

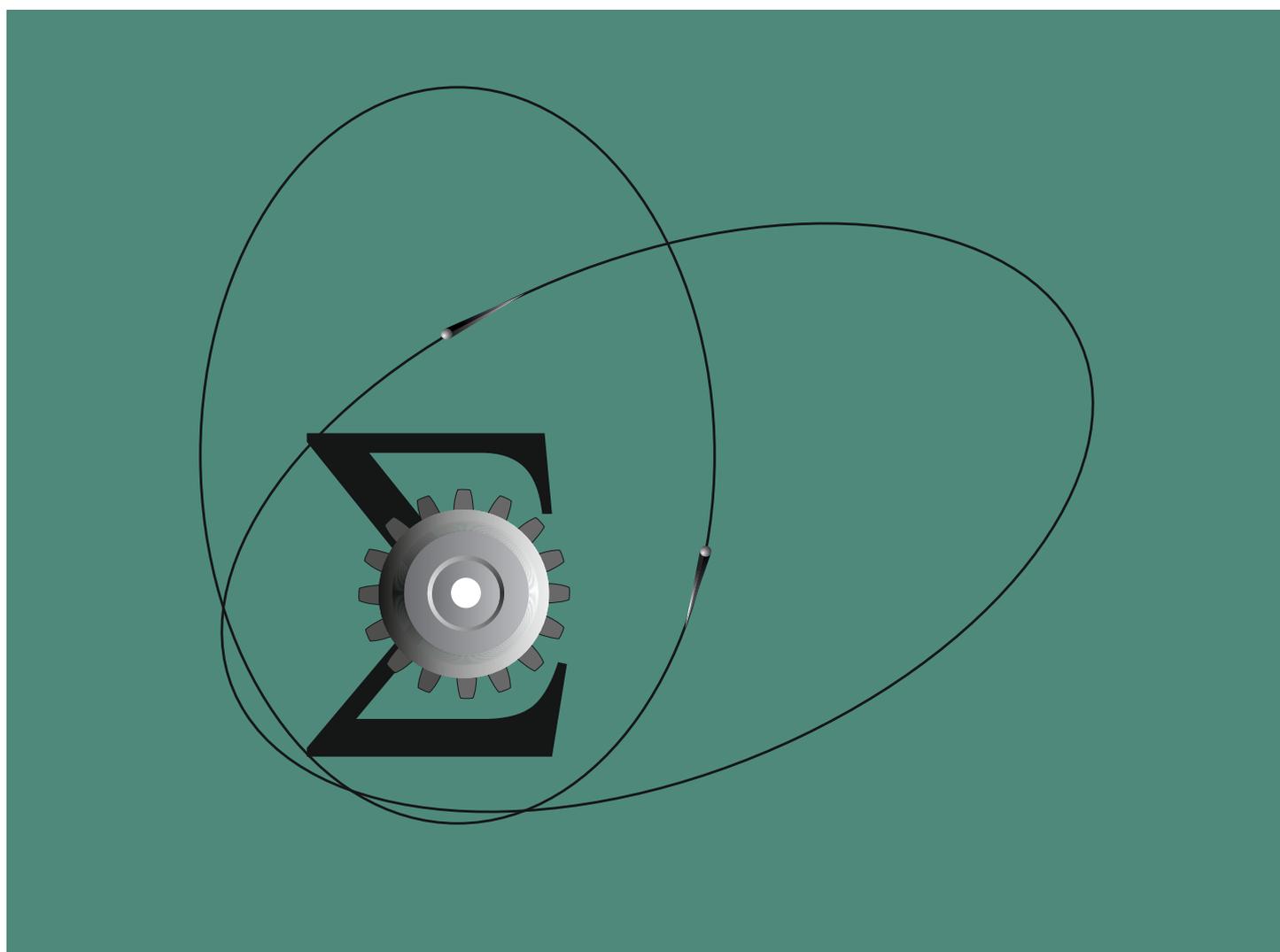
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 27

№ 2

2024



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	М. А. Шишленин
Отв. секретарь	В. А. Дедок

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	И. Б. Петров
Ю. С. Волков	П. И. Плотников
К. В. Воронцов	М. И. Протасов
А. В. Гасников	В. Г. Романов
М. А. Гузеев	Е. М. Рудой
В. П. Ильин	К. К. Сабельфельд
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. Н. Сидоров
А. Л. Карчевский	А. С. Терсенов
М. В. Клибанов	В. С. Тимофеев
С. С. Кутателадзе	В. В. Шайдуров
В. А. Левин	А. А. Шананин
Н. И. Макаренко	

Учредители журнала:

Сибирское отделение РАН
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году

Выходит 4 раза в год

Том 27, № 2(98)

Научный журнал

Апрель–июнь, 2024 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Андреев В. К., Ефимова М. В. Структура двухслойного течения в канале с радиальным нагревом нижней подложки при малых числах марангони	5
Гилев П. В., Папин А. А. Фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в тонком пороупругом слое	20
Глубоких А. В., Голубятников В. П. О нелокальных осцилляциях в трёхмерных моделях кольцевых генных сетей	34
Горбунов В. К., Львов А. Г. Проблема верификации теории рыночного спроса	43
Кожанов А. И., Намсараева Г. В. Исследование разрешимости задач определения внешнего воздействия комбинированного типа в процессах, описываемых параболическими уравнениями	66
Рохлин Д. Б. О двойственном методе градиентного спуска для задачи о распределении ресурсов в многоагентных системах	80
Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Законы сохранения и решения первой краевой задачи для двумерных и трёхмерных уравнений теории упругости	100
Солодуша С. В. О некоторых линейных двумерных интегральных уравнениях Вольterra первого рода	112
Уртаева А. А. Оценки сверху кратности точек спектра дифференциального оператора четвёртого порядка на графе	121

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СибЖИМ

Институт математики

им. С. Л. Соболева СО РАН

просп. Акад. Коптюга, 4

Новосибирск 630090, Россия

Телефон: +7 (383) 329-76-11

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998

4 issues per year

Vol. 27, No. 2(98)

Scientific journal

April–June, 2024

CONTENTS

Andreev V. K., Efimova M. V. The structure of a two-layer flow in a channel with radial heating of the lower substrate for small marangoni numbers	5
Gilev P. V., Papin A. A. Filtration of two immiscible incompressible fluids in a thin poroelastic layer	20
Glubokikh A. V., Golubyatnikov V. P. On nonlocal oscillations in 3D models of circular gene networks	34
Gorbunov V. K., Lvov A. G. The problem of verifying the market demand theory	43
Kozhanov A. I., Namsaraeva G. V. Solvability analysis of problems of determining external influence of combined type in processes described by parabolic equations	66
Rokhlin D. B. On the dual gradient descent method for the resource allocation problem in multiagent systems	80
Senashov S. I., Savostyanova I. L. Conservation laws and solutions of the first boundary value problem for the equations of two- and three-dimensional elasticity	100
Solodusha S. V. On some linear two-dimensional Volterra integral equations of the first kind	112
Urtaeva A. A. Upper bounds for the eigenvalue multiplicities of a fourth-order differential operator on a graph	121

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:

SibJIM

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

pr. Akad. Koptiyuga 4

Novosibirsk 630090, Russia

Phone: +7 (383) 329-76-11

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

УДК 532.6

СТРУКТУРА ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ С РАДИАЛЬНЫМ НАГРЕВОМ НИЖНЕЙ ПОДЛОЖКИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ

© 2024 В. К. Андреев^a, М. В. Ефимова^b*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
ул. Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия*E-mails: ^aandr@icm.krasn.ru, ^befmavi@mail.ruПоступила в редакцию 09.08.2023 г.; после доработки 05.04.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

Исследовано трёхмерное течение системы вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси с общей поверхностью раздела в слое, ограниченном твёрдыми стенками. На нижней подложке задано радиальное нестационарное распределение температуры, верхняя стенка считается теплоизолированной. В предположении малости числа Марангони описана структура стационарного течения в зависимости от отношения толщин слоёв с учётом влияния массовых сил. Решение нестационарной задачи определено в изображениях по Лапласу в виде квадратур. Показано, что если заданная температура на нижней подложке стабилизируется со временем, то решение с ростом времени выходит на полученный стационарный режим только при определённых условиях на начальное распределение концентрации в смеси.

Ключевые слова: уравнения Обербека—Буссинеска, бинарная смесь, число Марангони

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.201

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшую роль в формировании правильного понимания качественных особенностей явлений и процессов в науке и технике играют точные решения дифференциальных уравнений математической физики. Среди семейств точных решений выделяют несколько классов решений уравнений Навье—Стокса. Так, например, называемое течение типа Хименца [1] описывает двумерное течение вблизи критической точки, а решения из [2] характеризуются линейной зависимостью скоростей от части координат. Краткий обзор точных решений, близких к решению Хименца, дан в [3]. В [4] изучена задача о двумерном стационарном течении жидкости в плоском канале со свободной границей, в котором температура распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. Точные решения стационарной задачи, описывающей трёхмерное ползущее течение в двухслойной системе с учётом энергетического условия на поверхности раздела, построены в работах [5, 6].

В статье рассматривается совместная конвекция вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси в трёхмерном слое с твёрдыми плоскими стенками. Считаем, что верхняя стенка теплоизолирована, а на нижней задано радиальное распределение температуры. Жидкости предполагаются несмешивающимися, и на плоской границе раздела между ними задаются условия сопряжения. В качестве математической модели используются уравнения Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска. Тепловые и диффузионные процессы описываются уравнениями теплопереноса. В предположении малости числа Марангони выписано решение стационарной задачи. Проведён анализ влияния силы тяжести на структуру течения

в двухслойной системе. В изображениях по Лапласу получено решение нестационарной задачи в виде квадратур, позволяющее описать эволюцию трёхмерного движения в двухслойной системе вязкая жидкость-бинарная смесь. Доказано, что стационарное решение является предельным при ограничениях на начальные данные системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается слой вязкой теплопроводной жидкости $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $-l_1 < z < 0$ и слой бинарной смеси $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $0 < z < l_2$. Границы слоя $z = -l_1$, $z = l_2$ суть твёрдые неподвижные стенки, а $z = 0$ — плоская неподвижная поверхность раздела между несмешивающимися жидкостью и смесью. Схема течения представлена на рис. 1.

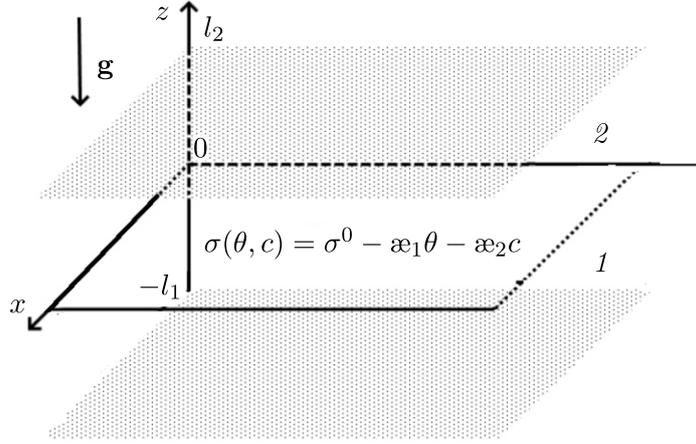


Рис. 1. Схема области течения, 1 — жидкость, 2 — бинарная смесь

Движение в слоях описывается уравнениями Обербека—Буссинеска [7]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{jt} + (\mathbf{u}_j \cdot \nabla) \mathbf{u}_j &= -\frac{1}{\rho_j} \nabla \bar{p}_j + \nu_j \Delta \mathbf{u}_j - \mathbf{g}(\beta_j \theta_j + \beta_3 \varepsilon_j c), \\ \theta_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \theta_j &= \chi_j \Delta \theta_j, \\ c_t + \mathbf{u}_2 \cdot \nabla c &= D \Delta c + \alpha D \Delta \theta_2, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_j &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

В системе (1) индекс $j = 1$ относится к жидкости, а $j = 2$ — к бинарной смеси; $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j, w_j)$, \bar{p}_j , θ_j , c — искомые векторы скорости, модифицированные давления, температуры и концентрация в слоях; $\rho_j > 0$, $\nu_j = \mu_j / \rho_j > 0$, $\beta_j > 0$, $\beta_3 > 0$, $\chi_j > 0$, $D > 0$, α — постоянные плотности, кинематической вязкости, коэффициенты теплового и концентрационного расширения жидкости, температуропроводности, диффузии и термодиффузии; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ ускорение силы тяжести, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$.

Предполагается, что поверхностное натяжение линейно зависит от температуры этой поверхности $\theta(x, y, 0, t)$ и концентрации $c(x, y, 0, t)$, а именно $\sigma(\theta, c) = \sigma^0 - \varepsilon_1 \theta - \varepsilon_2 c$, где постоянные $\sigma^0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Последнее неравенство означает, что $c(x, y, z, t)$ есть концентрация лёгкой компоненты. Для того чтобы поверхность раздела была плоской, достаточно потребовать, чтобы число Вебера $We = \sigma_0 l_1 / \mu_1 \chi_1$ было большим, а число Бонда $Bo = g(\rho_1 - \rho_2) l_1^2 / \sigma_0$ — малым [8, 9].

Система (1) дополняется граничными и начальными условиями. На нижней стенке $z = -l_1$ выполнены условия прилипания и задана температура

$$\mathbf{u}_1 = 0, \quad \theta_1 = \theta_{10}(x, y, t). \quad (2)$$

Верхняя стенка $z = l_2$ предполагается теплоизолированной, на ней также выполнено условие прилипания, отсутствуют потоки тепла и массы

$$\mathbf{u}_2 = 0, \quad \theta_{2z} = 0, \quad c_z = 0. \quad (3)$$

На поверхности раздела $z = 0$ имеют место условия непрерывности [7]

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad k_2\theta_{2z} - k_1\theta_{1z} = 0. \quad (4)$$

Кроме того, на ней отсутствует поток вещества и выполнены динамические условия

$$c_z + \alpha\theta_{2z} = 0, \quad 2[\mu_1 D(\mathbf{u}_1) - \mu_2 D(\mathbf{u}_2)]\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_i = \nabla_{11}\sigma(\theta_2, c) \cdot \boldsymbol{\tau}_i, \quad (5)$$

где $k_j > 0$ — постоянные коэффициенты теплопроводностей, D — тензор скоростей деформации, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\tau}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\tau}_2 = (0, 1, 0)$, $i = 1, 2$, $\nabla_{11} = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}$ — поверхностный градиент. В динамическом условии учтено, что средняя кривизна поверхности $z = 0$ равна нулю.

Граничные условия (2)–(5) дополняются начальными данными при $t = 0$

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0j}(\mathbf{x}), \quad \theta_j(\mathbf{x}, 0) = \theta_{0j}(\mathbf{x}), \quad c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}) \quad (6)$$

с заданными $\mathbf{u}_{0j}(\mathbf{x})$, $\theta_{0j}(\mathbf{x})$, $c_0(\mathbf{x})$ на своих областях определения. Эти функции для гладкого решения должны удовлетворять условиям согласования

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{01}(x, y, -l_1) &= 0, \quad \theta_{01}(x, y, -l_1) = \theta_{10}(x, y, 0), \\ \mathbf{u}_{02}(x, y, l_2) &= 0, \quad \theta_{02z}(x, y, l_2) = 0, \quad c_{0z}(x, y, l_2) = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_{0j} &= 0, \quad \mathbf{u}_{01}(x, y, 0) = \mathbf{u}_{02}(x, y, 0), \\ \theta_{01}(x, y, 0) &= \theta_{02}(x, y, 0), \quad c_{0z}(x, y, 0) + \alpha\theta_{02z}(x, y, 0) = 0, \\ k_2\theta_{02z}(x, y, 0) &- k_1\theta_{01z}(x, y, 0) = 0, \\ 2[\mu_1 D(\mathbf{u}_{01}) - \mu_2 D(\mathbf{u}_{02})]\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_i &= \nabla_{11}\sigma(\theta_{01}, c_0) \cdot \boldsymbol{\tau}_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение поставленной задачи (1)–(7) ищем в виде [10]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \left(f_j(z, t)x, f_j(z, t)y, -2 \int_{z_0}^z f_j(z_1, t) dz_1 \right), \quad \bar{p}_j = \bar{p}_j(x, y, z), \\ \theta_j &= a_j(z, t)(x^2 + y^2) + q_j(z, t), \quad c = m(z, t)(x^2 + y^2) + n(z, t). \end{aligned} \quad (8)$$

После подстановки в систему (1) представлений (8) и анализа на совместность приходим к выводу, что и \bar{p}_j есть квадратичные функции по x , y (ниже они выписаны в безразмерной форме). В (8) $\mathbf{u}_j(\mathbf{x})$, $\bar{p}_j(\mathbf{x})$, $\theta_j(\mathbf{x})$, $c(\mathbf{x})$ — векторы скорости, модифицированные давления, температуры и концентрация в слоях. Решение вида (8) обобщает решение типа Хименца [11]. Обзор точных решений системы Навье—Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от x и y приведён в работе [12]. Физический смысл решения (8) хорошо определяется в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . В этом случае вектор скорости примет вид $\mathbf{u}_j = (f_j(z, t)r, 0, w_j)$ и будет описывать осесимметричное течение вблизи точки минимума или максимума температуры на нижней подложке. Так в работе [13] формулируются условия

разрешимости редуцированной задачи, описывающей трёхмерное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости; осесимметрическое термокапиллярное движение двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрической трубе описано в [14], пример двумерного нестационарного течения двух несмешивающихся несжимаемых бинарных смесей в цилиндрическом капилляре в отсутствие массовых сил представлен в работе [15].

2. БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Поскольку в поставленной задаче главными являются тепловые эффекты (нагревание подложки $z = -l_1$), то в качестве безразмерного времени примем величину $\tau = \chi_1 l_1^{-2} t$. Пусть температура на подложке $z = -l_1$ распределена по закону $\theta_{10} = \alpha_1(t)(x^2 + y^2) + \alpha_2(t)$ с ограниченными при $t \geq 0$ заданными функциями $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$. Тогда за характерную температуру можно взять величину $\theta^* = \max_{t \geq 0} |\alpha_2(t)|$. При этом $a^* l_1$ — характерный градиент температур, где $a^* = \max_{t \geq 0} |\alpha_1(t)|$.

Положим $x = \bar{x} l_j$, $y = \bar{y} l_j$, $z = \zeta l_j$, ($j = 1, 2$),

$$\begin{aligned} f_j &= \frac{\chi_1}{l_1^2} M F_j(\zeta, \tau), & a_j &= a^* A_j(\zeta, \tau), & q_j &= \theta^* Q_j(\zeta, \tau), & m &= \frac{\beta_2 a^*}{\beta_3} K_1(\zeta, \tau), \\ n &= \frac{\beta_2 l_1^2 a^*}{\beta_3} K_2(\zeta, \tau), & s_j &= \frac{\chi_1^2}{l_1^4} M S_j(\tau), & P_j &= \frac{\nu_j}{\chi_j}, & M &= \frac{\varkappa_1 a^* l_1^3}{\rho_1 \nu_1 \chi_1}, & L_j &= \frac{g \beta_j l_1 l_j \rho_1}{\varkappa_1}, \\ \text{Le}_1 &= \frac{D}{\chi_1}, & \omega &= \frac{\varkappa_2 \beta_2}{\varkappa_1 \beta_3}, & d &= \frac{a^* l_1^2}{\theta^*}, & \psi &= \frac{\alpha \beta_3}{\beta_2}, & l &= \frac{l_1}{l_2}, & \nu &= \frac{\nu_1}{\nu_2}, & \rho &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, & k &= \frac{k_1}{k_2}, \end{aligned}$$

где P_j — число Прандтля, M — число Марангони, $\text{Le} = D/\chi_2 = \chi \text{Le}_1$ — число Льюиса, ψ — параметр разделения.

Рассмотрим случай ползущего течения, когда $M \ll 1$, при этом считается, что $\omega = O(1)$, $L_j = O(1)$ при $M \rightarrow 0$. Малость числа Марангони может обеспечиваться в реальности толщиной слоя l_1 , малостью \varkappa_1 , высокой вязкостью и теплопроводностью жидкости. С учётом такого предположения система уравнений (1) в безразмерном виде примет вид для слоя $-1 < \zeta < 0$

$$F_{1\tau} + 2P_1 L_1 \int_0^\zeta A_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 + S_1(\tau) = P_1 F_{1\zeta\zeta}, \quad (9)$$

$$A_{1\tau} = A_{1\zeta\zeta}, \quad Q_{1\tau} = 4dA_1 + Q_{1\zeta\zeta}.$$

Для слоя $0 < \zeta < 1$ имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} F_{2\tau} + 2P_1 L_2 \int_0^\zeta (A_2(\zeta_1, \tau) + K_1(\zeta_1, \tau)) d\zeta_1 + S_2(\tau) &= \frac{P_1 l^2}{\nu} F_{2\zeta\zeta}, \\ A_{2\tau} &= \frac{l^2}{\chi} A_{2\zeta\zeta}, & Q_{2\tau} &= \frac{4d}{\chi} A_2 + \frac{l^2}{\chi} Q_{2\zeta\zeta}, \\ K_{1\tau} &= \text{Le}_1 l^2 \left(K_{1\zeta\zeta} + \psi A_{2\zeta\zeta} \right), \\ K_{2\tau} &= \text{Le}_1 \left(l^2 K_{2\zeta\zeta} + 4K_1 + \psi \left(\frac{l^2}{d} Q_{2\zeta\zeta} + 4A_2 \right) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия в безразмерном виде примут вид (здесь учтено безразмерное распределение на подложке $\bar{\theta}(\bar{x}, \bar{y}, -1, \tau) = \theta_{10}(x, y, t)/\theta^*$) $\alpha_1(\tau)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \alpha_2(\tau)$:

$$\zeta = -1: \quad F_1(-1, \tau) = 0, \quad \int_{-1}^0 F_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 = 0, \quad (11)$$

$$A_1(-1, \tau) = \alpha_1(\tau), \quad Q_1(-1, \tau) = \alpha_2(\tau),$$

$$\zeta = 1: \quad F_2(1, \tau) = 0, \quad \int_0^1 F_2(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 = 0, \quad A_{2\zeta}(1, \tau) = 0, \quad (12)$$

$$Q_{2\zeta}(1, \tau) = 0, \quad K_{1\zeta}(1, \tau) = 0, \quad K_{2\zeta}(1, \tau) = 0,$$

$$\zeta = 0: \quad F_1(0, \tau) = F_2(0, \tau), \quad A_1(0, \tau) = A_2(0, \tau), \quad Q_1(0, \tau) = Q_2(0, \tau), \quad (13)$$

$$lA_{2\zeta}(0, \tau) - kA_{1\zeta}(0, \tau) = 0, \quad lQ_{2\zeta}(0, \tau) - kQ_{1\zeta}(0, \tau) = 0,$$

$$\mu F_{1\zeta}(0, \tau) - lF_{2\zeta}(0, \tau) = -2\mu(A_2(0, \tau) + \omega K_1(0, \tau)), \quad \mu = \rho\nu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (14)$$

$$K_{1\zeta}(0, \tau) + \psi A_{2\zeta}(0, \tau) = 0, \quad K_{2\zeta}(0, \tau) + \frac{\psi}{d} Q_{2\zeta}(0, \tau) = 0.$$

Кроме того, должны быть выполнены начальные условия вида (6)

$$F_j(\zeta, 0) = F_{0j}(\zeta), \quad A_j(\zeta, 0) = A_{0j}(\zeta), \quad Q_j(\zeta, 0) = Q_{0j}(\zeta), \quad K_i(\zeta, 0) = K_{0i}(\zeta), \quad (15)$$

которые для гладких решений удовлетворяют условиям согласования (7), записанных в безразмерных переменных. В (15) при $j = 1$ имеем $-1 < \zeta < 0$, при $j = 2$ — $0 < \zeta < 1$; для функций K_i переменная ζ меняется в пределах $0 < \zeta < 1$, $i = 1, 2$.

Заметим, что в силу граничных условий (12), (14)

$$\int_0^1 K_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 = \int_0^1 K_{01}(\zeta_1) d\zeta_1.$$

Этим равенством можно заменить, например, второе граничное условие (12). Функции, определяющие модифицированные давления в слоях, в безразмерном виде имеют представления

$$\bar{p}_1 = \frac{\rho_1 \nu_1 \chi_1}{l_1^2} \text{МП}_1(\zeta, \tau),$$

$$\Pi_1(\zeta, \tau) = \left[2L_1 \int_0^\zeta A_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 + \frac{S_1(\tau)}{P_1} \right] (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - 2F_1(\zeta, \tau) + \frac{L_1}{d} \int_0^\zeta Q_1(\zeta_1, \tau) d\zeta_1 + \Pi_1(\tau),$$

$$\bar{p}_2 = \frac{\rho_2 \nu_2 \chi_2}{l_2^2} \text{МП}_2(\zeta, \tau),$$

$$\Pi_2(\zeta, \tau) = \left[\frac{2\chi\nu L_2}{l^2} \int_0^\zeta (A_2(\zeta_1, \tau) + K_1(\zeta_1, \tau)) d\zeta_1 + \frac{\chi^2 S_2(\tau)}{l^2 P_2} \right] (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - \frac{2\chi F_2(\zeta, \tau)}{l^2} +$$

$$+ \frac{\chi\nu L_2}{l^2} \int_0^\zeta \left(\frac{1}{d} Q_2(\zeta_1, \tau) + K_2(\zeta_1, \tau) \right) d\zeta_1 + \Pi_2(\tau),$$

где Π_1, Π_2 — произвольные функции τ .

Поскольку функции $S_{1,2}(\tau)$ суть искомые, то поставленная задача (9)–(15) является обратной.

3. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

При решении стационарной задачи (9)–(14) (обозначим его индексом «с») начальные условия (15) не принимаются во внимание, S_j^c считаются постоянными. В этом случае для замыкания задачи используется дополнительное условие, определяющее среднюю стационарную концентрацию поперёк второго слоя в точке $\xi = \eta = 0$

$$\int_0^1 K_2^c(\zeta_1) d\zeta_1 = \delta_2$$

с заданной постоянной δ_2 .

После некоторых преобразований найдём стационарное решение задачи (α_1^c, α_2^c здесь постоянные)

$$\begin{aligned} -1 \leq \zeta \leq 0: \quad A_1^c &= \alpha_1^c, \quad Q_1^c = 2d\alpha_1^c \left(1 - \zeta^2 + \frac{2}{kl}(\zeta + 1) \right) + \alpha_2^c, \\ F_1^c &= \frac{\alpha_1^c}{24l(l + \mu)} (\zeta + 1) \left(L_1 l (8\zeta^2(l + \mu) + \zeta(4l + \mu) - \mu) - \right. \\ &\quad \left. - \nu L_2 (1 + 3\zeta)(\psi - 1) + 12\mu l (1 + 3\zeta)(\psi\omega - 1) \right), \\ S_1^c &= \frac{P_1 \alpha_1^c}{4l(l + \mu)} \left(l L_1 (4l + 3\mu) + \nu L_2 (1 - \psi) - 12\mu l (1 - \psi\omega) \right), \\ 0 \leq \zeta \leq 1: \quad A_2^c &= \alpha_1^c, \quad Q_2^c = \frac{2d\alpha_1^c}{l^2} \left(2\zeta - \zeta^2 + l^2 + \frac{2l}{k} \right) + \alpha_2^c, \\ K_1^c &= -\psi \alpha_1^c, \quad K_2^c = \frac{2\alpha_1^c \psi}{l^2} \left(\zeta^2 - 2\zeta + \frac{2}{3} \right) + \delta_2, \\ F_2^c &= -\frac{\nu \alpha_1^c}{24l^2(l + \mu)} (\zeta - 1) \left(L_1 \rho l^2 (3\zeta - 1) - 12\rho l^2 (\psi\omega - 1)(3\zeta - 1) + \right. \\ &\quad \left. + L_2 (\psi - 1)(8\zeta^2(l + \mu) - \zeta(l + 4\mu) - l) \right), \\ S_2^c &= -\frac{P_1 \alpha_1^c}{4\nu(l + \mu)} \left(\nu L_2 (1 - \psi)(4\mu + 3l) + \mu l^2 L_1 + 12\mu l^2 (1 - \psi\omega) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

При рассмотрении случая полной невесомости достаточно в (16) положить $L_1 = L_2 = 0$. Тогда выражения для определения искомым функций несколько упрощаются.

Проиллюстрируем решение (16) исследуемой задачи. Отметим, поскольку продольные компоненты скорости линейно зависят от соответствующих координат с одинаковым множителем, то для анализа решения достаточно рассмотреть поле скоростей в сечении XOZ (поле скоростей в плоскости YOZ будет аналогичным). Подбор параметров для численного счёта достаточно сложен. Необходимо подобрать соответствующие толщины слоёв, температуру нагрева нижней подложки и другие параметры таким образом, чтобы сохранить физический смысл получаемого решения задачи. Например, ограниченность исходной массовой концентрации значениями от нуля до единицы. Рассмотрим модельную систему с параметрами $\nu = 9.59$, $\rho = 1.02$, $\chi = 0.89$, $k = 0.45$, $P_1 = 297$, $P_2 = 27.8$, что соответствует, в частности, системе трансформаторное масло-раствор этилового спирта. Предположим, что температурное поле в критической точке на нижней подложке имеет минимум и $\alpha_1^c = 0.01$, $\alpha_2^c = 1$, $\delta_2 \ll 1$.

На рис. 2 приведены профиль продольной компоненты скорости U при $\xi = 1$ (а) и поперечная составляющая W (б) в условиях нормальной (кривая 1), пониженной гравитации (кривая 2) и при отсутствии массовых сил (кривая 3). При этом толщины слоёв считаются

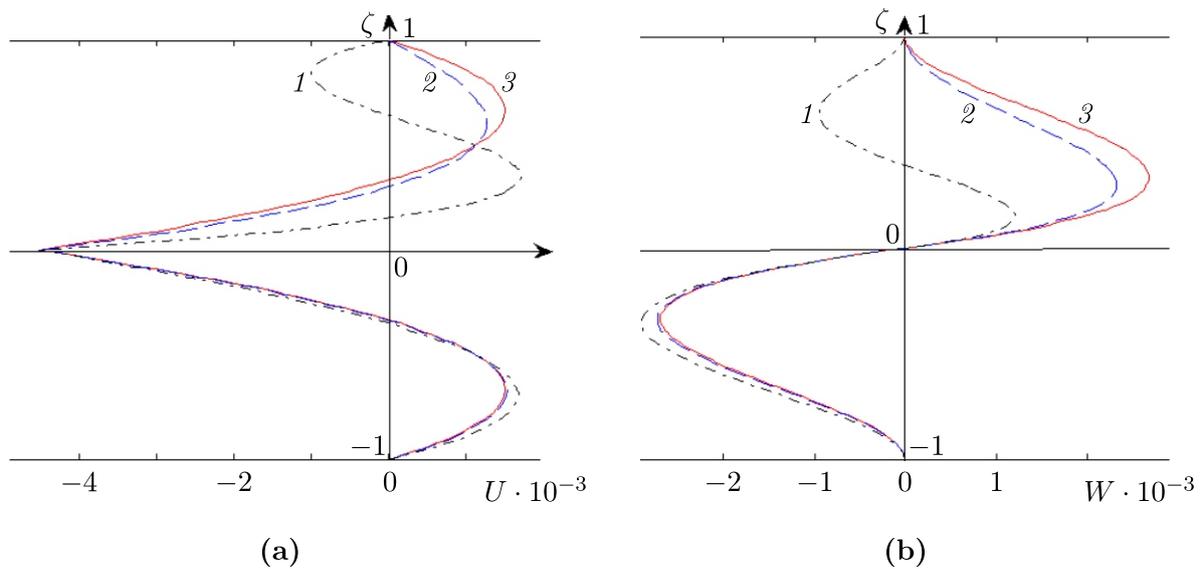


Рис. 2. Продольная компонента скорости U при $\bar{x} = 1$ (а), поперечная составляющая W (б).
Кривые 1 — $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, 2 — $g = 1.6 \text{ м/с}^2$, 3 — $g = 0 \text{ м/с}^2$

равными $l_1 = l_2 = 2 \text{ мм}$. Показано, что сила тяжести оказывает влияние на структуру течения в слое с бинарной смесью. Действительно, при отсутствии поля массовых сил (условия полной невесомости) в каждом слое формируется вихревое течение, причём в слое с вязкой жидкостью имеет место возвратное течение (жидкость движется в направлении, обратном оси z из области с большей температурой). В условиях нормальной гравитации структура течения в слое вязкой теплопроводной жидкости качественно не меняется, однако в слое с бинарной смесью формируется возвратное течение вблизи верхней твёрдой границы.

Кроме этого, исследовано влияние толщины слоя бинарной смеси на структуру течения. В случае пониженной гравитации изменение толщины слоёв не оказывает влияние на структуру течения. Однако в поле действия массовых сил прослеживается изменение структуры течения в слое с бинарной смесью. На рис. 3 показано поле скоростей в плоскости XOZ в зависимости от отношения толщин слоёв при $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. Если толщина верхнего слоя меньше слоя с вязкой жидкостью, то движение в двухслойной системе определяется термоконцентрационными силами. С увеличением толщины слоя бинарной смеси у теплоизолированной границы начинает формироваться третий вихрь с противоположным направлением циркуляции. В данной конфигурации движение в пристенном слое порождается массовыми силами и влияние термоконцентрационных сил сохраняется лишь у поверхности раздела.

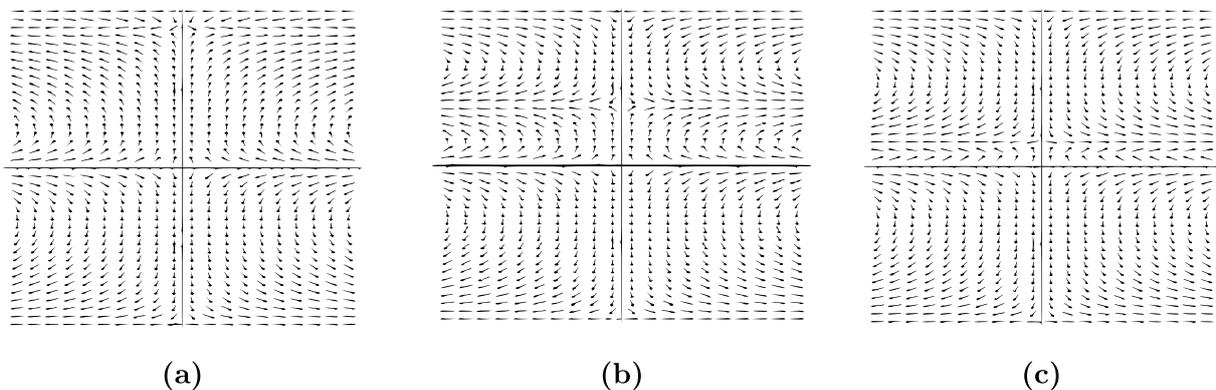


Рис. 3. Поле скоростей в плоскости XOZ при $l = 1$ (а), $l = 0.8$ (б), $l = 0.65$ (с)

При локальном повышении температуры в критической точке на нижней подложке ($\alpha_1^c < 0$) жидкость поднимается вверх к поверхности раздела, снижая поверхностное натяжение вблизи этой точки. Действие термокапиллярных сил меняет направление движения и смесь оттекает от центра. В этом случае на рис. 3 нужно изменить направление движения на противоположное. При этом сама структура течения не изменится.

4. РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим сопряжённую начально-краевую задачу (9)–(15). Указанная задача интегрируется в квадратурах в пространстве изображений по Лапласу, что позволяет получить количественную информацию о нестационарном решении. Пусть выражение

$$\hat{U}(\zeta, s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} U(\zeta, \tau) d\tau$$

является преобразованием Лапласа функции $U(\zeta, \tau)$, $\tau \in [0, \infty)$, $\zeta \in [-1, 0]$ (либо $\zeta \in [0, 1]$). Определение и свойства преобразования Лапласа изложены во многих руководствах, например [16]. Оно применимо для широкого класса функций, в частности, имеющих конечное число точек разрыва первого рода по переменной τ .

В образах по Лапласу рассматриваемая задача сводится к сопряжённой краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. После ряда простых преобразований решение записывается в виде

$$\begin{aligned} \hat{A}_1(\zeta, s) &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(\hat{\alpha}_1(s) + \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-1}^0 A_{01}(\zeta) \operatorname{sh} \sqrt{s}(1 + \zeta) d\zeta \right) \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \operatorname{ch} \sqrt{s}\zeta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sqrt{\chi}}{k} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \operatorname{sh} \sqrt{s}\zeta \right) + \frac{\chi}{kl\sqrt{s}} \operatorname{sh} \sqrt{s}(1 + \zeta) \int_0^1 A_{02}(\zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}}(1 - \zeta) d\zeta \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^{\zeta} A_{01}(\xi) \operatorname{sh} \sqrt{s}(\zeta - \xi) d\xi, \\ \hat{A}_2(\zeta, s) &= \frac{1}{\Delta} \left[\left(\hat{\alpha}_1(s) + \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-1}^0 A_{01}(\zeta) \operatorname{sh} \sqrt{s}(1 + \zeta) d\zeta \right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}}(\zeta - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\chi}{l^2 s}} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \zeta \operatorname{ch} \sqrt{s} + \frac{\sqrt{\chi}}{k} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \zeta \operatorname{sh} \sqrt{s} \right) \int_0^1 A_{02}(\zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}}(1 - \zeta) d\zeta \right] - \\ &\quad - \sqrt{\frac{\chi}{l^2 s}} \int_0^{\zeta} A_{02}(\xi) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}}(\zeta - \xi) d\xi, \\ \Delta &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \operatorname{ch} \sqrt{s} + \frac{\sqrt{\chi}}{k} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s\chi}{l^2}} \operatorname{sh} \sqrt{s}. \end{aligned} \tag{17}$$

Функции $\hat{Q}_j(\zeta, s)$ восстанавливаются по формулам (17), если заменить $A_{01}(\zeta)$ на

$Q_{01}(\zeta) + 4d\hat{A}_1(\zeta, s)$ и $A_{02}(\zeta)$ на $Q_{02}(\zeta) + \frac{4d}{\chi}\hat{A}_2(\zeta, s)$. Далее,

$$\begin{aligned}\hat{K}_1(\zeta, s) &= \frac{\psi}{\gamma \operatorname{sh} \gamma} \hat{A}_{2\zeta}(0, s) \operatorname{ch} \gamma(\zeta - 1) + \frac{1}{\gamma} \int_0^\zeta \Psi_1(\xi, s) \operatorname{sh} \gamma(\zeta - \xi) d\xi - \\ &\quad - \frac{\operatorname{ch} \gamma \zeta}{\gamma \operatorname{sh} \gamma} \int_0^1 \Psi_1(\zeta, s) \operatorname{ch} \gamma(1 - \zeta) d\zeta, \\ \Psi_1(\zeta, s) &= -\frac{1}{l^2 \operatorname{Le}_1} K_{01}(\zeta) - \frac{\psi \chi}{l^2} \left(s \hat{A}_2(\zeta, s) - A_{02}(\zeta) \right), \quad \gamma = \sqrt{\frac{s}{l^2 \operatorname{Le}_1}}, \\ \hat{A}_{2\zeta}(0, s) &= \frac{1}{\Delta} \sqrt{\frac{s \chi}{l^2}} \left[\left(-\hat{\alpha}_1(s) - \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-1}^0 A_{01}(\zeta) \operatorname{sh} \sqrt{s}(1 + \zeta) d\zeta \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s \chi}{l^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\chi}{l^2 s}} \operatorname{ch} \sqrt{s} \int_0^1 A_{02}(\zeta) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s \chi}{l^2}}(1 - \zeta) d\zeta \right], \\ \hat{K}_2(\zeta, s) &= \frac{\psi}{\gamma d \operatorname{sh} \gamma} \hat{Q}_{2\zeta}(0, s) \operatorname{ch} \gamma(\zeta - 1) + \frac{1}{\gamma} \int_0^\zeta \Psi_2(\xi, s) \operatorname{sh} \gamma(\zeta - \xi) d\xi - \\ &\quad - \frac{\operatorname{ch} \gamma \zeta}{\gamma \operatorname{sh} \gamma} \int_0^1 \Psi_2(\zeta, s) \operatorname{ch} \gamma(1 - \zeta) d\zeta, \\ \Psi_2(\zeta, s) &= -\frac{1}{l^2 \operatorname{Le}_1} K_{02}(\zeta) - \frac{4}{l^2} \hat{K}_1 - \frac{\psi \chi}{dl^2} \left(s \hat{Q}_2(\zeta, s) - Q_{02}(\zeta) \right).\end{aligned}$$

После решения обратной задачи для функций $\hat{F}_j(\zeta, s)$, $\hat{S}_1(s)$, $\hat{S}_2(s)$ получены следующие зависимости для искомых функций:

$$\begin{aligned}\hat{F}_1(\zeta, s) &= -\frac{\hat{S}_1}{s} + D_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} \zeta + D_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} \zeta + \\ &+ \sqrt{\frac{P_1}{s}} \int_0^\zeta \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\xi, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\xi) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (\zeta - \xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 0], \\ \hat{F}_2(\zeta, s) &= -\frac{\hat{S}_2}{s} + D_3 \operatorname{sh} \beta \zeta + D_4 \operatorname{ch} \beta \zeta + \\ &+ \frac{1}{\beta} \int_0^\zeta \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\xi, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\xi) \right] \operatorname{sh} \beta (\zeta - \xi) d\xi, \quad \zeta \in [0, 1].\end{aligned}\tag{18}$$

В формулах (18) введены обозначения

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_3(\zeta, \tau) &= 2 \int_0^\zeta \hat{A}_1(\xi, \tau) d\xi, \quad \hat{\Psi}_4(\zeta, \tau) = 2 \int_0^\zeta (\hat{A}_2(\xi, \tau) + \hat{K}_1(\xi, \tau)) d\xi, \quad \beta = \sqrt{\frac{\chi s}{P_2 l^2}}, \\ \hat{S}_1 &= -s D_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + s D_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + \sqrt{P_1 s} \int_{-1}^0 \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\zeta, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (1 + \zeta) d\zeta,\end{aligned}$$

$$\hat{S}_2 = sD_3 \operatorname{sh} \beta + sD_4 \operatorname{ch} \beta + \frac{s}{\beta} \int_0^1 \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\zeta, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \beta (1 - \zeta) d\zeta.$$

Постоянные D_i , $i = \overline{1, 4}$ восстанавливаются из граничных условий (11)–(13):

$$D_1 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} R_1 & \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - \sqrt{\frac{P_1}{s}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & 0 \\ R_2 & 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & \operatorname{ch} \beta - 1 \\ R_3 & 0 & \operatorname{ch} \beta - \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{P_1}{s}} (\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - 1) - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & R_1 & 0 \\ \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \beta & R_2 & \operatorname{ch} \beta - 1 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} (\operatorname{sh} \beta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \operatorname{ch} \beta) & R_3 & \operatorname{ch} \beta - \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} D_1 - \frac{\mu}{l\beta} \hat{\Psi}_{3\zeta}(0, s),$$

$$D_4 = \frac{1}{\Delta_1} \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{P_1}{s}} (\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - 1) - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - \sqrt{\frac{P_1}{s}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & R_1 \\ \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \beta & 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & R_2 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} (\operatorname{sh} \beta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \operatorname{ch} \beta) & 0 & R_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{P_1}{s}} (\operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - 1) - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} - \sqrt{\frac{P_1}{s}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & 0 \\ \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \beta & 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{s}{P_1}} & \operatorname{ch} \beta - 1 \\ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} (\operatorname{sh} \beta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \operatorname{ch} \beta) & 0 & \operatorname{ch} \beta - \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta \end{vmatrix},$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{P_1}{s}} \left\{ \int_{-1}^0 \int_0^\zeta \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\xi, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\xi) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (\zeta - \xi) d\zeta d\xi - \int_{-1}^0 \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\zeta, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (1 + \zeta) d\zeta \right\},$$

$$R_2 = -\frac{\mu \operatorname{sh} \beta}{l\beta} \hat{\Psi}_{3\zeta}(0, s) + \sqrt{\frac{P_1}{s}} \int_{-1}^0 \left[L_1 \hat{\Psi}_3(\zeta, s) - \frac{1}{P_1} F_{01}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \sqrt{\frac{s}{P_1}} (1 + \zeta) d\zeta - \frac{1}{\beta} \int_0^1 \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\zeta, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\zeta) \right] \operatorname{sh} \beta (1 - \zeta) d\zeta,$$

$$R_3 = -\frac{\mu}{l\beta} \hat{\Psi}_{3\zeta}(0, s) (\text{sh } \beta + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \text{ch } \beta) + \frac{1}{\beta} \int_0^1 \int_0^\zeta \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\xi, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\xi) \right] \text{sh } \beta (\zeta - \xi) d\zeta d\xi -$$

$$-\frac{1}{\beta} \int_{-1}^0 \left[\frac{\nu}{l^2} L_2 \hat{\Psi}_4(\zeta, s) - \frac{\chi}{P_2 l^2} F_{02}(\zeta) \right] \text{sh } \beta (1 - \zeta) d\zeta.$$

Используя свойства преобразования Лапласа [16], можно доказать, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \hat{A}_j(\zeta, s) = A_j^c(\zeta), \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{Q}_j(\zeta, s) = Q_j^c(\zeta),$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \hat{F}_1(\zeta, s) = F_1^c(\zeta), \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{S}_1(\zeta, s) = S_1^c(\zeta),$$

где $A_j^c(\zeta)$, $Q_j^c(\zeta)$, $F_1^c(\zeta)$, S_1^c даются формулами (16). При этом предполагается, что существуют пределы $\lim_{\tau \rightarrow \infty} s \bar{\alpha}_j(\tau) = \alpha_j^c = \text{const}$ и определено $\hat{\alpha}'_j(s)$. Другими словами, функции $A_j(\zeta, \tau)$, $Q_j(\zeta, \tau)$, $F_1(\zeta, \tau)$, $S_1(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ стремятся к своим стационарным величинам. Что касается функций $K_j(\zeta, \tau)$, входящих в представление для концентрации во втором слое, то они с ростом времени τ выходят на стационарные значения из (16) только при условиях связи

$$\int_0^1 K_{01}(\zeta) d\zeta + 2\chi\psi \text{Le}_1 \int_0^1 A_{02}(\zeta) d\zeta = \psi(2\chi \text{Le}_1 - 1) \alpha_1^c, \quad \int_0^1 K_{02}(\zeta) d\zeta = \delta_2. \quad (19)$$

То есть такая сходимость имеет место не для любых начальных данных $K_{01}(\zeta)$, $\zeta \in [0, 1]$. Функции $F_2(\zeta, \tau)$, $S_2(\tau)$ также имеют предельные значения $F_2^c(\zeta)$, S_2^c при ограничении (19). Подобная ситуация возникает и в других задачах, смотреть например, результаты работы [17].

Все эти выводы получены с помощью достаточно длинных выкладок из формул (17)–(18) с учётом введённых обозначений.

Для вычисления оригинала функции $U(\zeta, \tau)$ по его изображению можно воспользоваться комплексным интегралом

$$U(\zeta, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{s\tau} \hat{U}(\zeta, s) ds.$$

Обращение функции \hat{U} для получения решения исходной нестационарной задачи производится с помощью численной процедуры, предложенной в [18].

Будем считать, что нижняя твёрдая стенка нагревается по закону $\bar{\theta} = \alpha_1^c (1 - e^{-\tau} \cos(\tau)) (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) + \alpha_2^c$. В этом случае граничные условия (11) согласуются с начальными данными (7), ввиду чего следует ожидать выхода решения (17)–(18) при больших временах на стационарный режим (16). Эволюция профиля горизонтальной составляющей скорости U представлена на рис. 4. Кривые 1–3 соответствуют нестационарному профилю компоненты скорости U при $\bar{x} = 1$ в разные моменты времени $\tau = 1, 5, 10$ соответственно. При дальнейшем увеличении τ решение выходит на стационарный режим, определяемый формулами (16) — кривая 4. Численные расчёты демонстрируют стабилизацию течения в двухслойной системе жидких сред, что подтверждает справедливость аналитических оценок.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была исследована обратная начально-краевая задача о тепловой конвекции двухслойной системы жидкость-бинарная смесь с общей поверхностью раздела. Построено

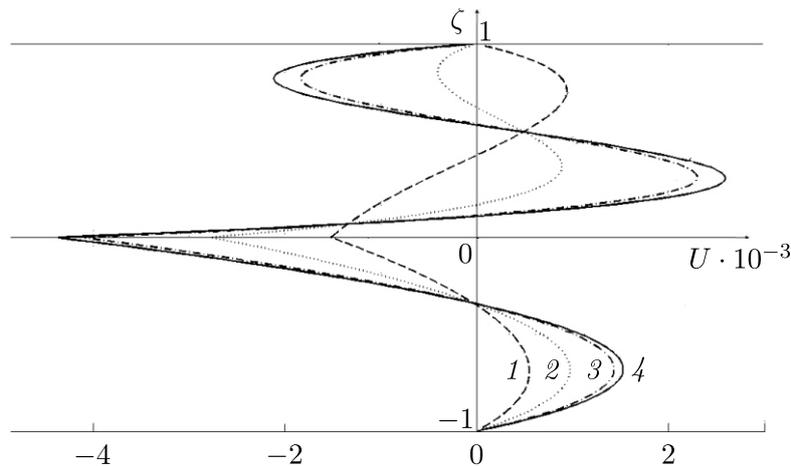


Рис. 4. Продольная компонента скорости U при $\bar{x} = 1$ в разные моменты времени: кривые 1 – $\tau = 1$, 2 – $\tau = 5$, 3 – $\tau = 10$, 4 – стационарный режим

точное решение уравнений Навье—Стокса в приближении Обербека—Буссинеска, описывающее стационарное течение в системе при радиальном нагреве нижней подложки и теплоизолированной верхней границей в предположении малости числа Марангони. Данное решение позволяет исследовать влияние различных параметров на структуру течения. В частности, проведён анализ влияния силы тяжести и толщин слоёв на поле скоростей исследуемой системы. Обнаружено, что в условиях нормальной гравитации в слое с бинарной смесью формируется третий вихрь, который смещается к поверхности раздела при увеличении толщины этого слоя. Для случая нестационарного движения задача решена в образах по Лапласу. Используя свойства преобразования Лапласа, показана сходимость нестационарного решения задачи (9)–(15) к её стационарному режиму (16).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Института вычислительного моделирования СО РАН. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hiemenz K.* Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dinglers Polytech. J.* 1911. V. 326. P. 321–440.
2. *Lin C. C.* Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1958. V. 1. P. 391–395.
3. *Bekezhanova V. B., Andreev V. K., Shefer I. A.* Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity // *Interfacial Phenom. Heat Transf.* 2019. V. 7, N 4. P. 345–364; DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020032777
4. *Lemeshkova E. N.* Two-Dimensional Plane Steady-State Thermocapillary Flow // *Fluid Dyn.* 2019. V. 54, N 1. P. 33–41; DOI: 10.1134/S0015462819010087
5. *Efimova M. V.* Construction of an Exact Solution of Special Type for the 3D Problem of Thermosolutal Convection in Two Layered System // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2023. V. 16, N 1. P. 26–34.

6. Андреев В. К. Конвекция двух жидких сред в трёхмерном слое при малых числах Марангони. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2022.
7. Андреев В. К. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000.
8. Зейтунян Р. Х. Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара—Марангони // Успехи физ. наук. 1998. V. 168. P. 259–286; DOI: 10.3367/UFN.0168.199803b.0259
9. Nepomnyashchy A. A., Velarde M., Colinet P. Interfacial Phenomena and Convection. Boca Raton: CRC Press, 2001.
10. Pukhnachov V. V. Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces // J. Appl. Math. 2002. V. 13. P. 205–224; DOI: 10.1017/S0956792501004776
11. Ефимова М. В., Дараби Н. Термоконцентрационная конвекция в системе вязкой жидкости и бинарной смеси в плоском канале при малых числах Марангони // Прикл. механика и техн. физика. 2018. V. 59, N 5. P. 93–103; DOI: 10.15372/PMTF20180511
12. Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье—Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретич. основы хим. технол. 2009. V. 43, N 5. P. 547–566.
13. Пухначев В. В., Пухначева Т. П. Трёхмерное нестационарное термокапиллярное течение вязкой жидкости // Вестник КазНУ сер. мат., мех., инф. 2002. V. 2, N 30. P. 96–104.
14. Magdenko E. P. Axisymmetric thermocapillary motion in a cylinder at small Marangoni number // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2015. V. 8, N 3. P. 303–311; DOI: 10.17516/1997-1397-2015-8-3-303-311
15. Sobachkina N. L. Unsteady flow of two binary mixtures in a cylindrical capillary with changes in the internal energy of the interface // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2022. V. 15, N 5. P. 623–634; DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-5-623-634
16. Лаврентьев М. К. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
17. Andreev V. K., Stepanova I. V. Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer // Int. J. Appl. Comput. Math. 2020. V. 6, N 6. Article 169; DOI: 10.1007/s40819-020-00924-0
18. Hoog F. R., Knight J. H., Stokes A. N. An improved method for numerical inversion of Laplace transforms // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1982. V. 3, N 3. P. 357–366; DOI: 10.1137/0903022

UDC 532.6

**THE STRUCTURE OF A TWO-LAYER FLOW IN A CHANNEL WITH
RADIAL HEATING OF THE LOWER SUBSTRATE FOR SMALL
MARANGONI NUMBERS**

© 2024 V. K. Andreev^a, M. V. Efimova^b

*Institute of Computational Modeling of the Siberian Branch of the Russian Academy of
Sciences,
Krasnoyarsk, 660036 Russia*

E-mails: ^aandr@icm.krasn.ru, ^befmavi@mail.ru

Received 09.08.2023, revised 05.04.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The three-dimensional flow of a system of a viscous heat-conducting fluid and a binary mixture with a common interface in a layer bounded by solid walls is studied. A radial time-varying temperature distribution is specified on the lower substrate; the upper wall is assumed to be thermally insulated. Assuming a small Marangoni number, the structure of a steady-state flow is described depending on the layer thickness ratio and taking into account the influence of mass forces. The solution of the nonstationary problem is determined in Laplace transforms by quadratures. It is shown that if the given temperature on the lower substrate stabilizes over time, then with increasing time the solution reaches the resulting steady-state mode only under certain conditions on the initial distribution of concentrations in the mixture.

Keywords: Oberbeck–Boussinesq equations, binary mixture, Marangoni number.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.201

REFERENCES

1. K. Hiemenz, “Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder,” *Dinglers Polytech. J.* **326**, 321–440 (1911).
2. C. C. Lin, “Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics,” *Arch. Ration. Mech. Anal.* **1**, 391–395 (1958).
3. V. B. Bekezhanova, V. K. Andreev, and I. A. Shefer, “Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity,” *Interfacial Phenom. Heat Transfer* **7** (4), 345–364 (2019). <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020032777>
4. E. N. Lemeshkova, “Two-dimensional plane steady-state thermocapillary flow,” *Fluid Dyn.* **54** (1), 33–41 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0015462819010087>
5. M. V. Efimova, “Construction of an exact solution of special type for the 3D problem of thermosolutal convection in two layered system,” *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **16** (1), 26–34 (2023).
6. V. K. Andreev, *Convection of Two Liquid Media in a Three-Dimensional Layer for Small Marangoni Numbers* (ICM SB RAS, Krasnoyarsk, 2022) [in Russian].
7. V. K. Andreev, *Thermocapillary Instability* (Nauka, Novosibirsk, 2000) [in Russian].
8. R. Kh. Zeytounian, “The Benard–Marangoni thermocapillary-instability problem,” *Phys.–Uspe.* **41** (3), 241–267 (1998). <https://doi.org/10.1070/PU1998v041n03ABEH000374>
9. A. A. Nepomnyashchy, M. Velarde, and P. Colinet, *Interfacial Phenomena and Convection* (CRC Press, Boca Raton, 2001).

10. V. V. Pukhnachov, "Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces," *J. Appl. Math.* **13**, 205–224 (2002). <https://doi.org/10.1017/S0956792501004776>
11. M. V. Efimova and N. Darabi, "Thermal-concentration convection in a system of viscous liquid and binary mixture in a plane channel with small Marangoni numbers," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **59** (5), 847–856 (2018). <https://doi.org/10.1134/S0021894418050115>
12. S. N. Aristov, D. V. Knyazev, and A. D. Polyanin, "Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables," *Theor. Found. Chem. Eng.* **43** (5), 642–662 (2009).
13. V. V. Pukhnachev and T. P. Pukhnacheva, "Three-dimensional nonstationary thermocapillary flow of a viscous liquid," *Vestn. KazNU Ser. Mat. Mekh. Inf.* **2** (30), 96–104 (2002) [in Russian].
14. E. P. Magdenko, "Axisymmetric thermocapillary motion in a cylinder at small Marangoni number," *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **8** (3), 303–311 (2015). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2015-8-3-303-311>
15. N. L. Sobachkina, "Unsteady flow of two binary mixtures in a cylindrical capillary with changes in the internal energy of the interface," *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **15** (5), 623–634 (2022). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-5-623-634>
16. M.A. Lavrent'ev and B.V. Shabat, *Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
17. V. K. Andreev and I. V. Stepanova, "Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer," *Int. J. Appl. Comput. Math.* **6** (6), 169 (2020). <https://doi.org/10.1007/s40819-020-00924-0>
18. F. R. Hoog, J. H. Knight, and A. N. Stokes, "An improved method for numerical inversion of Laplace transforms," *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **3** (3), 357–366 (1982). <https://doi.org/10.1137/0903022>

УДК 517.95:532.64

ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУХ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ТОНКОМ ПОРОУПРУГОМ СЛОЕ

© 2024 П. В. Гилев^а, А. А. Папин^б

*Алтайский государственный университет, Институт математики и информационных технологий,
просп. Ленина, 61, г. Барнаул 656049, Россия*

E-mails: ^аpavel.gilev.2000@mail.ru, ^бpapin@math.asu.ru

Поступила в редакцию 02.11.2023 г.; после доработки 06.03.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

В работе рассматривается математическая модель совместного движения двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. Данная модель является обобщением классической модели Маскета—Левретта, в которой пористость считается заданной функцией пространственной координаты. В основе изучаемой модели лежат уравнения сохранения массы жидкостей и пористого скелета, закон Дарси для жидкостей, учитывающий движение пористого скелета, формула Лапласа для капиллярного давления, реологическое уравнение для пористости типа Максвелла и условие равновесия «системы в целом». В приближении тонкого слоя исходная задача сводится к последовательному определению пористости твёрдого скелета и его скорости, а затем выводится эллиптико-параболическая система для «приведённого давления» и насыщенности смачивающей фазы. В связи с вырождением на решении уравнений системы её решение понимается в обобщённом смысле. Доказательство теоремы существования проводится в четыре этапа: регуляризация задачи, доказательство физического принципа максимума для насыщенности, построение галёркинских приближений, предельный переход по параметрам регуляризации на основе метода компенсированной компактности.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, закон Дарси, насыщенность, пороупругость, разрешимость.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.202

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В работе изучается следующая квазилинейная система составного типа:

$$\frac{\partial(s_i \phi \rho_i^0)}{\partial t} + \nabla \cdot (s_i \phi \vec{u}_i \rho_i^0) = 0, \quad (1)$$

$$s_i \phi (\vec{u}_i - \vec{u}_3) = -K_0 \frac{k_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial((1 - \phi) \rho_3^0)}{\partial t} + \nabla \cdot ((1 - \phi) \vec{u}_3 \rho_3^0) = 0, \quad (3)$$

$$p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}_3 = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta_t(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_3 \cdot \nabla p_e \right), \quad (5)$$

$$\nabla p_{tot} + \nabla \cdot \left(\frac{\eta}{2} (1 - \phi) \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{u}_3}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right) = -\rho_{tot} \vec{g}. \quad (6)$$

Данная система описывает движение двух несмешивающихся жидкостей (нефть — вода) в пороупругой среде [1]. Здесь ρ_i^0 , \vec{u}_i , s_i и p_i — соответственно истинная плотность, скорость, насыщенность и давление i -ой фазы ($i = 1$ — смачивающая фаза, $i = 2$ — несмачивающая фаза, $s_1 + s_2 = 1$, $i = 3$ — твёрдый деформируемый скелет), ϕ — пористость (доля объёма среды, приходящейся на пустоты), $p_e \equiv p_{tot} - p_f$ — эффективное давление, $p_{tot} \equiv \phi p_f + (1 - \phi)p_3$ — общее давление, $p_f \equiv p_1 s_1 + p_2 s_2$ — давление жидкой фазы, $\rho_{tot} \equiv \phi(s_1 \rho_1^0 + s_2 \rho_2^0) + (1 - \phi)\rho_3^0$ — общая плотность; $\eta(\phi)$, $\xi(\phi)$ и $\beta_t(\phi)$ — соответственно коэффициенты сдвиговой вязкости, объёмной вязкости и объёмной сжимаемости среды, \vec{g} — плотность массовых сил; кроме того, $K_0(\phi)$ — тензор проницаемости, μ_i — динамическая вязкость i -ой жидкости, $k_{0i}(s_i)$ — относительная фазовая проницаемость, $p_c(s_1)$ — капиллярное давление есть заданные функции (модельные зависимости):

$$p_c = \bar{p}_c(1 - s_1)/s_1, \quad \xi(\phi) = \eta/\phi^b, \quad \beta_t(\phi) = \phi^m \beta_\phi, \quad k_{0i} = \bar{k}_{0i} s_i^{n_i}, \quad K_0(\phi) = \phi^3 \bar{K}/(1 - \phi)^2,$$

где \bar{p}_c , m , b , β_ϕ , \bar{k}_{0i} , \bar{K} , n_i — положительные параметры [2]).

Задача записана в эйлеровых координатах $\vec{x} = (x, y, z)$ и t , $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ — оператор градиента, t — время. Истинные плотности принимаются постоянными, неизвестными функциями являются 14 скалярных величин: \vec{u}_1 , \vec{u}_2 , \vec{u}_3 , p_1 , p_2 , p_3 , s_1 , ϕ . Для их определения служат также 14 скалярных уравнений: три уравнения неразрывности (1), (3), шесть уравнений закона Дарси (2), уравнение для капиллярного скачка (4), реологическое соотношение типа Максвелла (5) и три уравнения баланса сил системы в целом (6).

Особенностью задач для сформулированной системы уравнений (1)–(6) двухфазной фильтрации жидкостей в пороупругой среде является возможное вырождение уравнений на решении (вследствие условий $k_{01}(0) = k_{02}(1) = 0$), переменная пористость ϕ , а так же необходимость обоснования физического принципа максимума для s_i и ϕ вида $0 \leq s_i \leq 1$, $0 < \phi < 1$.

Работы с использованием переменной пористости начались с 1920-х годов в связи с попытками математического моделирования процессов фильтрации в осадочных породах [3]. Сначала использовались простые зависимости пористости от глубины (см. обзор [4]), полученные на основе экспериментальных данных. Затем появились более сложные зависимости для пористости через эффективное давление [5]. Экспериментальные данные о неизвестной пористости содержатся в работах [6, 7]. В настоящей работе принята устоявшаяся форма записи уравнения для пористости (5).

В работах [8, 9] рассматриваются задачи двухфазной фильтрации в деформируемой среде с известной пористостью. В работах [10, 11] рассматриваются модельные задачи фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде. Если пористость задана, а среда недеформируема, данная система уравнений есть классическая модель Маскета-Леверетта [12, 13]. Обоснованию моделей для однофазной фильтрации посвящены работы [4, 14–17]. Численное исследование проводилось в [18–20].

Система (1)–(6) рассматривается в тонком слое $\Omega = \{(x, z) | -H \leq x \leq H; -L \leq z \leq L\}$ при фиксированном всюду значении y и при следующих дополнительных гипотезах: $\vec{u}_i = (0, u_i(x, z, t))$, $i = 1, 2$, $\vec{u}_3 = (0, u_3(x, t))$, $\vec{g} = (0, -g)$, $K_0(\phi) = \tilde{K}_0(\phi)\delta_{ij}$. В (1)–(6) перейдём к безразмерным переменным по правилу:

$$x = H\bar{x}, \quad z = H\bar{z}, \quad t = T\bar{t}, \quad u_i = \frac{L}{T}\bar{u}_i, \quad p_i = P\bar{p}_i, \quad p_e = P\bar{p}_e, \\ p_f = P\bar{p}_f, \quad p_{tot} = P\bar{p}_{tot}, \quad \eta = PT\bar{\eta}, \quad \tilde{K}_0 = L^2\bar{K}_0, \quad \mu_i = PT\bar{\mu}_i,$$

где T , L , H , P — характерные время, расстояния и давление, причём $H/L = \delta$ — малый параметр. Тогда Ω есть единичный квадрат, область изменения \bar{t} — единичный отрезок $[0, 1]$, а система уравнений (1)–(6) принимает следующий вид (штрихи опускается):

$$\frac{\partial s_i \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(s_i \phi u_i) = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

$$s_i \phi(u_i - u_3) = -K_0(\phi) \frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} - g\rho_i^0 \right), \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (9)$$

$$\frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}((1 - \phi)u_3) = 0, \quad (10)$$

$$a_1(\phi)p_e + a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3 \frac{\partial p_e}{\partial z} \right) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} (1 - \phi) \right) = 0, \quad (12)$$

$$\delta^2 \frac{\partial p_{tot}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(1 - \phi) \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \delta^2 \rho_{tot}^0 g. \quad (13)$$

Следует отметить, что с учётом условия $\frac{\partial u_3}{\partial z} = 0$ система, вообще говоря, переопределена. Поэтому для начальной пористости вводится следующее ограничение: $\phi(x, z, 0) = \phi_0(x)$. Далее будет доказано, что $\phi(x, z, t) = \phi_0(x)$. Тогда уравнение (12) перейдёт в $\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = 0$. Из $\frac{\partial p_i}{\partial x} = 0$ и уравнения капиллярного скачка (9) вытекает, что $\frac{\partial p_c}{\partial x} = 0$, а так как p_c монотонна по s_1 , то $\frac{\partial s_1}{\partial x} = 0$. С учётом этого и определения p_f также выводим, что $\frac{\partial p_f}{\partial x} = 0$. Поскольку $p_{tot} = p_f + p_e$ и $\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = 0$, то $\frac{\partial p_e}{\partial x} = 0$. После формального предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$, система (7)–(13) сводится к системе для нахождения $\phi(x, z, t)$ и $u_3(x, t)$:

$$\frac{\partial(1 - \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}((1 - \phi)u_3) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(1 - \phi) \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = 0, \quad (15)$$

а так же к следующей системе для определения $s_i(z, t)$, $p_i(z, t)$, $u_i(x, z, t)$, ($i = 1, 2$), $p_e(z, t)$ и $p_{tot}(z, t)$:

$$\frac{\partial s_i \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(s_i \phi u_i) = 0, \quad \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

$$s_i \phi(u_i - u_3) = -K_0(\phi) \frac{k_{0i}(s_i)}{\mu_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} - g\rho_i^0 \right), \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1), \quad (18)$$

$$a_1(\phi)p_e + a_2(\phi) \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + u_3 \frac{\partial p_e}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = 0. \quad (19)$$

Система (14)–(15) с краевыми и начальными условиями вида:

$$\begin{aligned} u_3(-1, t) &= u_3^-(t), \quad u_3(1, t) = u_3^+(t), \\ \phi(x, z, 0) &= \phi_0(x) \end{aligned} \quad (20)$$

будет называться задачей 1.

Уравнения (16)–(19) сводятся к следующей эллипτικο-параболической системе для $s \equiv s_1$ и $p \equiv p_1 - \int_s^1 \frac{k_{02}}{k(\xi)\mu_2} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi$ [1, 12]:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K_0 k(s) \frac{\partial p}{\partial z} + f \right) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial s \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(s \phi u_3 - K_0 \frac{k_{01}}{\mu_1} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_0 a(s) \frac{\partial s}{\partial z} - f_0 \right) = 0, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} f &= K_0 \left(\frac{k_{01}}{\mu_1} \rho_1 g + \frac{k_{02}}{\mu_2} \rho_2 g \right), \quad f_0 = K_0 \frac{k_{01}}{\mu_1} \rho_1 g, \\ F &= f_0 - bf, \quad v = s_1 \phi u_1 + s_2 \phi u_2 + (1 - \phi) u_3, \\ k(s) &= \frac{k_{01}}{\mu_1} + \frac{k_{02}}{\mu_2}, \quad b(s) = \frac{k_{01}}{\mu_1 k(s)}, \\ a(s) &= -\frac{1}{k(s)} \frac{k_{01}}{\mu_1} \frac{k_{02}}{\mu_2} \frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad v_1 = s \phi u_1. \end{aligned}$$

Причём

$$\begin{aligned} s(z, 0) &= s_0(z), \quad s(-1, 0) = s^-(t), \\ s(1, 0) &= s^+(t), \quad p(-1, t) = p^-(t), \quad p(1, t) = p^+(t). \end{aligned} \tag{23}$$

Система (21)–(22) с начально-краевыми условиями (23) будет называться задачей 2.

Рассмотрим в Ω и Ω_T , ряд функциональных пространств, придерживаясь обозначений, принятых в [21]. Пусть $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ — норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty]$. Положим для краткости $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{q,\Omega}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,\Omega}$. Так же используются пространства Гёльдера $C^\alpha(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, где k натуральное число, а $\alpha \in (0, 1]$, и пространство Соболева $W_p^l(\Omega)$, l — натуральное и $p \in [1, \infty]$, с нормами:

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^\alpha(\Omega)} &\equiv |f|_{\alpha,\Omega} = |f|_{0,\Omega} + H_x^\alpha(f), \\ |f|_{0,\Omega} &= \max_{x \in \Omega} |f(x)|, \\ H_x^\alpha(f) &= \sup_{x_1, x_2 \in \Omega} |f(x_1) - f(x_2)| |x_1 - x_2|^{-\alpha}, \\ \|f\|_{C^{k+\alpha}(\Omega)} &\equiv |f|_{k+\alpha,\Omega} = \sum_{m=0}^k \|D_x^m f\|_{0,\Omega} + H_x^\alpha(D_x^k f), \\ \|f\|_{W_p^l(\Omega)} &= \sum_{m=0}^l \|D_x^m f\|_{p,\Omega}. \end{aligned}$$

Для функций, определённых на Ω_T , нам потребуется пространство $L_{q,r}(\Omega_T)$ с нормой

$$\| |\cdot|_{q,\Omega} \|_{r,G}, \quad G = (0, T), \quad q, r \in [1, \infty],$$

пространство $L_r(0, T; W_p^l(\Omega))$ с нормой

$$\|\cdot\|_{L_r(0,T;W_p^l(\Omega))} = \| |\cdot|_{W_p^l(\Omega)} \|_{r,G},$$

а так же $C^{k+\alpha, m+\beta}(\Omega_T)$, где k, m натуральные и $(\alpha, \beta) \in (0, 1]$, с нормой

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{k+\alpha, m+\beta}(\Omega_T)} &\equiv |f|_{k+\alpha, m+\beta, \Omega_T} = \sum_{l=0}^k \|D_x^l f\|_{0,\Omega_T} + \sum_{j=1}^m \|D_t^j f\|_{0,\Omega_T} + \\ &+ H_x^\alpha(D_x^k f) + H_t^\beta(D_x^k f) + H_x^\alpha(D_t^m f) + H_t^\beta(D_t^m f), \end{aligned}$$

где

$$H_x^\alpha(f(x, t)) = \sup_{x_1, x_2 \in \Omega} |f(x_1, t) - f(x_2, t)| |x_1 - x_2|^{-\alpha}$$

для всех $t \in (0, T)$,

$$H_t^\beta(f(x, t)) = \sup_{t_1, t_2 \in (0, T)} |f(x, t_1) - f(x, t_2)| |t_1 - t_2|^{-\beta}$$

для всех $x \in \Omega$. В случае $k = m$ и $\alpha = \beta$, используется обозначение $C^{k+\alpha}(\Omega_T)$.

Определение 1. Классическим решением задачи (14)–(15) называется совокупность функций ϕ и u_3 , $\phi \in C^{1+\alpha}(\Omega_T)$, $u_3 \in C^{2+\alpha, 1+\alpha}(\Omega_T)$, удовлетворяющих условиям (14)–(15) и начально-краевым условиям (20) как непрерывные в $\bar{\Omega}_T$ функции.

Определение 2. Ограниченные измеримые функции s и p называются обобщённым решением задачи 2, если:

1) $0 \leq s(z, t) \leq 1$ почти всюду в Ω_T .

2) $\frac{\partial p}{\partial z} \in L_2(\Omega_T)$, $a \frac{\partial s}{\partial z} \in L_2(\Omega_T)$, где при $0 \leq s \leq 1$ функция $a \frac{\partial s}{\partial z}$ определяется формулой:

$$a \frac{\partial s}{\partial z} = \left| \frac{dp_c}{ds} \right| \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \in L_2(\Omega_T),$$

$$u(s) = \int_0^s \frac{1}{k(\xi)} \frac{k_{01}(\xi)}{\mu_1} \frac{k_{02}(\xi)}{\mu_2} d\xi.$$

3) p удовлетворяет краевым, а s — начально-краевым условиям в следующем смысле: $u[s_0(z, t)] = u_0$.

4) Для произвольных допустимых функций $\lambda(z, t)$ и $\psi(z)$ таких, что

$$\lambda(z, t) \in W_2^1(\Omega_T), \quad \psi(z) \in W_2^1(\Omega),$$

$$\lambda(-1, t) = \psi(-1) = \lambda(1, t) = \psi(1) = \lambda(z, T) = 0, \quad t \in [0, T], \quad z \in [-1, 1],$$

почти всюду выполнены равенства:

$$L_1 \equiv -(\phi s, \lambda_t)_{\Omega_T} + \left(\vec{v}_1, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_T} = -(\phi s, \lambda)_{\Omega} \Big|_0^T,$$

$$L_2 \equiv (\vec{v}, \nabla \psi)_{\Omega} = 0.$$

Здесь

$$s_0(z, t) = \begin{cases} s^-(t), & x = -1, \\ s^+(t), & x = 1, \\ s^0(z), & t = 0, \end{cases}$$

$$p_0(t) = \begin{cases} p^-(t), & z = -1, \\ p^+(t), & z = 1. \end{cases}$$

Основным результатом данной работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. Если u_3^+ и $u_3^- \in C^1(0, T)$, $\phi^0(x) \in C^1(-1, 1)$ и $0 < \phi^0(x) < 1$, $x \in [-1, 1]$, то решение задачи 1 существует и даётся формулами:

$$\phi \equiv \phi^0(x), \quad u_3 = \frac{u_3^+ - u_3^-}{I(1)} I(x) + u_3^-, \quad I(x) = \int_{-1}^x \frac{d\xi}{1 - \phi^0(\xi)}. \quad (24)$$

Теорема 2. При выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_c}{\partial s} < 0, \quad |k_{01}(s), k_{02}(s), u_3|_{C[0,1]} \leq M, \\ 0 < M^{-1} \leq [\phi^0, k, K_0] \leq M, \quad \text{если } s \in [0, 1], \\ 0 < (a, k_{01}, k_{02}), \quad s \in (0, 1), \\ a|_{s=0,1} = k_{01}(0) = k_{02}(1) = 0, \\ \left(\left\| \frac{\partial s_0}{\partial t} \right\|_{1, \Omega_T}; \left\| \frac{\partial s_0}{\partial z} \right\|_{2, \Omega_T} \right) \leq M, \\ \left(\|p_0\|_{2, \infty, \Omega_T}; \left\| \frac{\partial p_0}{\partial z} \right\|_{2, \infty, \Omega_T} \right) \leq M \end{aligned}$$

существует по крайней мере одно обобщённое решение задачи 2.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Сначала докажем теорему 1.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{div} \vec{u}_3 = 0$, то из [22] имеем $\phi = \phi^0$. Зная $\phi(x)$ из (15) находится $u_3(x, t)$. Таким образом, решение задачи 1 существует, удовлетворяет уравнениям (14)–(15), условиям (20) и задаётся формулами (24). \square

В силу того, что функции u_3 и ϕ зависят от переменной x , решение задачи 2 также, вообще говоря, зависит от переменной x как от параметра. Подобная параметрическая зависимость отсутствует в работе [12].

Проведём регуляризацию задачи. Продолжим каждую функцию вида $f(z, s)$ вне промежутка $0 \leq s(z, t) \leq 1$ по формуле

$$f_*(z, s) = \begin{cases} f(z, 0), & s \leq 0, \\ f(z, s), & 0 < s < 1, \\ f(z, 1), & s \geq 1. \end{cases}$$

и, кроме того, заменим $a(s)$ на $\bar{a}(s) = a_*(s) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а v и b на их стекловские усреднения по z и по s соответственно:

$$\begin{aligned} -(\phi s, \lambda_t)_{\Omega_t} + \left(\frac{\partial s}{\partial z} \phi u_3, \lambda \right)_{\Omega_t} - \left(c(s)(u_3 - v_h) \frac{\partial s}{\partial z}, \lambda \right)_{\Omega_t} + \\ + \left(K_0 \bar{a}(s) \frac{\partial s}{\partial z} + F, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} = -(\phi s, \lambda)_{\Omega} |_{t=0}, \quad (25) \end{aligned}$$

где $c = (b_s^0)_*$, $b^0 = b_h$.

Лемма. Пусть выполнены предположения (1)–(4) определения 2 и $s(z, t)$, $p(z, t)$ — обобщённое решение задачи 2_ε . Тогда почти всюду в Ω_T

$$0 \leq s(z, t) \leq 1, \quad (z, t) \in \Omega_T.$$

Доказательство. Введём срезающую функцию $\bar{s} = \max\{s(z, t) - 1, 0\}$ и обозначим $\Gamma = \partial\Omega$. В силу свойств срезки $\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} \in L_2(\Omega_T)$, $\bar{s}|_{\Gamma} = 0$, $\bar{s}|_{t=0} = 0$, и почти всюду выполнены равенства

$$\left(\phi s, \frac{\partial \bar{s}}{\partial t}\right)_{\Omega_t} = (\phi s, \bar{s})_{\Omega}|_{t=0} - \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} \phi, \bar{s}\right)_{\Omega_t}, \quad F(\bar{s}, z) = 0.$$

После всех замен получится следующее выражение:

$$\frac{1}{2} \|\sqrt{\phi} \bar{s}(t)\|_{\Omega, 2}^2 - \left((c(s)(u_3 - v_h) - \phi u_3) \frac{\partial s}{\partial z}, \bar{s}\right)_{\Omega_t} + \left(K_0 \bar{a}(s) \frac{\partial s}{\partial z}, \frac{\partial \bar{s}}{\partial z}\right)_{\Omega_t} = 0.$$

Отличием данного равенства от аналогичного из работы [12] является наличие слагаемого u_3 .

Третье слагаемое оценивается снизу значением $\|\frac{\partial s}{\partial z}\|_{2, \Omega_t}^2$, второе, после переноса в правую часть, можно оценить сверху, используя неравенство Коши. В результате получим неравенство:

$$y(t) = \|s\|_{\Omega}^2 \leq C \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad y(0) = 0.$$

Отсюда следует, что $\bar{s} = 0$ или, что то же самое, $s \leq 1$ почти всюду. Теперь, вводя срезку $\max(-s, 0)$, проделывая все те же шаги, придём к тому, что $s \geq 0$ почти всюду. \square

Будем искать приближенное решение задачи 2 в виде:

$$s^N = \sum_{k=1}^N a_k^N(t) \lambda_k(z) + s_0(z, t), \quad p^N = \sum_{k=1}^N b_k^N \psi_k(z) + p_0(z, t),$$

где фундаментальные в $W_2^1(\Omega, [0, T]) = \{\lambda(z) \in W_2^1(\Omega), \lambda(-1) = \lambda(1) = 0\}$ системы функций λ_k и ψ_k нормированы следующим образом:

$$(\phi \lambda_k, \lambda_i)_{\Omega} = \delta_{ki}, \quad (\psi_k, \psi_i)_{\Omega} = \delta_{ki},$$

где δ_{ik} — символы Кронекера а $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Подставим эти представления для s^N и p^N , а λ_k и ψ_k вместо пробных функций, раскроем скобки и воспользуемся условиями нормировки. Получим следующие равенства:

$$A_k(t) \frac{da_k^N(t)}{dt} = \sum_{j=1}^N a_j^N(t) \omega_{jk} + \beta_k, \quad a_k^N(0) = 0, \quad (26)$$

$$\sum_{j=1}^N b_j^N \zeta_{jk} + \mu_k = 0, \quad (27)$$

$$\zeta_{jk} = \left(K_0(\phi) k(s^N) \frac{\partial \psi_j}{\partial z}, \frac{\partial \psi_k}{\partial z}\right)_{\Omega},$$

$$\mu_k = -\left(K_0(\phi) k(s) p_0(z, t), \frac{\partial \psi_k}{\partial z}\right)_{\Omega} - \left(f, \frac{\partial \psi_k}{\partial z}\right)_{\Omega},$$

$$\omega_{jk} = \left(\lambda_j(z) \phi u_3, \frac{\partial \lambda_k}{\partial z}\right)_{\Omega} + \left(c(s^N)(u_3 - v_h) \frac{\partial \lambda_j}{\partial z}, \lambda_k\right)_{\Omega} - \left(K_0 \bar{a}(s^N) \frac{\partial \lambda_j}{\partial z}, \frac{\partial \lambda_k}{\partial z}\right)_{\Omega} + \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial z} \phi u_3, \lambda_k\right)_{\Omega},$$

$$\begin{aligned} \beta_k = & -(\phi s_0, \lambda_k)_\Omega + \left(\frac{\partial s_0}{\partial z} \phi u_3, \lambda_k \right)_\Omega + ((\phi s_0)_t, \lambda_k)_\Omega + \\ & + \left(c(s^N)(u_3 - v) \frac{\partial s_0}{\partial z}, \lambda_k \right)_\Omega - \left(K_0 \bar{a}(s^N) \frac{\partial s_0}{\partial z}, \frac{\partial \lambda_k}{\partial z} \right)_\Omega - \left(F, \frac{\partial \lambda_k}{\partial z} \right)_\Omega. \end{aligned}$$

Фиксируем $t = \bar{t}$. Докажем разрешимость задачи (26) и (27). В силу всех сделанных предположений, коэффициенты этой вспомогательной системы непрерывны по a_k^N, b_j^N , функции $\omega_{jk}, \beta_k, \zeta_{jk}$ ограничены, а μ_k интегрируемы по $t \in [0; T]$ при всех значениях a_k^N, b_j^N . Подставим в ω_{jk} функцию $\bar{s}^N = \sum_{k=1}^N \bar{a}_k^N \lambda_k + s_0$. Тогда для определения b_k^N в каждый момент времени получаем нелинейную алгебраическую систему уравнений. В силу ортогональности $\frac{\partial \psi_k}{\partial z}$ имеем

$$\sum_{i,j=1}^N \zeta_{jk} \xi_i \xi_j = (K_0(\phi)k(s) \sum_{i=1}^N \xi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial z}, \sum_{j=1}^N \xi_j \frac{\partial \psi_j}{\partial z}) \geq \nu(M) \sum_{i,j=1}^N \xi_i \xi_j.$$

В силу всех предположений $\nu(M) > 0$, откуда следует, что система (27) однозначно разрешима и её решение зависит от \bar{a}_k^N непрерывно. Подставим полученные представления в v_h . Перейдём к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая, в силу указанных свойств коэффициентов, разрешима при всех $t \in [0, T]$.

Получим априорные оценки для $s^N(z, t)$ и $p^N(z, t)$ не зависящие от N .

Умножим (26) на a_k^N , а (27) на b_k^N с последующим суммированием и интегрированием по t первого равенства:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial s^N}{\partial z} \phi u_3, (s^N - s_0) \right)_{\Omega_t} - \left(c(s^N)(u_3 - v_h) \frac{\partial s^N}{\partial z}, s^N - s_0 \right)_{\Omega_t} + \\ + \left(K_0 \bar{a}(s^N) \frac{\partial s^N}{\partial z} + F, \frac{\partial}{\partial z}(s^N - s_0) \right)_{\Omega_t} = 0, \\ \left(K_0(\phi)k(s^N) \frac{\partial p^N}{\partial z} + f, \frac{\partial}{\partial z}(p^N - p_0) \right)_\Omega = 0. \end{aligned}$$

Тогда верны следующие оценки

$$\|s^N\|_{2, Q_t}^2 + \left\| \frac{\partial s^N}{\partial z} \right\|_{2, Q_t}^2 \leq C(M, h, \varepsilon)(A_0(t) + \|s^N\|_{\Omega_t, 2}^2),$$

где

$$\begin{aligned} A_0(t) = \|s_0\|_{2, \Omega_t}^2 + \left\| \frac{\partial s_0}{\partial z} \right\|_{2, \Omega_t}^2 + \left\| \frac{\partial s_0}{\partial t} \right\|_{2, \Omega_t}^2 + \|F\|_{2, \Omega_t}^2 + \|\phi\|_{2, \Omega_t}^2, \\ \left\| \frac{\partial p^N}{\partial z} \right\|_{2, \Omega}^2 \leq C \left(\left\| \frac{\partial p_0}{\partial z} \right\|_{2, \Omega} + \|f\|_{2, \Omega} \right). \end{aligned}$$

Кроме того

$$\|p^N\|_{2, \Omega}^2 \leq \bar{C}(M) \left(\left\| \frac{\partial p_0}{\partial z} \right\|_{2, \Omega} + \|f\|_{2, \Omega_t} \right). \quad (28)$$

Полагая $y(t) = \|s^N(t)\|_{2, \Omega}^2$, приходим к дифференциальному неравенству: $y'(t) \leq c_1(N_0 + y(t))$, $y(0) = 0$, откуда

$$y(t) \leq c_1 \int_0^t e^{C_1(t-\tau)} N_0(\tau) d\tau,$$

или окончательно

$$\|s^N\|_{V(\Omega_t)} = \|s^N\|_{2,\infty,\Omega_t} + \left\| \frac{\partial s}{\partial z} \right\|_{2,\Omega_t} \leq C(M, \varepsilon, h). \quad (29)$$

Полученные оценки гарантируют равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность решений задачи 2 по переменной z . Равностепенную непрерывность решений задачи 2 по переменной t получаем с помощью принципа компенсированной компактности из [12].

Отметим, что \bar{C} из (28) зависит только от M , а C из (29) от M, ε, h , но не от N . Осуществим предельный переход по N при фиксированных ε и h . Из (29) следует компактность $s^N, \frac{\partial s^N}{\partial z}$ в $L_2(\Omega_t)$. Будем теперь считать, с учётом (28), v_h в (26) заданной функцией, т. е. рассмотрим систему (26)–(27), соответствующую одному параболическому уравнению. Тогда согласно известным результатам [12], последовательность $s^N(z, t)$ компактна в следующем смысле: из неё можно выделить подпоследовательность, $s^{N_k}(z, t)$, такую, что $s^{N_k}(z, t) \rightarrow s(z, t)$ почти всюду в Ω_t , $\frac{\partial s^{N_k}}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial s}{\partial z}$ слабо в $L_2(\Omega_t)$ и $t(\phi s^{N_k}, \lambda)_\Omega \rightarrow t(\phi s, \lambda)_\Omega$ при почти всех.

На выбранной последовательности s^N функции p^N сходятся сильно. Действительно, пусть $w = p^N - p$, тогда из (26) имеем

$$\left(K^N \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z} \right)_\Omega = \left((K^N - K) \frac{\partial p}{\partial z} + f - f^N, \frac{\partial w}{\partial z} \right)_\Omega,$$

где $K^N = K_0(\phi)k(s^{N_k})$, $K = K_0(\phi)k(s)$, откуда

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial z} \right\|_{2,\Omega}^2 \leq C(M) \left(\left\| (K^N - K) \frac{\partial p}{\partial z} \right\|_{2,\Omega}^2 + \|f - f^N\|_{\Omega,2}^2 \right) \rightarrow 0,$$

так как s^N сходится к s п. в. в Ω_t , а K — ограничен.

Получим оценки, не зависящие от h . После применения неравенств Гёльдера и Коши получается неравенство

$$\|s\|_{V(\Omega_t)}^2 = \|s\|_{2,\infty,\Omega_t} + \left\| \frac{\partial s}{\partial z} \right\|_{2,\Omega_t} \leq C(M, \varepsilon) \left(\|v_h\|_{2,\Omega_t}^2 + \left\| \frac{\partial s}{\partial z} \right\|_{2,\Omega_t}^2 + \left\| \frac{\partial s_0}{\partial z} \right\|_{2,\Omega_t}^2 \right) + C(M, \varepsilon) (\|F\|_{2,\Omega_t}^2 + \|\phi\|_{2,\Omega_t}^2 + \|s_0\|_{2,\infty,\Omega_t}).$$

Учитывая свойства усреднения, получим следующую оценку:

$$\|v_h\|_{2,\Omega} \leq \|v\|_{2,\Omega} = \|u_3 - K_0 k(s) \frac{\partial p}{\partial z} - f\|_{2,\Omega} \leq \left(\left\| \frac{\partial p_0}{\partial z} \right\|_{2,\Omega} + \|u_3\|_{2,\Omega} + \|f\|_{2,\Omega_t} \right),$$

более того

$$\|v_h - v\|_{2,\Omega} \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$$

Таким образом,

$$\|s\|_{V(Q_t)}^2 \leq C(\varepsilon, M).$$

Поскольку v и u_3 не зависят от z , $\operatorname{div} v = \operatorname{div} u_3 = 0$, $\lambda(-1, t) = \lambda(1, t) = 0$, то справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} (\lambda b_0), v - u_3 \right)_{\Omega_t} = 0.$$

Поэтому имеем

$$\left(\frac{\partial b}{\partial s} (v - u_3) \frac{\partial s}{\partial z}, \lambda \right)_{\Omega_t} + \left(b_0 (v - u_3), \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} = 0.$$

Тогда равенство (25) можно переписать так:

$$\begin{aligned} L_1^\varepsilon(s, p, \lambda) &= -(\phi s, \lambda_t)_{\Omega_t} - \left(s\phi u_3, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} + \left(b_0(v - u_3), \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} + \\ &+ \left(K_0 \bar{a}(s) \frac{\partial s}{\partial z} + F, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} = -(\phi s, \lambda)_{\Omega} \Big|_0^1 + \left(b_s(s)(v_h - v) \frac{\partial s}{\partial z}, \lambda \right)_{\Omega_t}, \\ &\left(b_s(s)(v_h - v) \frac{\partial s}{\partial z}, \lambda \right)_{Q_t} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как

$$\left\| \left(c(v_h - v), \frac{\partial s}{\partial z} \lambda \right)_{\Omega_t} \right\|_{\Omega_t} \leq c \|v - v_h\|_{\Omega_t} \left\| \lambda \frac{\partial s}{\partial z} \right\|_{\Omega_t} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Таким образом, выполнено тождество

$$\begin{aligned} L_1^\varepsilon(s, p, \lambda) &= -(\phi s, \lambda_t)_{\Omega_t} - \left(s\phi u_3, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} + \left(b_0(v - u_3), \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} + \\ &+ \left(K_0 \bar{a}(s) \frac{\partial s}{\partial z} + F, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} = -(\phi s, \lambda)_{\Omega} \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Теперь осуществим предельный переход по ε . Имеем, что $0 \leq s^\varepsilon(z, t) \leq 1$. Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} \left(\phi \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}, s^\varepsilon \right)_{\Omega, 2}^2 + \left(K_0 \bar{a}(s) \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + F, \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} \right)_{\Omega_t} &= \left(\phi \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}, s_0(z, t) \right)_{\Omega_t} + \\ &+ \frac{1}{2} \|\sqrt{\phi} s(0)\|_{\Omega, 2}^2 - \left(b_0(v - u_3), \frac{\partial}{\partial z} (s^\varepsilon - s_0) \right)_{\Omega_t} + \\ &+ \left(s\phi u_3, \frac{\partial}{\partial z} (s^\varepsilon - s_0) \right)_{\Omega_t} + \left(\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t} \phi, s_0 \right)_{\Omega_t} + \left(K_0 \bar{a}(s^\varepsilon) \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + F, \frac{\partial s_0}{\partial z} \right)_{\Omega_t}. \end{aligned}$$

Введём функцию

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \int_{s_0}^{s^\varepsilon} b(\xi) d\xi, \quad u|_S = 0, \quad b(s^\varepsilon) = \frac{k_{01}}{\mu_1 k(s^\varepsilon)}, \\ \left(bv, \frac{\partial}{\partial z} (s^\varepsilon - s_0) \right)_{\Omega_t} &= \left(v, \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\Omega_t} + B, \quad B = \left(v, (b(s_0) - b(s^\varepsilon)) \frac{\partial s_0}{\partial z} \right)_{\Omega_t}, \quad S = \partial\Omega_t. \end{aligned}$$

Нетрудно получить неравенства

$$\begin{aligned} \|v\|_{\Omega} &\leq C(M) \left(\left\| \frac{\partial p_0}{\partial z} \right\|_{\Omega} + \|f\|_{\Omega_t} \right), \\ \|s^\varepsilon\|_{\Omega_t} + \left\| \sqrt{\bar{a}} \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{\Omega_t} &\leq \\ &\leq C(M) \left(\|s_0(z, 0)\|_{\Omega_t} + \|s_0\|_{\Omega_t} + \left\| \frac{\partial s_0}{\partial t} \right\|_{\Omega_t} + \|v\|_{\Omega_t} + \|F\|_{\Omega_t} + \|\phi\|_{2, \Omega_t}^2 \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda(-1, t) = \lambda(1, t) = \lambda(z, T) = 0$, то справедливо равенство

$$-(\phi s^\varepsilon - \phi s_0, \lambda_t)_{\Omega_t} + \left(B^\varepsilon, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} = 0,$$

$$B^\varepsilon = K_0 \bar{a} \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} - bv - \phi u_3 s^\varepsilon + F, \quad \|B^\varepsilon\|_{2, \Omega_t} \leq C(M).$$

По принципу компенсированной компактности [12] из s^ε можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Осуществляя предельный переход в равенстве

$$\begin{aligned} -(\phi s^\varepsilon, \lambda_t)_{\Omega_t} - \left(s^\varepsilon \phi u_3, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} + \left(b_0(v - u_3), \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} + \\ + \left(K_0 a(s^\varepsilon) \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + F, \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} + \varepsilon \left(K_0 a(s^\varepsilon) \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)_{\Omega_t} = -(\phi s^\varepsilon, \lambda)_\Omega \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

получим интегральное тождество из определения 2.

Теорема 2 доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания Института математики и информационных технологий по теме «Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики» (проект FZMW-2024-0003). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папин А. А., Подладчиков Ю. Ю. Изотермическое движение двух несмешивающихся жидкостей в пороупругой среде // Изв. АГУ. 2015. № 1–2. С. 131–135; DOI: 10.14258/izvasu(2015)1.2-24
2. Connolly J. A. D., Podladchikov Y. Y. Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock // Geodin. Acta. 1998. V. 11, N 2. P. 55–84.
3. Athy L. F. Density, porosity, and compaction of sedimentary rocks // Am. Assoc. Pet. Geol. Bull. 1930. V. 14, N 1. P. 1–24.
4. Lee J. J. Modelling and simulation of compacting sedimentary basins: Ph.D. Dissertation. Oxford: University of Oxford, 2019.
5. Terzaghi K. Der Grundbruch an Stauwerken und seine Verhütung // Die Wasserkraft. 1922. N 17. P. 445–449.
6. Waldner P. A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H. Effect of snow structure on water flow and solute transport // Hydrol. Process. 2008. V. 18, N 7. P. 1271–1290.
7. Хасанов Р. Р., Смирнова А. Р. Экспериментальные исследования физических характеристик предварительно обжатых глинистых грунтов при замачивании // Междунар. науч.-исслед. журн. 2017. № 12(66). С. 178–182; DOI: 10.23670/IRJ.2017.66.130
8. Shelukhin V. V A poroelastic medium saturated by a two-phase capillary fluid // Contin. Mech. Thermodyn. 2014. V. 26, N 5. P. 619–638; DOI: 10.1007/s00161-013-0321-x
9. Jardani A., Revil A. Seismoelectric couplings in a poroelastic material containing two immiscible fluid phases // Geophys. J. Int. 2015. V. 202, N 2. P. 850–870; DOI: 10.1093/gji/ggv176
10. Папин А. А., Сибин А. Н. Автомодельное решение задачи поршневого вытеснения жидкостей в пороупругой среде // Изв. АГУ. 2016. № 1. С. 152–156; DOI: 10.14258/izvasu(2016)1-27
11. Гилев П. В., Папин А. А. Исследование задачи двухфазной фильтрации в пороупругой среде в приближении двумерной ячейки Хеле—Шоу // Сб. тезисов «Евразийской конференции по прикладной математике». 2021. С. 31.

12. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
13. Алексеев Г. В., Хуснутдинова Н. В. О разрешимости первой краевой задачи для уравнения одномерной фильтрации двухфазной жидкости // Доклады АН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С.310–312.
14. Simpson M., Spiegelman M., Weinstein M. I. Degenerate Dispersive Equations Arising in the Study of Magma Dynamics // Nonlinearity. 2007. V. 20, N 1. P. 21–49; DOI: 10.1088/0951-7715/20/1/003
15. Papin A. A., Tokareva M. A. On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2017. V. 10, N 3. P. 385–395; DOI: 10.17516/1997-1397-2017-10-3-385-395
16. Virts R., Papin A., Tokareva M. Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium // J. Phys. Conf. Ser. 2020. Article 012041; DOI: 10.1088/1742-6596/1666/1/012041
17. Токарева М. А., Папин А. А. Глобальная разрешимость системы уравнений одномерного движения вязкой жидкости в деформируемой вязкой пористой среде // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 2(78). С. 81–93; DOI: 10.1134/S1990478919020169
18. Morency C., Tromp J. Spectral-element simulations of wave propagation in porous media // Geophys. J. Int. 2008. V. 175, N 1. P. 301–345.
19. Chengwei Z., Chong P., Wei W., Chun W. A multi-layer SPH method for generic water-soil dynamic coupling problems. Part I: Revisit, theory, and validation // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2022. V. 396. Article 115106; DOI: 10.1016/j.cma.2022.115106
20. Бочаров О. Б., Рудяк В. Я., Серяков А. В. Простейшие модели деформирования пороупругой среды, насыщенной флюидами // Физико-техн. пробл. разраб. полезн. ископ. 2014. № 2. С. 54–68.
21. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
22. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.

UDC 517.95:532.64

FILTRATION OF TWO IMMISCIBLE INCOMPRESSIBLE FLUIDS IN A THIN POROELASTIC LAYER© 2024 P. V. Gilev^a, A. A. Papin^b*Altai State University, Barnaul, 656049 Russia*E-mails: ^apavel.gilev.2000@mail.ru, ^bpapin@math.asu.ru

Received 02.11.2023, revised 06.03.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The paper considers a mathematical model of the filtration of two immiscible incompressible fluids in deformable porous media. This model is a generalization of the Musket–Leverett model, in which porosity is a function of the space coordinates. The model under study is based on the equations of conservation of mass of liquids and porous skeleton, Darcy’s law for liquids, accounting for the motion of the porous skeleton, Laplace’s formula for capillary pressure, and a Maxwell-type rheological equation for porosity and the equilibrium condition of the “system as a whole”. In the thin layer approximation, the original problem is reduced to the successive determination of the porosity of the solid skeleton and its speed, and then the elliptic-parabolic system for the “reduced” pressure and saturation of the fluid phase is derived. In view of the degeneracy of equations on the solution, the solution is understood in a weak sense. The proofs of the results are carried out in four stages: regularization of the problem, proof of the maximum principle, construction of Galerkin approximations, and passage to the limit in terms of the regularization parameters based on the compensated compactness principle.

Keywords: two-phase filtration, Darcy’s law, saturation, poroelasticity, solvability.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.202

REFERENCES

1. A. A. Papin and Yu. Yu. Podladchikov, “Isothermal motion of two immiscible fluids in a poroelastic medium,” *Izv. Altaisk. Gos. Univ.*, (1–2), 131–135 (2015) [in Russian]. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2015\)1.2-24](https://doi.org/10.14258/izvasu(2015)1.2-24)
2. J. A. D. Connolly and Yu. Yu. Podladchikov, “Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock,” *Geodin. Acta* **11** (2), 55–84 (1998).
3. L. F. Athy, “Density, porosity, and compaction of sedimentary rocks,” *Am. Assoc. Pet. Geol. Bull.* **14** (1), 1–24 (1930).
4. J. J. Lee, “Modelling and simulation of compacting sedimentary basins,” *Ph.D. Dissertation* (Univ. Oxford, Oxford, 2019).
5. K. Terzaghi, “Der Grundbruch an Stauwerken und seine Verhütung,” *Die Wasserkraft* (17), 445–449 (1922).
6. P. A. Waldner, M. Schneebeli, U. Schultze-Zimmermann, and H. Fluhler, “Effect of snow structure on water flow and solute transport,” *Hydrol. Process.* **18** (7), 1271–1290 (2008).
7. R. R. Khasanov and A. R. Smirnova, “Experimental studies of physical characteristics of precompressed clay soils during soaking,” *Mezhdunar. Nauchn.–Issled. Zh.* (12 (66)), 178–182 (2017). <https://doi.org/10.23670/IRJ.2017.66.130>
8. V. V. Shelukhin, “A poroelastic medium saturated by a two-phase capillary fluid,” *Contin. Mech. Thermodyn.* **26** (5), 619–638 (2014). <https://doi.org/10.1007/s00161-013-0321-x>

9. A. Jardani and A. Revil, "Seismoelectric couplings in a poroelastic material containing two immiscible fluid phases," *Geophys. J. Int.* **202** (2), 850–870 (2015). <https://doi.org/10.1093/gji/ggv176>
10. A. A. Papin and A. N. Sibin, "Self-similar solution of the problem of piston displacement of liquids in a poroelastic medium," *Izv. Altaisk. Gos. Univ.*, (1), 152–156 (2016) [in Russian]. [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2016\)1-27](https://doi.org/10.14258/izvasu(2016)1-27)
11. P. V. Gilev and A. A. Papin, "Study of the problem of two-phase filtration in a poroelastic medium in the approximation of a two-dimensional Hele-Shaw cell," *Sb. tezisov Evraziisk. konf. prikl. mat (Coll. Abstr. Eurasian Conf. Appl. Math.)* (2021), p. 31 [in Russian].
12. S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, *Boundary Value Problems of Mechanics of Inhomogeneous Fluids* (Nauka, Novosibirsk, 1983) [in Russian].
13. G. V. Alekseev and N. V. Khusnutdinova, "On the solvability of the first boundary value problem for the equation of one-dimensional filtration of a two-phase fluid," *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **202** (2), 310–312 (1972) [in Russian].
14. M. Simpson, M. Spiegelman, and M. I. Weinstein, "Degenerate dispersive equations arising in the study of magma dynamics," *Nonlinearity* **20** (1), 21–49 (2007). <https://doi.org/10.1088/0951-7715/20/1/003>
15. A. A. Papin and M. A. Tokareva, "On local solvability of the system of the equations of one dimensional motion of magma," *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* **10** (3), 385–395 (2017). <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2017-10-3-385-395>
16. R. Virts, A. Papin, and M. Tokareva, "Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium," *J. Phys. Conf. Ser.*, 012041 (2020). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1666/1/012041>
17. M. A. Tokareva and A. A. Papin, "Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium," *J. Appl. Ind. Math.* **13** (2), 350–362 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1990478919020169>
18. C. Morency and J. Tromp, "Spectral-element simulations of wave propagation in porous media," *Geophys. J. Int.* **175** (1), 301–345 (2008).
19. Z. Chengwei, P. Chong, W. Wei, and W. Chun, "A multi-layer SPH method for generic water-soil dynamic coupling problems. Part I: Revisit, theory, and validation," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **396**, 115106 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115106>
20. O. B. Bocharov, V. Ya. Rudyak, and A. V. Seryakov, "The simplest models of deformation of a poroelastic medium saturated with fluids," *Fiz.-Tekh. Probl. Razrab. Polezn. Iskop.* (2), 54–68 (2014) [in Russian].
21. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].
22. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].

УДК 517.938

О НЕЛОКАЛЬНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ В ТРЁХМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ КОЛЬЦЕВЫХ ГЕННЫХ СЕТЕЙ

© 2024 А. В. Глубоких^{1а}, В. П. Голубятников^{2б}

¹Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,
²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: ^aa.glubokikh@g.nsu.ru, ^bvladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Поступила в редакцию 01.12.2023 г.; после доработки 11.03.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

Построены динамические системы размерности три с блочно-линейными разрывными правыми частями, моделирующие простейший молекулярный осциллятор. В фазовом портрете каждой такой системы имеется единственная устойчивая стационарная точка и цикл, лежащий в дополнении к области притяжения этой точки. Других стационарных точек у таких систем нет.

Ключевые слова: модели кольцевых генных сетей, фазовые портреты нелинейных динамических систем, стационарные точки, инвариантные области, ступенчатые функции, периодические траектории, нелокальные осцилляции.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.203

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваются простейшие модели генных сетей, представленные в виде трёхмерных систем уравнений биохимической кинетики, в которых скорость изменения концентрации $x_j(t)$ компоненты номер j описывается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = k_1 \cdot (L_1(x_3) - x_1), \quad \frac{dx_2}{dt} = k_2 \cdot (L_2(x_1) - x_2), \quad \frac{dx_3}{dt} = k_3 \cdot (L_3(x_2) - x_3). \quad (1)$$

В уравнениях системы (1) функции L_j монотонно убывают; это означает, что регуляторные связи между компонентами с концентрациями x_j и x_{j-1} отрицательны. Такие генные сети в литературе часто называют молекулярными репрессилаторами, см. [1–3]. Здесь и в дальнейшем $j = 1, 2, 3$ и $j - 1 = 3$ при $j = 1$, как в [4]; постоянные положительные коэффициенты k_j , характеризуют скорости разложения компонент моделируемой кольцевой генной сети.

Для динамических систем вида (1), у которых функции L_j являются «одноступенчатыми»: $L_j(w) = a_j > 0$ при $w \leq 1$ и $L_j(w) = 0$ при $w > 1$, и для их многомерных аналогов в работах [5–7] были установлены условия существования, единственности и устойчивости этих циклов и описаны гомеоморфные торами инвариантные окрестности таких циклов.

Аналогичные динамические системы с многоступенчатыми правыми частями, возникают при построении и анализе обобщённых пороговых моделей широкого круга молекулярно-генетических систем, см. [8, 9], где в частности, было отмечено, что количество порогов в правых частях уравнений может оказаться больше, чем число компонент генной сети эукариотической системы контроля активности генов. Основная цель настоящей работы состоит

в выявлении качественных различий поведения решений системы (1) в изученном ранее случае одноступенчатых убывающих функций L_j и в более сложных моделях генных сетей, в которых количество ступеней у таких функций равно двум. В работе [10] описана подобная «двухступенчатая» регуляторная связь в функционировании λ бактериофага.

При увеличении количества этих ступеней строение фазовых портретов систем вида (1) значительно усложняется, см. [11]; в дальнейшем при их изучении мы будем использовать следующее утверждение.

Утверждение. Параллелепипед

$$Q = [0, L_1(0)] \times [0, L_2(0)] \times [0, L_3(0)]$$

является положительно инвариантной областью: траектории всех его точек с ростом t из него не выходят.

Проверка подобных утверждений, в том числе и в старших размерностях, состоит в вычислении знаков правых частей уравнений систем вида (1) на гранях соответствующего многогранника, см. [4, 12, 13]. Для краткости в дальнейшем мы будем называть такие области инвариантными.

1. МОДЕЛЬ ГЕННОЙ СЕТИ И ЕЁ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Рассмотрим динамическую систему (1) с двухступенчатыми правыми частями в безразмерной симметричной форме: $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $L_1 = L_2 = L_3 = L$, где

$$\begin{aligned} L(w) &= 2a \quad \text{при } 0 \leq w < a - \varepsilon; & L(w) &= a \quad \text{при } a - \varepsilon \leq w < a + \varepsilon; \\ L(w) &= 0 \quad \text{при } a + \varepsilon \leq w < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $a > 1$ — как и в [7, 12], и положительный параметр ε достаточно мал; будем в дальнейшем предполагать, что

$$6\varepsilon < a, \quad (3)$$

то есть ширина промежуточной ступеньки, на которой $L(w) = a$, достаточно мала по сравнению с максимальным значением $L(w)$. При $\varepsilon = 0$ — для одноступенчатой функции $L(w)$ — существование цикла у системы (1), (2) было установлено в [12]; при $2.998\varepsilon > a$ в вычислительных экспериментах циклы не были обнаружены. В настоящей работе показано, что при выполнении условия (3) указанная динамическая система имеет по крайней мере один цикл.

Замечание 1. Система (1), (2) симметрична относительно циклических перестановок переменных и уравнений $\sigma : x_1 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_3 \Rightarrow x_1$.

Подобные симметричные динамические системы изучались и раньше, см., например, [14–16], с целью описания поведения их траекторий в сравнительно несложном случае с небольшим количеством параметров с тем, чтобы расширить полученные здесь результаты на системы более общего вида, как это позднее удавалось в [7, 12, 17].

Разобьём параллелепипед Q плоскостями $x_j = a - \varepsilon$ и $x_j = a + \varepsilon$ на 27 блоков, которые мы будем нумеровать мультииндексами $\{s_1 s_2 s_3\}$ трёхбуквенного алфавита 0, 1, 2 следующим образом:

$$\begin{aligned} s_j &= 0, & \text{если в блоке } & 0 \leq x_j < a - \varepsilon; & s_j &= 1, & \text{если в блоке } & a - \varepsilon \leq x_j < a + \varepsilon; \\ & & & & s_j &= 2 & \text{если в блоке } & a + \varepsilon \leq x_j. \end{aligned} \quad (4)$$

Соглашение. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие траектории системы (1), (2), которые с ростом t не пересекаются с рёбрами блоков разбиения (4). В частности, описанный ниже цикл этой системы переходит из блока в блок только через внутренние точки их общих граней.

Следующие леммы доказываются точно так же, как и утверждение 1, см. также [12, 18], и вытекают из вычисления знаков производных $\frac{dx_j}{dt}$ на гранях соответствующих блоков разбиения (4).

Лемма 1. Куб $Q^* = [a-\varepsilon; a+\varepsilon] \times [a-\varepsilon; a+\varepsilon] \times [a-\varepsilon; a+\varepsilon] = \{111\}$ является инвариантной областью в фазовом пространстве системы (1), (2).

Лемма 2. Для любых двух соседних блоков B_1 и B_2 разбиения (4) траектории всех внутренних точек их общей двумерной грани $B_1 \cap B_2$ переходят либо из блока B_1 в B_2 , либо из блока B_2 в B_1 .

Будем обозначать такие переходы через $B_1 \rightarrow B_2$, соответственно $B_2 \rightarrow B_1$. С помощью леммы 2 на множестве всех блоков разбиения (4) задаётся структура ориентированного графа. Для одноступенчатых функций L и многомерных аналогов системы (1) такие графы изучались в [5, 19, 20] с целью построения инвариантных областей в фазовых портретах таких систем и поисков периодических траекторий в таких областях. Эти подходы мы используем теперь при изучении систем уравнений с более сложными правыми частями.

Лемма 3. Внутри каждого из блоков разбиения (4) области Q система (1), (2) линейна с постоянными коэффициентами, её траектории прямолинейны, и их продолжения пересекаются в одной точке. В частности, продолжения траекторий всех точек блока $\{220\}$ пересекаются в точке с координатами $(2a; 0; 0)$.

Доказательство. В блоке $\{220\}$ динамическая система (1), (2) принимает вид

$$\dot{x}_1 = 2a - x_1; \quad \dot{x}_2 = -x_2; \quad \dot{x}_3 = -x_3.$$

Уравнения любого её решения $x_1(t) = 2a - (2a - x_1(0))e^{-t}$, $x_2(t) = x_2(0)e^{-t}$, $x_3(t) = x_3(0)e^{-t}$ описывают полупрямую; при $t \rightarrow \infty$ эти решения стремятся к точке $(2a; 0; 0)$. \square

Следствие. Аналогичным образом устанавливается, что продолжения траекторий всех точек блока $\{210\}$ пересекаются в точке $(2a; 0; a)$; продолжения траекторий всех точек блока $\{200\}$ пересекаются в точке $(2a; 0; 2a)$; продолжения траекторий всех точек блока $\{201\}$ — в точке $(a; 0; 2a)$; продолжения траекторий всех точек блока $\{202\}$ — в точке $(0; 0; 2a)$ и т. д.

В блоке $\{111\}$ система (1), (2) принимает вид

$$\dot{x}_1 = a - x_1; \quad \dot{x}_2 = a - x_2; \quad \dot{x}_3 = a - x_3,$$

матрица её линеаризации в точке S_0 диагональна и имеет только один кратный отрицательный корень $\lambda = -1$. Значит стационарная точка S_0 устойчива, откуда вытекает следующая лемма.

Лемма 4. Динамическая система (1), (2) имеет единственную стационарную точку $S_0 = (a, a, a)$, содержащуюся в блоке $\{111\}$. Траектории всех этого блока точек с ростом $t \rightarrow \infty$ экспоненциально стремятся к точке S_0 .

Обозначим через W объединение всех двенадцати блоков, перечисленных ниже в диаграмме (5). Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема. Если выполнено условие (3), то область W содержит по крайней мере один цикл динамической системы (1), (2). Этот цикл переходит из блока в блок согласно стрелкам диаграммы:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{220\} & \longrightarrow & \{210\} & \longrightarrow & \{200\} & \longrightarrow & \{201\} & \longrightarrow & \{202\} \\
 \uparrow & & & & & & & & \downarrow \\
 \{120\} & & & & & & & & \{102\} \\
 \uparrow & & & & & & & & \downarrow \\
 \{020\} & \longleftarrow & \{021\} & \longleftarrow & \{022\} & \longleftarrow & \{012\} & \longleftarrow & \{002\}
 \end{array} \tag{5}$$

Этапы доказательства теоремы также следуют стрелкам этой диаграммы.

Рассмотрим грань $F_0 = \{220\} \cap \{120\}$, разделяющую верхние два блока левого столбца диаграммы (5) и определяемую соотношениями $x_1 = a + \varepsilon$, $a + \varepsilon \leq x_2 \leq 2a$, $0 \leq x_3 \leq a - \varepsilon$.

Аналогичным образом обозначим остальные грани, разделяющие соседние блоки этой диаграммы:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \{220\} \cap \{210\}, \text{ где } x_2 = a + \varepsilon; & F_2 &= \{210\} \cap \{200\}, \text{ где } x_2 = a - \varepsilon; \\
 F_3 &= \{200\} \cap \{201\}, \text{ где } x_3 = a - \varepsilon; & F_4 &= \{201\} \cap \{202\}, \text{ где } x_3 = a + \varepsilon \text{ и т. д.}; \\
 F_8 &= \{012\} \cap \{022\}, \text{ где } x_2 = a - \varepsilon \text{ и т. д.}; & F_{12} &= F_0.
 \end{aligned}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВОЙ ТРЕТИ ЦИКЛА В ОБЛАСТИ W

Доказательство существования цикла системы (1), (8) в области W будет производиться по шагам, начиная с грани F_0 .

1. Продолжения траекторий всех точек блока $\{220\}$ пересекаются в точке $(2a, 0, 0)$. Рассмотрим в грани F_0 прямоугольный треугольник T_0 с вершиной в точке $(a + \varepsilon, a + \varepsilon, a - \varepsilon)$, с вертикальным катетом длины $v_0 < a - \varepsilon$ и с горизонтальным катетом длины $\frac{v_0(a + \varepsilon)}{a - \varepsilon - v_0}$. Продолжение гипотенузы этого треугольника проходит через точку $(a + \varepsilon, 0, 0)$ оси Ox_1 .

В дальнейшем мы будем предполагать, что

$$v_0 = \frac{2\varepsilon^2}{a - \varepsilon}. \tag{6}$$

Оставшаяся часть P_0 грани F_0 является выпуклым пятиугольником, определяемым соотношениями $x_1 = a + \varepsilon$, $a + \varepsilon \leq x_2 \leq 2a$, $0 \leq x_3 \leq \min\{a - \varepsilon; \frac{a - \varepsilon - v_0}{\varepsilon}x_2\}$. Траектории точек этого пятиугольника после прохождения по блоку $\{220\}$ попадают на грань F_1 в прямоугольник Π_1 , задаваемый соотношениями $a + \varepsilon \leq x_1 \leq a + \varepsilon + \frac{(a - \varepsilon)^2}{2a}$; $x_2 = a + \varepsilon$; $0 \leq x_3 \leq a - \varepsilon - v_0$. Эти и нижеследующие оценки вытекают непосредственно из леммы 3.

2. Продолжения траекторий точек, лежащих в прямоугольнике $\Pi_1 \subset F_1$, пересекаются в точке $(2a, 0, a)$. После прохождения по блоку $\{210\}$ эти траектории попадают на грань F_2 в прямоугольник Π_2 , задаваемый соотношениями

$$a + \varepsilon + \frac{2\varepsilon(a - \varepsilon)}{a + \varepsilon} \leq x_1 \leq a + \varepsilon + \frac{a^2 - \varepsilon^2}{2a}, \quad x_2 = a - \varepsilon, \quad \frac{2a\varepsilon}{a + \varepsilon} \leq x_3 \leq \frac{a^2 + \varepsilon^2 - v_0(a - \varepsilon)}{(a + \varepsilon)}.$$

При выполнении условий (3), (6) траектории точек прямоугольника $\Pi_1 \subset F_1$ не выходят из блока $\{210\}$ через его горизонтальную грань $x_3 = a - \varepsilon$, а попадают на грань F_2 в прямоугольник Π_2 .

3. Продолжения траекторий точек, лежащих в блоке $\{200\}$, проходят через точку $(2a, 0, 2a)$. Траектории точек, лежащих в прямоугольнике $\Pi_2 \subset F_2$, после прохождения по этому блоку $\{200\}$ попадают во внутренность горизонтальной грани F_3 в область U_3 , задаваемую соотношениями

$$a + \varepsilon + \frac{2\varepsilon(a - \varepsilon)}{(a + \varepsilon)} \leq x_1 < 2a, \quad 0 < x_2 < a - \varepsilon, \quad x_3 = a - \varepsilon.$$

4. Продолжения траекторий точек области $U_3 \subset F_3$ пересекаются в точке $(a, 0, 2a)$, поэтому после прохождения через блок $\{201\}$ эти траектории попадают на грань F_4 в область U_4 , у которой $x_3 = a + \varepsilon$, а остальные координаты удовлетворяют неравенствам

$$a + \varepsilon + \frac{2a\varepsilon(a - 3\varepsilon)}{(a + \varepsilon)^2} \leq x_1 < 2a; \quad 0 < x_2 \leq a - \varepsilon - \frac{2\varepsilon(a - \varepsilon)}{a + \varepsilon}. \quad (7)$$

Как и на предыдущих шагах, лемма 3 позволяет описать все четыре стороны трапеций $T_3 \subset U_3$, $T_4 \subset U_4$, в которую попадают траектории точек прямоугольника Π_2 , но для доказательства теоремы достаточно оценки (7), которая выполняется при $a > 6\varepsilon$.

Замечание 2. Область W не является инвариантной относительно положительных сдвигов вдоль траекторий системы (1), (2); траектории точек, лежащих в блоках $\{220\}$ и $\{200\}$ выходят из них только в блоки $\{210\}$ и $\{201\}$, соответственно. Однако траектории точек блока $\{210\}$ могут выходить из него не только в блок $\{200\}$, куда указывает стрелка диаграммы (5), но и в блок $\{211\}$, если эти точки лежат достаточно близко к верхней грани $x_3 = a - \varepsilon$ по сравнению с их расстояниями до грани $x_2 = a - \varepsilon$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦИКЛА В ОБЛАСТИ W

Ввиду симметричности системы (1), (2), область W симметрична относительно поворотов на угол $2\pi/3$ вокруг прямой $x_1 = x_2 = x_3$. Обозначим через ψ такой поворот, который переводит грань F_0 в грань F_4 , грань F_4 в грань F_8 , а грань F_8 в грань F_0 . При этом повороте пятиугольник $P_0 \subset F_0$ переходит в пятиугольник $P_4 \subset F_4$, а пятиугольник P_4 — в пятиугольник $P_8 \subset F_8$. Очевидным образом $\psi(P_8) = P_0$.

Итогом пошаговых рассуждений предыдущего параграфа является следующая лемма.

Лемма 5. Если выполнены неравенства (3), (6), то траектории точек пятиугольника $P_0 \subset F_0$ при их продолжении через блоки $\{220\}$, $\{210\}$, $\{200\}$ и до грани F_4 попадают во внутренность пятиугольника P_4 , который получен из пятиугольника P_0 при повороте ψ , то есть $P_0 = \psi^{-1}(P_4)$.

Обозначим через Φ_0 сдвиг точек пятиугольника $P_0 \subset F_0$ вдоль их траекторий при их прохождении через перечисленные в диаграмме (5) блоки до грани F_4 , $\Phi_0(P_0) \subset P_4$, и через Φ_4 — сдвиг точек пятиугольника $P_4 \subset F_4$ вдоль их траекторий при их прохождении через блоки $\{202\}$, $\{102\}$, $\{002\}$ и $\{012\}$ до грани F_8 . Аналогичным образом пусть Φ_8 — сдвиг точек пятиугольника $P_8 \subset F_8$ вдоль их траекторий при их прохождении через оставшиеся четыре блока диаграммы (5).

Рассмотрим композицию непрерывных отображений $\psi^{-1} \circ \Phi_0 : P_0 \rightarrow P_0$.

Пятиугольник P_0 компактен и гомеоморфен кругу. Из теоремы Брауэра о неподвижной точке, применяемой в подобных случаях при доказательствах существования циклов в фазовых портретах автономных динамических систем, см. [21, 22], следует, что в P_0 существует по крайней мере одна точка X такая, что $\psi^{-1} \circ \Phi_0(X) = X$. Пусть $X_1 = a + \varepsilon$, X_2 , X_3 — координаты этой точки. Тогда координаты точки $Y := \Phi_0(X)$ имеют вид $Y_1 = X_2$, $Y_2 = X_3$, $Y_3 = X_1 = a + \varepsilon$.

Эта точка Y при сдвиге Φ_4 вдоль своей траектории перейдёт в точку $Z \in P_8$ с координатами $Z_1 = X_3$, $Z_2 = X_1 = a + \varepsilon$, $Z_3 = X_2$. Ввиду симметричности системы (1), (2) относительно циклической перестановки σ траектория \mathcal{C} точки X после обхода всех блоков диаграммы (5) возвращается в исходное положение: $\Phi_8(\Phi_4(\Phi_0(X))) = X$ и, следовательно, является циклом. Теорема доказана.

Внутренность окрестности W указанного цикла \mathcal{C} не пересекается с внутренностью инвариантной окрестности $\{111\}$ устойчивой стационарной точки S_0 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цикл $\mathcal{C} \subset W$ представляет собой пример нелокального колебания; в терминах монографии [21] это периодическая траектория, лежащая достаточно далеко от стационарной точки рассматриваемой динамической системы, аналогичные нелокальные колебания изучались в [23].

Полученные результаты по-видимому допускают обобщения на модели генных сетей больших размерностей и на динамические системы с правыми частями, которые моделируют описанные в [1, 4] генные сети с более сложными положительными и отрицательными связями и их комбинациями. Например, в работе [24] установлены условия, при которых у трёхмерной системы вида (1) с «трёхступенчатой» функцией L имеется по крайней мере два цикла, см. также [14]. Ранее неединственность циклов у подобных динамических систем биохимической кинетики была известна только в размерностях, начиная с пяти, см. [20, 25].

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы искренне благодарны Е. П. Волокитину за полезные обсуждения и вычислительные эксперименты с более сложными, чем (1), (2), трёхмерными динамическими системами, в частности для случая «пятиступенчатой» монотонно убывающей функции L , в котором были обнаружены три цикла.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hastings S., Tyson J., Webster D.* Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control system // *J. Differ. Equ.* 1977. V. 25. P. 39–64.
2. *Banks H. T., Mahaffy J. M.* Stability of cyclic gene models for systems involving repression // *J. Theor. Biol.* 1978. V. 74. P. 323–334.
3. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Существование и устойчивость релаксационного цикла в математической модели репрессилатора // *Матем. заметки.* 2017. Т. 101, № 1. С. 58–67; DOI: 10.4213/mzm11039
4. *Golubyatnikov V. P., Kirillova N. E.* On cycles in models of functioning of circular gene networks // *J. Math. Sci.* 2020. V. 246, N 6. P. 779–787; DOI: 10.1007/s10958-020-04780-7
5. *Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S.* Combinatorics and geometry of circular gene networks models // *Vavilov J. Genet. Breed.* 2020. V. 6, N 4. P. 188–192; DOI: 10.18699/Letters2020-6-24

6. Golubyatnikov V. P., Minushkina L. S. On uniqueness and stability of a cycle in one gene network // Siberian Electron. Math. Rep. 2021. V. 1, N 1. P. 464–473; DOI: 10.33048/semi.2021.18.032
7. Иванов В. В. Притягивающий предельный цикл модели нечётномерной кольцевой генной сети // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 3. С. 25–32; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.25.303
8. Tchuraev R. N., Galimzyanov A. V. Modeling of actual eukaryotic control gene subnetworks based on the method of generalized threshold models // Mol. Biol. 2001. V. 35, N 6. P. 933–939.
9. Tchuraev R. N. General principles of organization and laws of functioning in governing gene networks // Bioinformatics of Genome Regulation and Structure. 2006. P. 367–377.
10. Böttner R., Bellmann K., Tchuraev R. N., Ratner V. A. Modelling of epigenetic networks composed of monogenetic units of gene expression, with reference to bacteriophage lambda development // Molecular Genetic Information Systems. 1983. P. 81–132.
11. Аюпова Н. Б., Голубятников В. П., Волокитин Е. П. О нелокальных осцилляциях в моделях генных сетей // Математические заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 1. С. 7–20; DOI: 10.25587/2411-9326-2024-1-7-20
12. Голубятников В. П., Иванов В. В., Минушкина Л. С. О существовании цикла в одной несимметричной модели кольцевой генной сети // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2018. Т. 18, № 3. С. 26–32; DOI: 10.17377/PAM.2018.18.4
13. Аюпова Н. Б., Голубятников В. П. Об одном цикле в пятимерной модели кольцевой генной сети // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 3. С. 19–29; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.302
14. Волокитин Е. П. О предельных циклах в простейшей модели гипотетической генной сети // Сиб. журн. индустр. матем. 2004. Т. 7, № 3. С. 57–65.
15. Elowitz M. B., Leibler S. A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // Nature. 2000. V. 403. P. 335–338.
16. Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., Khlebodarova T. M. On the chaos in gene networks // J. Bioinform. Comput. Biol. 2013. V. 11. Article 1340009; DOI: 10.1142/S021972001340009X
17. Golubyatnikov V. P., Akinshin A. A., Ayupova N. B., Minushkina L. S. Stratifications and foliations in phase portraits of gene network models // Vavilov J. Genet. Breed. 2022. V. 26, N 8. P. 758–764; DOI: 10.18699/VJGB-22-91
18. Glass L., Pasternack J. S. Stable oscillations in mathematical models of biological control systems // J. Math. Biol. 1978. V. 6. P. 207–223.
19. Казанцев М. В. О некоторых свойствах графов доменов динамических систем // Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18, № 4. С. 42–49; DOI: 10.17377/sibjim.2015.18.405
20. Golubyatnikov V. P., Gradov V. S. Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks // Siberian Adv. Math. 2021. V. 31, N 1. С. 1–12; DOI: 10.3103/S1055134421010016
21. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964.
22. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: МГУ, 1984.
23. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Prasad A. Hidden attractors in dynamical systems // Phys. Rep. 2016. V. 637. P. 1–50; DOI: 10.1016/j.physrep.2016.05.002
24. Голубятников В. П. О неединственности циклов в трёхмерных моделях кольцевых генных сетей // Челяб. физ.-матем. журн. 2024. Т. 9, № 1. С. 23–34.
25. Акиншин А. А. Бифуркация Андронова–Хопфа для некоторых нелинейных уравнений с запаздыванием // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 3. С. 3–15.

UDC 517.938

ON NONLOCAL OSCILLATIONS IN 3D MODELS OF CIRCULAR GENE NETWORKS© 2024 A. V. Glubokikh^{1a}, V. P. Golubyatnikov^{2b}¹*Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*²*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*E-mails: ^aa.glubokikh@ngs.ru, ^bvladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

Received 01.12.2023, revised 11.03.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. We construct three-dimensional dynamical systems with piecewise block-linear discontinuous right-hand side that simulate the simplest molecular oscillators. The phase portrait of each of these systems contains a unique equilibrium point and a cycle lying in the complement of the basin of attraction of this point. There are no other equilibrium points in these phase portraits.

Keywords: circular gene network model, phase portrait of nonlinear dynamical system, equilibrium point, invariant domain, step function, periodic trajectory, nonlocal oscillation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.203

REFERENCES

1. S. Hastings, J. Tyson, and D. Webster, “Existence of periodic solutions for negative feedback cellular control system,” *J. Differ. Equ.* **25**, 39–64 (1977).
2. H. T. Banks and J. M. Mahaffy, “Stability of cyclic gene models for systems involving repression,” *J. Theor. Biol.* **74**, 323–334 (1978).
3. S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, and N. Kh. Rozov, “Existence and stability of the relaxation cycle in a mathematical repressilator model,” *Math. Notes* **101** (1), 71–86 (2017). <https://doi.org/10.1134/S0001434617010072>
4. V. P. Golubyatnikov and N. E. Kirillova, “On cycles in models of functioning of circular gene networks,” *J. Math. Sci.* **246** (6), 779–787 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04780-7>
5. V. P. Golubyatnikov and L. S. Minushkina, “Combinatorics and geometry of circular gene networks models,” *Lett. Vavilov J. Genet. Breed.* **6** (4), 188–192 (2020). <https://doi.org/10.18699/Letters2020-6-24>
6. V. P. Golubyatnikov and L. S. Minushkina, “On uniqueness and stability of a cycle in one gene network,” *Sib. Electron. Math. Rep.* **1** (1), 464–473 (2021). <https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.032>
7. V. V. Ivanov, “Attracting limit cycle of the odd-dimensional ring gene network model,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **25** (3), 25–32 (2022) [in Russian]. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.25.303>
8. R. N. Tchuraev and A. V. Galimzyanov, “Modeling of actual eukaryotic control gene subnetworks based on the method of generalized threshold models,” *Mol. Biol.* **35** (6), 933–939 (2001).
9. R. N. Tchuraev, “General principles of organization and laws of functioning in governing gene networks,” in *Bioinformatics of Genome Regulation and Structure* (2006), 367–377.
10. R. Böttner, K. Bellmann, R. N. Tchuraev, and V. A. Ratner, “Modelling of epigenetic networks composed of monogenetic units of gene expression, with reference to bacteriophage lambda development,” in *Molecular Genetic Information Systems* (1983), 81–132.

11. N. B. Ayupova, V. P. Golubyatnikov, and E. P. Volokitin, “On nonlocal oscillations in gene network models,” *Mat. Zametki SVFU* **31** (1), 7–20 (2024) [in Russian]. <https://doi.org/10.25587/2411-9326-2024-1-7-20>
12. V. P. Golubyatnikov, V. V. Ivanov, and L. S. Minushkina, “On the existence of a cycle in one asymmetric model of a ring gene network,” *Sib. Zh. Chist. Prikl. Mat.* **18** (3), 26–32 (2018) [in Russian]. <https://doi.org/10.17377/PAM.2018.18.4>
13. N. B. Ayupova and V. P. Golubyatnikov, “On one cycle in a five-dimensional model of a ring gene network,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **24** (3), 19–29 (2021) [in Russian]. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.302>
14. E. P. Volokitin, “On limit cycles in the simplest model of a hypothetical gene network,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **7** (30), 57–65 (2004) [in Russian].
15. M. B. Elowitz and S. Leibler, “A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators,” *Nature* **403**, 335–338 (2000).
16. V. A. Likhoshvai, V. V. Kogai, S. I. Fadeev, and T. M. Khlebodarova, “On the chaos in gene networks,” *J. Bioinf. Comput. Biol.* **11**, 1340009 (2013). <https://doi.org/10.1142/S021972001340009X>
17. V. P. Golubyatnikov, A. A. Akinshin, N. B. Ayupova, and L. S. Minushkina, “Stratifications and foliations in phase portraits of gene network models,” *Vavilov J. Genet. Breed.* **26** (8), 758–764 (2022). <https://doi.org/10.18699/VJGB-22-91>
18. L. Glass and J. S. Pasternack, “Stable oscillations in mathematical models of biological control systems,” *J. Math. Biol.* **6**, 207–223 (1978).
19. M. V. Kazantsev, “On some properties of domain graphs of dynamic systems,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **18** (4), 42–49 (2015) [in Russian].
20. V. P. Golubyatnikov and V. S. Gradov, “Non-uniqueness of cycles in piecewise-linear models of circular gene networks,” *Sib. Adv. Math.* **31** (1), 1–12 (2021). <https://doi.org/10.3103/S1055134421010016>
21. V. A. Pliss, *Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations* (Nauka, Moscow, 1964) [in Russian].
22. I. G. Petrovskii, *Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1984) [in Russian].
23. D. Dudkowskii, S. Jafari, T. Kapitaniak, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, and A. Prasad, “Hidden attractors in dynamical systems,” *Phys. Rep.* **637**, 1–50 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.05.002>
24. V. P. Golubyatnikov, “On the nonuniqueness of cycles in three-dimensional models of ring gene networks,” *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.* **9** (1), 23–24 (2024) [in Russian].
25. A. A. Akinshin, “Andronov–Hopf bifurcation for some nonlinear equations with delay,” *Sib. Zh. Ind. Mat.* **16** (3), 3–15 (2013) [in Russian].

УДК 519.862

ПРОБЛЕМА ВЕРИФИКАЦИИ ТЕОРИИ РЫНОЧНОГО СПРОСА

© 2024 В. К. Горбунов^{1а}, А. Г. Львов^{2б}

¹Ульяновский государственный университет,
ул. Льва Толстого, 42, г. Ульяновск 432017, Россия,
²ООО Уайт Партнерс,
ул. Таганская, 17–23, г. Москва 109147, Россия

E-mails: ^аvkgorbunov@mail.ru, ^бaglvov@mail.ru

Поступила в редакцию 18.12.2023 г.; после доработки 24.04.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

Цель данной статьи — познакомить прикладных математиков, интересующихся возможностями приложений методов решения обратных задач математического моделирования проблем естествознания и техники к экономике, с нашими работами по проблеме верификации теории рыночного (коллективного) спроса, разработанной первым автором на основе пересмотра в рамках общенаучной методологии нереалистичной аксиоматической теории индивидуального спроса — базовой для современной неоклассической экономической теории. При этом искусственный объект индивидуалистической теории — рациональный и независимый индивид, максимизирующий свою функцию полезности, заменён «статистическим ансамблем потребителей» исследуемого рынка, и постулаты индивидуалистической теории стали научными гипотезами теории рыночного спроса. Верификация новой теории заключается в выяснении вопроса о рационализированности статистического рыночного спроса коллективной функцией полезности. Эта проблема относится к обратным задачам математических теорий реальных явлений, которые обычно некорректно поставлены и решаются неоднозначно с привлечением дополнительной информации об искомом решении. Наш метод верификации теории рыночного спроса является развитием непараметрического анализа потребительского (индивидуального) спроса Африата–Вэриана с использованием для регуляризации «экономических индексов» спроса, что позволяет получать решения с различными содержательными свойствами.

Ключевые слова: холистическая теория рыночного спроса, методологические вопросы, обратная задача, экономические индексы.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.204

ВВЕДЕНИЕ

Современная неоклассическая экономическая теория (Economics), составляющая основу экономического образования и исследований в большинстве стран мира, содержит нереалистичную математическую теорию индивидуального спроса (ТИС) на многопродуктовых потребительских рынках, но не содержит реалистичной теории рыночного спроса (ТРС), которая представляла бы реальный интерес для экономистов и правительств [1, 2]. Следствием этого провала является отсутствие обоснованных методов анализа рыночного спроса, в частности, расчёта экономических (аналитических) индексов цен и количеств потребления, отражающих потребительские предпочтения населения, вместо множества формульных индексов, не имеющих общепринятых теоретических обоснований и дающих различные оценки динамики рынков [3]. Экономический подход к проблеме индексных чисел был предложен советским экономистом А. А. Конюсом [4] и получил широкое развитие в западных исследованиях (см. обзоры П. Самуэльсона и С. Свэми [5] и В. Э. Диверта [6]), но пока он относится только к индивидам/домохозяйствам.

Второе фундаментальное следствие отсутствия признанной экономическим мейнстримом ТРС — отсутствие в Economics теории экономического равновесия, которая определяла бы цены, эффективные для реальных экономик, что повысило бы обоснованность формирования экономической политики, внутренней и внешней, соответствующей национальным интересам. Признанная мейнстримом теория общего равновесия [1], гл. 17, основана на известной статье К. Эрроу и Ж. Дебре [7], где стороной спроса является совокупность индивидуальных потребностей, соответствующих ТИС. Многими авторами установлено, что такое представление о реальной экономике является *«путешествием по неверной дороге»* [1, 8], разд. 17Е.

Нерешённость основных проблем экономической теории и практики породила в последние три десятилетия множество критических работ о состоянии экономической науки и её методологии. Здесь мы ограничимся статьями Алана Кирмана [8–10] и работами двух авторитетных критиков Economics. Во-первых, это Джеффри Ходжсон, чья книга [11] содержит глубокий критический анализ методологии Economics — *методологического индивидуализма*, сущность которого и его влияние на экономические исследования и политику лаконично выразил Кеннет Эрроу: *«Краеугольным камнем общепринятой экономической теории является требование объяснять все явления в терминах действий и реакций отдельных людей. Наше поведение при оценке экономических исследований, при рецензировании статей и результатов исследований, а также при их продвижении, включает критерий, согласно которому объясняемое нами поведение и предлагаемая нами политика объяснимы в терминах индивидов, а не других социальных категорий»*. [12], стр. 1.

Второй критик — Морис Алле, который в своей Нобелевской лекции [13], стр. 13–14, проанализировал, в частности, причины трудностей в признании и распространении новых прогрессивных идей из-за *«тирании господствующих доктрин»*, порождённой *«истеблишментом»*. Алле, по образованию инженер и физик, считал естественным использовать *научную методологию*¹ в экономических исследованиях, понимая при этом, что в силу специфики экономических объектов это не всегда возможно. Он понимал, что экономические учения не станут в полной мере похожими на естественные науки, потому что их «исходный материал» тесно связан с экономическими интересами и идеологиями [14], стр. 28. Но при этом существуют объективные законы коллективного человеческого поведения, и эти законы выявляются объективным научным анализом.

Отметим также учебник известных методологов Марселя Баумана и Джона Дэвиса [15], описывающий историю, основные принципы и факты становления методологии экономической теории, *понимаемой как наука*.

Неоклассический подход к экономической теории, основанный на строгой формализации и использовании математики, был заложен в 1870-х Уильямом Стэнли Дживонсом (1835–1882) и Леоном Вальрасом (1834–1910). Они фактически заложили (каждый по-своему) основы программы «Экономика как Наука», создав математические модели индивидуального потребительского спроса в своих классических книгах [16] и [17] соответственно. Вальрас также заложил основы теории экономического равновесия. Но программа пересмотра основных экономических теорий наподобие естественных, уже в конце 19 в. встретила жёсткое сопротивление со стороны большинства исследователей-экономистов, и это сопротивление продолжается. Глубокому анализу этого сопротивления посвящено эссе Клода Хилингера [18].

Противники «онаучивания (scientization)» экономической теории объясняют свою позицию существенными различиями в природных и социальных явлениях и отрицают легитимность (естественно)научного подхода к экономическим проблемам. Однако Естественные Науки и Социальные Науки являются Науками, поэтому в их определениях и методологии должна быть общность, согласующаяся с коренным понятием «Наука».

¹Западная классификация наук относит дисциплину-экономику к социальным/гуманитарным наукам отдельно от естественных наук/(Science по умолчанию).

Под Наукой мы понимаем систему *нетривиальных знаний, обоснованных логически и эмпирически, о некоторой системе реальных объектов*. Сущность принципов *научного исследования/научной методологии* заключается в *объективности, доказательности выдвигаемых теорий и проверяемости их выводов фактами (верификации)*. В рамках этой методологии можно исследовать многие экономические явления. Однако мы не знаем конструктивного научного решения другими авторами проблем экономической теории, отмеченных выше.

Реалистическая ТРС создана в книгах первого автора [19,20] как пересмотр ТИС в рамках научной методологии. Кроме того, в статьях [21–23] мы разработали метод верификации ТРС на основе непараметрического анализа (индивидуального) спроса Африата-Вэриана [24–26].

Задача верификации математической теории является обратной задачей этой теории, проверяющей совпадение теоретических расчётов с данными измерений/наблюдений соответствующих характеристик исследуемого объекта. В нашем случае ключевой проблемой непараметрического анализа является решение *неравенств Африата*, определяющих значения функции полезности, рационализирующей статистический спрос, т. е. цены и количества реализованных товаров и услуг (благ) на некотором временном промежутке. Из-за неизбежных ошибок в данных такая задача, как правило, некорректно поставлена и в случае совместности неравенств имеет множество решений, возможно неустойчивое относительно исходных данных.

Решение некорректных задач заключается в их регуляризации с привлечением дополнительной информации об искомом решении и, если есть, о погрешностях исходных данных. Данные о погрешностях позволяют использовать методы регуляризации класса невязок А. Н. Тихонова и др. [27]. Однако для рыночных статистик характерно отсутствие оценок погрешностей исходных данных. В этом случае регуляризация некорректной задачи может быть обеспечена некоторым сочетанием малого возмущения уравнений и/или неравенств математической модели исследуемого объекта, обеспечивающего их регулярность (совместность и устойчивость множества решений), и введения критерия отбора, реализующего дополнительные условия. Для обратной задачи ТРС оказалось продуктивным использование аналитических индексов цен и количеств рыночных продаж вместе с наиболее обоснованными формульными индексами Фишера. Основой наших методов регуляризации являются релаксационно-штрафной метод решения вырожденных экстремальных задач [28] и методы регуляризации вырожденных уравнений и неравенств с параметризованными данными [29,30].

Статья организована следующим образом. В разделе 1 анализируется микроэкономическая проблема теории спроса и «теоремы о невозможности» У. Гормана и П. Самуэльсона. В разделе 2 представлены содержательные и формальные основы *холистической (целостной)* теории рыночного спроса и аналитических индексов. В разделе 3 кратко обсуждается эвристический параметрический метод анализа рыночного спроса Р. Стоуна и Э. Дитона и представлен наш метод непараметрической верификации. Ввиду ограничения размера статьи мы ограничиваемся в основном варианте метода в предположении гомотетичности потребительских предпочтений, и в разделе 4 приведён пример реализации нашего метода для этого случая. Раздел 5 — заключение.

1. МОДЕЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНОГО СПРОСА И ПРОБЛЕМА АГРЕГИРОВАНИЯ

1.1. Модель индивидуального потребительского спроса

Современная математическая ТИС базируется на моделях рационального потребительского выбора Джеворна [16] и Вальраса [17], которые независимо переоткрыли аналогичный принцип Германа Госсена (1810–1858) для общей задачи получения максимального удовлетворения при ограниченных ресурсах, которая была недооценена его современниками и забыта.

Рассмотрим эту модель для рынка n благ, количества которых представлены вектором x неотрицательного ортанта евклидова пространства E_+^n , а цены — вектором $p \in E_+^{n*}$. Для

дальнейшего рассмотрения проблемы рыночного (коллективного) спроса отметим характеристики индивидуального потребителя/домохозяйства индексом h . Каждый индивид имеет бюджет w_h и потребительские предпочтения, представленные *порядковой функцией полезности* $u_h: E_+^n \rightarrow R_+ [1]^2$, разд. 3.C и 3.D.

Согласно Джевонсу и Вальрасу, *рациональность h -потребителя* понимается как максимизация функции полезности на множестве благ, доступных ему при данных ценах p и бюджете w_h . Аналитическая теория спроса выводится из предположений о регулярности, когда функция полезности считается дважды дифференцируемой, возрастающей и строго квазивогнутой. Условия регулярности обеспечивают однозначность и дифференцируемость функции спроса

$$x^h(p, w_h) = \arg \max \{u_h(x) : \langle p, x \rangle \leq w_h, x \geq 0\}. \quad (1)$$

Запись (1) является моделью индивидуального потребительского спроса, и означает, что *функция полезности $u_h(\cdot)$ рационализировать спрос $x^h(\cdot, \cdot)$* . Эта модель означает, что каждый индивид знает все цены рынка и способен решать задачи определения своей функции полезности и максимизации этой функции на множестве благ, доступных по данным ценам, поглощая весь бюджет. Но эти предположения очевидно далеки от реальности и модель (1) должна рассматриваться как схоластический постулат (догма) теории искусственной экономики. Однако живучесть этой теории стимулирует дополнительную формальную аргументацию её непригодности для научного познания и экономической практики.

1.2. Агрегирование потребителей

В первой половине 20-го века многие экономисты-теоретики считали, что рыночный спрос может быть определён с помощью модели, подобной (1). Проверка этой гипотезы в рамках методологического индивидуализма заключается в следующем. Эта методология диктует, что рыночный спрос формируется заданным набором индивидов H как сумма их спросов (1):

$$\widehat{x}(p, w_1, \dots, w_H) = \sum_{h=1}^H x^h(p, w_h). \quad (2)$$

Распределение бюджета между потребителями $\{w_1, \dots, w_H\}$ неизвестно, и задача состоит в том, чтобы найти условия на индивидуальные предпочтения, при которых существует коллективная *функция полезности $u(\cdot)$* , рационализирующая аддитивный рыночный спрос (2) в зависимости от цен p и совокупного бюджета $w = w_1 + \dots + w_H$. Это означает, что аддитивный спрос (2) может быть представлен *холистической моделью* класса (1):

$$x(p, w) \triangleq \arg \max \{u(x) : \langle p, x \rangle \leq w, x \geq 0\}. \quad (3)$$

В 1953 г. Уильям Горман [31] опубликовал результат: *равенство спросов — аддитивного (2) и коллективного (3) имеет место тогда и только тогда, когда все индивидуальные траектории Энгеля $E^h(p) = \{x = x^h(p, w_h) : w_h \geq 0\}$ являются параллельными прямыми*. Это выражается аналитически *формой Гормана* — функциями спроса, аффинными относительно бюджета

$$x_i^h(p, w_h) = a_i^h(p) + b_i(p)w_h, \quad i = \overline{1, n}, \quad h = \overline{1, H}. \quad (4)$$

Общность коэффициента $b_i(p)$ для всех потребителей означает их одинаковую реакцию относительно дополнительных покупок по мере увеличения их бюджета! Суммирование равенств (4) по h даёт аналогичную аффинную структуру рыночного спроса (3):

$$x_i(p, w) = a_i(p) + b_i(p)w, \quad \text{где} \quad a_i(p) = \sum_{h=1}^H a_i^h(p). \quad (5)$$

²Джевонс и Вальрас предполагали, что полезность поддаётся измерению, соответственно, функция полезности была кардинальной.

Результат Гормана не учитывает, что если все бюджеты $w_h = 0$, то $x^h(p, 0) = 0$. В этом случае все траектории Энгеля начинаются от центра координат и, благодаря своей параллельности, сливаются в один луч! Анализируя результат Гормана, Пол Самуэльсон [32] отметил это. Следствием уточнения Самуэльсона является то, что в формулах (4) и (5) коэффициенты $a_i^h(p) = a_i(p) = 0$, $i = \overline{1, n}$, $h = \overline{1, H}$, т. е. *все функции спроса — индивидуальные (1) и рыночная (3) однородны относительно бюджетов и имеют одинаковую ценовую структуру:*

$$x^h(p, w_h) = x(p)w_h, \quad h = \overline{1, H}, \quad x(p, w) = x(p)w. \quad (6)$$

В терминах предпочтений, равенство (6) означает, что *все индивидуальные предпочтения одинаковы и гомотетичны*³! Ввиду нереальности этого вывода логическим следствием «теорем о невозможности» Гормана—Самуэльсона является то, что модели класса (1) в общем случае не могут быть использованы для формализации как индивидуального, так и коллективного рыночного поведения потребителей. Самуэльсон необоснованно разрешил эту дилемму в пользу нереалистичной индивидуалистической модели (1), отрицая экономическую легитимность модели (3) для рыночного спроса. И современная Economics приняла этот вывод как постулат.

Отметим, что нереалистичное условие Гормана «агрегирования потребителей» является также условием существования *репрезентативного потребителя* [1], разд. 4.D, что формально подтверждает вербальные аргументы Кирмана [9], стр. 119, о том, что «*репрезентативный агент заслуживает достойного погребения, как подход к экономическому анализу, который является не только примитивным, но и в корне ошибочным*».

2. ХОЛИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЫНОЧНОГО СПРОСА

2.1. Основы научной холистической теории рыночного спроса

2.1.1. Объект теории.

Реалистическая ТРС представлена в книгах [19, 20] первого автора как пересмотр микроэкономической ТИС в рамках научной методологии, основными принципами которой являются: *объективность, доказательность, верификация*. ТРС формально повторяет ТИС, но с заменой искусственного объекта — рационального и независимого индивида — на реальный рынок, представленный в виде целостного объекта *торговой статистикой цен и суммарных количеств продаж*:

$$\{p^t, x^t : t = \overline{0, T}\}, \quad e_t = \langle p^t, x^t \rangle. \quad (7)$$

В отличие от микроэкономической ТИС, в представляемой ТРС нет предположений о том, что люди являются рациональными и независимыми агентами экономики, знающими всё о рыночных ценах и благах. Чтобы заменить этот нереалистичный объект исследования реальным, уместно определить изменчивую совокупность покупателей рынка в терминах теории нечётких множеств Лотфи Заде [33].

Понятие «*нечёткое множество*» отражает ситуацию, когда некоторые элементы данного «*универсального множества*» U можно рассматривать как элементы, принадлежащие некоторому подмножеству $C \subseteq U$, возможно, не полностью, но в некоторой степени, определяемой *функцией принадлежности* $\mu_C : U \rightarrow [0, 1]$.

В нашем случае U — это множество потенциальных покупателей исследуемого рынка (например, население региона), нечёткое подмножество C множества U состоит из тех людей, которые совершили покупку на рынке за время его наблюдения, и для каждого человека

³Потребительские предпочтения *гомотетичны*, если эквивалентность двух наборов благ x и y ($x \sim y$) сохраняется при масштабировании, т. е. $\alpha x \sim \alpha y$ при всех $\alpha > 0$. Известно, что это свойство предпочтений эквивалентно структуре регулярного спроса $x(p, w) = x(p)w$ [17], стр. 141–143.

$u \in U$ его степень принадлежности $\mu_C(u)$ равна доле его расходов на этом рынке от всех его рыночных расходов. Нечёткое множество C называется «Статистическим ансамблем потребителей» (САП).

Понятие САП является лишь концептуальным и не наблюдаемым для реальных рынков, как и индивидуальные функции полезности. Оно представляет структуру реального рынка, в отличие от ТИС, представляющей рынок фиксированным набором заданного числа потребителей.

2.1.2. Математическая модель.

Следующие основы ТРС являются предположениями, которые являются не постулатами ТИС, а гипотезами, подлежащими проверке:

- На исследуемом рынке наблюдается статистическая стабильность в отношении зависимости количеств продаж благ от цен на них и совокупных расходов всех потребителей на рынке;
- Большинство людей хотят быть рациональными, эти желания определяют доминирующее поведение потребителей на рынке, и САП является носителем отношений коллективных предпочтений, которые могут быть восстановлены с помощью торговой статистики.

Третьей основой является гипотетическая холистическая модель рыночного спроса, представляющая собой гипотезу Госсена—Джевонса—Вальраса о рациональном потребительском выборе как

- максимизация коллективной функции полезности $u(\cdot)$, которая предполагается неубывающей, ненасыщаемой⁴ и квазивогнутой, на множестве благ, достижимых при данных ценах p и совокупных затратах e всех потребителей на рынке:

$$D(p, e) = \arg \max \{u(x) : \langle p, x \rangle \leq e, x \geq 0\}. \quad (8)$$

В регулярном случае, когда функция полезности является дважды дифференцируемой, возрастающей и строго квазивогнутой, соответствие рыночного спроса $D(\cdot, \cdot) : E_+^{n+1} \rightarrow 2^{E_+^n}$, становится однозначной и непрерывно дифференцируемой функцией рыночного спроса $x(\cdot, \cdot) : E_+^{n+1} \rightarrow E_+^n$, и общая модель ТРС (8) становится регулярной моделью

$$x(p, e) = \arg \max \{u(x) : \langle p, x \rangle \leq e, x \geq 0\}. \quad (9)$$

Вся формальная ТИС [1], гл. 3, переносится на холистическую ТРС, выведенную из моделей (8) и (9). Здесь мы приводим два теоретических факта, используемых в дальнейшем при описании методов верификации ТРС.

Во-первых, это так называемые условия интегрируемости [1], разд. 3.Н, которые представляют критерий того, что дифференцируемая функция спецификации $x(\cdot, \cdot) : E_+^{n+1} \rightarrow E_+^n$ является функцией спроса (9), порождённой некоторой (в общем случае неизвестной) регулярной функцией полезности $u(\cdot)$:

- однородность нулевой степени, т. е. $x(\alpha p, \alpha e) = x(p, e)$, $\forall \alpha > 0$;
- расходное тождество (закон Вальраса) $\langle p, x(p, e) \rangle = e$;
- отрицательная полуопределенность и симметричность матрицы Слуцкого

$$S_{ij}(p, e) = \frac{\partial x_i(p, e)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p, e)}{\partial e} x_j(p, e), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

⁴Неубывающая функция $u(\cdot)$ называется ненасыщаемой, если в любой окрестности точки $x \in E_+^n$ существует такая точка $x' \in E_+^n$, что $u(x') > u(x)$.

Условия интегрируемости используются в параметрическом методе верификации Ричарда Стоуна [34].

Второй факт представляет собой *двойственную* (или *взаимную*) *задачу* по отношению к исходной проблеме (8):

$$e(p, c) = \min \{ \langle p, x \rangle : u(x) \geq c, x \geq 0 \}. \quad (10)$$

Величина $e(p, c)$ определяет минимальные затраты при ценах p , обеспечивающие данный уровень потребления c , и называется *функцией расходов*. Эта функция вогнута по отношению к ценам p , что обеспечивает свойство отрицательной полуопределенности матрицы Слуцкого. Кроме того, через функцию расходов определяются аналитические индексы рыночного спроса, представленные ниже и используемые в непараметрическом варианте метода верификации.

2.1.3. Гомотетические предпочтения.

Этот случай важен для нашего метода верификации. Известно [1], стр. 50, что *предпочтения потребителя являются гомотетическими тогда и только тогда, когда они допускают представление через линейно однородную функцию полезности $u(\cdot)$* (т. е. такую, что $u(\alpha x) = \alpha u(x)$ для любого $\alpha > 0$). В этом случае спрос имеет структуру $x(p, e) = x(p)e$, множитель Лагранжа задачи (8) не зависит от затрат e , т. е. $\lambda(p, e) \equiv \lambda(p) = u(x(p))$ [20], стр. 141–143, и выполняется тождество (факторизация Шепарда) [5], стр. 570:

$$e(p, u(x)) = \frac{u(x)}{\lambda(p)}, \quad p > 0, \quad x > 0. \quad (11)$$

Гомотетичность — это нереалистичное свойство предпочтений для детализированных многопродуктовых рынков. Самуэльсон и С. Свэми подчеркнули это [5], стр. 592, и назвали *предположение о гомотетичности «гипотезой Санта–Клауса»*, дарящего исследователю красоту, богатство и упрощение соответствующих теорий и методов решения задач. Но гипотеза гомотетичности часто не отвергается при верификации модели (8) с использованием агрегированных данных (7). Естественно рассматривать это как следствие грубости модели (8) и недостаточности конечного числа данных для единственного построения *истинной функции полезности* (если такая функция существует). Соответственно, на первом этапе решения обратной задачи полезно принять гипотезу гомотетичности, чтобы использовать решение простой задачи как хорошее приближение к решению более сложного негомотетического случая. Это упрощение можно понимать как аналог линеаризации нелинейных процессов в естественных науках. Во многих случаях этого может быть достаточно для анализа заданной торговой статистики.

2.2. Аналитические индексы

2.2.1. Индексы Фишера.

Существует множество подходов к построению индексов спроса [3], которые дают разные результаты оценки ситуации на потребительских рынках, и нет единого мнения о том, какой индекс является «лучшим». В нашем методе решения обратной задачи ТРС в качестве дополнительной информации используются аналитические индексы цен и количеств, более известные как экономические индексы [3–6]. Эти индексы определяются в рамках теории спроса и отражают потребительские предпочтения населения, значит, они имеют теоретический базис и являются объективными. Однако, из-за отсутствия в Economics теории рыночного спроса эти индексы относятся к индивидам, и до настоящего времени органы статистики используют в основном бинарные индексы, определяемые по различным формулам по статистическим парам «цены-количества» продаж в двух сравниваемых периодах — базовом (p^s, x^s) и текущем (p^t, x^t) . Наиболее распространёнными на практике являются формульные индексы цен и количеств Э. Ласпейреса и Г. Пааше, соответственно:

$$P_{st}^L = \frac{\langle p^t, x^s \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle}, \quad Q_{st}^L = \frac{\langle p^s, x^t \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle} \quad \text{и} \quad P_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^s, x^t \rangle}, \quad Q_{st}^P = \frac{\langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^t, x^s \rangle}. \quad (12)$$

Индексы Пааше часто дают заниженные значения относительно индексов Ласпейреса:

$$P_{st}^P \leq P_{st}^L, \quad Q_{st}^P \leq Q_{st}^L. \quad (13)$$

Этот эффект назван эффектом Гершенкрона в честь американского статистика А. Гершенкрона. В случае гомотетических предпочтений этот эффект является обязательным [20], стр. 201.

В нашем методе верификации используются средние геометрические индексов Ласпейреса и Пааше (12), называемые индексами Фишера:

$$P_{st}^F = \sqrt{P_{st}^L P_{st}^P} = \sqrt{\frac{\langle p^t, x^s \rangle \langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle \langle p^s, x^t \rangle}}, \quad Q_{st}^F = \sqrt{Q_{st}^L Q_{st}^P} = \sqrt{\frac{\langle p^s, x^t \rangle \langle p^t, x^t \rangle}{\langle p^s, x^s \rangle \langle p^t, x^s \rangle}}. \quad (14)$$

Эти индексы являются наилучшими с точки зрения практической индексологии по отношению к критериям Фишера [3], гл. 16, и могут использоваться в качестве ориентиров для построения аналитических индексов в процедуре верификации ТРС.

2.2.2. Индексы Конюса—Фишера.

Общее определение аналитических (экономических [5]) индексов выглядит следующим образом:

$$P(p^t, p^s; x) = \frac{e(p^t, u(x))}{e(p^s, u(x))}, \quad Q(x^t, x^s; p) = \frac{e(p, u(x^t))}{e(p, u(x^s))}. \quad (15)$$

Здесь векторы количеств x и цен p являются *ситуациями сравнения*.

Для приложений ситуации сравнения в (15) должны быть заданы. Пары индексов $(P_{st}^{KL} \triangleq P(p^t, p^s; x^s), Q_{st}^{KL} \triangleq Q(x^t, x^s; p^s))$ и $(P_{st}^{KP} \triangleq P(p^t, p^s; x^t), Q_{st}^{KP} \triangleq Q(x^t, x^s; p^t))$ называются индексами цен и количеств *Конюса—Ласпейреса* и *Конюса—Пааше* соответственно. Для верификации ТРС используются индексы *Конюса—Фишера* (KF) $P_{st}^{KF} \triangleq (P_{st}^{KL} P_{st}^{KP})^{1/2}$ и $Q_{st}^{KF} \triangleq (Q_{st}^{KL} Q_{st}^{KP})^{1/2}$. Согласно определениям (15), равенству $e(p^s, u(x^s)) = e_s$ и обозначению $u(x^s) = u_s$,

$$P_{st}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^t, u_s) e_t}{e_s e(p^s, u_t)}}, \quad Q_{st}^{KF} = \sqrt{\frac{e(p^s, u_t) e_t}{e_s e(p^t, u_s)}}. \quad (16)$$

Таким образом, вычисление пары индексов (16) сводится к двум задачам (10) с параметрами (p^t, u_s) и (p^s, u_t) .

2.2.3. Инвариантные индексы.

В случае гомотетических предпочтений аналитические индексы упрощаются. Используя факторизацию Шепарда (11) и обозначение $\lambda(p^s) = \lambda_s$, получаем из (15) формулы

$$P(p^t, p^s) \equiv P_{st} = \frac{\lambda_s}{\lambda_t}, \quad Q(x^t, x^s) \equiv Q_{st} = \frac{u_t}{u_s}, \quad t = \overline{0, T}. \quad (17)$$

Эти индексы удовлетворяют всем критериям Фишера [3], стр. 571–575, и являются идеальными. Как сказано в п. 2.1.3, гомотетический случай является упрощающей идеализацией действительности, но во многих случаях это предположение не отвергается, и инвариантные индексы (17) могут быть использованы как в качестве окончательной оценки экономической динамики (7), так и в качестве начального приближения при расчёте более реалистичных общих индексов Фишера (16).

3. ВЕРИФИКАЦИЯ ТРС

Коллективная функция полезности $u(\cdot)$ называется *рационализирующей торговую статистику* (7), если соответствующий спрос (8) аппроксимирует эту статистику, т. е. $x(p^t, e_t) \simeq x^t$, $t = \overline{0, T}$. Приближённость этих равенств объясняется неизбежностью ошибок,

возникающих в процессе формирования данных (7) путём агрегирования и усреднения групп товаров, сходных по потребительским свойствам (яблоки, фрукты, продукты питания) [3], гл. 9. Общепринятых методов агрегирования и оценок соответствующих ошибок не существует.

Верификация ТРС по статистике (7) заключается в проверке возможности рационализации (7) функцией полезности в некотором классе. Конструктивная верификация состоит в построении такой функции или, в предположении регулярности, интегрируемых функций спроса по конечному множеству данных (7), т. е. в решении обратной задачи ТРС, которая, как правило, некорректна и требует регуляризации путём привлечения дополнительной информации об искомом решении.

3.1. Параметрический метод

3.1.1. Анализ спроса Стоуна.

Параметрический метод конструктивной верификации ТРС, заключающийся в построении функций рыночного спроса интегрируемого класса по торговой статистике (7), был впервые разработан Ричардом Стоуном и применён к реальной британской статистике 1920–1938 годов (для шести групп товаров) [34] в наивный период теории спроса до открытия «теоремы о невозможности» Гормана, и Стоун эвристически наложил на модельные функции *рыночного спроса* «условия интегрируемости», разработанные в рамках регулярной ТИС.

В наших нотациях параметрический «анализ спроса» Стоуна состоит в построении интегрируемой функции рыночного спроса $x_i(p, e; w)$, $i = \overline{1, n}$, где $w = (w_1, \dots, w_k)$ — вектор параметров из допустимого множества W . В этом случае возникает стандартная задача оценки параметров w , исходя из условия наилучшего, в некотором смысле, совпадения значений спроса модели со статистическими данными (7):

$$x(p^t, e_t; w) \simeq x^t, \quad t = \overline{0, T}. \quad (18)$$

Из-за отсутствия надёжной вероятностной информации о статистических ошибках данных (7) обоснованное применение традиционных статистических методов для выбора «хорошей» системы функций спроса исключается, но может быть использован нелинейный метод наименьших квадратов (МНК), т. е. минимизация функции

$$\varphi(w) = \frac{1}{n(T+1)} \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i(p^t, e_t; w) - x_i^t}{x_i^t} \right)^2 \quad (19)$$

при условии $w \in W$. Минимальное значение (19) на множестве W является *показателем качества аппроксимации* системы (18) — чем меньше это значение, тем выше качество аппроксимации. Вопрос о рационализации статистики (7) решается здесь на основе некоторого верхнего значения показателя качества, которое может быть установлено экспертами-статистиками. Если это значение превышено, то гипотеза рационализируемости не принимается для использованного класса функций спроса.

Стоун использовал один из простейших классов интегрируемых функций спроса (п. 2.1.2), названных им *линейными системами расходов* (*linear expenditure systems*)⁵:

$$x_i(p, e) = \frac{\alpha_i}{p_i} \left[e - \sum_{k=1}^n \gamma_k p_k \right] + \gamma_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

⁵Системе функций спроса (20) соответствует система *линейных функций расходов* $e_i(p, e) = \langle p_i, x_i(p, e) \rangle$. Эти функции спроса введены Л. Клейном и Х. Рубином [35] без явного использования регулярной модели спроса (9), но как функции спроса, удовлетворяющие условиям интегрируемости. Р. Джери показал [36], что функции спроса (20) рационализируются функцией полезности $u(x) = \prod_{i=1}^n (x_i - \gamma_i)^{\alpha_i}$, $0 < \alpha_i < 1$, $0 \leq \gamma_i$, названной позже функцией Джери—Стоуна.

Что касается проблемы обычной некорректности обратных задач, то заметим, что задача МНК (19) при условии $w \in W$ может быть вычислительно устойчивой из-за строгих ограничений, неявно накладываемых на параметрический класс функций спроса условиями интегрируемости. Можно сказать, что введение условий интегрируемости в задачу МНК является аналогом сокращения множества искомых функций в *методах подбора и квазирешений* некорректно поставленных задач [27], гл. I. Стоун использовал простой класс функции спроса (20), и его результаты были успешны и высоко оценены (премия имени Нобеля 1984). Для более гибких классов минимум функционала (19) на W должен быть меньше. Однако это достигается за счёт увеличения числа параметров k , и в этом случае вычислительная обусловленность задачи МНК может быть хуже.

3.1.2. Современный анализ спроса.

Анализ спроса Стоуна был разработан его последователями, уже принимая во внимание результат «невозможности» Гормана. Было предложено несколько систем рыночного спроса, также эвристически, с введением на ненаблюдаемые и невычисляемые индивидуальные функции спроса условий «агрегации по потребителям» Гормана (4) или некоторого их ослабления, как это требует методология Economics. Наиболее известные работы в этой области были выполнены Энгусом Дитоном (учеником Стоуна и лауреатом премии имени Нобеля 2015) и Джоном Мюльбауэром [37–39]. Опуская более подробное изложение этих результатов, отметим, что требование соответствия методов анализа реальных рынков нереалистичной теории ТИС логически не обосновано, и это лишь снижает возможности метода Стоуна. Но даже при таком неоправданном усложнении *примеры эвристического анализа реального рыночного спроса Стоуном, Дитоном и их последователями являются примерами успешной верификации ТРС, созданной в рамках научной методологии.*

Параметрический метод верификации ТРС имеет фатальный недостаток, заключающийся в том, что вывод о нерационализированности статистики (7) в любом конечном множестве параметрических классов интегрируемых функций спроса не означает, что эта статистика принципиально нерационализируема в других классах.

3.2. Непараметрический метод верификации

3.2.1. Теорема Аффриата, неравенства и функция.

Метод непараметрической верификации основан на непараметрическом подходе к анализу спроса, основные факты которого изложены в известной статье Сиднея Аффриата [24] и его разработке Холлом Вэрианом в [25, 26]. Аффриат представил несколько эквивалентных критериев рационализации статистики (7) при очень слабых ограничениях, допускающих нерегулярный спрос (8). Вэриан разработал для них вычислительные методы в [25]. Наш метод верификации, предложенный в первоначальном варианте в [19], основан на критерии *неравенств Аффриата*, который решает проблему рационализированности статистики (7) в широком классе ненасыщаемых функций полезности. Мы приводим здесь теорему Аффриата из [25] частично — только те факты, которые используются в нашем методе.

Определение. Функция полезности $u(\cdot)$ *рационализировует* данные (7), если выполняются равенства [25], стр. 946:

$$u(x^t) = \max \{u(x) : \langle p^t, x \rangle \leq e_t, x \geq 0\}, \quad t = \overline{0, T}. \quad (21)$$

Введём *перекрёстные расходы* $e_{ts} = \langle p^t, x^s \rangle$, коэффициенты $a_{ts} = e_{ts} - e_t$, *числа Аффриата* $\{u_\tau, \lambda_\tau\}$, где $u_t = u(x^t)$, $\lambda_t \equiv \lambda(p^t, e_t)$ — множители Лагранжа экстремальных задач (21), и систему *неравенств Аффриата*

$$u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} \leq 0, \quad s, t = \overline{0, T} \wedge s \neq t. \quad (22)$$

Теорема. Торговая статистика (7) рационализируется неубывающей ненасыщаемой функцией полезности тогда и только тогда, когда существует положительное решение системы неравенств (22). Если $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{0, T}\}$ — положительное решение этой системы, то функция

$$\bar{u}(x) = \min_{\tau} \{u_{\tau} + \lambda_{\tau} \langle p^{\tau}, x - x^{\tau} \rangle\} \quad (23)$$

рационализирует данные (7).

Отметим, что определение рационализируемости данных (7) и теорема Африата предполагают отсутствие погрешностей в данных. Для анализа реальных данных учёт неизбежных ошибок в них необходим.

В цитируемых работах Африата и Вэриана кусочно-линейная вогнутая функция (23) играет лишь техническую роль в доказательстве теоремы. Но эта функция, именуемая в дальнейшем *функцией Африата*, сводит вычисление функции затрат (10), определяющей аналитические индексы (15) и (16), к задаче линейного программирования (ЛП):

$$e(p, w) = \min \{ \langle p, x \rangle : \langle p^0, x \rangle \geq w, \lambda_{\tau} \langle p^{\tau}, x \rangle \geq w - u_{\tau} + \lambda_{\tau} e_{\tau}, \tau = \overline{1, T}, x \geq 0 \}. \quad (24)$$

3.2.2. Гомотетические предпочтения.

Условия рационализируемости статистики (7) при дополнительном допущении *гомотетичности предпочтения* были исследованы Вэрианом в [26]. В этом и только в этом случае функция расхода представляется в виде факторизации Шепарда (11) [5], стр. 570. Подставляя в (11) статистические данные, получаем дискретный вариант этой характеристики гомотетичности предпочтений:

$$u_t = \lambda_t e_t, \quad t = \overline{0, T}. \quad (25)$$

Подстановка этих равенств в общие неравенства Африата (22) превращает последние в систему *гомотетических неравенств Африата*

$$u_s - \lambda_t e_{ts} \leq 0, \quad s, t = \overline{0, T} \wedge s \neq t, \quad (26)$$

и функция Африата (23) принимает вид $\hat{u}(x) = \min_{\tau} \{ \lambda_{\tau} \langle p^{\tau}, x \rangle \}$.

Задача вычисления $2(T + 1)$ чисел Африата $\{u_t, \lambda_t\}$ упрощается за счёт использования равенств (25), которые разлагают систему гомотетических неравенств (26) на две операционально эквивалентные системы, каждая из которых определяет только одну часть $(T + 1)$ чисел Африата — $\{\lambda_t\}$ или $\{u_t\}$. Далее используются только гомотетические λ -неравенства Африата:

$$\lambda_s e_s \leq \lambda_t e_{ts}, \quad s, t = \overline{0, T} \wedge s \neq t. \quad (27)$$

Решение системы (27) $\{\lambda_t\}$ определяет числа $\{u_t\}$ равенствами (25).

3.2.3. Известные методы решения неравенств Африата.

Вэриан разработал комбинаторные алгоритмы для решения неравенств Африата — общих (22) и гомотетических (27). Для последних он адаптировал известный алгоритм Варшалла, предназначенный для нахождения минимального стоимостного пути между вершинами связного графа (см. также [40]). Эти алгоритмы не адаптированы для учёта неизбежных ошибок данных, возможной некорректности и необходимости регуляризации соответствующих задач, позволяющей выбирать из множества решений регуляризованных систем неравенств решения с желаемыми свойствами.

Для общих неравенств Африата известны подходы линейного программирования. Диверт [41] предложил для обеспечения совместности системы (22) задачу ЛП — минимизировать сумму искусственных переменных (slack variables), аддитивно добавляемых к неравенствам (22). А. Флейссиг и Ж. Уитни [42] усовершенствовали этот подход, используя только

одну аддитивную релаксационную переменную⁶. В обоих случаях, как и в методах Вэриана, определяется некоторое решение из множества решений системы неравенств. Кроме того, минимально возмущённые совместные системы неравенств неустойчивы (в метрике Хаусдорфа) и могут стать несовместными при малых вариациях их коэффициентов (подробнее в разд. 3.3).

В упомянутых и других известных нам работах других авторов проблема содержательных решений неравенств Африата и их возможной неустойчивости не рассматривалась. Наконец, все эти и другие авторы, работающие в рамках экономического мейнстрима, относят свои исследования к отдельному человеку и, похоже, не намерены развивать их для реальных рынков. К редким исключениям относится эвристическое применение алгоритма Вэриана к агрегированным рыночным данным в [25].

Принципиальная множественность решений неравенств Африата, их возможная несовместность и неустойчивость по отношению к вариациям коэффициентов e_{ts} или a_{ts} , определяемых неточными данными (7), означает, что задача решения этих неравенств некорректна и требуется её регуляризация.

3.3. Регуляризация неравенств Африата

3.3.1. О регуляризации систем неравенств.

В связи с отсутствием каких-либо оценок погрешностей исходных данных (7), регуляризация задачи решения систем неравенств Африата выполняется методами [28–30] с учётом явной параметризации данных и с использованием аппарата многозначных отображений, в частности, понятия *непрерывности по Хаусдорфу*⁷.

Регуляризация задачи решения системы неравенств заключается в обеспечении *регулярности её множества решений* и введении критерия выбора из этого множества. Регулярность этого множества означает его *локальную хаусдорфову непрерывность* относительно исходных данных [30], стр. 424. Согласно лемме 1.4 из [43], *регулярность множества решений системы линейных неравенств обеспечивается её ограниченностью и строгой совместностью, т. е. совместностью соответствующей системы строгих неравенств*⁸, что соответствует условию Слейтера о регулярности задач выпуклого программирования и выполнению некоторой априорной оценки $\lambda_t \leq C$ для общей системы. Регулярность систем неравенств Африата является одним из достаточных условий корректности их решения. Вторым достаточным условием является строгая выпуклость критерия выбора решения [29], стр. 579. В нашем методе верификации выбираются *экономически значимые* решения, и это делается с помощью аналитических индексов, определяемых этими решениями.

3.3.2. Редукция неравенств Африата.

Система общих неравенств Африата (22) имеет две степени свободы из-за алгебраической однородности и вхождения u -чисел в систему разностями $u_s - u_t$. Это позволяет накладывать на решения системы два «начальных» условия:

$$\lambda_0 = 1, \quad u_0 = e_0. \quad (28)$$

Подстановка условий (28) в (22) сводит эту систему однородных неравенств к неоднородной системе с переменными $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1, T}\}$:

$$\begin{aligned} e_0 - \lambda_t a_{t0} &\leq u_t, & u_s &\leq e_0 + a_{0s} \equiv e_{0s}, \\ u_s - u_t - \lambda_t a_{ts} &\leq 0, & s, t &= \overline{1, T} \wedge s \neq t. \end{aligned} \quad (29)$$

⁶ Аналогично релаксационно-штрафному методу Горбунова [28].

⁷ Многозначное отображение $A(\cdot)$ из векторного пространства X в пространство Λ с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$ называется *непрерывным по Хаусдорфу* в точке x^0 , если $h(A(x), A(x^0)) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^0$, где $h(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}$, $\beta(A, B) = \sup\{\inf\{\rho(a, b) : b \in B\} : a \in A\}$, $A \subseteq \Lambda$ и $B \subseteq \Lambda$.

⁸ Топологически это означает, что множество решений рассматриваемой системы неравенств является телесным.

Система (29) называется *общей редуцированной системой неравенств Африата*. Для решения задачи рационализации статистики (7) и построения рационализирующей функции (23) необходимо строго положительное решение (29). Но численный анализ не приспособлен к строгим неравенствам, и в дальнейшем мы принимаем по умолчанию неотрицательные условия $u_t \geq 0$, $\lambda_t \geq 0$, $t = \overline{1, T}$ системы (29) и её вариантов, которые возникнут ниже. Если эта система неотрицательно непротиворечива, то она имеет, в общем случае, выпуклое множество решений, которое является многогранником, возможно, вырожденным в точку. Второе неравенство в (29) означает ограниченность многогранника относительно u -чисел.

Рассмотрим случай *гомотетических предпочтений*. Подстановка условия $\lambda_0 = 1$ из (28) в алгебраически однородную λ -систему (27) сводит её к неоднородной *редуцированной λ -системе неравенств Африата*

$$e_0 \leq \lambda_t e_{t0}, \quad e_s \lambda_s \leq e_{0s}, \quad \lambda_s e_s \leq \lambda_t e_{ts}, \quad s, t = \overline{1, T} \wedge s \neq t. \quad (30)$$

Первый и второй блоки системы (30) определяют двусторонние оценки возможных значений решений этой системы. Эти оценки и равенства (25) определяют также оценки u -чисел в предположении гомотетичности:

$$\frac{e_0}{e_{t0}} \leq \lambda_t \leq \frac{e_{0t}}{e_t}, \quad \frac{e_0 e_t}{e_{t0}} \leq u_t \leq e_{0t}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (31)$$

Оценки (31) означают, что система (30) имеет выпуклое множество решений, которое является ограниченным многогранником, возможно вырожденным, в пространстве всех чисел Африата $\{u_t, \lambda_t : t = \overline{1, T}\}$. Далее ограничимся проблемой верификации ГРС с гипотезой гомотетичности предпочтений, с которой продуктивно начинать анализ реальной статистики (7).

3.3.3. Регуляризация.

Для постановки корректных задач для экономически значимых решений неравенств Африата, общей (29) или гомотетичной λ -системе (30), необходимо обеспечить их регулярность в соответствии с п. 3.3.1. Для этого достаточно проверить, является ли соответствующая система строго совместной. Проверка регулярности и регуляризация нерегулярной системы осуществляется двухэтапным вариантом релаксационно-штрафного метода [28] для неравенств Африата, разработанным в [21–23]. Первым этапом является регуляризация систем.

Ограничиваясь гипотезой гомотетичности, рассмотрим λ -систему (30). Для того, чтобы уточнить, является ли она регулярной, и, если регулярность отсутствует, регуляризовать её, вводится параметр аддитивной релаксации r в правую части системы. Для обеспечения независимости значения r по отношению к масштабу данных (7) и уменьшения ошибок вычислений, связанных с различными масштабами чисел Африата λ и u , неравенства перед релаксацией нормализуются так, чтобы все аддитивные члены и коэффициент перед r стали единичного порядка:

$$-\lambda_t \leq -\frac{e_0}{e_{t0}} + \frac{e_t}{e_{t0}} r, \quad \lambda_s \leq \frac{e_{0s}}{e_s} + r, \quad \lambda_s - \lambda_t \frac{e_{ts}}{e_s} \leq \sqrt{\frac{e_t}{e_s}} r, \quad s, t = \overline{1, T} \wedge s \neq t. \quad (32)$$

Система неравенств (32), называемая далее *релаксированной нормированной λ -системой Африата*, очевидно, совместна при достаточно больших значениях параметра r , и её множество решений представляет собой выпуклый ограниченный многогранник. Вопросы непротиворечивости и регулярности исходной системы (30), а также адекватности модели (8) (при гомотетической гипотезе) рыночной статистике (7) решаются путём анализа *минимальной релаксации* в пространстве переменных $\{\lambda_1, \dots, \lambda_T, r\}$, обеспечивающей совместность неравенств (32):

$$r_\lambda = \arg \min \{r : (32), \lambda \geq 0\}. \quad (33)$$

Если величина $r_\lambda > 0$ настолько велика, что не может быть объяснена возможными ошибками в данных, то гипотеза адекватности модели (8) с гомотетичными предпочтениями, представляемыми линейно однородной функцией полезности $u(\cdot)$, должна быть отвергнута. Предположим, что $r_\lambda \leq 0$ или $r_\lambda > 0$ *несущественно*, так что это может быть объяснено погрешностями данных (7) и гипотеза гомотетичности предпочтений не отвергается.

Если $r_\lambda < 0$ *существенно*, то λ -система (30) регулярна и в нормированной системе (32) релаксация должна быть опущена, т. е. $r = 0$.

Предположим, что $r_\lambda \approx 0$ или $r_\lambda > 0$ *несущественно*. Система (32) с $r = r_\lambda$ совместна, но остаётся нерегулярной, так как соответствующая система строгих неравенств будет несовместной. Для гарантии регулярности системы (32) параметр релаксации r_λ должен быть увеличен на малую величину *сверхрелаксации* $\rho > 0$, так что полная релаксация r будет равна сумме

$$r_\lambda^\rho = r_\lambda + \rho. \quad (34)$$

Нечёткие понятия *существенно отрицательный/положительный, почти нулевой, малый* могут быть уточнены путём численного анализа влияния вариаций соответствующих величин на значения выходных показателей расчётов, вариации которых не должны превышать требуемой точности (обратная задача оценки допустимых погрешностей исходных данных). В рассматриваемой задаче расчётными выходными показателями являются инвариантные индексы (17). Общепринятый уровень точности представления индексов спроса составляет 0,001 (0,1%), поэтому сверхрелаксацию ρ можно считать малой, если вызванные ею возмущения в индексах (17), определяемых числами $\{\lambda_1, \dots, \lambda_T, u_1, \dots, u_T\}$, не превышают 0,0005 (0,05%). Подробнее о выборе ρ см. [21], стр. 99–100.

Таким образом, задача верификации ТРС с гипотезой гомотетичности предпочтений может быть конструктивно решена путём решения нормализованной регулярной λ -системы (32) с релаксационным параметром (34), которую запишем компактно как

$$-\lambda_t e_{t0} \leq -e_0 + e_t r_\lambda^\rho, \quad \lambda_s e_s \leq e_{0s} + r_\lambda^\rho e_s, \quad \lambda_s e_s - \lambda_t e_{ts} \leq r_\lambda^\rho \sqrt{e_s e_t}, \quad s, t = \overline{1, T} \wedge s \neq t. \quad (35)$$

Эта система и задача её решения значительно проще, чем аналогичная задача для общей системы (29), из-за вдвое меньшей размерности и ограниченности множества решений. Эту задачу полезно решать даже тогда, когда гипотеза гомотетичности отвергнута, но принята гипотеза адекватности модели (8) для общих предпочтений. При этом решение системы (35) будет хорошим начальным приближением для искомого решения более сложной регуляризованной общей системы Африата.

3.4. Содержательные задачи решения неравенств Африата

3.4.1. Общие замечания.

Формулировка содержательных задач для регулярных неравенств Африата — гомотетичной или её общего аналога (см. [21–23]) — основана на следующих соотношениях. Каждое решение $\{\lambda_1, \dots, \lambda_T, u_1, \dots, u_T\}$ общей системы определяет функцию полезности Африата (23), которая, в свою очередь, определяет функцию расхода (24), а та, в свою очередь, определяет общие индексы Конюса (16). В гомотетическом случае индексы Конюса становятся инвариантными (17), определяемыми числами Африата непосредственно. Таким образом, экономический смысл решения неравенств Африата неявно проявляется через аналитические индексы, отражающие динамику рынка (7) с учётом потребительских предпочтений населения.

3.4.2. Содержательные задачи для λ -неравенства Африата.

После получения положительного качественного результата о рационализуемости статистики (7) в гомотетическом случае встаёт вопрос о выборе решения регуляризованной λ -системы Африата (35).

Аналитические (в нашем случае инвариантные) индексы спроса позволяют выбирать экономически содержательные решения со свойствами *оптимизма*, *пессимизма* и *объективности*. Мы ограничим эту задачу, используя только базовые индексы (17) с $s = 0$. Учитывая условия (28) и равенства (25), получаем

$$P_{0t} = \frac{1}{\lambda_t}, \quad Q_{0t} = \frac{u_t}{u_0} = \frac{\lambda_t e_t}{e_0}, \quad t = \overline{1, T}. \quad (36)$$

Чтобы показать *оптимистический* характер экономической динамики на рынке, представленном статистикой (7), квалифицированному аналитику желательно найти решение (35), определяющее низкие индексы цен P_{0t} и высокие количественные индексы Q_{0t} . Формулы (36) показывают, что индексы цен P_{0t} уменьшаются, а количественные индексы Q_{0t} одновременно увеличиваются с увеличением λ_t . Если аналитик хочет показать *пессимистическую* оценку динамики рынка, то он будет искать решение (35) с противоположными свойствами: высокими ценовыми индексами и низкими количественными индексами. Это достигается за счёт уменьшения множителя λ_t .

Задача увеличения всех чисел $\{\lambda_1, \dots, \lambda_T\}$ является многокритериальной, и здесь мы упрощаем её для оптимистического и пессимистического вариантов, рассматривая только конечные показатели динамики P_{0T} и Q_{0T} . Соответственно, *оптимистической задачей* для λ -системы (35) является задача ЛП

$$\lambda_T^{Max} = \arg \max \{ \lambda_T : (35) \}, \quad (37)$$

и *пессимистической задачей* решения (35) является задача ЛП

$$\lambda_T^{\min} = \arg \min \{ \lambda_T : (35) \}. \quad (38)$$

В третьей, *объективной задаче*, выбор решения системы (35) ориентирован на близость соответствующих инвариантных индексов цен $\{P_{0t}\}$ к бинарным индексам цен Фишера $\{P_{0t}^F\}$ из (14), которые являются лучшими в классе формульных индексов [3], гл. 16.

Если составить сумму квадратов разностей $P_{0t} - P_{0t}^F = \lambda_t^{-1} - P_{0t}^F$, то получится невыпуклый критерий, который усложнит дальнейшую оптимизацию. Это усложнение преодолевается переходом к обратным индексам: инвариантным $P_{t0} = \lambda_t$ и Фишера P_{t0}^F . Таким образом, мера отклонения между этими обратными индексами цен становится квадратичной:

$$F(\lambda) = \sum_{t=1}^T (\lambda_t - P_{t0}^F)^2. \quad (39)$$

Соответственно, объективной задачей решения λ -системы (35) является задача квадратичного программирования.

$$F(\lambda^F) = \min \{ F(\lambda) : (35) \}. \quad (40)$$

Для задачи (35) выполняются классические условия корректности из [26, 27], приведённые в п. 3.3.1, а именно регулярность допустимого множества (35) и строгая выпуклость функционала (39). Решением задачи (40) является проекция «точки Фишера» $(P_{10}^F, \dots, P_{T0}^F)$ на множество решений системы (35).

Задачи ЛП (37) и (38) с нестрогой вогнутой или выпуклой целевой функцией соответственно, и теоретически такие ЛП могут быть вырождены, если вектор коэффициентов целевой функции $(0, \dots, 0, 1)$ ортогонален границе допустимого многогранника, которая определяется активным множеством уравнений в вершине решения. Эта проблема может быть преодолена регуляризацией Тихонова с использованием функции (39) в качестве стабилизатора.

Полученные решения могут быть приняты как окончательные, если гипотеза гомотетичности не отвергнута, или как начальное приближение для решения более реалистичных задач для общих неравенств Африата, представленных в [21–23].

4. ПРИМЕР

В таблице 1 представлен искусственный набор данных из международного «Руководства по индексу потребительских цен» [3], гл. 19, использованный в расчётах множества (десятков) различных формульных индексов «Для того чтобы читатель смог получить представление о том, насколько индексы цен могут отличаться друг от друга при использовании набора реальных данных...» (стр. 439)⁹. Статистика по 6 потребительским товарам примерно соответствует опыту большинства промышленно развитых стран за период с 1973 по середину 1990-х годов. Таким образом, один период соответствует примерно пяти годам. Представлены следующие блага: 1 — сельскохозяйственная продукция, 2 — энергоносители, 3 — традиционные промышленные товары, 4 — высокотехнологичные промышленные товары, 5 — традиционные услуги, 6 — высокотехнологичные услуги. Последняя строка представляет собой элементарные индексы цен p_i^4/p_i^0 и количеств x_i^4/x_i^0 , а также расходов e_4/e_0 .

Таблица 1

Цены и количества продаж [3], стр. 440

Период		Цены						Количества						Расходы
t	годы	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
0	1973-77	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	2.0	1.0	4.5	0.5	10.00
1	1978-82	1.2	3.0	1.3	0.7	1.4	0.8	0.8	0.9	1.9	1.3	4.7	0.6	14.10
2	1983-87	1.0	1.0	1.5	0.5	1.7	0.6	1.0	1.1	1.8	3.0	5.0	0.8	15.28
3	1988-92	0.8	0.5	1.6	0.3	1.9	0.4	1.2	1.2	1.9	6.0	5.6	1.3	17.56
4	1993-97	1.0	1.0	1.6	0.1	2.0	0.2	0.9	1.2	2.0	12.0	6.5	2.5	20.00
	1997/1977	1.0	1.0	1.6	0.1	2.0	0.2	0.9	1.2	1.0	12.0	1.44	5.0	2.0

В таблице 2 представлены соответствующие значения ценовых и количественных индексов Ласпейреса, Пааше (12) и Фишера (14) с фиксированной базой $s = 0$, отражающие динамику продаж в охватываемом периоде. Индексы Ласпейреса и Пааше представляют собой ярко выраженный эффект Гершенкрона (13). Наибольшая разница между ценовыми индексами $P_{04}^L - P_{04}^P = 0.643$, и количественными $Q_{04}^L - Q_{04}^P = 1.121$.

Таблица 2

Индексы Ласпейреса, Пааше и Фишера

t	Индексы цен			Индексы количеств		
	P_{0t}^L	P_{0t}^P	P_{0t}^F	Q_{0t}^L	Q_{0t}^P	Q_{0t}^F
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	1.420	1.382	1.401	1.020	0.993	1.006
2	1.345	1.203	1.272	1.270	1.136	1.201
3	1.355	1.021	1.176	1.720	1.296	1.493
4	1.440	0.797	1.071	2.510	1.389	1.867

Решение регуляризованной λ -системы (32) дало следующие результаты. Значение минимальной задачи релаксации (33) $r_\lambda = -0.0096$, что означает, что исходная λ -система (30) регулярная. Обозначим соответствующее решение через $\lambda^r = (\lambda_1^r, \dots, \lambda_4^r)$.

Подбор параметра свёрхрелаксации при решении содержательных задач (37), (38) и (40) дал одинаковое значение $\rho = 0.00015$. При этом $r_\lambda \leq -\rho$ и величина полной релаксации (34) в λ -системе (35) $r_\lambda^\rho = 0$, т. е. совпала с λ -системой (30). Эта регулярная система также была решена алгоритмом Варшалла [40]. Решения трёх задач — оптимистической (37), обозначенное

⁹Приведённые в [3] расчёты демонстрируют расхождения различных индексов в сотни процентов (в разы).

$\lambda^M = (\lambda_1^M, \dots, \lambda_4^M)$, объективной (40) и решения Варшалла — совпали.¹⁰ Решение пессимистических задач (38) $\lambda^m = (\lambda_1^m, \dots, \lambda_4^m)$ было иным. Все три различных решения λ -системы (35) $\{\lambda^r, \lambda^M, \lambda^m\}$ являются опорными — вершинами многогранника этой системы.

Полученные решения исследованы численно на устойчивость по отношению к исходным данным о потребляемых величинах x_i^t с уровнем 3% и равномерным распределением возмущений на интервале $[-\delta_i^t, \delta_i^t]$, где $\delta_i^t = 0.03 \cdot x_i^t$. Каждое число x_i^t возмущалось 10 раз. Результаты решения пяти задач для λ -систем (35) $\{\lambda^r, \lambda^M, \lambda^m\}$ и исследования устойчивости полученных решений — средних λ -чисел $\{\bar{\lambda}^r, \bar{\lambda}^M, \bar{\lambda}^m\}$ и их стандартных отклонений s_λ — представлены в таблице 3. Во всех случаях λ -числа показывают стабильность двух знаков после запятой.

Таблица 3

Решения λ -систем (30), (35) и анализ устойчивости

Варианты решений	λ -числа и результаты возмущений				
	$t =$	1	2	3	4
1. Минимальная релаксация (33), $r_\lambda = -0.0096$	$\lambda^r =$	0.7138	0.7653	0.7994	0.8492
	$\bar{\lambda}^r =$	0.7139	0.7629	0.7959	0.8400
	$s_\lambda =$	0.0012	0.0060	0.0094	0.0224
2. $\max \lambda_4$ (37); Фишер (40); Варшалл (30)	$\lambda^M =$	0.7234	0.7850	0.8292	0.8902
	$\bar{\lambda}^M =$	0.7229	0.7852	0.8293	0.8908
	$s_\lambda =$	0.0023	0.0028	0.0037	0.0044
3. $\min \lambda_4$ (38)	$\lambda^m =$	0.7042	0.7435	0.7599	0.7625
	$\bar{\lambda}^m =$	0.7049	0.7433	0.7601	0.7628
	$s_\lambda =$	0.0008	0.0016	0.0023	0.0027

В таблице 4 представлены инвариантные индексы (36), вычисленные по усреднённым решениям $\bar{\lambda}^r, \bar{\lambda}^M, \bar{\lambda}^m$. Соответствующие индексы цен и количеств обозначаются $P_{0t}^{(k)}$ и $Q_{0t}^{(k)}$, где показатель k принимает значения 1, 2 и 3, соответствующие вариантам решения в таблице 3.

Таблица 4

Инвариантные индексы

t	Индексы цен			Индексы количеств		
	$P_{0t}^{(1)}$	$P_{0t}^{(2)}$	$P_{0t}^{(3)}$	$Q_{0t}^{(1)}$	$Q_{0t}^{(2)}$	$Q_{0t}^{(3)}$
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	1.401	1.382	1.420	1.006	1.020	0.993
2	1.307	1.274	1.345	1.169	1.199	1.136
3	1.251	1.206	1.316	1.404	1.456	1.334
4	1.180	1.123	1.311	1.698	1.780	1.525

Различия между итоговыми пессимистичными и оптимистичными индексами $P_{04}^3 - P_{04}^2 = 0.188$ и $Q_{04}^3 - Q_{04}^2 = -0.255$ значительно меньше приведённых выше показателей Гершенкрона $P_{04}^L - P_{04}^P = 0.643$, и $Q_{04}^L - Q_{04}^P = 1.121$. Оптимистические индексы также получены решением задачи минимизации отклонения от индексов Фишера, которую можно считать объективным выбором решения неравенств Африата, и алгоритмом Варшалла–Вэриана. Но если ориентировка на индексы Фишера допускает содержательную интерпретацию, то алгоритм Варшалла в применении к неравенствам Африата не имеет макроэкономического смысла.

Результаты успешной верификации ГРС непараметрическим методом на реальных данных потребления в России представлены в [21–23]. В последней статье проанализирована офи-

¹⁰Совпадение оптимистического (37) и объективного (40) решений объясняется тем, что точка Фишера $\{\lambda_i^F = P_{i0}^F\}$ не принадлежит многограннику решений системы (35) и вершина, соответствующая оптимистичному решению, является ближайшей к внешней точке Фишера.

циальная торговая статистика по 468 позициям товаров и услуг за период 2012–2017 гг. с построением всех трёх типов аналитических индексов, инвариантных и Коноса–Фишера: оптимистического, пессимистического и объективного.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлен выход из методологического тупика неоклассической теории спроса, где оказалось невозможным создание ТРС и теории равновесия, адекватных реальности и представляющих практический интерес. Выход заключается в пересмотре ТИС в рамках научной методологии с сохранением формальной теории индивидуального спроса. Этот пересмотр соответствует стремлению основоположников неоклассической экономической теории Джевонса и Вальраса создать её на общенаучных принципах, а также потребностям экономистов-практиков и правительств. Реалистичная теория рыночного спроса является основанием объективного анализа потребительских рынков, учитывающего потребительские предпочтения населения, а также позволяет пересмотреть модель общего экономического равновесия Касселс–Вальда, определяющую эффективные цены для конкретных экономик с учётом ресурсных и технологических особенностей [44].

Множественность подходов к построению индексов и отсутствие консенсуса относительно «наилучшей» пары индексов цены-количества позволяют выбирать индексы в зависимости от целей экономического анализа или различных групп, влияющих на экономическую политику. Переход от формульных к аналитическим индексам уменьшает произвол построения индексов, но не устраняет его полностью в силу множественности решений регуляризованных систем неравенств Африата.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Ульяновского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. *Microeconomic Theory*. N. Y.: Oxford University Press, 1995.
2. Бусыгин В. П., Желободько Е. В., Цышлаков А. А. *Микроэкономика. Третий уровень*. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008.
3. МОТ, МВФ, ОЭСР, Евростат, ЕЭК ООН, Всемирный банк. *Руководство по индексу потребительских цен: теория и практика*. Вашингтон: Международ. валютный фонд, 2007.
4. Конос А. А. Проблема истинного индекса стоимости жизни // *Экономич. бюллетень Конъюнктурного ин-та*. 1924. № 9–10. С. 64–71.
5. Samuelson P. A., Swamy S. Invariant economic index numbers and canonical duality: survey and synthesis // *Am. Econ. Rev.* 1974. V. 64, N 4. P. 566–593.
6. Diewert W. E. The economic theory of index numbers: a survey. // *Essays in Index Number Theory*, Volume I. 1993. P. 177–228.
7. Arrow K. J., Debreu G. Existence of an equilibrium for a competitive economy // *Econometrica*. 1954. V. 22, N 3. P. 265–290; DOI: 10.2307/1907353
8. Kirman A. Demand theory and general equilibrium: from explanation to introspection, a journey down the wrong road // *Hist. Polit. Econ.* 2006. V. 38. N Suppl_1. P. 246–280; DOI: 10.1215/00182702-2005-025

9. Kirman A. Whom or what does the representative individual represent? // J. Econ. Perspect. 1992. V. 6. N 2. P. 117–136; DOI: 10.1257/jep.6.2.117
10. Kirman A. The economic crisis is a crisis for economic theory // CESifo Econ. Stud. 2010. V. 56. N 4. P. 498–535; DOI: 10.1093/cesifo/ifq017
11. Ходжсон Дж. Экономическая теория и институты. Манифест современной институциональной экономической теории. М.: ДЕЛЮ, 2003.
12. Arrow K. J. Methodological individualism and social knowledge // Am. Econ. Rev. 1994. V. 84, N 2. P. 1–9.
13. Allais M. An outline of my main contributions to economic science // Econ. Sci. (Nobel Lect.). 1988. P. 233–252.
14. Алле М. Экономика как наука. М.: Наука для общества, 1995.
15. Boumans M., Davis J. Economic methodology: Understanding economics as a science. London: Red Globe Press, 2016.
16. Jevons W. S. The theory of political economy. N. Y.: Kelley and Millman, 1957.
17. Walras L. Elements of pure economics. London: Allen and Unwin, 1954.
18. Hillinger C. Science and Ideology in Economic, Political and Social Thought // Economics. 2008. V. 2, N 1. Article 20080002; DOI: 10.5018/economics-ejournal.ja.2008-2
19. Горбунов В. К. Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004.
20. Горбунов В. К. Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения. Ульяновск: УлГУ, 2015.
21. Горбунов В. К., Львов А. Г. Обратная задача теории рыночного спроса и аналитические индексы спроса // Ж. Средн. мат. общ. 2019. Т. 21, № 1. С. 89–110; DOI: 10.15507/2079-6900.21.201901.89-110
22. Горбунов В. К., Козлова Л. А., Львов А. Г. К проблеме построения аналитических индексов рыночного спроса: вариативный подход // Вопросы статистики. 2020. Т. 27, № 3. С. 65–80; DOI: 10.34023/2313-6383-2020-27-3-65-80
23. Горбунов В. К., Львов А. Г. Анализ потребительского спроса в России: двухэтапное построение аналитических индексов // Вопросы статистики. 2022. Т. 29, № 4. С. 97–113; DOI: 10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113
24. Afriat S. N. The construction of utility functions from expenditure data // Int. Econ. Rev. 1967. V. 8, N 1. P. 67–77; DOI: 10.2307/2525382
25. Varian H. R. The nonparametric approach to demand analysis // Econometrica. 1982. V. 50, N 4. P. 945–973; DOI: 10.2307/1912771
26. Varian H. R. Non-parametric tests of consumer behaviour // Rev. Econ. Stud. 1983. V. 50, N 1. P. 99–110; DOI: 10.2307/2296957
27. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
28. Горбунов В. К. Релаксационно-штрафной метод и вырожденные экстремальные задачи // Доклады АН. 2001. Т. 337, № 5. С. 583–587.
29. Gorbunov V. K. Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2001. V. 9, N 6. P. 575–594; DOI: 10.1515/jiip.2001.9.6.575
30. Горбунов В. К. Регуляризация нелинейных некорректно поставленных задач с параметризованными данными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. 2003. С. 418–447.
31. Gorman W. M. Community preference fields // Econometrica. 1953. V. 21, N 1. P. 63–80; DOI: 10.2307/1906943
32. Samuelson P. A. Social indifference curves // Q. J. Econ. 1956. V. 70, N 1. P. 1–22; DOI: 10.2307/1884510
33. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Inf. Control. 1965. V. 8, N 3. P. 338–353; DOI: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
34. Stone R. Linear expenditure systems and demand analysis: an application to the pattern of British demand // Econ. J. 1954. V. 64, N 255. P. 511–527.

35. *Klein L. R., Rubin H.* A constant-utility index of the cost of living // *Rev. Econ. Stud.* 1947. V. 15, N 2. P. 84–87; DOI: 10.2307/2295996
36. *Geary R. C.* A note on «A constant-utility index of the cost of living» // *Rev. Econ. Stud.* 1950. V. 18, N 1. P. 65–66; DOI: 10.2307/2296107
37. *Deaton A. S.* The analysis of consumer demand in the United Kingdom, 1900-1970 // *Econometrica.* 1974. V. 42, N 2. P. 341–367.
38. *Deaton A., Muellbauer J.* An almost ideal demand system // *Am. Econ. Rev.* 1980. V. 70, N 3. P. 312–326.
39. *Deaton A.* Demand analysis // *Handb. Econometrics.* 1986. V. 3, N 30. P. 1767–1839; DOI: 10.1016/S1573-4412(86)03010-6
40. *Шананин А. А.* Непараметрические методы анализа структуры потребительского спроса // *Матем. моделирование.* 1993. Т. 5, № 9. С. 3–17.
41. *Diewert W. E.* Afriat and revealed preference theory // *Rev. Econ. Stud.* 1973. V. 10, N 3. P. 419–425; DOI: 10.2307/2296461
42. *Fleissig A. R., Whitney G. A.* Testing for the significance of violations of Afriat's inequalities // *J. Bus. Econ. Stat.* 2005. V. 23, N 3. P. 355–362; DOI: 10.1198/073500104000000253
43. *Фёдоров В. В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
44. *Горбунов В. К.* Холистическая теория экономического равновесия: модифицированная модель Касселя—Вальда // *Доклады АН.* 2018. Т. 482, № 3. С. 268–271; DOI: 10.31857/S013207690003111-4

UDC 519.862

THE PROBLEM OF VERIFYING THE MARKET DEMAND THEORY

© 2024 V. K. Gorbunov^{1a}, A. G. Lvov^{2b}¹Ul'yyanovsk State University, Ul'yyanovsk, 432017 Russia,²White Partners LLC, Moscow, 109147 RussiaE-mails: ^avkgorbunov@mail.ru, ^baglvov@mail.ru

Received 18.12.2023, revised 24.04.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. The aim of this paper is to acquaint applied mathematicians interested in the possibilities of applying methods for solving inverse problems in mathematical modeling in natural sciences and engineering to economic problems with our papers in this field. These papers refer to the problem of verifying the market demand theory, developed by the first author based on the revision of the unrealistic axiomatic neoclassical theory of individual demand within the framework of general scientific methodology. At the same time, the artificial object of individual theory “a rational and independent individual who maximizes his/her utility function” was replaced by a “statistical ensemble of consumers” of the market under study, and the postulates of individual theory became scientific hypotheses of the new theory. The verification of this theory consists in elucidating the question of rationalizing the statistical market demand by the collective utility function. This problem refers to the inverse problems of mathematical theories of real phenomena, which are usually ill posed and have many solutions. The solution of such problems consists in their regularization with involvement of additional information about the desired solution. Our method for verifying the market demand theory is a development of the nonparametric Afriat–Varian demand analysis with using “economic indices” of market demand as additional information, which allows obtaining solutions with various substantive properties.

Keywords: holistic theory of market demand, methodological issue, inverse problem, economic index.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.204

REFERENCES

1. A. Mas-Colell, M. Whinston, and J. Green, *Microeconomic Theory* (Oxford Univ. Press, New York, 1995).
2. V. P. Busygin, E. V. Zhelobod'ko, and A. A. Tsyplakov, *Microeconomics. Third Level* (Izd. Sib. Otd. Ros. Akad. Nauk, Novosibirsk, 2008) [in Russian].
3. *Consumer Price Index Manual: Theory and Practice* (Int. Labour Off., Geneva, 2004).
4. A. A. Konyus, “The problem of the true cost of living index,” *Econ. Byull. Kon'yunkt. Inst.* (9–10), 64–71 (1924) [in Russian].
5. P. A. Samuelson and S. Swamy, “Invariant economic index numbers and canonical duality: Survey and synthesis,” *Am. Econ. Rev.* **64** (4), 566–593 (1974).
6. W. E. Diewert, “The economic theory of index numbers: A survey,” *Essays Index Number Theory I*, 177–228 (1993).
7. K. J. Arrow and G. Debreu, “Existence of an equilibrium for a competitive economy,” *Econometrica* **22** (3), 265–290 (1954). <https://doi.org/10.2307/1907353>

8. A. Kirman, "Demand theory and general equilibrium: From explanation to introspection, a journey down the wrong road," *Hist. Polit. Econ.* **38** (Suppl. 1), 246–280 (2006). <https://doi.org/10.1215/00182702-2005-025>
9. A. Kirman, "Whom or what does the representative individual represent?" *J. Econ. Perspect.* **6** (2), 117–136 (1992). <https://doi.org/10.1257/jep.6.2.117>
10. A. Kirman, "The economic crisis is a crisis for economic theory," *CESifo Econ. Stud.* **56** (4), 498–535 (2010). <https://doi.org/10.1093/cesifo/ifq017>
11. G. M. Hodgson, *Economics and Institutions: A Manifesto for a Modern Institutional Economics* (Polity Press, Cambridge, 1988; Delo, Moscow, 2003).
12. K. J. Arrow, "Methodological individualism and social knowledge," *Am. Econ. Rev.* **84** (2), 1–9 (1994).
13. M. Allais, "An outline of my main contributions to economic science," *Econ. Sci. (Nobel Lect.)* 233–252 (1988).
14. M. Allais, *Economics as a Science* (Cahiers Vilfredo Pareto, 1968, **6** (16/17) 5–24; Nauka Ob-va, Moscow, 1995).
15. M. Boumans and J. Davis, *Economic Methodology: Understanding Economics as a Science* (Red Globe Press, London, 2016).
16. W. S. Jevons, *The Theory of Political Economy* (Kelley and Millman, New York, 1957).
17. L. Walras, *Elements of Pure Economics* (Allen and Unwin, London, 1954).
18. C. Hillinger, "Science and ideology in economic, political and social thought," *Economics* **2** (1), 20080002 (2008). <https://doi.org/10.5018/economics-ejournal.ja.2008-2>
19. V. K. Gorbunov, *Mathematical Model of Consumer Demand: Theory and Applied Potential* (Ekonomika, Moscow, 2004) [in Russian].
20. V. K. Gorbunov, *Consumer Demand: Analytical Theory and Applications* (Ul'yan. Gos. Univ., Ul'yanovsk, 2015) [in Russian].
21. V. K. Gorbunov and A. G. Lvov, "Inverse problem of the theory of market demand and analytical indices of demand," *Zh. Sredn. Mat. O-va* **21** (1), 89–110 (2019) [in Russian]. <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.89-110>
22. V. K. Gorbunov, L. A. Kozlova, and A. G. Lvov, "To the problem of constructing analytical indices of market demand: A variable approach," *Vopr. Stat.* **27** (3), 65–80 (2020). <https://doi.org/10.34023/2313-6383-2020-27-3-65-80>
23. V. K. Gorbunov and A. G. Lvov, "Analysis of consumer demand in Russia: Two-stage construction of analytical indices," *Vopr. Stat.* **29** (4), 97–113 (2022). <https://doi.org/10.34023/2313-6383-2022-29-4-97-113>
24. S. N. Afriat, "The construction of utility functions from expenditure data," *Int. Econ. Rev.* **8** (1), 67–77 (1967). <https://doi.org/10.2307/2525382>
25. H. R. Varian, "The nonparametric approach to demand analysis," *Econometrica* **50** (4), 945–973 (1982). <https://doi.org/10.2307/1912771>
26. H. R. Varian, "Non-parametric tests of consumer behaviour," *Rev. Econ. Stud.* **50** (1), 99–110 (1983). <https://doi.org/10.2307/2296957>
27. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
28. V. K. Gorbunov, "The relaxation penalty method and degenerate extremum problems," *Dokl. Math.* **63** (2), 219–223 (2001).
29. V. K. Gorbunov, "Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parameterization," *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **9** (6), 575–594 (2001). <https://doi.org/10.1515/jiip.2001.9.6.575>
30. V. K. Gorbunov, "Regularization of nonlinear ill-posed problems with parameterized data," in *Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations* (2003), 418–447 [in Russian].
31. W. M. Gorman, "Community preference fields," *Econometrica* **21** (1), 63–80 (1953). <https://doi.org/DOI:10.2307/1906943>

32. P. A. Samuelson, "Social indifference curves," *Q. J. Econ.* **70** (1), 1–22 (1956). <https://doi.org/10.2307/1884510>
33. L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Inf. Control* **8** (3), 338–353 (1965). [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
34. R. Stone, "Linear expenditure systems and demand analysis: An application to the pattern of British demand," *Econ. J.* **64** (255), 511–527 (1954).
35. L. R. Klein and H. Rubin, "A constant-utility index of the cost of living," *Rev. Econ. Stud.* **15** (2), 84–87 (1947). <https://doi.org/10.2307/2295996>
36. R. C. Geary, "A note on "A constant-utility index of the cost of living"," *Rev. Econ. Stud.* **18** (1), 65–66 (1950). <https://doi.org/10.2307/2296107>
37. A. S. Deaton, "The analysis of consumer demand in the United Kingdom, 1900–1970," *Econometrica* **42** (2), 341–367 (1974).
38. A. Deaton and J. Muellbauer, "An almost ideal demand system," *Am. Econ. Rev.* **70** (3), 312–326 (1980).
39. A. Deaton, "Demand analysis," *Handb. Econometrics* **3** (30), 1767–1839 (1986). [https://doi.org/10.1016/S1573-4412\(86\)03010-6](https://doi.org/10.1016/S1573-4412(86)03010-6)
40. A. A. Shananin, "Nonparametric methods of analysis of consumer demand structure," *Mat. Model.* **5** (9), 3–17 (1993) [in Russian].
41. W. E. Diewert, "Afriat and revealed preference theory," *Rev. Econ. Stud.* **10** (3), 419–425 (1973). <https://doi.org/10.2307/2296461>
42. A. R. Fleissig and G. A. Whitney, "Testing for the significance of violations of Afriat's inequalities," *J. Bus. Econ. Stat.* **23** (3), 355–362 (2005). <https://doi.org/DOI: 10.1198/073500104000000253>
43. V. V. Fedorov, *Numerical Maximin Methods* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
44. V. K. Gorbunov, "Holistic theory of economic equilibrium: Modified Cassel–Wald model," *Dokl. Math.* **98** (2), 537–539 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1064562418060121>

УДК 517.95

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕШНЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ТИПА В ПРОЦЕССАХ, ОПИСЫВАЕМЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

© 2024 А. И. Кожанов^{1,2a}, Г. В. Намсараева^{3b}

¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,

²Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова,
ул. Смолина, 24а, г. Улан-Удэ 670000, Россия,

³Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления,
ул. Ключевская, 40в, г. Улан-Удэ 670013, Россия

E-mails: ^akozhanov@math.nsc.ru, ^bgerel@inbox.ru

Поступила в редакцию 22.02.2024 г.; после доработки 07.03.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

Целью работы является исследование разрешимости обратных задач определения вместе с решением уравнения теплопроводности также его правой части, или неизвестного внешнего воздействия. Особенностью изучаемых задач является то, что в них неизвестное внешнее воздействие определяется двумя функциями, одна из которых зависит только от пространственной переменной, другая же — только от временной.

Ключевые слова: параболические уравнения, обратные задачи, неизвестное внешнее воздействие, регулярные решения, существование, единственность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.205

В теории обратных коэффициентных задач для параболических уравнений — т. е. таких задач, в которых вместе с решением требуется также определить тот или иной коэффициент самого уравнения или (и) коэффициент, определяющий внешнее воздействие — можно выделить два направления. Первое из них предполагает, что неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) есть функция (функции) только от пространственных переменных; это направление можно назвать теорией обратных задач пространственного типа. Второе направление связано с ситуацией, в которой неизвестный коэффициент (неизвестные коэффициенты) есть функция (функции) только от временной переменной; данное направление можно назвать теорией обратных задач временного типа.

Исследованиям разрешимости обратных задач пространственного типа, исследованиям разрешимости обратных задач временного типа посвящено столь много работ, что перечислить даже малую их часть в рамках одной статьи невозможно. Значительно меньшее число работ посвящено теории обратных задач для параболических уравнений, не являющихся обратными задачами пространственного или временного типа. Так, в работах [1–10] изучалась разрешимость обратных задач, в которых неизвестный коэффициент является величиной постоянной. Далее, в работах [11, 12] изучались задачи, в которых неизвестный коэффициент содержал компоненты, зависящие как от пространственной, так и от временной переменной.

Именно последняя ситуация и будет изучаться в настоящей работе.

Все рассуждения и построения в настоящей работе будут проводиться на основе пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l . Необходимые определения и описание свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [13–15].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В прямоугольнике Q переменных (x, t) , $x \in \Omega = (0, 1)$, $t \in (0, T)$, $0 < T \leq +\infty$, рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = F(x, t).$$

Пусть в этом уравнении функция $F(x, t)$ имеет вид

$$F(x, t) = f(x, t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x)$$

с заданными функциями $f(x, t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(x)$, и функциями $q(x)$ и $p(t)$, подлежащими определению вместе с решением $u(x, t)$.

Задачи определения вместе с решением параболического уравнения также неизвестного внешнего воздействия — то есть неизвестной правой части — относятся к классу линейных обратных задач. В соответствии с данной в Введении классификацией направлений исследований в теории обратных коэффициентных задач изучаемые в работе задачи не будут ни задачами пространственного типа, ни задачами временного типа — их можно назвать обратными задачами комбинированного типа.

Дадим точные формулировки изучаемых задач.

Уточним вначале, что целью работы является доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых задач — решений, имеющих все обобщённые по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Пусть наряду с функциями $f(x, t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ заданы также функции $N(x)$ и $R(t)$, определённые при $x \in [0, 1]$ и $t \in [0, T]$ соответственно.

Обратная задача I. Найти функции $u(x, t)$, $q(x)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t - u_{xx} = f(x, t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x), \quad (1)$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$u(x, T) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (4)$$

$$\int_0^1 N(x)u(x, t)dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (5)$$

Обратная задача II. Найти функции $u(x, t)$, $q(x)$ и $p(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением (1), при выполнении для функции $u(x, t)$ условия (2), а также условий

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (6)$$

$$\int_0^T R(t)u(x, t)dt = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (7)$$

В обратной задаче I условия (2) и (3) есть условия обычной первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности, условия же (4) и (5) есть условия переопределения, причём условие (4) характерно для обратных задач пространственного типа, условие же (5) — для обратных задач временного типа.

В обратной задаче II условия $u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0$ вместе с условием (2) определяют вторую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности, условие $u(0, t) = 0$ есть условие переопределения, характерное для обратных задач временного типа, условие же (7) есть условие переопределения, характерное для обратных задач пространственного типа.

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ I

Выполним вначале некоторые формальные построения.

Пусть выполняется условие

$$\varphi(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Положим

$$f_1(x, t) = \varphi(t) \left(\frac{f(x, t)}{\varphi(t)} \right)_t, \quad p_1(t) = \frac{p(t)}{\varphi(t)}, \quad a(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}.$$

Разделив уравнение (1) на $\varphi(t)$ и продифференцировав по переменной t , получим с учётом введённых обозначений новое уравнение

$$u_{tt} - u_{xxt} - a(t)(u_t - u_{xx}) = f_1(x, t) + p_1'(t)\varphi(t)\psi(x). \quad (9)$$

Это уравнение вместе с условиями (2)–(5) определяет обратную задачу временного типа с неизвестной функцией $p_1'(t)$ в правой части. Найдя решение $[u(x, t), p_1'(t)]$ этой задачи, нетрудно далее найти решение $[u(x, t), q(x), p(t)]$ исходной обратной задачи I, но при этом необходимо возникает дополнительное условие для функции $p(t)$. Другими словами, в условия обратной задачи I необходимо добавить ещё одно условие — например, условие

$$p(t_0) = p_0, \quad t_0 \in [0, T]. \quad (10)$$

Продолжим построения. Умножим уравнение (9) на функцию $N(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1 по переменной x . Получим

$$\int_0^1 N(x) [a(t)u_{xx}(x, t) - u_{xxt}(x, t)] dx = \int_0^1 N(x)f_1(x, t)dx + p_1'(t)\varphi(t) \int_0^1 N(x)\psi(x)dx.$$

Для краткости записи обозначим

$$L_0 u = a(t)u - u_t, \quad N_0 = \int_0^1 N(x)\psi(x)dx, \quad f_0(t) = \int_0^1 N(x)f_1(x, t)dx, \quad p_0(t) = p_1'(t)\varphi(t).$$

Пусть выполняется условие

$$N_0 \neq 0. \quad (11)$$

Вычислим $p_0(t)$:

$$p_0(t) = \frac{1}{N_0} \left[\int_0^1 N(y)L_0 u_{yy}(y, t)dy - f_0(t) \right].$$

Подставив $p_0(t)$ в (9), получим уравнение:

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xxt} - a(t)(u_t - u_{xx}) = f_2(x, t) + \frac{\psi(x)}{N_0} \int_0^1 N(y)L_0 u_{yy}(y, t)dy, \quad (12)$$

где $f_2(x, t) = f_1(x, t) - \frac{\psi(x)f_0(t)}{N_0}$.

Уравнение (12) является «нагруженным» [16, 17] (интегро-дифференциальным) уравнением соболевского типа; именно с помощью решения $u(x, t)$ этого уравнения находится решение $[u(x, t), p_1'(t)]$ построенной выше обратной задачи, и далее — решение $[u(x, t), q(x), p(t)]$ исходной обратной задачи.

Введём обозначения:

$$N_1 = \frac{1}{N_0} \|\psi''\|_{L_2(\Omega)} \|N''\|_{L_2(\Omega)}; \quad A_0 = \max_{[0, T]} [a^2(t) + a'(t)], \quad A_1 = \frac{A_0 T^2}{2} + 1.$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (8) и (11), а также условия

$$\varphi(t) \in C^2([0, T]), \quad a(t) \geq 0, \quad a'(t) \leq 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \quad (13)$$

$$\psi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \psi(0) = \psi(1) = 0; \quad (14)$$

$$N(x) \in C^2(\Omega), \quad N(0) = N(1) = 0; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} f_2(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{2x}(x, t) \in L_2(Q), \quad f_{2xx}(x, t) \in L_2(Q), \\ f_2(0, t) = f_2(1, t) = 0 \quad \text{при } t \in [0, T]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$N_1 T A_1^{\frac{1}{2}} < \sqrt{2}. \quad (17)$$

Тогда краевая задача (12), (2)–(4) имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации и методом продолжения по параметру.

Пусть ε есть положительное число. Обозначим через L_ε оператор $Lu - \varepsilon u_{xxxx}$. Далее, пусть λ есть число из отрезка $[0, 1]$. Рассмотрим семейство краевых задач; найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$L_\varepsilon u = f_2(x, t) + \lambda \left[a(t)(u_t - u_{xx}) + \frac{\psi(x)}{N_0} \int_0^1 N(y) L_0 u_{yy}(y, t) dy \right] \quad (18)$$

и такую, что для неё выполняются условия (2)–(4), а также условия

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (19)$$

Поскольку и для применения метода регуляризации, и для применения метода продолжения по параметру требуются априорные оценки решения $u(x, t)$, установим вначале их наличие.

Рассмотрим равенство

$$\begin{aligned} - \int_Q L_\varepsilon u u_{xxxx} dx dt = - \int_Q f_2(x, t) u_{xxxx} dx dt - \\ - \lambda \int_Q \left[a(t)(u_t - u_{xx}) + \frac{\psi(x)}{N_0} \int_0^1 N(y) L_0 u_{yy}(y, t) dy \right] u_{xxxx} dx dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя условия (13)–(15), а также формулу интегрирования по частям, нетрудно от (20) перейти к неравенствам

$$\begin{aligned} \int_Q u_{xxt}^2 dx dt + \varepsilon \int_Q u_{xxxx}^2 dx dt \leq \left(\int_Q u_{xxxx}^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q f_2^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} + \\ + N_1 \left(\int_Q u_{xx}^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q (L_0 u)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int_Q u_{xxxx}^2 dxdt &\leq \left(\int_Q u_{xx}^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q f_{2xx}^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ N_1 \left(\int_Q u_{xx}^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q (L_0 u)^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для функции $L_0 u$ имеет место оценка

$$\int_Q (L_0 u)^2 dxdt \leq \frac{A_1 T}{\sqrt{2}} \int_Q u_{xxt}^2 dxdt. \quad (23)$$

Из неравенств (21) и (23), (22) и (23) вытекают неравенства

$$\int_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int_Q u_{xxxx}^2 dxdt \leq \left(\int_Q u_{xxxx}^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q f_2^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N_1 T A_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_Q u_{xxt}^2 dxdt, \quad (24)$$

$$\int_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int_Q u_{xxxx}^2 dxdt \leq \left(\int_Q u_{xx}^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q f_{2xx}^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{N_1 T A_1^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \int_Q u_{xxt}^2 dxdt. \quad (25)$$

Условие (17) означает, что следствием (24) и (25) будут априорные оценки

$$\int_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int_Q u_{xxxx}^2 dxdt \leq M_1 \int_Q f_2^2 dxdt, \quad (26)$$

$$\int_Q u_{xxt}^2 dxdt + \varepsilon \int_Q u_{xxxx}^2 dxdt \leq M_2 \int_Q f_{2xx}^2 dxdt, \quad (27)$$

причём постоянная M_1 в (26) зависит от ε , постоянная же M_2 в (27), наоборот, не зависит от ε .

Их неравенств (26) и (27), а также непосредственно из уравнения (12) вытекают ещё две оценки

$$\int_Q u_{tt}^2 dxdt \leq M_3 \int_Q f_2^2 dxdt, \quad (28)$$

$$\int_Q u_{tt}^2 dxdt \leq M_4 \int_Q f_{2xx}^2 dxdt \quad (29)$$

с постоянной M_3 , зависящей от числа ε , и с постоянной M_4 , не зависящей от ε .

Заметим, что краевая задача (18), (2)–(4), (19) при $\lambda = 0$, при фиксированном ε и при принадлежности функции $f_2(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)$, $u_{xxxx}(x, t) \in L_2(Q)$ — это нетрудно доказать с помощью классического метода Галеркина с выбором специального базиса [18] и априорных оценок (26) и (28), справедливых и при $\lambda = 0$. Используя этот факт, теорему о методе продолжения по параметру (см. [19], гл. III, §14) и те же оценки (26) и (28), получим, что задача (18), (2)–(4), (19) при всех λ из отрезка $[0, 1]$, при фиксированном ε и при принадлежности функции

$f_2(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)$, $u_{xxxx}(x, t) \in L_2(Q)$.

Рассмотрим теперь задачу (18), (2)–(4), (19) при $\lambda = 1$. Выберем последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ положительных чисел такую, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Согласно доказанному выше, эта задача при $\varepsilon = \varepsilon_m$ имеет регулярное решение $u_m(x, t)$. Оценки (27) и (29) означают для этих решений семейства $\{u_{mxxx}(x, t)\}_{m=1}^\infty$, $\{u_{mtt}(x, t)\}_{m=1}^\infty$, $\{\sqrt{\varepsilon_m}u_{mxxxx}(x, t)\}_{m=1}^\infty$ равномерно ограничены в пространстве $L_2(Q)$.

Используя далее свойство рефлексивности гильбертова пространства, нетрудно показать, что существует последовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ натуральных чисел, а также функция $u(x, t)$ такие, что при $k \rightarrow \infty$ имеют место сходимости:

- $u_{m_k}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ слабо в пространстве $W_2^2(Q)$,
- $u_{m_k xxt}(x, t) \rightarrow u_{xxt}(x, t)$ слабо в пространстве $L_2(Q)$,
- $u_{m_k xxx}(x, t) \rightarrow 0$ слабо в пространстве $L_2(Q)$,
- $u_{m_k}(x, t) \rightarrow u(x, t)$ почти всюду в Q ,
- $u_{m_k t}(x, t) \rightarrow u_t(x, t)$ почти всюду в Q .

Последние две сходимости выполняются вследствие теорем вложения, см. [13–15].

Из указанных сходимостей очевидным образом вытекает, что предельная функция $u(x, t)$ и будет искомым решением краевой задачи (12), (2)–(4). \square

Теорема 2. Пусть выполняются условия (8), (11), (13)–(15), (17). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_x(x, t) \in L_2(Q)$, $f_{xx}(x, t) \in L_2(Q)$, $f_t(x, t) \in L_2(Q)$, $f_{xt}(x, t) \in L_2(Q)$, $f_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)$, $f(0, t) = f(1, t) = 0$ при $t \in [0, T]$, обратная задача I при выполнении условия (10) с произвольно заданным числом p_0 имеет решение $\{u(x, t), q(x), p(t)\}$ такое, что $u(x, t) \in W_2^2(Q)$, $u_{xxt}(x, t) \in L_2(Q)$, $q(x) \in L_2(Q)$, $p(t) \in W_2^1([0, T])$.

Доказательство. Указанные в формулировке теоремы условия на функцию $f(x, t)$ означают, что выполняется условие (16). Согласно теореме 1, краевая задача (12), (2)–(4) имеет регулярное решение $u(x, t)$. Построенная по этой функции функция $p_0(t)$ будет принадлежать пространству $L_2([0, T])$.

Умножим уравнение (12) на функцию $N(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, T]$. После несложных выкладок получим равенство

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a(t) \frac{\partial}{\partial t} \right) I(t) = 0, \quad (30)$$

в котором через $I(t)$ обозначена функция

$$I(t) = \int_0^1 N(x)u(x, t)dx.$$

Поскольку вследствие условия (3) выполняется $I(0) = I(T) = 0$ и поскольку функция $a(t)$ неотрицательна, то из (30) следует, что $I(t)$ есть тождественно нулевая на отрезке $[0, T]$ функция. А это означает, что для решения $u(x, t)$ краевой задачи (12), (2)–(4) выполняется условие (5).

Определим функцию $p_1(t)$ как решение задачи

$$p_1'(t) = \frac{p_0(t)}{\varphi(t)}, \quad p_1(t_0) = \frac{p_0}{\varphi(t_0)};$$

далее определим функцию $p(t)$: $p(t) = p_1(t)\varphi(t)$. При $x \in \Omega$ выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varphi(t)} [(u_t - u_{xx}) - p(t)\psi(x) - f(x, t)] \right) = 0. \quad (31)$$

Положим

$$q(x) = \frac{1}{\varphi(t_0)} [(u_t(x, t_0) - u_{xx}(x, t_0)) - p_0\psi(x) - f(x, t_0)].$$

Интегрируя (31) по t от t_0 до текущей точки получим, что функция $u(x, t)$ (решение краевой задачи (12), (2)–(4)), $q(x)$ и $p(t)$ связаны в прямоугольнике Q уравнением (1). Поскольку для функции $u(x, t)$ выполняются условия (2)–(5), то функции $u(x, t)$, $q(x)$ и $p(t)$ и дадут решение обратной задачи I.

Принадлежность функций $u(x, t)$, $q(x)$ и $p(t)$ требуемым классам показана по ходу доказательства. \square

Некоторые комментарии к доказанным теоремам будут даны в конце работы.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ II

Вновь начнём с предварительных преобразований.

Пусть выполняется условие

$$\psi(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \quad R_0 = \int_0^T R(t)\varphi(t)dt \neq 0. \quad (32)$$

Положим

$$\tilde{f}_1(x, t) = \psi(x) \left(\frac{f(x, t)}{\psi(x)} \right)_x, \quad \tilde{f}_0(x) = \int_0^T R(t)\tilde{f}_1(x, t)dt, \quad \tilde{f}_2(x, t) = \tilde{f}_1(x, t) - \frac{\varphi(t)\tilde{f}_0(x)}{R_0},$$

$$q_1(x) = \frac{q(x)}{\psi(x)}, \quad q_0(x) = q_1(x)\psi(x), \quad b(x) = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

Первым вспомогательным уравнением для обратной задачи II будет уравнение

$$u_{xt} - u_{xxx} - b(x)(u_t - u_{xx}) = \tilde{f}_1(x, t) + q_0(x)\varphi(t),$$

дающее обратную задачу нахождения функций $u(x, t)$ и $q_0(x)$. Умножая это уравнение на функцию $R(t)$ и интегрируя по отрезку $[0, T]$, получим «нагруженное» дифференциальное уравнение для функции $u(x, t)$:

$$u_{xt} - u_{xxx} - b(x)(u_t - u_{xx}) = \tilde{f}_2(x, t) + \frac{\varphi(t)}{R_0} \int_0^T R(t) [u_{xt} - b(x)u_t] dt. \quad (33)$$

Решение краевой задачи с условиями (2) и (6) для этого уравнения и позволит найти решение $\{u(x, t), q(x), p(t)\}$ обратной задачи II.

Положим

$$\varphi_0 = \max_{[0, T]} |\varphi(t)|, \quad b_0 = \max_{[0, 1]} |b(x)|,$$

$$R_1 = \|(T-t)^{\frac{1}{2}}R(t)\|_{L_2([0, T])}, \quad R_2 = \frac{\sqrt{2}\varphi_0 T R_1 (1 + b_0^2)^{\frac{1}{2}}}{R_0}.$$

Теорема 3. Пусть выполняются условие (32), а также условия

$$\varphi(t) \in C([0, T]), \quad \psi(x) \in C^1([0, 1]); \quad (34)$$

$$b'(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in [0, 1], \quad b(1) \leq 0; \quad (35)$$

$$R(t) \in C([0, T]), \quad (T-t)^{-\frac{1}{2}}R(t) \in L_2([0, T]); \quad (36)$$

$$\frac{Tb_0^2}{2} + R_2 < 1. \quad (37)$$

Тогда для любой функции $\tilde{f}_2(x, t)$ из пространства $L_2(Q)$ краевая задача (33), (2), (6) имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_x(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$.

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения по параметру с аналогичным теореме 1 использованием чисел λ из отрезка $[0, 1]$. Покажем, что для решений краевой задачи с условиями (2) и (6) для соответствующего уравнения с параметром λ имеют место нужные априорные оценки. Поскольку процедура получения оценок одинакова для всех чисел из отрезка $[0, 1]$, рассмотрим лишь случай $\lambda = 1$ — то есть случай задачи (33), (2), (6).

Пусть T_0 есть число из промежутка $(T, +\infty)$. Умножим уравнение (33) на функцию $(T_0 - t)u_{xt}(x, t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q . После несложных выкладок получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_Q \left[\frac{1}{2}u_{xx}^2 + (T_0 - t)u_{xt}^2 \right] dxdt + \frac{1}{2} \int_Q b'(x)(T_0 - t)u_t^2 dxdt + \frac{T_0 - T}{2} \int_0^1 u_{xt}^2(x, T) dx - \\ & - \frac{b(1)}{2} \int_0^T (T_0 - t)u_t^2(1, t) dt = \int_Q (T_0 - t)\tilde{f}_2 u_{xt} dxdt - \int_Q b(x)(T_0 - t)u_{xx}u_{xt} dxdt + \\ & + \frac{1}{R_0} \int_Q (T_0 - t)\varphi(t)u_{xt}(x, t) \left(\int_0^T R(\tau) [u_{x\tau} - b(x)u_\tau] d\tau \right) dxdt. \end{aligned} \quad (38)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (38):

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{R_0} \int_Q (T_0 - t)\varphi(t)u_{xt}(x, t) \left(\int_0^T R(\tau) [u_{x\tau} - b(x)u_\tau] d\tau \right) dxdt \right| \leq \\ & \frac{\varphi_0}{R_0} \left(\int_Q (T_0 - t)^2 u_{xt}^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \left(\int_0^T R(\tau) [u_{x\tau} - b(x)u_\tau] d\tau \right)^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \frac{\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}}}{R_0} \left(\int_Q (T_0 - t)u_{xt}^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \left(\int_0^T \frac{R(\tau)}{\sqrt{T_0 - \tau}} \sqrt{T_0 - \tau} [u_{x\tau} - b(x)u_\tau] d\tau \right)^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \frac{\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}}}{R_0} \left(\int_Q (T_0 - t)u_{xt}^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \left(\int_0^T \frac{R^2(\tau)}{T_0 - \tau} d\tau \right) \left(\int_0^T (T_0 - \tau) [u_{x\tau} - b(x)u_\tau]^2 d\tau \right) dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}} R_1}{R_0} \left(\int_Q (T_0 - t) u_{xt}^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Q \left(\int_0^T (T_0 - \tau) u_{x\tau}^2 d\tau + b_0^2 \int_0^T (T_0 - \tau) u_\tau^2 d\tau \right) dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \quad (39)$$

$$\frac{\sqrt{2}\varphi_0 T_0^{\frac{1}{2}} R_1 (1 + b_0^2)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}}}{R_0} \int_Q (T_0 - t) u_{xt}^2 dx dt.$$

Прежде всего заметим, что вследствие условия (37) существует число T_0^* такое, что

$$T_0^* > T, \quad \frac{T_0^* b_0^2}{2} + \frac{\sqrt{2}\varphi_0 (T_0^*)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} R_1 (1 + b_0^2)^{\frac{1}{2}}}{R_0} < 1. \quad (40)$$

Обозначим для краткости

$$R_2^* = \frac{\sqrt{2}\varphi_0 (T_0^*)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}} R_1 (1 + b_0^2)^{\frac{1}{2}}}{R_0}.$$

Неравенства (39) и (40), а также неравенство Юнга означают, что выполняется оценка

$$\frac{1}{2} \int_Q u_{xt}^2 dx dt + (1 - R_2^*) \int_Q (T_0^* - t) u_{xt}^2 dx dt \leq \frac{\delta_0^2}{2} \int_Q u_{xx}^2 dx dt +$$

$$+ \frac{T_0^* b_0^2}{2\delta_0^2} \int_Q (T_0^* - t) u_{xt}^2 dx dt + \frac{\delta_1^2}{2} \int_Q (T_0^* - t) u_{xt}^2 dx dt + \frac{1}{2\delta_1^2} \int_Q (T_0^* - t) \tilde{f}_2^2 dx dt,$$

в котором δ_0 и δ_1 есть произвольные положительные числа.

Зафиксируем число δ_0 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{T_0^* b_0^2}{2(1 - R_2^*)} < \delta_0^2 < 1$$

(вследствие неравенств (40) это возможно). Подбирая далее число δ_1 малым, окончательно получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи (33), (2), (6) выполняется априорная оценка

$$\int_Q (u_{xx}^2 + u_{xt}^2) dx dt \leq K_1 \int_Q \tilde{f}_2^2 dx dt, \quad (41)$$

постоянная K_1 в которой определяется лишь функциями $\psi(x)$, $\varphi(t)$, $R(t)$, а также числом T .

Оценка в пространстве $L_2(Q)$ для функции $u_{xxx}(x, t)$ очевидным образом вытекает из оценки (41); суммируя, получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи (33), (2), (6) имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|u_x\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq K_0 \|\tilde{f}_2\|_{L_2(Q)}, \quad (42)$$

постоянная K_0 в которой определяется лишь функциями $\psi(x)$, $\varphi(t)$, $R(t)$, а также числом T .

Поскольку разрешимость краевой задачи с условиями (2) и (6) для уравнения

$$u_{xt} - u_{xxx} = \tilde{f}_2$$

очевидна, то из априорной оценки (42) и из теоремы о методе продолжения по параметру следует, что краевая задача (33), (2), (6) разрешима в требуемом классе. \square

Как и для обратной задачи I, в обратной задаче II для однозначного определения функции $q(x)$ потребуется дополнительное условие — например, условие

$$q(x_0) = q_0, \quad x_0 \in [0, 1] \quad (43)$$

(q_0 здесь есть произвольное действительное число).

Теорема 4. Пусть выполняются условия (32), (34)–(37). Тогда для любой функции $f(x, t)$ такой, что $f(x, t) \in L_2(Q)$, $f_x(x, t) \in L_2(Q)$, обратная задача II с условием (43) для функции $q(x)$ имеет решение $\{u(x, t), q(x), p(t)\}$ такое, что $u(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $u_x(x, t) \in W_2^{2,1}(Q)$, $q(x) \in W_2^1(\Omega)$, $p(t) \in L_2([0, T])$.

Доказательство. Теорема 3 позволяет определить функцию $q_0(x)$ (с помощью функции $u(x, t)$ и далее — функцию $q_1(x)$ с помощью равенства

$$q_1'(x) = \frac{q_0(x)}{\psi(x)}, \quad q_1(x_0) = \frac{q_0}{\psi(x_0)}.$$

Найдя функцию $q_1(x)$, нетрудно далее определить функции $q(x)$ и $p(t)$:

$$q(x) = q_1(x)\psi(x), \quad p(t) = -\frac{1}{\psi(0)} [f(0, t) + u_{xx}(0, t) + q(0)\varphi(t)].$$

Выполнение для функции $u(x, t)$ условия переопределения показывается аналогично тому, как такой же факт доказывался в теореме 2. Принадлежность функций $q(x)$ и $p(t)$ требуемым классам очевидна.

Теорема доказана полностью. \square

4. КОММЕНТАРИИ И ДОПОЛНЕНИЯ

1. Теоремы 1 и 3 представляются вспомогательными для доказательства разрешимости задач I и II. Вместе с тем, на взгляд авторов, они имеют и самостоятельное значение как теоремы о разрешимости «нагруженных» (интегро-дифференциальных) уравнений.
2. Вполне аналогично доказательству теоремы 2 можно установить разрешимость обратной задачи I в многомерном случае — то есть в случае, когда $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, Ω есть ограниченная область с гладкой границей, уравнение же (1) имеет вид

$$u_t - \Delta u = f(x, t) + q(x)\varphi(t) + p(t)\psi(x).$$

3. Также нетрудно, используя методы настоящей работы, изучить разрешимость следующего аналога обратной задачи I: найти функции $u(x, t)$, $q(x)$, $p_1(t), \dots, p_n(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением

$$u_t - \Delta u = f(x, t) + q(x)\varphi(t) + p_1(t)\psi_1(x) + \dots + p_n(t)\psi_n(x),$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega;$$

$$u(x, t)|_S = 0, \quad S = \partial\Omega \times (0, T);$$

$$\int_{\Omega} N_i(x)u(x, t)dx = 0, \quad 0 < t < T, \quad i = 1, \dots, m.$$

Здесь сразу предполагается, что изучаемая задача многомерна по пространственным переменным. Функции $N_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, безусловно предполагаются линейно независимыми на множестве Ω .

4. Аналогичным образом можно изучить обратную задачу II в более общей, нежели в работе, постановке: найти функции $u(x, t)$, $q_1(x), \dots, q_m(x)$, $p(t)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением

$$u_t - u_{xx} = f(x, t) + q_1(x)\varphi_1(t) + \dots + q_m(x)\varphi_m(t) + p(t)\psi(x),$$

при выполнении для функции $u(x, t)$ условий

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad 0 < t < T;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega;$$

$$\int_0^1 R_i(t)u(x, t)dt = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

(как и в предыдущей задаче, здесь считается, что ядра интегральных условий образуют линейно независимую систему).

5. Наличие в левой части уравнения (1) младших членов — слагаемых $b(x, t)u_x$, $c(x, t)u$ — не влияет на суть результатов о разрешимости, но существенно усложняет выкладки. Также не влияет на суть результатов варьирование граничных условий — так, в обратной задаче I граничное условие первой начально-краевой задачи можно заменить граничным условием второй или третьей краевых задач, вместо условия Коши (2) в обратной задаче II можно задавать нелокальное условие $u(x, 0) = \gamma u(x, T)$.
6. Условие (35) в обратной задаче II можно заменить условием

$$b(x) = b_0(x) + b_1(x), \quad b'_0(x) \geq 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, 1], \quad b_0(1) \leq 0, \quad |b_1(x)| \leq b_1,$$

предполагая далее, что число b_1 мало.

7. Условие (17) теорем 1 и 2, (37) теорем 3 и 4 заведомо выполняются, например, если число T мало.
8. Условия (10) и (43) (или же их аналоги) необходимы для однозначного определения решений обратной задачи I и, соответственно, обратной задачи II. Действительно, если в обратной задаче I отказаться от условия (10), то наряду с решением $\{u(x, t), q(x), p(t)\}$ решением будет вектор-функция $\{u(x, t), q(x) - \bar{p}\psi(x), p(t) + \bar{p}\varphi(t)\}$ с произвольным действительным числом \bar{p} .

Аналогичное утверждение имеет место и для обратной задачи II.

Что же касается аналогов условий (10) или (43), то ими можно назвать любые условия, характеризующие единственность решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка — например, нелокальные условия $p(0) = \alpha p(T)$ или $q(0) = \beta q(1)$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00082). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mola G.* Reconstruction of two constant coefficients in linear anisotropic diffusion model // *Inverse Probl.* 2016. V. 32, N 11. Article 115016.
2. *Lorenzi A., Mola G.* Identification of real constant in linear evolution equation in a Hilbert spaces // *Inverse Probl. Imaging.* 2011. V. 5, N 3. P. 695–714.
3. *Lorenzi A.* Recovering two constants in a linear parabolic equation // *J. Phys. Conf. Ser.* 2007. V.73. P.1-15.
4. *Mola G.* Identification of the Diffusion Coefficient in Linear Evolution Equations in Hilbert Spaces // *J. Abstr. Diff. Equat. Appl.* 2011. V. 2. P.18–28.
5. *Lorenzi A., Mola G.* Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equation // *Inverse Probl.* 2012. V. 28, N 7.
6. *Кожанов А. И., Сафиуллова Р. Р.* Определение параметров в телеграфном уравнении // *Уфимск. матем. журн.* 2007. Т. 9, № 1. С. 63–74.
7. *Kozhanov A. I.* Hyperbolic Equations with Unknown Coefficients // *Symmetry.* 2020. V. 12, N 9. Article 1539.
8. *Lyubanova A. Sh.* Identification of a constant coefficient in an elliptic equation // *Appl. Anal.* 2008. V. 87, N 10–11. P. 1121–1128.
9. *Велисевич А. В.* Об одной обратной задаче для эллиптического уравнения со смешанными граничными условиями третьего рода // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.* 2021. Т. 14, № 5. С. 659–666.
10. *Любанова А. Ш.* Идентификация коэффициента в старшем члене псевдопараболического уравнения типа фильтрации // *Сиб. матем. журн.* 2013. Т. 54, № 6. С. 1315–1330.
11. *Саватеев Е. Г.* О задаче идентификации коэффициента параболического уравнения // *Сиб. матем. журн.* 1995. Т. 36, № 1. С. 177–185.
12. *Фроленков И. В., Кригер Е. Н.* Об одной задаче идентификации функции источника специального вида для многомерного параболического уравнения с данными Коши // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.* 2013. V. 6, N 2. P. 186–199.
13. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1973.
14. *Ладыженская О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
15. *Triebel H.* Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Amsterdam: Noth-Holland Publ., 1978.
16. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.
17. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: КЦ ИТПМ, 1995.
18. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
19. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

UDC 517.95

**SOLVABILITY ANALYSIS OF PROBLEMS OF DETERMINING
EXTERNAL INFLUENCE OF COMBINED TYPE IN PROCESSES
DESCRIBED BY PARABOLIC EQUATIONS**

© 2024 A. I. Kozhanov^{1,2a}, G. V. Namsaraeva^{3b}

¹*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, 630090 Russia,*

²*Dorji Banzarov Buryat State University, Ulan-Ude, 670000 Russia,*

³*East Siberian State University of Technology and Management, Ulan-Ude, 670013
Russia*

E-mails: ^akozhanov@math.nsc.ru, ^bgerel@inbox.ru

Received 22.02.2024, revised 07.03.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. The aim of this paper is to study the solvability of inverse problems of determining, together with the solution of the heat equation, its right-hand side or an unknown external influence. The specific feature of the problems studied is that the unknown external influence is determined by two functions of which one depends only on the spatial variable and the other, only on the time variable.

Keywords: parabolic equation, inverse problem, unknown external influence, regular solution, existence, uniqueness.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.205

REFERENCES

1. G. Mola, “Reconstruction of two constant coefficients in linear anisotropic diffusion model,” *Inverse Probl.* **32** (11), 115016 (2016).
2. A. Lorenzi and G. Mola, “Identification of real constant in linear evolution equation in a Hilbert space,” *Inverse Probl. Imaging* **5** (3), 695–714 (2011).
3. A. Lorenzi, “Recovering two constants in a linear parabolic equation,” *J. Phys. Conf. Ser.* **73**, 1–15 (2007).
4. G. Mola, “Identification of the diffusion coefficient in linear evolution equations in Hilbert spaces,” *J. Abstract Differ. Equat. Appl.* **2**, 18–28 (2011).
5. A. Lorenzi and G. Mola, “Recovering the reaction and the diffusion coefficients in a linear parabolic equation,” *Inverse Probl.* **28** (7) (2012).
6. A. I. Kozhanov and R. R. Safullova, “Determination of parameters in telegraph equation,” *Ufa Math. J.* **9** (1), 62–74 (2017).
7. A. I. Kozhanov, “Hyperbolic equations with unknown coefficients,” *Symmetry* **12** (9), 1539 (2020).
8. A. Sh. Lyubanova, “Identification of a constant coefficient in an elliptic equation,” *Appl. Anal.* **87** (10–11), 1121–1128 (2008).
9. A. V. Velisevich, “On one inverse problem for an elliptic equation with mixed boundary conditions of the third kind,” *Zh. SFU Ser. Mat. Fiz.* **14** (5), 659–666 (2021) [in Russian].
10. A. Sh. Lyubanova, “Identification of a coefficient in the leading term of a pseudoparabolic equation of filtration,” *Sib. Math. J.* **54** (6), 1046–1058 (2013).

11. E. G. Savateev, "On the problem of identification of a coefficient in a parabolic equation," *Sib. Math. J.* **36** (1), 160–167 (1995).
12. I. V. Frolenkov and E. N. Kriger, "On one problem of identification of a source function of a special type for a multidimensional parabolic equation with Cauchy data," *Zh. SFU Ser. Mat. Fiz.* **6** (2), 186–199 (2013) [in Russian].
13. S. L. Sobolev, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
14. O. A. Ladyzhenskaya, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].
15. H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators* (North-Holland, Amsterdam, 1978).
16. A. M. Nakhushev, *Loaded Equations and Applications* (Nauka, Moscow, 2012) [in Russian].
17. M. T. Dzhenaliev, *To the Theory of Linear Boundary Value Problems for Loaded Differential Equations* (KTS ITPM, Almaty, 1995) [in Russian].
18. V. A. Trenogin, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
19. J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires* (Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969; Mir, Moscow, 1972).

УДК 519.86

О ДВОЙСТВЕННОМ МЕТОДЕ ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ В МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ

© 2024 Д. Б. Рохлин

*Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук,
Региональный научно-образовательный математический центр,
ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону 344090, Россия*

E-mail: dbrohlin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 13.01.2024 г.; после доработки 09.03.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

Рассматривается последовательность блочно-сепарабельных задач выпуклого программирования, описывающих распределение ресурсов в многоагентных системах. Построено несколько итерационных алгоритмов назначения цен на ресурсы. При различных предположениях о функциях полезности и ресурсных ограничениях получены оценки для среднего отклонения целевой функции от оптимального значения (сожаления) и величины невязки в ограничениях. Среднее здесь понимается как математическое ожидание для независимых одинаково распределённых данных, и как временное среднее в задаче онлайн оптимизации. Анализ задачи проводится на основе методов онлайн оптимизации и теории двойственности. Рассмотренные алгоритмы основаны на информации о разности между суммарным спросом и предложением, которая порождается реакциями агентов на цены и соответствует невязке в ограничениях.

Ключевые слова: онлайн оптимизация, адаптивный градиентный спуск, двойственность, сожаление, выявленные предпочтения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.206

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для задачи блочно-сепарабельного выпуклого программирования двойственная по Лагранжу распадается на несвязанные между собой подзадачи. В задаче о распределении ресурсов между активными агентами эта декомпозиция имеет следующий экономический смысл: каждая из указанных подзадач описывает реакцию агента на цены ресурсов, представленные вектором множителей Лагранжа. Вместо ресурсов речь может идти также о продуктах или товарах. Использование цен как координационного механизма в таких задачах хорошо известно [1], гл. 6, [2] и связано с механизмом Вальраса [3], гл. 10.

В данной работе мы считаем, что цены назначаются лидером (например, регулятором рынка электричества), и целью их назначения является приближённая максимизация кооперативного критерия качества (суммарной полезности агентов) при приближённом выполнении ресурсных ограничений. При этом оптимальное решение двойственной задачи стимулирует точное оптимальное решение прямой задачи, т. е. кооперативно оптимальное решение, удовлетворяющее ресурсным ограничениям.

Нас интересуют алгоритмы назначения цен, использующие лишь информацию о невязках в ограничениях, порождаемых реакциями агентов. Эти невязки соответствуют разности между суммарным спросом со стороны агентов (или, например, потоком в сети) и имеющими-

ся ресурсами. Такие алгоритмы не используют личную или труднодоступную и ненадёжную информацию о функциях затрат агентов.

Базовым методом решения поставленной задачи можно считать двойственный градиентный спуск, который непосредственно приводит к методу корректировки цен на основе разности между спросом и предложением. Этот подход многократно использовался в различных задачах, касающихся регулирования транспортных потоков [4], распределения ресурсов в компьютерных сетях [5], отыскания равновесия типа Вальраса [6], производства электроэнергии [7], и др.

В данной работе мы считаем, что агенты являются неоднородными и их поведение может меняться с течением времени. Формально говоря, в общем случае, рассматриваемая задача относится к классу задач выпуклой онлайн оптимизации с долгосрочными ограничениями [8]. Её исследование проводится обычно на основе понятия сожаления, которое равно разности между накопленными потерями алгоритма и накопленными потерями ретроспективно лучшего фиксированного действия (статическое сожаление), либо оптимальной последовательности действий (динамическое сожаление) [9, 10]. Если целевые и функции ограничения представляют собой независимые одинаково распределённые величины, то получаем задачу стохастической оптимизации. В этом случае среднее понимается как математическое ожидание и рассматриваются оценки ошибки оценивания (estimation error). Их можно получить с помощью известных методов конвертирования онлайн алгоритмов в пакетные [11–13].

Для задач выпуклой онлайн оптимизации с долгосрочными ограничениями разработано достаточно много алгоритмов, которые при определённых условиях обеспечивают одновременно малое в среднем (по времени) сожаление и малую невязку в ограничениях. Известны теоретические гарантии как для статического, так и для динамического сожаления [14–16]. Полученные в указанных этих работах оценки отличаются от представленных ниже. В частности, полученная в теореме 1 оценка динамического сожаления не зависит от суммы длин приращений оптимальной последовательности действий. Это связано со спецификой постановки задачи: мы считаем, что агенты решают локальные задачи с полной информацией, хотя центру при назначении цен она неизвестна.

Подчеркнём также, что в рассматриваемой постановке задачи действия агентов определяются текущей ценой и их функциями полезности. Таким образом, стратегии агентов не могут быть навязаны извне. В связи с этим, с точки зрения допустимых алгоритмов решения поставленной задачи, данная работа ближе к [4–6, 17] и литературе, посвящённой оптимизации на основе выявленных предпочтений, т. е. непосредственной реакции агентов на действия лидера [18–20].

Сформулируем математическую постановку задачи. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^n \mathbb{R}^{k_j}$. Рассмотрим последовательность блочно-сепарабельных задач выпуклого программирования

$$f_t(x) := \sum_{j=1}^n f_{t,j}(x_j) \rightarrow \max_{x \in S}, \quad (1)$$

$$S : g_{t,i}(x) := \sum_{j=1}^n g_{t,ij}(x_j) \leq b_{t,i}, \quad i = 1, \dots, m; \quad x \in B := \prod_{i=1}^n B_i, \quad (2)$$

где $B_j \subset \mathbb{R}^{k_j}$ — выпуклые компактные множества, $f_{t,j}$ — вогнутые функции, $g_{t,ij}$ — выпуклые функции, которые для простоты будем считать определёнными на \mathbb{R}^{k_j} , и $t \in \{1, \dots, T\}$. Рассмотрим последовательность функций Лагранжа

$$L_t(x, \lambda) = f_t(x) + \langle \lambda, b_t - g_t(x) \rangle : B \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R},$$

$b_t = (b_{t,1}, \dots, b_{t,m})$, $g_t = (g_{t,1}, \dots, g_{t,m})$, и двойственных оптимизационных задач

$$d_t(\lambda) := \sup_{x \in B} L_t(x, \lambda) = \langle \lambda, b_t \rangle + \sum_{j=1}^n \sup_{x_j \in B_j} (f_{t,j}(x_j) - \langle \lambda, g_{t,j}(x_j) \rangle) \rightarrow \min_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m}. \quad (3)$$

Здесь $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^m a_i b_i$ — стандартное скалярное произведение, и

$$g_{t,j} = (g_{t,1j}, \dots, g_{t,mj}).$$

Ясно, что оптимальное решение $x_t^* = (x_{t,1}^*, \dots, x_{t,n}^*)$ задачи (1), (2) существует. Хорошо известен следующий результат [21], §28, [22], предложение 6.4.4. Пусть выполнено слабое условие Слейтера, т. е. существует точка y из относительной внутренней B : $y \in \text{ri } B = \text{ri } B_1 \times \dots \times \text{ri } B_n$ такая, что

$$g_{t,i}(y) < b_{t,i}, \quad i \in I; \quad g_{t,i}(y) \leq b_{t,i}, \quad i \notin I,$$

где I — множество индексов, для которых $g_{t,i}$ не является аффинной. Тогда существует оптимальное решение λ_t^* двойственной задачи и нет скачка двойственности:

$$f_t(x_t^*) = d_t(\lambda_t^*).$$

Если интерпретировать $f_{t,j}$ как функцию полезности j -го агента, а компоненты вектора множителей Лагранжа λ как цены ресурсов, то, как видно из формулы (3), после назначения цен каждый агент выбирает оптимальное действие

$$\tilde{x}_{t,j}(\lambda) \in \operatorname{argmax}_{x_j \in B_j} (f_{t,j}(x_j) - \langle \lambda, g_{t,j}(x_j) \rangle). \quad (4)$$

Оптимальная реакция $\tilde{x}_t(\lambda)$ называется выявленным предпочтением [18, 19]. Заметим, что в общем случае необязательно $\tilde{x}_t(\lambda_t^*)$ является оптимальным решением x_t^* прямой задачи. Но для сильно выпуклых функций $f_{t,j}$ это верно. В разделе 3 это будет показано в более общей ситуации.

Из хорошо известных формул для субдифференциала суммы и максимума [23], теоремы 3.40, 3.55, вытекает, что $b_t - g_t(\tilde{x}_t(\lambda))$ принадлежит субдифференциалу выпуклой функции d_t в точке λ :

$$b_t - g_t(\tilde{x}_t(\lambda)) \in \partial d_t(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^m.$$

Наша цель состоит в построении последовательности векторов цен λ_t , обеспечивающих для соответствующих реакций (4) агентов малое (растущее медленнее T) динамическое сожаление

$$\sum_{t=1}^T f_t(x_t^*) - \sum_{t=1}^T f_t(\tilde{x}_t(\lambda_t)) \quad (5)$$

для последовательности прямых задач, и малую суммарную невязку в ограничениях

$$\left(\sum_{t=1}^T (g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda_t)) - b_{t,i}) \right)^+, \quad (6)$$

$a^+ = \max\{0, a\}$. Использование величин (5), (6) для оценки качества алгоритмов является стандартным в теории онлайн оптимизации [10, 12] и, в частности, в задаче с долгосрочными ограничениями, понимаемыми в среднем [8].

Для построения последовательности λ_t мы применяем адаптивный метод градиентного спуска. При отсутствии вероятностных предположений оценки величин (5), (6) получены в

теореме 1. В предположении, что f_t, g_t, b_t являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами, мы строим вектор цен $\bar{\lambda}_T$ после T наблюдений. В этом случае математические ожидания величин (5), (6) соответствуют ошибкам оценивания и ожидаемой невязке в ограничениях. Три варианта оценок этих величин, соответствующие различным способам выбора $\bar{\lambda}_T$, представлены в теоремах 2–4. Отметим, что вычислительная сложность итераций предложенных алгоритмов имеет порядок $O(m)$, где m — число ограничений (размерность вектора множителей Лагранжа). Это вытекает из явных формул.

2. ЗАДАЧА ОНЛАЙН ОПТИМИЗАЦИИ

Всюду далее будем считать выполненными следующие условия

$$0 \in B, \quad f_t(0) = g_{t,i}(0) = 0, \quad (7)$$

$$|f_t(x)| \leq \bar{f}, \quad |g_{t,i}(x)| \leq \bar{g}_i, \quad x \in B, \quad |b_{t,i}| \leq \bar{b}_i. \quad (8)$$

Первого из них можно всегда добиться с помощью переобозначений, а условие (8) равномерной (по t) ограниченности является стандартным.

Базовым методом решения задач выпуклой онлайн оптимизации является онлайн градиентный спуск [9, 10, 12]. Применим его с евклидовой проекцией на неотрицательный ортант \mathbb{R}_+^m к последовательности двойственных задач (3):

$$\lambda_{t+1,i} = (\lambda_{t,i} - \eta_{t,i} \nabla_{t,i})^+, \quad \nabla_t := b_t - g_t(\tilde{x}_t(\lambda_t)). \quad (9)$$

Проекция вектора a на \mathbb{R}_+^m сводится к поэлементному вычислению неотрицательной части: a^+ . Вектор ∇_t является субградиентом функции d_t . Величина шага $\eta_{t,i}$ может выбираться отдельно для каждой координаты. Далее предполагается, что векторная последовательность шагов η_t является поэлементно невозрастающей:

$$\eta_{t+1,i} \leq \eta_{t,i}.$$

Заметим, что последовательность (9) строится на основе информации о разности между суммарным спросом $g_t(\tilde{x}_t(\lambda_t))$, соответствующем выявленным предпочтениям, и предложением b_t .

Основной результат сформулирован в теореме 1, которой мы предпошлим несколько лемм.

Лемма 1. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ верно неравенство

$$\sum_{t=1}^T (\lambda_{t,i} - \lambda_i) \nabla_{t,i} \leq \frac{1}{2\eta_{T,i}} \max_{1 \leq t \leq T} (\lambda_{t,i} - \lambda_i)^2 + \sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t,i}}{2} \nabla_{t,i}^2.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$(a^+ - z)^2 \leq (a - z)^2$$

для любых $a \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda_{t+1,i} - \lambda_i)^2 - \frac{1}{2}(\lambda_{t,i} - \lambda_i)^2 &\leq \frac{1}{2}(\lambda_{t,i} - \eta_{t,i} \nabla_{t,i} - \lambda_i)^2 - \frac{1}{2}(\lambda_{t,i} - \lambda_i)^2 \\ &= -(\lambda_{t,i} - \lambda_i) \eta_{t,i} \nabla_{t,i} + \frac{1}{2} \eta_{t,i}^2 \nabla_{t,i}^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^T (\lambda_{t,i} - \lambda_i) \nabla_{t,i} &\leq \sum_{t=1}^T \frac{(\lambda_{t,i} - \lambda_i)^2}{2\eta_{t,i}} - \sum_{t=1}^T \frac{(\lambda_{t+1,i} - \lambda_i)^2}{2\eta_{t,i}} + \sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t,i}}{2} \nabla_{t,i}^2 \\
&= \frac{(\lambda_{1,i} - \lambda_i)^2}{2\eta_{1,i}} + \sum_{t=1}^{T-1} \left(\frac{(\lambda_{t+1,i} - \lambda_i)^2}{2\eta_{t+1,i}} - \frac{(\lambda_{t+1,i} - \lambda_i)^2}{2\eta_{t,i}} \right) - \frac{(\lambda_{T+1,i} - \lambda_i)^2}{2\eta_{T,i}} + \sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t,i}}{2} \nabla_{t,i}^2 \\
&\leq \frac{(\lambda_{1,i} - \lambda_i)^2}{2\eta_{1,i}} + \frac{1}{2} \max_{2 \leq t \leq T} (\lambda_{t,i} - \lambda_i)^2 \left(\frac{1}{\eta_{T,i}} - \frac{1}{\eta_{1,i}} \right) + \sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t,i}}{2} \nabla_{t,i}^2.
\end{aligned}$$

В последнем неравенстве использована монотонность последовательности η_t . Из него очевидным образом вытекает утверждение леммы. \square

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{t=1}^T f_t(x_t^*) - \sum_{t=1}^T f_t(\tilde{x}_t(\lambda_t)) \leq \sum_{t=1}^T \langle \lambda_t, \nabla_t \rangle.$$

Доказательство. Воспользуемся определением двойственной целевой функции и сильной теоремой двойственности:

$$d_t(\lambda) = f_t(\tilde{x}_t(\lambda)) + \langle \lambda, b_t - g_t(\tilde{x}_t(\lambda)) \rangle, \quad f_t(x_t^*) = d_t(\lambda_t^*).$$

Отсюда следует, что

$$f_t(x_t^*) - f_t(\tilde{x}_t(\lambda_t)) = d_t(\lambda_t^*) - d_t(\lambda_t) + \langle \lambda_t, b_t - g_t(\tilde{x}_t(\lambda_t)) \rangle \leq \langle \lambda_t, \nabla_t \rangle,$$

так как в точке λ_t^* достигается минимум функции d_t . \square

Не ограничивая общности будем считать, что $\nabla_1 \neq 0$. В противном случае $\lambda_1 = \lambda_1^*$, $\tilde{x}_1(\lambda_1) = x_1^*$ и первые слагаемые в суммах (5), (6) будут нулевыми. Поскольку в этом случае $\lambda_2 = \lambda_1$, то последовательность λ_t не сдвинется с места и будет порождать оптимальное решение $\tilde{x}_t(\lambda_t)$ прямой задачи до тех пор пока ∇_t не станет отличным от нуля.

Лемма 3. *Для метода градиентного спуска (9) с шагами типа AdaGrad (см., например, [24], гл. 4)*

$$\eta_{t,i} = \frac{\gamma_i}{\sqrt{\sum_{s=1}^t \nabla_{s,i}^2}} \tag{10}$$

справедливы оценки

$$\sum_{t=1}^T f_t(x_t^*) - \sum_{t=1}^T f_t(\tilde{x}_t(\lambda_t)) \leq \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2\gamma_i} \max_{1 \leq t \leq T} \lambda_{t,i}^2 + \gamma_i \right) \sqrt{\sum_{t=1}^T \nabla_{t,i}^2} \tag{11}$$

$$\sum_{t=1}^T (g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda_t)) - b_{t,i}) \leq \frac{\lambda_{T+1,i}}{\gamma_i} \sqrt{\sum_{t=1}^{T+1} \nabla_{t,i}^2}. \tag{12}$$

Доказательство. Как известно, для любых чисел $a_1 > 0, a_2 \geq 0, \dots, a_T \geq 0$ справедливо неравенство [25], лемма 3.5,

$$\sum_{t=1}^T \frac{a_t}{\sqrt{\sum_{s=1}^t a_s}} \leq 2 \sqrt{\sum_{t=1}^T a_t}.$$

Следовательно,

$$\sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t,i}}{2} \nabla_{t,i}^2 = \frac{\gamma_i}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\nabla_{t,i}^2}{\sqrt{\sum_{k=1}^t \nabla_{k,i}^2}} \leq \gamma_i \sqrt{\sum_{t=1}^T \nabla_{t,i}^2}. \quad (13)$$

Чтобы получить неравенство (11), воспользуемся леммами 2 и 1 (с $\lambda = 0$):

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T f_t(x_t^*) - \sum_{t=1}^T f_t(\tilde{x}_t(\lambda_t)) &\leq \sum_{t=1}^T \langle \lambda_t, \nabla_t \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2\eta_{T,i}} \max_{1 \leq t \leq T} \lambda_{t,i}^2 + \sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t,i}}{2} \nabla_{t,i}^2 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2\gamma_i} \max_{1 \leq t \leq T} \lambda_{t,i}^2 + \gamma_i \right) \sqrt{\sum_{t=1}^T \nabla_{t,i}^2}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использована оценка (13) и определение $\eta_{T,i}$.

Далее, поскольку

$$\lambda_{t+1,i} \geq \lambda_{t,i} - \eta_{t,i} \nabla_{t,i},$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda_t)) - b_{t,i}) &= - \sum_{t=1}^T \nabla_{t,i} \leq \sum_{t=1}^T \left(\frac{\lambda_{t+1,i}}{\eta_{t,i}} - \frac{\lambda_{t,i}}{\eta_{t,i}} \right) \\ &\leq \sum_{t=1}^T \left(\frac{\lambda_{t+1,i}}{\eta_{t+1,i}} - \frac{\lambda_{t,i}}{\eta_{t,i}} \right) \leq \frac{\lambda_{T+1,i}}{\eta_{T+1,i}}, \end{aligned}$$

что соответствует (12). □

Чтобы получить из леммы 3 оценки сожаления и суммарной невязки в ограничениях, нужно оценить λ_t . В следующей лемме установлена ограниченность последовательности λ_t при дополнительных предположениях.

Лемма 4. Пусть выполнены условия

$$g_{t,i}(x) \geq 0, \quad x \in B, \quad (14)$$

$$b_{t,i} \geq \underline{b}_i > 0. \quad (15)$$

Тогда если неравенство

$$0 \leq \lambda_{t,i} \leq C_i + \eta_{1,i} \bar{g}_i, \quad C_i = \frac{\bar{f}}{\underline{b}_i}$$

верно при $t = 0$, то оно верно при всех t . В частности, при $\lambda_1 = 0$ последовательность λ_t равномерно по t ограничена.

Доказательство. Пусть $\lambda_{t,i} \leq C_i + \eta_{1,i}\bar{g}_i$. Если $\lambda_{t,i} \leq C_i$, то либо

$$\lambda_{t,i} + \eta_{t,i}(g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda_t)) - b_{t,i}) \leq 0,$$

и тогда $\lambda_{t+1,i} = 0$, либо

$$\lambda_{t+1,i} = \lambda_{t,i} + \eta_{t,i}(g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda_t)) - b_{t,i}) \leq C_i + \eta_{1,i}\bar{g}_i$$

в силу (8), (15). Если $C_i < \lambda_{t,i} \leq C_i + \eta_{1,i}\bar{g}_i$, то применяя последовательно условие (7), определение $\tilde{x}_t(\lambda)$, условия (8) и (14), находим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup_{x \in B} (f_t(x) - \langle \lambda, g_t(x) \rangle) = f_t(\tilde{x}_t(\lambda)) - \langle \lambda, g_t(\tilde{x}_t(\lambda)) \rangle \\ &\leq \bar{f} - \lambda_{t,i} g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda)) \leq C_i \bar{b}_i - C_i g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda)). \end{aligned}$$

С учётом (15) отсюда следует, что $\nabla_{t,i} = b_{t,i} - g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda_t)) \geq \bar{b}_i - g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda_t)) \geq 0$, и значит

$$\lambda_{t+1,i} \leq \lambda_{t,i} \leq C_i + \eta_{1,i}\bar{g}_i.$$

Лемма доказана. \square

Условие (14) достаточно естественно, если интерпретировать $g_{t,i}$ как количество запрашиваемых ресурсов. Условие (15) можно рассматривать как равномерное условие Слейтера. В целом, смысл приведённого доказательства состоит в том, что при достаточно больших ценах ресурсов спрос не превосходит предложения, что приводит к понижению цен.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (14), (15). Тогда для метода градиентного спуска (9) шагами (10) и $\lambda_1 = 0$ справедливы оценки

$$\frac{1}{T} \left(\sum_{t=1}^T f_t(x_t^*) - \sum_{t=1}^T f_t(\tilde{x}_t(\lambda_t)) \right) \leq \frac{A}{\sqrt{T}}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda_t)) - b_{t,i}) \leq \frac{A_i}{\sqrt{T}}, \quad (17)$$

$$A = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2\gamma_i} \left(\frac{\bar{f}}{\bar{b}_i} + \eta_{1,i}\bar{g}_i \right)^2 + \gamma_i \right) |\bar{b}_i + \bar{g}_i|, \quad A_i = \frac{\sqrt{2}}{\gamma_i} \left(\frac{\bar{f}}{\bar{b}_i} + \eta_{1,i}\bar{g}_i \right) |\bar{b}_i + \bar{g}_i|.$$

Доказательство. Доказательство сразу следует из оценок леммы 3 с учётом установленного в лемме 4 неравенства

$$\lambda_{t,i} \leq \frac{\bar{f}}{\bar{b}_i} + \eta_{1,i}\bar{g}_i$$

и очевидных неравенств

$$|\nabla_{t,i}| = |b_{t,i} - g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda_t))| \leq |\bar{b}_i + \bar{g}_i|, \quad \sqrt{T+1} \leq \sqrt{2}\sqrt{T}.$$

Теорема доказана. \square

Оценки, аналогичные (16), (17), установлены в работе [4] для задачи о регулировании транспортных потоков с помощью назначения платы за проезд по дорогам. Рассмотрение в указанной работе ведётся в рамках задач линейного программирования, а в предложенном алгоритме градиентного спуска использован постоянный шаг. Тем не менее, постановка задачи и методы близки к тем, которые использованы в настоящей работе.

3. ЗАДАЧА С НЕЗАВИСИМЫМИ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ДАННЫМИ

Пусть $f_t, g_{t,i}, b_{t,i}$ имеют вид

$$f_{t,j}(x_j) = f_j(x_j, \xi_t), \quad g_{t,ij}(x_j) = g_{ij}(x_j, \xi_t), \quad b_{t,i} = b_i(\xi_t), \quad (18)$$

где $-f_j, g_{ij} : B_j \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклы по первому аргументу и измеримы по второму, $b_i : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ — измеримы, и ξ_t — независимые одинаково распределённые случайные величины со значениями в \mathbb{R}^q . Условия (7), (8) по-прежнему считаются выполненными.

Пусть $\sigma(\xi_t)$ — σ -алгебра, порождённая случайной величиной ξ_t , и $L^0(\sigma(\xi_t), B)$ — множество $\sigma(\xi_t)$ -измеримых случайных величин со значениями в B . Рассмотрим кооперативную оптимизационную задачу о распределении ресурсов, в которой агентам известны значения случайных величин ξ_t , и ресурсное ограничение понимается в среднем:

$$\mathfrak{F}(x) := \mathbb{E}f_t(x) = \mathbb{E}f(x; \xi_t) = \mathbb{E} \sum_{j=1}^n f_j(x_j; \xi_t) \rightarrow \max_{x \in \mathfrak{S}}, \quad (19)$$

$$\mathfrak{S} : \mathbb{E}(g_{t,i} - b_{t,i}) = \mathbb{E}(g_i(x, \xi_t) - b_i(\xi_t)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in L^0(\sigma(\xi_t), B). \quad (20)$$

Оптимальное решение задачи (19), (20) обозначим через $x_t^* \in L^0(\sigma(\xi_t), B)$. Чтобы доказать его существование рассмотрим случайные оптимизационные задачи

$$f(x, \xi_t) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j; \xi_t) \rightarrow \max_{x \in S_t}, \quad (21)$$

$$S_t : g_i(x, \xi_t) - b_i(\xi_t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad x \in B \quad (22)$$

и воспользуемся известными результатами об измеримых многозначных отображениях [26], гл. 18. Многозначные отображения $\omega \mapsto S_t(\omega)$ являются компактнозначными и измеримыми относительно $\sigma(\xi_t)$ [27], теорема 14.36. По теореме об измеримом максимуме [26], теорема 18.19, существует измеримая функция x_t^* со значениями в S_t такая, что $x_t^*(\omega)$ является оптимальным решением задачи (21), (22) при каждом $\omega \in \Omega$, где Ω — множество элементарных исходов. Легко видеть, что функция x_t^* является решением задачи (19), (20). Кроме того, поскольку ξ_t одинаково распределены, то можно считать, что x_t^* не зависит от t .

Будем разыскивать вектор $\bar{\lambda}_T$ цен ресурсов (а не последовательность цен λ_t), стимулирующий приближенно оптимальное решение задачи (19), (20). Наиболее прямой путь состоит в том, чтобы построить $\bar{\lambda}_T$ исходя из последовательности (9) с помощью процедуры рандомизации. С этой целью рассмотрим равномерно распределённую на $\{1, \dots, T\}$ случайную величину τ , не зависящую от $(\xi_t)_{t=1}^T$, и положим

$$\lambda_\tau = \sum_{s=1}^T \lambda_s I_{\{\tau=s\}}, \quad I_{\{\tau=t\}} = \begin{cases} 1, & \tau = t, \\ 0, & \tau \neq t. \end{cases}$$

Теорема 2. В условиях теоремы 1 для функций вида (18) справедливы неравенства

$$\mathbb{E}f_T(x_T^*) - \mathbb{E}f_T(\tilde{x}_T(\lambda_\tau)) \leq \frac{A}{\sqrt{T}}, \quad (23)$$

$$\mathbb{E}(g_{T,i}(\tilde{x}_T(\lambda_\tau)) - b_{T,i}) \leq \frac{A_i}{\sqrt{T}}, \quad (24)$$

где A, A_i определены в теореме 1.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(\tilde{x}_T(\lambda_\tau), \xi_T) &= \mathbb{E} \sum_{t=1}^T I_{\{\tau=t\}} f(\tilde{x}_T(\lambda_t), \xi_T) \stackrel{(a)}{=} \sum_{t=1}^T \mathbb{P}(\tau = t) \mathbb{E}f(\tilde{x}_T(\lambda_t), \xi_T) \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}f(\tilde{x}_t(\lambda_t), \xi_t). \end{aligned}$$

В равенстве (а) использована независимость τ и $(\xi_t)_{t=1}^T$, а в равенстве (б) — тот факт, что при фиксированном λ_t случайные величины $(\tilde{x}_t(\lambda_t), \xi_t)$ и $(\tilde{x}_T(\lambda_t), \xi_T)$ одинаково распределены. Учитывая также, что

$$\mathbb{E}f(\tilde{x}_T^*, \xi_T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}f(\tilde{x}_t^*, \xi_t),$$

из оценки (16) теоремы 1 получаем оценку (23). Оценка (24) выводится аналогичным образом из (17). \square

В машинном обучении величины вида (23) называются ошибками оценивания [28], гл. 5. Средние невязки (24) имеют аналогичный смысл.

Заметим, что рандомизация, фактически, означает усреднение прямой последовательности $\tilde{x}_t(\lambda_t)$ при сохранении реакций агентов как выявленных предпочтений. С помощью детерминированного усреднения прямой последовательности в работе [29] также получены оценки $O(T^{-1/2})$ для детерминированной задачи. Однако, при таком усреднении действия агентов не являются прямой реакцией на цены.

Вычисление λ_τ требует хранения в памяти всей последовательности $(\lambda_t)_{t=1}^T \in \mathbb{R}^{mT}$. Рассмотрим алгоритмы, не предъявляющие таких требований к памяти и использующие временное усреднение последовательности λ_t , которое может быть вычислено по рекуррентной формуле. Для их обоснования нам потребуются оценки ошибки по функции и невязки в ограничениях в прямой задаче через ошибку по функции в двойственной задаче. Такие оценки приведены в лемме 7 после некоторой предварительной работы.

Для задачи (19), (20) составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \mathbb{E}(f(x; \xi_t) + \langle \lambda, g(x, \xi_t) - b_t \rangle), \quad (x, \lambda) \in L^0(\sigma(\xi_t), B) \times \mathbb{R}_+^m$$

и двойственную целевую функцию:

$$D(\lambda) = \sup_{x \in L^0(\sigma(\xi_t), B)} \mathcal{L}(x, \lambda) = \mathbb{E}d_t(\lambda), \quad (25)$$

где d_t является мгновенной двойственной целевой функцией, соответствующей случайной реализации прямой задачи:

$$d_t(\lambda) = d(\lambda, \xi_t) := \langle b_t, \lambda \rangle + \sum_{j=1}^n \sup_{x_j \in B_j} (f_{t,j}(x_j) - \langle g_{t,j}(x), \lambda \rangle).$$

Второе равенство (25) вытекает из принципа перестановки минимизации и математического ожидания [27], теорема 14.60, [30], теорема 7.80.

Дополнительно к уже наложенным условиям потребуем, чтобы функции $f_{t,j}$ были μ_j -сильно вогнутыми на B_j , т. е. чтобы функции $f_{t,j} + \frac{\mu_j}{2} \|\cdot\|^2$ были вогнутыми. Здесь и всюду далее $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ — стандартная евклидова норма. Напомним, что дифференцируемая функция $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ называется β -гладкой, если

$$\|\nabla h(x) - \nabla h(y)\| \leq \beta \|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Лемма 5. Пусть $f_{t,j}$ являются μ_j -сильно вогнутыми, а $g_{t,i}$ удовлетворяют условию Липшица

$$|g_{t,i}(x) - g_{t,i}(y)| \leq L_i \|x - y\|, \quad L_i > 0.$$

Тогда мгновенные двойственные целевые функции d_t являются β -гладкими с

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^m L_i^2}{\min_{1 \leq j \leq n} \mu_j}.$$

Доказательство. Запишем мгновенную двойственную целевую функцию в виде

$$d_t(\lambda) = \langle b, \lambda \rangle + \sup_{x \in B} \left(f_t(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_{t,i}(x) \right).$$

Очевидно, что функция $f_t(x) = f_{t,1}(x_1) + \dots + f_{t,n}(x_n)$ является μ -сильно вогнутой с $\mu = \min_{1 \leq j \leq n} \mu_j$. Из сильной вогнутости $f_{t,j}$ вытекает единственность точки максимума (4). Следовательно, субградиент функции d_t состоит из единственной точки $b_t - g_t(\tilde{x}_t(\lambda))$, и функция d_t дифференцируема (на \mathbb{R}^m) [23], теорема 3.33.

Положим для краткости $z_1 = \tilde{x}_t(\lambda_1)$, $z_2 = \tilde{x}_t(\lambda_2)$. Согласно критерию оптимальности для элементарной задачи (21), (22) при некоторых $\nabla f_t(z_k) \in -\partial(-f_t(z_k))$, $\nabla g_{t,i}(z_k) \in \partial g_{t,i}(z_k)$ имеют место неравенства

$$\langle \nabla f_t(z_1) - \sum_{i=1}^m \lambda_{1,i} \nabla g_{t,i}(z_1), z_2 - z_1 \rangle \leq 0, \quad \langle \nabla f_t(z_2) - \sum_{i=1}^m \lambda_{2,i} \nabla g_{t,i}(z_2), z_1 - z_2 \rangle \leq 0.$$

Сложим эти неравенства

$$\langle \nabla f_t(z_1) - \nabla f_t(z_2), z_2 - z_1 \rangle - \langle \sum_{i=1}^m \lambda_{1,i} \nabla g_{t,i}(z_1) - \sum_{i=1}^m \lambda_{2,i} \nabla g_{t,i}(z_2), z_2 - z_1 \rangle \leq 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \mu \|z_2 - z_1\|^2 &\leq \langle \nabla f_t(z_1) - \nabla f_t(z_2), z_2 - z_1 \rangle \\ &\leq \langle \sum_{i=1}^m \lambda_{1,i} \nabla g_{t,i}(z_1) - \sum_{i=1}^m \lambda_{2,i} \nabla g_{t,i}(z_2), z_2 - z_1 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_{1,i} \langle \nabla g_{t,i}(z_1) - \nabla g_{t,i}(z_2), z_2 - z_1 \rangle + \sum_{i=1}^m (\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \langle \nabla g_{t,i}(z_2), z_2 - z_1 \rangle \\ &\leq \sum_{i=1}^m (\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \langle \nabla g_{t,i}(z_2), z_2 - z_1 \rangle, \end{aligned}$$

где первое неравенство следует из сильной выпуклости $-f_t$ [23], теорема 5.24, а последнее — из выпуклости $g_{t,i}$. Используя оценку норм субградиентов липшицевых функций через константу Липшица [23], теорема 3.61, из последнего неравенства выводим, что

$$\mu \|z_2 - z_1\|^2 \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}| L_i \|z_2 - z_1\| \leq L \|\lambda_1 - \lambda_2\| \|z_2 - z_1\|, \quad L = \sqrt{\sum_{i=1}^m L_i^2}.$$

Утверждение леммы 5 вытекает из данного неравенства и липшицевости $g_{t,i}$:

$$\begin{aligned} \|\nabla d_t(\lambda_2) - \nabla d_t(\lambda_1)\| &= \|g_t(z_2) - g_t(z_1)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (g_{t,i}(z_2) - g_{t,i}(z_1))^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^m L_i^2 \|z_2 - z_1\|^2} = L \|z_2 - z_1\| \leq \frac{L^2}{\mu} \|\lambda_2 - \lambda_1\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Лемма 6. В условиях леммы 5 решение λ^* задачи

$$D(\lambda) \rightarrow \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \quad (26)$$

существует и удовлетворяет неравенству

$$\mathbb{E} \langle \nabla d_t(\lambda^*), \lambda - \lambda^* \rangle \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^m. \quad (27)$$

Доказательство. Поскольку

$$D(\lambda) = \mathbb{E} d_t(\lambda) \geq \mathcal{L}(0, \lambda) = \langle \mathbb{E} b_t, \lambda \rangle \rightarrow +\infty, \quad \|\lambda\| \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^m,$$

то существует точка глобального минимума λ^* непрерывной функции D на \mathbb{R}_+^m . Функция D дифференцируема и справедлива формула перестановки дифференцирования по λ и операции математического ожидания [31]:

$$\nabla D(\lambda) = \mathbb{E} \nabla d_t(\lambda).$$

Неравенство (27) равносильно критерию оптимальности λ^* :

$$\langle \nabla D(\lambda^*), \lambda - \lambda^* \rangle = \langle \mathbb{E} \nabla d_t(\lambda^*), \lambda - \lambda^* \rangle \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^d.$$

Лемма доказана. \square

Лемма 7. В условиях леммы 5 для любого допустимого решения x_t задачи (19), (20) справедливы неравенства

$$\mathbb{E} f_t(x_t) - \mathbb{E} f_t(\tilde{x}_t(\lambda)) \leq \sqrt{2\beta} \|\lambda\| \sqrt{D(\lambda) - D(\lambda^*)}, \quad (28)$$

$$\mathbb{E} (g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda)) - b_{t,i}) \leq \sqrt{2\beta} \sqrt{D(\lambda) - D(\lambda^*)}. \quad (29)$$

В частности, $\tilde{x}_t(\lambda^*)$ является оптимальным решением указанной задачи.

Доказательство. Неравенство

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(x_t) &= \mathbb{E} f_t(x_t) \leq \mathbb{E} (f(x_t; \xi_t) + \langle b(\xi_t) - g(x_t, \xi_t), \lambda \rangle) \\ &\leq \mathbb{E} \sup_{x \in B} (f(x; \xi_t) + \langle b(\xi_t) - g(x, \xi_t), \lambda \rangle) = \mathbb{E} d_t(\lambda) = D(\lambda) \end{aligned}$$

соответствует слабой теореме двойственности. С другой стороны, по определению двойственной целевой функции,

$$d_t(\lambda) = f_t(\tilde{x}_t(\lambda)) + \langle \nabla d_t(\lambda), \lambda \rangle,$$

так как $\nabla d_t(\lambda) = b_t - g_t(\tilde{x}_t(\lambda))$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f_t(x_t) - \mathbb{E}f_t(\tilde{x}_t(\lambda)) &\leq \mathbb{E}(d_t(\lambda^*) - d_t(\lambda)) + \mathbb{E}\langle \nabla d_t(\lambda), \lambda \rangle \\ &\leq \mathbb{E}\langle \nabla d_t(\lambda^*), \lambda^* - \lambda \rangle + \mathbb{E}\langle \nabla d_t(\lambda), \lambda \rangle \\ &\leq \mathbb{E}\langle \nabla d_t(\lambda) - \nabla d_t(\lambda^*), \lambda \rangle \leq \|\lambda\| \mathbb{E}\|\nabla d_t(\lambda) - \nabla d_t(\lambda^*)\|, \end{aligned} \quad (30)$$

так как $\mathbb{E}\langle d_t(\lambda^*), \lambda^* \rangle \leq 0$ по лемме 6.

По лемме 5 выпуклая функция d_t является β -гладкой. Применим к ней известное неравенство [23], теорема 5.8(iii):

$$d_t(\lambda) \geq d_t(\lambda^*) + \langle \nabla d_t(\lambda^*), \lambda - \lambda^* \rangle + \frac{1}{2\beta} \|\nabla d_t(\lambda) - \nabla d_t(\lambda^*)\|^2.$$

Из данного неравенства следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\nabla d_t(\lambda) - \nabla d_t(\lambda^*)\| &\leq \sqrt{2\beta \mathbb{E} \sqrt{d_t(\lambda) - d_t(\lambda^*)} - \langle \nabla d_t(\lambda^*), \lambda - \lambda^* \rangle} \\ &\leq \sqrt{2\beta} \sqrt{\mathbb{E}(d_t(\lambda) - d_t(\lambda^*))} \end{aligned} \quad (31)$$

в силу неравенства Иенсена, так как $\mathbb{E}\langle \nabla d_t(\lambda^*), \lambda - \lambda^* \rangle \geq 0$ по лемме 6. Из неравенств (30), (31) вытекает (28):

$$\mathbb{E}f_t(x_t) - \mathbb{E}f_t(\tilde{x}_t(\lambda)) \leq \sqrt{2\beta} \|\lambda\| \sqrt{\mathbb{E}(d_t(\lambda) - d_t(\lambda^*))}.$$

Далее, точка $\tilde{x}_t(\lambda^*)$ удовлетворяет ограничениям (20):

$$\mathbb{E}(g_t(\tilde{x}_t(\lambda^*)) - b_t) = -\mathbb{E}\nabla d_t(\lambda^*) \leq 0.$$

Последнее неравенство вытекает из (27). С учётом этого факта неравенство (29) выводится следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda)) - b_{t,i}) &\leq \mathbb{E}(g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda)) - b_{t,i}) - \mathbb{E}(g_{t,i}(\tilde{x}_t(\lambda^*)) - b_{t,i}) \\ &\leq \mathbb{E}\|\nabla d_t(\lambda) - \nabla d_t(\lambda^*)\| \leq \sqrt{2\beta} \sqrt{\mathbb{E}(d_t(\lambda^*) - d_t(\lambda))}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 8. Для последовательности (9) с шагом (10) справедлива оценка

$$R_T(\lambda) := \sum_{t=1}^T d_t(\lambda_t) - \sum_{t=1}^T d_t(\lambda) \leq \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2\gamma_i} \max_{1 \leq t \leq T} (\lambda_{t,i} - \lambda_i)^2 + \gamma_i \right) \sqrt{\sum_{t=1}^T \nabla_{t,i}^2}.$$

Доказательство. В силу выпуклости d_t

$$d_t(\lambda_t) - d_t(\lambda) \leq \langle \nabla d_t(\lambda_t), \lambda_t - \lambda \rangle = \sum_{i=1}^m (\lambda_{t,i} - \lambda_i) \nabla_{t,i}.$$

Используя лемму 1, неравенство (13) и определение $\eta_{T,i}$, находим

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (\lambda_i - \lambda_{t,i}) \nabla_{t,i} &\leq \frac{1}{2\eta_{T,i}} \max_{1 \leq t \leq T} (\lambda_{t,i} - \lambda)^2 + \sum_{t=1}^T \frac{\eta_{t,i}}{2} \nabla_{t,i}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2\gamma_i} \max_{1 \leq t \leq T} (\lambda_{t,i} - \lambda)^2 + \gamma_i \right) \sqrt{\sum_{t=1}^T \nabla_{t,i}^2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Теорема 3. Пусть выполнены условия лемм 4 и 5. Тогда для последовательности $(\lambda_t)_{t=1}^T$, построенной по методу градиентного спуска (9) с шагом (10) справедливы оценки

$$\mathbb{E}f_T(x_T^*) - \mathbb{E}f_T(\tilde{x}_T(\bar{\lambda}_T)) \leq \frac{\sqrt{2\beta}}{\sqrt{T}} \sqrt{\mathbb{E}\|\bar{\lambda}_T\|} \sqrt{\mathbb{E}R_T(\lambda^*)} = O(T^{-1/4}), \quad (32)$$

$$\mathbb{E}(g_{T,i}(\tilde{x}_T(\bar{\lambda}_T)) - b_{T,i}) \leq \frac{\sqrt{2\beta}}{\sqrt{T}} \sqrt{\mathbb{E}R_T(\lambda^*)} = O(T^{-1/4}), \quad (33)$$

где

$$\bar{\lambda}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \lambda_t.$$

Доказательство. Выражение $f_T(\tilde{x}_T(\lambda))$ является $\sigma(\xi_T)$ -измеримым. Обозначим через \mathcal{F}_t σ -алгебру, порождённую ξ_1, \dots, ξ_t . Поскольку $\bar{\lambda}_T$ является \mathcal{F}_{T-1} -измеримым, и ξ_T не зависит от \mathcal{F}_{T-1} , то

$$\mathbb{E}f_T(\tilde{x}_T(\bar{\lambda}_T)) = \mathbb{E}\mathbb{E}(f_T(\tilde{x}_T(\bar{\lambda}_T)) | \mathcal{F}_{T-1}) = \mathbb{E}\mathbb{E}\left(f_T(\tilde{x}_T(\lambda)) \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}_T}\right),$$

где в последнем равенстве использована лемма о независимости [32], лемма 2.3.4. Подставляя в (28)

$$t = T, \quad \lambda = \bar{\lambda}_T, \quad x_T = x_T^*$$

и вычисляя математическое ожидание, находим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f_T(x_T^*) - \mathbb{E}f_T(\tilde{x}_T(\bar{\lambda}_T)) &\leq \sqrt{2\beta} \mathbb{E}\left(\|\bar{\lambda}_T\| \sqrt{D(\bar{\lambda}_T) - D(\lambda^*)}\right) \\ &\leq \sqrt{2\beta} \sqrt{\mathbb{E}\|\bar{\lambda}_T\|^2} \sqrt{\mathbb{E}D(\bar{\lambda}_T) - D(\lambda^*)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичным образом, из (29), выводим, что

$$\mathbb{E}(g_{t,i}(\tilde{x}_t(\bar{\lambda}_T)) - b_{t,i}) \leq \sqrt{2\beta} \sqrt{\mathbb{E}D(\bar{\lambda}_T) - D(\lambda^*)}. \quad (35)$$

Из выпуклости D и одинаковой распределенности $d_t(\lambda^*)$ вытекает, что

$$D(\bar{\lambda}_T) \leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T D(\lambda_t), \quad D(\lambda^*) = \frac{1}{T} \mathbb{E} \sum_{t=1}^T d_t(\lambda^*).$$

Снова используя лемму о независимости, находим, что

$$D(\lambda_t) = \mathbb{E}(d_t(\lambda_t) | \mathcal{F}_{t-1}),$$

и значит

$$\mathbb{E}D(\bar{\lambda}_T) \leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}D(\lambda_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbb{E}d_t(\lambda_t).$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}D(\bar{\lambda}_T) - D(\lambda^*) \leq \frac{1}{T} \mathbb{E} \sum_{t=1}^T (d_t(\lambda_t) - d_t(\lambda^*)) = \frac{\mathbb{E}R_T(\lambda^*)}{T}, \quad (36)$$

и неравенства (32), (33) вытекают из (34), (35), (36). Тот факт, что правые части (32), (33) представляют собой величины порядка $T^{-1/4}$, вытекает из леммы 8, так как градиенты ∇_t равномерно ограничены и последовательность λ_t равномерно ограничена по лемме 4. \square

Такие же по порядку T оценки получены в задаче о распределении ресурсов в сетях связи в работе [33]. Заметим, что в теореме 3 использовано простое усреднение двойственной последовательности λ_t , полученной методом онлайн градиентного спуска. Оценки (32), (33) хуже, чем указанные в теореме 2 оценки для рандомизированного алгоритма, хотя в теореме 3 наложено дополнительное условие сильной вогнутости функций $f_{t,j}$. В связи с этим рассмотрим ускоренный алгоритм для двойственной задачи, который эффективно использует гладкость двойственных целевых функций d_t .

Дополнительно предположим, что для оптимального решения двойственной задачи (26) известна оценка $\lambda_i^* \leq R$ компонент оптимального решения λ^* . К соответствующей задаче, ограниченной на гиперкуб $\Lambda = [0, R]^m$:

$$D(\lambda) = \mathbb{E}d_t(\lambda) \rightarrow \min_{\lambda \in \Lambda}, \quad (37)$$

применим алгоритм AO-FTRL (adaptive optimistic follow the regularized leader) с усреднением [34] и шагами типа AdaGrad:

$$\lambda_{t+1} \in \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \langle c_t, \lambda \rangle + \sum_{s=1}^t r_s(\lambda) \right\}, \quad t \geq 1, \quad (38)$$

$$c_t = - \sum_{s=1}^t \alpha_s \nabla d_s(\bar{\lambda}_s) - \alpha_{t+1} \nabla_t d_t(\bar{\lambda}_t), \quad \bar{\lambda}_t = \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_t} \sum_{s=1}^t \alpha_s \lambda_s, \quad (39)$$

$$r_t(\lambda) = \gamma \sum_{i=1}^m \frac{\eta_{t,i} - \eta_{t-1,i}}{2} (\lambda_i - \lambda_{t,i})^2,$$

$$\eta_{t,j} = \sqrt{\sum_{s=1}^t \alpha_s^2 (\nabla_j d_s(\bar{\lambda}_s) - \nabla_j d_{s-1}(\bar{\lambda}_{s-1}))^2}, \quad t > 0, \quad \eta_0 = 0, \quad (40)$$

где α_t, γ — положительные числа, и $\lambda_1 \in \Lambda$ выбирается произвольным образом. Данный алгоритм относится к семейству алгоритмов следования за регуляризованным лидером [10], гл. 5, [24], гл. 7, [35]. Выражение $\sum_{s=1}^t \langle -\alpha_s \nabla d_s(\bar{\lambda}_s), \lambda \rangle$ соответствует взвешенным суммарным потерям действия λ для линейризованной функции потерь на текущей истории. Использование градиента $\nabla d_t(\bar{\lambda}_t)$ в средней точке $\bar{\lambda}_t$ приводит к стабилизации итераций. Слагаемое $\langle -\alpha_{t+1} \nabla_t d_t(\bar{\lambda}_t), \lambda \rangle$ можно считать предсказанием потерь на следующей итерации. Понятие «оптимизма» связано с надеждой на то, что это предсказание является достаточно точным. Использование предсказаний в сочетании со стабилизацией приводит при определённых условиях к ускорению алгоритма [13, 34].

Запишем формулу (38) в более явном виде:

$$\begin{aligned} \lambda_{t+1} &\in \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \left\{ \sum_{i=1}^m c_{t,i} \lambda_i + \gamma \sum_{s=1}^t \sum_{i=1}^m \frac{\eta_{s,i} - \eta_{s-1,i}}{2} (\lambda_i - \lambda_{s,i})^2 \right\} \\ &\stackrel{(a)}{=} \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i=1}^m \gamma \frac{\eta_{t,i}}{2} \left(\lambda_i^2 + \frac{2}{\gamma \eta_{t,i}} \left(c_{t,i} - \gamma \sum_{s=1}^t (\eta_{s,i} - \eta_{s-1,i}) \lambda_{i,s} \right) \lambda_i \right) \\ &\stackrel{(b)}{=} \arg \min_{\lambda \in \Lambda} \sum_{i=1}^d \gamma \frac{\eta_{t,i}}{2} \left(\lambda_i + \frac{c_{t,i}}{\gamma \eta_{t,i}} - \sum_{s=1}^t \frac{\eta_{s,i} - \eta_{s-1,i}}{\eta_{t,i}} \lambda_{i,s} \right)^2. \end{aligned} \quad (41)$$

В равенстве (а) после раскрытия скобок отброшены слагаемые, не содержащие λ . В равенстве (б) выделен полный квадрат и так же отброшены слагаемые, не содержащие λ . Фактически, оптимизация в (41) проводится по каждой компоненте отдельно:

$$\lambda_{t+1,i} \in \arg \min_{\lambda_i \in [0,R]} \left(\lambda_i + \frac{c_{t,i}}{\gamma \eta_{t,i}} - \sum_{s=1}^t \frac{\eta_{s,i} - \eta_{s-1,i}}{\eta_{t,i}} \lambda_{i,s} \right)^2.$$

Таким образом,

$$\lambda_{t+1,i} = \left(-\frac{c_{t,i}}{\gamma \eta_{t,i}} + \sum_{s=1}^t \frac{\eta_{s,i} - \eta_{s-1,i}}{\eta_{t,i}} \lambda_{i,s} \right)^+ \wedge R, \quad (42)$$

где $a \wedge b := \min\{a, b\}$.

Положим

$$\sigma_t = \nabla d_t(\bar{\lambda}_t) - \nabla D(\bar{\lambda}_t).$$

Следующий результат является непосредственно вытекает из теоремы 5 работы [34] и леммы 7.

Теорема 4. Пусть $\lambda_i^* \leq R$, $\mathbf{E}\sigma_{t,j}^2 \leq \bar{\sigma}_j^2$ и выполнены условия леммы 5. Тогда для алгоритма (42), (39), (40) с $\alpha_t = t$, $\gamma = 2/R$ справедливы оценки

$$D(\lambda^*) - \mathbf{E}D(\bar{\lambda}_T) \leq \nu_T = C \left(\frac{\beta m R^2 + \Delta R}{T^2} + \frac{m R \max_j \bar{\sigma}_j}{\sqrt{T}} \right), \quad (43)$$

$$\mathbf{E}f_T(\tilde{x}_T(\bar{\lambda}_T)) - \mathbf{E}f_T(x_T^*) \leq \sqrt{2\beta R} \sqrt{m} \sqrt{\nu_T}, \quad (44)$$

$$\mathbf{E}(g_{T,i}(\tilde{x}_T(\bar{\lambda}_T)) - b_{T,i}) \leq \sqrt{2\beta} \sqrt{\nu_T}, \quad (45)$$

где $\Delta = \sum_{i=1}^m |\nabla_j D(\lambda_1)|$, и C — абсолютная константа.

Доказательство. Оценка (43) представляет собой утверждение теоремы 5(ii) работы [34], применённое к задаче (37). С учётом (43) неравенства (44), (45) выводятся из леммы 7 совершенно аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 3. \square

При наличии шума ($\mathbf{E}\sigma_{t,j}^2 > 0$) оценки (44), (45) для прямой задачи имеют порядок $O(T^{-1/4})$, как и оценки теоремы 3. Улучшение может происходить при малом шуме. Наша гипотеза состоит в том, что по порядку T эта оценка неулучшаема, если действия агентов являются непосредственной реакцией на *нерандомизированные* цены, т. е. определяются формулой (4). Без этого условия, улучшение возможно: см., например, [36], теорема 2, где в близкой задаче также получены оценки порядка $O(T^{-1/2})$ для метода двойственного стохастического градиентного спуска со специальным усреднением последовательности в прямой задаче. Аналогичная оценка получена выше в теореме 2 с помощью рандомизации цен.

В детерминированном случае оценка для двойственной задачи (43) имеет порядок $O(T^{-2})$, как и для быстрого алгоритма Нестерова [37]. В общем случае эта оценка неулучшаема в классе градиентных методов [38], теорема 2.1.7. В прямой задаче из (43), (44), (45) получаем оценки

$$f(\tilde{x}_T(\bar{\lambda}_T)) - f(x_T^*) = O(T^{-1}), \quad g_i(\tilde{x}_T(\bar{\lambda}_T)) - b_i = O(T^{-1})$$

такого же порядка, как и в работе [5], где был использован метод [37] для двойственной задачи. В отличие от данного метода, использованный выше алгоритм [34] не требует информации о константе гладкости β (как и, например, алгоритм [39]).

Было бы интересно установить ограниченность итераций вида (42) без проекции на гиперкуб Λ , т. е. без операции $\wedge R$. Это позволило бы избежать предположения, что $\lambda_i^* \leq R$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен рецензентам за полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра Южного федерального университета, соглашение Минобрнауки РФ 075-02-2024-1427. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bertsekas D. P. Nonlinear Programming. Belmont: Athena Scientific, 2016.
2. Rockafellar R. T. Problem decomposition in block-separable convex optimization: Ideas old and new // J. Nonlinear Convex Anal. 2018. V. 19, N 9. P. 1459–1474.
3. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988.
4. Jalota D., Gopalakrishnan K., Azizan N., Johari R., Pavone M. Online learning for traffic routing under unknown preferences // Proc. 26th Int. Conf. Artif. Intell. Stat. 2023. V. 206. P. 3210–3229.
5. Beck A., Nedić A., Ozdaglar A., Teboulle M. An $O(1/k)$ gradient method for network resource allocation problems // IEEE Trans. Control. Netw. Syst. 2014. V. 1, N 1. P. 64–73; DOI: 10.1109/TCNS.2014.2309751
6. Воронцова Е. А., Гасников А. В., Иванова А. С., Нурминский Е. А. Поиск равновесия по Вальрасу и централизованная распределённая оптимизация с точки зрения современных численных методов выпуклой оптимизации на примере задачи распределения ресурсов // Сиб. журн. вычисл. матем. 2019. V. 22, № 4. С. 415–436; DOI: 10.1134/S1995423919040037
7. Dengl R. Smart grid and demand side management // Handbook of real-time computing. 2022. P. 681–703; DOI: 10.1007/978-981-287-251-7_43
8. Mahdavi M., Jin R., Yang T. Trading regret for efficiency: online convex optimization with long term constraints // J. Mach. Learn. Res. 2012. V. 13, N 1. P. 2503–2528.
9. Zinkevich M. Online convex programming and generalized infinitesimal gradient ascent // Proc. Twentieth Int. Conf. Mach. Learn. 2003. P. 928–936.
10. Hazan E. Introduction to online convex optimization. Cambridge—Massachusetts: MIT Press, 2022.
11. Cesa-Bianchi N., Conconi A., Gentile C. On the generalization ability of on-line learning algorithms // IEEE Trans. Inf. Theory. 2004. V. 50, N 9. P. 2050–2057; DOI: 10.1109/TIT.2004.833339
12. Shalev-Shwartz S. Online learning and online convex optimization // Found. Trends Mach. Learn. 2012. V. 4, N 2. P. 107–194; DOI: 10.1561/22000000018
13. Cutkosky A. Anytime online-to-batch, optimism and acceleration // Proc. 36th Int. Conf. Mach. Learn. 2019. V. 97. P. 1446–1454.
14. Chen T., Ling Q., Giannakis G. B. An online convex optimization approach to proactive network resource allocation // IEEE Trans. Signal Process. 2017. V. 65, N 24. P. 6350–6364; DOI: 10.1109/TSP.2017.2750109
15. Yu H., Neely M. J. A low complexity algorithm with $O(\sqrt{T})$ regret and $O(1)$ constraint violations for online convex optimization with long term constraints // J. Mach. Learn. Res. 2020. V. 21, N 1. P. 1–24.
16. Yi X., Li X., Yang T., Xie L., Johansson K. Regret and cumulative constraint violation analysis for online convex optimization with long term constraints // Proc. 38th Int. Conf. Mach. Learn. 2021. V 139, P. 11998–12008.

17. *Jalota D., Sun H., Azizan N.* Online learning for equilibrium pricing in markets under incomplete information // arXiv. 2023; DOI: 10.48550/arXiv.2303.11522
18. *Roth A., Ullman J., Wu Z. S.* Watch and learn: optimizing from revealed preferences feedback // Proc. forty-eighth Annual ACM Symp. Theory Comput. 2016. P. 949–962.
19. *Ji Z., Mehta R., Telgarsky M.* Social welfare and profit maximization from revealed preferences // Lect. Notes Comput. Sci. 2018. V. 11316. P. 264–281; DOI: 10.1007/978-3-030-04612-5_18
20. *Roth A., Slivkins A., Ullman J., Wu Z. S.* Multidimensional dynamic pricing for welfare maximization // ACM Trans. Econ. Comput. 2020. V. 8, N 1. P.1–35; DOI: 10.1145/3381527
21. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
22. *Bertsekas D. P., Nedic A., Ozdaglar A. E.* Convex analysis and optimization. Belmont: Athena Scientific, 2003.
23. *Beck A.* First-order methods in optimization. Philadelphia: SIAM, 2017; DOI: 10.1137/1.9781611974997
24. *Orabona F.* A Modern Introduction to Online Learning // arXiv. 2019; DOI: 10.48550/arXiv.1912.13213
25. *Auer P., Cesa-Bianchi N., Gentile C.* Adaptive and self-confident on-line learning algorithms // J. Comput. Syst. Sci. 2002. V. 64, N 1. P. 48–75; DOI: 10.1006/jcss.2001.1795
26. *Aliprantis C. D., Border K. C.* Infinite dimensional analysis: a hitchhiker’s guide. Berlin: Springer, 2006; DOI: 10.1007/3-540-29587-9
27. *Rockafellar R. T., Wets R. J.-B.* Variational analysis. Berlin: Springer, 2009.
28. *Шалев-Шварц Ш., Бен-Давид Ш.* Идеи машинного обучения: от теории к алгоритмам. М.: ДМК Пресс, 2019.
29. *Nesterov Y., Shikhman V.* Dual subgradient method with averaging for optimal resource allocation // Eur. J. Oper. Res. 2018. V. 270, N 3. P. 907–916; DOI: 10.1016/j.ejor.2017.09.043
30. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on stochastic programming: modeling and theory. Philadelphia: SIAM, 2009; DOI: 10.1137/1.9780898718751
31. *Bertsekas D.P.* Stochastic optimization problems with nondifferentiable cost functionals // J. Optim. Theory Appl. 1973. V. 12, N 2. P. 218–231; DOI: 10.1007/bf00934819
32. *Shreve S. E.* Stochastic calculus for finance II, continuous-time models. N. Y.: Springer, 2004.
33. *Рохлин Д. Б.* Распределение ресурсов в сетях связи с большим числом пользователей: двойственный стохастический градиентный метод // Теория вероятн. и её примен. 2021. Т. 66, № 1, P. 129–148; DOI: 10.1137/S0040585X97T990289
34. *Joulani P., Raj A., György A., Szepesvári C.* A simpler approach to accelerated optimization: iterative averaging meets optimism // Proc. 37th Int. Conf. Mach. Learn. 2020 V. 119. P. 4984–4993.
35. *Joulani P., György P., Szepesvári C.* A modular analysis of adaptive (non-)convex optimization: Optimism, composite objectives, variance reduction, and variational bounds // Theor. Comput. Sci. 2020. V. 808, N 2. P. 108–138; DOI: 10.1016/j.tcs.2019.11.015
36. *Воронцова Е. А., Гасников А. В., Двуреченский П. Е., Иванова А. С., Пасечнюк Д. А.* Численные методы для задачи распределения ресурсов в компьютерной сети // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61, N 2. P. 312–344; DOI: 10.31857/s0044466921020149
37. *Нестеров Ю. Е.* Метод решения задач выпуклого программирования с трудоёмкостью $O(1/k^2)$ // Доклады АН СССР. 1982. Т. 269, № 3. С. 543–547.
38. *Нестеров Ю. Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010.
39. *Nesterov Y.* Universal gradient methods for convex optimization problems // Math. Program. 2015. V. 152, N 1–2. P. 381–404.

UDC 519.86

**ON THE DUAL GRADIENT DESCENT METHOD FOR THE
RESOURCE ALLOCATION PROBLEM IN MULTIAGENT SYSTEMS**

© 2024 D. B. Rokhlin

*Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Sciences and Regional Scientific
and Educational
Mathematical Center of the Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090 Russia*

E-mail: dbrohlin@sfedu.ru

Received 13.01.2024, revised 09.03.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. We consider a sequence of block-separable convex programming problems describing the resource allocation in multiagent systems. We construct several iterative algorithms for setting the resource prices. Under various assumptions about the utility functions and resource constraints, we obtain estimates for the average deviation (regret) of the objective function from the optimal value and the constraint residuals. Here the average is understood as the expectation for independent identically distributed data and as the time average in the online optimization problem. The analysis of the problem is carried out by online optimization methods and duality theory. The algorithms considered use the information concerning the difference between the total demand and supply that is generated by agents' reactions to prices and corresponds to the constraint residuals.

Keywords: online optimization, adaptive gradient descent, duality, regret, revealed preferences.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.206

REFERENCES

1. D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming* (Athena Sci., Belmont, 2016).
2. R. T. Rockafellar, "Problem decomposition in block-separable convex optimization: Ideas old and new," *J. Nonlinear Convex Anal.* **19** (9), 1459–1474 (2018).
3. J.-P. Aubin, *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques* (Paris–New York–Barcelone, Masson, 1984; Mir, Moscow, 1988).
4. D. Jalota, K. Gopalakrishnan, N. Azizan, R. Johari, and M. Pavone, "Online learning for traffic routing under unknown preferences," *Proc. 26th Int. Conf. Artif. Intell. Stat.* (2023), **206**, 3210–3229.
5. A. Beck, A. NediBrc, A. Ozdaglar, and M. Teboulle, "An $O(1/k)$ gradient method for network resource allocation problems," *IEEE Trans. Control. Network Syst.* **1** (1), 64–73 (2014). <https://doi.org/10.1109/TCNS.2014.2309751>
6. E. A. Vorontsova, A. V. Gasnikov, A. S. Ivanova, and E. A. Nurminsky, "The Walrasian equilibrium and centralized distributed optimization in terms of modern convex optimization methods by an example of the resource allocation problem," *Numer. Anal. Appl.* **12** (4), 338–358 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1995423919040037>
7. R. Dengl, "Smart grid and demand side management," *Handbook of Real-Time Computing* (2022), 681–703. https://doi.org/10.1007/978-981-287-251-7_43
8. M. Mahdavi, R. Jin, and T. Yang, "Trading regret for efficiency: Online convex optimization with long term constraints," *J. Mach. Learn. Res.* **13** (1), 2503–2528 (2012).

9. M. Zinkevich, "Online convex programming and generalized infinitesimal gradient ascent," *Proc. Twentieth Int. Conf. Mach. Learn.* (2003), 928–936.
10. E. Hazan, *Introduction to Online Convex Optimization* (MIT Press, Cambridge, MA, 2022).
11. N. Cesa-Bianchi, A. Conconi, and C. Gentile, "On the generalization ability of on-line learning algorithms," *IEEE Trans. Inf. Theory* **50** (9), 2050–2057 (2004). <https://doi.org/10.1109/TIT.2004.833339>
12. S. Shalev-Shwartz, "Online learning and online convex optimization," *Found. Trends Mach. Learn.* **4** (2), 107–194 (2012). <https://doi.org/10.1561/22000000018>
13. A. Cutkosky, "Anytime online-to-batch, optimism and acceleration," *Proc. 36th Int. Conf. Mach. Learn.* (2019), **97**, 1446–1454.
14. T. Chen, Q. Ling, and G. B. Giannakis, "An online convex optimization approach to proactive network resource allocation," *IEEE Trans. Signal Process.* **65** (24), 6350–6364 (2017). <https://doi.org/10.1109/TSP.2017.2750109>
15. H. Yu and M. J. Neely, "A low complexity algorithm with $O(\sqrt{T})$ regret and $O(1)$ constraint violations for online convex optimization with long term constraints," *J. Mach. Learn. Res.* **21** (1), 1–24 (2020).
16. X. Yi, X. Li, T. Yang, L. Xie, and K. Johansson, "Regret and cumulative constraint violation analysis for online convex optimization with long term constraints," *Proc. 38th Int. Conf. Mach. Learn.* (2021), **139**, 11998–12008.
17. D. Jalota, H. Sun, and N. Azizan, "Online learning for equilibrium pricing in markets under incomplete information," arXiv, 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.11522>
18. A. Roth, J. Ullman, and Z. S. Wu, "Watch and learn: Optimizing from revealed preferences feedback," *Proc. Forty-Eighth Annu. ACM Symp. Theory Comput.* (2016), 949–962.
19. Z. Ji, R. Mehta, and M. Telgarsky, "Social welfare and profit maximization from revealed preferences," *Lect. Notes Comput. Sci.* **11316**, 264–281 (2018). https://doi.org/10.1007/978-3-030-04612-5_18
20. A. Roth, A. Slivkins, J. Ullman, and Z. S. Wu, "Multidimensional dynamic pricing for welfare maximization," *ACM Trans. Econ. Comput.* **8** (1), 1–35 (2020). <https://doi.org/10.1145/3381527>
21. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1970; Mir, Moscow, 1973).
22. D. P. Bertsekas, A. Nedic, and A. E. Ozdaglar, *Convex Analysis and Optimization* (Athena Sci., Belmont, 2003).
23. A. Beck, *First-Order Methods in Optimization* (SIAM, Philadelphia, 2017). <https://doi.org/10.1137/1.9781611974997>
24. F. Orabona, "A modern introduction to online learning," arXiv, 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.13213>
25. P. Auer, N. Cesa-Bianchi, and C. Gentile, "Adaptive and self-confident on-line learning algorithms," *J. Comput. Syst. Sci.* **64** (1), 48–75 (2002). <https://doi.org/10.1006/jcss.2001.1795>
26. C. D. Aliprantis and K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide* (Springer, Berlin, 2006). <https://doi.org/10.1007/3-540-29587-9>
27. R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational Analysis* (Springer, Berlin, 2009).
28. Sh. Shalev-Shwartz and Sh. Ben-David, *Understanding Machine Learning: From Theory to Algorithms* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014; DMK Press, Moscow, 2019).
29. Y. Nesterov and V. Shikhman, "Dual subgradient method with averaging for optimal resource allocation," *Eur. J. Oper. Res.* **270** (3), 907–916 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.09.043>
30. A. Shapiro, D. Dentcheva, and A. Ruszczyński, *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory* (SIAM, Philadelphia, 2009). <https://doi.org/10.1137/1.9780898718751>
31. D. P. Bertsekas, "Stochastic optimization problems with nondifferentiable cost functionals," *J. Optim. Theory Appl.* **12** (2), 218–231 (1973). <https://doi.org/10.1007/bf00934819>
32. S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models* (Springer, New York, 2004).
33. D. B. Rokhlin, "Resource allocation in communication networks with large number of users: The dual stochastic gradient method," *Theory Probab. Appl.* **66** (1), 105–120 (2021). <https://doi.org/10.1137/S0040585X97T990289>

34. P. Joulani, A. Raj, A. György, and C. Szepesvári, “A simpler approach to accelerated optimization: Iterative averaging meets optimism,” *Proc. 37th Int. Conf. Mach. Learn.* (2020), **119**, 4984–4993.
35. P. Joulani, P. György, and C. Szepesvári, “A modular analysis of adaptive (non-)convex optimization: Optimism, composite objectives, variance reduction, and variational bounds,” *Theor. Comput. Sci.* **808** (2), 108–138 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2019.11.015>
36. E. A. Vorontsova, A. V. Gasnikov, P. E. Dvurechensky, A. S. Ivanova, and D. A. Pasechnyuk, “Numerical methods for the resource allocation problem in a computer network,” *Comput. Math. Math. Phys.* **61** (2), 297–328 (2021). <https://doi.org/10.1134/S0965542521020135>
37. Yu. E. Nesterov, “A method for solving convex programming problems with complexity $O(1/k^2)$,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **269** (3), 543–547 (1982) [in Russian].
38. Yu. E. Nesterov, *Introduction to Convex Optimization* (MTsNMO, Moscow, 2010) [in Russian].
39. Y. Nesterov, “Universal gradient methods for convex optimization problems,” *Math. Program.* **152** (1–2), 381–404 (2015).

УДК 517.9

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ И ТРЁХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2024 С. И. Сенашов^a, И. Л. Савостьянова^b

*Сибирский государственный университет науки и технологий
им. М. Ф. Решетнева,
пр. Красноярский рабочий, 31, г. Красноярск 660037, Россия*

E-mails: ^asen@sibsau.ru, ^bruppa@inbox.ru

Поступила в редакцию 16.08.2022 г.; после доработки 29.02.2024 г.;
принята к публикации 03.03.2024 г.

Известно, что если система дифференциальных уравнений допускает группу непрерывных преобразований, то в ряде случаев, она может быть представлена в виде совокупности двух систем дифференциальных уравнений. Как правило, эти системы имеют меньший порядок, чем исходная система. Выше сказанное относится к линейным уравнениям теории упругости. Первая система — автоморфная, характеризуется тем, что все её решения получаются из одного решения с помощью преобразований этой группы. Вторая система — разрешающая, её решения под действием группы переходят сами в себя. Разрешающая система несёт основную информацию об исходной системе. В данной работе изучаются автоморфная и разрешающая системы двумерных и трёхмерных стационарных уравнения упругости которые являются системами дифференциальных уравнений первого порядка. Построены бесконечные серии законы сохранения для разрешающих систем уравнений и автоморфных систем. Поскольку рассматриваемые системы уравнений упругости линейны, то таких законов имеется бесконечно много. В данной работе построены бесконечные серии законов сохранения линейных по первым производным. Именно эти законы позволили решить первую краевую задачи для уравнений теории упругости в двумерном и трёхмерном случае. Решения построены в виде квадратур, которые вычисляются по границе исследуемых областей.

Ключевые слова: уравнения двумерной упругости, уравнения трёхмерной упругости, законы сохранения, решение краевых задач.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.107

ВВЕДЕНИЕ

Система уравнений линейной изотропной упругости в трехмерном случае изучалась многими авторами. Особый интерес представляет построение точных решений для трехмерных уравнений. Такие решения строили П.Ф. Папкович, Х. Нейбер, Е. Трефтц, Б.Г. Галеркин (см. [1] и ссылки из нее), Б.Д. Аннин, В.О. Бытев, С.И. Сенашов [2], Б.Д. Аннин, Н.И. Остросаблин, Р.И. Угрюмов [3], Н.И. Остросаблин [4–6], В.Ю. Прудников, Ю.А. Чиркунов [7], Н.Ф. Бельмецов, Ю.А. Чиркунов [8], Ю.Н. Радаев [9] и т.д. Линейные уравнения теории упругости с групповой точки зрения изучаются уже достаточно давно [2]. Сначала была найдена группа точечных преобразований и перечислены все инвариантные решения (см. [2] и цитируемую там литературу). Далее было выполнено групповое расслоение уравнений Ламе [5]. Хотя задача о групповом расслоении поставлена еще С. Ли и в общем виде решена Вессю в 1904 г., но решений ее для конкретных систем дифференциальных уравнений не так много. В этом смысле уравнения теории упругости составляют приятное исключение. Групповое расслоение

позволило лучше понять, почему методы комплексного переменного так широко используются в двумерной теории упругости. Это происходит потому, что разрешающая система для двумерных уравнений теории упругости есть система уравнений Коши—Римана. Для трехмерных уравнений разрешающая система — система Моисила—Тодореску. Не смотря на такое внимание к уравнениям упругости, методов решения краевых задач для тел конечных размеров в трехмерном случае практически нет. В настоящей работе строятся точные решения краевых задач теории упругости в трехмерном случае. Для этого найдены законы сохранения специального вида, которые позволяют находить решения трехмерных уравнений теории упругости в виде нескольких квадратур, которые вычисляются по границе ограниченной упругой области. Статья продолжает серию работ посвященных решению краевых задач с помощью законов сохранения, последние результаты и необходимые определения можно найти в [10]. Из недавно опубликованных по этой теме работ отметим так же статью [11], в которой автором построены законы сохранения для трехмерного уравнения эйконала и дан геометрический смысл полученных законов сохранения.

Результаты, полученные в этой статье, показывают, что законы сохранения можно эффективно использовать и для решения краевых задач для трехмерных уравнений.

1. ТРЁХМЕРНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1.1. Постановка задачи

Запишем уравнения теории упругости в статическом трёхмерном случае в декартовой системе координат x, y, z

$$\alpha_0 \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{w} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{w} = 0, \tag{1}$$

где $\bar{w} = (w^1, w^2, w^3)$ — вектор упругого перемещения, $\alpha_0 = (\lambda + 2\mu)/\mu$, λ, μ — упругие постоянные Ламе.

Для этих уравнений поставим первую краевую задачу на поверхности S ограничивающую объём V :

$$\bar{w}|_S = \bar{w}_0(x, y, z). \tag{2}$$

С помощью законов сохранения решить задачу (1)–(2).

1.2. Предварительные сведения

Известно [2], что система уравнений (1) допускает, в смысле Ли—Овсянникова, оператор вида

$$X = h_1(x, y, z)\partial_{w^1} + h_2(x, y, z)\partial_{w^2} + h_3(x, y, z)\partial_{w^3}, \tag{3}$$

где (h_1, h_2, h_3) — произвольное решение системы уравнений (1).

Продолжим оператор (3) на первые производные $p_1^1 = \frac{\partial w^1}{\partial x}$, $p_2^1 = \frac{\partial w^1}{\partial y}$, $p_3^1 = \frac{\partial w^1}{\partial z}$, ..., $p_3^3 = \frac{\partial w^3}{\partial z}$ по формулам

$$X_1 = X + \zeta_j^i \frac{\partial}{\partial p_j^i},$$

где $\zeta_j^i = -p_\beta^j D_j(h^\beta)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + p_j^k \frac{\partial}{\partial w^k}$ для краткости полагаем $x = x_1, y = x_2, z = x_3$. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Пусть h_1, h_2, h_3 — произвольные гармонические функции, тогда инварианты первого порядка (решение уравнения $X_1 I = 0$), имеют вид

$$I_1 = x, \quad I_2 = y, \quad I_3 = z, \quad I_4 = \operatorname{div} \bar{w}, \quad I_5 = \operatorname{rot} \bar{w}.$$

Назначая инварианты I_4, I_5 функциями от I_1, I_2, I_3 получим автоморфную систему [6]

$$\operatorname{div} \bar{w} = \theta(x, y, z), \quad \operatorname{rot} \bar{w} = \bar{\omega}(x, y, z) \quad (4)$$

и разрешающую систему [6]

$$\alpha_0 \operatorname{grad} \theta - \operatorname{rot} \bar{w} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{w} = 0. \quad (5)$$

Известно, что система уравнений (1) равносильна системе уравнений первого порядка (4), (5). Описанная выше процедура носит название группового расслоения.

Если в (5) положить $\alpha_0 \theta = p$, то получим известную систему уравнений Моисила—Теодореску (СМТ), которая подробно исследована в работе [8]. Там найдены законы сохранения для СМТ и с их помощью решена краевая задача. Там же указаны некоторые новые точные решения СМТ. Приведём некоторые из них, которые позволят решить задачу (1), (2).

Решениями СМТ являются следующие функции

$$\begin{aligned} g_1^0 &= (0, (x - x_0)/r_0^3, (y - y_0)/r_0^3, (z - z_0)/r_0^3), \\ g_2^0 &= ((x - x_0)/r_0^3, 0, -(z - z_0)/r_0^3, (y - y_0)/r_0^3), \\ g_3^0 &= ((y - y_0)/r_0^3, (z - z_0)/r_0^3, 0, -(x - x_0)/r_0^3), \\ g_4^0 &= ((z - z_0)/r_0^3, -(y - y_0)/r_0^3, (x - x_0)/r_0^3, 0), \end{aligned}$$

где $r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, $(x_0, y_0, z_0) \in V$.

1.3. Законы сохранения уравнений (4)

Известно, что решения системы уравнений (1) связаны с решениями системы Моисила—Теодореску [6] уравнениями (4)

$$\begin{aligned} F_1 &= -\theta + w^1_x + w^2_y + w^3_z = 0, & F_2 &= -\omega^1 + w^2_z - w^3_y = 0, \\ F_3 &= -\omega^2 + w^3_x - w^1_z = 0, & F_4 &= -\omega^3 + w^1_y - w^2_x = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь функции $\theta, \omega^1, \omega^2, \omega^3$ предполагаются известными, способ их вычисления указан в работе [8].

Определение. Законом сохранения для системы уравнений (6) назовём выражение вида

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \beta^i F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (7)$$

где A, B, C, ω_i — функции от x, y, z, w^1, w^2, w^3 , предполагается, что функции β^i не равны одновременно тождественно нулю. Выражение (A, B, C) называется сохраняющимся током. При выполнении этих условий, закон сохранения (7) будет нетривиальным.

Замечание 1. Более общее определение закона сохранения можно найти в [8, 9] и цитируемой там литературе. В данной работе законы сохранения будут пониматься согласно этому определению.

Ищем закон сохранения в виде (7)

$$\partial_x A + \partial_y B + \partial_z C = \beta^i F_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

где A, B, C, β^i — функции от x, y, z, w^1, w^2, w^3 .

Ищем решение уравнений (8) в виде

$$A = a^1 w^1 + a^2 w^2 + a^3 w^3 + a^4, \quad B = b^1 w^1 + b^2 w^2 + b^3 w^3, \quad C = c^1 w^1 + c^2 w^2 + c^3 w^3,$$

где $a^i, b^i, c^i, \beta^i, i = 1, 2, 3, 4$ — функции только от x, y, z .

Из (7) получаем

$$\begin{aligned} a_x^1 + b_y^1 + c_z^1 = 0, a_x^2 + b_y^2 + c_z^2 = 0, a_x^3 + b_y^3 + c_z^3 = 0, \\ a^1 = \beta^1, a^2 = -\beta^4, a^3 = \beta^3, \\ b^1 = \beta^4, b^2 = \beta^1, b^3 = -\beta^2, \\ c^1 = -\beta^4, c^2 = \beta^2, c^3 = \beta^1, \\ a_x^4 + b_y^4 + c_z^4 = -\beta^1\theta - \beta^2\omega_1 - \beta^3\omega_2 - \beta^4\omega_3. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\beta_x^1 + \beta_y^4 - \beta_z^3 = 0, \quad -\beta_x^4 + \beta_y^1 + \beta_z^2 = 0, \quad \beta_x^3 - \beta_y^2 + \beta_z^1 = 0. \quad (9)$$

Заметим, что уравнения (9) с точностью до обозначений совпадают с первыми тремя уравнениями СМТ, поэтому функции $g_i, i = 1, 2, 3, 4$ являются решениями системы уравнений (9).

Уравнения (8), пользуясь формулой Гаусса—Остроградского, можно записать в виде

$$\iiint_V (A_x + B_y + C_z) dx dy dz = \oiint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy = 0. \quad (10)$$

Пусть $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \varepsilon^2$ — сфера, окружающая точку.

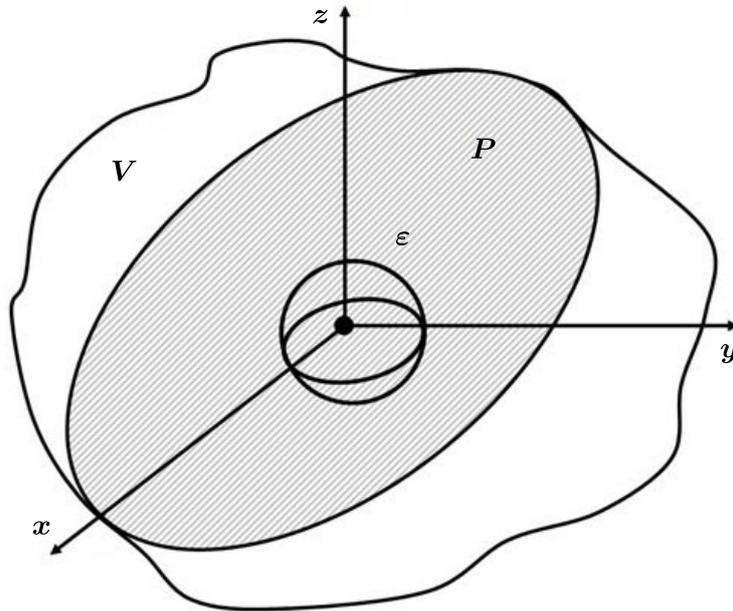


Рис. 1. Поверхность S с ε -сферой

$$\begin{aligned} \oiint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy + \iint_{P^-} A dy dz + B dz dx + C dx dy + \iint_{P^+} A dy dz + B dz dx + C dx dy + \\ + \oiint_{\varepsilon} A dy dz + B dz dx + C dx dy = 0. \end{aligned}$$

Поскольку интегралы по P^- и P^+ вычисляются по разным сторонам плоскости P , то их сумма равна нулю. В результате получаем

$$\oiint_S A dydz + B dzdx + C dxdy = - \oiint_\varepsilon A dydz + B dzdx + C dxdy. \quad (11)$$

Вычислим правую часть формулы (11) для разных решений уравнений (9). Рассмотрим решение

$$\beta^1 = \frac{(x - x_0)}{r^3}, \quad \beta^2 = 0, \quad \beta^3 = -\frac{(z - z_0)}{r^3}, \quad \beta^4 = \frac{(y - y_0)}{r^3}. \quad (12)$$

Подставляем (12) в правую часть формулы (10) имеем

$$\oiint_\varepsilon (\beta^1 w^1 + \beta^4 w^2 - \beta^3 w^3) dydz + (-\beta^4 w^1 + \beta^1 w^2 + \beta^3 w^3) dzdx + (\beta^3 w^1 - \beta^2 w^2 + \beta^1 w^3) dxdy. \quad (13)$$

В (13) переходим к следующей системе координат

$$x - x_0 = \varepsilon \cos \theta \cos \phi, \quad y - y_0 = \varepsilon \cos \theta \sin \phi, \quad z - z_0 = \varepsilon \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} \oiint_\varepsilon (\beta^1 w^1 + \beta^4 w^2 - \beta^3 w^3) dydz + (-\beta^4 w^1 + \beta^1 w^2 + \beta^3 w^3) dzdx + (\beta^3 w^1 - \beta^2 w^2 + \beta^1 w^3) dxdy = \\ = \oiint_\varepsilon [(\cos \theta \cos \phi w^1 + \cos \theta \sin \phi w^2 - \sin \theta w^3) \cos^2 \theta \cos \phi + \\ + (-\cos \theta \sin \phi w^1 + \cos \theta \cos \phi w^2) \cos^2 \theta \sin \phi + (-\sin \theta w^1 + \cos \theta \sin \phi w^3) \cos \theta \sin \theta] d\theta d\phi = \\ = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos \theta w^1 d\theta = -\frac{4\pi}{3} w^1(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Последнее выражение получено с использованием теоремы о среднем и при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В результате получаем

$$\iint_S A dydz + B dzdx + C dxdy = \frac{4\pi}{3} w^1(x_0, y_0, z_0). \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A = \frac{(x - x_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(y - y_0)}{r^3} w_0^2 + \frac{(z - z_0)}{r^3} w_0^3, \quad B = \frac{(y - y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(x - x_0)}{r^3} w_0^2 - \frac{(z - z_0)}{r^3} w_0^3, \\ C = -\frac{(z - z_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(x - x_0)}{r^3} w_0^3. \end{aligned}$$

Далее полагаем

$$\beta^1 = \frac{(y - y_0)}{r^3}, \quad \beta^2 = \frac{(z - z_0)}{r^3}, \quad \beta^3 = 0, \quad \beta^4 = -\frac{(x - x_0)}{r^3}. \quad (15)$$

Подставляем (15) в (11), получаем аналогично (11)–(14)

$$\iint_S A dydz + B dzdx + C dxdy = \frac{4\pi}{3} w^2(x_0, y_0, z_0), \quad (16)$$

где

$$A = \frac{(y - y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 - \frac{(x - x_0)}{r^3} w_0^2, \quad B = \frac{(x - x_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(z - z_0)}{r^3} w_0^2,$$

$$C = \frac{(y - y_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^2 - \frac{(y - y_0)}{r^3} w_0^3.$$

Далее полагаем

$$\beta^1 = \frac{(z - z_0)}{r^3}, \quad \beta^2 = -\frac{(y - y_0)}{r^3}, \quad \beta^3 = \frac{(x - x_0)}{r^3}, \quad \beta^4 = 0. \quad (17)$$

Подставляем (17) в (11), получаем аналогично (11)–(14)

$$\iint_S A dy dz + B dz dx + C dx dy = \frac{4\pi}{3} w^3(x_0, y_0, z_0), \quad (18)$$

где

$$A = \frac{(z - z_0)}{\alpha_0 r^3} w_0^1 - \frac{(x - x_0)}{r^3} w_0^3, \quad B = \frac{(x - x_0)}{r^3} w_0^2 - \frac{(z - z_0)}{r^3} w_0^3,$$

$$C = \frac{(x - x_0)^2}{\alpha_0 r^3} w_0^1 + \frac{(y - y_0)}{r^3} w_0^2 + \frac{(z - z_0)}{r^3} w_0^3.$$

Замечание 2. В формулах (14), (16) и (18) опущена функция поскольку она является гармонической функцией без особенностей в области V и интеграл от неё по поверхности S равен нулю.

2. ДВУМЕРНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В двумерном случае, рассмотренная выше задача имеет некоторые особенности, поэтому решим её, обращая внимание на эти особенности.

Систему уравнений (1) перепишем следующим образом

$$(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \lambda v_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) = 0, \quad (19)$$

$$\mu(u_{xy} + v_{xy}) + (\lambda + 2\mu)v_{yy} + \lambda u_{xy} = 0.$$

Здесь для удобства обозначили $w^1 = u$, $w^2 = v$ — компоненты вектора деформаций, индексы внизу, как и ранее, означают производные по соответствующим переменным.

Известно, что система уравнений (2) эллиптического типа. Это определяет вид законов сохранения и решение краевых задач. Как и уравнения (1) система (19) допускает бесконечную группу точечных преобразований, порождаемую операторами

$$X = h^1 \partial_u + h^2 \partial_v, \quad (20)$$

где h^1, h^2 — произвольное решение уравнений Коши–Римана

$$h_x^1 + h_y^2 = 0, \quad h_y^1 - h_x^2 = 0. \quad (21)$$

Сделаем групповое расслоение системы уравнений (19), так же как это описано выше, на подалгебре, порождаемой (20). Для этого продолжим операторы (21) на первые производные. Имеем

$$X_1 = X + h_x^1 \partial_{u_x} + h_y^2 \partial_{v_y} + h_y^1 \partial_{u_y} + h_x^2 \partial_{v_x}. \quad (22)$$

Дифференциальные инварианты для (22), с учётом (20), имеют вид

$$I_1 = x, \quad I_2 = y, \quad I_3 = u_x + v_y, \quad I_4 = u_y - v_x.$$

Тогда автоморфная система уравнений имеет вид

$$u_x + v_y = \theta(x, y), \quad u_y - v_x = \omega(x, y). \quad (23)$$

Напомним некоторые свойства автоморфных систем. Любое решение автоморфной системы может быть получено из одного решения этой системы с помощью преобразований, порождаемых оператором (20).

Подставляя (23) в (19) получаем разрешающую систему

$$F_1 = (\lambda + 2\mu)\theta_x - \mu\omega_y = 0, \quad F_2 = (\lambda + 2\mu)\theta_y + \mu\omega_x = 0. \quad (24)$$

Повторяя почти дословно рассуждения выше, можно утверждать, что система (24) равносильна системе уравнений (19). Поэтому, построив решение системы (24), мы получим решение системы (19).

Пусть для системы (24) поставлена следующая краевая задача:

$$\theta|_L = \theta_0(x, y), \quad \omega|_L = \omega_0(x, y), \quad (25)$$

где L — некоторая гладкая замкнутая кривая, $\theta_0(x, y)$, $\omega_0(x, y)$ — известные гладкие функции.

Для решения этой задачи построим законы сохранения для системы уравнений (24).

2.1. Законы сохранения

В силу линейности системы (24) она будет иметь бесконечное число законов сохранения. В работе будут найдены только те законы сохранения, которые позволят решить краевую задачу (25).

Законом сохранения для системы уравнений (24) назовём выражение вида

$$A_x(x, y, \theta, \omega) + B_y(x, y, \theta, \omega) = \alpha F_1 + \beta F_2 = 0, \quad (26)$$

где α , β — некоторые функции, которые не равны тождественно нулю одновременно. A , B компоненты сохраняющегося тока. Предположим, что компоненты сохраняющегося тока имеют вид

$$A = a^1\theta + a^2\omega, \quad B = b^1\theta + b^2\omega, \quad (27)$$

где a^1 , a^2 , b^1 , b^2 — некоторые функции от x , y .

Подставляя (27) в (26), после несложных преобразований получаем

$$a^1 = \alpha(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = \beta\mu, \quad b^1 = \beta(\lambda + 2\mu), \quad a^2 = -\alpha\mu, \\ a_x^1 + b_y^1 = 0, \quad a_x^2 + b_y^2 = 0.$$

Отсюда имеем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0.$$

Из (26) следует

$$\iint_S (A_x + B_y) dx dy = \oint_L -A dy + B dx. \quad (28)$$

2.2. Решение первой краевой задач

Пусть $(x_0, y_0) \in S$ такая точка, в которой компоненты сохраняющегося тока имеют особенности, тогда из (28) следует

$$\oint_L -A dy + B dx = - \oint_{\varepsilon} -A dy + B dx, \quad (29)$$

где $\varepsilon : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varepsilon^2$ — окружность радиуса ε вокруг точки $(x_0, y_0) \in S$. Вычислим интеграл в правой части (29) для разных решений уравнений Коши—Римана. В качестве решений выберем такие, которые имеют особенность в точке $(x_0, y_0) \in S$. Пусть

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (30)$$

тогда из правой части (29) имеем

$$\oint_{\varepsilon} -A dy + B dx = \oint_{\varepsilon} -(\alpha(\lambda + 2\mu)\theta + \beta\mu\omega) dy + (\alpha\mu\omega + \beta(\lambda + 2\mu)\theta) dx. \quad (31)$$

Подставим (30) в (31) и сделаем замену переменных по формулам $x - x_0 = \varepsilon \cos \phi$, $y - y_0 = \varepsilon \sin \phi$ получаем

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon} -A dy + B dx &= \int_0^{2\pi} [-((\lambda + 2\mu)\theta + \mu\omega) + 2 \sin \phi \cos \phi \mu\omega] d\phi = \\ &= -2\pi [(\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)]. \end{aligned} \quad (32)$$

В формуле (32) устремили $\varepsilon \rightarrow 0$ и использовали теорему о среднем.

Теперь сделаем аналогичные вычисления, положив

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

В результате получим

$$\oint_{\varepsilon} -A dy + B dx = -2\pi\mu\omega(x_0, y_0). \quad (33)$$

Формулы (32) и (33) позволяют, с учётом граничных условий (25) и равенства (14) определить значения функций θ и ω в произвольной точке $(x_0, y_0) \in S$. Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned} 2\pi [(\lambda + 2\mu)\theta(x_0, y_0) - \mu\omega(x_0, y_0)] &= \oint_L -\frac{(\lambda + 2\mu)(x - x_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(y - y_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx, \\ 2\pi\mu\omega(x_0, y_0) &= \oint_L \frac{(\lambda + 2\mu)(y - y_0)\theta_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dy + \frac{\mu(x - x_0)\omega_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} dx. \end{aligned}$$

Теперь после восстановления решений разрешающей системы, найдём решения автоморфной системы, т. е. решения исходной системы уравнений (19). Имеем

$$F_3 = u_x + v_y - \theta(x, y) = 0, \quad F_4 = u_y - v_x - \omega(x, y) = 0. \quad (34)$$

Здесь в правой части стоят известные функции, которые найдены в предыдущем пункте. Найдём законы сохранения уравнений (34) в следующем виде

$$A = a^3u + a^4v + c^1, B = b^3u + b^4v + c^2,$$

где $a^3, a^4, b^3, b^4, c^1, c^2$ — некоторые функции от x, y .

Имеем

$$A_x(x, y, u, v) + B_y(x, y, u, v) = \alpha F_3 + \beta F_4 = 0. \quad (35)$$

Расщепляя систему уравнений (35), получаем

$$\begin{aligned} a^3 &= \alpha, & a^4 &= -\beta, & b^3 &= \beta, & b^4 &= \alpha, \\ a_x^3 + b_y^3 &= 0, & a_x^4 + b_y^4 &= 0, & c_x^1 + c_y^2 &= -\alpha\theta - \beta\omega. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\alpha_x + \beta_y = 0, \quad \alpha_y - \beta_x = 0. \quad (36)$$

Пусть для системы (19) поставлена следующая краевая задача:

$$u|_L = u_0(x, y), \quad v|_L = v_0(x, y).$$

Рассмотрим закон сохранения в виде

$$\oint_L -A dy + B dx = - \oint_\varepsilon -A dy + B dx. \quad (37)$$

Пусть решение уравнений (36) имеет вид

$$\alpha = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (38)$$

Подставляем (38) в правую часть (37), получаем

$$\begin{aligned} \oint_\varepsilon -A dy + B dx &= \oint_\varepsilon -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_\varepsilon -(\alpha \cos \phi - \beta \sin \phi + c^1) dy - (\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi + c^2) dx = -2\pi u(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Пусть решение уравнений (36) имеет вид

$$\alpha = -\frac{y - y_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \beta = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (39)$$

Подставляем (39) в правую часть (37), получаем

$$\begin{aligned} \oint_\varepsilon -A_1 dy + B_1 dx &= \oint_\varepsilon -(\alpha u - \beta v + c^1) dy + (\beta u + \alpha v + c^2) dx = \\ &= \oint_\varepsilon -(-u \sin \phi - v \cos \phi + c^1) dy - (u \cos \phi - v \sin \phi + c^2) dx = -2\pi v(x_0, y_0). \end{aligned}$$

В результате получаем формулы для вычисления компонент вектора деформации

$$2\pi u(x_0, y_0) = \oint_L -A dy + B dx, \quad 2\pi v(x_0, y_0) = \oint_L -A_1 dy + B_1 dx,$$

где $c^1 = \int \alpha \theta dx, c^2 = \int \beta \omega dx$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены законы сохранения для уравнений пространственной и двумерной теории упругости, которые позволили первую решить краевые задачи для этих систем. В статье продолжено решение краевых задач с помощью законов сохранения, начатое работами [8, 9].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ на выполнение проекта «Разработка многофункциональных интеллектуальных материалов и структур на основе модифицированных полимерных композиционных материалов способных функционировать в экстремальных условиях» (проект FEFE-2020-0015). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. *Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985.
3. *Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И., Угрюмов Р. И.* Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стеснённым вращением // Сиб. журн. индустр. матем. 2023. Т. 26, № 1. С. 5–19.
4. *Остросаблин Н. И.* Общее решение и приведение системы уравнений линейной изотропной упругости к диагональному виду // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. 12, № 2. С. 79–83.
5. *Остросаблин Н. И.* Диагонализация системы статических уравнений Ламе линейной изотропной упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 3. С. 87–98.
6. *Остросаблин Н. И.* Общее решение двумерной системы статических уравнений Ламе линейной теории упругости с несимметричной матрицей модулей упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 121, № 1. С. 61–71.
7. *Прудников В. Ю., Чиркунов Ю. А.* Групповое расслоение уравнений Ламе // Прикл. матем. и механика. 1988. Т. 52, № 3. С. 471–477.
8. *Бельмецев Н. Ф., Чиркунов Ю. А.* Точные решения уравнений динамической асимметричной модели теории упругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 4. С. 38–50.
9. *Радаев Ю. Н.* Представление перемещений в пространственной гармонической задаче теории упругости с помощью двух винтовых векторов // Изв. РАН МГТ. 2021. № 2. С. 148–156.
10. *Сенашов С. И., Савостьянова И. Л.* Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила–Теодореску // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 2. С. 101–109.
11. *Меграбов А. Г.* Законы сохранения и другие формулы для семейств лучей и фронтов и для уравнения эйконала // Сиб. журн. вычисл. матем. 2019. Т. 22, № 4. С. 483–497.

UDC 517.9

**CONSERVATION LAWS AND SOLUTIONS OF THE FIRST BOUNDARY
VALUE PROBLEM FOR THE EQUATIONS OF TWO- AND
THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY**© 2024 S. I. Senashov^a, I. L. Savostyanova^b*Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, 660037
Russia*E-mails: ^asen@sibsau.ru, ^bruppa@inbox.ru

Received 16.08.2022, revised 29.02.2024, accepted 03.03.2024

Abstract. If a system of differential equations admits a continuous transformation group, then, in some cases, the system can be represented as a combination of two systems of differential equations. These systems, as a rule, are of smaller order than the original one. This information pertains to the linear equations of elasticity theory. The first system is automorphic and is characterized by the fact that all of its solutions are obtained from a single solution using transformations in this group. The second system is resolving, with its solutions passing into themselves under the group action. The resolving system carries basic information about the original system. The present paper studies the automorphic and resolving systems of two- and three-dimensional time-invariant elasticity equations, which are systems of first-order differential equations. We have constructed infinite series of conservation laws for the resolving systems and automorphic systems. There exist infinitely many such laws, since the systems of elasticity equations under consideration are linear. Infinite series of linear conservation laws with respect to the first derivatives are constructed in this article. It is these laws that permit solving the first boundary value problem for the equations of elasticity theory in the two- and three-dimensional cases. The solutions are constructed by quadratures, which are calculated along the boundary of the studied domains.

Keywords: equations of two-dimensional elasticity, equations of three-dimensional elasticity, conservation laws, solution of boundary value problems.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.207

REFERENCES

1. W. Nowacki, *Teoria sprężystości* (PWN, Warsaw, 1970; Mir, Moscow, 1975).
2. B. D. Annin, V. O. Bytev, and S. I. Senashov, *Group Properties of the Equations of Elasticity and Plasticity* (Nauka, Novosibirsk, 1985) [in Russian].
3. B. D. Annin, N. I. Ostrosablin, and R. I. Ugryumov, “Defining equations of the anisotropic moment linear theory of elasticity and the two-dimensional problem of pure shear with constrained rotation,” *J. Appl. Ind. Math.* **17** (1), 1–14 (2023).
4. N. I. Ostrosablin, “The general solution and reduction to diagonal form of a system of equations of linear isotropic elasticity,” *J. Appl. Ind. Math.* **4** (3), 354–358 (2010).
5. N. I. Ostrosablin, “Diagonalization of the system of static LamBré equations of isotropic linear elasticity,” *J. Appl. Ind. Math.* **7** (1), 89–99 (2013).
6. N. I. Ostrosablin, “General solution for the two-dimensional system of static Lamé’s equations with an asymmetric elasticity matrix,” *J. Appl. Ind. Math.* **12** (1), 126–135 (2018).

7. V. Yu. Prudnikov and Yu. A. Chirkunov, "Group foliation of LamBre equations," *Prikl. Mat. Mekh.* **52** (3), 471–477 (1988).
8. N. F. Belmetsev and Yu. A. Chirkunov, "Exact solutions to the equations of a dynamic asymmetric pseudoelasticity model," *J. Appl. Ind. Math.* **7** (1), 41–53 (2013).
9. Yu. N. Radaev, "Representation of displacements in a spatial harmonic problem of the theory of elasticity using two screw vectors," *Mech. Solids* **56** (2), 263–270 (2021).
10. S. I. Senashov and I. L. Savostyanova, "Using conservation laws to solve boundary value problems of the Moisil–Teodorescu system," *Sib. Zh. Ind. Mat.* **25** (2), 101–109 (2022) [in Russian].
11. A. G. Megrabov, "Conservation laws and other formulas for families of rays and wavefronts and for the eikonal equation," *Numer. Anal. Appl.* **12** (4), 395–406 (2019).

УДК 519.642

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЯХ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА

© 2024 С. В. Солодуша

*Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, г. Иркутск 664033, Россия*

E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Поступила в редакцию 20.11.2023 г.; после доработки 07.03.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

Важным этапом построения интегральных моделей нелинейных динамических систем на основе аппарата рядов Вольтерра является задача идентификации ядер Вольтерра. В статье рассмотрен новый класс двумерных интегральных уравнений, которые возникают при восстановлении несимметричных ядер в полиноме Вольтерра второй степени, где $x(t)$ — входная вектор-функция времени. Стратегия выбора тестовых сигналов, используемых для решения этой задачи, основана на применении кусочно-линейных функций (имеющих фронт нарастания). Для выделенного типа уравнений Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования построена явная формула обращения. Исследуются вопросы существования и единственности решения соответствующих уравнений в классе $C_{[0,T]}$.

Ключевые слова: двумерное интегральное уравнение Вольтерра I рода, идентификация, формула обращения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.208

ВВЕДЕНИЕ

Математические модели, использующие многомерные интегральные уравнения вольтерровского типа, занимают заметное место в различных прикладных направлениях, например, в макроэкономике [1, 2], в электроэнергетике [3], при описании динамических развивающихся систем [4, 5], при решении ряда краевых задач [6]. Для моделирования соответствующих процессов и явлений используют системы обыкновенных дифференциальных уравнений, конечномерные (алгебраические) уравнения и различные классы интегральных уравнений Вольтерра, объединение которых нередко приводит к качественно новым математическим объектам, описываемым, в том числе, интегральными уравнениями Вольтерра I рода с переменными пределами интегрирования [7]. Как отмечено в [8], стр. 134, интегральные уравнения Вольтерра с двумя переменными пределами интегрирования являются мало изученными за исключением некоторых частных случаев.

Данная работа посвящена исследованию неклассических (по терминологии [5]) интегральных уравнений Вольтерра I рода, тесно связанных с проблемой математического моделирования динамических систем с помощью универсального аппарата полиномов Вольтерра (отрезков ряда Вольтерра) [9]:

$$y(t) = \sum_{m=1}^N \sum_{1 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_m \leq 2} f_{\mu_1 \dots \mu_m}(t), \quad t \in [0, T],$$

$$f_{\mu_1 \dots \mu_m}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t K_{\mu_1 \dots \mu_m}(s_1, \dots, s_m) \prod_{j=1}^m x_{\mu_j}(t - s_j) ds_j. \quad (1)$$

В (1) $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ есть вектор-функция времени t , функции $K_{\mu_1 \dots \mu_m}$ (ядра Вольтерра) симметричны по переменным s_1, \dots, s_m , соответствующим совпадающим индексам μ_1, \dots, μ_m . В статье развивается подход [5] к идентификации несимметричных ядер Вольтерра в линейном уравнении

$$f_{12}(t) = \int_0^t \int_0^t K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) x_1(t - \lambda_1) x_2(t - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (2)$$

где отклик $f_{12}(t)$ обусловлен вкладом соответствующего слагаемого в (1), отвечающего одновременному изменению компонент $x_1(t)$ и $x_2(t)$ входного вектора $x(t)$. В соответствии с [5], стр. 160, заметим, что для корректной постановки задачи решения (2) как интегрального уравнения относительно функции K_{12} двух переменных необходимо задать двумерный континуум откликов на тестовые входные воздействия. Задачи в такой постановке рассмотрены в [5].

В отличие от ранее известных результатов, рассмотрим случай однопараметрического семейства тестовых сигналов $x(t)$ из класса кусочно-линейных функций

$$\xi_\nu^{(c)}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \leq 0, \\ \frac{\lambda}{\nu}, & 0 < \lambda \leq \nu, \\ c, & \nu < \lambda, \end{cases} \quad (3)$$

где $c = \text{const}$, параметр ν — длительность нарастания сигнала.

1. О СТРАТЕГИИ ВЫБОРА ТЕСТОВОГО СИГНАЛА

Уравнение

$$y_2(t) = \int_0^t \int_0^t K_2(\lambda_1, \lambda_2) x(t - \lambda_1) x(t - \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$$

относительно функции $K_2(\lambda_1, \lambda_2)$, симметричной по переменным λ_1, λ_2 , для скалярного входного сигнала $x(\lambda) \equiv \xi_\nu^{(1)}(\lambda)$ вида (3), где $c = 1$, рассмотрено в статье [10]. Векторность входа в (2), с одной стороны, усложняет задачу идентификации, так как функция K_{12} не обладает свойством симметричности относительно своих аргументов. С другой стороны, появляется возможность варьировать вид тестовых сигналов для разных компонент $x_1(t), x_2(t)$ вектор-функции $x(t)$.

Введём две группы тестовых сигналов, имеющих аналитическое представление

$$x_{1T}(t) = e(t), \quad x_{2\nu}(t) = \xi_\nu^{(1)}(t), \quad (4)$$

$$x_{1\nu}(t) = \xi_\nu^{(1)}(t), \quad x_{2T}(t) = e(t), \quad (5)$$

$0 \leq \nu \leq t \leq T$, $e(t)$ — функция Хевисайда. Для упрощения изложения введём следующие обозначения:

$$s_1 = t, \quad s_2 = t - \nu. \quad (6)$$

Подстановка (4), (5) в (2) в терминах новых переменных (6) приводит к линейным относительно K_{12} уравнениям

$$\int_0^{s_1} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_2}{s_1 - s_2} d\lambda_2 + \int_0^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = f_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2), \quad (7)$$

$$\int_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_1}{s_1 - s_2} d\lambda_2 + \int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_0^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 = f_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2), \quad (8)$$

$$s_1, s_2 \in \Delta = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq T\},$$

где правые части $f_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) \equiv f_{12}^{(1)}(t, \nu)$, $f_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) \equiv f_{12}^{(2)}(t, \nu)$ есть отклики динамической системы на входы (4), (5) соответственно. По терминологии [5], стр. 175, в совокупности (7), (8) определяют парное интегральное уравнение относительно функции K_{12} .

Следуя [11], в предположении достаточной гладкости функций $f_{12}^{(1)}$, $f_{12}^{(2)}$, путём дифференцирования (7), (8) по переменной s_2 перейдём к

$$\int_0^{s_1} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_2}{s_1 - s_2} d\lambda_2 = (s_1 - s_2) \left(f_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) \right)'_{s_2}, \quad (9)$$

$$\int_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_1}{s_1 - s_2} d\lambda_2 = (s_1 - s_2) \left(f_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) \right)'_{s_2}. \quad (10)$$

Вычитая попарно (9) из (7) и (10) из (8), в итоге получим парное уравнение

$$\begin{aligned} \int_0^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 &= g^{(1)}(s_1, s_1 - s_2), \\ \int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_0^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 &= g^{(2)}(s_1, s_1 - s_2), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$g^{(i)}(s_1, s_1 - s_2) = f_{12}^{(i)}(s_1, s_1 - s_2) - (s_1 - s_2) \left(f_{12}^{(i)}(s_1, s_1 - s_2) \right)'_{s_2}, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Формулы обращения (11), (12) имеют вид

$$K_{12}(s_1, s_2) = \left(g^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) \right)''_{s_1 s_2}, \quad K_{12}(s_2, s_1) = \left(g^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) \right)''_{s_1 s_2}, \quad s_1 \geq s_2. \quad (13)$$

Отметим, что хотя сигналы (4), (5) обеспечивают идентификацию ядра $K_{12}(p, q)$, несимметричного на $0 \leq p, q \leq T$, вторая группа сигналов совпадает на участке $[T - \nu, T]$ с первой группой. Следовательно, отклики на них не формируют новую информацию о динамической системе. Для оптимизации вида тестовых сигналов в [5], стр. 179, предложено использовать понятие кода тестового сигнала [12].

Руководствуясь понятием кода, представленного в [12] с целью оптимизации с точки зрения суммарной длительности входных воздействий, выделим иные группы тестовых сигналов

$$x_{1\nu}(t) = e(t - \nu), \quad x_{2\nu}(t) = \xi_\nu^{(0)}(t) \quad (14)$$

и

$$x_{1\nu}(t) = \xi_\nu^{(0)}(t), \quad x_{2\nu}(t) = e(t - \nu), \quad (15)$$

где $\xi_\nu^{(0)}(t)$ определяется по (3) для $c = 0$.

Подстановка (14), (15) в уравнение (2) с учётом обозначения (6) даёт

$$\begin{aligned} \int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_2}{s_1 - s_2} d\lambda_2 &= q_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2), \\ \int_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_1}{s_1 - s_2} d\lambda_2 &= q_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2), \end{aligned} \quad (16)$$

где через $q_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) \equiv p^{(1)}(s_1, s_2)$, $q_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) \equiv p^{(2)}(s_1, s_2)$ обозначены отклики динамической системы на входы вида (14), (15). Рассмотрим далее специфику линейного парного уравнения (16) относительно несимметричного на $\Omega_2 = \{(p, q) : 0 \leq p, q \leq T\}$ ядра Вольтерра $K_{12}(p, q)$.

2. О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ (16)

Предполагая достаточную гладкость функций $q_{12}^{(1)}$, $q_{12}^{(2)}$ ($p^{(1)}$, $p^{(2)}$ соответственно), рассмотрим вопрос о существовании единственного непрерывного решения (16). Сформулируем следующую лемму.

Лемма. Пусть в уравнении (16) относительно функции $K_{12}(\lambda_1, \lambda_2)$, несимметричной на $\Omega_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq T\}$, правые части

$$p^{(i)}(s_1, s_2) \in C_{\Delta}^{(1)}, \quad \Delta = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq T\}, \quad i = 1, 2,$$

и, кроме того,

$$p^{(1)}(0, 0) = 0, \quad p^{(2)}(0, 0) = 0. \tag{17}$$

При условии существования $p^{(i)}(s_1, s_2)$ таких, что справедливо

$$p^{(i)}(s_1, s_2) + (s_1 - s_2) \left(p^{(i)}(s_1, s_2) \right)'_{s_1} = y^{(i)}(s_1, s_2), \tag{18}$$

уравнение (16) эквивалентно

$$\begin{aligned} \int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 &= y^{(1)}(s_1, s_2), \\ \int_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 &= y^{(2)}(s_1, s_2). \end{aligned} \tag{19}$$

Доказательство. Схема доказательства леммы основана на применении эквивалентных преобразований. Дифференцируя (16) по s_1 (в силу (17) операция дифференцирования в (18) законна):

$$\begin{aligned} \left(p^{(1)}(s_1, s_2) \right)'_{s_1} &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 - p^{(1)}(s_1, s_2) \right), \\ \left(p^{(2)}(s_1, s_2) \right)'_{s_1} &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\int_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 - p^{(2)}(s_1, s_2) \right) \end{aligned} \tag{20}$$

и суммируя (16) с (20), домноженным на $(s_1 - s_2)$, в итоге приходим к

$$\begin{aligned} \int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 &= p^{(1)}(s_1, s_2) + (s_1 - s_2) \left(p^{(1)}(s_1, s_2) \right)'_{s_1}, \\ \int_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_2 &= p^{(2)}(s_1, s_2) + (s_1 - s_2) \left(p^{(2)}(s_1, s_2) \right)'_{s_1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Пусть правые части уравнения (21)

$$p^{(i)}(s_1, s_2) + (s_1 - s_2) \left(p^{(i)}(s_1, s_2) \right)'_{s_1} = y^{(i)}(s_1, s_2), \quad i = 1, 2.$$

В принятых обозначениях (21) принимает вид (19). □

Замечание. В условиях леммы $p^{(1)}(s_1, s_2)$, $p^{(2)}(s_1, s_2)$ — правые части (16), полученные из (19), которые автоматически удовлетворяют (17). Следует отметить, что условие (17) имеет место в силу [10], стр. 221:

$$\int_0^{s_2} d\lambda_1 \int_{s_2}^{s_1} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_2}{s_1 - s_2} d\lambda_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s_1 \rightarrow s, s_2 \rightarrow s,$$

$$\int_{s_2}^{s_1} d\lambda_1 \int_0^{s_2} K_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \frac{s_1 - \lambda_1}{s_1 - s_2} d\lambda_2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s_1 \rightarrow s, s_2 \rightarrow s.$$

Используя результаты леммы, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Соотношения*

$$\left(y^{(i)}(s_1, s_2) \right)''_{s_1 s_2} \in C_\Delta, \quad i = 1, 2, \quad \Delta = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq T\}, \quad (22)$$

$$y^{(1)}(s, 0) = y^{(2)}(s, 0) = 0, \quad (23)$$

$$y^{(1)}(s, s) = y^{(2)}(s, s) = 0, \quad (24)$$

$$\left(y^{(1)}(s_1, s_2) \right)''_{s_1 s_2} \Big|_{s_1=s_2=s} = \left(y^{(2)}(s_1, s_2) \right)''_{s_1 s_2} \Big|_{s_1=s_2=s} \quad \forall s \in [0, T] \quad (25)$$

необходимы и достаточны для существования решения (19) в классе C_{Ω_2} . Решение (19) единственно в указанном классе и определяется по формулам

$$K_{12}(s_2, s_1) = \left(y^{(1)}(s_1, s_2) \right)''_{s_1 s_2}, \quad K_{12}(s_1, s_2) = \left(y^{(2)}(s_1, s_2) \right)''_{s_1 s_2}. \quad (26)$$

Доказательство. Доказательство этого факта основано на обобщении результатов [10] (см. теорему 1 о разрешимости двумерного уравнения I рода относительно симметричного на Ω_2 ядра Вольтерра).

Прокомментируем условия утверждения. Из (22), (25) следует непрерывность решения (19). Условие (22) — стандартное условие на гладкость входных данных, так как нам потребуется дважды дифференцировать (19). Равенство (23) — условие корректного задания $y^{(1)}(s, 0)$ и $y^{(2)}(s, 0) \forall s \in [0, T]$. Кроме того, условия (23), (24) обеспечивают справедливость тождественного равенства при прямой подстановке (26) в (19) с учётом области интегрирования (например, в первом уравнении (19) при подстановке используется правая часть формулы (26) для $K_{12}(s_2, s_1)$, которая определяет значения ядра в области, где первый аргумент не превосходит второго). Наконец, выполнение (23), (24) гарантирует тривиальность решения $(\psi^{(i)}(s_1, s_2))'_{s_1 s_2} = 0$, $i = 1, 2$, где $\psi^{(i)} = V_{2,i} K_{12} - y^{(i)}$, $V_{2,i}$ — оператор, определяемый левой частью i -го уравнения в (19). \square

Обратимся теперь к уравнению (16).

Теорема 2. *Пусть в уравнении (16) относительно непрерывной функции $K_2(\lambda_1, \lambda_2)$, несимметричной на $\Omega_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) : 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq T\}$, правые части*

$$p^{(i)}(s_1, s_2) \in C_\Delta^{(3)}, \quad \Delta = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq T\},$$

и, кроме того, выполнено равенство (17) и условия теоремы 1 применительно к линейной комбинации $p^{(i)}(s_1, s_2)$ ($i = 1, 2$) и их производных вида (18). Тогда решение уравнения (16) существует и единственно в классе несимметричных непрерывных на Ω_2 функций.

Доказательство. Дифференцируя (16), перейдём к эквивалентному (по лемме) интегральному уравнению (19). С учётом выполнения условий данной теоремы, существует непрерывное решение уравнения (19) (согласно теореме 1), а значит, и уравнения (16).

Единственность решения уравнения (16) следует (в силу леммы) из единственности решения уравнения (19), которая показана в теореме 1. \square

3. МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Проиллюстрируем на конкретном примере процедуру определения ядра K_{12} , несимметричного на Ω_2 .

Пример 1. Пусть отклики динамической системы на группу входных возмущений (4), (5) равны

$$f_{12}^{(1)}(t, \nu) = \frac{1}{12}t(2t - \nu)(6t^2 + 2t\nu - \nu^2), \quad f_{12}^{(2)}(t, \nu) = \frac{1}{6}t(2t - \nu)(3t^2 - 4t\nu + 2\nu^2),$$

так, с учётом обозначения (6), правые части уравнений (7), (8) имеют вид

$$f_{12}^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) = \frac{1}{12}s_1(s_1 + s_2)(7s_1^2 - s_2^2), \quad f_{12}^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) = \frac{1}{6}s_1(s_1 + s_2)(s_1^2 + 2s_2^2) \quad (27)$$

соответственно. Найдём решение (7), (8) по формуле (13). Принимая во внимание (27), из (12) имеем

$$g^{(1)}(s_1, s_1 - s_2) = \frac{1}{3}s_1s_2(2s_1 - s_2)(2s_1 + s_2), \quad g^{(2)}(s_1, s_1 - s_2) = -\frac{1}{3}s_1s_2(s_1 - 2s_2)(s_1 + 2s_2).$$

Так как

$$\left(g^{(1)}(s_1, s_1 - s_2)\right)'_{s_1} = 4s_1^2s_2 - \frac{1}{3}s_2^3, \quad \left(g^{(2)}(s_1, s_1 - s_2)\right)'_{s_1} = -s_1^2s_2 + \frac{4}{3}s_2^3,$$

то

$$K_{12}(s_1, s_2) = 4s_1^2 - s_2^2, \quad K_{12}(s_2, s_1) = 4s_2^2 - s_1^2.$$

Проиллюстрируем далее, что правая часть уравнения (16) удовлетворяет условиям теоремы 1.

Пример 2. Пусть $K_{12}(s_1, s_2) = s_1$, $K_{12}(s_2, s_1) = s_2$, $s_1 \geq s_2$. Функции $y^{(1)}(s_1, s_2)$, $y^{(2)}(s_1, s_2)$ можно получить непосредственно из (19):

$$y^{(1)}(s_1, s_2) = \frac{1}{2}s_2^2(s_1 - s_2), \quad y^{(2)}(s_1, s_2) = \frac{1}{2}s_2(s_1^2 - s_2^2). \quad (28)$$

С другой стороны, из (16) имеем

$$p^{(1)}(s_1, s_2) = \frac{1}{4}s_2^2(s_1 - s_2), \quad p^{(2)}(s_1, s_2) = \frac{1}{6}s_2(s_1 + 2s_2)(s_1 - s_2).$$

Далее, следуя лемме и с учётом (18), приходим к (28). Откуда

$$y^{(1)}(s, 0) = y^{(2)}(s, 0) = 0, \quad y^{(1)}(s, s) = y^{(2)}(s, s) = 0,$$

$$\left(y^{(1)}(s_1, s_2)\right)''_{s_1s_2} \Big|_{s_1=s_2=s} = s_2 \Big|_{s_2=s} = \left(y^{(2)}(s_1, s_2)\right)''_{s_1s_2} \Big|_{s_1=s_2=s} = s_1 \Big|_{s_1=s} = s.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен новый тип двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с переменными как верхним, так и нижним пределами интегрирования. Сформулированы условия эквивалентности выделенных парных интегральных уравнений вида (16), связанных с идентификацией ядер Вольтерра по кусочно-линейным входным сигналам, другому типу парных интегральных уравнений вида (19), возникающих при использовании сигналов из класса кусочно-постоянных функций. Сформулированы и доказаны теоремы о существовании единственного решения $K_{12}(p, q)$ уравнений (16), (19) в классе непрерывных функций, несимметричных на $0 \leq p, q \leq T$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00409; <https://rscf.ru/project/22-21-00409/>). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глушков В. М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие сист. и машины. 1977. № 2. С. 3–6.
2. Бойков И. В., Тында А. Н. Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 9. С. 1214–1223.
3. Markova E. V., Sidler I. V. Numerical solution of the age structure optimization problem for basic types of power plants // Yugosl. J. Oper. Res. 2019. V. 29, N 1. P. 81–92; DOI: 10.2298/YJOR171015009M
4. Апарцин А. С. Об интегральных уравнениях Вольтерра I рода в теории развивающихся систем // Численные методы оптимизации и анализа. 1992. С. 58–67.
5. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода. Теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.
6. Волкодавов В. Ф., Родионова И. Н. Формулы обращения некоторых двумерных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Изв. вузов. Матем. 1998. № 9. С. 30–32.
7. Ботороева М. Н., Булатов М. В. Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования // Изв. ИГУ Сер. Матем. 2017. Т. 20. С. 3–16; DOI: 10.26516/1997-7670.2017.20.3
8. Асанов А. А., Чоюбеков С. М. Решение неклассических интегральных уравнений Вольтерра I рода с вырожденным нелинейным ядром // Междунар. науч.-исслед. журнал. 2018. № 4(70). С. 134–138; DOI: 10.23670/IRJ.2018.70.029
9. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
10. Солодуша С. В. О новом классе двумерных интегральных уравнений I рода типа Вольтерра с переменными пределами интегрирования // Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 216–225; DOI: 10.21538/0134-4889-2022-28-4-216-225
11. Solodusha S. V. Identification of Symmetric Volterra Kernels Using Piecewise Linear Test Signals // Proc. 16th Int. Conf. Stab. Oscil. Nonlinear Control Syst. 2022; DOI: 10.1109/STAB54858.2022.9807575
12. Апарцин А. С. Теоремы существования и единственности решений уравнений Вольтерра I рода, связанных с идентификацией нелинейных динамических систем (векторный случай). Иркутск, 1996. (Препр. / СЭИ СО РАН; № 8).

UDC 519.642

ON SOME LINEAR TWO-DIMENSIONAL VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

© 2024 S. V. Solodusha

*Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Irkutsk, 664033 Russia*

E-mail: solodusha@isem.irk.ru

Received 20.11.2023, revised 07.03.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. The problem of identifying Volterra kernels is an important stage in the construction of integral models of nonlinear dynamical systems based on the tool of Volterra series. The paper considers a new class of two-dimensional integral equations that arise when recovering nonsymmetric kernels in a Volterra polynomial of the second degree, where $x(t)$ is the input vector function of time. The strategy for choosing test signals used to solve this problem is based on applying piecewise linear functions (with a rising edge). An explicit inversion formula is constructed for the selected type of Volterra equations of the first kind with variable integration limits. The questions of existence and uniqueness of solutions of the corresponding equations in the class $C_{[0,T]}$ are studied.

Keywords: two-dimensional Volterra integral equation of the first kind, identification, inversion formula.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.208

REFERENCES

1. V. M. Glushkov, "On one class of dynamic macroeconomic models," *Upr. Sist. Mash.* (2), 3–6 (1977) [in Russian].
2. I. V. Boikov and A. N. Tynda, "Approximate solution of nonlinear integral equations of the theory of developing systems," *Differ. Equations* **39** (9), 1277–1288 (2003).
3. E. V. Markova and I. V. Sidler, "Numerical solution of the age structure optimization problem for basic types of power plants," *Yugosl. J. Oper. Res.* **29** (1), 81–92 (2019). <https://doi.org/10.2298/YJOR171015009M>
4. A. S. Apartsin, "On Volterra integral equations of the first kind in the theory of developing systems," in *Numerical Methods of Optimization and Analysis* (1992), 58–67.
5. A. S. Apartsin, *Nonclassical Volterra Equations of the First Kind. Theory and Numerical Methods* (Nauka, Novosibirsk, 1999) [in Russian].
6. V. F. Volkodavov and I. N. Rodionova, "Inversion formulas for some two-dimensional Volterra integral equations of the first kind," *Russ. Math.* **42** (9), 28–30 (1998).
7. M. N. Botoroeva and M. V. Bulatov, "Applications and methods of numerical solution of one class of integro-algebraic equations with variable integration limits," *Izv. IGU Ser. Mat.* **20** (), 3–16 (2017) [in Russian]. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.3>
8. A. A. Asanov and S. M. Choyubekov, "Solution of non-classical Volterra integral equations of the first kind with a degenerate nonlinear kernel," *Mezhdunar. Nauchn.-Issled. Zh.* **4** (70), 134–138 (2018) [in Russian]. <https://doi.org/10.23670/IRJ.2018.70.029>

9. V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations* (Dover, New York, 1959; Nauka, Moscow, 1982).
10. S. V. Solodusha, "On a new class of two-dimensional integral equations of the first kind of Volterra type with variable limits of integration," *Tr. IMM UrO RAN* **28** (4), 216–225 (2022) [in Russian]. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-4-216-225>
11. S. V. Solodusha, "Identification of symmetric Volterra kernels using piecewise linear test signals," *Proc. 16th Int. Conf. Stab. Oscil. Nonlinear Control Syst.* (2022). <https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807575>
12. A. S. Apartsin, "Theorems of the existence and uniqueness of solutions of Volterra equations of the first kind related to the identification of nonlinear dynamic systems (vector case)," *Preprint of SEI SO RAN*, Irkutsk, 1996, no. 8 [in Russian].

УДК 517.927.25

ОЦЕНКИ СВЕРХУ КРАТНОСТИ ТОЧЕК СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

© 2024 А. А. Уртаева

*Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 44–46, г. Владикавказ 362025, Россия*

E-mail: urtaeva-96@mail.ru

Поступила в редакцию 05.12.2023 г.; после доработки 11.03.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

Работа посвящена изучению модели плоской балочной конструкции, описываемой краевой задачей четвёртого порядка на геометрическом графе. Во внутренних вершинах (узлах) графа задаются условия упруго-шарнирного соединения балок. Изучаются свойства точек спектра соответствующей спектральной задачи. Доказываются оценки сверху для кратности собственных значений. Показано, что кратность точек спектра зависит от структуры графа (количество граничных вершин, циклов и т. п.). Приводится пример, показывающий, что полученные оценки являются точными.

Ключевые слова: граф, дифференциальное уравнение, кратность собственного значения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.209

В настоящей работе рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения четвёртого порядка на геометрическом графе (пространственной сети) Γ :

$$L_\lambda u \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2} \left(p(x) \frac{d^2 u}{d\Gamma^2} \right) - \lambda \rho(x) u = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где $\partial\Gamma$ — множество граничных вершин Γ . Задача (1) представляет собой модель балочной конструкции [1–6]. Во внутренних точках рёбер производная $du/d\Gamma$ имеет классическую форму u' , а в узлах сети оператор L_λ задаётся наборами условий для упругого шарнирного соединения балок. Мы изучаем вопрос о кратности собственных значений задачи (1) и даём точную оценку кратности собственных значений этой задачи.

Ещё при изучении уравнений второго порядка на графах был установлен факт, что кратность собственных значений краевых задач на графах существенно зависит от структуры графа. На сегодняшний день получены точные оценки сверху для собственных значений задачи Штурма–Лиувилля на графе с различными условиями стыковки в узловых вершинах графа [7–13].

Стоит сразу отметить, что изучение свойств решений дифференциальных уравнений четвёртого порядка на сети является существенно более сложной, нежели аналогичная задача для уравнения Штурма–Лиувилля. Даже модели физического происхождения оказываются очень трудными для анализа (см., например, [5, 6, 12–15]). Кроме того, отметим, что качественные свойства решений уравнения на сети существенно зависят от условий трансмиссии в узловых точках [3, 4, 6, 14, 16]. Наибольшие продвижения в изучении качественных свойств краевых задач четвёртого порядка на графах имеются для уравнения с условиями упруго-шарнирного сочленения стержней. Для такой краевой задачи в работе [6] получены условия разрешимости, установлен принцип максимума, на основе которого доказана положительная обратимость

краевой задачи и положительность её функции Грина. В [17, 18] изучались свойства решений уравнения (1) (положительность, колеблемость, распределение нулей, неосцилляция). Как показывают результаты этих работ дифференциальный оператор L_λ задачи (1), порождаемый условиями упруго-шарнирного сочленения, наследует почти все основные качественные свойства оператора Штурма—Лиувилля на сети (теоремы штурмовского типа [17, 18], принцип максимума [6], условия простоты собственных значений [2], осцилляционная спектральная теорема [19]). В этой связи естественным становится вопрос о кратности точек спектра оператора L_λ . В работе [2] были сформулированы достаточные условия, обеспечивающие простоту собственных значений оператора L_λ и получена оценка кратности собственных значений для случая, когда граф является деревом. В частности, было доказано, что кратность любого собственного значения задачи (1) на графе-дереве не превосходит $|\partial\Gamma| - 1$, где $|\partial\Gamma|$ — число граничных вершин графа Γ . Отметим, что аналогичная оценка имеет место и для оператора Штурма—Лиувилля на сети (см. [13]). В той же работе [2] было указано, что аналогия в оценках кратностей собственных значений задачи (1) и собственных значений задачи Штурма—Лиувилля на графе распространяется и на случай графа произвольной структуры. В данной работе приводится детальное доказательство этого факта. В конце статьи приводится пример, показывающий, что получаемые оценки являются неулучшаемыми.

1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

В данной работе мы используем терминологию и обозначения работ [4, 6]. На протяжении всей статьи $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ обозначает связный и конечный *геометрический граф* без петель, с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством точек рёбер графа $E(\Gamma)$. *Ребро* графа — это интервал конечной длины, *авершина* графа — это концевая точка одного или нескольких рёбер. Ребра графа обозначаются γ_i , вершины обозначаются a, b и т. д. Для любой вершины $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов рёбер, инцидентных вершине a , и через $|I(a)|$ обозначим количество элементов множества $I(a)$. Множество *внутренних* вершин ($a \in V(\Gamma)$, $I(a) \geq 2$) обозначим через $J(\Gamma)$, а через $\partial\Gamma$ обозначим множество *граничных* вершин ($a \in V(\Gamma)$, $I(a) = 1$). Далее будем предполагать, что $\Gamma = E(\Gamma) \cup J(\Gamma)$ и $\partial\Gamma \neq \emptyset$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф.

Подграфом графа Γ называется любое связное подмножество Γ . Граф не имеющий циклов называется *деревом*. Граф — дерево Γ называем *цепочкой*, если $|I(a)| = 2$ для любой вершины $a \in J(\Gamma)$. Граф — цепочку, будем обозначать через $\Gamma(a, b)$, где $a, b \in \partial\Gamma$.

Введём функциональные пространства:

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid u - \text{равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\};$$

$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R} \mid u - \text{равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Каждая функция $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) имеет предел $\lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x)$, $i \in I(a)$, в каждой вершине $a \in V(\Gamma)$; обозначим его через $u_i(a)$. Обратим внимание, что $u_k(a)$ не обязательно равно $u_i(a)$ или $u(a)$, где $k, i \in I(a)$ ($k \neq i$). Пространство непрерывных на Γ функций определяется равенством

$$C(\Gamma) = \{u \in C[\Gamma] \mid u_i(a) = u(a) \ (\forall a \in J(\Gamma)) \vee (\forall i \in I(a))\}.$$

Теперь определим производную функции на графе. Для этого зададим функцию $\mu(x) \in C[E(\Gamma)]$, линейно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset E(\Gamma)$ на интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$, где l_i — длина γ_i . Положим $u'_i(x) := \lim_{\gamma_i \ni y \rightarrow x} (u_i(y) - u_i(x)) / (\mu_i(y) - \mu_i(x))$, $x \in \bar{\gamma}_i$. Аналогично определяются производные более высокого порядка.

Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) мы обозначаем пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) в любой вершине $a \in V(\Gamma)$ определено множество производных $u_i^{(j)}(a)$, $1 \leq j \leq n$, вдоль рёбер, смежных с a . Производные

нечётного порядка зависят от ориентации рёбер. В дальнейшем при записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению «от вершины», которые мы будем обозначать $u_{i\nu}^{(k)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали). Для чётной производной ориентация не важна, и поэтому, для краткости, вместо $u_{i\nu}''(a)$ пишем $u_i''(a)$.

Под дифференциальным уравнением $L_\lambda u = 0$, $x \in \Gamma$, мы подразумеваем набор обыкновенных дифференциальных уравнений на рёбрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - \lambda\rho(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma) \quad (2)$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i \in I(a), \quad (3)$$

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')'(a) - \lambda\rho(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \quad (4)$$

Уравнение порождаемое соотношениями (2)–(4) возникает при моделировании малых деформаций плоской стержневой системы, состоящей из тонких прямолинейных стержней, с условиями упруго-шарнирного соединения (см. [1, 3, 6, 8, 10, 19]). В этом случае равенства (2)–(4) можно трактовать следующим образом: $u(x)$ обозначает смещение балки при выходе из состояния равновесия; условия (3) описывают классические локальные условия в узлах графа — перемещения всех стержней системы являются непрерывными и имеется упруго-шарнирное сочленение в вершине a (см. [20], раздел 5.18). Последнее условие — это условие динамического равновесия.

Решением дифференциального уравнения $L_\lambda u = 0$, $x \in \Gamma$, будем называть всякую функцию $u(x) \in C^4[\Gamma] \cap C(\Gamma)$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (2), а в каждой внутренней вершине — условиям (3), (4).

Всюду далее полагаем:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{x \in E(\Gamma)} p(x) > 0$ и $\rho \in C[\Gamma]$, $\rho(x) > 0$ на $E(\Gamma)$, $\rho(x) \geq 0$ на $J(\Gamma)$;
- $\beta_i(a), \vartheta_i(a) \geq 0$ и $\beta_i(a) + \vartheta_i(a) > 0$ для любой вершины $a \in V(\Gamma)$ и любого индекса $i \in I(a)$;
- $\vartheta_i(a_i) + \vartheta_i(b_i) > 0$ для любого ребра $\gamma_i = (a_i, b_i) \subset E(\Gamma)$.

Первая серия предположений определяются физическим смыслом задачи, вторая также учитывает физический смысл и несёт предположение невырожденности самих условий. А третья серия обеспечивает невырожденность задачи (1) при $\lambda = 0$ (см. [6] или [10], гл. 8).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [19] показано, что спектр Λ задачи (1) состоит из последовательности положительных собственных значений

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

не имеющей конечных предельных точек. Поэтому вопрос о кратности собственных значений удобно обсуждать в форме вопроса о размерности пространства решений краевой задачи

$$L_\lambda u = 0, \quad u|_{\partial\Gamma} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0,$$

при $\lambda > 0$. Обозначим это пространство через $\mathcal{S}(L_\lambda)$. Очевидно, что $\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leq 4n$, где n — число рёбер графа Γ .

Лемма 1. [2] Пусть $u \in \mathcal{S}(L_\lambda)$ и для некоторой вершины $a \in J(\Gamma)$ выполнены равенства

$$u(a) = 0, \quad (p_i u_i'')'_\nu(a) = 0, \quad i \in I(a) \setminus i_0.$$

Тогда $u(x) \equiv 0$ на всех рёбрах графа, примыкающих к вершине a .

Теорема 1. [2] Пусть граф Γ является деревом. Тогда $\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leq |\partial\Gamma| - 1$, где $|\partial\Gamma|$ — число граничных вершин графа Γ .

Лемма 2. Пусть Γ — дерево. Если функция $u \in \mathcal{S}(L_\lambda)$ тождественно равна нулю на всех граничных рёбрах графа, кроме может быть одного, то $u \equiv 0$ на Γ .

Доказательство. Рассмотрим теперь функцию $u \in \mathcal{S}(L_\lambda)$, тождественно равную нулю на всех граничных рёбрах графа, кроме может быть ребра γ_0 , примыкающего к граничной вершине $a_0 \in \partial\Gamma$.

Прежде чем продолжить доказательство введём следующую терминологию.

Граничные вершины графа Γ кроме a_0 назовём вершинами *нулевого порядка*. Вершину $b \in J(\Gamma)$ назовём вершиной *первого порядка*, если все смежные с ней вершины кроме одной являются вершинами нулевого порядка. Вершину графа Γ назовём вершиной *второго порядка*, если все смежные с ней вершины кроме одной являются вершинами порядка не выше первого. Вершину $b \in V(\Gamma)$ назовём вершиной *третьего порядка*, если все смежные с ней вершины кроме одной являются вершинами не выше второго порядка, и так далее.

Граф Γ конечен, и поэтому любая вершина графа, отличная от a_0 , имеет конечный порядок. Более того, максимальный порядок имеет внутренняя вершина графа, смежная с a_0 .

Пусть b_1 — произвольная вершина 1-го порядка. Из свойств функции $u \in \mathcal{S}(L_\lambda)$ следует, что выполнены тождества $u_i(x) \equiv 0$ для всех индексов $i \in I(b_1) \setminus i_1$, где $i_1 \in I(b_1)$. Тогда из леммы 2 следует, что $u(x) \equiv 0$ и на ребре γ_{i_0} . Таким образом, $u(x) \equiv 0$ на всех рёбрах графа, примыкающих к вершинам нулевого и первого порядка. Если максимальный порядок вершин графа равен единице, то $u(x) \equiv 0$ на Γ и теорема доказана.

В противном случае рассмотрим произвольную вершину $b_2 \in J(\Gamma)$ второго порядка. Из определения вершины второго порядка и предыдущих рассуждений следует, что $u(x) \equiv 0$ на всех рёбрах, примыкающих к b_2 , кроме может быть одного. Опять, привлекая лемму 2, заключаем, что $u_i(x) \equiv 0$, для любого $i \in I(b_2)$. Таким образом, $u(x) \equiv 0$ на всех рёбрах графа, примыкающих к вершинам нулевого, первого и второго порядков. Если максимальный порядок вершин графа равен двум, то $u(x) \equiv 0$ на Γ и теорема доказана. В противном случае продолжаем наши рассуждения.

Для завершения доказательства леммы остаётся ещё раз заметить, что максимальный порядок вершин графа конечен. Поэтому через конечное число шагов мы получим, что $u(x) \equiv 0$ на Γ . \square

3. ОЦЕНКИ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В данном пункте приводятся доказательства основных результатов статьи. Для того, что бы сформулировать эти результаты, напомним некоторые понятия из работы [13].

Пусть Γ — произвольный граф с циклами. Вершину a_0 , лежащую на каком-либо цикле, назовём *разбивающей*, если $\Gamma \setminus \{a_0\}$ не является связным. Граф $\Gamma \setminus \{a_0\}$ распадается на подграфы: деревья и подграф Γ_0 , который может содержать циклы. Присоединяем вершину a_0 подграфу Γ_0 . Подграф Γ_0 также может разбиваться на связные компоненты некоторыми вершинами лежащими на его циклах. После такого разбиения снова образуем подграфы типа Γ_0 , присоединяя к ним вершины, с помощью которых они разбивались. Продолжая этот процесс и далее мы получим некоторое количество подграфов. Каждый из них является либо деревом, либо связным объединением циклов, не допускающим дальнейшего разбиения описанного выше типа. Такое объединение циклов назовём *гнездом*. Гнездо назовём *граничным*,

если ему принадлежит лишь одна разбивающая вершина. Количество таких гнёзд обозначим через $\zeta(\Gamma)$. Остальные гнёзда назовём внутренними (их количество не играет принципиальной роли для дальнейшего). Будем также граф называть *графом-гнездом*, если он имеет циклы, но не имеет разбивающих вершин.

Теорема 2. Пусть граф Γ является графом-гнездом. Тогда $\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leq \eta(\Gamma) + 1$, где $\eta(\Gamma)$ – цикломатическое число графа Γ .

Доказательство. Пусть $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$ – произвольный набор функций из $\mathcal{S}(L_\lambda)$, где $d \geq \eta(\Gamma) + 2$. Покажем, что данная система функций линейно зависима. Для этого мы последовательно построим их нетривиальную линейную комбинацию равную тождественно нулю на Γ .

Шаг 1. Зафиксируем произвольную вершину $a_0 \in J(\Gamma)$. Для сокращения записи введём обозначение $k_0 = |I(a_0)|$. Из функций $u^{[j]}$, можно получить $d - 1$ решений $v^{[j]}$, $j = \overline{1, d-1}$, из $\mathcal{S}(L_\lambda)$, каждое из которых равно нулю в выбранной вершине a_0 . Так, если каждая из функций $u^{[j]}$ равна нулю в вершине a_0 , то в качестве таких решений $v^{[j]}$ можно взять любые $d - 1$ функций из набора $u^{[j]}$. В противном случае, если некоторая функция не равна нулю в вершине a_0 , пусть для определённости это будет u^d , определяем набор функций:

$$v^{[j]}(x) = u^{[d]}(a_0)u^{[j]}(x) - u^{[d]}(x)u^{[j]}(a_0), \quad j = \overline{1, d-1}.$$

Рассмотрим теперь произвольный индекс $i_1 \in I(a_0)$. Из функций $v^{[j]}$, можно получить $d-2$ решений из $\mathcal{S}(L_\lambda)$, каждое из которых равно тождественно нулю на ребре γ_{i_1} , примыкающем к вершине a_0 . Так, если некоторая функция не равна тождественно нулю на ребре γ_{i_1} , пусть для определённости это будет $v^{[d-1]}$, то строим набор функций:

$$y^{[j]}(x) = (p(v^{[d-1]})''(a_0)v^{[j]}(x) - v^{[d-1]}(x)(p(v^{[j]})''(a_0)), \quad j = \overline{1, d-2}.$$

Очевидно, что $y^{[j]}(a_0) = 0$, $(p(y^{[j]})''(a_0))' = 0$. Поэтому, из леммы 1, следует, что $y^{[j]}(x) \equiv 0$ на γ_{i_1} . Если же каждая из функций $v^{[j]}$ равна тождественно нулю на ребре γ_{i_1} , то выберем любые $d - 2$ из них и переобозначим их через $y^{[j]}$, $j = \overline{1, d-2}$.

Рассмотрим далее ребро γ_{i_2} с произвольным индексом $i_2 \in I(a_0) \setminus i_1$. Если хотя бы одна из функций $\{y^{[j]}\}_1^{d-2}$ не тождественный нуль на ребре γ_{i_2} , то строим линейные комбинации $w^{[j]}(x)$, $j = \overline{1, d-3}$ такие, что $w^{[j]}(x) \equiv 0$ на ребре γ_{i_2} . Если же для всех $j = \overline{1, d-2}$ соответствующие сужения функций $y^{[j]}$ на ребро γ_{i_2} тождественно равны нулю, то берём любые $d - 3$ из них и переобозначим их через $w^{[j]}$, $j = \overline{1, d-3}$.

Далее берём произвольный индекс $i_3 \in I(a_0) \setminus \{i_1, i_2\}$ и начинаем строить функции тождественно нулевые на ребре γ_{i_3} . И т.д. В итоге, через $k_0 - 1$ шагов мы получим набор функций $z^{[j]}$, $j = \overline{1, d-k_0}$ таких, что $z^{[j]}(x) \equiv 0$ на всех рёбрах звезды $\Gamma(a_0)$ кроме, может быть одного ребра. Тогда из леммы 2, следует, что $z^{[j]} \equiv 0$ на звезде $\Gamma(a_0)$.

Рассмотрим граф $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma(a_0)$. Если $\partial\Gamma_1 \neq \emptyset$, то из $\partial\Gamma = \emptyset$ следует, что все граничные вершины подграфа Γ_1 являются граничными и для звезды $\Gamma(a_0)$. Поэтому каждая граничная вершина подграфа Γ_1 является концевой для одного ребра звезды $\Gamma(a_0)$ и одного ребра из Γ_1 . А поскольку все функции $z^{[j]}(x) \equiv 0$ на $\Gamma(a_0)$, то из леммы 2 вытекает, что все функции $z^{[j]}(x) \equiv 0$ на всех граничных рёбрах подграфа Γ_1 . Если Γ_1 является деревом, то ввиду леммы 2 все функции $z^{[j]}(x) \equiv 0$ на Γ_1 , а стало быть и на всём Γ . Поскольку каждая из функций $z^{[j]}(x)$ есть нетривиальная линейная комбинация набора $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$, то функции $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$ линейно зависимы и теорему можно считать доказанной.

Далее рассмотрим случай, когда Γ_1 содержит циклы. В этом случае каждая граничная вершина графа Γ_1 является концом некоторой ветви (может быть даже состоящей из одного ребра), «прикреплённой» к внутренней вершине графа Γ_1 , лежащей на каком-нибудь цикле в Γ_1 . Причём, как и в рассмотренном выше случае, все функции $z^{[j]}$ равны тождественно

нулю на всех граничных рёбрах графа Γ_1 . Тогда из леммы 2 следует, что все функции $z^{[j]}$ тождественно равны нулю на всех ветвях графа Γ_1 , прикрепленных к вершинам, лежащим на циклах.

ШАГ 2. Удалим из Γ_1 все его ветви и обозначим получаемый граф через $\widehat{\Gamma}_1$. Несложно видеть, что

$$\eta(\widehat{\Gamma}_1) = \eta(\Gamma) - (k_0 - 1).$$

Возможны два варианта: $\widehat{\Gamma}_1$ — гнездо или $\widehat{\Gamma}_1$ имеет разбивающие вершины. Рассмотрим каждый случай отдельно.

Пусть $\widehat{\Gamma}_1$ — гнездо. Фиксируем произвольную вершину $a_1 \in \widehat{\Gamma}_1$, к которой примыкает ребро из $\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_1$. Обозначим, через k_1 степень вершины a_1 в графе $\widehat{\Gamma}_1$. Далее, мы можем повторить все предыдущие рассуждения и построить из имеющихся $d - k_0$ решений $z^{[j]}$, ровно $d - k_0 - (k_1 - 1)$ функций $\widehat{u}^{[j]}$, равных тождественно нулю на звезде $\widehat{\Gamma}_1(a_1) \subset \widehat{\Gamma}_1$. Здесь стоит отметить, что для этого нам требуется $k_1 - 1$ шагов, поскольку все функции $z^{[j]}$ уже равны нулю в вершине a_1 .

Рассмотрим теперь случай, когда $\widehat{\Gamma}_1$ имеет разбивающую вершину. В этом случае $\widehat{\Gamma}_1$ имеет хотя бы одно граничное гнездо $\widehat{\Gamma}_{\text{bn}}$, которое связано с $\widehat{\Gamma}_1 \setminus \widehat{\Gamma}_{\text{bn}}$ разбивающей вершиной a_2 . Поскольку граф Γ не имеет разбивающих вершин, то по крайней мере одна из вершин гнезда $\widehat{\Gamma}_{\text{bn}}$, отличная от a_2 , является концевой для некоторого ребра из $\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_1$ (иначе вершина a_2 окажется разбивающей для исходного графа Γ). Следовательно, все функции $z^{[j]}$ равны нулю в этой вершине, которую мы обозначим a_3 . Как и выше, полагая, что k_1 — степень вершины a_3 в графе $\widehat{\Gamma}_1$, из функций $z^{[j]}$ можно получить $d - k_0 - (k_1 - 1)$ линейно независимых решений $\widehat{u}^{[j]}$ тождественно равных нулю на звезде $\Gamma(a_3) \subset \widehat{\Gamma}_1$.

Далее, рассуждая как и на первом шаге доказательства, либо получим, что все функции $\{\widehat{u}^{[j]}\}_{j=1}^{d-k_0-(k_1-1)}$ равны тождественно нулю и теорему можно считать доказанной, либо придём к графу $\widehat{\Gamma}_2 \subset \widehat{\Gamma}_1$, все рёбра которого лежат на циклах, и $\widehat{u}^{[j]} \equiv 0$ на $\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_2$. При этом в $\widehat{\Gamma}_2$ существует неразбивающая вершина такая, что все решения $\widehat{u}^{[j]}$ равны нулю в этой вершине.

Поскольку Γ — конечный граф, то через конечное число шагов мы получим оценку

$$\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leq k_0 + (k_1 - 1) + \dots + (k_n - 1).$$

Учитывая, что $k_i = \eta(\widehat{\Gamma}_i) + 1$, где $\eta(\widehat{\Gamma}_i)$ — количество циклов, устранённых на i -ом шаге, получаем

$$\dim \mathcal{S}(L_\lambda) \leq k_0 + 1 + \sum_{i=1}^n \eta(\widehat{\Gamma}_i) = \eta(\Gamma) + 1.$$

□

Теорема 3. Пусть $\partial\Gamma \neq \emptyset$. Тогда кратность любого собственного значения краевой задачи (1) не превосходит

$$|\partial\Gamma| + \zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) - 1. \quad (5)$$

Доказательство. Если граф Γ является деревом, то $\zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) = 0$ и оценка следует из теоремы 2. Поэтому далее рассматривается случай графа с циклами.

В целях краткости записи введём обозначение $k = |\partial\Gamma|$. Пусть $\{a_i\}_1^k$ — множество всех граничных вершин графа Γ . Рассмотрим произвольный набор $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$ функций из $\mathcal{S}(L_\lambda)$, где $d > |\partial\Gamma| + \zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) - 1$. Покажем, что элементы рассматриваемого набора линейно зависимы.

С помощью линейных комбинаций функций $u^{[j]}$ можно построить $d - 1$ функций $v^{[j]}$, $j = \overline{1, d-1}$, каждая из которых тождественно равна нулю на ребре, примыкающем к граничной вершине a_1 . Для этого, если все функции $u^{[j]}$, $j = \overline{1, d}$, равны тождественно нулю на ребре,

примыкающем к граничной вершине a_1 , можно выбрать любые $d - 1$ из них. Если же хотя бы одна из них (например $u^{[d]}$) не равна тождественно нулю этом ребре, то полагаем

$$v^{[j]}(x) = (p(u^{[d]})''(a_1)u^{[j]}(x) - u^{[d]}(x)(p(u^{[j]})''(a_1)), \quad j = \overline{1, d-1}.$$

Очевидно, что $v^{[j]}(a_1) = 0$ и $(p(u^{[j]})''(a_1) = 0$. Поэтому из леммы 2 следует, что $v^{[j]}(x) \equiv 0$ на граничном ребре, примыкающем к вершине a_1 .

Аналогично из функций $v^{[j]}$, $j = \overline{1, d-1}$, можно последовательно построить $d - (k - 1)$ функций $z^{[j]}$, каждая из которых, тождественно равна нулю на всех граничных рёбрах графа Γ кроме, быть может, примыкающего к вершине $a_k \in \partial\Gamma$.

Поскольку граф Γ содержит циклы и $\partial\Gamma \neq \emptyset$, в Γ можно выделить множество ветвей графа, каждая из которых «прикреплена» к какой-нибудь вершине, лежащей на циклах. Очевидно, что каждая граничная вершина графа Γ является граничной и для какой-то одной из таких ветвей. Пусть $b \in J(\Gamma)$ — вершина, к которой «прикреплена» ветвь, для которой вершина a_k является граничной. Поскольку функции $z^{[j]}$, $j = \overline{1, d - (k - 1)}$ тождественно равны нулю на всех рёбрах графа, которые примыкают к вершинам из $\Gamma \setminus a_k$, то ввиду леммы 2 все функции $z^{[j]}$, $j = \overline{1, d - k - 1}$, тождественно равны нулю на всех ветвях графа, кроме, быть может, цепочки $\Gamma_0(a_k, b)$. Удалим из графа Γ множество его ветвей за исключением цепочки $\Gamma_0(a_k, b)$ и обозначим полученный граф, через Γ_1 .

Предположим, что в графе Γ_1 есть граничные гнёзда. Рассмотрим произвольное граничное гнездо $\Gamma_{\text{bn}} \subset \Gamma_1$. Выберем в нём произвольную вершину $c \in J(\Gamma_{\text{bn}})$, не являющуюся разбивающей. Тогда, отправляясь от вершины c , мы можем повторить доказательство теоремы 3 для графа Γ_{bn} и получить из функций $z^{[j]}$ ровно $d - (k - 1) - (\eta(\Gamma_{\text{bn}}) + 1)$ линейно независимых решений тождественно равных нулю на гнезде Γ_{bn} .

С остальными граничными гнёздами, поступаем аналогично. В итоге получим

$$d - (k - 1) - \sum_{\Gamma_{\text{bn}} \subset \Gamma_1} (\eta(\Gamma_{\text{bn}}) + 1) = d - |\partial\Gamma| - \zeta(\Gamma) - \sum_{\Gamma_{\text{bn}} \subset \Gamma_1} \eta(\Gamma_{\text{bn}}) + 1$$

функций $y^{[j]}$, обращающихся в нуль на всех граничных гнёздах графа Γ .

Удалим из графа Γ_1 все его граничные гнёзда. Он распадётся на конечное число подграфов $\hat{\Gamma}^i$. Поскольку граф Γ_1 содержит только одну ветвь (цепочку $\Gamma_0(a_k, b)$), то любой из подграфов $\hat{\Gamma}^i$ либо является графом-деревом, либо состоит из ветвей, каждая из которых «прикреплена» к внутренней вершине графа Γ_1 , лежащей на каком-нибудь цикле в Γ_1 . Рассмотрим произвольную вершину c_1 , являющуюся граничной для некоторого подграфа $\hat{\Gamma}^i$. Из наших рассуждений следует, что каждая из функций $y^{[j]}$ тождественно равна нулю на всех рёбрах исходного графа Γ кроме, быть может, граничного ребра ветви в подграфе $\hat{\Gamma}^i$, примыкающей к c_1 . В силу леммы 2 получаем, что все функции $y^{[j]}$ тождественно равны нулю на граничном ребре ветви $\hat{\Gamma}^i$ примыкающем к c_1 . Учитывая лемму 2, можно утверждать, что все функции $y^{[j]}$ тождественно равны нулю на всех ветвях подграфов $\hat{\Gamma}^i$, кроме $\Gamma_0(a_k, b)$. Обозначим через $\tilde{\Gamma}^i$ подграф, получаемый из $\hat{\Gamma}^i$ удалением всех его ветвей отличных от $\Gamma_0(a_k, b)$.

Для каждого подграфа $\tilde{\Gamma}^i$ можно повторить предыдущие рассуждения. Нужно только заметить, что граничные гнёзда графа $\tilde{\Gamma}^i$ заведомо имеют вершины, в которых все функции $y^{[j]}$ равны нулю, а ветвей, отличных от $\Gamma_0(a_k, b)$, не имеют. Как было показано при доказательстве теоремы 3, зануление всех функций $y^{[j]}$ на таком граничном гнезде $\tilde{\Gamma}_{\text{bn}}^i \subset \tilde{\Gamma}^i$ приводит к сокращению набора линейно независимых функций на цикломатическое число этого гнезда $\eta(\tilde{\Gamma}_{\text{bn}}^i)$. Поэтому в конечном итоге мы придём к набору из

$$\kappa = d - |\partial\Gamma| - \zeta(\Gamma) - \sum_{\Gamma_{\text{bn}} \subset \Gamma_1} \eta(\Gamma_{\text{bn}}) - \sum_i \sum_{\tilde{\Gamma}_{\text{bn}}^i \subset \tilde{\Gamma}^i} \eta(\tilde{\Gamma}_{\text{bn}}^i) + 1$$

линейно независимых функций $\tilde{y}^{[j]}$, $j = \overline{1, \kappa}$, отличных от нуля только на цепочке $\Gamma_0(a_k, b)$. Привлекая лемму 2, окончательно получаем, что $\tilde{y}^{[j]} \equiv 0$ на Γ .

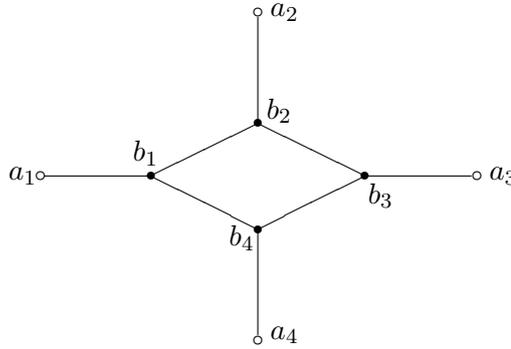
Теперь для завершения доказательства остаётся лишь заметить, что

$$\sum_{\Gamma_{\text{bn}} \subset \Gamma_1} \eta(\Gamma_{\text{bn}}) + \sum_i \sum_{\tilde{\Gamma}_{\text{bn}}^i \subset \tilde{\Gamma}^i} \eta(\tilde{\Gamma}_{\text{bn}}^i) = \eta(\Gamma),$$

то есть $\kappa \geq 1$. Стало быть исходный набор функций $\{u^{[j]}(x)\}_1^d$ линейно зависим. \square

Следующий пример показывает, что полученная в теореме 3 оценка (5) является неулучшаемой.

Пример. Рассмотрим спектральную краевую задачу (1) на графе Γ , изображённом на следующем рисунке.



В данном случае $|\partial\Gamma| = 4$, $\eta(\Gamma) = 1$ и $\zeta(\Gamma) = 0$. Согласно формуле (5) кратность любого собственного значения задачи (1) не превосходит четырёх.

Предполагая, что длина всех восьми рёбер графа Γ равна единице, рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} u_k^{IV} - \lambda u_k &= 0, \quad x \in \gamma_k, \\ u &\in C(\Gamma), \quad u'_k(b_i) = 0, \quad k \in I(b_i), \quad \sum_{k \in I(b_i)} u'''_{k\nu}(b_i) = 0, \quad b_i \in J(\Gamma); \\ u(a_i) &= u'(a_i) = 0, \quad a_i \in \partial\Gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Вычислим характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (6). Учитывая положительность собственных значений, нас интересуют значения $\Delta(\lambda)$ при $\lambda > 0$. Прямые вычисления показывают, что при $\lambda > 0$ характеристический определитель краевой задачи (6) равен

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= 1152\lambda^8 \left(\cos \sqrt[4]{\lambda} \cosh \sqrt[4]{\lambda} - 1 \right)^4 \left(\cosh \sqrt[4]{\lambda} \sin \sqrt[4]{\lambda} + \cos \sqrt[4]{\lambda} \sinh \sqrt[4]{\lambda} \right)^2 \\ &\quad \times \left(5 \cos 2\sqrt[4]{\lambda} - 5 \cosh 2\sqrt[4]{\lambda} + 16 \sin \sqrt[4]{\lambda} \sinh \sqrt[4]{\lambda} - 9 \sin 2\sqrt[4]{\lambda} \sinh 2\sqrt[4]{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Нули $\Delta(\lambda)$ суть собственные значения краевой задачи (6), причём кратность собственного значения совпадает с кратностью соответствующего нуля определителя $\Delta(\lambda)$. Очевидно, что собственные значения, удовлетворяющие уравнению

$$\cos \sqrt[4]{\lambda} \cosh \sqrt[4]{\lambda} - 1 = 0,$$

имеют кратность четыре.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2024-1447). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровских А. В., Мустафокулов Р., Лазарев К. П., Покорный Ю. В. Об одном классе дифференциальных уравнений четвёртого порядка на пространственной сети // Доклады РАН. 1995. Т. 345, № 6. Р. 730–732.
2. Кулаев Р. Ч., Уртаева А. А. О кратности собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка на графе // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 7. С. 882–889; DOI: 10.31857/S0374064122070020
3. Кулаев Р. Ч. О функции Грина краевой задачи на графе-пучке // Изв. вузов. Матем. 2013. Т. 2. С. 56–66.
4. Кулаев Р. Ч. Неосцилляция уравнения четвёртого порядка на графе // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 12. С. 79–118.
5. Покорный Ю. В., Мустафокулов Р. О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвёртого порядка на графе // Изв. вузов. Матем. 1999. Т. 2. С. 75–82.
6. Borovskikh A. V., Lazarev K. P. Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci. 2004. V. 119, N 6. P. 719–738.
7. Mercier D., Régnier V. Control of a network of Euler–Bernoulli beams // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 342, N 2. P. 874–894.
8. Xu G. Q., Mastorakis N. E. Differential equations on metric graph. Zografou: Wseas Press, 2010.
9. Lubary J. A. On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs // Lect. Notes Pure Appl. Math. 2001. V. 219. P. 135–146.
10. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2007.
11. Kuchment P. Quantum graphs. I. Some basic structures // Waves Random Media. 2004. V. 14, N 1. P. S107–S128.
12. Kuchment P. Quantum graphs. II. Some spectral properties of quantum and combinatouial graphs // J. Phys. A Math. Gen. 2005. V. 38, N 22. P. 4887–4900.
13. Диаб А. Т., Калдыбекова Б. К., Пенкин О. М. О кратности собственных значений в задаче Штурма–Лиувилля на графах // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 4. С. 489–501.
14. Кулаев Р. Ч. Об осцилляции функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2015. V. 51, N 4. С. 445–458.
15. Кулаев Р. Ч. Критерий положительности функции Грина многоточечной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 2. С. 161–173.
16. Кулаев Р. Ч. О свойстве неосцилляции уравнения на графе // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 85–97.
17. Кулаев Р. Ч., Уртаева А. А. Теоремы Штурма о распределении нулей для уравнения четвёртого порядка на графе // Матем. заметки. 2022. Т. 112, № 6. С. 947–952.

18. *Kulaev R. Ch.* The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph // *Mediterr. J. Math.* 2022. V. 19. Article 73.
19. *Kulaev R. Ch., Urtaeva A. A.* Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network // *Math. Methods Appl. Sci.* 2023. V. 46, N 14. P. 15743–15763; DOI: 10.1002/mma.9424
20. *Timoshenko S. P., Young D. H., Weaver Jr. W.* *Vibration Problems in Engineering*, 5th Edition. Hoboken: Wiley InterScience, 1990.

UDC 517.927.25

**UPPER BOUNDS FOR THE EIGENVALUE MULTIPLICITIES OF A
FOURTH-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR ON A GRAPH**

© 2024 A. A. Urtaeva

Khetagurov North Ossetian State University, Vladikavkaz, 362025 Russia

E-mail: urtaeva-96@mail.ru

Received 05.12.2023, revised 11.03.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The paper studies a model of a planar beam structure described by a fourth-order boundary value problem on a geometric graph. Elastic-hinge joint conditions are posed at the interior vertices of the graph. We study the properties of the spectral points of the corresponding spectral problem, prove upper bounds for the eigenvalue multiplicities, and show that the eigenvalue multiplicities depend on the graph structure (the number of boundary vertices, cycles, etc.). We give an example showing that our estimates are sharp.

Keywords: beam equation, quantum graph, eigenvalue, multiplicity.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.209

REFERENCES

1. A. V. Borovskikh, R. Mustafokulov, K. P. Lazarev, and Yu. V. Pokornyi, “On one class of fourth-order differential equations on a spatial network,” *Dokl. Ross. Akad. Nauk* **345** (6), 730–732 (1995) [in Russian].
2. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, “On the multiplicity of eigenvalues of a fourth-order differential operator on a graph,” *Differ. Equations* **58** (7), 869–876 (2022).
3. R. Ch. Kulaev, “The Green function of the boundary-value problem on a star-shaped graph,” *Russ. Math.* **57** (2), 48–57 (2013).
4. R. Ch. Kulaev, “Disconjugacy of fourth-order equations on graphs,” *Sb. Math.* **206** (12), 1731–1770 (2015).
5. Yu. V. Pokornyi and R. Mustafokulov, “On the positivity of the Green’s function of linear boundary value problems for fourth-order equations on a graph,” *Russ. Math.* **43** (2), 71–78 (1999).
6. A. V. Borovskikh and K. P. Lazarev, “Fourth-order differential equations on geometric graphs,” *J. Math. Sci.* **119** (6), 719–738 (2004).
7. D. Mercier and V. RBregnier, “Control of a network of Euler–Bernoulli beams,” *J. Math. Anal. Appl.* **342** (2), 874–894 (2008).
8. G. Q. Xu, N. E. Mastorakis, *Differential Equations on Metric Graph* (Wseas Press, Zografou, 2010).
9. J. A. Lubary, “On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs,” *Lect. Notes Pure Appl. Math.* **219** (Marcel Dekker, New York, 2001), 135–146.
10. Yu. V. Pokornyi, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, and S. A. Shabrov, *Differential Equations on Geometric Graphs* (Fizmatlit, Moscow, 2007) [in Russian].
11. P. Kuchment, “Quantum graphs. I. Some basic structures,” *Waves Random Media* **14** (1), S107–S128 (2004).
12. P. Kuchment, “Quantum graphs. II. Some spectral properties of quantum and combinatorial graphs,” *J. Phys. A Math. Gen.* **38** (22), 4887–4900 (2005).

13. A. T. Diab, B. K. Kaldybekova, and O. M. Penkin, "On the multiplicity of eigenvalues of the Sturm–Liouville problem on graphs," *Math. Notes* **99** (4), 492–502 (2016).
14. R. Ch. Kulaev, "Oscillation of the Green function of a multipoint boundary value problem for a fourth-order equation," *Differ. Equations* **51** (4), 449–463 (2015).
15. R. Ch. Kulaev, "Criterion for the positiveness of the Green function of a many-point boundary value problem for a fourth-order equation," *Differ. Equations* **51** (2), 163–176 (2015).
16. R. Ch. Kulaev, "On the disconjugacy property of an equation on a graph," *Sib. Math. J.* **57** (1), 64–73 (2016).
17. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, "Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph," *Math. Notes* **111** (6), 977–981 (2022).
18. R. Ch. Kulaev, "The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph," *Mediterr. J. Math.* **19**, 73 (2022).
19. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, "Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network," *Math. Methods Appl. Sci.* **46** (14), 15743–15763 (2023). <https://doi.org/10.1002/mma.9424>
20. S. P. Timoshenko, D. H. Young, and W. Weaver, Jr., *Vibration Problems in Engineering* (Wiley Inter-Science, Hoboken, 1990), 5th Ed.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2024. Том 27, № 2

Зав. редакцией Т. А. Звонарева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 12.08.2024 г.
Формат $60 \times 84^{1/8}$. Усл. печ. л. 15,4.
Объём 7, 14 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия