math. Phys. **6** (3), 223–232 (1966).
15. V. P. Tanana, "On the reduction of an inverse boundary value problem to a sequential solution of two ill-posed problems," Sib. Zh. Vychisl. Mat. **23** (2), 219–232 (2020) [in Russian].
16. V. A. Zorich, *Mathematical Analysis. Vol. 2* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
17. V. Tanana and A. Sidikova, *Optimal Methods for Ill-Posed Problems With Applications to Heat Conduction* (De Gruyter, Berlin, 2018).
18. A. G. Sveshnikov, A. N. Bogolyubov, and V. V. Kravtsov, *Lectures on Mathematical Physics* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2004) [in Russian].

УДК 517.958:539.3

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО С НЕЗАКРЕПЛЁННЫМИ КРАЯМИ

© 2023 С. Н. Тимергалиев

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, ул. Зелёная, 1, г. Казань 420043, Россия

E-mail: samat_tim@mail.ru

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.; после доработки 12.11.2023 г.;
принята к публикации 15.11.2023 г.

Исследуется существование решений краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка относительно обобщённых перемещений при заданных нелинейных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих непологих изотропных неоднородных оболочек нулевой гауссовой кривизны с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко. В основе метода исследования лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные функции, которые позволяют исходную краевую задачу свести к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в соболевском пространстве. Разрешимость операторного уравнения устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

Ключевые слова: непологая оболочка типа Тимошенко нулевой гауссовой кривизны, нелинейная краевая задача, дифференциальные уравнения с частными производными, обобщённое решение, голоморфная функция, операторное уравнение, теорема существования.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.411

В настоящее время достаточно глубоко изучена разрешимость плоских задач теории упругости [1, 2]. Исследования разрешимости пространственных краевых задач теории упругости ведутся по двум основным направлениям. Первое направление основано на применении теории сингулярных интегральных уравнений [3–6], а также метода сведения пространственных задач к плоским [7] с последующим использованием теории аналитических и обобщённых аналитических функций. На этом пути получены теоремы существования линейных краевых задач для однородных и кусочно-однородных изотропных и анизотропных упругих тел. Второе направление исследований связано с использованием методов функционального анализа, которые позволяют исследовать существование обобщённых решений задач теории упругости в Соболевских пространствах для более широкого класса упругих тел [8–13]. Здесь используются такие методы, как метод гильбертовых пространств, вариационные методы [8–11], теорема о неявной функции и метод Джона Болла, основанный на понятиях слабой сходимости и слабо полунепрерывного снизу функционала [12, 13]. Эти же методы применялись к исследованию разрешимости нелинейных краевых задач равновесия упругих оболочек и пластин в рамках простейшей модели Кирхгофа—Лява ([14–19] и цитированная литература) и задач термоупругости для оболочек в рамках гипотез Григолюка—Чулкова [20, 21]. Вопросы существования решений нелинейных задач в рамках более общих моделей теории оболочек вошли в известный список нерешённых проблем математической теории оболочек И. И. Воровича [14]. В настоящее время имеется немало работ, посвящённых построению новых неклассических моделей

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00212).

теории оболочек и нахождению в рамках этих моделей решений конкретных задач различными численными и численно-аналитическими методами (см., например, [22–27] и цитированная литература). Разрешимость линейных краевых задач для упругих микрополярных оболочек исследовалась в [28]. Однако, вопросы обоснования применяемых методов и анализа разрешимости статических задач для более сложных нелинейных уравнений до недавнего времени оставались открытыми. На сегодняшний день имеется ряд работ [29–33], в которых в рамках сдвиговой модели С. П. Тимошенко [22] исследовалась разрешимость нелинейных краевых задач для упругих пологих оболочек. Для исследования этих задач разработан новый метод, в основе которого лежат интегральные представления для обобщённых перемещений, содержащие произвольные функции. Построение интегральных представлений является одним из существенных моментов метода исследования. Произвольные функции находятся таким образом, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли линейной системе уравнений равновесия и линейным граничным условиям. В результате исходная краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению относительно обобщённых перемещений в Соболевском пространстве. Существенным моментом метода исследования также является исследование разрешимости операторного уравнения. В настоящей статье метод работ [29–33] развивается на случай непологих неоднородных изотропных оболочек типа Тимошенко нулевой гауссовой кривизны, отнесённых к евклидовой системе координат. Переход к непологим оболочкам существенно усложняет исследование краевой задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В плоской односвязной ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered} T^{j\lambda}_{\alpha^\lambda} - \kappa_j T^{j\mu}\omega_\mu - \kappa_j T^{j3} + R^j = 0, \quad j = 1,2, \\ (T^{\lambda\mu}\omega_\mu)_{\alpha^\lambda} + T^{\lambda 3}_{\alpha^\lambda} + \kappa_1 T^{11} + R^3 = 0, \quad M^{j\lambda}_{\alpha^\lambda} - T^{j3} + L^j = 0, \quad j = 1,2, \end{gathered} \tag{1}$$

при выполнении на границе Γ области Ω условий

$$\begin{gathered} T^{j1}d\alpha^2/ds - T^{j2}d\alpha^1/ds = P^j(s), \quad j = 1,2, \\ T^{13}d\alpha^2/ds - T^{23}d\alpha^1/ds + (T^{1\lambda}d\alpha^2/ds - T^{2\lambda}d\alpha^1/ds)\omega_\lambda = P^3(s), \\ M^{j1}d\alpha^2/ds - M^{j2}d\alpha^1/ds = N^j(s), \quad j = 1,2. \end{gathered} \tag{2}$$

В (1), (2) и ниже используются следующие обозначения:

$$\begin{gathered} T^{ij} \equiv T^{ij}(\gamma) = D^{ijkn}_{\lambda-1}\gamma^{\lambda-1}_{kn}, \quad M^{ij} \equiv M^{ij}(\gamma) = D^{ijkn}_{\lambda}\gamma^{\lambda-1}_{kn}, \\ \gamma = (\gamma^0, \gamma^1), \quad \gamma^k = (\gamma^k_{11}, \gamma^k_{12}, \gamma^k_{13}, \gamma^k_{22}, \gamma^k_{23}, \gamma^k_{33}), \quad k = 0,1; \\ D^{ijkn}_m = D^{ijkn}_m(\alpha^1,\alpha^2) = \int\limits_{-h_0/2}^{h_0/2} B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)(\alpha^3)^m d\alpha^3, \quad m = \overline{0,2}, \quad i,j,k,n = \overline{1,3}; \\ B^{1111} = B^{2222} = E/(1-\nu^2), \quad B^{1122} = \nu E/(1-\nu^2), \quad B^{1212} = E/(2(1+\nu)), \\ B^{1313} = B^{2323} = E\kappa^2/(2(1+\nu)); \quad \omega_j = w_{3\alpha^j} + \kappa_j w_j, \quad j = 1,2; \\ \gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - \kappa_j w_3 + \omega_j^2/2 \ (j = 1,2), \quad \gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + \omega_1\omega_2, \quad \gamma^1_{jj} = \psi_{j\alpha^j} \ (j = 1,2), \\ \gamma^1_{12} = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1}, \quad \gamma^0_{j3} = \omega_j + \psi_j \ (j = 1,2), \quad \gamma^0_{33} = \gamma^1_{k3} \equiv 0, \quad k = \overline{1,3}; \end{gathered} \tag{3}$$

остальные B^{ijkn} равны нулю, $\alpha^j = \alpha^j(s)$ $(j = 1,2)$ — уравнения кривой Γ, s — длина дуги Γ; нижний индекс α^λ в (1)–(3) и далее означает дифференцирование по α^λ, $\lambda = 1,2$.

Система (1) совместно с граничными условиями (2) описывает состояние равновесия упругой непологой изотропной неоднородной оболочки с незакреплёнными краями в рамках сдвиговой модели Тимошенко [22], стр. 164–173, отнесённой к евклидовой системе координат. При этом: T^{ij} — усилия, M^{ij} — моменты; γ_{ij}^k $(i,j=\overline{1,3},\ k=0,1)$ — компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, отождествляемой с областью Ω; w_j $(j=1,2)$ и w_3 — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0; ψ_i $(i=1,2)$ — углы поворота нормальных сечений S_0; κ_j $(j=1,2)$ — главные кривизны поверхности S_0; R^j, P^j $(j=\overline{1,3})$, L^k, $N^k (k=1,2)$ — компоненты внешних сил, действующих на оболочку; ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, κ^2 — коэффициент сдвига, $h_0=const$ — толщина оболочки; α^1,α^2 — декартовы координаты точек области Ω. Предполагается, что гауссова кривизна $K=\kappa_1\kappa_2=0$, поэтому далее будем считать $\kappa_2=0$, $\kappa_1\neq 0$ в области $\overline{\Omega}$.

В (1)–(3) и в дальнейшем по повторяющимся латинским индексам ведётся суммирование от 1 до 3, по повторяющимся греческим индексам — от 1 до 2.

Задача (1)**,** (2)**.** Требуется найти решение системы (1),удовлетворяющее граничным условиям (2).

Краевую задачу (1), (2) будем изучать в обобщённой постановке. Пусть выполнены следующие условия:

(a) имеют место включения $B^{ijkn}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)\in (W_p^{(1)}(\Omega)\cap C_\beta(\overline{\Omega}))\times L_1[-h_0/2,h_0/2]$, $i,j,k,n=\overline{1,3}$;

(b) главная кривизна $\kappa_1(\alpha^1,\alpha^2)$ принадлежит пространству $C^1(\overline{\Omega})$;

(c) компоненты внешних сил R^j $(j=\overline{1,3})$ и L^k $(k=1,2)$ принадлежат пространству $L_p(\Omega)$, а компонентыP^j $(j=\overline{1,3})$, N^k $(k=1,2)$ — пространству $C_\beta(\Gamma)$;

(d) Ω — произвольная односвязная область с границей $\Gamma\in C_\beta^1$.

Здесь и далее везде: $2<p<4/(2-\beta)$, $0<\beta<1$.

Определение. Назовём вектор обобщённых перемещений $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ обобщённым решением задачи (1), (2), если a принадлежит пространству $W_p^{(2)}(\Omega)$, почти всюду удовлетворяет системе (1) и поточечно граничным условиям (2).

Здесь $W_p^{(j)}(\Omega)$ $(j=1,2)$ — пространства Соболева. В силу теорем вложения для Соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$ с $p>2$ обобщённое решение a принадлежит пространству $C_\alpha^1(\overline{\Omega})$. Здесь и везде далее $\alpha=(p-2)/p$. Заметим, что при $2<p<4/(2-\beta)$ справедливо неравенство $\alpha<\beta/2$.

Соотношения для компонент деформаций в (3) для удобства в дальнейших исследованиях запишем в виде

$$\gamma_{ij}^k=e_{sij}^k+e_{cij}^k+\chi_{ij}^k,\quad i,j=\overline{1,3},\quad k=0,1, \tag{4}$$

где приняты обозначения:

$$\begin{gathered} e_{sjj}^0=w_{j\alpha^j},\quad e_{sj3}^0=w_{3\alpha^j}+\psi_j,\quad e_{sjj}^1=\psi_{j\alpha^j},\quad j=1,2,\quad e_{s12}^0=w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1},\\ e_{s12}^1=\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1},\quad e_{c11}^0=-\kappa_1 w_3,\quad e_{c13}^0=\kappa_1 w_1,\quad \chi_{jj}^0=\omega_j^2/2,\ j=1,2,\quad \chi_{12}^0=\omega_1\omega_2; \end{gathered} \tag{5}$$

остальные e_{sij}^k, e_{cij}^k, χ_{ij}^k равны нулю.

2. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Введём в рассмотрение две комплексные функции

$$\begin{gathered} \upsilon_j=\upsilon_j(z)=D_{j-1}^{1111}(w_{1\alpha^1}+w_{2\alpha^2})+D_j^{1111}(\psi_{1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2})+\\ +i[D_{j-1}^{1212}(w_{2\alpha^1}-w_{1\alpha^2})+D_j^{1212}(\psi_{2\alpha^1}-\psi_{1\alpha^2})],\quad j=1,2,\quad z=\alpha^1+i\alpha^2. \end{gathered} \tag{6}$$

В системе (1) усилия T^{jk}, моменты M^{jk} и компоненты деформаций γ^n_{jk} заменим их выражениями из (3), (4). Прибавляя после этого к первому уравнению в (1) второе, умноженное на мнимую единицу i, а к четвёртому уравнению — пятое, умноженное также на i, систему (1) при помощи функций $\upsilon_j(z)$ из (6) представим в удобной для дальнейших исследований форме

$$\begin{gathered}\upsilon_{j\overline{z}} + h^j(a) = f^j_c(a) + f^j_\chi(a) - F^j(z), \quad j = 1,2,\\ D^{1313}_0(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) + h^3(a) = f^3_c(a) + f^3_\chi(a) - F^3(z), \quad z \in \Omega,\end{gathered} \tag{7}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\upsilon_{j\overline{z}} = (\upsilon_{j\alpha^1} + i\upsilon_{j\alpha^2})/2, \quad j = 1,2,\\ h^j(a) = (-1)^{\mu-1}(D^{1212}_{j+\lambda-2\alpha^{3-\mu}}\nu_{\lambda 2\alpha^\mu} + iD^{1212}_{j+\lambda-2\alpha^\mu}\nu_{\lambda 1\alpha^{3-\mu}}) - (j-1)D^{1313}_0(e^0_{s13} + ie^0_{s23})/2,\\ \nu_{1j} = w_j, \quad \nu_{2j} = \psi_j, j = 1,2; \quad h^3(a) = D^{1313}_{0\alpha^\lambda}w_{3\alpha^\lambda} + (D^{1313}_0\psi_\lambda)_{\alpha^\lambda};\\ f^j_c(a) = (f_{c3j-2} + if_{c3j-1})/2, \quad f^j_\chi(a) = (f_{\chi 3j-2} + if_{\chi 3j-1})/2, \quad j = 1,2,\\ f^3_c(a) = f_{c3}(a), \quad f^3_\chi(a) = f_{\chi 3}(a), \quad f_{cj}(a) = -T^{jj}_{\alpha^j}(e_c) + \kappa_j T^{j3}(\gamma),\\ f_{c3+j}(a) = -M^{jj}_{\alpha^j}(e_c) + (2-j)T^{j3}(e_c), \quad j = 1,2, \quad f_{c3}(a) = -T^{\lambda 3}_{\alpha^\lambda}(e_c) - \kappa_1 T^{11}(e),\\ f_{\chi j}(a) = -T^{j\lambda}_{\alpha^\lambda}(\chi) + \kappa_j T^{j\mu}(\gamma)\omega_\mu, \quad f_{\chi 3+j}(a) = -M^{j\lambda}_{\alpha^\lambda}(\chi), \quad j = 1,2,\\ f_{\chi 3}(a) = -(T^{\lambda\mu}\omega_\mu)_{\alpha^\lambda} - \kappa_1 T^{11}(\chi), \quad F^1 = (R^1 + iR^2)/2, \quad F^2 = (L^1 + iL^2)/2,\\ F^3 = R^3; \quad e = e_s + e_c, \quad e_s = (e^0_s, e^1_s), \quad e_c = (e^0_c, e^1_c),\\ e^k_s = (e^k_{s11}, e^k_{s12}, e^k_{s13}, e^k_{s22}, e^k_{s23}, e^k_{s33}), \quad e^k_c = (e^k_{c11}, e^k_{c12}, e^k_{c13}, e^k_{c22}, e^k_{c23}, e^k_{c33}),\\ k = 0,1; \quad \chi = (\chi^0_{11}, \chi^0_{12}, \chi^0_{22});\end{gathered} \tag{8}$$

e^k_{sij}, e^k_{cij}, χ^k_{ij} определены в (5).

Отметим, что через e и χ обозначены соответственно линейные и нелинейные части компонент деформации γ, поэтому справедливо представление $\gamma = e + \chi$.

Аналогично, граничные условия (2) запишем в виде

$$\begin{gathered}Re[(-i)^j t'\omega_k(t)] + 2(-1)^j D^{1212}_{k+\delta-2}\nu_{\delta 3-j\alpha^\lambda}d\alpha^\lambda/ds = \varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t) + \varphi_{\chi 3(k-1)+j}(a)(t) -\\ -F^{3k+j}(s), \quad k,j = 1,2,\\ D^{1313}_0[(w_{3\alpha^2} + \psi_2)d\alpha^1/ds - (w_{3\alpha^1} + \psi_1)d\alpha^2/ds] = \varphi_{c3}(a)(t) + \varphi_{\chi 3}(a)(t) - F^6(s),\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}\varphi_{cj}(a)(t) = T^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds - T^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds,\\ \varphi_{c3+j}(a)(t) = M^{j2}(e_c)d\alpha^1/ds - M^{j1}(e_c)d\alpha^2/ds, \varphi_{c3}(a)(t) = T^{13}(e_c)d\alpha^2/ds;\\ \varphi_{\chi j}(a)(t) = T^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds - T^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds,\\ \varphi_{\chi 3+j}(a)(t) = M^{j2}(\chi)d\alpha^1/ds - M^{j1}(\chi)d\alpha^2/ds, \quad j = 1,2,\\ \varphi_{\chi 3}(a)(t) = [(T^{11}(\gamma)\omega_1 + T^{12}(\gamma)\omega_2]d\alpha^2/ds - [T^{22}(\gamma)\omega_2 + T^{12}(\gamma)\omega_1]d\alpha^1/ds;\\ F^{3+j} = -P^j, \quad j = 1,2, \quad F^6(s) = P^3(s), \quad F^{6+k} = -N^k, \quad k = 1,2;\end{gathered} \tag{10}$$

$t' = dt/ds$, ds — элемент длины дуги кривой Γ, усилия T^{jk}, моменты M^{jk} определены в (2).

В основе исследования системы уравнений (7) при граничных условиях (9) лежат интегральные представления для обобщённых перемещений w_j $(j = \overline{1,3})$, ψ_k $(k = 1,2)$. Для их вывода введём в рассмотрение уравнения

$$\upsilon_{j\overline{z}} = \rho^j (j = 1,2), \quad D^{1313}_0(w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2}) = \rho^3, \tag{11}$$

где $\rho^1 = \rho_1 + i\rho_2$, $\rho^2 = \rho_4 + i\rho_5$, $\rho^3 = \rho_3$ — произвольно фиксированные функции, принадлежащие пространству $L_p(\Omega)$.

Первые два уравнения в (11) представляют собой неоднородные уравнения Коши—Римана. Их общие решения даются формулами [34], стр. 29

$$\begin{gathered} \upsilon_j(z) = \Phi_j(z) + T\rho^j(z) \equiv \upsilon_j(\Phi_j; \rho^j)(z), \\ T\rho^j(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{\rho^j(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad j = 1, 2, \quad \zeta = \xi + i\eta, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\Phi_j(z)$ — произвольные голоморфные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\overline{\Omega})$.

Известно [34], стр. 39–41, 46, что T — вполне непрерывный оператор в пространствах $L_p(\Omega)$ и $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$, отображающий их в пространства $C_\alpha(\overline{\Omega})$ и $C^{k+1}_\alpha(\overline{\Omega})$ соответственно. Кроме того, существуют обобщённые производные

$$\frac{\partial Tf}{\partial \bar{z}} = f, \quad \frac{\partial Tf}{\partial z} \equiv Sf = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta, \tag{13}$$

где S — линейный ограниченный оператор в $L_p(\Omega)$, $p > 1$ и $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$.

Представления (12) в свою очередь при помощи функций $\upsilon^0_1 = w_2 + iw_1$, $\upsilon^0_2 = \psi_2 + i\psi_1$ запишем в виде неоднородных уравнений Коши—Римана

$$\upsilon^0_{j\bar{z}} = i(d_{2j-1}[\upsilon_1] + d_{2j}[\upsilon_2]) \equiv iT_j\upsilon, \quad j = 1, 2, \quad \upsilon = (\upsilon_1, \upsilon_2), \tag{14}$$

общие решения которых имеют вид

$$\upsilon^0_j(z) = \Psi_j(z) + iTT_j\upsilon(z), \quad j = 1, 2. \tag{15}$$

В (14), (15) приняты обозначения:

$$\begin{gathered} d_{2j+\lambda-2}[\upsilon_\lambda] = d^1_{2j+\lambda-2}\upsilon_\lambda + (-1)^{j+\lambda} d^2_{2j+\lambda-2}\overline{\upsilon_\lambda}, \quad j, \lambda = 1, 2, \\ d^j_{3k-2} = \frac{1}{4}\left(\frac{D^{1111}_{4-2k}}{\delta_0} + (-1)^j \frac{D^{1212}_{4-2k}}{\delta_1}\right), \\ d^j_2 = d^j_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{D^{1212}_1}{\delta_1} + (-1)^j \frac{D^{1111}_1}{\delta_0}\right), \quad k, j = 1, 2, \\ \delta_0 = D^{1111}_0 D^{1111}_2 - \left(D^{1111}_1\right)^2, \quad \delta_1 = D^{1212}_0 D^{1212}_2 - \left(D^{1212}_1\right)^2; \end{gathered} \tag{16}$$

$\Psi_j(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ — произвольные голоморфные функции.

Третье уравнение в (11) представим в виде

$$w_{3z\bar{z}} = \widetilde{\rho}_3/4, \ \widetilde{\rho}_3 = \rho_3/D^{1313}_0, \quad w_{3z} = (w_{3\alpha^1} - iw_{3\alpha^2})/2,$$

откуда получим

$$w_3(z) = Re\Psi_3(z) - \widetilde{T}\widetilde{\rho}_3, \quad \widetilde{T}\widetilde{\rho}_3 = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Omega} \widetilde{\rho}_3(\zeta) \ln\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\xi\, d\eta, \tag{17}$$

где $\Psi_3(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ — произвольная голоморфная функция.

Соотношения (15), (17) представляют собой искомые интегральные представления для обобщённых перемещений. Для их частных производных первого и второго порядков при помощи формул (12)–(17) и (8.20) из [34], стр. 58 получаем представления

$$\begin{gathered}
\nu_{jk\alpha^k}=Im[\upsilon^0_{j\overline{z}}-(-1)^k\upsilon^0_{jz}],\quad \nu_{jk\alpha^n}=Re[\upsilon^0_{jz}+(-1)^k\upsilon^0_{j\overline{z}}],\quad k\neq n,\quad j,k,n=1,2;\\
\upsilon^0_{jz}=\Psi'_j(z)+iST_j\upsilon(z),\quad \upsilon^0_{j\overline{z}}=iT_j\upsilon,\quad w_{3\alpha^j}=2Re\left(i^{j-1}w_{3z}\right),\quad j=1,2,\\
w_{3z}=\Psi'_3(z)/2+T\widetilde{\rho}_3(z)/4;\quad \nu_{kn\alpha^j\alpha^j}=-Re\{i^n[\upsilon^0_{kz\overline{z}}+(-1)^j(\upsilon^0_{kzz}+\upsilon^0_{k\overline{zz}})]\},\\
\nu_{kn\alpha^1\alpha^2}=Re\{i^{n-1}(\upsilon^0_{kzz}-\upsilon^0_{k\overline{zz}})\},\quad w_{3\alpha^j\alpha^j}=2[w_{3z\overline{z}}+(-1)^{j-1}Rew_{3zz}],\quad k,n,j=1,2,\\
w_{3\alpha^1\alpha^2}=-2Imw_{3zz};\quad \upsilon^0_{kz\overline{z}}=T_{k1}\upsilon+S_{k1}(\Phi'_0;\rho_0),\quad \upsilon^0_{k\overline{zz}}=T_{k2}\upsilon+S_{k2}(\Phi'_0;\rho_0),\\
\upsilon^0_{kzz}=\Psi''_k(z)+S\upsilon^0_{k\zeta\overline{\zeta}}(z)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{T_k\upsilon(\tau)}{(\tau-z)^2}d\overline{\tau},\quad k=1,2,\quad \Phi'_0=(\Phi'_1,\Phi'_2),\quad \rho_0=(\rho^1,\rho^2),\\
w_{3zz}=\Psi''_3(z)/2+S\widetilde{\rho}_3/4,\quad w_{3z\overline{z}}=\widetilde{\rho}_3/4,\quad T_{jk}\upsilon=i[d^1_{2j+\mu-2,k}\upsilon_\mu+(-1)^{j+\mu}d^2_{2j+\mu-2,k}\overline{\upsilon_\mu}],\\
S_{jk}(\Phi'_0;\rho_0)=i[d^1_{2j+\mu-2}\upsilon_{\mu,k}+(-1)^{j+\mu}d^2_{2j+\mu-2}\overline{\upsilon_{\mu,3-k}}],\quad \upsilon_{j,1}\equiv\upsilon_{jz}=\Phi'_j(z)+S\rho^j(z),\\
\upsilon_{j,2}\equiv\upsilon_{j\overline{z}}=\rho^j,\quad d^j_{m,1}\equiv d^j_{mz},\quad d^j_{m,2}\equiv d^j_{m\overline{z}},\quad j,k=1,2,\quad m=\overline{1,4}.
\end{gathered}\tag{18}$$

3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2) К ОПЕРАТОРНОМУ УРАВНЕНИЮ

Интегральные представления (15), (17) для обобщённых перемещений $a=(w_1,w_2,w_3,\psi_1,\psi_2)$ содержат произвольные голоморфные функции $\Phi_j(z)$ $(j=1,2)$, $\Psi_k(z)$ $(k=\overline{1,3})$ и произвольные функции $\rho^j(z)$ $(j=\overline{1,3})$. Их найдём так, чтобы обобщённые перемещения удовлетворяли системе (7) и граничным условиям (9), при этом правые части уравнений (7) и граничных условий (9) временно считаем известными. С этой целью соотношения (15), (17), (18) подставим в левые части системы (7) и граничных условий (9). В результате система уравнений (7) запишется в виде

$$\rho^j(z)+h^j_1(\rho)(z)+h^j_2(\Phi)(z)=f^j_c(a)(z)+f^j_\chi(a)(z)-F^j(z),\quad j=\overline{1,3},\quad z\in\Omega,\tag{19}$$

где через $h^j_1(\rho)(z)$ и $h^j_2(\Phi)(z)$ обозначены те части выражения оператора $h^j(a)$ в (8), которые содержат функции $\rho=(\rho^1,\rho^2,\rho^3)$ и $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)$ соответственно.

Граничные условия (9) с учётом представлений

$$\begin{gathered}
S(T_j\Phi_0)^+(t)=-(\overline{t}')^2[d^1_{2j-1}(t)\Phi_1(t)+d^1_{2j}(t)\Phi_2(t)]+K_{0j}(\Phi_0)(t),\quad \Phi_0=(\Phi_1,\Phi_2),\\
K_{0j}(\Phi_0)(t)=-\frac{d^1_{2j+\mu-2}(t)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\tau-t}\Phi_\mu(\tau)d\tau-(-1)^{j+\mu}\frac{d^2_{2j+\mu-2}(t)}{2\pi i}\times\\
\times\int\limits_\Gamma\frac{\psi(\tau,t)-\psi(t,t)}{\overline{\tau}-\overline{t}}\overline{\Phi_\mu(\tau)}d\overline{\tau}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega\frac{d^1_{2j+\mu-2}(\zeta)-d^1_{2j+\mu-2}(t)}{(\zeta-t)^2}\Phi_\mu(\zeta)d\xi d\eta-\\
-\frac{(-1)^{j+\mu}}{\pi}\iint\limits_\Omega\frac{d^2_{2j+\mu-2}(\zeta)-d^2_{2j+\mu-2}(t)}{(\zeta-t)^2}\overline{\Phi_\mu(\zeta)}d\xi d\eta,\quad j=1,2,\\
\psi(\tau,t)=(\overline{\tau}-\overline{t})/(\tau-t),\quad \psi(t,t)=(\overline{t}')^2,
\end{gathered}\tag{20}$$

получаемых при помощи соотношений (12)–(14), формул (4.7), (4.9) из [34], стр. 28 и формул Сохоцкого [35], стр. 66, преобразуются к виду

$$\begin{gathered}
(-1)^jd_{k\lambda}(t)Re[i^jt'\Phi_\lambda(t)]-2D^{1212}_{\lambda+k-2}(t)Re[i^{j-1}t'\Psi'_\lambda(t)]-2D^{1212}_{\lambda+k-2}(t)Re[i^jt'K_{0\lambda}(\Phi_0)(t)]+\\
+H_{3(k-1)+j}\rho(t)=\varphi_{c3(k-1)+j}(a)(t)+\varphi_{\chi3(k-1)+j}(a)(t)-F^{3k+j}(s),\quad k,j=1,2,\\
D^{1313}_0(t)Re[it'\Psi'_3(t)]+K_{03}(\Phi)(t)+H_3\rho(t)=\varphi_{c3}(a)(t)+\varphi_{\chi3}(a)(t)-F^6(s),
\end{gathered}\tag{21}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{gathered} H_{3(k-1)+j}\rho(t) = Re[(-i)^j t' T\rho^k(t)] - 2D^{1212}_{k+\lambda-2}(t)Re\{i^j t'(I+S)(T_\lambda T\rho_0)^+(t)\}, \quad k,j=1,2, \\ H_3\rho(t) = D_0^{1313}(t)Re[it'(T\widetilde{\rho}_3(t)/2 + TT_2T\rho_0(t))], \\ K_{03}(\Phi)(t) = D_0^{1313}(t)Re\{t'[\Psi_2(t) + iTT_2\Phi_0(t)]\}; \\ d_{kj}(t) = (-1)^{j-1}[2(-1)^\lambda D^{1212}_{\lambda+k-2}(t)d^2_{2\lambda+j-2}(t) + 3 - k - j], \quad k,j=1,2, \end{gathered} \tag{22}$$

I — тождественный оператор, операторы T, S, T_λ и функции $d^k_j(t)$ определены в (12), (13), (14), (16) соответственно; $\Phi_\lambda(t) \equiv \Phi^+_\lambda(t), t \in \Gamma$; символ $\Phi^+_\lambda(t)$ здесь и далее означает предел функции $\Phi_\lambda(z)$ при $z \to t \in \Gamma$ изнутри области Ω.

Таким образом, для определения функций $\rho^j \in L_p(\Omega)$ $(j = \overline{1,3})$, $\Phi_k(z) \in C_\alpha(\overline{\Omega})$ $(k = 1,2)$, $\Psi_j(z) \in C^1_\alpha(\overline{\Omega})$ $(j = \overline{1,3})$ получили систему уравнений (19), (21). Голоморфные функции будем искать в виде интегралов типа Коши с действительными плотностями:

$$\begin{gathered} \Phi_k(z) = \Theta(\mu_{2k})(z) \equiv \Phi_k(\mu_{2k})(z), \quad k=1,2, \quad \Psi'_j(z) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta(\mu_{2j-1})(z) \equiv \\ \equiv \Psi'_j(\mu_{2j-1})(z), \quad j=\overline{1,3}, \quad \Theta(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau'(\tau - z)}, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\mu_j(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ $(j = \overline{1,5})$ — произвольные действительные функции, $\tau' = d\tau/d\sigma$, $d\sigma$ — элемент длины дуги кривой Γ.

Для функций $\Psi_j(z)$ $(j = \overline{1,3})$ имеем представления:

$$\begin{gathered} \Psi_j(z) = i^{(j-1)(j-2)/2}\Theta^0(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j} \equiv \Psi_j(\mu_{2j-1})(z) + c_{2j-1} + ic_{2j}, \quad j=\overline{1,3}, \\ \Theta^0(f)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau'}\, ln\left(1 - \frac{z}{\tau}\right) d\tau, \end{gathered} \tag{24}$$

где c_j $(j = \overline{1,6})$ — произвольные действительные постоянные, под $ln(1 - z/\tau)$ понимается однозначная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0 \in \overline{\Omega}$.

Постоянную c_2 определим так, чтобы $w_1(0,0) = 0$. Тогда с учётом соотношений (24) представления (15), (17) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \upsilon^0_j(z) = \upsilon^0_j(\mu^j;\rho_0)(z) + c_{2j-1} + i(j-1)c_{2j}, \quad j=1,2, \\ w_3(z) = w_3(\mu_5;\rho_3)(z) + c_5, \quad \mu^j = (\mu_{2j-1},\mu_2,\mu_4), \\ \upsilon^0_j(\mu^j;\rho_0)(z) = \Psi_j(\mu_{2j-1})(z) + iTT_j\upsilon(\mu_0;\rho_0)(z) - i(2-j)Re[TT_1\upsilon(\mu_0;\rho_0)(0)], \quad j=1,2, \\ \mu_0 = (\mu_2,\mu_4), \quad \rho_0 = (\rho^1,\rho^2), \quad w_3(\mu_5;\rho_3)(z) = Re[\Psi_3(\mu_5)(z)] - \widetilde{T}\widetilde{\rho}_3, \\ \upsilon(\mu_0;\rho_0) = (\upsilon_1(\mu_2;\rho^1),\upsilon_2(\mu_4;\rho^2)), \quad \upsilon_j(\mu_{2j};\rho^j) \equiv \upsilon_j(\Phi_j(\mu_{2j});\rho^j), \quad j=1,2, \end{gathered} \tag{25}$$

где оператор $\upsilon_j(\Phi_j;\rho^j)$ определён в (12).

Используя формулы Сохоцкого [35], стр. 66, находим $\Phi_k(t)$ $(k = 1,2)$, $\Psi'_j(t)$ $(j = \overline{1,3})$, $t \in \Gamma$. Подставляя их выражения, а также представления (24), (25) в систему (19), (21), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений относительно функций $\rho \in L_p(\Omega)$ и $\mu = (\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5) \in C_\alpha(\Gamma)$:

$$\begin{gathered} \rho^j(z) + h^j_1(\rho)(z) + h^j_2(\mu)(z) = f^j_c(a)(z) + f^j_\chi(a)(z) + g^j_c(z) - F^j(z), \quad z \in \Omega, \quad j=\overline{1,3}, \\ \sum_{n=1}^5 \left[a_{jn}(t)\mu_n(t) + b_{jn}(t)\int\limits_\Gamma \frac{\mu_n(\tau)}{\tau - t}\,d\tau\right] + K_j\,\mu(t) + H_j\rho(t) = \\ = \varphi_{cj}(a)(t) + \varphi_{\chi j}(a)(t) + g^{3+j}_c(t) - F^{3+j}(t), \quad t \in \Gamma, \quad j=\overline{1,5}, \end{gathered} \tag{26}$$

в которой приняты обозначения:

$$
\begin{gathered}
K_{3(n-1)+j}\mu(t) = (-1)^j d_{n\lambda}(t)\{Re[i^j t'\Theta(\mu_{2\lambda})(t)] - iRe(i^{j-1})\Theta(\tau'\mu_{2\lambda})(t)\}+ \\
+2D^{1212}_{\lambda+n-2}(t)\{Re[i^{j+1}t'\Theta(\mu_{2\lambda-1})(t)] - iRe(i^j)\Theta(\tau'\mu_{2\lambda-1})(t) - Re[i^j t' K_{0\lambda}(\mu_0)(t)]\}, \\
n, j = 1, 2, \quad K_3\mu(t) = K_{03}(\mu)(t) - D^{1313}_0(t)Re[t'\Theta(\mu_5)(t)]; \\
g^2_c(z) = D^{1313}_0(c_4 + ic_3)/2,\ g^3_c(z) = -c_4 D^{1313}_{0\alpha^1} - c_3 D^{1313}_{0\alpha^2}, \\
g^6_c(t) = D^{1313}_0(t)(c_4 d\alpha^2/ds - c_3 d\alpha^1/ds), \quad g^1_c(z) = g^{3+j}_c(t) \equiv 0, \quad j = 1, 2, 4, 5; \\
a_{3(k-1)+j\ 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t)Re(i^j)/2, \quad b_{3(k-1)+j\ 2\lambda}(t) = (-1)^j d_{k\lambda}(t)Re(i^{j-1})/(2\pi), \\
a_{3(k-1)+j\ 2\lambda-1}(t) = -D^{1212}_{\lambda+k-2}(t)Re(i^{j-1}), \quad b_{3(k-1)+j\ 2\lambda-1}(t) = D^{1212}_{\lambda+k-2}(t)Re(i^j)/\pi, \\
k, j, \lambda = 1, 2, \quad a_{35}(t) = -D^{1313}_0(t)/2;
\end{gathered}
\tag{27}
$$

остальные a_{jk}, b_{jk} равны нулю; здесь $h^j_2(\mu)(z) \equiv h^j_2(\Phi(\mu))(z)$, $K_{0j}(\mu_0)(t) \equiv K_{0j}(\Phi_0(\mu_0))(t)$, $j = 1, 2$; $K_{03}(\mu)(t) \equiv K_{03}(\Phi(\mu))(t)$, $\Phi(\mu) = (\Phi_1(\mu_2), \Phi_2(\mu_4), \Psi_1(\mu_1), \Psi_2(\mu_3), \Psi_3(\mu_5))$; операторы K_{0j} $(j = \overline{1,3})$ определены в (20), (22).

Справедлива следующая лемма [33].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда:*

1) $h^j_1(\rho)$ $(j = \overline{1,3})$ *— линейные вполне непрерывные операторы в* $L_p(\Omega)$*;*

2) $h^j_2(\mu)$ $(j = \overline{1,3})$ *— линейные вполне непрерывные операторы из* $C_{\nu'}(\Gamma)$ $\forall \nu' \in (0,1)$ *в* $L_p(\Omega)$*;*

3) $K_j\,\mu$ $(j = \overline{1,5})$ *— линейные вполне непрерывные операторы из* $C_{\nu'}(\Gamma)$ $\forall \nu' \in (0,1)$ *в* $C_\gamma(\Gamma)$ $\forall \gamma < \beta/2$*;*

4) $H_j\,\rho$ $(j = \overline{1,5})$ *— линейные вполне непрерывные операторы из* $L_p(\Omega)$ *в* $C_{\alpha'}(\Gamma)$ $\forall\, \alpha' < \alpha$ *и ограниченные операторы из* $L_p(\Omega)$ *в* $C_\alpha(\Gamma)$*;*

5) имеют место включения $f^j_c(a)(z)$, $f^j_\chi(a)(z)$, $F^j(z)$, $g^j_c(z)$ $(j = \overline{1,3}) \in L_p(\Omega)$; $\varphi_{cj}(a)(t)$, $\varphi_{\chi j}(a)(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $F^{3+j}(t), g^6_c(t)$, $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t) \in C_\beta(\Gamma)$, $j, k = \overline{1,5}$.

Исследуем разрешимость системы уравнений (26) в пространстве $L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$, $\alpha' < \alpha$. Заметим, что любое решение $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ системы (26) в силу леммы 1 принадлежит пространству $L_p(\Omega) \times C_\alpha(\Gamma)$. Используя выражения для $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$ из (27), вычисляем определитель

$$
det[A(t) - \pi i B(t)] = D^{1313}_0 \delta_1 (a_1^2 - a_0 a_2)/(32\delta_0), \quad a_n = D^{1111}_n + D^{1122}_n, \quad n = 0, 1, 2,
$$

где δ_0, δ_1 определены в (16), а $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ — квадратные матрицы пятого порядка. Итак, $det[A(t) - \pi i B(t)] \neq 0$ на Γ и для индекса системы (26) получаем

$$
\chi = \frac{1}{2\pi}\left[arg \frac{det(A - \pi i B)}{det(A + \pi i B)}\right]_\Gamma = 0
$$

(здесь символ $[arg\varphi]_\Gamma$ означает приращение аргумента функции φ при обходе кривой Γ один раз в положительном направлении). Следовательно, к системе (26) применима альтернатива Фредгольма. Пусть $(\rho, \mu) \in L_p(\Omega) \times C_{\alpha'}(\Gamma)$ — решение системы (26) при нулевой правой части. Этому решению по формулам (23), (24), (25) с постоянными $c_j = 0$ соответствуют функции w_j $(j = \overline{1,3})$, ψ_k $(k = 1, 2)$. Эти функции, как нетрудно видеть, удовлетворяют однородной системе линейных уравнений (7) ($f^j_c + f^j_\chi - F^j \equiv 0$, $j = \overline{1,3}$) и однородным линейным граничным условиям (9) ($\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} - F^{3+j} \equiv 0$, $j = \overline{1,5}$). Действительную и мнимую части первого уравнения однородной системы (7) умножим соответственно на w_1 и w_2, второго уравнения — соответственно на ψ_1 и ψ_2, а третье уравнение — на w_3. После этого проинтегрируем по области

Ω и сложим получившиеся равенства. С учётом однородных граничных условий (9) получаем, что $w_j(j=\overline{1,3})$, $\psi_k(k=1,2)$ удовлетворяют системе

$$\nu_{j1\alpha^1}=0,\quad \nu_{j2\alpha^2}=0,\quad \nu_{j1\alpha^2}+\nu_{j2\alpha^1}=0,\quad w_{3\alpha^j}+\psi_j=0,\quad j=1,2,$$

решение которой имеет вид

$$w_1=-c_0\alpha^2+c_1,\quad w_2=c_0\alpha^1+c_2,\quad w_3=-c_4\alpha^1-c_5\alpha^2+c_6,\quad \psi_1=c_4,\quad \psi_2=c_5, \tag{28}$$

где c_j — произвольные действительные постоянные, функции ν_{jk} определены в (8).

Так как $\Psi_j(0)=0$ $(j=\overline{1,3})$, $w_3(0)=0$, то из (28) будем иметь: $w_1=-c_0\alpha^2+c_1$, $w_2=c_0\alpha^1+c_2$, $w_3=\psi_1=\psi_2\equiv 0$. Тогда $v_j(z)=2ic_0D^{1212}_{j-1}$, $j=1,2$ и из уравнений (11) следуют равенства

$$\rho^j(z)=2ic_0D^{1212}_{j-1\bar z},\quad j=1,2,\quad \rho^3(z)\equiv 0,\quad z\in\Omega. \tag{29}$$

Используя формулы (12), (15), (17) и представление для v^0_{jz} в (18), находим $\Phi_k(z)(k=1,2)$, $\Psi'_j(z)$ $(j=\overline{1,3})$ и подставляя их в (23), получаем

$$\mu_1(t)/t'-c_0(\bar t')^2=F_1^-(t),\quad \mu_{2j}(t)/t'-2ic_0D^{1212}_{j-1}(t)=F^-_{2j}(t),\quad j=1,2,$$
$$\mu_{2j-1}(t)/t'=F^-_{2j-1}(t),\quad j=2,3,$$

где $F_j^-(t)$ — граничные значения функции $F_j^-(z)$, голоморфной во внешности Ω и исчезающей на бесконечности. Следовательно, для функции $F_j^-(z)$ во внешности области Ω приходим к задаче Римана—Гильберта с краевым условием $Re[it'\,F_j^-(t)]=f_j^-(t)$, $j=\overline{1,5}$, где $f_1^-(t)=c_0Re(it')$, $f^-_{2j}(t)=2c_0D^{1212}_{j-1}(t)Ret'$, $j=1,2$, $f^-_{2j-1}(t)=0$, $j=2,3$. Используя решение этой задачи [36], стр. 253, для функций $\mu_j(t)$ получаем представления

$$\mu_j(t)=c_0\mu_j^0(t)+\beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=1,2,4,\quad \mu_j(t)=\beta_{0j}\mu_j^1(t),\quad j=3,5, \tag{30}$$

где $\mu_j^k(t)$ — известные действительные функции, принадлежащие пространству $C_\alpha(\Gamma)$; c_0, β_{0j} — произвольные действительные постоянные.

Решения (29), (30) показывают, что однородная система уравнений (26) имеет шесть линейно независимых решений. Тогда союзная с ней система уравнений также будет иметь шесть линейно независимых решений. Для вывода союзной системы действительные и мнимые части левых частей уравнений в (19) умножим соответственно на действительные функции, $v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\in L_q(\Omega)$, $1/p+1/q=1$ и проинтегрируем по области Ω, а левые части уравнений в (21) умножим на действительные функции $\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\nu_5\in C_\alpha(\Gamma)$, проинтегрируем по кривой Γ. После этого их сложим и приравняем нулю. Заменяя голоморфные функции $\Phi_j(z)$, $\Psi_k(z)$, $\Psi'_k(z)$ их выражениями из (23), (24) с постоянными, равными нулю, переставляя порядок интегрирования в полученных повторных интегралах, при помощи традиционных рассуждений после несложных, но достаточно громоздких преобразований приходим к искомой союзной системе уравнений

$$\overline{v^j(z)}-T_{3+j}v(z)+2\Theta(\tau'\overline{\nu^j})(z)=0,\quad j=1,2,\quad ReT_3v(z)=0,\quad z\in\Omega,$$
$$Re\{i[T_{3+j}v(t)-2\Theta^-(\tau'\overline{\nu^j})(t)]\}=0,\quad j=1,2,\quad Re[Tg(v)(t)+\Theta^-(\tau'D^{1313}_0\nu_3)(t)]=0,$$
$$Re\{T[D^{1212}_{\lambda+j-2\bar\zeta}v^\lambda](t)-2\Theta^-(\tau'D^{1212}_{\lambda+j-2}\nu^\lambda)(t)+(j-1)[iT^0g(v)(t)-T^0_\Gamma(D^{1313}_0\tau'\nu_3)(t)]\}=0, \tag{31}$$
$$t\in\Gamma,\quad j=1,2;\quad v^j=v_{3j-2}+iv_{3j-1},\quad \nu^j=\nu_{3j-2}+i\nu_{3j-1},\quad j=1,2,$$
$$v^3=v_3,\quad \nu^3=\nu_3.$$

В уравнениях (31) приняты обозначения:

$$T_3v(z)=-2Tg(v)(z)+2D^{1313}_0(z)v_3(z)-2\Theta(\tau'D^{1313}_0\nu_3)(z),$$

$$T_{3+j}v(z) = 2Td_{j+2\lambda-2}[S_\lambda v](z) + Td_{2+j}[T_3 v](z), \quad v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5),$$

$$S_j v(z) = S[D^{1212}_{j+\lambda-2\bar{\zeta}} v^\lambda](z) - D^{1212}_{j+\lambda-2z} v^\lambda(z) - 2\Theta'(\tau' D^{1212}_{j+\lambda-2}\nu^\lambda)(z), \quad j = 1, 2,$$

$$g(v)(z) = D^{1313}_{0\bar{z}}(z)v_3(z) - D^{1313}_0(z)v^2(z)/4, \quad T^0 f(z) = -\frac{1}{\pi i}\iint\limits_\Omega f(\zeta) ln\left(1 - \frac{\zeta}{z}\right) d\xi d\eta,$$

$$T^0_\Gamma f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\tau) ln\left(1 - \frac{\tau}{z}\right) d\sigma, \quad \Theta'(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)d\tau}{\tau'(\tau - z)^2};$$

$\Theta^-(f)(t)$ — граничные значения функции $\Theta(f)(z)$ при $z \to t \in \Gamma$ извне Ω; операторы Tf, Sf, $d_j[f]$, $\Theta(f)$ определены в (12), (13), (16), (23) соответственно.

Система (31), как отмечено выше, имеет шесть линейно независимых решений. Получим их явные выражения. Далее в (31) под $v \in L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$, ν_j $(j = \overline{1,5}) \in C_\alpha(\Gamma)$ будем подразумевать некоторое её решение.

Пусть дополнительно выполнены условия

$$D^{1212}_j (j = 0, 1, 2), \quad D^{1313}_0 \in W^{(2)}_p(\Omega). \tag{32}$$

Тогда получаем [33], что

$$v^j(t) = -2\nu^j(t), \quad j = 1, 2, \quad v_3(t) = \nu_3(t), \quad t \in \Gamma \tag{33}$$

и вектор $\widetilde{v} = (v_1, v_2, 2v_3, v_4, v_5)$ есть решение однородной системы линейных уравнений в (7), удовлетворяющее однородным линейным граничным условиям в (9). Следовательно, в соответствии с (28) для компонент вектора $\widetilde{v}$ получим следующие представления:

$$v_1 = -c_0\alpha^2 + c_1, \quad v_2 = c_0\alpha^1 + c_2, \quad v_3 = (-c_4\alpha^1 - c_5\alpha^2 + c_6)/2, \quad v_4 = c_4, \quad v_5 = c_5,$$

где c_j — произвольные действительные постоянные.

Функции $\nu_j(t)$ и v_k связаны друг с другом формулами (33). Следовательно, решение $(v, \widetilde{\nu})^T$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $\widetilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$ союзной системы (31) можно представить в виде $(v, \widetilde{\nu})^T = c_0\gamma_1 + c_1\gamma_2 + c_2\gamma_3 + c_4\gamma_4 + c_5\gamma_5 + c_6\gamma_6$, где $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, ..., \gamma_{k10})$ $(k = \overline{1,6})$ — линейно независимые решения системы (31). Тогда для разрешимости системы (26) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\iint\limits_\Omega \{Re[(f^1_c + f^1_\chi + g^1_c - F^1)(z)(\gamma_{k1} - i\gamma_{k2})(z) + (f^2_c + f^2_\chi + g^2_c - F^2)(z)(\gamma_{k4} - i\gamma_{k5})(z)] +$$
$$+ (f^3_c + f^3_\chi + g^3_c - F^3)(z)\gamma_{k3}(z)\} d\alpha^1 d\alpha^2 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{5} \int\limits_\Gamma (\varphi_{cj} + \varphi_{\chi j} + g^{3+j}_c - F^{3+j})(t)\gamma_{k,5+j}(t) ds = 0, \quad k = \overline{1,6},$$

которые после несложных преобразований принимают вид

$$\begin{gathered}\iint\limits_{\Omega} R^j d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma} P^j ds - \iint\limits_{\Omega} \kappa_j [T^{j3}(\gamma) + T^{j\mu}(\gamma)\omega_\mu] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1,2,\\ \iint\limits_{\Omega} (R^1\alpha^2 - R^2\alpha^1) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma} (P^1\alpha^2 - P^2\alpha^1) ds -\\ - \iint\limits_{\Omega} \alpha^2 \kappa_1 [T^{1\mu}(\gamma)\omega_\mu + T^{13}(\gamma)] d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,\\ \iint\limits_{\Omega} (\alpha^j R^3 - L^j) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma} (\alpha^j P^3 - N^j) ds +\\ + \iint\limits_{\Omega} \alpha^j \kappa_1 T^{11}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 - \iint\limits_{\Omega} T^{j\mu}(\gamma)\omega_\mu d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \quad j = 1,2,\\ \iint\limits_{\Omega} R^3 d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_{\Gamma} P^3 ds + \iint\limits_{\Omega} \kappa_1 T^{11}(\gamma) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,\end{gathered} \tag{34}$$

где R^j, P^j $(j = \overline{1,3})$, L^k, N^k $(k = 1,2)$ — компоненты внешних сил, γ — произвольно фиксированный вектор деформации, ω_μ — произвольно фиксированная функция.

При выполнении условий (34) общее решение системы (26) можно представить в виде

$$\begin{gathered}(\rho,\mu) = (\rho_c,\mu_c)(a) + (\rho_\chi,\mu_\chi)(a) + (\rho_*,\mu_*) + (\rho_F,\mu_F), \quad (\rho_c,\mu_c)(a) = \mathfrak{R} f_c(a),\\ (\rho_\chi,\mu_\chi)(a) = \mathfrak{R} f_\chi(a), \quad (\rho_*,\mu_*) = \mathfrak{R} g_c + (\widetilde{\rho},\widetilde{\mu}), \quad (\rho_F,\mu_F) = -\mathfrak{R} F,\end{gathered} \tag{35}$$

где

$$f_c(a) = (f_c^1, f_c^2, f_c^3, \varphi_{c1}, ..., \varphi_{c5}), \quad f_\chi(a) = (f_\chi^1, f_\chi^2, f_\chi^3, \varphi_{\chi 1}, ..., \varphi_{\chi 5}), \quad g_c = (g_c^1, ..., g_c^8),$$

$$F = (F^1, ..., F^8); \quad \mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_1, ..., \mathfrak{R}_8);$$

$\mathfrak{R}_j$ $(j = \overline{1,3})$ и $\mathfrak{R}_k$ $(k = \overline{4,8})$ — линейные ограниченные операторы из $L_p(\Omega) \times C_\alpha(\Gamma)$ в $L_p(\Omega)$ и в $C_\alpha(\Gamma)$ соответственно; функции $\widetilde{\rho} = (\widetilde{\rho}^1, \widetilde{\rho}^2, \widetilde{\rho}_3)$, $\widetilde{\mu} = (\widetilde{\mu}_1, ..., \widetilde{\mu}_5)$ определены формулами (29), (30), а f_c^j, f_χ^j, $\varphi_{ck}4$, $\varphi_{\chi k}$, g_c^n, F^n — формулами в (8), (10), (27).

Выражения вектор-функций $\mu(t)$, $\rho(z)$ из (35) подставим в (25). Тогда задача (1), (2) сведётся к системе нелинейных уравнений относительно вектор-функции $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$, которую представим в виде операторного уравнения

$$a - L(a) - G(a) = a_* + \widetilde{a}_F, \tag{36}$$

где

$$L = (L_1, ..., L_5), \quad G = (G_1, ..., G_5), \quad a_* = (w_{1*}, w_{2*}, w_{3*}, \psi_{1*}, \psi_{2*}),$$

$$\widetilde{a}_F = (\widetilde{w}_{1F}, \widetilde{w}_{2F}, \widetilde{w}_{3F}, \widetilde{\psi}_{1F}, \widetilde{\psi}_{2F}), \quad L_{3(n-1)+j}(a) = -Re[i^j \upsilon_n^0(\mu_c^n(a); \rho_{0c}(a))],$$

$$G_{3(n-1)+j}(a) = -Re[i^j \upsilon_n^0(\mu_\chi^n(a); \rho_{0\chi}(a))], \quad n, j = 1,2; \quad L_3(a) = w_3(\mu_{c5}(a); \rho_{c3}(a)),$$

$$G_3(a) = w_3(\mu_{\chi 5}(a); \rho_{\chi 3}(a)), \quad w_{j*} = -Re[i^j \upsilon_1^0(\mu_*^1; \rho_{0*})] + (j-1)c_1,$$

$$\widetilde{w}_{jF} = -Re[i^j \upsilon_1^0(\mu_F^1; \rho_{0F})], \quad \psi_{j*} = -Re[i^j \upsilon_2^0(\mu_*^2; \rho_{0*})] + c_{5-j}, \quad \widetilde{\psi}_{jF} = -Re[i^j \upsilon_2^0(\mu_F^2; \rho_{0F})],$$

$$j = 1,2, \quad w_{3*} = w_3(\mu_{*5}; \rho_{*3}), \quad \widetilde{w}_{3F} = w_3(\mu_{F5}; \rho_{F3}); \quad \mu_c^j = (\mu_{c2j-1}, \mu_{c2}, \mu_{c4}),$$

$$\mu_\chi^j = (\mu_{\chi 2j-1}, \mu_{\chi 2}, \mu_{\chi 4}), \quad \mu_*^j = (\mu_{*2j-1}, \mu_{*2}, \mu_{*4}), \quad \mu_F^j = (\mu_{F2j-1}, \mu_{F2}, \mu_{F4}), \quad j = 1,2,$$

$$\rho_{0c} = (\rho_c^1, \rho_c^2), \quad \rho_{0\chi} = (\rho_\chi^1, \rho_\chi^2), \quad \rho_{0*} = (\rho_*^1, \rho_*^2), \quad \rho_{0F} = (\rho_F^1, \rho_F^2);$$

операторы $\upsilon_j^0(\mu^j; \rho_0)$ и $w_3(\mu_5; \rho_3)$ определены в (12), (25).

Отметим, что функции $w_{j*}(z)$ $(j = \overline{1,3})$, $\psi_{k*}(k = 1,2)$ и $\widetilde{w}_{jF}(z)$ $(j = \overline{1,3})$, $\widetilde{\psi}_{kF}$ $(k = 1,2)$ зависят соответственно от произвольных постоянных и внешних сил, действующих на оболочку. При этом, как нетрудно заметить, для функций $w_{j*}(z)$ $(j = \overline{1,3})$, $\psi_{k*}(z)(k = 1,2)$ имеют место представления (28).

4. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ (36)

Исследуем разрешимость уравнения (36) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (a),(b),(c),(d). Тогда*

1) $L(a)$ — линейный вполне непрерывный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$;

2) $G(a)$ — нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых $a^j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j = 1,2)$ справедлива оценка

$$\|G(a^1) - G(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant c(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_0^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_0^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},$$
$$\|w_0^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} = \|w_1^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)} + \|w_3^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad j = 1,2;$$

3) a_*, $\widetilde{a}_F \in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 2 из [32].

Уравнение $a - L(a) = 0$ имеет лишь нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Действительно, если $a \in W_p^{(2)}(\Omega)$ — ненулевое его решение, то, как нетрудно заметить, a является решением системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим линейным однородным граничным условиям. Тогда, рассуждая как и в случае системы (26), приходим к тому, что вектор a удовлетворяет системе

$$\begin{gathered} w_{1\alpha^1} - \kappa_1 w_3 = 0, \quad w_{2\alpha^2} = 0, \quad w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} = 0, \quad \psi_{j\alpha^j} = 0, \quad j = 1,2, \\ \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1} = 0, \quad w_{3\alpha^1} + \kappa_1 w_1 + \psi_1 = 0, \quad w_{3\alpha^2} + \psi_2 = 0. \end{gathered} \tag{37}$$

Решаем систему (37). При помощи четвёртого, пятого и шестого уравнений для ψ_1, ψ_2 получаем представления

$$\psi_1 = c_0\alpha^2 + c_1, \quad \psi_2 = -c_0\alpha^1 + c_2, \tag{38}$$

где c_0, c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные.

Интегрируя последнее уравнение в (37), имеем

$$w_3 = c_0\alpha^1\alpha^2 - c_2\alpha^2 + c_3(\alpha^1), \tag{39}$$

где $c_3(\alpha^1)$ — произвольная действительная функция переменной α^1.

Заметим, что из формул Петерсона—Кодацци [14], стр. 19 следует $\kappa_1 = \kappa_1(\alpha^1)$, т. е. $\kappa_1(\alpha^1)$ зависит только от α^1. Принимая этот факт во внимание, предпоследнее уравнение в (37) дифференцируем по α^2, последнее уравнение — по α^1 и полученные соотношения вычтем друг из друга. В результате получим $w_{1\alpha^2} = -2c_0/\kappa_1(\alpha^1)$. Интегрируя это соотношение и второе уравнение в (37) по переменной α^2, будем иметь:

$$w_1 = -2c_0\alpha^2/\kappa_1(\alpha^1) + c_4(\alpha^1), \quad w_2 = c_5(\alpha^1), \tag{40}$$

где $c_4(\alpha^1)$, $c_5(\alpha^1)$ — произвольные действительные функции переменной α^1.

Выражения w_1, w_2 из (40) подставим в третье уравнение в (37). Получим $c_5'(\alpha^1) - 2c_0/\kappa_1(\alpha^1) = 0$, откуда находим $c_5(\alpha^1) = c_0\kappa_{10}(\alpha^1) + c_5$, следовательно, для w_2 имеем представление

$$w_2 = c_0\kappa_{10}(\alpha^1) + c_5, \quad \kappa_{10}(\alpha^1) = 2\int\limits_0^{\alpha^1} dt/\kappa_1(t), \tag{41}$$

где c_0, c_5 — произвольные действительные постоянные.

Теперь выражения функций w_1, w_2, w_3 из (39)–(41) подставим в первое и предпоследнее уравнения системы (37). В результате получим систему

$$c_4'(\alpha^1) - \kappa_1(\alpha^1)c_3(\alpha^1) + \alpha^2[c_0\kappa_0(\alpha^1) + c_2\kappa_1(\alpha^1)] = 0, \quad c_3'(\alpha^1) + \kappa_1(\alpha^1)c_4(\alpha^1) + c_1 = 0,$$

которая, как нетрудно видеть, эквивалентна системе

$$c_4'(\alpha^1) - \kappa_1(\alpha^1)c_3(\alpha^1) = 0, \quad c_0\kappa_0(\alpha^1) + c_2\kappa_1(\alpha^1) = 0, \quad c_3'(\alpha^1) + \kappa_1(\alpha^1)c_4(\alpha^1) + c_1 = 0, \tag{42}$$

где $\kappa_0(\alpha^1) = 2\kappa_1'(\alpha^1)/\kappa_1^2(\alpha^1) - \alpha^1\kappa_1(\alpha^1) \in C(\overline{\Omega})$.

Принимая во внимание условие (b), нетрудно показать, что функции $\kappa_0(\alpha^1)$ и $\kappa_1(\alpha^1)$ линейно независимы. Тогда из второго уравнения в (42) получим $c_0 = c_2 = 0$. Теперь уравнения в (42) интегрируем по переменной α^1 и из полученных соотношений исключим функцию $c_3(\alpha^1)$. В результате относительно функции $c_4(\alpha^1)$ получим интегральное уравнение Вольтерра вида

$$\begin{gathered} c_4(\alpha^1) + \int\limits_0^{\alpha^1} \kappa(\alpha^1, t)c_4(t)dt = f(\alpha^1), \quad \kappa(\alpha^1, t) = \kappa_1(t)\int\limits_t^{\alpha^1} \kappa_1(\tau)d\tau, \\ f(\alpha^1) = c_4(0) + c_3(0)\kappa_{11}(\alpha^1) - c_1\kappa_{12}(\alpha^1), \quad \kappa_{1j}(\alpha^1) = \int\limits_0^{\alpha^1} t^{j-1}\kappa_1(\tau)d\tau, \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{43}$$

Уравнение в (43) решаем методом последовательных приближений. Его решение даётся формулой

$$\begin{gathered} c_4(\alpha^1) = f(\alpha^1) + \int\limits_0^{\alpha^1} \Gamma(\alpha^1, t)f(t)dt \equiv Af(\alpha^1), \quad \Gamma(\alpha^1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^{(n)}(\alpha^1, t), \\ \kappa^{(n+1)}(\alpha^1, t) = -\int\limits_t^{\alpha^1} \kappa(\alpha^1, \tau)\kappa^{(n)}(\tau, t)d\tau, \ n = 1, 2, ..., \quad \kappa^{(1)}(\alpha^1, t) = -\kappa(\alpha^1, t); \end{gathered} \tag{44}$$

здесь $\Gamma(\alpha^1, t)$ — резольвента ядра $\kappa(\alpha^1, t)$.

Функция $c_3(\alpha^1)$ через функцию $c_4(\alpha^1)$ выражается формулой

$$c_3(\alpha^1) = c_3(0) - c_1\alpha^1 - \int\limits_0^{\alpha^1} \kappa_1(t)c_4(t)dt. \tag{45}$$

Подставляя выражение $c_4(\alpha^1)$ из (44) в (45), с учётом выражения $f(\alpha^1)$ в (43) для решения

системы (42) получаем представления

$$c_4(\alpha^1)=c_1\beta_1(\alpha^1)+c_3\beta_2(\alpha^1)+c_4\beta_3(\alpha^1),\quad c_3(\alpha^1)=c_1\beta_4(\alpha^1)+c_3\beta_5(\alpha^1)+c_4\beta_6(\alpha^1),$$
$$\beta_1(\alpha^1)=-A\kappa_{12}(\alpha^1),\quad \beta_2(\alpha^1)=A\kappa_{11}(\alpha^1),\quad \beta_3(\alpha^1)=A1(\alpha^1),$$
$$\beta_4(\alpha^1)=-\alpha^1-\int\limits_0^{\alpha^1}\kappa_1(t)\beta_1(t)dt,\quad \beta_5(\alpha^1)=1-\int\limits_0^{\alpha^1}\kappa_1(t)\beta_2(t)dt, \tag{46}$$
$$\beta_6(\alpha^1)=-\int\limits_0^{\alpha^1}\kappa_1(t)\beta_3(t)dt,$$

оператор A определён в (44); $c_1, c_3=c_3(0), c_4=c_4(0)$ — произвольные действительные постоянные.

Если выражения функций $c_3(\alpha^1), c_4(\alpha^1)$ из (46) и значения постоянных $c_0=c_2=0$ подставить в соотношения (38)–(41), то с учётом условия $w_1(0,0)=0$ для обобщённых перемещений будем иметь

$$w_1=c_1\beta_1(\alpha^1)+c_3\beta_2(\alpha^1),\quad w_2=c_5,\quad w_3=c_1\beta_4(\alpha^1)+c_3\beta_5(\alpha^1),\quad \psi_1=c_1,\quad \psi_2=0, \tag{47}$$

где c_1, c_3, c_5 — произвольные действительные постоянные.

Так как $\Psi_j(0)=0$, $j=1,2$, $w_3(0,0)=0$, то используя формулы

$$\Psi_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{v_j^0(t)}{t-z}dt,\quad j=1,2,$$

вытекающие из соотношений (15), получаем $c_1=c_3=c_5=0$, тогда $w_j=0$, $j=\overline{1,3}$, $\psi_k=0$, $k=1,2$. Таким образом, уравнение $a-L(a)=0$ имеет только нулевое решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$. Следовательно, существует обратный оператор $(I-L)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, с помощью которого уравнение (36) сведётся к эквивалентному уравнению

$$a-G_*(a)=a_c+a_F, \tag{48}$$

где $G_*(a)=(I-L)^{-1}G(a)$, $a_c=(I-L)^{-1}a_*$, $a_F=(I-L)^{-1}\widetilde{a}_F$.

Отметим, что вектор a_c является решением однородной системы линейных уравнений равновесия, удовлетворяющим однородным линейным граничным условиям. Поэтому для компонент вектора a_c справедливы представления (47). Также отметим, что вектор a_F в (48) зависит только от внешних сил и $a_F=0$, если внешние силы отсутствуют.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d). Тогда*

1) $G_*(a)$ — нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, причём для любых $a^j=(w_1^j, w_2^j, w_3^j, \psi_1^j, \psi_2^j)$ $(j=1,2)$ справедлива оценка

$$\|G_*(a^1)-G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}\leqslant c_*(\|a^1\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|w_0^1\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}+$$
$$+\|w_0^2\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)})\|a^1-a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)},\quad \|w_0^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}=\|w_1^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)}+\|w_3^j\|^2_{W_p^{(2)}(\Omega)},\quad j=1,2,$$

где c_* — известная положительная постоянная, зависящая от физико-геометрических характеристик оболочки;

2) a_c, $a_F\in W_p^{(2)}(\Omega)$.

Справедливость леммы вытекает из леммы 2 с учётом указанных выше свойств операторов $(I-L)^{-1}$, G.

Исследуем разрешимость уравнения (48) в пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$. Используя лемму 3, для любых $a^j \in W_p^{(2)}(\Omega)$ $(j = 1, 2)$, принадлежащих шару $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$, получаем

$$\|G_*(a^1) - G_*(a^2)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} \leqslant q_*\|a^1 - a^2\|_{W_p^{(2)}(\Omega)}, \quad q_* = 2c_*r(1 + r).$$

Предположим, что радиус r шара и внешние силы таковы, что выполняются неравенства

$$q_* < 1, \ \|a_c + a_F\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1 - q_*)r. \tag{49}$$

Тогда к уравнению (48) можно применить принцип сжатых отображений [37], с. 146, согласно которому уравнение (48) в шаре $\|a\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < r$ имеет единственное решение вида $a = \mathbb{R}(a_c + a_F) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, которое можно представить в виде

$$a = a_0 + a^*, \quad a_0 = \mathbb{R}(a_c + a_F) - \mathbb{R}(a_c), \quad a^* = \mathbb{R}(a_c), \tag{50}$$

где $\mathbb{R}$ — резольвента оператора G_*.

Заметим, что если внешняя нагрузка отсутствует, то $a_0 = 0$, поэтому $a = a^*$. Если вектор a^* обращает в нуль компоненты деформации γ_{jk}^n $(j, k = \overline{1,3}, \ n = 0, 1)$, то $a = a^*$ представляет собой вектор "жёстких смещений"оболочки. Необходимо отметить, что эти "жёсткие смещения"отличаются от реальных жёстких перемещений оболочки как абсолютно твёрдого тела.

Вернёмся к условиям разрешимости (34), в которых под $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$ будем подразумевать решение задачи (1), (2), а функции ω_μ $(\mu = 1, 2)$ определены в (3). Используя равенства (1) и (2), убеждаемся в том, что условия разрешимости (34), содержащие обобщённые перемещения, выполняются. Поэтому условия (34) сводятся к одному условию

$$\iint\limits_\Omega R^2 d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_\Gamma P^2 ds = 0. \tag{51}$$

Кроме того, если первое равенство в (2) умножить на функцию $\beta_2(\alpha^1)$, третье равенство — на функцию $\beta_5(\alpha^1$, определённые в (46), после этого интегрировать по области Ω и сложить, то с учётом соотношений $\beta_2' - \kappa_1\beta_5 = 0$, $\beta_5' + \kappa_1\beta_2 = 0$ получим

$$\iint\limits_\Omega (\beta_2 R^1 + \beta_5 R^3) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_\Gamma (\beta_2 P^1 + \beta_5 P^3) ds = 0. \tag{52}$$

Теперь первое равенство в (2) умножим на $\beta_1(\alpha^1)$, третье равенство — на $\beta_4(\alpha^1)$, предпоследнее — на единицу, интегрируем по области Ω и сложим. Используя соотношения $\beta_1' - \kappa_1\beta_4 = 0$, $\beta_4' + \kappa_1\beta_1 + 1 = 0$, будем иметь верное равенство

$$\iint\limits_\Omega (\beta_1 R^1 + \beta_4 R^3 + L^1) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_\Gamma (\beta_1 P^1 + \beta_4 P^3 + N^1) ds + \iint\limits_\Omega T^{1\mu}\omega_\mu d\alpha^1 d\alpha^2 = 0,$$

которое в случае линейной задачи принимает вид

$$\iint\limits_\Omega (\beta_1 R^1 + \beta_4 R^3 + L^1) d\alpha^1 d\alpha^2 + \int\limits_\Gamma (\beta_1 P^1 + \beta_4 P^3 + N^1) ds = 0.$$

Отметим, что условие (52) является необходимым условием, а условие (51) — необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (1), (2).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнены условия (a), (b), (c), (d),* (32), (49), (52). *Тогда для разрешимости задачи* (1), (2) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (51). *В случае его выполнения задача* (1), (2) *имеет обобщённое решение* $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 4/(2-\beta)$ *вида* (50).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. 5-е изд. М.: Наука, 1966.
2. *Линьков А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. М.: Наука,1999.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970.
4. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бургуладзе Т. В.* Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
5. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981.
6. *Михлин С. Г., Морозов Н. Ф., Паукшто М. В.* Интегральные уравнения в теории упругости. СПб.: СПбГУ, 1994.
7. *Александров А. Я., Соловьёв Ю. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1978.
8. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
9. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
10. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
11. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
12. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992.
13. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1976. V. 63. P. 337–403.
14. *Ворович И. И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989.
15. *Ворович И. И., Лебедев Л. П.* К задаче равновесия пластины, подкреплённой рёбрами жёсткости // Прикл. матем. и механика. 1999. Т. 63, № 1. С. 87–92.
16. *Ворович И. И., Лебедев Л. П.* Некоторые вопросы механики сплошной среды и математические проблемы теории тонкостенных конструкций // Прикл. механика. 2002. Т. 38, № 4. С. 3–20.
17. *Морозов Н. Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости. Л.: ЛГУ, 1978.
18. *Карчевский М. М.* Исследование разрешимости нелинейной задачи о равновесии пологой незакреплённой оболочки // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2013. Т. 155, № 3. С. 105–110.
19. *Карчевский М. М.* Смешанный метод конечных элементов для неклассических граничных задач теории пологих оболочек // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, № 3. С. 322–335.
20. *Кириченко В. Ф., Крысько В. А.* О существовании решения одной нелинейной связанной задачи термоупругости // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20, № 6. С. 1583–1588.
21. *Кириченко В. Ф.* О существовании решений в связанной задаче термоупругости для трёхслойных оболочек // Изв. вузов. Матем. 2012. № 9. С. 66–71.
22. *Галимов К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: КГУ, 1975.
23. *Галимов К. З., Паймушин В. Н., Терегулов И. Г.* Основания нелинейной теории оболочек. Казань: Фэн, 1996.
24. *Кабриц С.А., Михайловский Е. И., Товстик П. Е., Чёрных К. Ф., Шамина В. А.* Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: СПбГУ, 2003.
25. *Еремееев В. А., Зубов Л. М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008.
26. *Голушко С. К., Немировский Ю. В.* Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М.: Физматлит, 2008.

27. *Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П.* Обобщённая модель Тимошенко—Рейсснера для многослойной пластины // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 22–35.

28. *Еремеев В. А., Лебедев Л. П.* О разрешимости краевых задач теории упругих микрополярных оболочек с жёсткими включениями // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 111–115.

29. *Тимергалиев С. Н.* К вопросу о существовании решений нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными теории пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 3. С. 373–386; DOI:10.1134/S0374064115030085

30. *Тимергалиев С. Н.* К проблеме разрешимости нелинейных задач равновесия пологих оболочек типа Тимошенко // Прикл. матем. и механика. 2018. Т. 82, № 1. С. 98–113.

31. *Тимергалиев С. Н.* Метод интегральных уравнений исследования разрешимости краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих неоднородных оболочек типа Тимошенко // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 2. С. 239–255; DOI:10.1134/S037406411902

32. *Тимергалиев С. Н.* К проблеме разрешимости нелинейных краевых задач для произвольных изотропных пологих оболочек типа Тимошенко со свободными краями // Изв. вузов. Матем. 2021. № 4. С. 90–107; DOI:10.26907/0021-3446-2021-4-90-107

33. *Тимергалиев С. Н.* О существовании решений краевых задач для нелинейных уравнений равновесия пологих анизотропных оболочек типа Тимошенко в соболевском пространстве // Изв. вузов. Матем. 2022. № 4. С. 67–83; DOI:10.26907/0021-3446-2022-4-67-83

34. *Векуа И. Н.* Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988.

35. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962.

36. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи, 2-е изд. М.: Физматгиз, 1963.

37. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.

UDC 517.958:539.3

ON THE EXISTENCE OF SOLUTIONS OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONSHALLOW TIMOSHENKO-TYPE SHELLS WITH FREE EDGES

© 2023 **S. N. Timergaliev**

Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, 420043 Russia

E-mail: samat_tim@mail.ru

Received 13.03.2023, revised 12.11.2023, accepted 15.11.2023

Abstract. We study the existence of solutions of a boundary value problem for a system of nonlinear second-order partial differential equations for the generalized displacements under given nonlinear boundary conditions that describes the equilibrium state of elastic nonshallow isotropic inhomogeneous shells of zero Gaussian curvature with free edges in the framework of the Timoshenko shear model. The research method is based on integral representations for generalized displacements containing arbitrary functions that allow the original boundary value problem to be reduced to a nonlinear operator equation for generalized displacements in the Sobolev space. The solvability of the operator equation is established using the contraction mapping principle.

Keywords: nonshallow Timoshenko-type shell of zero Gaussian curvature, nonlinear boundary value problem, partial differential equations, generalized solution, holomorphic function, operator equation, existence theorem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.411

REFERENCES

1. N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1966) [in Russian].
2. A. M. Lin'kov, *Complex Method of Boundary Integral Equations of Elasticity Theory* (Nauka, Moscow, 1999) [in Russian].
3. A. I. Lurie, *Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
4. V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Basheleishvili, and T. V. Burguladze, *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
5. V. Z. Parton and P. I. Perlin, *Methods of Mathematical Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1981) [in Russian].
6. S. G. Mikhlin, N. F. Morozov, and M. V. Paukshto, *Integral Equations in the Theory of Elasticity* (SPbGU, St. Petersburg, 1994) [in Russian].
7. A. Ya. Aleksandrov and Yu. I. Solov'ev, *Spatial Problems of the Theory of Elasticity* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
8. G. Fichera, *Existence Theorems in Elasticity* (Berlin—Heidelberg—New York, Springer, 1972; Mir, Moscow, 1974).
9. G. Duvaut and J.-L. Lions, *Les in equations en mecanique et en physique* (Dunod, Paris, 1972; Nauka, Moscow, 1980).
10. N. F. Morozov, *Mathematical Issues in the Theory of Cracks* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 874–891.

11. A. M. Khludnev, *Problems of the Theory of Elasticity in Nonsmooth Domains* (Fizmatlit, Moscow, 2010) [in Russian].
12. P. G. Ciarlet, *Mathematical Theory of Elasticity* (Elsevier, Amsterdam, 1988; Mir, Moscow, 1992).
13. J. M. Ball, "Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity," Arch. Ration. Mech. Anal. **63**, 337–403 (1976).
14. I. I. Vorovich, *Mathematical Problems of the Nonlinear Theory of Shallow Shells* (Nauka, Moscow, 1989) [in Russian].
15. I. I. Vorovich and L. P. Lebedev, "The problem of the equilibrium of a plate reinforced with stiffeners," J. Appl. Math. Mech. **63** (1), 79–83 (1999).
16. I. I. Vorovich and L. P. Lebedev, "Some issues of continuum mechanics and mathematical problems in the theory of thin-walled structures," Int. Appl. Mech. **38** (4), 387–398 (2002).
17. N. F. Morozov, *Selected Two-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity* (Leningrad. Gos. Univ., Leningrad, 1978) [in Russian].
18. M. M. Karchevsky, "Study of the solvability of the nonlinear problem of the equilibrium of a shallow free shell," Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki **155** (3), 105–110 (2013) [in Russian].
19. M. M. Karchevsky, "Mixed finite-element method for the nonclassical boundary problems of the theory of shallow shells," Uchen. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki **158** (3), 322–335 (2016) [in Russian].
20. V. F. Kirichenko and V. A. Krys'ko, "On the existence of a solution of a nonlinear coupled problem of thermoelasticity," Differ. Uravn. **20** (6), 1583–1588 (1984) [in Russian].
21. V. F. Kirichenko, "Solvability of a connected thermoelasticity problem for three-layer shells," Russ. Math. **56** (9), 57–61 (2012).
22. K. Z. Galimov, *Fundamentals of the Nonlinear Theory of Thin Shells* (Kazan. Gos. Univ, Kazan, 1975) [in Russian].
23. K. Z. Galimov, V. N. Paimushin, and I. G. Teregulov, *Foundations of the Nonlinear Theory of Shells* (Fen, Kazan, 1996) [in Russian].
24. S. A. Kabrits, E. I. Mikhailovskii, P. E. Tovstik, K. F. Chernykh, and V. A. Shamina, *General Nonlinear Theory of Elastic Shells* (SPbGU, St. Petersburg, 2003) [in Russian].
25. V. A. Eremeev and L. M. Zubov, *Mechanics of Elastic Shells* (Nauka, Moscow, 2008) [in Russian].
26. S. K. Golushko and Yu. V. Nemirovskii, *Direct and Inverse Problems of Mechanics of Elastic Composite Plates and Shells of Revolution* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
27. N. F. Morozov, P. E. Tovstik, and T. P. Tovstik, "Generalized Timoshenko—Reissner model for a multilayer plate," Mech. Solids **51**, 527–537 (2016).
28. V. A. Eremeev and L. P. Lebedev, "On solvability of boundary value problems for elastic micropolar shells with rigid inclusions," Mech. Solids **55**, 852–856 (2020).
29. S. N. Timergaliev, "On the existence of solutions of a nonlinear boundary value problem for the system of partial differential equations of the theory of Timoshenko type shallow shells with free edges," Differ. Equations **51** (3), 73–386 (2015). https://doi.org/10.1134/S0012266115030088
30. S. N. Timergaliev, "On the problem of solvability of nonlinear equilibrium problems for shallow shells of Timoshenko type," Prikl. Mat. Mekh. **82** (1), 98–113 (2018) [in Russian].
31. S. N. Timergaliev, "Method of integral equations for studying the solvability of boundary value problems for the system of nonlinear differential equations of the theory of Timoshenko type shallow inhomogeneous shells," Differ. Equations **55** (2), 243–259 (2019). https://doi.org/10.1134/S0012266119020095
32. S. N. Timergaliev, "On the problem of solvability of nonlinear boundary value problems for arbitrary isotropic shallow shells of the Timoshenko type with free edges," Russ. Math. **65** (4), 81–97 (2021). https://doi.org/10.3103/S1066369X21040071
33. S. N. Timergaliev, "On the existence of solutions to boundary value problems for nonlinear equilibrium equations of shallow anisotropic shells of Timoshenko type in Sobolev space," Russ. Math. **66** (4), 59–73 (2022). https://doi.org/10.3103/S1066369X22040065
34. I. N. Vekua, *Generalized Analytical Functions* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].

35. N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations* (Nauka, Moscow, 1962) [in Russian].

36. F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems* (Fizmatgiz, Moscow, 1963) [in Russian].

37. M. A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations* (Gostekhizdat, Moscow, 1956) [in Russian].

УДК 517.977.5

АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

© 2023 **А. Ю. Чеботарев**[a], **Н. М. Пак**[b], **А. Е. Ковтанюк**[c]

Дальневосточный федеральный университет, Дальневосточный центр математических исследований,
п. Аякс, 10, о. Русский, г. Владивосток 690922, Россия

E-mails: [a]chebotarev.ayu@dvfu.ru, [b]pak.nm@dvfu.ru, [c]kovtanyuk.ae@dvfu.ru

Поступила в редакцию 01.08.2023 г.; после доработки 29.09.2023 г.;
принята к публикации 01.11.2023 г.

Рассматривается начально-краевая задача для квазилинейных уравнений сложного теплообмена, моделирующих процесс внутривенной лазерной абляции. Получены априорные оценки решения. Представлены результаты о глобальной однозначной разрешимости задачи. Предложен алгоритм нахождения решения начально-краевой задачи, эффективность которого проиллюстрирована численными примерами. Проведена оценка влияния внутреннего теплового излучения на поведение температурных полей.

Ключевые слова: квазилинейные уравнения сложного теплообмена, внутривенная лазерная абляция, нелокальная однозначная разрешимость, численное моделирование.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.412

ВВЕДЕНИЕ

Внутривенная лазерная абляция (ВВЛА) представляет собой безопасную и минимально инвазивную процедуру, обладающую высокой эффективностью в лечении варикозной болезни вен [1, 2]. При проведении ВВЛА лазерное оптоволокно вводится в повреждённую вену. Далее оптоволокно вытягивается из вены, при этом по нему передаётся лазерное излучение. Торец оптоволокна, из которого выходит излучение, обычно покрыт карбонизированным слоем, который разделяет поступающую энергию, в результате чего одна её часть поглощается карбонизированным слоем, что вызывает его нагрев, другая часть идёт на излучение. Тепло от нагретого карбонизированного слоя передаётся в кровь посредством кондуктивного теплообмена. Теплообмен многократно усиливается за счёт потока пузырьков, образующихся на разогретом торце оптоволокна. Излучение, поступающее в кровь и окружающую ткань, частично поглощается, что сопровождается выделением тепла. В итоге образованная и поступившая за счёт различных механизмов тепловая энергия вызывает значительный нагрев вены, что приводит к её облитерации (закрытию сосуда).

Оптимизация параметров излучения при проведении ВВЛА позволяет осуществить успешную облитерацию вены с минимальными осложнениями. Оптимальное излучение, с одной стороны, должно обеспечивать достаточно высокую температуру внутри вены для осуществления облитерации, с другой стороны, сгенерированное температурное поле должно быть относительно безопасным для окружающей вену ткани. Основными параметрами, влияющими на эффективность и безопасность процедуры лазерной абляции, являются мощность

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 23-21-00087).

лазера, длина волны лазерного излучения, скорость движения оптоволокна, соотношение долей мощности лазера, идущих на излучение и на нагрев наконечника (карбонизированного слоя) оптоволокна. Как правило, при проведении лазерной абляции используется лазер с длиной волны от 810 до 1940 нм. Достаточно распространёнными являются диапазоны скорости движения оптоволокна от 1 до 3 мм/с и мощности лазерного излучения от 10 до 15 Вт [3–7].

Классическая модель, описывающая взаимодействие оптического излучения с биологической тканью, включает в себя уравнение переноса излучения и уравнение теплопроводности [8]. Соответственно, расчёт радиационных и температурных полей заключается в нахождении решения уравнения переноса, вычисление по нему объёмной плотности поглощённой энергии излучения и последующее нахождение решения уравнения теплопроводности, в которое поглощённая энергия излучения входит в качестве источников тепла. С целью упрощения модели уравнение переноса излучения иногда заменяется на его диффузионное приближение, которое также позволяет учитывать внутреннее тепловое излучение, индуцированное самой средой (излучение чёрного тела), что приводит к нелинейной модели сложного теплообмена [9].

Основными эффектами, которые обычно учитываются при моделировании ВВЛА, являются кондуктивный теплообмен, перенос излучения и его поглощение с выделением тепла, а также перенос тепла потоком пузырьков, образующихся на наконечнике оптоволокна. В работах [5–7] на основе оценки экспериментальных данных перенос тепла потоком пузырьков моделируется использованием кусочно-постоянного коэффициента теплопроводности, зависящего от температуры следующим образом: при достижении температуры в некоторой точке 95 °C и более коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз. Также в указанных работах оценка эффективности лазерной абляции осуществляется через анализ температурных профилей в точках наблюдения, находящихся в различных зонах вычислительной области (кровь, внутренняя и внешняя стенки вены, перивенозная ткань).

Отметим, что во многих работах, посвящённых моделированию ВВЛА (см., например, [3–7]) при выборе оптимальных параметров излучения используется прямое многократное моделирование, представляющее собой перебор различных вариантов с целью поиска некоторого оптимального решения. Данный подход не является эффективным. К тому же остаются без ответа вопросы, связанные с существованием и единственностью оптимального решения.

В работах [10, 11] рассматривается принципиально другой подход, заключающийся в решении задачи оптимального управления для подбора параметров излучения с целью приблизить температурный профиль в определённой точке модельной области к заданному графику, характеристики которого (максимальная температура и продолжительность кипения) обеспечивают успешное проведение процедуры ВВЛА. В качестве управления процессом берутся мощности источника, идущие на излучение и нагрев наконечника оптоволокна.

Одним из этапов поиска оптимального управления и состояния является нахождение решения начально-краевой задачи для модели ВВЛА. Поэтому вопросы существования и единственности решения начально-краевой задачи и обоснование сходимости итерационного алгоритма являются весьма актуальными. В работе [9] доказывается существование решения начально-краевой задачи для модели ВВЛА, учитывающей внутреннее тепловое излучение, и предлагается алгоритм нахождения её решения. Вопрос нелокальной единственности решения оставался до сих пор открытым. В настоящей работе доказывается глобальная единственность начально-краевой задачи для модели ВВЛА, учитывающей внутреннее тепловое излучение. Поскольку для уравнения теплопроводности в отличии от [9] были рассмотрены граничные условия Дирихле, это потребовало проведение отдельного доказательства глобальной разрешимости задачи. В серии вычислительных экспериментов оценивается влияние внутреннего теплового излучения на решение начально-краевой задачи.

Статья организована следующим образом. В п. 1 формулируется начально-краевая задача, которая затем записывается в виде задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами и выводятся основные априорные оценки решения. Далее устанавливается теорема

единственности. В п. 2 и 3 доказана нелокальная однозначная разрешимость начально-краевой задачи. Наконец, в п. 4 обсуждаются результаты численных экспериментов. В частности, приводится сравнение температурных профилей для моделей ВВЛА с учётом внутреннего теплового излучения и без него.

1. ПОСТАНОВКА И ФОРМАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В ограниченной трёхмерной области Ω с границей $\Gamma = \partial\Omega$ в интервале времени $(0, T)$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\sigma\partial\theta/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta)\nabla\theta) + b(\theta^3|\theta| - \varphi) = f, \tag{1}$$

$$-\operatorname{div}(\alpha\nabla\varphi) + \beta(\varphi - \theta^3|\theta|) = g, \tag{2}$$

$$\theta|_\Gamma = \theta_b, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_{in}. \tag{3}$$

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения. При умножении θ и φ на соответствующие нормализующие множители $\mathcal{M}_\theta$ и $\mathcal{M}_\varphi$ мы получаем абсолютную температуру и полную интенсивность излучения. В частности, $\theta_C = \mathcal{M}_\theta\,\theta - 273$ представляет собой температуру в градусах Цельсия (°C). Описание радиационных и термофизических параметров b, α, β и γ, а также нормализующих множителей $\mathcal{M}_\theta$ и $\mathcal{M}_\varphi$ можно найти в [12]. Величина σ есть произведение плотности среды на удельную теплоёмкость, $k(\theta)$ представляет собой коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры, функции f, g характеризуют мощности тепловых и радиационных источников.

В дальнейшем считаем, что Ω — липшицева ограниченная область, $\Gamma = \partial\Omega$; $Q = \Omega\times(0,T)$, $\Sigma = \Gamma\times(0,T)$. Через L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначаем пространство Лебега, через H^1 — пространство Соболева W_2^1, H_0^1 — подпространство в H^1, состоящее из функций с нулевыми граничными значениями, а через $L^p(0,T;X)$ — пространство Лебега функций класса L^p, определённых на $(0,T)$, со значениями в банаховом пространстве X.

Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям:

(i) $\alpha, \beta, \sigma \in L^\infty(\Omega)$, $b = r\beta$, $r = Const > 0$; $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\beta \geqslant \beta_0$, $\sigma \geqslant \sigma_0$, $\alpha_0, \beta_0, \sigma_0 = Const > 0$;

(ii) $0 < k_0 \leqslant k(s) \leqslant k_1$, $s \in \mathbb{R}$, $k_j = Const$;

(iii) $0 \leqslant \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$, $\theta_b|_\Sigma = \widetilde{\theta}$, $\widetilde{\theta} \in H^1(Q)$; $0 \leqslant \theta_{in} \in L^\infty(\Omega)$; $\gamma_0 \leqslant \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\gamma_0 = Const > 0$;

(iv) $0 \leqslant f, g \in L^\infty(Q)$.

Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V_0 = H_0^1(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$. Через V_0' и V' обозначаем пространства, сопряжённые соответственно с V_0 и V. Пространство H отождествляем с пространством H', так что $V_0 \subset V \subset H = H' \subset V' \subset V_0'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ стандартную норму в H, а через (h, v) — значение функционала $h \in V_0'$ (соответственно $h \in V'$) на элементе $v \in V_0$ (соответственно $v \in V$), совпадающее со скалярным произведением в H, если $h \in H$. Скалярное произведение в V_0 задаём как $(u, v)_0 = (\nabla u, \nabla v)$. Также будем использовать пространство

$$W = \{y \in L^2(0,T;V_0)\colon \sigma y' = \sigma dy/dt \in L^2(0,T,V_0')\}.$$

Введём следующее обозначение $[s]^q = |s|^q \operatorname{sign} s$, $q > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Указанная функция является монотонной. Отметим, что $d[s]^q/ds = q|s|^{q-1}$.

Определим операторы $A_1\colon V \to V_0'$ и $A_2\colon V \to V'$, используя равенства:

$$(A_1(\theta), v) = (k(\theta)\nabla\theta, \nabla v) = (\nabla h(\theta), \nabla v) \ \ \forall v \in V_0, \ (A_2\varphi, v) = (\alpha\nabla\varphi, \nabla v) + \int\limits_\Gamma \gamma\varphi v d\Gamma \ \ \forall v \in V.$$

Здесь

$$h(s) = \int_0^s k(r)dr.$$

В дальнейшем в качестве нормы функции v в пространстве V будем использовать $(A_2 v, v)^{1/2}$.

Определение. Пара $\theta = \zeta + \widetilde{\theta}$, $\zeta \in W$, $\varphi \in L^2(0,T;V)$ называется решением задачи (1)–(3), если

$$\sigma\theta' + A_1(\theta) + b([\theta]^4 - \varphi) = f \ \text{ п. в. на } (0,T), \quad \theta(0) = \theta_{in}; \tag{4}$$

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - [\theta]^4) = g_b + g \ \text{ п. в. на } (0,T). \tag{5}$$

Здесь

$$g_b \in L^2(0,T;V'), \quad (g_b, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v d\Gamma \ \ \forall v \in V.$$

Замечание. Поскольку $\zeta \in W$, то $\zeta \in C([0,T];V_0')$ и поэтому начальное условие имеет смысл.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия (i)–(iv), θ, φ — решение задачи (1)–(3). Тогда $\theta, \varphi \in L^\infty(Q)$ и справедливы оценки:*

$$0 \leqslant \theta \leqslant w(t), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant w^4(t) + M_2.$$

Здесь $w(t) = M_0 + M_1 t$, $t \in [0,T]$, $M_1 = \sigma_0^{-1}\left(\|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \max bM_2\right)$, $M_2 = \beta_0^{-1}\|g\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Доказательство. Пусть $\widehat{\theta} = \theta - w$. Перепишем уравнения (4), (5) в виде

$$\sigma\widehat{\theta}' + A_1(\theta) + b([\widehat{\theta} + w]^4 - (\varphi - M_2)) = f - \sigma M_1 + bM_2 \leqslant 0, \tag{6}$$

$$rA_2\varphi - rg_b + b(\varphi - M_2 - [\widehat{\theta} + w]^4) = rg - bM_2 \leqslant 0. \tag{7}$$

Умножим скалярно уравнение (6) на $\eta = \max\{\widehat{\theta}, 0\} \in W$, уравнение (7) на $\xi = \max\{[\varphi - M_2]^{1/4} - w, 0\} \in L^2(0,T;V)$ и сложим полученные равенства. Учтём, что значение правой части неположительно, а также

$$(\sigma\widehat{\theta}', \eta) = (\sigma\eta', \eta) = \frac{d}{2dt}(\sigma\eta, \eta), \quad (A_1(\theta), \eta) = (k(\theta)\nabla\eta, \nabla\eta) \geqslant 0,$$

$$(A_2\varphi - g_b, \xi) = \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega,\ \varphi - M_2 > w^4} \alpha|\nabla\varphi|^2|\varphi - M_2|^{-3/4}dx + \int\limits_{\Gamma,\ \varphi - M_2 > w^4} \gamma(\varphi - \theta_b^4)\xi d\Gamma \geqslant 0,$$

$$([\widehat{\theta} + w]^4 - (\varphi - M_2))(\max\{\widehat{\theta}, 0\} - \max\{[\varphi - M_2]^{1/4} - w, 0\}) \geqslant 0.$$

Поэтому,

$$\frac{d}{dt}(\sigma\eta, \eta) \leqslant 0, \quad \eta|_{t=0} = 0.$$

Следовательно, $\eta = 0$, $\widehat{\theta} \leqslant 0$, $\theta \leqslant w$.

Далее, умножим уравнение (5) скалярно на $\psi = \max\{\varphi - M_2 - w^4, 0\} \in L^2(0,T;V)$, записав результат в виде:

$$(A_2\varphi - g_b, \psi) + (\beta(\varphi - M_2 - [\theta]^4), \psi) = (g - \beta M_2, \psi) \leqslant 0.$$

Заметим, что с учётом оценки для θ справедливы неравенства

$$(A_2\varphi - g_b, \psi) = (\alpha\nabla\psi, \nabla\psi) + \int\limits_\Gamma \gamma(\varphi - \theta_b^4)d\Gamma \geqslant (\alpha\nabla\psi, \nabla\psi),$$

$$(\beta(\varphi - M_2 - [\theta]^4), \psi) = (\beta\psi, \psi) + (\beta(w^4 - [\theta]^4), \psi) \geqslant (\beta\psi, \psi).$$

Поэтому $\psi = 0$, $\varphi \leqslant w^4 + M_2$.

Для получения оценок снизу, полагаем теперь для $\varepsilon > 0$

$$\eta = \min\{\theta + \varepsilon, 0\} \in W, \quad \xi = \min\{[\varphi]^{1/4} + \varepsilon, 0\} \in L^2(0,T;V), \ \ \eta, \xi \leqslant 0.$$

Умножим уравнение (4) скалярно на η, уравнение (5) на $r\xi$ и сложим полученные равенства. Тогда

$$\frac{d}{2dt}(\sigma\eta,\eta) + (k(\theta)\nabla\eta,\nabla\eta) + (b([\theta]^4 - \varphi), \min\{\theta+\varepsilon,0\} - \min\{[\varphi]^{1/4}+\varepsilon,0\}) +$$

$$\frac{r}{4}\int\limits_{\Omega,\ \varphi<-\varepsilon^4} \alpha|\nabla\varphi|^2|\varphi|^{-3/4}dx + r\int\limits_{\Gamma,\ \varphi<-\varepsilon^4} \gamma(\varphi - \theta_b^4)\xi d\Gamma = (f,\eta) + (g,\xi) \leqslant 0.$$

Все слагаемые в левой части, начиная со второго, неотрицательны и поэтому

$$\frac{d}{dt}(\sigma\eta,\eta) \leqslant 0, \quad \eta|_{t=0} = 0;\ \eta = 0, \ \ \theta \geqslant -\varepsilon.$$

Следовательно, $\varphi \geqslant -\varepsilon^4$. В силу произвольности ε получаем $\theta, \varphi \geqslant 0$. Лемма доказана. □

2. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда задача (1)–(3) имеет не более одного решения.*

Доказательство. Пусть $\{\theta_1, \varphi_1\}$, $\{\theta_2, \varphi_2\}$ — решения задачи (1)–(3), $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Тогда

$$\sigma\theta' + A_1(\theta_1) - A(\theta_2) + b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4 - \varphi) = 0 \ \text{ п. в. на } (0,T), \quad \theta(0) = 0; \tag{8}$$

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - ([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4)) = 0 \ \text{ п. в. на } (0,T). \tag{9}$$

Отметим сразу, что в силу леммы 1 справедливы оценки $0 \leqslant \theta_{1,2} \leqslant M = M_0 + M_1 T$. Умножим скалярно уравнение (9) на φ. Тогда

$$(A_2\varphi,\varphi) + (\beta\varphi,\varphi) = (\beta([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4),\varphi) \leqslant 4\max\beta M^3\|\theta\|\|\varphi\|.$$

Следовательно,

$$\|\varphi\| \leqslant 4\sigma_0^{-1}\max\beta M^3\|\theta\|. \tag{10}$$

Далее, определим функцию $z \in L^2(0,T;V_0)$ как решение следующей задачи, представляющей собой задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$(\nabla z, \nabla v) = (\sigma\theta, v) \quad \forall v \in V_0.$$

Заметим, что

$$(\nabla(h(\theta_1) - h(\theta_2)), \nabla z) = (h(\theta_1) - h(\theta_2), \sigma\theta) \geqslant \sigma_0 k_0\|\theta\|^2, \tag{11}$$

$$(\sigma\theta', z) = (\nabla z', \nabla z) = \frac{d}{2dt}\|\nabla z\|^2. \tag{12}$$

Умножая скалярно уравнение (8) на z и пользуясь соотношениями (10)–(12), получаем неравенство

$$\frac{d}{2dt}\|\nabla z\|^2 + \sigma_0 k_0\|\theta\|^2 \leqslant -(b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4 - \varphi), z) \leqslant 4\max\beta M^3(r + \sigma_0^{-1})\|\theta\|\|z\|.$$

Оценим правую часть, используя неравенство $\|\theta\|\|z\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|\theta\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|z\|^2$, где $K\varepsilon = 2\sigma_0 k_0$, $K = 4\max\beta M^3(r + \sigma_0^{-1})$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\|\nabla z\|^2 \leqslant \frac{K}{\varepsilon}\|z\|^2 \leqslant \frac{KC_0}{\varepsilon}\|\nabla z\|^2,$$

где C_0 — норма оператора вложения $V_0 \to H$. Поскольку $z|_{t=0} = 0$, из полученной оценки следует, что $\nabla z = 0$. Поэтому $\theta = 0$ и, в силу (10), $\varphi = 0$, что доказывает теорему. □

3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ

Рассмотрим предварительно задачу со "срезанной" нелинейностью. Задача заключается в отыскании пары $\theta = \zeta + \widetilde{\theta}$, $\zeta \in W$, $\varphi \in L^2(0,T;V)$, такой что

$$\sigma\theta' + A_1(\theta) + b(c(\theta) - \varphi) = f \ \text{ п. в. на } (0,T), \quad \theta(0) = \theta_{in}; \tag{13}$$

$$A_2\varphi + \beta(\varphi - c(\theta)) = g_b + g \ \text{ п. в. на } (0,T). \tag{14}$$

Здесь

$$c(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta < 0; \\ [\theta]^4, & \text{если } 0 \leqslant \theta \leqslant w(t); \\ w^4(t), & \text{если } \theta > w(t). \end{cases}$$

Напомним, что $w(t) = M_0 + M_1 t, \ \ t \in [0,T]$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда задача (13)–(14) имеет решение.*

Доказательство. Определим галёркинские приближения θ_m решения задачи (13)–(14) и выведем необходимые для доказательства разрешимости априорные оценки. В пространстве V_0 рассмотрим ортонормированный в H базис $w_1, w_2, \ldots$ такой, что $(\nabla w_j, \nabla v) = \lambda(w_j, v) \ \ \forall v \in V_0$: $V_m = \operatorname{span}\{w_1, ..., w_m\}$. Пусть $\theta_m(t) = \zeta_m(t) + \widetilde{\theta}, \ \ \zeta_m(t) \in V_m, \ t \in (0,T)$ Функция ζ_m является решением следующей задачи Коши:

$$(\sigma\theta_m' + A_1(\theta_m) + b(c(\theta_m) - \varphi_m) - f, v) = 0 \ \forall v \in V_m, \quad \zeta_m|_{t=0} = \zeta_{0m}. \tag{15}$$

Здесь φ_m является решением задачи

$$A_2\varphi_m + \beta(\varphi_m - c(\theta_m)) = g_b + g, \ \ \text{то есть} \ \ \varphi_m = (A_2 + \beta I)^{-1}(\beta c(\theta_m) + g_b + g); \tag{16}$$

ζ_{0m} — ортогональная проекция в H функции $\theta_{in} - \widetilde{\theta}|_{t=0}$ на подпространство V_m.

Отметим, что в силу равенства

$$(A_1(\theta_m), w_j) = (\nabla(h(\theta_m) - h(\widetilde{\theta})), \nabla w_j) + (\nabla h(\widetilde{\theta}), \nabla w_j) = \lambda_j(h(\theta_m) - h(\widetilde{\theta}), w_j) + (\nabla h(\widetilde{\theta})), \nabla w_j)$$

слагаемые в системе (15) непрерывно зависят от ζ_m и задача (15) разрешима локально по времени.

Выведем необходимые для доказательства разрешимости априорные оценки. Уравнение (16) умножим скалярно на φ_m. Тогда

$$(A_2\varphi_m, \varphi_m) + (\beta\varphi_m, \varphi_m) = (\beta c(\theta_m) + g_b + g, \varphi_m).$$

В силу ограниченности функций $c(\theta_m)$ и g заключаем, что

$$(\beta c(\theta_m) + g, \varphi_m) \leqslant C\|\varphi_m\|.$$

Здесь и далее при доказательстве теоремы, через C обозначаем постоянные, не зависящие от m. Далее,

$$(g_b, \varphi_m) = \int\limits_\Gamma \gamma\theta_b^4\varphi_m d\Gamma \leqslant C\|\varphi_m\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant C\|\varphi_m\|_V.$$

Следовательно,

$$\|\varphi_m\|_V^2 + \beta_0\|\varphi_m\|^2 \leqslant C(\|\varphi_m\| + \|\varphi_m\|_V) \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_m\|_V^2 + \frac{1}{2}\beta_0\|\varphi_m\|^2 + C.$$

Поэтому

$$\text{последовательность } \varphi_m \text{ ограничена в } L^\infty(0,T;V). \tag{17}$$

Полагая $v = \zeta_m$ в (15), получим

$$(\sigma\zeta_m', \zeta_m) + (\sigma\widetilde{\theta}', \zeta_m) + (k(\theta_m)\nabla\zeta_m, \nabla\zeta_m) + (k(\theta_m)\nabla\widetilde{\theta}, \nabla\zeta_m) + (b(c(\theta_m) - \varphi_m) - f, \zeta_m).$$

Используя ограниченность функций $k(\theta_m)$, $c(\theta_m)$, φ_m и f, получаем

$$(\sigma\zeta_m', \zeta_m) + k_0\|\nabla\zeta_m\|^2 \leqslant C(\|\zeta_m\|^2 + \|\nabla\zeta_m\|^2).$$

Интегрируя по времени, приходим к неравенству

$$\sigma_0\|\zeta_m(t)\|^2 + \frac{k_0}{2}\int\limits_0^t \|\nabla\zeta_m(s)\|^2 ds \leqslant C(1 + \int\limits_0^t \|\zeta_m(s)\|^2 ds.$$

Следовательно, используя лемму Гронуолла, выводим для $\theta_m = \zeta_m + \widetilde{\theta}$ следующие оценки

$$\|\theta_m\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqslant C, \quad \|\theta_m\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C, \quad \|h(\theta_m)\|_{L^2(0,T;V)} \leqslant C. \tag{18}$$

Получим оценку, гарантирующую компактность последовательности θ_m в $L^2(Q)$. Запишем (15) в виде

$$(\sigma\zeta_m' - F_m, v) = 0 \ \forall v \in V_m, \tag{19}$$

где

$$-(F_m, v) = (\sigma\widetilde{\theta}', v) + (k(\theta_m)\nabla\theta_m, \nabla v) + (b(c(\theta_m) - \varphi_m) - f, v).$$

Отметим, что, в силу полученных оценок, последовательность F_m ограничена в $L^2(0,T;V_0')$. В системе (19) положим $v = \zeta_m(t) - \zeta_m(s)$ и проинтегрируем по t на промежутке $(s, s+\delta)$ и по s на $(0, T-\delta)$, считая $\delta > 0$ достаточно малым. Тогда

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{T-\delta} \|\sqrt{\sigma}(\zeta_m(s+\delta) - \zeta_m(s))\|^2 ds = \int\limits_0^{T-\delta}\int\limits_s^{s+\delta} c_m(t,s)dtds,$$

где

$$c_m(t,s) = (F_m(t), \zeta_m(t) - \zeta_m(s)) \leqslant \|F_m(t)\|^2 + \|\zeta_m(t)\|^2 + \|\zeta_m(s)\|^2.$$

Для оценки интегралов от слагаемых, зависящих от t, достаточно поменять порядок интегрирования. Используя ограниченность последовательностей ζ_m в $L^2(0,T;V)$ и F_m в $L^2(0,T;V_0')$, получаем оценку равностепенной непрерывности,

$$\int\limits_0^{T-\delta} \|\zeta_m(s+\delta) - \zeta_m(s)\|^2 ds \leqslant C\delta. \tag{20}$$

Полученные оценки (17), (18), (20) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции θ, φ такие, что

$$\begin{gathered}\theta_m \to \theta \text{ слабо в } L^2(0,T;V), \ \text{ сильно в } L^\infty(0,T;H),\\ h(\theta_m) \to h(\theta) \text{ слабо в } L^2(0,T;V), \ \ \varphi_m \to \varphi \text{ слабо в } L^2(0,T;V).\end{gathered} \tag{21}$$

Результатов о сходимости (21) достаточно для предельного перехода при $m \to \infty$ в системе (15) и доказательства того, что предельные функции $\theta, \varphi \in L^2(0,T;V)$ таковы, что, $\sigma\theta' \in L^2(0,T;V')$ и выполняются равенства (13), (14). Теорема доказана. □

Покажем, что для θ-компоненты решения задачи (13), (14) справедливы неравенства $0 \leqslant \theta \leqslant w(t)$, тогда $c(\theta) = [\theta]^4$ и поэтому решение задачи (13), (14) является решением задачи (1)–(3).

Лемма 2. *Пусть выполняются условия (i)–(iv), θ, φ — решение задачи* (13), (14). *Тогда $0 \leqslant \theta \leqslant w(t)$ п. в. в Q.*

Доказательство. Запишем уравнение (14) в виде

$$A_2\varphi - g_b + \beta(\varphi - M_2 - c(\theta)) = g - \beta M_2 \leqslant 0.$$

Умножим это уравнение на $\psi = \max\{\varphi - M_2 - w^4, 0\} \geqslant 0$ и учтём, что

$$(A_2\varphi - g_b, \psi) = (\alpha\nabla\psi, \nabla\psi) + \int\limits_\Gamma \gamma(\varphi - \theta_b^4)d\Gamma \geqslant 0,$$

$$(\beta(\varphi - M_2 - c(\theta)), \psi) = (\beta\psi, \psi) + (\beta(w^4 - c(\theta)), \psi) \geqslant 0.$$

Поэтому $\psi = 0$, $\psi \leqslant M_2 + w^4$. Аналогично, выбирая $\psi = \min\{\varphi, 0\}$, выводим неравенство $\varphi \geqslant 0$. Далее, умножая уравнение (13) скалярно на $\eta = \max\{\theta - w, 0\}$, выводим

$$(\sigma\eta', \eta) + (k(\theta)\nabla\eta, \nabla\eta) + (b(c(\theta) + M_2 - \varphi), \eta) = (f - \sigma M_1 + bM_2, \eta) \leqslant 0.$$

Поскольку второе и третье слагаемые в левой части неотрицательны и $\eta|_{t=0} = 0$ заключаем, что $\eta = 0$, то есть $\theta \leqslant w$. Аналогично, выбирая $\eta = \min\{\theta, 0\}$, выводим $\theta \geqslant 0$. □

Таким образом, на основании доказанной леммы, теорем 1 и 2, заключаем, что справедлива

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима.*

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Перенос тепла и излучения будем рассчитывать в среде, состоящей из четырёх подобластей, включающих кровь, стенки вены, перивенозную ткань и оптоволокно. Схема расчётной области Ω с границей Γ в цилиндрической системе координат, при угловой симметрии, приведена на рис. 1.

Чтобы найти решение начально-краевой задачи (1)–(3), мы дискретизируем временной интервал $(0, T)$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_N = T$. Для каждого момента времени $t = t_l = l\Delta t$, $l = 1, 2, ..., N$ используется итерационный алгоритм нахождения решения соответствующей краевой задачи. По аналогии с алгоритмом, предложенном в [9], запишем n-й шаг итерационной процедуры ($n = 1, 2, ..., M$) следующим образом

$$-\mathrm{div}(\alpha\nabla\varphi_n) + \beta(\varphi_n - \theta_{n-1}^3|\theta_{n-1}|) = g, \tag{22}$$

$$\sigma\partial\theta_n/\partial t - \operatorname{div}(k(\theta_{n-1})\nabla\theta_n) + b(\theta_{n-1}^3|\theta_n| - \varphi_n) = f, \tag{23}$$

$$\theta_n|_\Gamma = \theta_b, \quad \alpha\partial_n\varphi_n + \gamma(\varphi_n - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \tag{24}$$

где производная по времени в (23) аппроксимируется следующим образом

$$\frac{\partial\theta_n}{\partial t} \simeq \frac{\theta_n|_{t=t_l} - \theta_M|_{t=t_{l-1}}}{\Delta t},$$

а функции θ_n, θ_{n-1}, φ_n в (22)–(24) являются приближениями решения, соответствующее моменту времени $t = t_l$. Нижний индекс у функций θ_n, θ_{n-1} и φ_n означает номер итерации.

Для инициализации итерационной процедуры зададим начальное приближение температуры для каждого момента времени:

$$\theta_0|_{t=t_l} = \theta_M|_{t=t_{l-1}}, \quad l = 1, 2, ..., N, \quad \theta_M|_{t=t_0} = \theta_{in}. \tag{25}$$

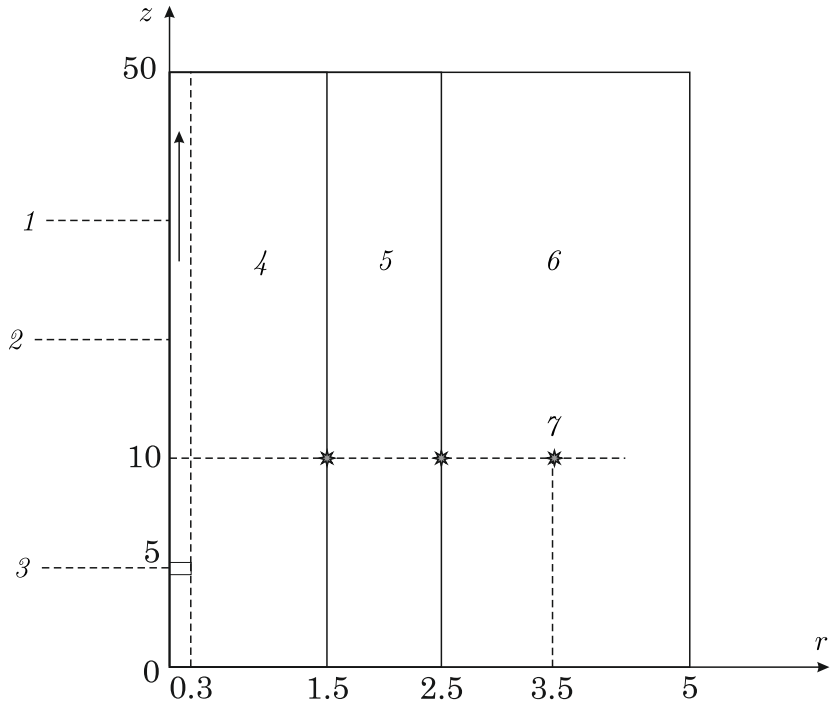


Рис. 1. Расчётная область в мм: *1* — направление движения, *2* — оптоволокно, *3* — карбонизированный слой, *4* — кровь, *5* — вена, *6* — перивенозная ткань, *7* — линия наблюдения

В уравнениях (22) и (23), $g = P_\varphi\chi/\mathcal{M}_\varphi$, $f = P_\theta\chi/\mathcal{M}_\theta$, где P_φ — мощность источника, идущая на излучение, P_θ — мощность источника, идущая на нагрев торца оптоволокна, χ — характеристическая функция части среды, в которой находится торец оптоволокна, делённая на его объём, $\mathcal{M}_\varphi$ и $\mathcal{M}_\theta$ — нормализующие коэффициенты для получения из φ и θ интенсивности излучения и абсолютной температуры.

Для выполнения каждого шага численного алгоритма (22)–(25) использовался метод конечных элементов, реализованный в программном пакета FreeFEM++ [13]. Оптические и теплофизические параметры среды взяты из [5–7]. Параметры θ_b и θ_{in} соответствуют температуре 37 °C, а коэффициент γ равен 1. Во всех вычислительных экспериментах начальное положение наконечника оптоволокна соответствует $(r, z) = (0, 5)$, а скорость его вытягивания составляет 2 мм/с. Толщина карбонизированного слоя равна 0.2 мм, мощность лазера составляет 10 Вт, $P_\theta/P_\varphi = 3/7$. Следуя [5–7], перенос тепла потоком пузырьков, образующихся на конце

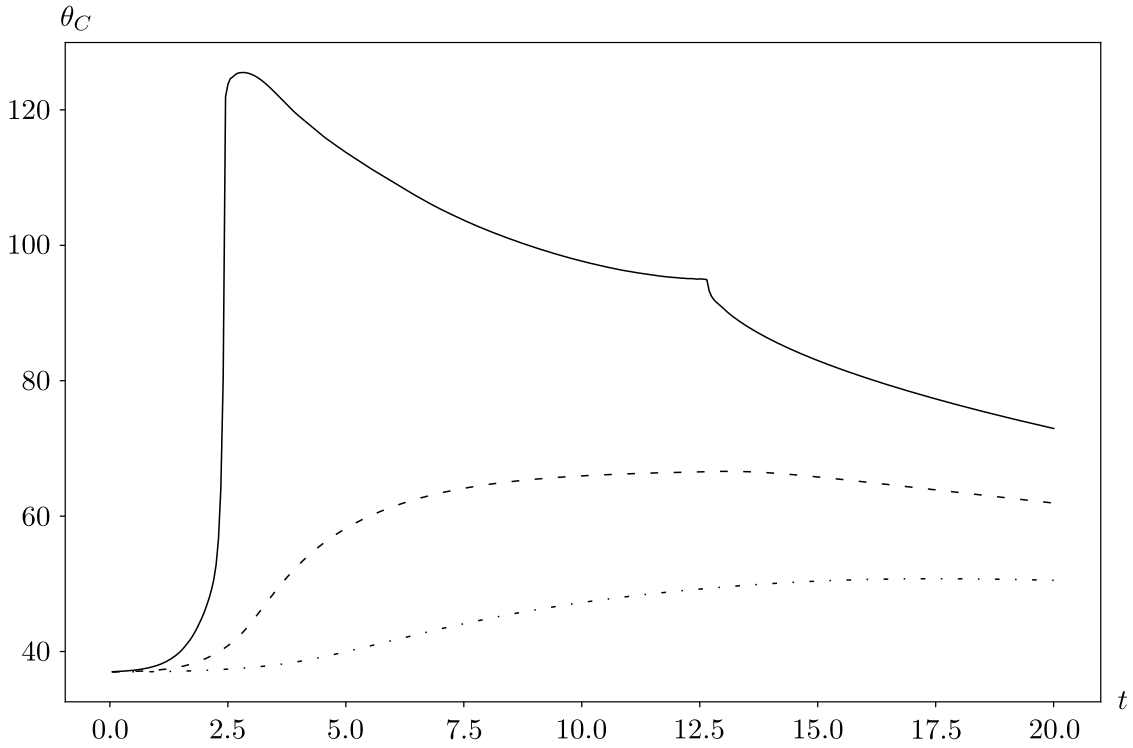


Рис. 2. Температурные профили θ_C[°C] по врмени t[c] для длины волны 1320 нм в точках наблюдения: (1.5, 10) (сплошная линия), (2.5, 10) (штриховая линия), (3.5, 10) (штрих-пунктирная линия)

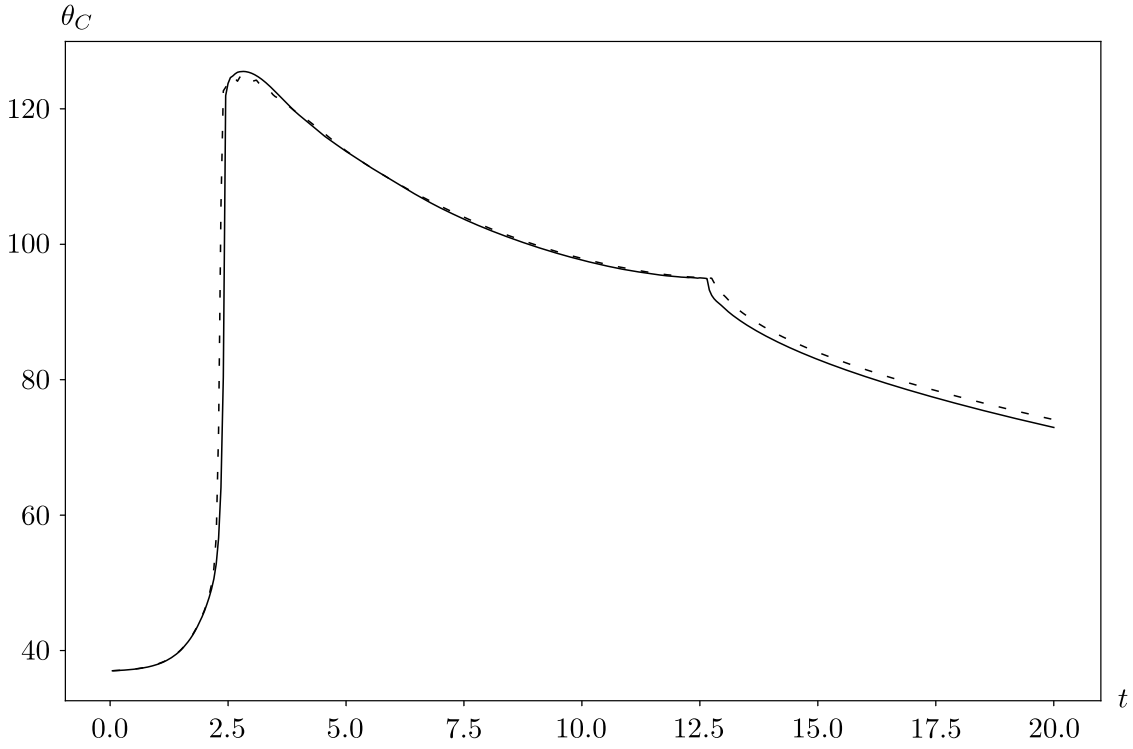


Рис. 3. Температурные профили θ_C[°C] по врмени t[c] для длины волны 1320 нм в точке наблюдения (1.5, 10): с учётом внутреннего теплового излучения (сплошная линия), без учёта (штриховая линия)

оптоволокна, моделируем через коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры следующим образом: при достижении в некоторой точках температуры 95 °C и выше коэффициент теплопроводности увеличивается в 200 раз.

Эффективность лазерной абляции можно оценить по поведению профилей температуры в разных точках расчётной области. На рис. 2 демонстрируется поведение температурных профилей в 3-х точках наблюдения, расположенных на внутренней стенке вены, на внешней стенке вены и в перивенозной ткани. Из анализа графиков можно сделать вывод, что сгенерированное температурное поле обеспечивает успешную облитерацию вены (см. для сравнения, [6,7]). С другой стороны, оно является безопасным для окружающей вену ткани.

На рис. 3 приведены температурные профили для модели ВВЛА с учётом внутреннего теплового излучения и без него. Максимально отклонение температур составляет 2.8%. Тем самым показано, что вклад внутреннего теплового излучения не является значительным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена квазилинейная модель для изучения процессов ВВЛА. Полученные теоретические результаты включают новые априорные оценки решения начально-краевой задачи для уравнений сложного теплообмена и теорему об однозначной нелокальной разрешимости. Подчеркнём, что условия на исходные данные отвечают физической постановке и не содержат ограничений типа малости.

Представленные в работе результаты вычислительных экспериментов демонстрируют перспективы использования предложенной математической модели для нахождения оптимальных параметров излучения и оценки эффективности процедуры ВВЛА.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beale R. J., Mavor A. I. D., Gough M. J.* Minimally invasive treatment for varicose veins: a review of endovenous laser treatment and radiofrequency ablation // Int. J. Low. Extrem. Wounds. 2004. V. 3, N 4. P. 188–197; DOI: 10.1177/1534734604272245
2. *Morrison N.* Saphenous ablation: what are the choices, laser or RF energyr // Semin. Vasc. Surg. 2005. V. 18, N 1. P. 15–18; DOI: 10.1053/j.semvascsurg.2004.12.006
3. *Mordon S., Wassmer B., Zemmouri J.* Mathematical modeling of endovenous laser treatment (EVLT) // Biomed. Eng. Online. 2006. V. 5, N 1. Article 26; DOI: 10.1186/1475-925X-5-26
4. *Mordon S., Wassmer B., Zemmouri J.* Mathematical modeling of 980-nm and 1320-nm endovenous laser treatment // Lasers Surg. Med. 2007. V. 39. P. 256–265; DOI: 10.1002/lsm.20476
5. *Malskat W. S. J., Poluektova A. A., van der Geld C. W. M., Neumann H. A. M., Weiss R. A., Bruijninckx C. M. A., van Gemert M. J. C.* Endovenous laser ablation (EVLA): A review of mechanisms, modeling outcomes, and issues for debate // Lasers Med. Sci. 2014. V. 29, N 2. P. 393–403; DOI: 10.1007/s10103-013-1480-5
6. *Poluektova A. A., Malskat W. S. J., van Gemert M. J. C., Vuylsteke M. E., Bruijninckx C. M. A., Neumann H. A. M., van der Geld C. W. M.* Some controversies in endovenous laser ablation of varicose veins addressed by optical-thermal mathematical modeling // Lasers Med. Sci. 2014. V. 29, N 2. P. 441–452; DOI: 10.1007/s10103-013-1450-y
7. *van Ruijven P. W., Poluektova A. A., van Gemert M. J., Neumann H. A., Nijsten T., van der Geld C. W.* Optical-thermal mathematical model for endovenous laser ablation of varicose veins // Lasers Med. Sci. 2014. V. 29, N 2. P. 431–439; DOI: 10.1007/s10103-013-1451-x
8. *Тучин В. В.* Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике. М.: Физматлит, 2013.
9. *Chebotarev A. Yu., Park N. M., Mesenev P. R., Kovtanyuk A. E.* Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation // J. Phys. Conf. Ser. 2023. V. 2514. Article 012006; DOI: 10.1088/1742-6596/2514/1/012006

10. *Ковтанюк А. Е., Чеботарев А. Ю., Астраханцева А. А., Сущенко А. А.* Оптимальное управление внутривенной лазерной абляцией // Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128, № 9. С. 1396–1404; DOI: 10.21883/OS.2020.09.49882.242-20

11. *Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Astrakhantseva A. A.* Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29, N 3. P. 467–476; DOI: 10.1515/jiip-2020-0118

12. *Chebotarev A. Y., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2018. V. 57. P. 290–298; DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.10.004

13. *Hecht F.* New development in freefem++ // J. Numer. Math. 2012. V. 20, N 3–4. P. 251–265; DOI: 10.1515/jnum-2012-0013

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.977.5

ANALYSIS AND NUMERICAL SIMULATION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR QUASILINEAR EQUATIONS OF COMPLEX HEAT TRANSFER

© 2023 **A. Yu. Chebotarev[a], N. M. Pak[b], A. E. Kovtanyuk[c]**

Far Eastern Federal University, Far Eastern Center for Mathematical Research, Vladivostok, 690922 Russia

E-mails: [a]chebotarev.ayu@dvfu.ru, [b]pak.nm@dvfu.ru, [c]kovtanyuk.ae@dvfu.ru

Received 01.08.2023, revised 29.09.2023, accepted 01.11.2023

Abstract. We consider an initial-boundary value problem for quasilinear equations of complex heat transfer that model the process of endovenous laser ablation. A priori estimates for the solution are obtained. Results on the global unique solvability of the problem are presented. An algorithm for finding a solution of the initial-boundary value problem is proposed. The efficiency of the algorithm is illustrated by numerical examples. The influence of internal thermal radiation on the behavior of temperature fields is evaluated.

Keywords: quasilinear equations of complex heat transfer, endovenous laser ablation, nonlocal unique solvability, numerical simulation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.412

REFERENCES

1. R. J. Beale, A. I. D. Mavor, and M. J. Gough, "Minimally invasive treatment for varicose veins: a review of endovenous laser treatment and radiofrequency ablation," Int. J. Lower Extremity Wounds **3** (4), 188–197 (2004). https://doi.org/10.1177/1534734604272245
2. N. Morrison, "Saphenous ablation: what are the choices, laser or RF energy," Semin. Vasc. Surg. **18** (1), 15–18 (2005). https://doi.org/10.1053/j.semvascsurg.2004.12.006
3. S. Mordon, B. Wassmer, and J. Zemmouri, "Mathematical modeling of endovenous laser treatment (EVLT)," Biomed. Eng. Online **5** (1), 26 (2006). https://doi.org/10.1186/1475-925X-5-26
4. S. Mordon, B. Wassmer, and J. Zemmouri, "Mathematical modeling of 980-nm and 1320-nm endovenous laser treatment," Lasers Surg. Med. **39**, 256–265 (2007). https://doi.org/10.1002/lsm.20476
5. W. S. J. Malskat, A. A. Poluektova, C. W. M. van der Geld, H. A. M. Neumann, R. A. Weiss, C. M. A. Bruijninckx, and M. J. C. van Gemert, "Endovenous laser ablation (EVLA): A review of mechanisms, modeling outcomes, and issues for debate," Lasers Med. Sci. **29** (2), 393–403 (2014). https://doi.org/10.1007/s10103-013-1480-5
6. A. A. Poluektova, W. S. J. Malskat, M. J. C. van Gemert, M. E. Vuylsteke, C. M. A. Bruijninckx, H. A. M. Neumann, and C. W. M. van der Geld, "Some controversies in endovenous laser ablation of varicose veins addressed by optical-thermal mathematical modeling," Lasers Med. Sci. **29** (2), 441–452 (2014). https://doi.org/10.1007/s10103-013-1450-y
7. P. W. van Ruijven, A. A. Poluektova, M. J. van Gemert, H. A. Neumann, T. Nijsten, and C. W. van der Geld, "Optical-thermal mathematical model for endovenous laser ablation of varicose veins," Lasers Med. Sci. **29** (2), 431–439 (2014). https://doi.org/10.1007/s10103-013-1451-x
8. V. V. Tuchin, *Optics of Biological Tissues. Light Scattering Methods in Medical Diagnostics* (Fizmatlit, Moscow, 2013) [in Russian].

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 698–709.

9. A. Yu. Chebotarev, N. M. Park, P. R. Mesenev, and A. E. Kovtanyuk, "Mathematical modeling of complex heat transfer in the context of the endovenous laser ablation," J. Phys. Conf. Ser. **2514**, 012006 (2023). https://doi.org/10.1088/1742-6596/2514/1/012006
10. A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, A. A. Astrakhantseva, and A. A. Sushchenko, "Optimal control of endovenous laser ablation," Opt. Spectrosc. **128** (9), 1508–1516 (2020). https://doi.org/10.1134/S0030400X20090131
11. A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, and A. A. Astrakhantseva, "Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation," J. Inverse Ill-Posed Probl. **29** (3), 467–476 (2021). https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0118
12. A. Y. Chebotarev, G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, and K.-H. Hoffmann, "Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **57**, 290–298 (2018). https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.10.004
13. F. Hecht, "New development in freefem++," J. Numer. Math. **20** (3–4), 251–265 (2012). https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2023. Том 26, № 4

Зав. редакцией Т. А. Звонарева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 23.01.2024 г.
Формат $60 \times 84\,{}^{1}/_{8}$. Усл. печ. л. 22,5.
Объём 11,7 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия