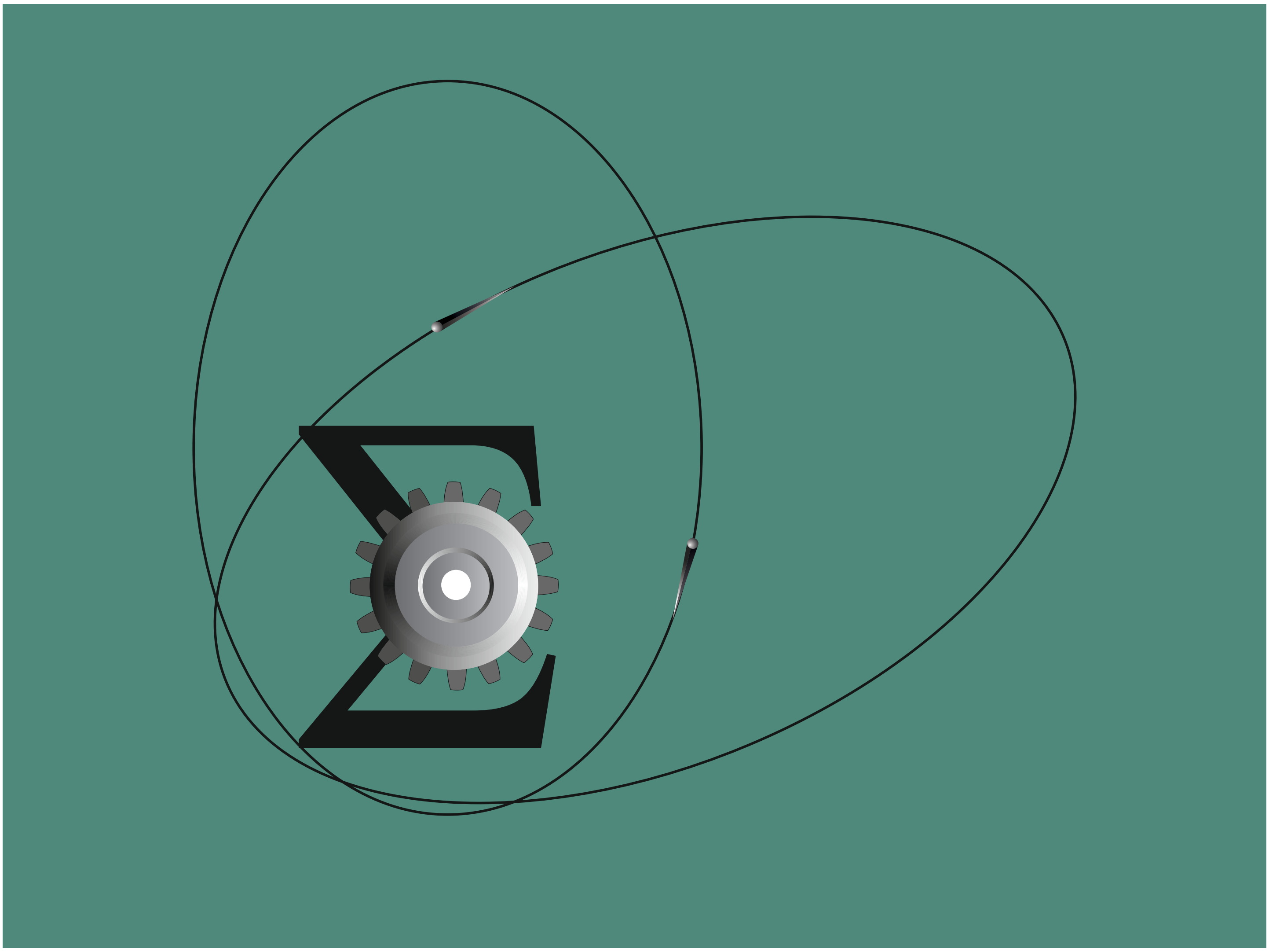
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 27 № 3 2024



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Учредители журнала:
Сибирское отделение РАН
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году | Выходит 4 раза в год

Том 27, № 3(99) | Научный журнал | **Июль–сентябрь, 2024 г.**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СибЖИМ
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
Телефон: +7 (383) 329-76-11
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998 4 issues per year

Vol. 27, No. 3(99) Scientific journal **July–September, 2024**

CONTENTS

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:
SibJIM
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
pr. Akad. Koptyuga 4
Novosibirsk 630090, Russia
Phone: +7 (383) 329-76-11
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

УДК 517.44

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

© 2024 **Д. С. Аниконов**[a], **Д. С. Коновалова**[b]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]anik@math.nsc.ru, [b]dsk@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 04.07.2023 г.; после доработки 18.04.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

В нечётномерном евклидовом пространстве вводится понятие псевдовыпуклого множества, состоящего из конечного числа ограниченных областей. Получена формула обращения преобразования Радона для подынтегральной кусочно-непрерывной функции, заданной на псевдовыпуклом множестве. Достигнутый результат является обобщением ранее известного свойства, доказанного для гладких функций.

Ключевые слова: преобразование Радона, разрывные функции, псевдовыпуклое множество, зондирование, томография, формула обращения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.301

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассматривается нечётномерное евклидово пространство E_n, $n = 2m + 1$, $m = 1, \dots$ с заданной в нём декартовой системой координат. Будем использовать следующие обозначения: $B(x, \delta) = \{y : y \in E_n, |y - x| < \delta\}$, $x \in E_n$; Δ_x — оператор Лапласа по переменной x; $x = (x_1, \dots, x_n)$; $const$ — положительное число; Ω — единичная сфера в E_n; s — элемент сферы Ω; ∂T — граница множества T; $\mu_k(T)$ — мера Лебега множества T в пространстве E_k; $\mu_\Omega(Q)$ — мера Лебега множества Q, $Q \subset \Omega$, по мере, определённой на Ω; $Y(s, p) = \{y : y \in E_n, y \cdot s = p\}$ — гиперплоскость в E_n, $p \in R^1$.

Пусть в E_n задана ограниченная область G, содержащая непересекающиеся подобласти G_i, $i = 1, \dots, N$, причём для их объединения G_0 верно равенство $\overline{G_0} = \overline{G}$. Предполагается, что каждая граница ∂G_i является $(n-1)$-мерной непрерывной поверхностью. Ясно, что $\partial G_0 = \partial G_1 \bigcup \dots \bigcup \partial G_N$.

Назовём G_0 псевдовыпуклым множеством, если существует множество Ω', $\Omega' \subset \Omega$ и числа $p^+(s)$, $p^-(s)$, $s \in \Omega'$ со следующими свойствами.

1. Мера множества $\Omega \setminus \Omega'$ равна нулю, т. е. $\mu_\Omega(\Omega \setminus \Omega') = 0$.

2. Для любого вектора $s \in \Omega'$ и для $p \geqslant p^+(s)$, $p \leqslant p^-(s)$ справедливо равенство $Y(s, p) \bigcap G = \emptyset$.

3. Для всех $s \in \Omega'$ и для $p^-(s) < p < p^+(s)$ пересечение $Y(s, p) \bigcap G_0$ является непустым множеством, граница которого имеет нулевую меру по мере пространства E_{n-1} и $\mu_{n-1}(Y(s, p) \bigcap \partial G_0) = 0$.

4. Для всех $s \in \Omega'$, если $p \to p^+(s)$ или $p \to p^-(s)$, то $\mu_{n-1}(Y(s, p) \bigcap G) \to 0$.

Для пояснения данного определения приведём два простых, но характерных примера.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $G = B(0, 2\delta)$, $G_1 = \{y : y \in E_3, -\delta < y_i < \delta, i = 1, 2, 3\}$, $G_2 = G\backslash\overline{G_1}$. Тогда из сферы Ω достаточно убрать вектора, коллинеарные координатным осям, чтобы получить Ω' и псевдовыпуклое множество $G_0 = G_1 \bigcup G_2$.

Пример 2. Пусть $n = 3$, G_1, G_2 — два шара в E_3 на положительном расстоянии друг от друга. Если $G_0 = G_1 \bigcup G_2$, то это множество не является псевдовыпуклым поскольку нарушается третье условие из определения. Однако, если добавить фиктивный шар G, содержащий G_1 и G_2, то для $G_0 = G_1 \bigcup G_2 \bigcup G_3$, $G_3 = G\backslash(\overline{G_1} \bigcup \overline{G_2})$, G_0, оказывается псевдовыпуклым, причём $\Omega' = \Omega$.

Вообще, введённое определение охватывает многие случаи ограничений, адекватных теории зондирования.

Определим класс V разрывных функций $v(y)$, $y \in E_n$, удовлетворяющих условиям: $|v(y) - v(\tilde{y})| \leqslant const|y - \tilde{y}|^\alpha$, $y, \tilde{y} \in G_i$, $i = 1, \ldots, N$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и $v(y) = 0$ для $y \notin G$.

Рассмотрим следующий поверхностный интеграл первого рода по гиперплоскости $Y(s, p)$

$$[Rv](s, p) = \int_{y \cdot s = p} v(y) d_y\sigma, \quad s \in \Omega, \quad -\infty < p < \infty. \tag{1}$$

Ясно, что если $v \in V$, G_0 — псевдовыпуклое множество, то интеграл в правой части равенства (1) существует. Именно он и называется преобразованием Радона функции v.

2. ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Не претендуя на обзор темы, скажем, что имеются многочисленные публикации, посвящённые исследованию и применению преобразования Радона в различных направлениях математики. Так оно оказалось эффективным в теории дифференциальных уравнений [1, 2]. Кроме того, преобразование Радона широко применяется в теории зондирования, например, в томографии [3–5]. Вообще, некоторое представление о состоянии исследований преобразований Радона можно получить из публикаций [6–20], где в том числе рассмотрены и различные обобщения преобразования Радона. Настоящая работа посвящена проблеме обращения преобразования Радона, и является обобщением формулы, доказанной в [2] для гладких подынтегральных функций, что не вполне соответствует естественным ограничениям, например, для проблем зондирования. Здесь мы рассматриваем случай разрывных подынтегральных функций. Несмотря на имеющееся многообразие вариантов исследований, наша работа не имеет близких аналогов среди всех известных авторам публикаций.

Теорема. *Пусть $v \in V$, G_0 — псевдовыпуклое множество. Тогда справедливо равенство:*

$$(\Delta_x)^m \int_\Omega [Rv](s, x \cdot s) ds = (-1)^m 2(2\pi)^{2m} v(x), \quad x \in G_0. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала докажем, что функция $[Rv](s, p)$ непрерывна по p при почти всех $s \in \Omega$. Возьмём произвольный вектор $s \in \Omega'$ и запишем преобразование Радона в декартовой системе координат с ортами осей $a_1, \ldots, a_n$, $a_n = s$. Тогда функция $[Rv](s, p)$ записывается в следующем простом виде

$$[Rv](s, p) = \int_{E_{n-1}} v(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p) d\eta_1, \ldots, d\eta_{n-1}.$$

Используем числа $p^+(s), p^-(s)$, указанные в определении псевдовыпуклого множества G_0. Рассмотрим случай $p^+(s) > p > p^-(s)$. Такому значению p соответствует сечение $Y(s, p) \bigcap G_0$. Для произвольной точки $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p)$ из этого сечения существует шар $B(\eta, \delta) \subset G_0$, в котором функция v непрерывна. Пусть $\{p_k\}$ — произвольная числовая последовательность, сходящаяся к p. Начиная с некоторого номера, все точки $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p_k) \in B(\eta, \delta)$. Поэтому $v(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p_k) \to v(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p)$. В силу выбора точки $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, p)$ такая сходимость имеется для почти всех $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$, соответствующих сечению $Y(s,p) \bigcap G$. Отсюда, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_{n-1}} v(\eta_1, ..., \eta_{n-1}, p_k) d\eta_1, ..., d\eta_{n-1} = \int_{E_{n-1}} v(\eta_1, ..., \eta_{n-1}, p) d\eta_1, ..., d\eta_{n-1},$$

что и означает непрерывность функции $[Rv](s,p)$ по p, $p^-(s) < p < p^+(s)$.

Что касается непрерывности этой функции для остальных значений p, то она легко следует из второго и четвёртого условий псевдовыпуклости.

Далее мы следуем схеме рассуждений, использованной, в частности, в [1, 2] для гладких функций.

Рассмотрим выражение

$$U(x) = \int_G \int_\Omega v(y)|(y-x)\cdot s| ds dy, \quad s \in \Omega',\ x \in G_0$$

и выразим его через преобразование Радона, меняя порядок интегрирования и используя теорему Фубини:

$$U(x) = \int_\Omega \int_G v(y)|(y-x)\cdot s| dy ds = \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} |p| [Rv](s, p + x\cdot s) dp ds.$$

Обратим внимание на внутренний интеграл по переменной p. Как уже доказано, подынтегральная функция непрерывна по p. Этого свойства оказывается достаточно для следующего равенства

$$\Delta_x \int_{-\infty}^{\infty} |p| [Rv](s, p + x\cdot s) dp ds = 2[Rv](s, x\cdot s).$$

Следовательно,

$$\Delta_x U(x) = 2 \int_\Omega [Rv](s, x\cdot s) ds. \tag{3}$$

Для значения $\Delta_x U(x)$ можно получить и другое представление. Для этого нам понадобятся известные свойства

$$\int_\Omega |\xi\cdot s)| ds = \frac{2(\pi^m)}{m!}|\xi|, \quad \xi \in E_n, \quad \Delta_x |y-x| = 2m|y-x|^{-1}.$$

Тогда нетрудно убедиться в том, что

$$U(x) = \frac{2(\pi^m)}{m!} \int_G v(y)|y-x| dy, \quad \Delta_x U(x) = \frac{4m(\pi^m)}{m!} \int_G v(y)|y-x|^{-1}| dy. \tag{4}$$

Сравнивая выражения для $\Delta_x U(x)$ в (3) и в (4), получаем равенство

$$\int_\Omega [Rv](s, x\cdot s) ds = \gamma_1 \int_G \frac{v(y)}{|y-x|} dy, \quad \gamma_1 = \frac{2m\pi^m}{m!},$$

которое можно записать также в виде

$$\int_\Omega [Rv](s, x\cdot s) ds = \frac{\gamma_1}{2m} \int_G \Delta_x v(y)|y-x| dy. \tag{5}$$

Теперь нам понадобятся следующие тождества, приведённые, например, в [2],

$$(\Delta_x)^m |y-x| = \gamma_2 |y-x|^{2-n}, \quad \gamma_2 = \frac{(-1)^m 2^n \Gamma(1,5)\Gamma(m+1)\Gamma(n/2)}{\pi(2-n)},$$
$$\Delta_x \int_G \frac{v(y)}{|y-x|^{n-2}} dy = \gamma_3 v(x), \quad \gamma_3 = \frac{2\pi^{n/2}(2-n)}{\Gamma(n/2)} \tag{6}$$

Применяя к обеим частям равенства (5) оператор $(\Delta_x)^m$ и используя тождества (6), получаем

$$(\Delta_x)^m \int_\Omega [Rv](s, x\cdot s) ds = \frac{\gamma_1}{2m} (\Delta_x)^m \int_G (\Delta_x) \frac{v(y)}{|y-x|} dy = \frac{\gamma_1}{2m} \Delta_x \int_G \gamma_2 \frac{v(y)}{|y-x|^{n-2}} dy = \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{2m} v(x).$$

Нетрудно проверить, что $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)/2m = (-1)^m 2(2\pi)^{2m}$, что и означает справедливость равенства (2). Теорема доказана. □

В заключение отметим, что формула (2) отличается от формулы обращения в [2] только тем, что она справедлива не для всех, а для почти всех точек в E_n, что несколько снижает её ценность. Однако в [2] требуется принадлежность функции $v(y)$ пространству $C^1(E_n)$, а в нашей работе допускаются и разрывные функции. Такой результат стал возможен за счёт введения нового определения псевдовыпуклого множества. Можно надеяться, что формула (2) послужит основанием для новых алгоритмов в теории зондирования, где разрывные характеристики являются естественными.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
2. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.
3. *Markoe A.* Analytic tomography. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
4. *Anikonov D. S., Prokhorov I. V., Kovtanyuk A. E.* Investigation of scattering and absorbing media by methods of X-ray tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N 4. P. 259–281.
5. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
6. *Derevtsov E. Yu., Volkov Yu. S., Schuster T.* Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields // Numerical computations: Theory and algorithms. 2020. P. 97–111.
7. *Svetov I. E., Polyakova A. P.* Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor // Inverse Probl. 2024. V. 40, N 1. Article 015009; DOI: 10.1088/1361-6420/ad0fac
8. *Светов И. Е.* Метод приближенного обращения для операторов преобразования Радона функций и нормального преобразования Радона векторных и симметричных 2-тензорных полей в R3 // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 1073–1087.

9. *Темиргалиев Н., Абикенова Ш. К., Ажгалиев Ш. У., Таугынбаева Г. Е.* Преобразование Радона в схеме К(В)П-исследований и теории квази- Монте-Карло // Изв. вузов. Матем. 2020. № 3. С. 98–104.

10. *Vinohradov M., Ponomarenko O., Moshensky A., Savchenko A.* Conformal Mapping of Discontinuous Functions for Inverse Radon Transform // Systems, Decision and Control in Energy V. 2023. V. 481. P. 115–126; DOI: 10.1007/978-3-031-35088-7_8

11. *Olugboji T., Zhang Z., Carr S., Cetin C.* On the detection of upper mantle discontinuities with radon-transformed receiver functions (CRISP-RF) // Geophys. J. Int. 2024. V. 236. P. 748–763.

12. *Katsevich A.* Analysis of Reconstruction from Discrete Radon Transform Data in R^3 When the Function Has Jump Discontinuities // SIAM J. Math. Anal. 2020. V. 52, N 4. P. 3990-4021; DOI: 10.1137/19M1295039

13. *Баев А. В.* Использование преобразования радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 4, С. 550–560.

14. *Bellet J. B.* An Exact Radon Formula for Lambertian Tomography // J. Math. Imaging Vis. 2022. V. 64. P. 939–947; DOI: 10.1007/s10851-022-01103-0

15. *Webber J.* Microlocal Analysis of Generalized Radon Transforms from Scattering Tomography // SIAM J. Math. Anal. 2021. V. 14, N 3. P. 976–1003; DOI: 10.1137/20M1357305

16. *Agranovsky M., Kuchment P., Kunyansky L.* On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography // Photoacoustic Imaging Spectrosc. 2017. P. 89–102.

17. *Ambartsoumian G., Kuchment P.* A range description for the planar circular Radon transform // SIAM J. Math. Anal. 2006. V. 38, N 2. P. 681–692.

18. *Аниконов Д. С., Балакина Е. Ю., Коновалова Д. С.* Обратная задача для обобщённого преобразования Радона // Научно-технич. ведомости СПбГПУ. Сер. Физ.-мат. науки. (2022) С. 41–51

19. *Anikonov D. S., Kazantsev S. G., Konovalova D. S.* A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2023. V. 31, N 6. P. 959–965; DOI: 10.1515/jiip-2023-0038

20. *Kalnin T. G., Ivonin D. A., Abrosimov K. N., Grachev E. A., Sorokina N. V.* Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods // Eurasian Soil Science. 2021. V. 54, N 9. P. 1400–1409.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.44

RADON TRANSFORM INVERSION FORMULA IN THE CLASS OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS

© 2024 D. S. Anikonov[a], D. S. Konovalova[b]

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia

E-mails: [a]anik@math.nsc.ru, [b]dsk@math.nsc.ru

Received 04.07.2023, revised 18.04.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. We introduce the concept of a pseudoconvex set in an odd-dimensional Euclidean space. The inversion formula is obtained for the Radon transform in the case where the integrand is a piecewise continuous function defined on a pseudoconvex set. The result achieved is a generalization of a previously known property proved for smooth functions.

Keywords: Radon transform, discontinuous functions, pseudoconvex set, probing, tomography, inversion formula.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.301

REFERENCES

1. R. Courant, *Partial Differential Equations* (Interscience, Paris, 1962; Mir, Moscow, 1964).
2. F. John, *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations* (Springer, New York, 1981; Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1958).
3. A. Markoe, *Analytic tomography* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006).
4. D. S. Anikonov, I. V. Prokhorov, and A. E. Kovtanyuk, "Investigation of scattering and absorbing media by methods of X-ray tomography," J. Inverse Ill-Posed Probl. **1** (4), 259–281 (1993).
5. F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography* (John Wiley, Stuttgart, 1986; Mir, Moscow, 1990).
6. E. Yu. Derevtsov, Yu. S. Volkov, and T. Schuster, "Differential equations and uniqueness theorems for the generalized attenuated ray transforms of tensor fields," in *Numerical Computations: Theory and Algorithms* (2020), 97–111.
7. I. E. Svetov and A. P. Polyakova, "Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor," Inverse Probl. **40** (1), 015009 (2024). https://doi.org/10.1088/1361-6420/ad0fac
8. I. E. Svetov, "Approximate inversion method for Radon transform operators of functions and normal Radon transform of vector and symmetric 2-tensor fields in R^3," Sib. Elektron. Mat. Izv. **17**, 1073–1087 (2020).
9. N. Temirgaliev, Sh. K. Abikenova, Sh. U. Azhgaliev, and G. E. Taugynbaeva, "The Radon transform in the scheme of C(N)D-investigations and the quasi-Monte Carlo theory," Russ. Math. **64**, 87–92 (2020).
10. M. Vinohradov, O. Ponomarenko, A. Moshensky, and A. Savchenko, "Conformal mapping of discontinuous functions for inverse Radon transform," Syst. Decis. Control Energy **481**, 115–126 (2023). https://doi.org/10.1007/978-3-031-35088-7_8
11. T. Olugboji, Z. Zhang, S. Carr, and C. Cetin, "On the detection of upper mantle discontinuities with Radon-transformed receiver functions (CRISP-RF)," Geophys. J. Int. **236**, 748–763 (2024).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 379–383.

12. A. Katsevich, “Analysis of reconstruction from discrete Radon transform data in R^3 when the function has jump discontinuities,” SIAM J. Math. Anal. **52** (4), 3990–4021 (2020). https://doi.org/10.1137/19M1295039

13. A. V. Baev, “Radon transform for solving an inverse scattering problem in a planar layered acoustic medium,” Comput. Math. Math. Phys. **58** (4), 537–547 (2018).

14. J. B. Bellet, “An exact Radon formula for Lambertian tomography,” J. Math. Imaging Vis. **64**, 939–947 (2022). https://doi.org/10.1007/s10851-022-01103-0

15. J. Webber, “Microlocal analysis of generalized Radon transforms from scattering tomography,” SIAM J. Math. Anal. **14** (3), 976–1003 (2021). https://doi.org/10.1137/20M1357305

16. M. Agranovsky, P. Kuchment, and L. Kunyansky, “On reconstruction formulas and algorithms for the thermoacoustic tomography,” Photoacoust. Imaging Spectrosc. 89–102 (2017).

17. G. Ambartsoumian and P. Kuchment, “A range description for the planar circular Radon transform,” SIAM J. Math. Anal. **38** (2), 681–692 (2006).

18. D. S. Anikonov, E. Yu. Balakina, and D. S. Konovalova, “Inverse problem for the generalized Radon transform,” Nauchn.-Tekh. Vedomosti SPbGU. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 41–51 (2022).

19. D. S. Anikonov, S. G. Kazantsev, and D. S. Konovalova, “A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform,” J. Inverse Ill-Posed Probl. **31** (6), 959–965 (2023). https://doi.org/10.1515/jiip-2023-0038

20. T. G. Kalnin, D. A. Ivonin, K. N. Abrosimov, E. A. Grachev, and N. V. Sorokina, “Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods,” Eurasian Soil Sci. **54** (9), 1400–1409 (2021).

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 3. С. 12–25

УДК 519.6:004.4

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2024 Е. В. Антипина[1a], С. А. Мустафина[1b], А. Ф. Антипин[2c]

[1] *Уфимский университет науки и технологий, ул. Заки Валиди, 32, г. Уфа 450076, Россия,*
[2] *Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, просп. Ленина, 49, г. Стерлитамак 453103, Россия*

E-mails: [a]stepashinaev@ya.ru, [b]mustafina_sa@mail.ru, [c]andrejantipin@ya.ru

Поступила в редакцию 10.09.2023 г.; после доработки 17.04.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

Статья посвящена разработке численного алгоритма для поиска приближенного решения задачи оптимального управления с терминальными ограничениями и ограничениями на управление. Алгоритм основан на редукции исходной задачи оптимального управления к конечномерной задаче и применении для её решения метода штрафов и метода дифференциальной эволюции. Особенностью предложенного подхода является независимость найденного решения от выбора начального приближения. Работа алгоритма иллюстрируется его применением для решения прикладных задач оптимального управления. Полученные результаты вычислительных экспериментов согласуются с результатами расчётов на основе других методов.

Ключевые слова: оптимальное управление, терминальные ограничения, дифференциальная эволюция, метод штрафов, эволюционные вычисления.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.302

ВВЕДЕНИЕ

Поиск решения прикладных задач оптимального управления часто связан с нелинейностью управляемой системы, наличием ограничений, накладываемых как на управление, так и на фазовые переменные. Наличие фазовых ограничений усложняет решение оптимизационных задач как в теоретическом исследовании свойств оптимальных процессов, так и в реализации алгоритмов численного решения. Однако учёт фазовых ограничений позволяет учитывать особенности протекания процесса, и, тем самым, делает его математическое описание более точным.

Один из подходов к решению задач оптимального управления с фазовыми ограничениями заключается в получении точных необходимых условий оптимальности и построении на их основе вычислительных процедур [1]. Необходимые условия оптимальности решений задач оптимального управления с фазовыми ограничениями в форме принципа максимума Понтрягина получены в работах [2, 3]. Однако вычислительные процедуры, построенные на основе необходимых условий, достаточно трудоёмки и трудно применимы при решении прикладных задач.

Другой подход предполагает сведение задачи с ограничениями на фазовые переменные к задаче без ограничений путём применения метода штрафов. В данном методе вводится в рассмотрение вспомогательная функция путём добавления к критерию качества управления исходной задачи «штрафа» за нарушение ограничений, накладываемых на фазовые переменные [4]. Затем решается задача оптимального управления без ограничений, где критерием качества управления выступает построенная вспомогательная функция. Численная реализация данного метода представлена в работах [5,6]. Последовательность оптимизационных задач без ограничений решается с помощью градиентного метода. Недостатком градиентных методов является чувствительность решения оптимизационной задачи к выбору начального приближения, что может привести к попаданию решения в локальный экстремум или в область, противоречащую физическому смыслу задачи.

При решении прикладных задач часто бывает достаточно получить приближенное значение управляющего параметра. Это связано с ограниченностью времени для определения управляющего воздействия на управляемый процесс с целью достижения показателей заданного уровня в режиме реального времени. Поэтому возникает необходимость в разработке численных методов построения оптимального управления, которые позволяют получить приближенное решение задачи с фазовыми ограничениями и при этом легкореализуемы на практике.

В настоящее время для решения оптимизационных задач широко применяются эволюционные вычисления [7,8]. Эволюционные методы не используют в процессе поиска решения ни необходимые, ни достаточные условия оптимальности. С их помощью можно найти решение, которое может отличаться от оптимального, но при этом является приемлемым с практической точки зрения [9]. В отличие от классических методов оптимизации, эволюционные методы могут применяться в случае, когда отсутствует информация о свойствах исследуемой функции.

Одним из методов эволюционного поиска является метод дифференциальной эволюции [10, 11]. Это метод многомерной оптимизации, позволяющий определять глобальный экстремум нелинейных, недифференцируемых и мультимодальных функций без вычисления производных целевой функции. Важной особенностью метода дифференциальной эволюции является независимость полученного решения от выбора его начального приближения [12]. Отсутствие чувствительности к начальному приближению достигается за счёт того, что на каждой итерации оптимизируется не одно возможное решение, а одновременно рассматривается их совокупность, что позволяет увеличить область поиска.

По сравнению с другими методами, метод дифференциальной эволюции позволяет за меньшее время найти приближенное значение параметров оптимального управления процессом. В работе [13] показано, что для решения оптимизационных задач с помощью метода дифференциальной эволюции требуется меньше времени, в отличие от других стохастических методов оптимизации. В работе [14] приведено сравнение метода дифференциальной эволюции с генетическим алгоритмом и адаптивным методом имитации отжига, продемонстрирована необходимость меньшего количества обращений к целевой функции, по сравнению с вышеперечисленными численными методами оптимизации.

Целью работы является разработка численного алгоритма поиска приближенного решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями и с ограничениями на управление на основе метода штрафов и метода дифференциальной эволюции.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x^0, \tag{2}$$

где $t \in [t_0, T]$ — время, $x \in R^n$ — вектор фазовых переменных, $u(t) \in R^m$ — вектор управляющих функций, $f(t, x(t), u(t))$ — непрерывная вместе со своими частными производными вектор-функция.

На управление наложены ограничения

$$\alpha_j(t) \leqslant u_j(t) \leqslant \beta_j(t), \quad j = \overline{1,m}, \quad t \in [t_0, T]. \tag{3}$$

Пусть заданы краевые условия в конце процесса управления ($t = T$):

$$g_j(x(T)) = 0, \quad j = \overline{1,p}, \tag{4}$$

где $g_j(x(T))$ — непрерывно-дифференцируемые функции по всем аргументам.

Зададим критерий оптимальности как функцию конечного состояния системы

$$J(u) = g_0(x(T)). \tag{5}$$

Задача оптимального управления для процесса (1), (2) с терминальными ограничениями состоит в поиске управления $u(t)$, которое с учётом ограничений (3) приводит процесс в точку фазового пространства, в которой выполнено условие (4), и функционал (5) достигает наименьшего значения.

Для построения аппроксимирующей задачи на интервале $[t_0, T]$ введём сетку дискретизации с узлами $t_0, t_1, \ldots, t_N$ и шагом $h = \dfrac{T - t_0}{N}$ такими, что $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$, $t_N = T$, в которых будем искать управляющие функции $u_j(t)$, $j = \overline{1,m}$. Для получения промежуточных значений управляющих функций используем кусочно-постоянную аппроксимацию

$$u_j(t) = u_j(t_k) = u_{jk}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Терминальные ограничения (4) преобразуются к виду

$$g_j(x(t_N)) = 0, \quad j = \overline{1,p}. \tag{6}$$

Тогда конечномерная задача, аппроксимирующая задачу (1)–(5) состоит в определении вектора управления $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$, при котором с учётом ограничений

$$\alpha_{jk} \leqslant u_{jk} \leqslant \beta_{jk}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{0, N-1},$$

где $\alpha_{jk} = \alpha_j(t_k)$, $\beta_{jk} = \beta_j(t_k)$, и условий (6) критерий оптимальности достигает наименьшего значения, то есть

$$g_0(x(t_N) \to \min.$$

Дифференциальные уравнения (1), описывающие управляемый процесс, приближенно заменим разностными, например, с помощью численного метода Рунге—Кутты четвёртого порядка

$$\begin{gathered}
x(t_{i+1}) = x(t_i) + h(K_{1i} + 2K_{2i} + 2K_{3i} + K_{4i})/6, \\
K_{1i} = f(t_i, x_i, u_i), \\
K_{2i} = f(t_i + h/2, x_i + K_{1i}h/2, u_i), \\
K_{3i} = f(t_i + h/2, x_i + K_{2i}h/2, u_i), \\
K_{4i} = f(t_i + h, x_i + K_{3i}, u_i).
\end{gathered} \tag{7}$$

2. АЛГОРИТМ ПОИСКА СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ И ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Сформулируем пошаговый алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления с терминальными ограничениями на основе метода штрафных функций и дифференциальной эволюции.

Для перехода от задачи с терминальными ограничениями к задаче без ограничений введём в рассмотрение вспомогательный функционал

$$I(u) = J(u) + R(u, z^s) \to \min, \tag{8}$$

где $R(u, z^s) = (z^s/2) \cdot \sum\limits_{j=1}^{p} (g_j(x(T)))^2$ — штрафной функционал, z^s — параметр штрафа, вычисляемый на s-й итерации. Если ограничения (4) нарушены и $z^s \to \infty$ при $s \to \infty$, то $R(u, z^s) \to \infty$ при $s \to \infty$.

Для поиска решения задачи оптимального управления с критерием оптимальности (8) применим метод дифференциальной эволюции. Работа метода основана на имитации эволюционных процессов, которым подвергаются особи, образующие популяцию [15]. Каждой особи ставится в соответствие значение функции приспособленности, которой является критерий оптимальности (8). Для задачи на поиск минимума наиболее приспособленной особи соответствует наименьшее значение целевого функционала (8). Путём применения математических операторов отбора, скрещивания и мутации происходит изменение и обновление популяции, в результате чего в новое поколение переходят наиболее приспособленные особи [16]. Итеративная процедура смены популяций происходит до тех пор, пока не будет выполнено условие окончания работы алгоритма.

В качестве особи рассмотрим параметр управления

$$u = \begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1\,N-1} \\ u_{20} & u_{21} & \dots & u_{2\,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m0} & u_{m1} & \dots & u_{m\,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

где $u_{jk} = u_j(t_k)$, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{0, N-1}$. Тогда популяцией является набор из P особей $u^l = (u_1^l, u_2^l, \dots, u_m^l)^T$, где l — номер особи в популяции ($l = \overline{0, P}$).

Алгоритм поиска приближенного решения задачи оптимального управления с терминальными условиями и ограничениями на управление состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Задать параметры метода штрафов: начальное значение параметра штрафа z^0, параметр увеличения штрафа $b > 1$ (обычно выбирается $z^0 = 0.01, 0.1, 1$; $b \in [4, 10]$ [17]), параметр завершения поиска решения $\varepsilon_2 > 0$. Задать параметры метода дифференциальной эволюции: параметр скрещивания $ps \in [0, 1]$, параметр мутации $pm \in [0.5, 1]$ [14], размер популяции P, параметры завершения вычислений d, $\varepsilon_1 > 0$. Установить счётчик итераций $s = 1$.

Шаг 2. Заполнить начальную популяцию случайными числами из области допустимых значений управления:

$$u_{jk}^l(0) = \alpha_{jk} + q_{jk}(\beta_{jk} - \alpha_{jk}),$$

где $q_{jk} \in [0, 1]$ — случайное число, $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{0, N-1}$, $l = \overline{1, P}$.

Шаг 3. Вычислить значение функции приспособленности (8) для каждой особи u^l ($l = \overline{1, P}$), используя разностную схему (7).

Шаг 4. Задать в качестве особи-мишени первую особь текущей популяции: $u^{mish} := u^1$, $mish := 1$.

Шаг 5. Найти в популяции особь u^{best} с наилучшим значением функции приспособленности.

Шаг 6. Применить оператор мутации. Для этого выбрать из текущей популяции четыре различных элемента u^{num1}, u^{num2}, u^{num3}, u^{num4}, которые не совпадают ни с особью-мишенью u^{mish}, ни с наиболее приспособленной особью u^{best}. Сгенерировать новую особь u^{mut}:

$$u^{mut} := u^{best} + pm \cdot (u^{num1} + u^{num2} - u^{num3} - u^{num4}).$$

Шаг 7. Подвергнуть процедуре скрещивания особь, полученную в результате мутации u^{mut} и особь-мишень u^{mish}. Сформировать новую пробную особь u^{prob} по правилу:

$$u^{prob}_{jk} = \begin{cases} u^{mut}_{jk}, & w_{jk} \leqslant ps, \\ u^{mish}_{jk}, & w_{jk} > ps, \end{cases}$$

где $w_{jk} \in [0, 1]$ — случайное число, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N-1}$.

Шаг 8. Вычислить значение функции приспособленности для пробной особи u^{prob}, используя формулы (7).

Шаг 9. Обновить популяцию. Если $J(u^{prob}) < J(u^{mish})$, то в новую популяцию поместить пробную особь u^{prob}, иначе — особь-мишень u^{mish}.

Шаг 10. Если в качестве мишени рассматривались все особи популяции ($mish = P$), то перейти к шагу 11. Иначе увеличить номер особи-мишени $mish$ на 1 и перейти к шагу 5.

Шаг 11. Проверить условие окончание работы алгоритма дифференциальной эволюции. Вычислить расстояние ρ_{ij} между элементами текущей $u^i(s)$ и предыдущей $u^j(s-1)$ популяций ($i, j = \overline{0, P}$), а также изменение функций приспособленности Δ_{ij} ($s \geqslant 2$):

$$\rho_{ij} = \rho(u^i(s), u^j(s-1)) = \|u^i(s) - u^j(s-1)\|,$$

$$\Delta_{ij} = \Delta(u^i(s), u^j(s-1)) = |J(u^i(s)) - J(u^j(s-1))|, \quad i, j = \overline{0, P}.$$

Если на протяжении d поколений выполнены условия $\rho_{ij} < \varepsilon_1$, $\Delta_{ij} < \varepsilon_1$, то есть происходит незначительное изменение популяции и функций приспособленности, то перейти к шагу 12. Иначе увеличить счётчик итераций s на 1 и перейти к шагу 4.

Шаг 12. Проверить условие окончания поиска решения. Выбрать из последней популяции особь u^{best}, которой соответствует наилучшее значение функции приспособленности. Если $R(u, z^s) > \varepsilon_2$, то увеличить значение штрафа: $z^{s+1} = b \cdot z^s$ и перейти к шагу 4. Если $R(u, z^s) \leqslant \varepsilon_2$, то остановить работу алгоритма. Приближенным решением задачи оптимального управления с терминальными ограничениями будет наиболее приспособленная особь u^{best} из последней популяции.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки эффективности разработанного алгоритма проведён ряд вычислительных экспериментов по решению практических задач оптимального управления с закреплённым правым концом траектории. Для проведения расчётов авторами разработано программное средство на языке программирования Delphi.

Задача посадки тяжёлого летательного аппарата

Сингулярно возмущённая задача оптимального управления планирующим спуском летательного аппарата имеет вид [18]

$$\begin{gathered}\dot{x_1} = \frac{cos(x_3)}{aC(u)x_2^2},\\ \varepsilon\dot{x_2} = -\frac{1}{x_2} - \frac{sin(x_3)}{aC(u)x_2^3},\\ \varepsilon\dot{x_3} = \frac{u}{C(u)x_2^2} - \frac{cos(x_3)}{aC(u)x_2^4},\\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 2.19905, \quad x_3(0) = 0,\\ t \in [0, T], \quad T = 0.2185,\end{gathered} \tag{9}$$

где $x_1(t)$ — дальность полёта, $x_2(t)$ — скорость, $x_3(t)$ — угол наклона траектории (угол между вектором скорости и горизонтальной плоскостью), $a = 1.62079$, $C(u) = 0.01 + 0.3u^2$, $\varepsilon = 0.01$. В качестве параметра управления рассматривается $u(t)$ — аэродинамический коэффициент подъёмной силы.

Пусть заданы ограничения на правый конец траектории

$$x_2(T) = 1.09905, \quad x_3(T) = 0 \tag{10}$$

и ограничение на управление

$$0.08 \leqslant u(t) \leqslant 0.417, \quad t \in [0, T]. \tag{11}$$

Задача управления спуском летательного аппарата заключается в поиске управляющей функции $u(t)$, при которой с учётом ограничений (10), (11) достигается максимальная дальность полёта, то есть

$$J(u) = -x_1(T) \to \min. \tag{12}$$

Для решения задачи (9)–(12) применён алгоритм на основе метода штрафов и метода дифференциальной эволюции со следующими параметрами: $ps = 0.8$, $pm = 0.7$, $P = 100$, $d = 5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$, $z^0 = 1$, $b = 10$.

Параметры метода штрафов и метода дифференциальной эволюции подобраны путём проведения серии вычислительных экспериментов, в которых варьируются возможные значения параметров методов. Начальное значение штрафа z^0 принималось равным 0.01, 0.1, 1. Для значений z^0, меньших 1, точность решения уменьшается, поэтому в качестве начального значения штрафа выбрано значение, равное 1. Параметр увеличения штрафа b задавался равным 4, 7, 10. Результаты расчётов показали, что для данной задачи параметр b не оказывает существенного влияния на точность получаемого решения.

Настраиваемыми параметрами метода дифференциальной эволюции являются параметр мутации pm, параметр скрещивания ps, размер популяции P. При проведении вычислений параметр мутации pm рассматривался равным 0.5, 0.7, 0,9, 1. Выявлено, что при приближении его значения к 1 возникают скачки на кривой управления и уменьшение точности решения. Поэтому параметр мутации pm можно задавать значениями из диапазона $[0.5, 0.8]$, не влияя на точность получаемого решения задачи. При исследовании влияния параметра скрещивания на решение установлено, что управление не изменяется при значениях ps, начиная с 0.8. Для значений ps, меньших 0.8, появляются скачкообразные изменения управления. Размер популяции P задавался равным 20, 50, 80, 100, 120. Для значений P, меньших 100, также наблюдаются скачки на кривой управления. Начиная с $P = 100$ структура управления выравнивается, поэтому повышение размера популяции нецелесообразно ввиду увеличения вычислительных затрат на поиск решения задачи.

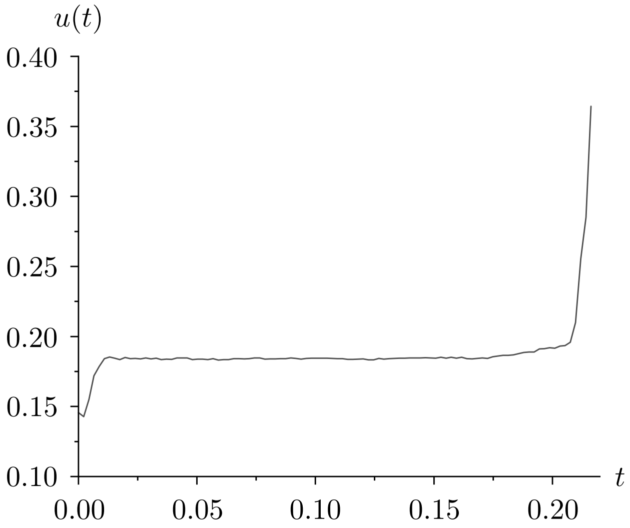


Рис. 1. График субоптимального управления спуском летательного аппарата

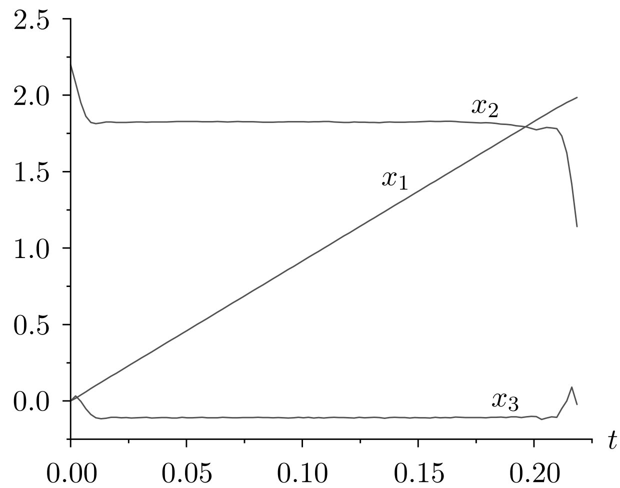


Рис. 2. График фазовых переменных в задаче управления спуском летательного аппарата

Полученное приближенное решение приведено на рис. 1, 2. При этом дальность полёта составляет $x_1(T) = 1.98543$, значения краевых условий — $x_2(T) = 1.14118$, $x_3(T) = -0.02247$.

Решение данной задачи ранее было получено в работе [18] с помощью алгоритма последовательной линеаризации с использованием модифицированной функции Лагранжа. Значение $x_1(T)$, рассчитанное в статье [18], составило 1.98519, точность выполнения краевых условий равна 10^{-7}. Найденное в данной статье решение по своей структуре близко к решению из работы [18].

Задача оптимизации химического реактора

Рассматриваются химические реакции, протекающие в смеси трёх веществ [19]. Первое вещество, концентрацию которого обозначим $x_1(t)$, является сырьём, второе вещество (концентрация $x_2(t)$) является промежуточным, третье вещество (концентрация $x_3(t)$) — окончательным продуктом реакции. Данный химический процесс можно описать системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -(k_1(u) + k_2(u) + k_3(u))x_1, \\ \dot{x_2} &= k_1(u)x_1 - k_4(u)x_2, \\ \dot{x_3} &= k_4(u)x_2 - k_5(u)x_3 \end{aligned} \tag{13}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad T = 0.7 \text{ ч}, \tag{14}$$

где $x_i(t)$ — концентрации веществ, $i = \overline{1,3}$ (моль/л), $u(t)$ — температура (К), k_j — кинетические константы, $j = \overline{1,5}$ (ч$^{-1}$), рассчитываемые по формуле

$$k_j(u) = C_j \exp\left(\frac{E_j}{R}\left(\frac{1}{658} - \frac{1}{u}\right)\right),$$

где $C_1 = 1.02$ ч$^{-1}$, $C_2 = 0.93$ ч$^{-1}$, $C_3 = 0.386$ ч$^{-1}$, $C_4 = 3.28$ ч$^{-1}$, $C_5 = 0.084$ ч$^{-1}$, $E_1 = 16000$ кал/моль, $E_2 = 14000$ кал/моль, $E_3 = 15000$ кал/моль, $E_4 = 10000$ кал/моль, $E_5 = 15000$ кал/моль, $R = 1.9865$ кал/(моль·К) — универсальная газовая постоянная [19].

Интенсивность химических превращений зависит от температуры реакционной смеси. Поэтому в качестве параметра управления рассмотрена температура протекания реакции $u(t)$. Как правило, на химическом производстве возникают ограничения на температуру по различным причинам, таким как безопасность процесса, контроль качества продукции, эффективность реакций и оборудования. Они могут быть вызваны и химическими свойствами веществ, используемых в процессе. Поэтому на значения температуры наложены ограничения [19]

$$473K \leqslant u(t) \leqslant 823K, \quad t \in [0, T]. \tag{15}$$

Пусть задано значение концентрации x_2 промежуточного вещества в конце реакции (моль/л):

$$x_2(T) = 0.0437. \tag{16}$$

Необходимо найти управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, которое с учётом ограничения (15), обеспечивает выполнение условия (16) и достижение максимального выхода продукта реакции в конечный момент времени, то есть

$$J(u) = -x_3(T) \to \min. \tag{17}$$

Основная причина вычислительных трудностей, возникающих при решении задачи оптимального управления (13)–(17), связана с экспоненциальной зависимостью k_j от u. Поэтому для её решения применён разработанный алгоритм.

Приближенное решение задачи оптимального управления получено при следующих параметрах алгоритма: $ps = 0.8$, $pm = 0.7$, $P = 500$, $d = 5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$, $z^0 = 1$, $b = 10$. Параметры метода штрафов и метода дифференциальной эволюции выбраны путём подбора, аналогично первой задаче.

На рис. 3, 4 приведены результаты решения задачи (13)–(17). Получено, что $x_3(T) = 0.4173$ моль/л, $x_2(T) = 0.0435$ моль/л.

В работе [19] получено решение задачи (13)–(17) с помощью метода проекции градиента, при этом $x_3(T) = 0.4161$ моль/л, $x_2(T) = 0.0437$ моль/л. Относительные погрешности решения задачи с помощью разработанного алгоритма составили $\delta(x_3(T)) = 0.29\%$, $\delta(x_2(T)) = 0.46\%$.

Задача о вертикальном подъёме ракеты на максимальную высоту

Управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений [20]

$$\dot{x_1} = -\frac{u}{c},$$
$$\dot{x_2} = x_3,$$
$$\dot{x_3} = \frac{u - D(x_2, x_3)}{x_1} - g(x_2)$$

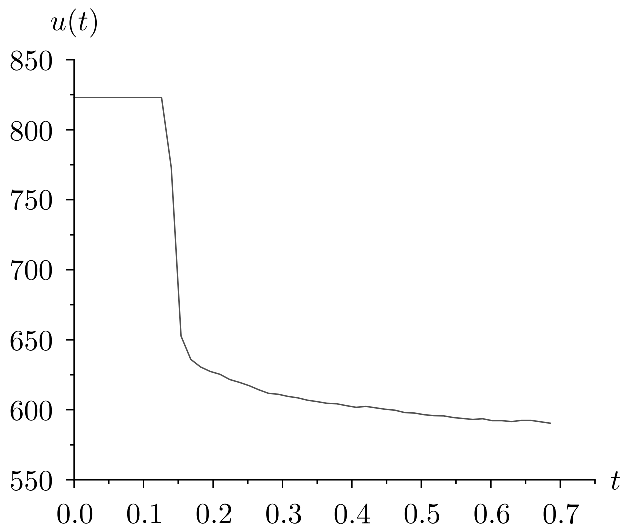


Рис. 3. График субоптимального управления химическим реактором $u(x,t)$[K], t[ч]

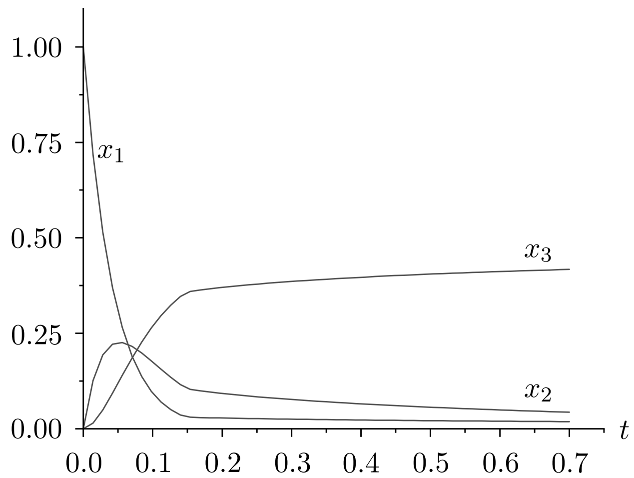


Рис. 4. График фазовых координат x_i[моль/л] в задаче оптимизации химического реактора, t[ч]

с начальными условиями

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 0, \quad t \in [0, T], \quad T = 0.2,$$

где $x_1(t)$ — масса ракеты, $x_2(t)$ — высота полёта ракеты относительно центра планеты, $x_3(t)$ — вертикальная скорость подъёма ракеты, $u(t)$ — тяга двигателя, $D(x_1, x_2)$ — аэродинамическое сопротивление, определяемое по формуле

$$D(x_2, x_3) = \frac{x_{3c} x_1(0) x_3^2}{2g_0} \exp\left(-x_{2c} \cdot \frac{x_2 - x_2(0)}{x_2(0)}\right),$$

$g(x_2(t))$ — сила гравитации, $g(x_2) = g_0 \left(x_2(0)/x_2\right)^2$, $c = 0.5\sqrt{g_0 x_2(0)}$.

В рассматриваемом примере заданы значения параметров [20]: $g_0 = 1$, $x_{2c} = 500$, $x_{3c} = 620$.

Управлением является тяга двигателя ракеты $u(t)$, на значения которой наложены ограничения

$$0 \leqslant u(t) \leqslant 3.5, \quad t \in [0, T].$$

Требуется найти управление $u(t)$, которое обеспечивает достижение ракетой максимальной высоты в конечный момент времени, то есть

$$J(u) = -x_2(T) \to \min,$$

при выполнении терминального ограничения

$$x_1(T) = 0.6x_1(0).$$

В результате проведённых вычислений получено субоптимальное управление, представленное на рис. 5, при этом были заданы следующие параметры алгоритма: $ps = 0.8$, $pm = 0.7$, $P = 100$, $d = 5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-4}$, $z^0 = 1$, $b = 10$. Параметры метода штрафов и метода дифференциальной эволюции выбраны путём подбора, аналогично первой задаче.

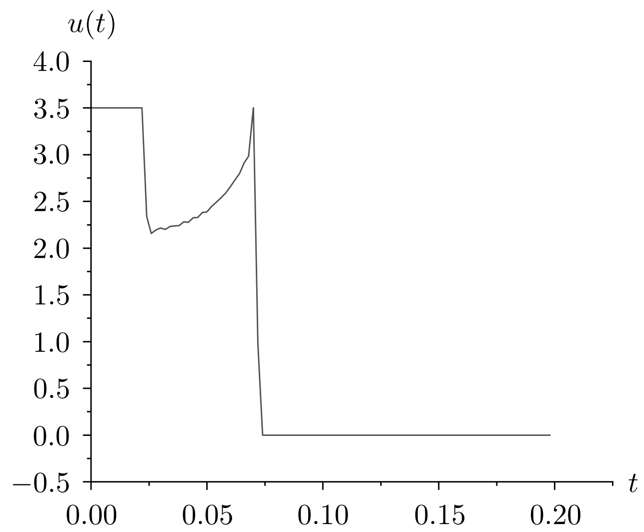


Рис. 5. График субоптимального управления в задаче о вертикальном подъёме ракеты

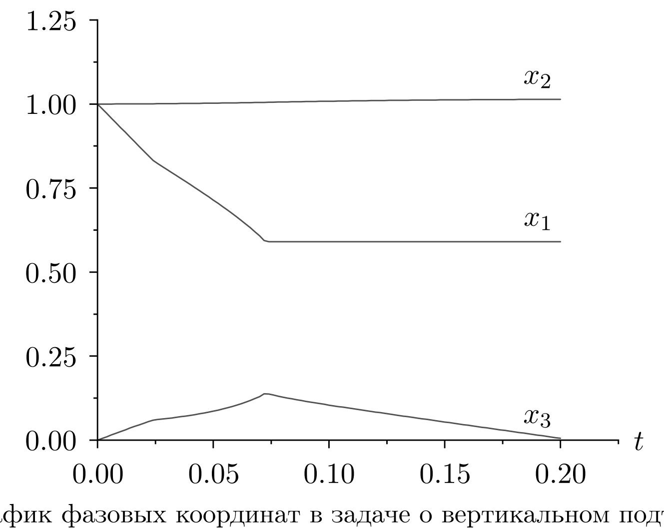


Рис. 6. График фазовых координат в задаче о вертикальном подъёме ракеты

Наибольшая высота подъёма ракеты составляет $x_2(T) = 1.01377$, что превышает на 0.09% её значение, полученное в работе [20] с помощью метода «продолжения по параметру» ($x_2(T) = 1.01284$). При этом $x_1(T) = 0.5903$, относительная погрешность краевого условия составила $\delta(x_1(T)) = 1.6\%$. Структура вычисленного субоптимального управления схожа с управлением, приведённом в статье [20].

Из приведённых примеров видно, что решения задач оптимального управления с терминальными ограничениями, найденные с помощью предложенного подхода, незначительно отличаются от решений, полученных другими исследователями с помощью разных методов. Поэтому можно сделать вывод о корректной работе эволюционного алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, разработанный численный алгоритм можно применять для поиска субоптимального управления в задачах, содержащих ограничение на управляющий параметр, и с закреплённым правым концом траектории. Алгоритм легкореализуем на практике, в нём не предъявляются требования к целевому функционалу, такие как дифференцируемость, непрерывность и др. Поскольку в основу алгоритма положен метод дифференциальной эволюции, его особенность состоит в отсутствии чувствительности найденного приближенного решения задачи оптимального управления от начального приближения, которое обычно задаётся исследователем и требует от него углублённых знаний предметной области.

Работа предложенного алгоритма апробирована на прикладных задачах оптимального управления с терминальными ограничениями. Проведено сравнение найденных приближенных решений задач с решениями, рассчитанными с помощью метода проекции градиента, метода последовательной линеаризации с использованием модифицированной функции Лагранжа, метода «продолжения по параметру». Результаты вычислительных экспериментов показали эффективность предложенного подхода и возможность применения разработанного эволюционного алгоритма для поиска приближенного решения других задач оптимального управления с терминальными ограничениями.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2023-0002). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benita F., Mehlitz P.* Optimal control problems with terminal complementarity constraints // SIAM J. Optim. 2018. V. 43. P. 3079–3104; DOI: 10.1137/16M107637X
2. *Longla M.* Pontryagin's principle of maximum for linear optimal control problems with phase constraints in infinite dimensional spaces // Discrete Contin. Models Appl. Comput. Sci. 2008. N 4. P. 5–19.
3. *Bergounioux M., Bourdin L.* Pontryagin maximum principle for general Caputo fractional optimal control problems with Bolza cost and terminal constraints // ESAIM Contr. Optim. Calc. Var. 2020. V. 26. Article 35; DOI: 10.1051/cocv/2019021
4. *Gugat M., Zuazua E.* Exact penalization of terminal constraints for optimal control problems // Optim. Control Appl. Methods. 2016. V. 37, N 6. P. 1329–1354; DOI: 10.1002/oca.2238
5. *Yurong D.* Application of penalty function method and the conjugate gradient method in economic scheduling of cascade hydropower stations // IFAC Proc. Vol. 1986. V. 19, N 10. P. 227–232; DOI: 10.1016/S1474-6670(17)59671-8
6. *Jiang C., Lin Q., Yu C., Teo K. L., Duan G. -R.* An exact penalty method for free terminal time optimal control problem with continuous inequality constraints // J. Optim. Theory Appl. 2012. V. 154, N 1. P. 30–53; DOI: 10.1007/s10957-012-0006-9

7. *Xue B., Yao X.* A survey on evolutionary computation approaches to feature selection // IEEE Trans. Evol. Comput. 2016. N 20. P. 606–626; DOI: 10.1109/TEVC.2015.2504420
8. *Mohamed A. W., Mohamed A. K.* Adaptive guided differential evolution algorithm with novel mutation for numerical optimization // Int. J. Mach. Learn. Cybern.. 2019. N 10. P. 253–277; DOI: 10.1007/s13042-017-0711-7
9. *Пантелеев А. В., Метлицкая Д. В.* Применение генетических алгоритмов с бинарным и вещественным кодированием для приближенного синтеза субоптимального управления детерминированными системами // Автомат. и телемех. 2011. № 11. С. 117–129.
10. *Губин П. Ю., Обоскалов В. П.* Применение метода дифференциальной эволюции в задаче планирования ремонтов генерирующего оборудования // Изв. РАН. Энергетика. 2021. № 2. С. 50–64; DOI: 10.31857/S0002331021020096
11. *Fu Y., Ding M., Zhou C., Hu H.* Route planning for unmanned aerial vehicle (UAV) on the sea using hybrid differential evolution and quantum-behaved particle swarm optimization // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst. 2013. V. 43, N 6. P. 1451–1465; DOI: 10.1109/TSMC.2013.2248146
12. *Еремеев А. В. Тюнин Н. Н.* Алгоритм дифференциальной эволюции для оптимизации направленности фазированных антенных решёток // Мат. структуры и моделир. 2022. № 3. С. 57–68; DOI: 10.24147/2222-8772.2022.3.57-68
13. *Ковалевич А. А., Якимов А. И., Албкеират Д. М.* Исследование стохастических алгоритмов оптимизации для применения в имитационном моделировании систем // Информ. технологии. 2011. № 8. С. 55–60.
14. *Storn R., Price K.* Differential Evolution - A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces // J. Glob. Optim. 1997. N 11. P. 341–359; DOI: 10.1023/A:1008202821328
15. *Карпенко А. П.* Эволюционные операторы популяционных алгоритмов глобальной оптимизации // Матем. и математич. моделир. 2018. № 1. С. 59–89; DOI: 10.24108/mathm.0118.0000103
16. *Mohamed A. W.* A novel differential evolution algorithm for solving constrained engineering optimization problems // J. Intell. Manuf. 2018. N 29. P. 659–692; DOI: 10.1007/s10845-017-1294-6
17. *Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Лань, 2015.
18. *Горнов А. Ю., Тятюшкин А. И., Финкельштейн Е. А.* Численные методы решения прикладных задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 12. С. 2014–2028; DOI: 10.7868/S0044466913120077
19. *Федоренко Р. П.* Приближенные методы решения задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
20. *Маджара Т. И., Горнов А. Ю.* Тестовая коллекция задач оптимального управления с вычислительными особенностями // Современные технол. Сист. анализ. Моделир. 2009. № 3. С. 49–56.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.6:004.4

APPLICATION OF EVOLUTIONARY COMPUTATIONS FOR SOLVING OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS

© 2024 **E. V. Antipina**[1a], **S. A. Mustafina**[1b], **A. F. Antipin**[2c]

[1] *Ufa University of Science and Technology, Ufa, 450076 Russia,*
[2] *Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Bashkortostan, 453103 Russia*

E-mails: [a]stepashinaev@ya.ru, [b]mustafina_sa@mail.ru, [c]andrejantipin@ya.ru

Received 10.09.2023, revised 17.04.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The article is devoted to the development of a numerical algorithm for finding an approximate solution of an optimal control problem with terminal constraints and control constraints. The algorithm is based on the reduction of the original optimal control problem to a finite-dimensional problem and the use of the penalty method and the differential evolution method to solve the latter. A feature of the proposed approach is that the solution found is independent of the choice of the initial approximation. The operation of the algorithm is illustrated by its application to applied optimal control problems. The results of computational experiments are consistent with the results of calculations based on other methods.

Keywords: optimal control, terminal constraint, differential evolution, penalty method, evolutionary calculation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.302

REFERENCES

1. F. Benita and P. Mehlitz, "Optimal control problems with terminal complementarity constraints," SIAM J. Optim. **43**, 3079–3104 (2018). https://doi.org/10.1137/16M107637X
2. M. Longla, "Pontryagin's principle of maximum for linear optimal control problems with phase constraints in infinite dimensional spaces," Discrete Contin. Models Appl. Comput. Sci. (4), 5–19 (2008).
3. M. Bergounioux and L. Bourdin, "Pontryagin maximum principle for general Caputo fractional optimal control problems with Bolza cost and terminal constraints," ESAIM Contr. Optim. Calc. Var. **26**, 35 (2020). https://doi.org/10.1051/cocv/2019021
4. M. Gugat and E. Zuazua, "Exact penalization of terminal constraints for optimal control problems," Optim. Control Appl. Methods **37** (6), 1329–1354 (2016). https://doi.org/10.1002/oca.2238
5. D. Yurong, "Application of penalty function method and the conjugate gradient method in economic scheduling of cascade hydropower stations," IFAC Proc. **19** (10), 227–232 (1986). https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)59671-8
6. C. Jiang, Q. Lin, C. Yu, K. L. Teo, and G.-R. Duan, "An exact penalty method for free terminal time optimal control problem with continuous inequality constraints," J. Optim. Theory Appl. **154** (1), 30–53 (2012). https://doi.org/10.1007/s10957-012-0006-9
7. B. Xue and X. Yao, "A survey on evolutionary computation approaches to feature selection," IEEE Trans. Evol. Comput. (20), 606–626 (2016). https://doi.org/10.1109/TEVC.2015.2504420
8. A. W. Mohamed and A. K. Mohamed, "Adaptive guided differential evolution algorithm with novel mutation for numerical optimization," Int. J. Mach. Learn. Cybern. (10), 253–277 (2019). https://doi.org/10.1007/s13042-017-0711-7

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 384–394.

9. A. V. Panteleev and D. V. Metlitskaya, “An application of genetic algorithms with binary and real coding for approximate synthesis of suboptimal control in deterministic systems,” Autom. Remote Control **72** (11), 2328–2338 (2011).
10. P. Yu. Gubin and V. P. Oboskalov, “Differential evolution method for generation maintenance scheduling,” Izv. Ross. Akad. Nauk. Energ. (2), 50–64 (2021). https://doi.org/10.31857/S0002331021020096
11. Y. Fu, M. Ding, C. Zhou, and H. Hu, “Route planning for unmanned aerial vehicle (UAV) on the sea using hybrid differential evolution and quantum-behaved particle swarm optimization,” IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst. **43** (6), 1451–1465 (2013). https://doi.org/10.1109/TSMC.2013.2248146
12. A. V. Eremeev and N.N. Tyunin, “Differential evolution for directivity optimization of short-wave phased antenna arrays,” Mat. Strukt. Model. (3), 57–68 (2022) [in Russian]. https://doi.org/10.24147/2222-8772.2022.3.57-68
13. A. A. Kovalevich, A. I. Yakimov, and D. M. Albkeirat, “Research of optimization stochastic algorithms for application in simulations of systems,” Inf. Tekhnol. (8), 55–60 (2011) [in Russian].
14. R. Storn and K. Price, “Differential evolution — A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces,” J. Glob. Optim. (11), 341–359 (1997). https://doi.org/10.1023/A:1008202821328
15. A. P. Karpenko, “Evolution operators of population algorithms for global optimization,” Mat. Mat. Model. (1), 59–89 (2018) [in Russian]. https://doi.org/10.24108/mathm.0118.0000103
16. A. W. Mohamed, “A novel differential evolution algorithm for solving constrained engineering optimization problems,” J. Intell. Manuf. (29), 659–692 (2018). https://doi.org/10.1007/s10845-017-1294-6
17. A. V. Panteleev and T. A. Letova, *Optimization Methods in Examples and Problems* (Lan’, Moscow, 2015) [in Russian].
18. A. Yu. Gornov, A. I. Tyatyushkin, and E. A. Finkelstein, “Numerical methods for solving applied optimal control problems,” Comput. Math. Math. Phys. **53** (12), 1825–1838 (2013). https://doi.org/10.1134/S0965542513120063
19. R. P. Fedorenko, *Approximate Methods for Solving Optimal Control Problems* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
20. T. I. Madzhara and A. Yu. Gornov, “Test collection of optimal control problems with computational features,” Sovrem. Tekhnol. Sist. Anal. Model. (3), 49–56 (2009) [in Russian].

УДК 517.544

ОБ УСЛОВИЯХ КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФАКТОРИЗАЦИИ И ОДНОГО КЛАССА УСЕЧЁННЫХ УРАВНЕНИЙ ВИНЕРА—ХОПФА

© 2024 А. Ф. Воронин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mail: voronin@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 21.01.2024 г.; после доработки 11.05.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

В данной работе будут продолжены исследования взаимосвязи между уравнением в свёртках 2-го рода на конечном интервале $(0, \tau)$ (которое также называют усечённым уравнением Винера—Хопфа) и задачей факторизации (которую также называют векторной краевой задачей Римана—Гильберта или векторной краевой задачей Римана). Задаче факторизации поставлено в соответствие семейство усечённых уравнений Винера—Хопфа, зависящее от параметра $\tau \in (0, \infty)$. Показана корректная разрешимость этого семейства уравнений в зависимости от существования канонической факторизации некоторой матрицы-функции. Кроме того, рассматриваются различные возможные приложения задачи факторизации и усечённых уравнений Винера—Хопфа.

Ключевые слова: алгебра Винера, задача факторизации, частные индексы, усечённое уравнение Винера—Хопфа.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.303

Работу можно рассматривать как продолжение работы автора [1]. Здесь будут изучаться взаимосвязи между уравнением в свёртках 2-го рода на конечном интервале (которое также называют усечённым уравнением Винера—Хопфа) и задачей факторизации (которую также называют векторной краевой задачей Римана—Гильберта или краевой задачей Римана).

Задача Римана—Гильберта [2] является одной из наиболее востребованных задач комплексного анализа ввиду широких приложений в различные области математики и другие науки. Возможные приложения задачи факторизации приведены в [1], введение. Отметим также некоторые современные работы по задаче факторизации [3–6].

Уравнения типа свёртки также тесно связаны с различными приложениями. Это задачи классической математической физики и её обратные задачи, задачи информатики, всевозможные задачи современной техники и экономики: ядерной физики, автоматического управления, теории игр, массового обслуживания и другие [7], стр. 6. Заметим, что в [7] рассматриваются приложения уравнений Винера—Хопфа, усечённые же уравнения Винера—Хопфа имеют более широкую область применений. Например, усечённые уравнения Винера—Хопфа лежат в основе одной из модификации метода Гельфанда—Левитана—Марченко—Крейна [8–9]. Метод используется для решения множества обратных задач, таких как обратная задача рассеяния или обратные задачи для уравнений волнового типа. Кроме того, в алгебре Винера порядка два задача факторизации сводится к усечённому уравнению Винера—Хопфа [1, 6, 10].

Однако теории решений задачи факторизации и усечённых уравнений Винера—Хопфа являются весьма бедными. Поэтому, исследования усечённых уравнений Винера—Хопфа, также как и задачи факторизации — актуальны для развития соответствующих теорий и их приложений.

В работе автора [10] был предложен новый подход к решению краевой задачи Римана в алгебре Винера порядка 2. Этот подход (метод) заключается в сведении задачи Римана к усечённому уравнению Винера—Хопфа. В работах [1, 6, 10] получены новые результаты в теории векторной краевой задачи Римана—Гильберта и теории усечённых уравнений Винера—Хопфа на основе выявленной взаимосвязи между рассматриваемыми задачами. Было показано, что для построения факторизации матрицы функции в алгебре Винера порядка 2 достаточно найти решение соответствующего усечённого уравнения Винера—Хопфа на интервале $(0, \tau)$, где $0<\tau$ — параметр. В данной работе задаче факторизации поставлено в соответствие семейство усечённых уравнений Винера—Хопфа, зависящее от параметра $\tau \in (0, \infty)$. Показана корректная разрешимость этого семейства уравнений в зависимости от существования канонической факторизации некоторой матрицы-функции.

Прежде чем перейти непосредственно к задаче факторизации и соответствующему ей усечённому уравнению Винера—Хопфа (согласно [1], теорема 3), напомним понятие алгебры Винера порядка 2.

Для целых $2 \geqslant n, l \geqslant 1$ положим $L_{n\times l}$ — пространство $n \times l$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, $\mathcal{F}f$ — образ Фурье матрицы функции $f \in L_{n\times l}$:

$$\mathcal{F}f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}$ — расширенная вещественная прямая (R — вещественная прямая); $\mathbb{W}^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$, где C — постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n\times n}$; $\mathbb{W}_+^{n\times n}$ ($\mathbb{W}_-^{n\times n}$) — под алгебра в $\mathbb{W}^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$). Через $\mathbb{W}^{n\times 1}$, $\mathbb{W}_\pm^{n\times 1}$ обозначим группы, состоящие из векторов-столбцов матриц-функций из алгебр $\mathbb{W}^{n\times n}$, $\mathbb{W}_\pm^{n\times n}$ соответственно. Если A — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A. При $n = 1$ верхний индекс $n \times n$ при $\mathbb{W}$ будем опускать.

Рассмотрим задачу факторизации на расширенной прямой $\mathbb{R}$, в которой требуется найти вектор-функции $\Phi^\pm \equiv (\Phi_1^\pm, \Phi_2^\pm)^T \in \mathbb{W}_\pm^{2\times 1}$ по краевому условию

$$\Phi^+(x) = G(x)\,\Phi^-(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

при ограничении $\Phi_1^\pm(\infty) = 0$, где

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{ix\tau_0}m^-(x) \\ e^{-ix\tau_0}m^+(x) & 1 + g_{22}(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{G}\mathbb{W}^{2\times 2}, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} m^\pm(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu_\pm(t)e^{ixt}\,dt, \quad 1 + g_{22}(x) = d_G(x) + m^+(x)m^-(x), \\ \mu_\pm(t) = \theta(\pm t)\mu(t), \quad \mu \in L_1(R), \end{gathered} \tag{3}$$

$\tau_0 > 0$, θ — функция Хевисайда. Легко видеть, что определитель матрицы G равен d_G.

Для простоты изложения считаем, что

$$d_G(x) = d_G^+(x)\,d_G^-(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$\begin{gathered} d_G^\pm(x) = 1 \pm e^{\pm ix(\tau-\tau_0)}m^\pm(x), \quad \tau_0 \leqslant \tau, \\ |d_G^\pm(z)| > 0, \quad \pm\mathrm{Im}\,z \geqslant 0 \quad \bigl(z = x + iy\bigr). \end{gathered} \tag{4}$$

Матрицу G будем снабжать нижним индексом τ, если необходимо подчеркнуть зависимость матрицы G от параметра τ, имеем

$$G = G_\tau.$$

Будем рассматривать также уравнение в свёртках второго рода на конечном интервале $(0, \tau)$, которое соответствует (при определённых k и f) краевой задаче Римана (1):

$$u(t) - \int_0^\tau k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0, \tau), \tag{5}$$

где

$$k \in L_1(R), \quad f \in L_1(0, \infty).$$

Можно видеть, что значения функций $k(t)$ и $f(t)$ вне интервалов $(-\tau, \tau)$ и $(0, \tau)$, соответственно, не влияют на решение уравнения (5) (последнее будем искать в $L_1(0, \tau)$).

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ, ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

Дополним определения, введённые ранее. При C=0 соответствующие алгебры, под алгебры и группы будем снабжать нижним индексом 0 ($\mathbb{W}_0^{n\times l}$, $\mathbb{W}_{0\pm}^{n\times l}$, $l \in \{1, n\}$). На алгебре $\mathbb{W}_0$ определим дополнительные друг к другу проекторы P_0^+ и P_0^- по формулам

$$P_0^\pm \;:\; W_0 \;\to\; \mathbb{W}_{0\pm}, \quad P_0^\pm \mathcal{F}G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} g(t)\theta(\pm t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $g \in L_1(R)$.

Отметим следующие свойства линейных операторов $P_0^\pm$:

$$P_0^+ + P_0^- = I, \quad \mathcal{F}^{-1}\{P_0^\pm \mathcal{F}G(x)\}(t) = g(t)\theta(\pm t), \quad t \in R,$$

где I — единичный оператор, $\mathcal{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. Применим теорему 3 из [1] к задаче (1)–(4). Для этого определим функции $w_\tau^\pm(x)$ и $\hat{k}(x)$ также как в [1]. Из формул (1.8) в [1] при $\kappa = 0$ (условие (0.4)) имеем

$$\begin{aligned} w_\tau^-(x) &= d_G^-(x) + e^{-ix\tau} g_{12}(x), \\ w_\tau^+(x) &= d_G^+(x) - e^{ix\tau} g_{21}(x), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$g_{12}(x) = e^{ix\tau_0} m^-(x), \quad g_{21}(x) = e^{-ix\tau_0} m^+(x). \tag{7}$$

Из (6)–(7) непосредственно получим $w_\tau^\pm = 1$. Тогда из формулы (2.1) в [1] имеем

$$\begin{gathered} \hat{k}(x) = e^{-ix(\tau-\tau_0)} m^-(x) - e^{ix(\tau-\tau_0)} m^+(x) := \mathcal{F}k(x), \\ \big(\mathcal{F}k_\pm = \mp e^{\pm ix(\tau-\tau_0)} m^\pm\big). \end{gathered} \tag{8}$$

Образ Фурье правой части уравнения в свёртках (5) определим по формуле (1.8) из [1]:

$$\mathcal{F}f(x) = C_2 e^{ix\tau} \mathcal{F}k_-(x). \tag{9}$$

Таким образом, матрице $G_\tau(x)$ соответствует уравнение (5), которое можно записать в следующем виде:

$$u(t)-\int_0^\tau \big(k_-(t-s)+k_+(t-s)\big)u(s)\,ds = C_2\,k_-(t-\tau), \quad t\in(0,\tau), \tag{10}$$

где

$$k_\mp(t)=\mu_\mp(t\pm a), \quad a=\tau-\tau_0, \quad \infty>\tau\geqslant\tau_0>0.$$

Отметим, что из определения функций $\mu_\pm$ в (3) следует, что

$$k_\mp(t)=0, \quad \pm t>-a \quad \big(k(t)=0,\,|t|<\tau-\tau_0\big).$$

Тогда из [1], теорема 3, получим следующее следствие.

Следствие. Пусть выполнены равенства (8)–(9). Тогда решение $u(t)$ (его образ Фурье) соответствующего усечённого уравнения Винера—Хопфа (10) выражается через решение краевой задачи Римана (1)–(4) по формуле

$$\mathcal{F}u(x)=\Phi_1^+(x)+e^{ix\tau}\Big(\big(1-e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-(x)\big)\Phi_2^-(x)-C_2\Big). \tag{11}$$

Приведём также равенства из [1], которые будут использованы ниже. Из векторного равенства в (2.7) из [1] при условиях (6)–(8) и (2)–(4) имеем векторное равенство для решения задачи факторизации (1)–(4):

$$\frac{1}{d_G^-(x)}\begin{pmatrix} 1+g_{22}(x) & -g_{12}(x)-e^{ix\tau}d_G^-(x)\\ -g_{21}(x) & 1\end{pmatrix}\Psi^+(x)=\Phi^-(x), \tag{12}$$

где

$$\Psi_1^+(x)=\Phi_1^+(x)+e^{ix\tau}\,d_G^-(x)\,\Phi_2^-(x), \quad \Psi_2^+(x)=\Phi_2^+(x), \tag{13}$$

$$\begin{gathered} 1+g_{22}=1-e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-(x)+e^{ix(\tau-\tau_0)}m^+(x)=1-\mathcal{F}k(x),\\ g_{12}(x)+e^{ix\tau}d_G^-(x)=e^{ix\tau}. \end{gathered} \tag{14}$$

2. ЧАСТНЫЕ ИНДЕКСЫ МАТРИЦЫ $G_\tau(x)$

Ниже считаем, что

$$||m^\pm||\equiv||\mu_\pm||_{L_1}<1. \tag{15}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Пусть справедливо неравенство (15). Тогда матрицы $G_\tau(x)$ и $G_{\tau_1}(x)$ при τ, $\tau_1\in[2\tau_0,\infty)$ эквивалентны, т. е. имеют один и тот же набор частных индексов.*

Доказательство. Положив

$$I_d^\pm(x):=\{1,\,\frac{1}{d_G^\pm}\}, \quad G_\tau^0(x):=I_d^+(x)G_\tau(x)I_d^-(x), \quad \tau\in[\tau_0,\infty), \tag{16}$$

где $I_d^\pm$ — диагональные матрицы порядка два, получим

$$G_\tau^0(x)=\begin{pmatrix} 1 & e^{ix\tau_0}m_{0\tau}^-(x)\\ e^{-ix\tau_0}m_{0\tau}^+(x) & 1+g_{22}^0(x)\end{pmatrix},$$

где
$$m_{0\tau}^{\pm}=\frac{m^{\pm}}{d_G^{\pm}},\quad g_{22}^0=\frac{g_{22}}{d_G^- d_G^+}=m_{0\tau}^+m_{0\tau}^-\quad \big(d_G^{\pm}(x)=1\pm e^{\pm ix(\tau-\tau_0)}m^{\pm}(x)\big).$$
Из неравенства (15) имеем
$$m_{0\tau}^{\pm}\in\mathbb{W}_{0\pm},\quad g_{22}^0\in\mathbb{W}_0,$$
т. к.
$$|d_G^{\pm}|\geqslant 1-|m_{0\tau}^{\pm}|>0\quad \big(|m_{0\tau}^{\pm}|\leqslant ||m_{0\tau}^{\pm}||_{\mathbb{W}_0}<1\big).$$
Таким образом, получили
$$I_d^{\pm}\in\mathcal{G}\mathbb{W}_{\pm}^{2\times2},\quad G_\tau^0\in\mathcal{G}\mathbb{W}^{2\times2}.\tag{17}$$
Тогда из (17) и второго равенства в (16) следует, что матрицы $G_\tau(x)$ и $G_\tau^0(x)$ при $\tau_0\leqslant\tau<\infty$ эквивалентны. Осталось доказать, что при τ_1, $\tau\in[2\tau_0,\infty)$ матрицы $G_{\tau_1}^0(x)$ и $G_\tau^0(x)$ эквивалентны. Для этого достаточно построить функции $J_s^{\pm}(x)$ такие, что
$$J_s^{\pm}\in\mathcal{G}\mathbb{W}_{\pm}^{2\times2},\quad G_{\tau_1}^0(x)=J_s^+(x)G_\tau^0(x)J_s^-(x).$$

Положив
$$J_s^+(x):=\begin{pmatrix}1&0\\ s^+(x)&1\end{pmatrix},\quad J_s^-(x):=\begin{pmatrix}1&s^-(x)\\ 0&1\end{pmatrix},$$
где
$$s^{\pm}\in\mathbb{W}_{0\pm},$$
получим формулу
$$J_s^+\begin{pmatrix}1&m_{12}\\ m_{21}&1+m_{12}m_{21}\end{pmatrix}J_s^-=\begin{pmatrix}1&n_{12}\\ n_{21}&1+n_{12}n_{21}\end{pmatrix},\tag{18}$$
где
$$m_{12},\,m_{21}\in\mathbb{W}_0,\quad n_{12}=m_{12}+s^-,\quad n_{21}=m_{21}+s^+.$$
Справедливость формулы (18) устанавливается непосредственно.

Положив в равенстве (18)
$$m_{12}:=e^{ix\tau_0}m_{0\tau}^-,\quad m_{21}:=e^{-ix\tau_0}m_{0\tau}^+,$$
получим равенство
$$J_s^+(x)G_\tau^0(x)J_s^-(x)=\begin{pmatrix}1&m_{12}+s^-\\ m_{21}+s^+&1+(m_{12}+s^-)(m_{21}+s^+)\end{pmatrix},\tag{19}$$
где матрица $G_\tau^0(x)$ определена в (16).

Легко видеть, что матрица-функция в правой части равенства (19) совпадёт с матрицей-функцией $G_{\tau_1}^0(x)$ при
$$s^-=e^{ix\tau_0}\big(m_{0\tau_1}^--m_{0\tau}^-\big),\quad s^+=e^{-ix\tau_0}\big(m_{0\tau_1}^+-m_{0\tau}^+\big).\tag{20}$$

Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось показать, что $s^{\pm}\in\mathbb{W}_{0\pm}$. Вычислим $s^{\pm}(x)$. Из (20) и определения функций $m_{0\tau}^{\pm}$ получим
$$\begin{aligned}s^-(x)&=e^{ix\tau_0}m^-(x)\Big(\frac{1}{d_G^-(x;\tau_1)}-\frac{1}{d_G^-(x;\tau)}\Big),\\ s^+(x)&=e^{-ix\tau_0}m^+(x)\Big(\frac{1}{d_G^+(x;\tau_1)}-\frac{1}{d_G^+(x;\tau)}\Big),\end{aligned}\tag{21}$$

где
$$d_G^{\pm}(x;\tau) \equiv d_G^{\pm}(x), \quad d_G^{\pm}(x;\tau_1) = d_G^{\pm}(x) \text{ при } \tau = \tau_1.$$
Преобразуем правую часть равенств в (21). С учётом (6) имеем
$$s^{\mp}(x) = \pm e^{\pm ix2\tau_0}(m^{\mp}(x))^2 \frac{e^{\mp ix\tau} - e^{\mp ix\tau_1}}{d_G^{\mp}(x;\tau_1)d_G^{\mp}(x;\tau)}. \tag{22}$$
Из (22) при τ, $\tau_1 \geqslant 2\tau_0$ непосредственно следует, что $s^{\pm} \in \mathbb{W}_{0\pm}$. Лемма полностью доказана. □

3. О СВЯЗИ КАНОНИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦЫ $G_\tau(x)$ С ЕДИНСТВЕННОСТЬЮ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ (10)

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются соотношения (2)–(4) и (8), а также справедливо неравенство (15). Тогда частные индексы матрицы $G_\tau(x)$, где $\tau \in [\tau_0, \infty)$, равны нулю тогда и только тогда, когда соответствующее усечённое однородное уравнение Винера—Хопфа (10) имеет только тривиальное решение в $L_1(0,\tau)$.*

Доказательство. Доказательство проведём методом от противного. Пусть, сначала, усечённое однородное уравнение Винера—Хопфа (10) имеет только тривиальное решение в $L_1(0,\tau)$. Покажем, что существует только тривиальное решение однородной задачи Римана (1)–(4) при $C_2 = 0$. Предположим противное, существует нетривиальное решение однородной задачи Римана (1)–(4) при $C_2 = 0$. Тогда из формулы (11) при $u = 0$ получим
$$\Phi_1^+(x) = -e^{ix\tau}\big(1 - e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-(x)\big)\Phi_2^-(x). \tag{23}$$
Подставив выражение для Φ_2^- из (23) в первое равенство системы (1), имеем
$$\Phi_1^+(x) = \Phi_1^-(x) - e^{-ix(\tau-\tau_0)}\frac{m^-(x)}{d_G^-(x)}\Phi_1^+(x),$$
т. к.
$$d_G^-(x) = 1 - e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-(x)$$
по определению. После приведения подобных получим
$$\Phi_1^+(x) = d_G^-(x)\Phi_1^-(x).$$
По предположению, правая часть вышестоящего равенства из алгебры $\mathbb{W}_{0-}$, левая часть — из алгебры $\mathbb{W}_{0+}$, следовательно,
$$\Phi_1^+ = d_G^-\Phi_1^- = 0.$$
Значит $\Phi_1^{\pm} = 0$, т. к. $|d_G^-| > 0$ по условию (15). Из (23) и равенства $\Phi_1^+ = 0$ имеем $\Phi_2^- = 0$. Тогда из второго равенства системы (1) получим $\Phi_2^+ = 0$. Таким образом, задача факторизации (1)–(4) при $C_2 = 0$ имеет только тривиальное решение. Следовательно, частные индексы матрицы $G_\tau(x)$ равны нулю, т. к. суммарный индекс матрицы $G_\tau(x)$ равен нулю по условию в (4).

Докажем теперь теорему 1 в другую сторону. Пусть задача факторизации (1)–(4) при $C_2 = 0$ имеет только тривиальное решение. Предположим противное: существует нетривиальное решение однородного усечённого уравнения Винера—Хопфа (10) $\big(u \in L_1(0,\tau)$, $u(t) = 0$, $t \notin (0,\tau)\big)$. Покажем, что тогда задача факторизации (1)–(4) при $C_2 = 0$ имеет нетривиальное решение, что приводит к противоречию с начальным предположением.

Запишем однородное усечённое уравнение Винера—Хопфа (10) в следующей эквивалентной форме (в образах Фурье):
$$(1 - \mathcal{F}k(x))\mathcal{F}u(x) = e^{ix\tau}v^+(x) + v^-(x), \quad x \in R, \tag{24}$$

где

$$v^-(x) = P_0^-\{(1-\mathcal{F}k(x))\mathcal{F}u(x)\}, \quad v^+(x) = P_0^+\{e^{-ix\tau}(1-\mathcal{F}k(x))\mathcal{F}u(x)\}. \qquad (25)$$

Эквивалентность формул в (24)–(25) и однородного интегрального уравнения (10) устанавливается непосредственно, с помощью применения к левой правой частям равенства (24) обратного преобразования Фурье.

Положим

$$\Psi_1^+(x) := \mathcal{F}u(x), \quad \Psi_2^+(x) := v^+(x), \quad \Phi_1^-(x) := d_G^-(x)\, v^-(x). \qquad (26)$$

Тогда из (24), (25) и равенства (8) получим выполнение первого равенства в системе (12) (которое совпадает, с точностью до пере обозначений (26), с равенством (24) согласно (14)).

Осталось показать выполнение второго равенства в системе (12), т. к. в этом случае будет построено нетривиального решения однородной задачи Римана (1)–(4) при $C_2 = 0$. Для этого умножим левую и правую части равенства (24) на $e^{-ix\tau}$ и к левой и правой частям вновь полученного равенства применим оператор P_0^+, имеем

$$-P_0^+\{e^{-ix\tau}\mathcal{F}k_+(x)\mathcal{F}u(x)\} = v^+(x),$$

т. к.

$$\mathcal{F}k_-(x), \quad e^{-ix\tau}\mathcal{F}u(x), \quad v^-(x) \in \mathbb{W}_{0-}.$$

Из вышестоящего равенства, с учётом первых двух равенств в (26) и равенства (8), получим

$$P_0^+\{e^{-ix\tau_0}m^+(x)\Psi_1^+(x)\} - \Psi_2^+(x) = 0. \qquad (27)$$

Положив

$$\Phi_2^-(x) = -\frac{1}{d_G^-(x)}P_0^-\{e^{-ix\tau_0}m^+(x)\Psi_1^+(x)\},$$

с учётом операторного равенства

$$I = P_0^- + P_0^+$$

перепишем равенство (27) в виде

$$e^{-ix\tau_0}m^+(x)\Psi_1^+(x) - \Psi_2^+(x) = -d_G^-(x)\Phi_2^-(x). \qquad (28)$$

Легко видеть, что равенство (28) совпадает со вторым равенством системы (12).

Таким образом, построили нетривиальное решение однородной задачи Римана (1)–(4) при $C_2 = 0$ (что противоречит первоначальному предположению метода от противного):

$$\Phi_2^-(x) = -\frac{1}{d_\tau^-(x)}P_0^-\{e^{-ix\tau_0}m^+(x)\mathcal{F}u(x)\}, \quad \Phi_2^+(x) = v^+(x),$$

$$\Phi_1^-(x) = d_G^-(x)\, v^-(x), \quad \Phi_1^+(x) = \mathcal{F}u(x) - e^{ix\tau}P_0^-\{e^{-ix\tau_0}m^+(x)\mathcal{F}u(x)\},$$

где функции $v^\pm$ определены в (25). Теорема 1 доказана. $\square$

4. О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СЕМЕЙСТВА УРАВНЕНИЙ (10) ПРИ $\tau \geqslant 2\tau_0$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть символ уравнения (5) имеет вид*

$$1 - \mathcal{F}k(x) = 1 - e^{-ix(\tau-\tau_0)}m^-(x) + e^{ix(\tau-\tau_0)}m^+(x) \tag{29}$$

и выполнено условие (15).

Тогда, если однородное ($f = 0$) усечённое уравнение Винера—Хопфа (5) имеет только тривиальное решение для некоторого $\tau \geqslant 2\tau_0$, то для любого параметра $\tau \geqslant 2\tau_0$ неоднородное уравнение (5) корректно разрешимо для любой правой части уравнения (решение существует в $L_1(0, \tau)$, единственно и устойчиво в L_1 по f и k).

Доказательство. Легко видеть, что символ уравнения (10) равен (29). Однородному усечённому уравнению Винера—Хопфа (10) поставим в соответствие задачу Римана (1)–(4).Можно видеть, что в этом случае условия следствия при $C_2 = 0$ выполнены. Из следствия получим формулы соответствия (8) между символом уравнения (10) и элементами матрицы G_τ и выполнение равенство (11).

По лемме матрицы $G_\tau(x)$ и $G_{\tau_1}(x)$ при $\tau, \tau_1 \in [2\tau_0, \infty)$ эквивалентны.

Легко видеть, что условия теоремы 1 выполнены. По теореме 1 матрица $G_\tau(x)$ допускает каноническую факторизацию тогда и только тогда, когда уравнение (10) при $C_2 = 0$ (и соответствующее уравнение (5)) имеет единственное решение. Тогда из альтернативы Фредгольма для уравнения (5) получим единственность его решения для любого $f \in L_1(0, \tau)$. Из существования канонической факторизации матрицы $G_\tau(x)$ вытекает устойчивость неоднородной задачи и Римана (1)–(4) и следовательно — устойчивость по f и k уравнения (5) в виду формулы (11). □

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронин А. Ф* К методу факторизации матриц-функций в алгебре Винера порядка 2 // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 2. С. 32–45.
2. *Gohberg I., Kaashoek M. A., SpitkovskyI. M.* An overview of matrix factorization theory and operator applications, Factorization and integrable systems // Oper. Theory Adv. Appl. 2003. V. 141, P. 1–102.
3. *Адуков В. М.* Нормировка факторизации Винера—Хопфа для матриц-функций второго порядка и ее применение /// Уфимск. матем. журн. 2022. Т. 14, № 4. С. 3–15.
4. *Kisil A. V., Abrahams I. D., Mishuris G., Rogosin S. V.* The Wiener—Hopf Technique, its Generalizations and Applications: Constructive and Approximate Methods // Proc. Roy. Soc. A. 2021. V. 477. Article 20210533.
5. *Киясов С. Н.* Об одном классе гёльдеровских матриц-функций второго порядка, допускающих эффективную факторизацию // Изв. вузов. Матем. 2022. № 10. С. 66–72.
6. *Воронин А. Ф* Построение факторизации одного класса матриц-функций в алгебре Винера порядка два // Изв. вузов. Матем. 2023. № 3. С. 41–51.

7. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
8. *Романов В. Г.* К вопросу обоснования метода Гельфанда—Левитана—Крейна для двумерной обратной задачи // Сиб. матем. журн. 2021. Т. 62, № 5. С. 1124–1142.
9. *Kabanikhin S., Shishleni M., Novikov N., Prokhoshin N.* Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand—Levitan—Marchenko—Krein Equations // Mathematics. 2023. V. 11, N 21. P. 4458–4468.
10. *Воронин А. Ф* О связи задачи факторизации в алгебре Винера и усеченного уравнения Винера—Хопфа // Изв. вузов. Матем. 2020. № 12. С. 22–31.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.544

ON CONDITIONS FOR THE WELL-POSED SOLVABILITY OF A FACTORIZATION PROBLEM AND A CLASS OF TRUNCATED WIENER—HOPF EQUATIONS

© 2024 **A. F. Voronin**

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia

E-mail: voronin@math.nsc.ru

Received 21.01.2024, revised 11.05.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. This paper continues the study of the relationship between the convolution equation of the second kind on a finite interval $(0, \tau)$ (which is also called the truncated Wiener—Hopf equation) and a factorization problem (which is also called a vector Riemann—Hilbert boundary value problem or a vector Riemann boundary value problem). The factorization problem is associated with a family of truncated Wiener—Hopf equations depending on the parameter $\tau \in (0, \infty)$. The well-posed solvability of this family of equations is shown depending on the existence of a canonical factorization of some matrix function. In addition, various possible applications of the factorization problem and truncated Wiener—Hopf equations are considered.

Keywords: Wiener algebra, factorization problem, partial index, truncated Wiener—Hopf equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.303

REFERENCES

1. A. F. Voronin, "On a factorization method for matrix functions in the Wiener algebra of order 2," Sib. Zh. Ind. Mat. **25** (2), 32–45 (2022) [J. Appl. Ind. Math. **16** (2), 385–376 (2022)].
2. I. Gohberg, M. A. Kaashoek, and I. M. Spitkovsky, "An overview of matrix factorization theory and operator applications, factorization and integrable systems," Oper. Theory Adv. Appl. **141**, 1–102 (2003).
3. V. M. Adukov, "Normalization of Wiener—Hopf factorization for 2×2 matrix functions and its application," Ufa Math. J. **14** (4), 3–15 (2022).
4. A. V. Kisil, I. D. Abrahams, G. Mishuris, and S. V. Rogosin, "The Wiener—Hopf technique, its generalizations and applications: Constructive and approximate methods," Proc. R. Soc. A **477**, 20210533 (2021).
5. S. N. Kiyasov, "A class of Hölder matrix functions of the second order admitting effective factorization," Izv. VUZov. Mat. (10), 66–72 (2022) [Russ. Math. **66** (10), 56–61 (2022)].
6. A. F. Voronin, "Construction of factorization of one class of matrix functions in the Wiener algebra of order two," Izv. VUZov. Mat. (3), 41–51 (2023) [in Russian].
7. F. D. Gakhov and Yu. I. Cherskii, *Convolution Type Equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
8. V. G. Romanov, "On justification of the Gelfand—Levitan—Krein Method for a two-dimensional inverse problem," Sib. Mat. Zh. **62** (5), 1124–1142 (2021) [Sib. Math. J. **62** (5), 908–924 (2021)].
9. S. Kabanikhin, M. Shishleni, N. Novikov, and N. Prokhoshin, "Spectral, scattering and dynamics: Gelfand—Levitan—Marchenko—Krein equations," Mathematics **11** (21), 4458–4468 (2023).
10. A. F. Voronin, "On the relationship between the factorization problem in the Wiener algebra and the truncated Wiener—Hopf equation," Izv. VUZov Mat. (12), 22–31 (2020) [Russ. Math. **64** (12), 20–28 (2020)].

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 575–582.

УДК 519.632.4:539.3

КУБИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К РАСЧЁТУ ИЗГИБА ПЛАСТИН

© 2024 С. К. Голушко[1,2a], Л. С. Бryндин[1,3b], В. А. Беляев[1,3c], А. Г. Горынин[1d]

[1] *Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090, Россия,*
[3] *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]s.golushko@g.nsu.ru, [b]l.bryndin@g.nsu.ru, [c]v.beliaev9@g.nsu.ru, [d]a.gorynin@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 17.10.2023 г.; после доработки 25.04.2024 г.; принята к публикации 03.07.2024 г.

Разработан новый кубический вариант метода коллокации и наименьших квадратов на адаптивных сетках. Приближённые значения решения и его первых производных в вершинах четырёхугольных ячеек принимались в качестве неизвестных, что позволило исключить традиционные условия согласования из глобальной переопределённой системы линейных алгебраических уравнений, состоящей из уравнений коллокации и краевых условий. Для решения предобусловленной системы с учётом разреженности её матрицы использовался ортогональный метод, реализованный в библиотеке SuiteSparse с применением технологии параллельного программирования CUDA. Рассмотрена задача изгиба пластин в смешанной постановке в рамках теории Рейсснера—Миндлина. Достигнута более высокая точность расчётных значений прогибов и углов поворота, а также равномерная сходимость расчётных значений перерезывающих сил в случае тонкой пластины в предложенном методе по сравнению с изогеометрическим методом коллокации. Выполнен расчёт изгиба кольцевой пластины и круглых пластин с нецентральным отверстием и продемонстрировано увеличение градиента перерезывающих сил в окрестности отверстия как с уменьшением толщины пластины, так и с увеличением эксцентриситета. В численных экспериментах показан второй порядок сходимости разработанного метода. Проведено сравнение полученных решений в рамках теории Рейсснера—Миндлина с результатами расчётов с использованием теории Кирхгофа—Лява и трёхмерного конечно-элементного моделирования.

Ключевые слова: метод коллокации и наименьших квадратов, автоматическая склейка решения, адаптивная сетка, теория пластин Рейсснера—Миндлина, нецентральное отверстие.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.304

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными (УЧП) являются важным инструментом моделирования и исследования реальных процессов и явлений, в частности поведения различных композитных элементов конструкций под нагрузками. Разрешающие системы дифференциальных уравнений для описания напряжённо-деформированного состояния (НДС) пластин и оболочек могут быть решены аналитическими методами лишь в случае простых геометрических форм и краевых условий частного вида [1,2]. В более сложных ситуациях возникает необходимость применения современных численных методов, алгоритмы и свойства которых постоянно улучшаются.

Одним из возможных подходов является сведение УЧП к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и применение для её решения численного метода дискретной ортогонализации Годунова или сплайн-коллокации [3–6]. Другим направлением является развитие методов решения УЧП в исходной постановке с использованием сеток, способных в полной мере описать геометрию области. Отметим характерные трудности, возникающие при численном расчёте статического изгиба пластин:

— высокий порядок разрешающих систем УЧП, возникающих при использовании теорий Кирхгофа—Лява [1, 3], Рейсснера—Миндлина [1, 7], Амбарцумяна [8], Григолюка—Чулкова [9] и др.;

— наличие малых параметров при старших производных [1, 9–11];

— плохая обусловленность краевых задач, связанная с наличием производных высокого порядка в исходных УЧП [1, 12–15], а также в граничных условиях [16];

— нерегулярность расчётной области, ограничивающая применение ряда подходов построения сеток [13, 15] и заметно усложняющая реализацию некоторых численных методов, в частности метода конечных разностей [12];

— наличие пограничных слоёв [11, 17].

Данная работа посвящена развитию коллокационных сеточных методов, обладающих следующими достоинствами:

— методам коллокации свойственна аппроксимация исходной задачи без предварительной работы с её слабой постановкой, при этом уравнения на неизвестные получаются вычислениями приближающих функций в одной точке, позволяя быстро проводить сборку матрицы разрешающей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ);

— краевые условия аппроксимируются аналогично исходным УЧП с сохранением порядка аппроксимации, что не всегда возможно в других методах [18];

— в сеточных вариантах коллокационных методов могут использоваться различные подходы к построению расчётных сеток, пригодных для решения задач с точками ветвления, разрывом производных [15, 19], большими градиентами [11, 20], что делает их более гибкими по сравнению с бессеточными методами [13, 15];

— коллокационные методы могут эффективно применяться для решения нелинейных УЧП и УЧП с переменными коэффициентами [21], что может вызывать существенные трудности, например, для метода граничных элементов [22];

— в некоторых случаях количество ненулевых элементов в матрице СЛАУ в коллокационных методах может быть меньше чем в МКЭ при одинаковом порядке сходимости [23];

— возможность автоматического построения hp-вариантов коллокационных методов, позволяющих одновременно уменьшать размер ячеек расчётной сетки (h-подход) и увеличивать степень аппроксимирующих полиномов (p-подход) [9, 15, 19, 21].

Среди коллокационных методов решения задач механики сплошных сред метод коллокации и наименьших квадратов (МКНК) является одним из наиболее эффективных. Достоинства p и hp-вариантов МКНК были продемонстрированы при решении краевых задач для уравнения Пуассона [19], бигармонического уравнения [15], уравнений Навье—Стокса [24] и нелинейной системы УЧП, описывающей течение полимерной жидкости [21], в сравнении с методом конечных разностей, МКЭ и спектральными методами как в канонических, так и нерегулярных областях. В работах [9,14,15,19,21,24], посвящённых сеточным вариантам МКНК, при построении численного алгоритма в СЛАУ в явном виде присутствовали условия согласования искомого решения и его производных, записанные в точках на границах между соседними ячейками, для обеспечения непрерывности и дифференцируемости кусочно-полиномиального решения.

В данной работе разработан принципиально иной подход к нахождению приближённого решения в МКНК. Неизвестными здесь являются значения решения u^h и его первые производные u^h_x, u^h_y в вершинах ячеек, что позволяет полностью исключить условия согласования из глобальной переопределённой СЛАУ, состоящей теперь только из уравнений коллокации и краевых условий. После решения СЛАУ осуществляется переход от найденных значений u^h, u^h_x, u^h_y в узлах к коэффициентам линейного представления в полиномиальном базисе третьей степени посредством решения вспомогательной линейной задачи наименьших квадратов с использованием построенной прямоугольной матрицы перехода $A_{t,j}$, где j — номер ячейки. Условно такой вариант МКНК назовём C^1-МКНК$_3$, несмотря на то, что здесь условия непрерывности выполнены в смысле наименьших квадратов. Кроме того, в этом случае отпадает необходимость поиска и исследования значений весовых коэффициентов, на которые домножаются условия согласования [14,20,24]. Отметим, что во многих вариантах МКЭ приближённое решение строится подобным образом, но с применением уже слабых постановок и квадратных матриц перехода [25].

В качестве объекта исследования для обоснования и верификации C^1-МКНК$_3$ рассмотрим задачу изгиба изотропных пластин в рамках теории Рейсснера—Миндлина. Данная задача обладает определёнными особенностями [7,10,11] и хорошо подходит для тестирования численных методов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Статический изгиб однослойной пластины поперечной нагрузкой $q(x,y)$ в рамках теории Рейсснера—Миндлина описывается следующей разрешающей системой УЧП в декартовых координатах (x,y) [1]:

$$\begin{gathered}
KA_{55}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi_x\right)+KA_{44}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\phi_y\right)=-q,\\
(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x\partial y}+D_{11}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x^2}+D_{66}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y^2}-KA_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi_x\right)=0,\\
(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y}+D_{22}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2}+D_{66}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}-KA_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\phi_y\right)=0,
\end{gathered}$$

где $w(x,y)$ — прогиб, $\phi_x(x,y)$, $\phi_y(x,y)$ — углы поворота нормали срединной поверхности вокруг осей y и x соответственно, сдвиговой коэффициент Тимошенко $K=5/6$, коэффициенты жёсткости D_{11}, D_{12}, D_{22}, $D_{66}\sim t^3$, A_{44}, $A_{55}\sim t$, толщина пластины $t=\text{const}$.

В случае изотропного материала пластины $A_{44}=A_{55}=\dfrac{Et}{2(1+\nu)}$, $D_{11}=D_{22}=\dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $D_{12}=\dfrac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $D_{66}=\dfrac{Et^3}{12(1+\nu)}$, где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

В отличие от теории Кирхгофа—Лява применение теории Рейсснера—Миндлина приводит к наличию малых параметров при старших производных углов поворота [9]. Другой особенностью использования данной постановки является эффект сдвигового запирания, называемый также ограничением Кирхгофа [11], заключающийся в том, что при уменьшении толщины пластины численное решение не в полной мере удовлетворяет требованиям, допускающим нулевые деформации поперечного сдвига. В результате чего величины деформаций могут значительно недооцениваться при численном решении. При применении МКЭ явление сдвигового запирания возникает, когда используются элементы низкого порядка [7, 26]. При этом при малых толщинах пластины сходимость может иметь место только на достаточно подробных сетках [7].

Существуют разные способы преодоления этой проблемы. Отметим здесь прежде всего те, которые удобно рассматривать в коллокационных методах:

1) смешанная аппроксимация [27], в том числе использование поворотных пространств [11];

2) повышение степени полиномиальных приближений [10, 11, 28];

3) использование постановок, которые не приводят к сдвиговому запиранию [11, 26].

Далее рассмотрим смешанную постановку задачи изгиба изотропной пластины в теории Рейсснера—Миндлина [11], в которой перерезывающие силы $Q_x(x,y)$ и $Q_y(x,y)$ рассматриваются как независимые переменные в дополнение к прогибу w и углам поворота нормали ϕ_x и ϕ_y:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=-1, \tag{1}$$

$$\frac{3-\nu}{24(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x\partial y}+\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x^2}+\frac{1}{24(1+\nu)}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial y^2}-Q_x=0, \tag{2}$$

$$\frac{3-\nu}{24(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\phi_x}{\partial x\partial y}+\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial y^2}+\frac{1}{24(1+\nu)}\frac{\partial^2\phi_y}{\partial x^2}-Q_y=0, \tag{3}$$

$$Q_x=\frac{K}{2(1+\nu)\beta^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi_x\right), \tag{4}$$

$$Q_y=\frac{K}{2(1+\nu)\beta^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\phi_y\right), \tag{5}$$

где $\beta=\dfrac{t}{L}$ — малый параметр, L — характерный размер пластины.

Отметим, что система (1)–(5) записана в безразмерном виде (в ней тильда над переменными уже опущена) [1]: $\tilde{x}=\dfrac{x}{L}$, $\tilde{y}=\dfrac{y}{L}$, $\tilde{w}=w\dfrac{Et^3}{qL^4}$, $\tilde{\phi}_x=\phi_x\dfrac{Et^3}{qL^3}$, $\tilde{\phi}_y=\phi_y\dfrac{Et^3}{qL^3}$, $\tilde{Q}_x=Q_x\dfrac{1}{qL}$, $\tilde{Q}_y=Q_y\dfrac{1}{qL}$.

Таким образом, задача исследования заключается в разработке эффективного коллокационного метода для численного решения системы (1)–(5), дополненной краевыми условиями [1, 11], которые в случае защемлённого края имеют вид

$$w=0,\quad \phi_n=0,\quad \phi_s=0, \tag{6}$$

а в случае свободного края

$$M_n=0,\quad M_{ns}=0,\quad Q_n=0, \tag{7}$$

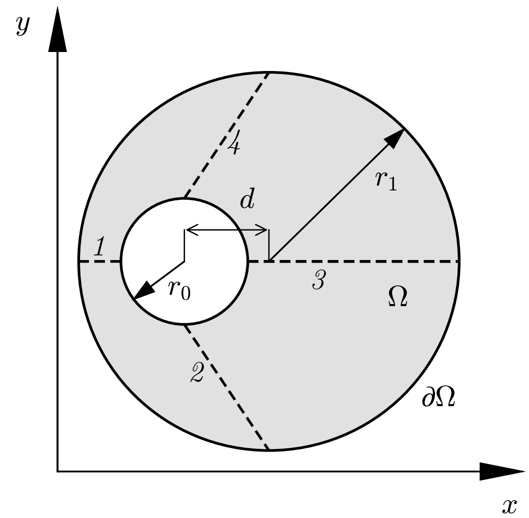
где $\phi_n = \phi_x n_x + \phi_y n_y$, $\phi_s = -\phi_x n_y + \phi_y n_x$, M_n, M_{ns}, Q_n — изгибающий момент, крутящий момент и перерезывающая сила, $\vec{n} = (n_x, n_y)$ — внешняя нормаль к границе области $\partial\Omega$. Здесь [1]

$$M_n = M_x n_x^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y^2, \quad M_{ns} = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy}(n_x^2 - n_y^2),$$
$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y, \quad M_x = D_{11}\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + D_{12}\frac{\partial\phi_y}{\partial y}, \quad M_y = D_{12}\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + D_{22}\frac{\partial\phi_y}{\partial y},$$
$$M_{xy} = D_{66}\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right).$$

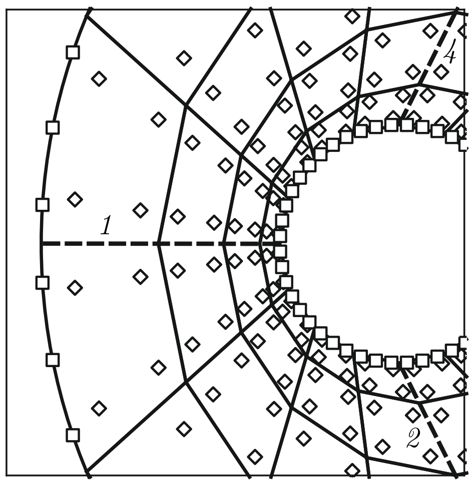
2. КУБИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ И НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

2.1. Построение адаптивных сеток

В данной работе для круглых пластин с одним отверстием (в общем случае нецентральным с эксцентриситетом d) адаптивная квазиструктурированная сетка с четырёхугольными ячейками в количестве N_{cells} строилась с помощью пакета Gmsh [29]. Для её построения область Ω разбивалась на четыре криволинейных «больших» четырёхугольника. Затем каждая их сторона делилась на фиксированное одинаковое количество отрезков или дуг (принадлежащих границе области $\partial\Omega$), размер которых в первом случае (см. рис. 1(a), штрихованные линии *1*–*4*) изменялся со скоростью геометрической прогрессии вдоль стороны, а во втором — равномерно. После чего программа Gmsh генерировала структурированную четырёхугольную сетку в каждом из больших четырёхугольников (см. рис. 1(b)). Такой подход построения сетки естественным образом сочетается как с самой геометрией исходной области, так и с особенностями в виде наличия погранслоёв характеристик НДС в окрестности отверстия, вблизи которого необходимо сгущать сетку.



(a)



(b)

Рис. 1. Область решения задачи (a) и фрагмент с адаптивной сеткой (b), где $\diamond$ — точки коллокации, $\square$ — точки записи краевых условий

2.2. Представление приближённого решения и формирование матрицы перехода

Введём в каждой j-ой ячейке свою локальную систему координат

$$\xi_{1,j} = \frac{x - x_j}{h_j}, \quad \xi_{2,j} = \frac{y - y_j}{h_j}, \tag{8}$$

где (x_j, y_j) — центр ячейки, характерный размер ячейки h_j вычисляется по формуле

$$h_j = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(l_1 l_2 + l_3 l_4)(l_1 l_4 + l_2 l_3)(l_1 l_3 + l_2 l_4)}{(p - l_1)(p - l_2)(p - l_3)(p - l_4)}}, \tag{9}$$

l_1, l_2, l_3, l_4 — длины сторон четырёхугольной ячейки, $p = \dfrac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}{2}$. Заметим, что если четырёхугольник может быть вписан в окружность, то h_j является её радиусом.

В каждой j-ой ячейке приближённое решение для w представляется в виде

$$w_j^h(\xi_{1,j}, \xi_{2,j}) = \sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3-i_1} c^w_{i_1 i_2,j}\xi_{1,j}^{i_1}\xi_{2,j}^{i_2} = (\vec{c}_j^{\,w}, \vec{v}_j(\xi_{1,j}, \xi_{2,j})), \tag{10}$$

где $c^w_{i_1 i_2,j}$ — 10 неизвестных коэффициентов для каждой ячейки, $\vec{c}_j^{\,w} = (c^w_{00,j}, c^w_{01,j}, c^w_{02,j}, \ldots, c^w_{30,j})^T$, $\vec{v}_j(\xi_{1,j}, \xi_{2,j}) = (1, \xi_{2,j}, \xi_{2,j}^2, \ldots, \xi_{1,j}^3)^T$.

По аналогии с техникой построения приближённого решения в методе коллокации для обыкновенных дифференциальных уравнений [4] и УЧП [30] со старшими производными второго порядка для обеспечения условий непрерывности решения и его производных на границах между соседними ячейками в качестве неизвестных зададим значения решения w_j^h и его первых производных $w_{x,j}^h$, $w_{y,j}^h$ в вершинах ячеек (узлах сетки) соответственно.

Прямоугольная матрица перехода $A_{t,j}$ размера 12×10 позволяет определить значения коэффициентов $\vec{c}_j^{\,w}$ через значения w_j^h, $w_{x,j}^h$ и $w_{y,j}^h$ в узлах посредством решения переопределённой СЛАУ

$$A_{t,j}\vec{c}_j^{\,w} = \vec{w}_j = (w_j^{h,1}, w_{x,j}^{h,1}, w_{y,j}^{h,1}, \ldots, w_j^{h,4}, w_{x,j}^{h,4}, w_{y,j}^{h,4})^T, \tag{11}$$

где цифра в верхнем индексе «h,» обозначает значение в одном из четырёх узлов. Тогда $\vec{c}_j^{\,w} = Q_j^T R_j^{-1}\vec{w}_j$, где $Q_j R_j$ — ортогональное разложение матрицы $A_{t,j}$ [31]: $A_{t,j} = Q_j R_j$, Q_j — матрица с ортогональными столбцами размера 12×10, R_j — верхнетреугольная матрица размера 10×10.

Подчеркнём, что для четырёхугольных ячеек описанного способа задания w_j^h, $w_{x,j}^h$ и $w_{y,j}^h$ достаточно, поскольку относительно 10 неизвестных коэффициентов в (10) имеется 12 значений в вершинах ячеек. Для треугольных ячеек в этом случае приходится только 9 значений и СЛАУ будет недоопределена.

Аналогично записываются приближенные решения (10) и СЛАУ (11) для ϕ_x^h, ϕ_y^h, Q_x^h, Q_y^h и их первых производных. Матрица перехода в (11) является одинаковой для любой приближенной функции.

2.3. Уравнения приближённой задачи, сборка и решение глобальной СЛАУ

Для определения неизвестных значений приближенного решения и его производных в узлах сетки в каждой ячейке в нескольких точках выпишем уравнения коллокации и краевые условия, если ячейка является граничной. Пусть точка коллокации в j-ой ячейке имеет локальные координаты (ξ_{1c}, ξ_{2c}). Тогда подстановка приближённого решения (10) для Q_x^h и Q_y^h в уравнение (1) в точке (ξ_{1c}, ξ_{2c}) приводит к следующему выражению:

$$\frac{1}{h_j}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3-i_1} c^{Q_x}_{i_1 i_2,j}\xi_{1c}^{i_1}\xi_{2c}^{i_2} + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3-i_1} c^{Q_y}_{i_1 i_2,j}\xi_{1c}^{i_1}\xi_{2c}^{i_2}\right) = 1. \tag{12}$$

Обозначим вектор размера 10, элементами которого являются $\xi_{1c}^{i_1}\xi_{2c}^{i_2}$ через $\vec{v}$, а векторы, составленные из первых производных $\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}\xi_{1c}^{i_1}\xi_{2c}^{i_2}$ и $\dfrac{\partial}{\partial\xi_2}\xi_{1c}^{i_1}\xi_{2c}^{i_2}$ через $\overrightarrow{\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}v}$ и $\overrightarrow{\dfrac{\partial}{\partial\xi_2}v}$ соответственно. Тогда уравнение (12) с учётом $\vec{c}_j^{\,Q_x} = Q_j^T R_j^{-1}\vec{Q}_{xj}$ и $\vec{c}_j^{\,Q_y} = Q_j^T R_j^{-1}\vec{Q}_{yj}$ можно переписать в виде

$$\left(Q_j^T R_j^{-1}\vec{Q}_{xj}, \frac{1}{h_j}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial\xi_1}v}\right) + \left(Q_j^T R_j^{-1}\vec{Q}_{yj}, \frac{1}{h_j}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial\xi_2}v}\right) = 1.$$

Далее, применяя свойство скалярного произведения, получим следующее линейное алгебраическое уравнение относительно неизвестных значений Q_x^h, Q_y^h и их производных в узлах j-ой ячейки:

$$\left(\vec{Q}_{xj}, Q_j(R_j^{-1})^T\frac{1}{h_j}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial\xi_1}v}\right) + \left(\vec{Q}_{yj}, Q_j(R_j^{-1})^T\frac{1}{h_j}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial\xi_2}v}\right) = 1. \tag{13}$$

Таким же образом выписываются уравнения коллокации для уравнений (2)–(5).

Для расстановки точек коллокации в количестве N_{col} в каждой ячейке (ниже индекс «j» опущен) применено отображение вида

$$x = C_0 + C_1\tilde{x} + C_2\tilde{y} + C_3\tilde{x}\tilde{y},$$

$$y = C_4 + C_5\tilde{x} + C_6\tilde{y} + C_7\tilde{x}\tilde{y},$$

переводящее вершины квадрата $[-1,1]^2$ в узлы четырёхугольной ячейки, где C_0–C_7 — коэффициенты отображения, $(\tilde{x},\tilde{y}) \in [-1,1]^2$ — исходная система координат. В качестве точек коллокации были взяты образы корней прямого произведения полиномов Лежандра второй или третьей степени по двум направлениям при этом отображении (см. рис. 1(b)).

На примере первого уравнения (6) покажем, как учитываются краевые условия в ячейках, одна из сторон которых является частью границы области. Подставляя приближённое решение (10) в (6) в точке $(\xi_{1b},\xi_{2b}) \in \partial\Omega$, имеем

$$\sum_{i_1=0}^{3}\sum_{i_2=0}^{3-i_1} c^w_{i_1 i_2,j}\xi_{1b}^{i_1}\xi_{2b}^{i_2} = 0. \tag{14}$$

Обозначим вектор размера 10, элементами которого являются $\xi_{1b}^{i_1}\xi_{2b}^{i_2}$, через $\vec{v}$, и перепишем (14) в виде

$$\left(\vec{w}_j, Q_j(R_j^{-1})^T\vec{v}\right) = 0. \tag{15}$$

Выражение (15) является линейным алгебраическим уравнением относительно неизвестных w_j^h, $w_{x,j}^h$ и $w_{y,j}^h$ в вершинах j-ой ячейки. Другие краевые условия аппроксимируются аналогичным образом.

Для записи краевых условий на каждой стороне ячейки, вершины которой располагались на границе области $\partial\Omega$, равномерно располагалось три точки (см. рис. 1(b)).

Глобальная переопределённая СЛАУ с разреженной матрицей A получается объединением всех уравнений коллокации и краевых условий в каждой ячейке. Для её решения здесь применено диагональное предобуславливание [32] и библиотека SuiteSparse [33], позволяющая проводить параллельные вычисления с помощью QR-разложения матриц на многоядерных графических архитектурах с использованием технологии CUDA.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

3.1. Верификация C^1-МКНК$_3$ и исследование его свойств

Рассмотрим тестовый пример из работы [11] с известным точным бесконечно гладким решением краевой задачи (1)–(6) в $\Omega = (0,1)^2$, когда на пластину действует нагрузка $q(x,y) = \dfrac{E}{12(1-\nu^2)}(12yy_1x_3(2y^2y_1^2 + xx_1y_3) + 12xx_1y_3(2x^2x_1^2 + yy_1x_3))$, $E = 10.92\cdot 10^6$, $\nu = 0.3$. В этом случае аналитическое решение имеет вид

$$w = \frac{1}{t^3}\left(\frac{x^3x_1^3y^3y_1^3}{3} - \frac{2t^2}{5(1-\nu)}\left(y^3y_1^3xx_1x_3 + x^3x_1^3yy_1y_3\right)\right),$$

$$\varphi_x = -\frac{y^3y_1^3x^2x_1^2x_2}{t^3}, \quad \varphi_y = -\frac{x^3x_1^3y^2y_1^2y_2}{t^3},$$

$$Q_x = -\frac{E}{6(1-\nu^2)}(y^3y_1^3(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1) + 3yy_1y_3x^2x_1^2x_2),$$

$$Q_y = -\frac{E}{6(1-\nu^2)}(x^3x_1^3(20y^3 - 30y^2 + 12y - 1) + 3xx_1x_3y^2y_1^2y_2),$$

где $x_1 = x-1$, $y_1 = y-1$, $x_2 = 2x-1$, $y_2 = 2y-1$, $x_3 = 5x^2-5x+1$, $y_3 = 5y^2-5y+1$.

В представленных ниже результатах погрешность приближённого решения u^h (вместо неё следует подставлять w^h, ϕ_x^h, ϕ_y^h, Q_x^h, Q_y^h и другие характеристики НДС) в дискретном аналоге нормы L_2 вычислялась по следующей формуле:

$$\|E_r^{u^h}\|_2 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_{cells}}\sum\limits_{m=1}^{100}(u(x_m,y_m) - u_j^h(x_m,y_m))^2}{\sum\limits_{j=1}^{N_{cells}}\sum\limits_{m=1}^{100}(u(x_m,y_m))^2}},$$

где (x_m, y_m) — координаты равномерно распределённых 100 точек в каждой ячейке для подсчёта в них погрешности. В этом примере в C^1-МКНК$_3$ строилась равномерная регулярная сетка с квадратными ячейками.

Численное решение рассматриваемой задачи разделим на три этапа.

3.1.1. Исследование влияния весовых множителей.

В МКНК важную роль играют значения весовых множителей, на которые домножаются уравнения приближённой задачи. Они влияют на обусловленность СЛАУ, скорость сходимости итерационного процесса решения СЛАУ [14–16, 19] и точность решения. Для каждой конкретной задачи существуют области их значений (определяющихся из численных экспериментов), при которых погрешность численных результатов практически не отличается от её минимального значения. Этот вопрос исследовался для МКНК с явной записью условий согласования при решении уравнения Пуассона и Навье—Стокса [24], УЧП эллиптического типа второго порядка [20], бигармонического уравнения [14]. Отметим, что в C^1-МКНК$_3$ нет необходимости поиска и анализа значений весовых коэффициентов для уравнений согласования, что заметно упрощает задачу. Тем не менее для улучшения свойств разрабатываемого метода поиск оптимальных весовых множителей для уравнений коллокации и краевых условий остаётся важной и трудной задачей.

Домножим уравнение коллокации (13) на $p_{c_1} = C_1h$, уравнения коллокации для (2), (3) — на $p_{c_2} = p_{c_3} = C_2h^2$, уравнения коллокации для (4), (5) — на $p_{c_4} = p_{c_5} = C_3h\beta^2$, где C_1, C_2, C_3 — константы, характерный размер $L = 1$, параметр h в данном случае одинаков для всех ячеек. Для каждого из уравнений, входящих в краевые условия (6), весовые коэффициенты были приняты равными 1. Расчёты были проведены на сетках, состоящих из 25, 100, 400, 1600 и 6400 ячеек, при $t = 0.1, 0.01, 0.001$ и $N_{col} = 9$. Константы C_1, C_2, C_3 варьировались от 10^{-4} до 10^4 с изменением в 10 раз. Вычисление погрешности было проведено для прогиба w^h, углов поворота ϕ_x^h, ϕ_y^h и перерезывающих сил Q_x^h, Q_y^h. Для выявления оптимальных диапазонов параметров проведён анализ 675 графиков погрешности (см., например, рис. 2), на которых светлые области обозначают минимальные значения погрешности, а тёмные — максимальные.

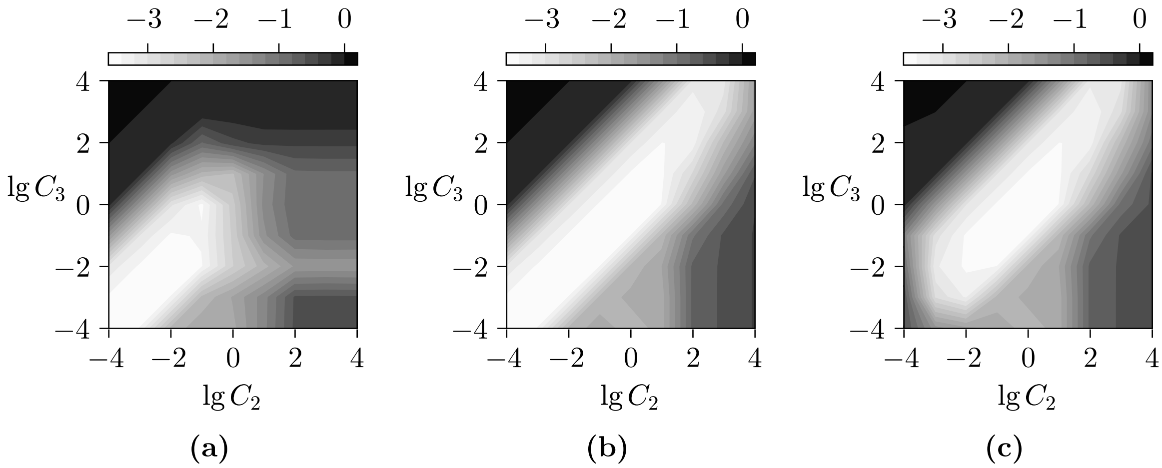


Рис. 2. Зависимость $\|E_r^{w^h}\|_2$ от весовых множителей при $N_{cells} = 1600$, $t = 0.001$, $N_{col} = 9$ и $C_1 = 10^{-4}$ (a), $C_1 = 10^0$ (b), $C_1 = 10^4$ (c)

Было проведено исследование зависимости результатов расчёта от размера сетки, параметров C_1, C_2 и C_3, а также от отношения характерного размера пластины к её толщине. На основании проведённых исследований рекомендуются следующие диапазоны параметров для проведения расчётов в рамках теории Рейсснера—Миндлина: $C_1 \in [10^{-3}, 10^2]$, $C_2 \in [C_1 \cdot 10^{-1}, C_1 \cdot 10^1]$, $C_3 \in [C_2 \cdot 10^0, C_2 \cdot 10^2]$.

Отметим, что для случая тонкой пластины $t = 0.01$ численные результаты близки к результатам, когда $t = 0.001$. В случае $N_{col} = 4$ обусловленность глобальной матрицы равнялась бесконечности, в следствие чего здесь рекомендуется использовать $N_{col} = 9$. Дальнейшее увеличение переопределения глобальной СЛАУ приводило к незначительному изменению точности решения. При этом для решения более простой задачи, — задачи Дирихле для уравнения Пуассона с бесконечно гладким тестовым решением, было установлено, что достаточно использовать $N_{col} = 4$.

3.1.2. Сходимость C^1-МКНК$_3$ и сравнение с изогеометрическим методом коллокации (IGA-C).

На рис. 3 приведено сравнение относительных погрешностей численных решений в L_2 норме, полученных с помощью C^1-МКНК$_3$ и IGA-C [11], для толстостенной ($t = 10^{-1}$) и тонкой ($t = 10^{-3}$) пластин, где $n = \lg \sqrt{\text{DOF}}$, DOF — общее количество степеней свободы, C — константа, регулирующая высоту пунктирной линии, $N = 3$ — порядок аппроксимирующей функции по каждому из направлений двумерных рациональных B-сплайнов в IGA-C. В C^1-МКНК$_3$ были взяты следующие значения весовых множителей: $p_{c_1} = h$, $p_{c_2} = p_{c_3} = 0.1h^2$, $p_{c_4} = p_{c_5} = h\beta^2$.

Из рис. 3 видно, что оба метода имеют второй порядок сходимости, причём точность полученных результатов для прогиба w^h (см. рис. 3(a) и 3(d)), угла поворота ϕ_x^h (см. рис. 3(b) и 3(e)) при $t = 0.001, 0.1$ и перерезывающей силы Q_x^h (см. рис. 3(c)) при $t = 0.1$ у C^1-МКНК$_3$ выше по сравнению с IGA-C. При этом величины погрешности для Q_x^h при $t = 0.001$ выше в IGA-C. Однако в C^1-МКНК$_3$ сходимость расчётных значений Q_x^h равномерная для толстостенной и тонкой пластин, а для IGA-C — нет (см. рис. 3(f)). Причём авторы [11] утверждают, что

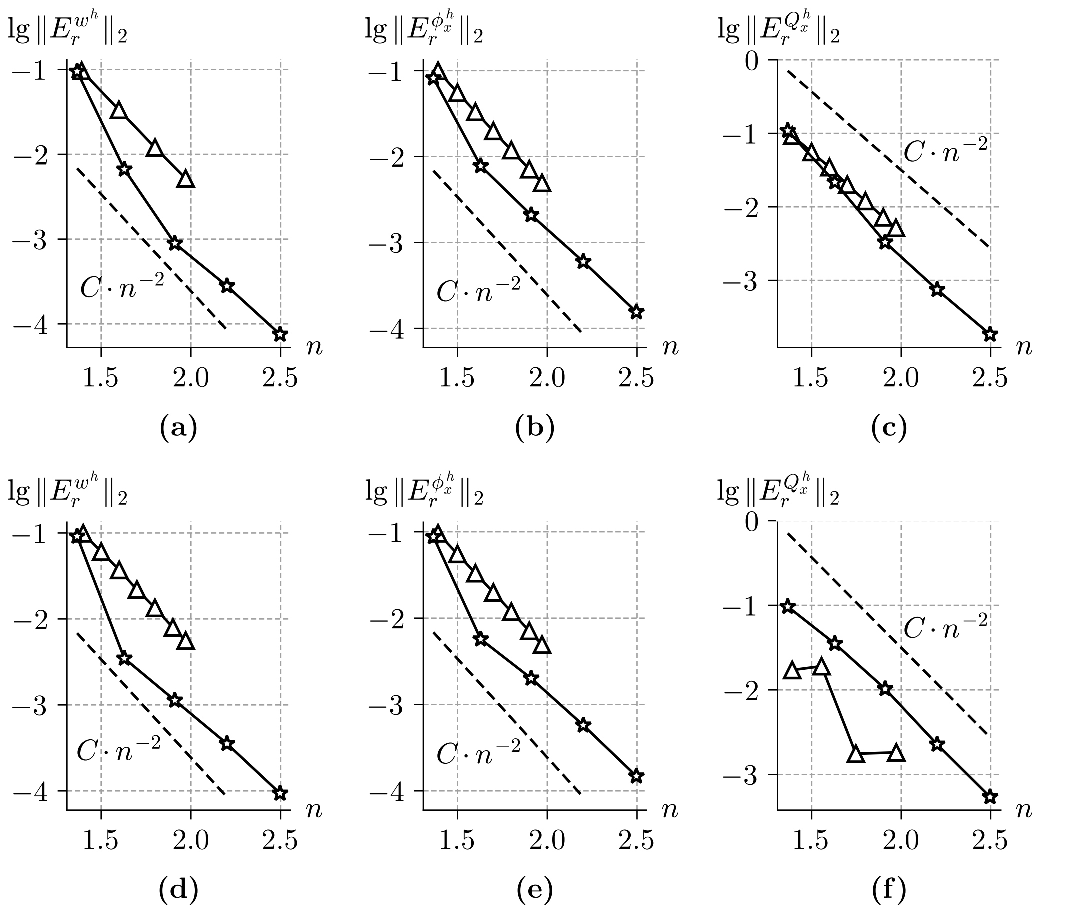


Рис. 3. Сходимость C^1-МКНК$_3$ ($\star$) и IGA-C при $N = 3$ [11] ($\triangle$) расчётных значений w^h (a), (d), ϕ_x^h (b), (e) и Q_x^h (c), (f) при $t = 10^{-1}$ (a), (b), (c) и $t = 10^{-3}$ (d), (e), (f)

при решении задачи в смешанной постановке (1)–(5) у них не возникает сдвиговое запирание и все переменные сходятся с одинаковыми порядками сходимости. Но в то же время на графике сходимости перерезывающей силы для IGA-C наблюдаются ярко выраженные «полочки» и в этих случаях происходит ухудшение погрешности при увеличении DOF. Для толстостенных пластин при $t = 0.1$ такого поведения уже у IGA-C не наблюдается (см. рис. 3(c)). Отметим, что в последнем случае задача является более простой и возникновение явления сдвигового запирания для неё менее вероятно.

3.1.3. Исследование числа обусловленности, объёма вычислительных затрат и точности выполнения условий непрерывности.

Обозначим через $\kappa = \dfrac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)}$ — число обусловленности матрицы A в спектральной норме, где σ_{max} и σ_{min} — максимальное и минимальное сингулярные числа [31]. В таблице 1 приведены значения κ для матрицы перехода A_t (в данном примере она одинакова для всех квадратных ячеек) и глобальной матрицы AD, где D — правый диагональный предобуславливатель [32], возникающих в C^1-МКНК$_3$ на последовательности измельчающихся сеток при различных толщинах пластины t. Параметры метода соответствуют значениям из предыдущего подраздела.

Анализ таблицы 1 показал следующее:

1) Числа обусловленности матрицы перехода $\kappa(A_t)$ имеют сравнительно небольшие значения, что говорит о заведомо хорошей разрешимости линейной задачи наименьших квад-

Таблица 1

Исследование числа обусловленности в C^1-МКНК$_3$

N_{cells}	DOF	$\kappa(A_t)$	$t=1$, $\beta=10^{-1}$	$t=0.001$, $\beta=10^{-3}$
			$\kappa(AD)$	$\kappa(AD)$
25	540	34.3	2.38e+5	2.77e+5
100	1815	68.43	1.57e+6	2.72e+6
400	6615	136.77	7.60e+6	2.48e+7
1600	25215	273.51	3.20e+7	2.19e+8

ратов при определении значений коэффициентов линейного представления в кусочно-полиномиальном базисе в C^1-МКНК$_3$ [31].

2) Числа обусловленности глобальной предобусловленной матрицы $\kappa(AD)$ для толстостенной пластины меньше, чем для тонкой, причём разница увеличивается с уменьшением размера ячеек расчётной сетки. Учитывая, что их значения не являются малыми, то применение здесь ортогонального метода вместо метода нормальных уравнений является целесообразным, поскольку во втором случае, как хорошо известно, $\kappa(A^TA)=\kappa^2(A)$ [31].

Отметим также, что числа обусловленности матриц перехода в случае применения локальной системы координат (8) значительно меньше чем в глобальной (x,y). Например, при решении данной задачи на сетке, состоящей из 1600 ячеек, их значения были равны $2.73e{+}2$ и $6.5e{+}6$ в спектральной норме соответственно.

В таблице 2 приведена информация о вычислительных затратах решения СЛАУ, где степень переопределения η определялась по формуле $\eta = N_{eq}/\mathrm{DOF}$, nnz — % количества ненулевых элементов, $\rho = (100\cdot nnz)/(N_{eq}\cdot \mathrm{DOF})$ — плотность разреженной матрицы. Расчёты были проведены на процессоре 12th Gen Intel(R) Core(TM) i9-12900KF 2.70 GHz, DIMM DDR5 3200 MHz 32 Gb и видеокарте NVIDIA GeForce RTX 3080, 10 GB. Для распараллеливания вычислений использовалась CUDA с выделением $9\cdot 10^9$ бит памяти.

Таблица 2

Стоимость решения СЛАУ в C^1-МКНК$_3$

N_{cells}	N_{eq}	DOF	η	ρ, %	nnz, %	t_{sol} с CUDA	t_{sol} без CUDA	AF_t
25	1305	540	2.63	41400	5.87	0.141	0.031	0.219
100	4860	1815	2.80	158400	1.79	0.344	0.532	1.546
400	18720	6615	2.90	619200	0.5	1.25	3.469	2.77
1600	73440	25215	2.95	2448000	0.13	3.047	29.937	9.82
6400	290880	98415	2.97	9734400	0.03	13.891	339.297	24.42

Из данных таблицы 2 видно, что максимальное ускорение времени расчётов достигло значения $AF_t = 24.42$. Этот коэффициент, определяемый как отношение времени решения задачи с использованием CUDA к его значению без CUDA, возрастает с увеличением размера СЛАУ. Отметим, что на грубой сетке из 25 ячеек применение распараллеливания не дало ускорения решения задачи, т. к. требуется некоторое время для подготовки видеокарты [34].

Во введении было отмечено, что в C^1-МКНК$_3$ условия непрерывности выполнены в смысле наименьших квадратов, т. к. матрица перехода $A_{t,j}$ является прямоугольной. Из результатов численных экспериментов следует, что максимальные значения разницы решения и его первых производных из разных соседних ячеек на общей границе не превышают погрешности приближённого решения и являются малыми. Например, для случая тонкой пластины $t=10^{-3}$ при $N_{cells}=1600$ эта разница для w^h и его первых производных по x и y равнялась $5.96e{-}7$, $4.97e{-}5$ и $4.97e{-}5$ соответственно, а для Q_x^h и её первых производных — $6.92e{-}5$, $1.00e{-}4$ и $4.47e{-}4$.

3.2. Расчёт изгиба кольцевой пластины и круглых пластин с нецентральным отверстием

Рассмотрим задачу изгиба круглой пластины радиуса $r_1 = 50$ в общем случае с нецентральным отверстием радиуса $r_0 = 10$, находящейся под действием равномерной нагрузки $q = 10^{-2}$. Пусть внешний край пластины защемлён (6), а внутренний — свободен (7). Считаем, что центр внешней окружности находится в точке $(0, 0)$.

В таблице 3 приведено сравнение расчётных значений нормированных прогибов в двух теориях. В ней $E_r = 100 \cdot |w^h_{\mathrm{TKL}} - w^h_{\mathrm{TRM}}|/|w^h_{\max\mathrm{TKL}}|$, δ — расстояние, отсчитываемое по горизонтальной оси $y = 0$ от края отверстия до границы $\partial\Omega$ на прямолинейных участках 1 и 3 (см. рис. 1(а)). Нижние индексы TKL и TRM указывают на то, что прогибы получены по теориям Кирхгофа—Лява и Рейсснера—Миндлина соответственно. Указанные значения $w^h_{\mathrm{TRM}}\dfrac{10^{-5}E}{q}$ (а также результаты, представленные на рис. 5, 6 и в таблице 4) были получены применением C^1-МКНК$_3$ на адаптивной сетке, состоящей из $N_{cells} = 24960$ ячеек. В расчётах полагалось $E = 2 \cdot 10^5$, $\nu = 0.3$, $d = 20$, $t = 1$, $L = r_1$, весовые множители: $p_{c_1} = 10h$, $p_{c_2} = p_{c_3} = h^2$, $p_{c_4} = p_{c_5} = 10h\beta^2$. Величины прогибов, полученные по теории Кирхгофа—Лява, взяты из работы [3], в которой они были получены численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации Годунова в биполярной системе координат.

Таблица 3

Сравнение нормированных прогибов, полученные по теориям Кирхгофа—Лява [3] и Рейсснера—Миндлина

$\dfrac{\delta}{20}$	$w^h_{\mathrm{TKL}}\dfrac{10^{-5}E}{q}$	$w^h_{\mathrm{TRM}}\dfrac{10^{-5}E}{q}$	E_r, %	$\dfrac{\delta}{60}$	$w^h_{\mathrm{TKL}}\dfrac{10^{-5}E}{q}$	$w^h_{\mathrm{TRM}}\dfrac{10^{-5}E}{q}$	E_r, %
0	4.444	4.301	1.33	0	10.743	10.744	0.00
0.21	3.054	2.940	1.06	0.204	10.528	10.580	0.48
0.392	1.970	1.879	0.84	0.375	9.086	9.189	0.95
0.611	0.901	0.842	0.54	0.653	4.402	4.536	1.24
0.802	0.270	0.235	0.26	0.863	0.863	0.955	0.85
1	0	0.001	0.00	1	0	0.000	0.00

Видно, что полученные с использованием двух теорий результаты расчётов близки и максимальное относительное отклонение составляет $\sim 1\%$. Этого и следовало ожидать, поскольку отличия между компонентами НДС для тонких пластин в рамках теорий Кирхгофа—Лява и Рейсснера—Миндлина являются незначительными [9, 10, 27, 28].

Проведём верификацию C^1-МКНК$_3$ и проанализируем поведение перерезывающих сил в зависимости от эксцентриситета d и толщины пластины t при указанных выше r_0, r_1, q, ν, E и краевых условиях. На рис. 4 приведены графики сходимости C^1-МКНК$_3$ для w^h, ϕ^h_x, σ^h_x (в $z = t/2$) и Q^h_x. Здесь в качестве отсчётной поверхности используется срединная плоскость $z = 0$. Напряжение $\sigma^h_x = \dfrac{Ez}{1-\nu^2}\dfrac{\partial\phi^h_x}{\partial x} + \dfrac{E\nu z}{1-\nu^2}\dfrac{\partial\phi^h_y}{\partial y}$ [1].

Относительное отклонение рассчитывалось по формуле

$$D^r_\infty = \frac{\max\limits_{m=1,\ldots,\mathfrak{M}} |u^h(x_m, y_m) - u^{h/2}(x_m, y_m)|}{\max\limits_{m=1,\ldots,\mathfrak{M}} |u^{h/2}(x_m, y_m)|}, \tag{16}$$

где вместо u^h и $u^{h/2}$ подразумевается любая из приближённых функций на грубой сетке и подробной, у которой количество ячеек приблизительно в четыре раза меньше (на самой подробной сетке $N_{cells} = 24960$), $\mathfrak{M} = 10^4$ — количество равномерно распределённых точек в квадрате $[-50, 50]^2$, включающем исходную область Ω. D^r_∞ в точках вне Ω не вычислялось.

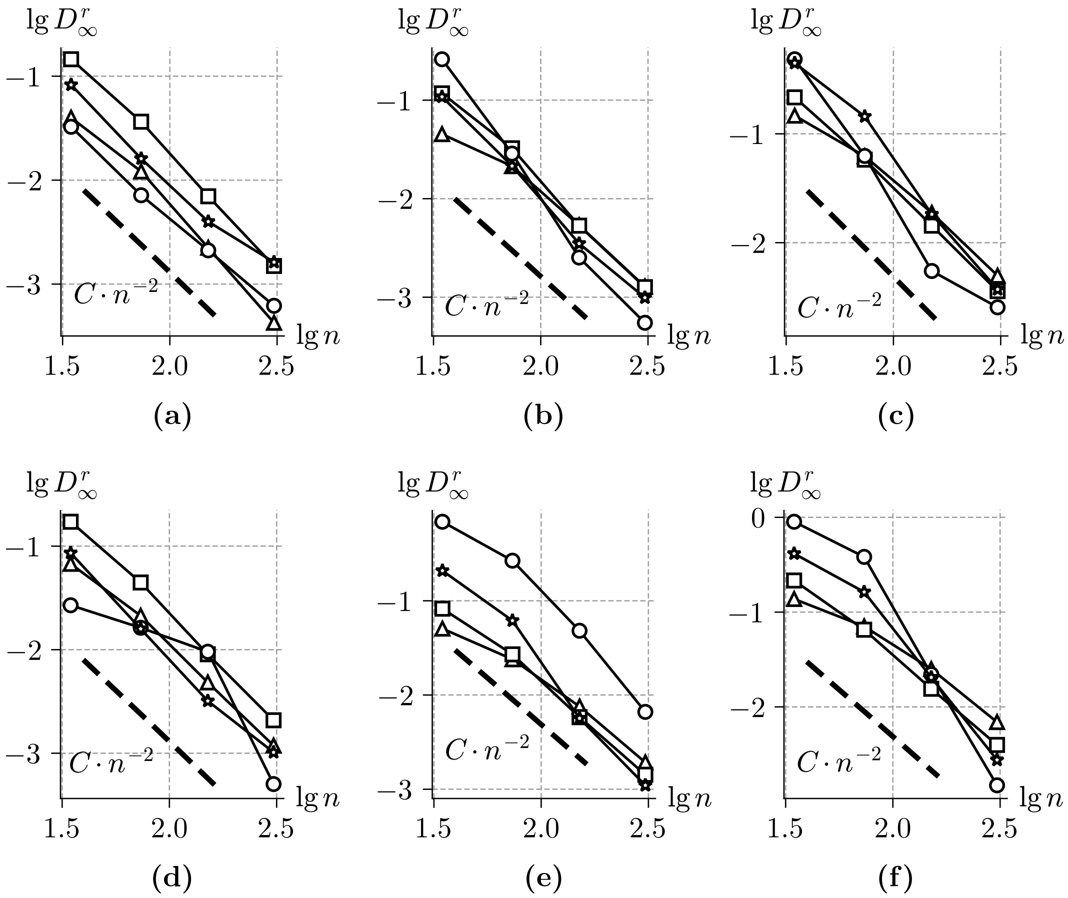


Рис. 4. Сходимость C^1-МКНК$_3$ для w^h ($\triangle$), ϕ_x^h ($\square$), σ_x^h ($\star$) и Q_x^h ($\circ$) в случае толстостенной $t = 10$ (a), (b), (c) и тонкой $t = 1$ пластин (d), (e), (f) при $d = 0$ (a), (d), $d = 20$ (b), (e) и $d = 35$ (c), (f)

Замечание. Для кольцевой пластины с центральным отверстием ($d = 0$) точное решение задачи в рамках теории Рейсснера—Миндлина было получено с использованием подхода из [35], в которой оно было приведено для круглой пластины без отверстия. Для этого при интегрировании уравнений слагаемые, содержащие $\log r$ и $1/r$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус), учитывались. При вычислении (16) на рис. 4(c), 4(f) приближённое решение $u^{h/2}$ заменялась на точное.

Из рис. 4 видно, что метод сходится со вторым порядком, при этом точность относительного отклонения расчётных значений ухудшается с увеличением эксцентриситета d, что и следовало ожидать из-за наличия больших градиентов перерезывающих сил, усиливающихся с увеличением значения d (см. рис. 5 и 6). Отметим, что характер сходимости величины ϕ_y^h аналогичен ϕ_x^h; величин Q_y^h, σ_{xz}^h и σ_{yz}^h — Q_x^h; σ_{xy}^h, σ_y^h, M_x^h, M_y^h, величины M_{xy}^h — σ_x^h.

На рис. 5 приведено распределение обезразмеренной перерезывающей силы Q_x^h на отрезке, концы которого соединяют внешнюю и внутреннюю окружности. Этот отрезок параллелен оси y, находится во II четверти внешней окружности, а его продолжение проходит через центр отверстия под углом $\dfrac{\pi}{2}$ к оси Ox. В свою очередь, на рис. 6 изображено распределение обезразмеренной величины Q_y^h на отрезке, концы которого также соединяют точки, принадлежащие внешней и внутренней окружностям. Он лежит в III четверти внешней окружности, а его продолжение проходит через центр отверстия под углом $\dfrac{\pi}{4}$ к оси Ox. Такой выбор представления и анализа результатов обусловлен тем, что на указанных отрезках наблюдается наибольшие изменения у решения.

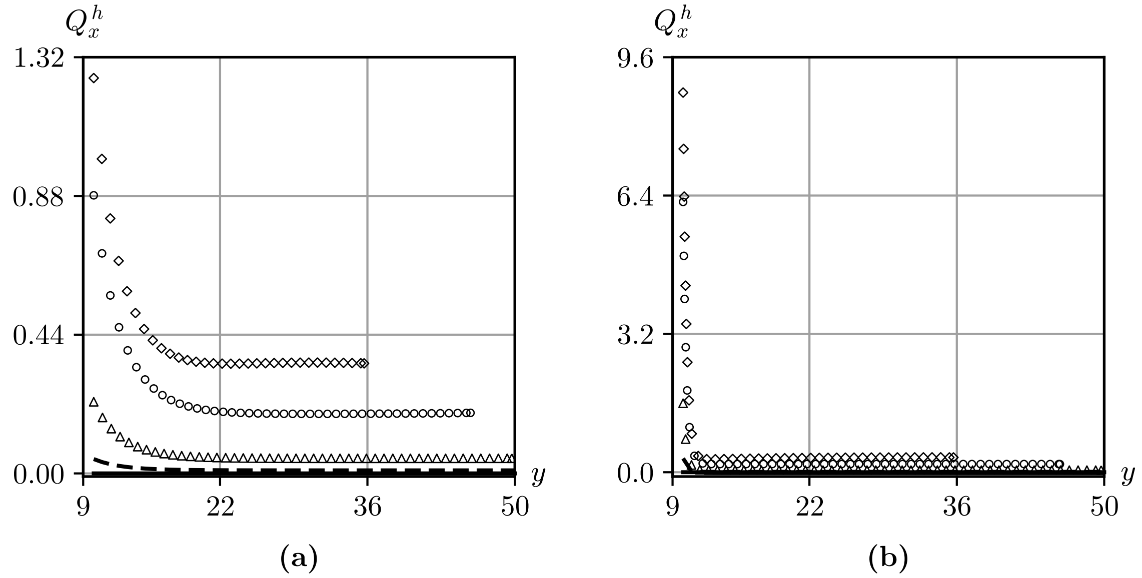


Рис. 5. Профили $Q_x^h(-d, y)$ при $d = 0$ (—), $d = 1$ (− −), $d = 5$ (△), $d = 20$ (○), $d = 35$ (◇) для толстостенной $t = 10$ (a) и тонкой $t = 1$ (b) пластины

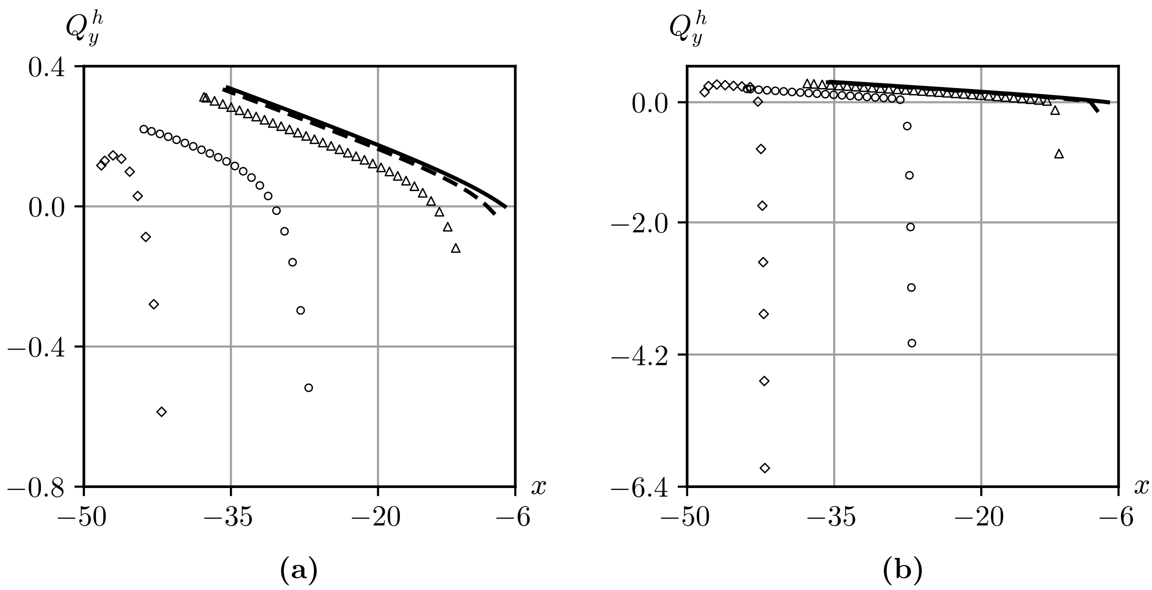


Рис. 6. Профили Q_y^h при $d = 0$ (—), $d = 1$ (− −), $d = 5$ (△), $d = 20$ (○), $d = 35$ (◇) для толстостенной $t = 10$ (a) и тонкой $t = 1$ (b) пластины

В таблице 4 приведены величины градиента перерезывающих сил $\left|\dfrac{\partial Q_x^h}{\partial y}\right|$ и $\left|\dfrac{\partial Q_y^h}{\partial s}\right|$ в точках $(-d, r_0)$ и $\left(-d - \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} r_0\right)$ соответственно, принадлежащих границе отверстия, где $\dfrac{\partial}{\partial s}$ — производная по направлению $\left(d + \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_0, \dfrac{\sqrt{2}}{2} r_0\right)$, и их максимальные значения на всём отрезке.

Из представленных результатов (за исключением $d = 0$) видно, что:

1) для толстостенной ($t = 10$) пластины градиент перерезывающей силы Q_x^h на два порядка меньше, чем для тонкой ($t = 1$), а её максимальные значения — приблизительно в семь раз;

2) при увеличении эксцентриситета d увеличивается градиент и максимальное значение Q_x^h, причём оно достигается на краю отверстия, а крутизна градиента заметно меньше для толстостенной пластины (см. рис. 5, последнее верно и для Q_y^h, см. рис. 6);

3) максимальные значения Q_y^h для $t = 1$ и $t = 10$ при $d = 0.1, 1$ практически равны, а при $d = 5, 20$ и 35 отличаются на порядок;

4) для толстостенной пластины максимум Q_y^h при $d = 1, 5$ достигается на большой окружности (см. рис. 6(a)), а во всех остальных случаях (включая $t = 1$ при $d = 5, 20, 35$) — на краю отверстия.

Таким образом, прослеживается общая тенденция увеличения градиента Q_x^h и Q_y^h в окрестности отверстия как с уменьшением толщины пластины, так и с увеличением эксцентриситета.

Таблица 4

Зависимость градиента Q_x^h, Q_y^h и их максимальных значений от d и t

d	$t=10$				$t=1$			
	$\left\lvert\dfrac{\partial Q_x^h}{\partial y}\right\rvert$	$\max Q_x^h$	$\left\lvert\dfrac{\partial Q_y^h}{\partial s}\right\rvert$	$\max\lvert Q_y^h\rvert$	$\left\lvert\dfrac{\partial Q_x^h}{\partial y}\right\rvert$	$\max Q_x^h$	$\left\lvert\dfrac{\partial Q_y^h}{\partial s}\right\rvert$	$\max\lvert Q_y^h\rvert$
0	0	0	2.82e−2	3.39e−1	0	0	2.83e−2	3.39e−1
1	1.40e−2	4.55e−2	4.70e−2	3.34e−1	9.32e−1	3.19e−1	1.02	3.34e−1
5	6.99e−2	2.27e−1	1.26e−1	3.12e−1	4.65	1.60	5.24	8.54e−1
20	2.71e−1	8.82e−1	4.78e−1	5.18e−1	18.34	6.25	24.54	4.01
35	3.89e−1	1.25	6.96e−1	5.86e−1	26.46	8.78	38.58	6.09

Проведём сравнение величин Q_x^h, Q_y^h и w^h, полученных с помощью C^1-МКНК$_3$ для теории Рейсснера—Миндлина, с трёхмерным конечно-элементным расчётом. Для проведения 3D моделирования исходная геометрия пластины разбивалась на тетраэдральные элементы с помощью сеткопостроителя Gmsh. Минимальный размер элемента для толстостенной пластины ($t = 10$) составлял 0.2 от толщины пластины, а для тонкостенной ($t = 1$) равен 0.33.

Таблица 5

Сравнение Q_x^h, Q_y^h и $w_{\max}^h$ в зависимости от t и d

d	Q_x^h			Q_y^h			$w_{\max}^h$		
	TRM	3D	E_r, %	TRM	3D	E_r, %	TRM	3D	E_r, %
	$t=10$								
5	2.27e−1	2.33e−1	2.57	1.19e−1	1.24e−1	4.03	2.15e−1	2.14e−1	0.46
20	8.82e−1	9.02e−1	2.21	5.18e−1	5.22e−1	0.77	2.08e−1	2.07e−1	0.48
35	1.25	1.29	3.10	5.86e−1	5.98e−1	2.01	2.07e−1	2.05e−1	0.97
	$t=1$								
5	1.60	1.62	1.23	8.54e−1	8.68e−1	1.61	1.86e−1	1.87e−1	0.53
20	6.25	6.34	1.42	4.01	4.07	1.47	1.73e−1	1.72e−1	0.58
35	8.78	8.74	0.46	6.09	6.12	0.49	1.74e−1	1.73e−1	0.57

Такой способ задания сетки позволил обеспечить погрешность не более 1%. Для решения линейной задачи пространственной теории упругости применялся конечно-элементный решатель CalculiX с использованием тетраэдральных элементов второго порядка C3D10 [36].

В таблице 5 приведены результаты сравнения характеристик НДС, полученных в рамках теории Рейсснера—Миндлина и в 3D расчёте. Значения для Q_x^h и Q_y^h рассматривались на краю отверстия в точках $(-d, r_0)$ и $\left(-d - \frac{\sqrt{2}}{2} r_0, -\frac{\sqrt{2}}{2} r_0\right)$ соответственно, а для прогиба w^h бралось его максимальное значение ($w^h_{\max}$) в плоскости $y = 0$. Относительное отклонение вычислялось как $E_r = 100 \cdot |u^h_{\mathrm{TRM}} - u^h_{\mathrm{3D}}|/|u^h_{\mathrm{3D}}|$, где вместо u^h подразумеваются соответственно Q^h_x, Q^h_y и $w^h_{\max}$.

Результаты таблицы 5 демонстрируют хорошее совпадение между значениями решений двумерной и трёхмерной теорий при любом значении эксцентриситета. Относительные отклонения расчётных значений перерезывающих сил не превосходят 5% для толстостенной и 2% для тонкостенной изотропных пластин, а для прогиба во всех случаях отклонение меньше одного процента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан и исследован новый вариант коллокационных методов — C^1-МКНК$_3$, обеспечивающий непрерывность и дифференцируемость кусочно-полиномиального решения класса C^1 в смысле наименьших квадратов на границах между четырёхугольными ячейками на адаптивных сетках без явной записи условий согласования. Последние присутствовали во всех предыдущих сеточных версиях МКНК [9, 14–16, 19–21, 24] и приводили к заметному усложнению поиска оптимальных весовых коэффициентов. Численно установлен второй порядок сходимости C^1-МКНК$_3$ на примерах решения различных краевых задач для систем УЧП, содержащих старшие производные второго порядка искомых функций.

Применение C^1-МКНК$_3$ для расчёта НДС пластин в рамках теории Рейсснера—Миндлина показало конкурентоспособность предложенного подхода в сравнении с изогеометрическим методом коллокации. Продемонстрировано хорошее совпадение значений перерезывающих сил и прогибов, полученных в рамках двумерных теорий пластин и трёхмерной теории упругости. Показано, что имеет место наличие и увеличение градиентов перерезывающих сил при увеличении эксцентриситета круглой пластины с нецентральным отверстием под действием постоянной нагрузки при изгибе.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны к.ф.-м.н. Амелиной Е. В., д.т.н. Горнову А. Ю., к.т.н. Зароднюк Т. С. за полезное обсуждение результатов работы и к.ф.-м.н Аникину А. С. за помощь в настройке библиотеки SuiteSparse.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках реализации Программы Центра Национальной технологической инициативы по направлению «Технологии моделирования и разработки новых функциональных материалов с заданными свойствами» на базе федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет» (проект 4.1). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reddy J. N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, 2nd edn. Boca Raton—London—N. Y.—Washington: CRC Press, 2004; DOI: 10.1201/b12409

2. *Голушко С. К., Немировский Ю. В.* Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М.: Физматлит, 2008.
3. *Григоренко Я. М., Тимонин А. М.* Решение задач об изгибе пластин сложной формы в ортогональных криволинейных координатах // Доклады АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и тезн. науки. 1987. № 2. С. 51–54.
4. *Ascher U. M., Mattheij R. M. M., Russell R. D.* Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. Philadelphia: SIAM, 1995; DOI: 10.1137/1.9781611971231
5. *Голушко С. К., Горшков В. В., Юрченко А. В.* О двух численных методах решения многоточечных нелинейных краевых задач // Вычисл. технол. 2002. Т. 7, № 2. С. 24—33.
6. *Голушко С. К., Морозова Е. В., Юрченко А. В.* О численном решении краевых задач для жёстких систем дифференциальных уравнений // Вестн. КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2005. Т. 10, № 2. С. 12—26.
7. *Luo Y.* Shear Locking in Finite Elements: licentiate thesis. Stockholm: Kungliga Tekniska högskolan, 1997.
8. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания, 2-е изд. М.: Наука, 1987.
9. *Идимешев С. В.* Модифицированный метод коллокаций и наименьших невязок и его приложение в механике многослойных композитных балок и пластин: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2016.
10. *Garcia O., Fancello E. A., de Barcellos C. S., Duarte C. A.* hp-Clouds in Mindlin's thick plate model // Int. J. Numer. Methods Eng. 2000. V. 47, N 8. P. 1381–1400; DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(20000320)47:8<1381::AID-NME833>3.0.CO;2-9
11. *Kiendl J., Auricchio F., Beirão da Veiga L., Lovadina C., Reali A.* Isogeometric collocation methods for the Reissner—Mindlin plate problem // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2015. V. 284, N 12. P. 489–507; DOI: 10.1016/j.cma.2014.09.011
12. *Ben-Artzi M., Chorev I., Croisille J.-P., Fishelov D.* A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains // SIAM J. Numer. Anal. 2009. V. 47, N 4. P. 3087–3108; DOI: 10.1137/080718784
13. *Shao W., Wu X., Chen S.* Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain // Eng. Anal. Bound. Elem. 2012. V. 36, N 12. P. 1787–1798; DOI: 10.1016/j.enganabound.2012.06.005
14. *Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П.* Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычисл. технол. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
15. *Беляев В. А., Брындин Л. С., Голушко С. К., Семисалов Б. В., Шапеев В. П.* H-, p- и hp-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552; DOI: 10.31857/S0044466922040020
16. *Беляев В. А., Шапеев В. П.* Варианты метода коллокации и наименьших невязок для решения задач математической физики в выпуклых четырёхугольных областях // Модел. и анализ информ. систем. 2017. Т. 24, № 5. С. 629–648.
17. *Аннин Б. Д., Волчков Ю. М.* Неклассические модели теории пластин и оболочек // Прикл. мех. и технич. физ. 2016. Т. 57, № 5. С. 5–14; DOI: 10.15372/PMTF20160501
18. *Drozdov G. M., Shapeev V. P.* CAS application to the construction of high-order difference schemes for solving Poisson equation // Lect. Notes Comput. Sci. 2014. V. 8660. P. 99–110; DOI: 10.1007/978-3-319-10515-4_8
19. *Беляев В. А.* Решение уравнения Пуассона с особенностями методом коллокации и наименьших квадратов // Сиб. журн. вычисл. матем. 2020. Т. 23, № 3. С. 249–263; DOI: 10.15372/SJNM20200302
20. *Слепцов А. Г., Шокин Ю. И.* Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37, № 5. С. 572–586.
21. *Semisalov B. V., Belyaev V. A., Bryndin L. S., Gorynin A. G., Blokhin A. M., Golushko S. K., Shapeev V. P.* Verified simulation of the stationary polymer fluid flows in the channel with elliptical cross-section // Appl. Math. Comput. 2022. V. 430. P. 1–25. Article 127294; DOI: 10.1016/j.amc.2022.127294

22. *Katsikadelis J. T.* Boundary Elements: Theory and Applications. Amsterdam—London—New York—Oxford—Paris—Tokyo—Boston—San Diego—San Francisco—Singapore—Sydney: Elsevier, 2002.
23. *Schillinger D., Evans J. A., Reali A., Scott M. A., Hughes T. J. R.* Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2013. V. 267. P. 170–232; DOI: 10.1016/j.cma.2013.07.017
24. *Исаев В. И., Шапеев В. П., Ерёмин С. А.* Исследование свойств метода коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнения Пуассона и уравнений Навье—Стокса // Вычисл. технол. 2007. Т. 12, № 3. С. 53–70.
25. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z.* The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, eth edn. Amsterdam—Boston—Heidelberg—London—New York—Oxford—Paris—San Diego—San Francisco—Singapore—Sydney—Tokyo: Elsevier, 2013.
26. *Cho J. Y., Atluri S. N.* Analysis of shear flexible beams, using the meshless local Petrov—Galerkin method, based on a locking-free formulation // Eng. Comput. 2001. V. 18, N 1/2. P. 215–240; DOI: 10.1108/02644400110365888
27. *Нестеров В. А.* Конечно-элементный расчёт цилиндрической оболочки, податливой при трансверсальном сдвиге // Вестн. СибГУ им. акад. М. Ф. Решетнёва. 2013. № 2. С. 64–70.
28. *Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П.* Разработка и применение метода коллокаций и наименьших невязок к решению задач механики анизотропных слоистых пластин // Вычисл. технол. 2014. Т. 19, № 5. С. 24–36.
29. *Reberol M, Georgiadis C, Remacle J.-F.* Quasi-structured quadrilateral meshing in Gmsh — a robust pipeline for complex CAD models // arXiv. 2021; DOI: 10.48550/arXiv.2103.04652
30. *Киреев В. А.* Метод коллокации с бикубическим эрмитовым базисом в области с криволинейной границей // Вестник СибГАУ им. акад. М. Ф. Решетнёва. 2014. № 3. С. 73–77.
31. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001.
32. *Ramšak M., Škerget L.* A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2004. V. 46, N 8. P. 815–847; DOI: 10.1002/fld.776
33. *Davis T. A.* Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization // ACM Trans. Math. Softw. 2011. V. 38, N 1. P. 1–22; DOI: 10.1145/2049662.2049670
34. SuiteSparse.
https://github.com/DrTimothyAldenDavis/SuiteSparse/blob/dev/SPQR/Demo/qrdemo_gpu.cpp
35. *Ike C. C.* Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin's first order shear deformable circular plates // Math. Models Eng. 2018. V. 4, N 2. P. 50–72; DOI: 10.21595/mme.2018.19825
36. *Dhondt G.* CalculiX crunchix user's manual version 2.12. https://www.dhondt.de/ccx_2.12.pdf

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.632.4:539.3

CUBIC VERSION OF THE LEAST-SQUARES COLLOCATION METHOD AND ITS APPLICATION TO PLATE BENDING ANALYSIS

© 2024 **S. K. Golushko**[1,2a], **L. S. Bryndin**[1,3b], **V. A. Belyaev**[1,3c], **A. G. Gorynin**[1d]

[1]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2]*Federal Research Center for Information and Computational Technologies, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[3]*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]s.golushko@g.nsu.ru, [b]l.bryndin@g.nsu.ru, [c]v.beliaev9@g.nsu.ru, [d]a.gorynin@g.nsu.ru

Received 17.10.2023, revised 25.04.2024, accepted 03.07.2024

Abstract. A new cubic version of the least-squares collocation method based on adaptive grids is developed. The approximate values of the solution and its first derivatives at the vertices of quadrangular cells are the unknowns. This approach has made it possible to eliminate the matching conditions from the global overdetermined system of linear algebraic equations consisting of collocation equations and boundary conditions. The preconditioned system is solved using the SuiteSparse library by the orthogonal method with the CUDA parallel programming technology. We consider the Reissner—Mindlin plate problem in a mixed setting. A higher accuracy of deflections and rotations of the transverse normal in comparison with the isogeometric collocation method as well as the uniform convergence of shear forces in the case of a thin plate are shown in the proposed method. Bending of an annular plate and round plates with an off-center hole is analyzed. An increase in the shear force gradient in the vicinity of the hole is shown both with a decrease in the plate thickness and with an increase in the eccentricity. The second order of convergence of the developed method is shown numerically. The results obtained using the Reissner—Mindlin theory are compared with the ones in the Kirchhoff—Love theory and three-dimensional finite element simulation.

Keywords: least-squares collocation method, automatic solution continuity, adaptive grid, Reissner—Mindlin plate theory, off-center hole.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.304

REFERENCES

1. J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis* (CRC Press, Boca Raton—London—New York—Washington, 2004) 2nd Ed. https://doi.org/10.1201/b12409
2. S. K. Golushko and Yu. V. Nemirovskii, *Direct and Inverse Problems of Mechanics of Elastic Composite Plates and Shells of Revolution* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
3. Ya. M. Grigorenko and A. M. Timonin, "Solution of problems on bending of plates of complex shape in orthogonal curvilinear coordinates," Dokl. Akad. Nauk. Ukr. SSR. Ser. A. Fiz.-Mat. Tekh. Nauki no. 2, 51–54 (1987) [in Russian].
4. U. M. Ascher, R. M. M. Mattheij, and R. D. Russell, *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations* (SIAM, Philadelphia, 1995). https://doi.org/10.1137/1.9781611971231

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 448–464.

5. S. K. Golushko, V. V. Gorshkov, and A. V. Yurchenko, “On two numerical methods for solving multipoint nonlinear boundary value problems,” Vychisl. Tekhnol. **7** (2), 24–33 (2002) [in Russian].
6. S. K. Golushko, E. V. Morozova, and A. V. Yurchenko, “On the numerical solution of boundary value problems for stiff systems of differential equations,” Vestn. KazNU. Ser. Mat. Mekh. Inf. **10** (2), 12–26 (2005) [in Russian].
7. Y. Luo, *Shear Locking in Finite Elements: Licentiate Thesis* (Kungliga Tekniska högskolan, Stockholm, 1997).
8. S. A. Ambartsumyan, *Theory of Anisotropic Plates: Strength, Stability, and Vibrations* (Nauka, Moscow, 1987) [in Russian].
9. S. V. Idimeshev, “A modified method of collocations and least residuals and its application in mechanics of multilayer composite beams and plates,” *Cand. of. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation* (IVT SO RAN, Novosibirsk, 2016) [in Russian].
10. O. Garcia, E. A. Fancello, C. S. de Barcellos, and C. A. Duarte, “hp-Clouds in Mindlin’s thick plate model,” Int. J. Numer. Methods Eng. **47** (8), 1381–1400 (2000). https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000320)47:8<1381::AID-NME833>3.0.CO;2-9
11. J. Kiendl, F. Auricchio, L. BeirЛњao da Veiga, C. Lovadina, and A. Reali, “Isogeometric collocation methods for the Reissner—Mindlin plate problem,” Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **284** (12), 489–507 (2015). https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.09.011
12. M. Ben-Artzi, I. Chorev, J.-P. Croisille, and D. Fishelov, “A compact difference scheme for the biharmonic equation in planar irregular domains,” SIAM J. Numer. Anal. **47** (4), 3087–3108 (2009). https://doi.org//10.1137/080718784
13. W. Shao, X. Wu, and S. Chen, “Chebyshev tau meshless method based on the integration-differentiation for biharmonic-type equations on irregular domain,” Eng. Anal. Boundary Elem. **36** (12), 1787–1798 (2012). https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.06.005
14. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, and V. P. Shapeev, “Method of collocations and least residuals in application to problems of mechanics of isotropic plates,” Vychisl. Tekhnol. **18** (6), 31–43 (2013) [in Russian].
15. V. A. Belyaev, L. S. Bryndin, S. K. Golushko, B. V. Semisalov, and V. P. Shapeev, “h-, p-, and hpversions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications,” Comput Math. Math. Phys. **62** (4), 517–537 (2022). https://doi.org/10.1134/S0965542522040029
16. V. A. Belyaev and V. P. Shapeev, “Variants of the collocation and least residual methods for solving problems of mathematical physics in convex quadrangular domains,” Model. Anal. Inf. Sist. **24** (5), 629–648 (2017) [in Russian].
17. B. D. Annin and Y. M. Volchkov, “Nonclassical models of the theory of plates and shells,” J. Appl. Mech. Tech. Phys. **57** (5), 769–776 (2016). https://doi.org/10.1134/S0021894416050011
18. G. M. Drozdov and V. P. Shapeev, “CAS application to the construction of high-order difference schemes for solving Poisson equation,” Lect. Notes Comput. Sci. **8660**, 99–110 (2014). https://doi.org/10.1007/978-3-319-10515-4_8
19. V. A. Belyaev, “Solving a Poisson equation with singularities by the least-squares collocation method,” Numer. Anal. Appl. **13** (3), 207–218 (2020). https://doi.org/10.1134/S1995423920030027
20. A. G. Sleptsov and Yu. I. Shokin, “An adaptive grid-projection method for elliptic problems,” Comput. Math. Math. Phys. **37** (5), 558–571 (1997).
21. B. V. Semisalov, V. A. Belyaev, L. S. Bryndin, A. G. Gorynin, A. M. Blokhin, S. K. Golushko, and V. P. Shapeev, “Verified simulation of the stationary polymer fluid flows in the channel with elliptical cross-section,” Appl. Math. Comput. **430**, 1–25, article ID 127294 (2022). https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127294
22. J. T. Katsikadelis, *Boundary Elements: Theory and Applications* (Elsevier, Amsterdam—London—New York—Oxford—Paris—Tokyo—Boston—San Diego—San Francisco—Singapore—Sydney, 2002).
23. D. Schillinger, J. A. Evans, A. Reali, M. A. Scott, and T. J. R. Hughes, “Isogeometric collocation: Cost comparison with Galerkin methods and extension to adaptive hierarchical NURBS discretizations,” Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **267**, 170–232 (2013). https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.7.017

24. V. I. Isaev, V. P. Shapeev, and S. A. Eremin, "Study of the properties of the collocation and least squares method for solving boundary value problems for the Poisson equation and the Navier—Stokes equations," Vychisl. Tekhnol. **12** (3), 53–70 (2007) [in Russian].

25. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu, *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* (Elsevier, Amsterdam—Boston—Heidelberg—London—New York—Oxford—Paris—San Diego—San Francisco— Singapore—Sydney—Tokyo, 2013).

26. J. Y. Cho and S. N. Atluri, "Analysis of shear flexible beams, using the meshless local Petrov—Galerkin method, based on a locking-free formulation," Eng. Comput. **18** (1/2), 215–240 (2001). https://doi.org/10.1108/02644400110365888

27. V. A. Nesterov, "Finite element calculation of a cylindrical shell pliable under transverse shear," Vestn. SibGU im. akad. M. F. Reshetneva no. 2, 64–70 (2013) [in Russian].

28. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, and V. P. Shapeev, "Development and application of the collocation and least residuals method to solving problems of mechanics of anisotropic layered plates," Komp'ut. Tekh. **19** (5), 24–36 (2014) [in Russian].

29. M. Reberol, C. Georgiadis, and J.-F. Remacle, "Quasi-structured quadrilateral meshing in Gmsh — a robust pipeline for complex CAD models," 2021. https://arxiv.org/abs/2103.04652

30. V. A. Kireev, "Collocation method with bicubic Hermitian basis in a domain with a curvilinear boundary," Vestn. SibGU im. akad. M. F. Reshetneva no. 3, 73–77 (2014) [in Russian].

31. J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra* (SIAM, Philadelphia, 1997; Mir, Moscow, 2001). https://doi.org/10.1137/1.9781611971446

32. M. Ramšak and L. Škerget, "A subdomain boundary element method for high-Reynolds laminar flow using stream function-vorticity formulation," Int. J. Numer. Meth. Fluids. **46** (8), 815–847 (2004). https://doi.org/10.1002/fld.776

33. T. A. Davis, "Algorithm 915, SuiteSparseQR: Multifrontal multithreaded rank-revealing sparse QR factorization," ACM Trans. Math. Software **38** (1), 1–22 (2011). https://doi.org/10.1145/2049662.2049670

34. SuiteSparse. https://github.com/DrTimothyAldenDavis/SuiteSparse/blob/dev/SPQR/Demo/qrdemo_gpu.cpp.

35. C. C. Ike, "Mathematical solutions for the flexural analysis of Mindlin's first order shear deformable circular plates," Math. Models Eng. **4** (2), 50–72 (2018). https://doi.org/10.21595/mme.2018.19825

36. G. Dhondt, *CalculiX Crunchix User's Manual Version 2.12.* https://www.dhondt.de/ccx_2.12.pdf.

УДК 532.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСПОРТА ШЛАМА В СКВАЖИНЕ РАСТВОРОМ С МНОГОСТЕННЫМИ УГЛЕРОДНЫМИ НАНОТРУБКАМИ

© 2024 **В. А. Жигарев**[1a], **Д. В. Гузей**[1,2b], **Е. И. Лысакова**[1c], **В. Я. Рудяк**[3d], **А. В. Минаков**[1,2e]

[1] *Сибирский федеральный университет, просп. Свободный, 79, г. Красноярск 660041, Россия,*
[2] *Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[3] *Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (СИБСТРИН), ул. Ленинградская, 113, г. Новосибирск 630008, Россия*

E-mails: [a]VZhigarev@sfu-kras.ru, [b]DGuzey@sfu-kras.ru, [c]EMikhienkova@sfu-kras.ru, [d]Valery.Rudyak@mail.ru, [e]AMinakov@sfu-kras.ru

Поступила в редакцию 31.05.2023 г.; после доработки 10.06.2024 г.; принята к публикации 03.07.2024 г.

Проведено расчётное исследование влияния добавок многостенных углеродных нанотрубок в буровые растворы на углеводородной основе на эффективность выноса частиц шлама из кольцевого канала, моделирующего горизонтальный участок скважины. Для моделирования процесса транспорта шлама в кольцевом канале разработана математическая модель, основанная на эйлеровом подходе гранулированной среды для турбулентного режима течения. Реология бурового раствора, модифицированного многостенными углеродными нанотрубками, описывалась моделью Гершеля–Балкли с экспериментально определёнными реологическими коэффициентами. Базовый буровой раствор на углеводородной основе являлся обратной эмульсией с соотношением углеводородной и водной фазы равным 65/35. Концентрация многостенных углеродных нанотрубок в растворах варьировалась от 0.1 до 0.5 масс.%. Размер транспортируемых частиц шлама варьировался от 2 до 7 мм. Исследована структура течения двухфазного потока в кольцевом канале при различных концентрациях многостенных углеродных нанотрубок. Получены зависимости коэффициента эффективности выноса шлама, средней скорости проскальзывания частиц шлама и потерь давления от концентрации нанотрубок. Установлено, что добавление нанотрубок приводит к значительному изменению картины течения бурового раствора и, как следствие, изменению режимов транспорта шлама. Добавка 0.5 масс.%. многостенных углеродных нанотрубок приводит к увеличению эффективности промывки скважины примерно на 40%. Таким образом, по итогам расчётного исследования, было показано, что добавление многостенных нанотрубок в буровые растворы на углеводородной основе может приводить к повышению эффективности транспорта шлама в горизонтальных скважинах.

Ключевые слова: модель гранулированных сред, математическое моделирование, буровой раствор на углеводородной основе, многостенные углеродные нанотрубки, реология, транспорт шлама.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.305

ВВЕДЕНИЕ

По планам развития страны в ближайшее десятилетие на территории Восточной Сибири планируется в несколько раз увеличить добычу нефти. В настоящее время реализуется крупнейший в России нефтегазовый проект «Восток Ойл», который объединяет уже разрабатываемые месторождения Ванкорской группы и новые месторождения на севере Красноярского края. Для выхода «Восток Ойл» на промышленные масштабы понадобится бурение нескольких тысяч скважин в сложнейших арктических условиях. Это потребует в свою очередь разработки новых технологий бурения, включая совершенствование рецептур буровых растворов. Скорость и экономическая эффективность процесса бурения скважин во многом зависит от оптимального выбора бурового раствора, который одновременно должен решать ряд сложных функциональных задач. К современным буровым растворам предъявляют большое количество требований, основные из которых стабилизация ствола скважины, охлаждение бурильного долота, качественная промывка скважины от выбуренной породы, контроль фильтрационных потерь, стабильность реологических параметров, термическая устойчивость, снижение трения и др. [1]. Для одновременного удовлетворения этих зачастую противоречащих друг другу требований применяют разнообразные добавки. Современные буровые растворы — это дисперсные среды, содержащие до десятка различных компонентов. И поиск добавок, улучшающих характеристики буровых растворов, продолжается.

Активно исследуется использование для этих целей разнообразных наноматериалов. В последнее время появилось достаточно большое количество работ, связанных с исследованием влияния наночастиц на свойства буровых растворов [2, 3]. Показано, что введение сферических наночастиц в буровые растворы способствует лучшей промывке скважины благодаря улучшению реологических характеристик, снижению фильтрационных потерь за счёт кольматации низкопроницаемых пород, снижению коэффициента трения между стенкой скважины и бурильной трубой и др. В большинстве работ для модификации свойств буровых растворов используют наночастицы преимущественно сферической формы. Как правило, это наночастицы оксидов металлов. Типичные концентрации нанодобавок составляют около 2 масс.%. Между тем хорошо известно, что на реологические свойства суспензий влияет аспектное соотношение размеров частиц. И в этом отношении углеродные нанотрубки, аспектное соотношение у которых может достигать сотен и даже тысяч, является непревзойдённым материалом.

Углеродные нанотрубки стали применяться в качестве добавок к буровым растворам для улучшения их смазывающих свойств и уменьшения износа бурового инструмента [4]. Было показано, что углеродные нанотрубки являются хорошим материалом для управления реологией буровых растворов. При этом требуются гораздо меньшие концентрации по сравнению со сферическими наночастицами. Так в работе [5] было установлено, что для увеличения эффективной вязкости бурового раствора на водной основе на 113% необходимо всего 0.1 масс.% многостенных углеродных нанотрубок (МУНТ), модифицированных наночастицами золота. В тоже время результаты работы [6] показывают, что при добавлении 0.22 масс.% МУНТ в буровой раствор на водной основе значение его эффективной вязкости увеличилось в пять раз по сравнению с базовым раствором. Авторами работы [7] экспериментально исследовалось влияние добавок многостенных углеродных нанотрубок в буровой раствор на водной основе. Было установлено, что с увеличением концентрации трубок эффективность выноса шлама возрастает. Так, добавка 0.01% многостенных углеродных трубок повышает эффективность промывки на 15%. Это связано с тем, что добавка углеродных нанотрубок повышает его реологические характеристики.

В работе [8] было проанализировано влияние добавки многостенных углеродных нанотрубок и пластин в буровые растворы на водной основе на реологические характеристики и кинетику ингибирования глин. Установлено, что добавка многостенных углеродных нанотрубок позволяет снизить фильтрационные потери и существенно повысить ингибирование гидратации глин. Многие исследователи отмечают, что добавка МУНТ в буровые растворы на водной основе положительно сказывается на фильтрационных характеристиках. Результаты работы [9] показывают, что добавление 0.0095 масс.% МУНТ в буровой раствор снижает потери фильтрата на 8.6%. И при этом происходит уменьшение коэффициента трения на 34%.

Обзор литературы показывает, что большинство исследований, связанных применением многостенных нанотрубок для улучшения свойств буровых растворов, посвящены растворам на водной основе. Данных по влиянию добавок МУНТ на характеристики растворов на углеводородной основе очень мало. Между тем для бурения в условиях вечной мерзлоты гораздо эффективнее использовать буровой раствор на углеводородной основе. Такие растворы за счёт низкой теплопроводности и низких фильтрационных потерь существенно уменьшают скорость растепления мёрзлой породы при бурении. В связи с этим в нашей работе разработана математическая модель и проведено систематическое расчётное исследование влияния добавок многостенных углеродных нанотрубок на характеристики транспорта частиц шлама в горизонтальной скважине буровым раствором на углеводородной основе. Эффективное удаление выбуренных частиц шлама из забоя на поверхность существенно улучшает скорость проходки, уменьшает вероятность аварий и в целом повышает эффективность бурения. Систематических расчётных исследований влияния добавок МУНТ на эффективность транспорта шлама буровых растворов на углеводородной основе в настоящий момент нет.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для моделирования выноса шлама из скважины использовался эйлеров подход гранулированной среды [10–12]. Этот подход был ранее успешно апробирован нами на задачах моделирования выноса шлама буровыми растворами на водной основе [13, 14] Модель Эйлера предполагает, что поток состоит из твёрдой «s» и жидкой «f» фаз, которые образуют взаимопроникающие континуумы. В данном случае твёрдой фазой являются частицы выбуренной породы (шлам), а жидкой фазой — буровой раствор, модифицированный нанотрубками. При этом наличие нанотрубок в буровом растворе учитывается их влиянием на реологические параметры бурового раствора, которые были измерены экспериментально по методике, описанной в разделе 3. Основные уравнения модели Эйлера имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s\rho_s) + \nabla(\alpha_s\rho_s\vec{\nu_s}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_s\rho_s\vec{V_s}) + \nabla(\alpha_s\rho_s\vec{\nu_s}\vec{\nu_s}) = -\alpha_s\nabla p - p_s + \nabla\bar{\bar{\tau}}_s + \alpha_s\rho_s\vec{g} +$$
$$+\sum_{l=1}^{N}(K_{ls}(\vec{\nu_l} - \vec{\nu_s}) + m_{ls}\vec{\nu_{ls}} - m_{sl}\vec{\nu_{sl}}) + (\vec{F_s} + \vec{F_{lift,s}} + \vec{F_{\nu m,s}} + \vec{F_{td,s}}),$$

где α_s — объёмные концентрации частиц шлама, ρ_s — плотность фазы s, $\vec{g}$ — ускорение свободного падения, K_{ls} — коэффициент обмена импульсом между жидкой фазой l и твёрдой фазой s, $K_{ls}(\vec{\nu_l} - \vec{\nu_s})$ — межфазная сила, действующая на единицу объёма, $\vec{F_s}$ — сила сопротивления, $\vec{F_{lift,s}}$ — подъёмная сила, $\vec{F_{\nu m,s}}$ — сила добавленной массы, $\vec{F_{td,s}}$ — сила турбулентной дисперсии, $\bar{\bar{\tau}}_s$ — тензор касательных напряжений:

$$\bar{\bar{\tau}}_f = \alpha_f\mu_f(\nabla\vec{\nu_f} + \nabla\vec{\nu_f}^{tr}),$$

где μ_s — динамическая вязкость, λ_s — объёмная вязкость. Буровой раствор рассматривается как неньютоновская жидкость, поэтому для моделирования неньютоновских течений использовался следующий подход: среда рассматривалась как нелинейная вязкая жидкость, характеризующаяся эффективной вязкостью $\mu_f(\dot{\gamma})$. Эта вязкость в общем случае зависит от скорости сдвига, которая является вторым инвариантом тензора скоростей деформации:

$$\dot{\gamma} = (\frac{1}{2}\boldsymbol{DD})^{\frac{1}{2}}$$

При таком подходе буровой раствор можно рассматривать как вязкую ньютоновскую жидкость, так и как неньютоновскую вязкопластическую жидкость. В нашей работе для описания реологии использовалась модель Гершеля—Балкли [15]:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \frac{(k_\nu \dot{\gamma}^n + \tau_{\mathbf{0}})}{\dot{\gamma}},$$

где $\tau_{\mathbf{0}}$ — предельное напряжение сдвига, k_ν — показатель консистенции, n — показатель нелинейности.

При моделировании задавались экспериментально измеренные реологические параметры буровых растворов с углеродными нанотрубками (см. таблицу). Подъёмная сила, действующая на частицу в потоке с ненулевой скоростью сдвига, описывается следующей моделью:

$$\vec{F_{lift}} = -C_l \rho_q a_p (\vec{\nu_q} - \vec{\nu_p}) \times (\nabla \times \vec{\nu_q}),$$

C_l — коэффициент подъёмной силы, который определяется моделью [16]

$$C_l = \frac{3}{2\pi\sqrt{\mathrm{Re}_\omega}} C_l',$$

где Re_ω и C_l определяется следующим образом:

$$\mathrm{Re}_\omega = \frac{\rho_q \mid \nabla \times \vec{\nu_q} \mid {d_q}^2}{\mu_q},$$

$$C_l' = \begin{cases} 6.46, & \text{если } 0 \leqslant \mathrm{Re}_p \leqslant \mathrm{Re}_\omega \leqslant 1, \\ 6.46 \times f(\mathrm{Re}_p, \mathrm{Re}_\omega), & \text{если } \mathrm{Re}_p \leqslant 40, \\ 6.46 \times 0.0524(\beta\,\mathrm{Re}_p)^{\frac{1}{2}}, & \text{если } 40 \leqslant \mathrm{Re}_p \leqslant 100, \end{cases}$$

где

$$\mathrm{Re}_p = \frac{\rho_q \mid \vec{\nu_q} - \vec{\nu_p} \mid d_q}{\mu_q},$$

$$\beta = 0.5(\frac{\mathrm{Re}_\omega}{\mathrm{Re}_p}),$$

$$f(\mathrm{Re}_p, \mathrm{Re}_\omega) = (1 - 0.3314\beta^{\frac{1}{2}})e^{-0.1\,\mathrm{Re}_p} + 0.3314\beta^{\frac{1}{2}}.$$

Для описания межфазной силы сопротивления для подхода Эйлера с гранулированной средой использовалась модель [12]

$$K_{sl} = \begin{cases} \frac{3}{4}\frac{a_s a_l \rho_l |\vec{\nu_s} - \vec{\nu_l}|}{d_s} a_l C_d - 2.65, & \text{если } a_l > 0.8, \\ 150\frac{a_s(1-a_l)\mu_l}{a_l d_s^2} + 1.75\frac{a_s \rho_l |\vec{\nu_s} - \vec{\nu_l}|}{d_s}, & \text{если } a_l < 0.8,, \end{cases}$$

$$C_d = \frac{24}{a_l\,\mathrm{Re}_s}(1 + 0.15(a_l\,\mathrm{Re}_s)^{0.687}).$$

Относительное число Рейнольдса (Re_s) определяется как

$$\mathrm{Re}_s = \frac{\rho_l d_s \mid \vec{\nu_s} - \vec{s_l} \mid}{\mu_l}.$$

Сила турбулентной дисперсии определяется турбулентной диффузией частиц дисперсной фазы. Турбулентная дисперсия вычисляется по формуле

$$\vec{F_{td,s}} = -\vec{F_{td,l}} = -f_{td,limiting} K_{ls} \vec{\nu_{dr}},$$

где $\vec{\nu_{dr}}$ — определяется с помощью модели [17] как

$$\vec{\nu_{dr}} = -D_{s,l}(\frac{\nabla\alpha_s}{\alpha_s} - \frac{\nabla\alpha_l}{\alpha_l}),$$

$D_{s,l}$ — тензор диффузии.

Окончательно сила турбулентной дисперсии рассчитывается как

$$\vec{F_{td,s}} = C_{td}K_{sl}\frac{D_{t,sl}}{\sigma_{sl}}(\frac{\nabla\alpha_s}{\alpha_s} - \frac{\nabla\alpha_l}{\alpha_l}),$$

где $\sigma_{sl} = 0.75$ — эффективное число Прандтля.

В модели гранулированной среды в правой части уравнения количества движения твёрдой фазы добавляется давление ансамбля твёрдых частиц, которое определяется по формуле [10]

$$P_s = \alpha_s\rho_s\theta_s + 2\rho_s(1+e_{ss}){\alpha_s}^2 g_{0.ss}\theta_s,$$

где θ_s — температура гранул твёрдой фазы, e_{ss} — коэффициент восстановления, равный 0.9, $g_{0.ss}$ — радиальная функция распределения, которая определяется [17]

$$g_{0.ss} = \frac{1}{1-(\frac{\alpha_s}{\alpha_{s,max}})^{\frac{1}{3}}},$$

где $\alpha_{s,max}$ — максимальная плотность упаковки гранул равная 0.63. Тензор касательных напряжений содержит динамическую и объёмную вязкость, которые описывают процессы обмена импульсом в хаотическом движении и при контакте частиц:

$$\mu_s = \mu_{s,col} + \mu_{s,kin},$$

где $\mu_{s,col}$ — вязкость вследствие столкновения частиц, $\mu_{s,kin}$ — вязкость вследствие пульсационного движения частиц.

Кинетическая составляющая вязкости определяется с помощью модели [13]

$$\mu_{s,kin} = \frac{10d_s\rho_s\sqrt{\theta_s\pi}}{96\alpha_s(1+e_{ss})g_{0.ss}}[1+\frac{2}{5}g_{0.ss}\alpha_s(1+e_{ss})]^2\alpha_s.$$

Вязкость частиц, вызванная их столкновениями, входящая в формулу, определяется

$$\mu_{s,col} = \frac{4}{5}\alpha_s\rho_s d_s g_{0.ss}(1+e_{ss})\sqrt{\frac{\theta_s}{\pi}}\alpha_s.$$

Объёмная вязкость твёрдой среды в формуле рассчитывается для определения сопротивления частиц по сжатию и растяжению. Используется модель [10]

$$\lambda_s = \frac{4}{3}\alpha_s\rho_s d_s g_{0.ss}(1+e_{ss})\sqrt{\frac{\theta_s}{\pi}}\alpha_s.$$

Псевдотепловая или гранулированная температура твёрдой фазы пропорциональна кинетической энергии хаотичного движения частиц. Уравнение переноса получено в кинетической теории и имеет следующий вид [11]:

$$\frac{3}{2}[\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s\alpha_s\theta_s) + \nabla(\rho_s\alpha_s\vec{\nu_s}\theta_s)] = \frac{-p_s\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}_s}{\nabla\vec{\nu_s}} + \nabla(k_{\theta_s}\nabla\theta_s) - \gamma_{\theta_s} + \phi_{ls},$$

где $\frac{-p_s\bar{\bar{I}}+\bar{\bar{\tau}}_s}{\nabla\vec{\nu_s}}$ — генерация псевдотепловой энергии деформационным движением дисперсной среды, $k_{\theta_s}\nabla\theta_s$ — диффузия энергии, γ_{θ_s} — диссипация энергии за счёт столкновений, ϕ_{ls} — обмен энергией между несколькими твёрдыми фазами. Коэффициент «диффузии» в данном случае определялся как

$$k_{\theta_s} = \frac{15 d_s \rho_s \alpha_s \sqrt{\theta_s \pi}}{4(41-33\eta)}[1+\frac{12}{5}\eta^2(4\eta-3)\alpha_s g_{0.ss}+\frac{16}{15\pi}(41-33\eta)\eta\alpha_s g_{0.ss}], \quad \eta=\frac{1}{2}(1+e_{ss})$$

диссипация энергии за счёт столкновений

$$\gamma_{\theta_s} = \frac{12(1-e_{ss}^2)g_{0.ss}}{d_s\sqrt{\pi}}\rho_s\alpha_s^2\theta_s^{\frac{3}{2}}$$

и обмен энергией между несколькими твёрдыми фазами

$$\phi_{f_s} = -3K_{fs}\theta_s.$$

В данной работе рассматривалось турбулентное течение бурового раствора. Для моделирования турбулентности использовалась двухпараметрическая $k-(\omega)$ SST модель [18]. Детали численного алгоритма и результаты его успешного тестирования на большом количестве тестовых задач неньютоновских течений и транспорту частиц в кольцевых каналах описаны в наших ранних работах [19, 20].

Расчётная область представляет собой кольцевой канал, образованный двумя гладкими прямыми трубами круглого сечения. Внутренняя труба вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Для расчёта течений в скважине при прокачивании модифицированного бурового раствора выбраны типичные параметры процесса бурения наклонно-направленных скважин. Диаметр внутренней трубы равен $D_1 = 0.127$ м, диаметр внешней трубы равен $D_2 = 0.2207$ м. Скорость вращения бурильной трубы равнялась 40 об/мин, расход бурового раствора 10 кг/с. Плотность бурового раствора была равна 968 кг/м^3. Реология буровых растворов задавалась из экспериментальных данных (см. таблицу).

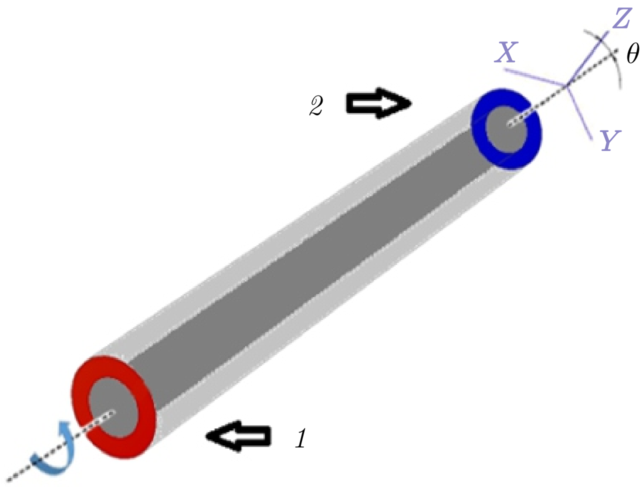
Для моделирования использовалась реологическая модель Гершеля—Балкли. В качестве частиц шлама рассмотрены сферические частицы, размер которых варьировался от 2 до 7 мм, плотностью 3000 кг/м^3. Концентрация шлама на входе в канал задавалась 3% по объёму. Рассматривался горизонтальный участок скважины, так как именно горизонтальные участки являются наиболее сложными в процессе бурения и подвержены накоплению частиц шлама при их транспорте. Вектор силы тяжести был направлен перпендикулярно оси кольцевого канала. Длина расчётной области кольцевого канала задавалась 10 м. Этой длины было достаточно для установления течения и концентрации шлама по длине канала.

Для численного моделирования использовалась расчётная сетка, состоящая из $40 \times 140 \times 120$ (40 по радиусу и 140 по окружности и 120 по длине канала) расчётных узлов. Проведённые предварительные методические расчёты показали, что этого количества узлов достаточно для получения численного решения, не зависящего от дальнейшей детализации сетки. Для реализации данной математической модели использовался программный пакет для вычислительной гидродинамики ANSYS Fluent.

Граничные условия

На входе в кольцевой канал задаётся постоянное значение массового расхода 10 кг/с смеси (бурового раствора и 3 об.% частиц шлама) с однородным профилем скорости раствора и скорости частиц. Скорость частиц шлама и скорость бурового раствора на входе в скважину были равны. Профиль концентрации шлама на входе в скважину задавался однородным. На выходе из кольцевого канала задавалось условие свободного выхода с фиксированным значением давления и равенством нулю производной по нормали концентрации частиц шлама. На поверхностях труб выполняются условия прилипания. На внутренней стенке кольцевого канала задавалось значение угловой скорости, соответствующей скорости вращения бурильной трубы.

В качестве количественного параметра, определяющего эффективность выноса шлама, рассмотрена эффективность транспорта шлама CTP (cutting transport performance), которая определялась как отношение средней по объёму скважины осевой скорости частиц шлама к средней по объёму скважины осевой скорости бурового раствора. При этом CTP = 1 означает, что шлам в среднем движется со скоростью бурового раствора, и эффективность очистки скважины максимальна, когда CTP = 0 шлам не транспортируется. В горизонтальных участках скважин может происходить процесс накопления частиц, поэтому в процессе расчёта также анализировалась динамика поведения средней по объёму скважины объёмной доли частиц.



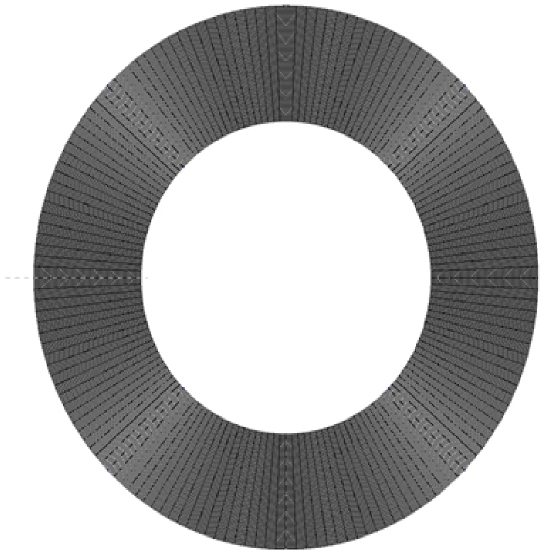


Рис. 1. Схематичное изображение геометрии расчётной области (слева) и фрагмента расчётной сетки (справа), *1* — вход, *2* — выход

2. МЕТОДИКА ПРИГОТОВЛЕНИЯ БУРОВОГО РАСТВОРА И ИЗМЕРЕНИЯ ЕГО РЕОЛОГИИ

Базовый буровой раствор на углеводородной основе представляет собой обратную эмульсию, т. е. эмульсию, в которой вода диспергирована на мельчайшие капельки, а дисперсионной средой служит углеводородная жидкость. В качестве углеводородной основы растворов использовано минеральное масло «REBASE» PC-230 (ООО «НПО «РЕАСИБ», г. Томск) вязкостью 3.3 сП и плотностью 815 кг/м^3. В работе рассмотрено наиболее типичное для буровых растворов соотношение углеводородной фазы и воды, равное 65/35. Для стабилизации эмульсии использовался неионогенный эмульгатор «REBASE» PC-510. Детально методика приготовления буровой эмульсии на углеводородной основе описана в нашей работе [21]. Для модификации свойств описанного выше бурового раствора использовались многостенные нанотрубки Таунит-МД производства компании Нанотех Центр (Тамбов, Россия). Внутренний диаметр этих МУНТ составляет 5–15 нм, а внешний 8–30 нм. Удельная поверхность была выше 270 м^2, а длина превышала 5 мкм. Количество углеродных слоёв составляет 30–40 штук. Концентрацию трубок в буровых растворах варьировали от 0.1 до 0.5 масс.%.

Предварительно готовилась суспензия МУНТ в рассоле хлорида кальция, которая в дальнейшем использовалась при приготовлении бурового раствора. Суспензия МУНТ готовилась с применением ультразвуковой обработки. Время ультразвуковой обработки составляло 60 минут. Интенсивность ультразвукового воздействия составляла не менее 50 Вт/см^2, мощность излучения составляла 400 Вт. Для изучения вязкости и реологии буровых растворов использовался вискозиметр *Ofite* 900. В вискозиметре *Ofite* 900 использовалась конфигурация измерительной системы — коаксиальный цилиндр Куэтта, где R1B1 — измерительный боб из нержавеющей стали (марка 303) и F1.0 — блок торсионной пружины. Для данной торсионной пружины измерения вязкости при скорости сдвига ниже 5.1 с$^{-1}$ (менее 3 оборотов в минуту) имеют большую погрешность. В данной работе коэффициент вязкости измерялся в широком диапазоне скоростей сдвига от 5.1 до 1022 с$^{-1}$. Вискозиметр *Ofite* 900 позволяет получать зависимость коэффициента вязкости от скорости сдвига в режиме пошагового повышения скорости сдвига (CSR). Реологические параметры (предельное напряжение сдвига, показатель консистенции, показатель нелинейности) определялись путём аппроксимации экспериментальных данных моделью Гершеля—Балкли методом наименьших квадратов. Реология полученных растворов описывалась моделью Гершеля—Балкли. Реологические параметры буровых растворов с нанотрубками приведены в таблице. Как видно из данных приведённых в таблице, напряжение сдвига и индекс консистенции бурового раствора существенно возрастают с увеличением концентрации МУНТ. А показатель степени реологической модели фактически не зависит от концентрации добавки. На практике для определения реологических характеристик пользуются стандартом API (ISO 10414-1, Промышленность нефтяная и газовая; Полевые испытания буровых растворов, ISO 10414-1:2001, ISO 13503-1:2003), и обычно используются скорости вращения менее 600 оборотов, что для используемого вращательного боба соответствует скорости сдвига 1022 с$^{-1}$.

Реологические параметры буровых растворов

	Параметры модели Гершеля—Балкли		
Концентрация МУНТ, масс.%	τ_0, Па	k_ν, Па $\times c^n$	n
0	2.879	0.4411	0.5381
0.1	3.475	0.5026	0.5503
0.25	4.114	0.6072	0.5394
0.5	4.228	0.6313	0.5302

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Проведено расчётное исследование влияния добавок нанотрубок в буровой раствор на эффективность выноса шлама из горизонтальной скважины. Для этого в расчёте задавались граничные условия соответствующие типичным условиям бурения скважин, описанные в разделе 1. Исследовано влияние концентрации многостенных углеродных нанотрубок в буровом растворе на характеристики двухфазного течения при транспорте частиц шлама разного среднего размера. Размер частиц шлама соответствовал диапазону изменения среднего размера частиц выбуренной породы и варьировался в диапазоне от 2 до 7 мм. На рис. 2—4 представлены основные характеристики двухфазного течения в кольцевом канале при различных концентрациях МУНТ. Приведены изолинии распределения осевой скорости бурового раствора и частиц шлама, объёмной концентрации частиц шлама на выходе и стенках кольцевого канала для размера частиц 4 мм. Добавление нанотрубок приводит к значительному изменению картины течения бурового раствора и, как следствие, к изменению режимов транспорта шлама.

На рис. 2 видно, что с увеличением концентрации МУНТ распределение осевой скорости бурового раствора в кольцевом канале становится более однородным в азимутальном направлении. Данный результат связан с тем, что значительно изменились реологические характеристики бурового раствора при добавлении МУНТ (см. таблицу). Прежде всего, произошло значительное возрастание значения предельного напряжения сдвига и параметра консистенции. Так при увеличении концентрации трубок до 0.5 масс.% предельное напряжение сдвига выросло примерно в 1.5 раза по сравнению с базовой буровой эмульсией. Это, в свою очередь, привело к выполаживанию профиля осевой скорости в кольцевом канале. Как видно из распределений на рис. 2, участок квазитвёрдого течения существенно расширился по радиусу канала, распределение скорости стало более равномерным.

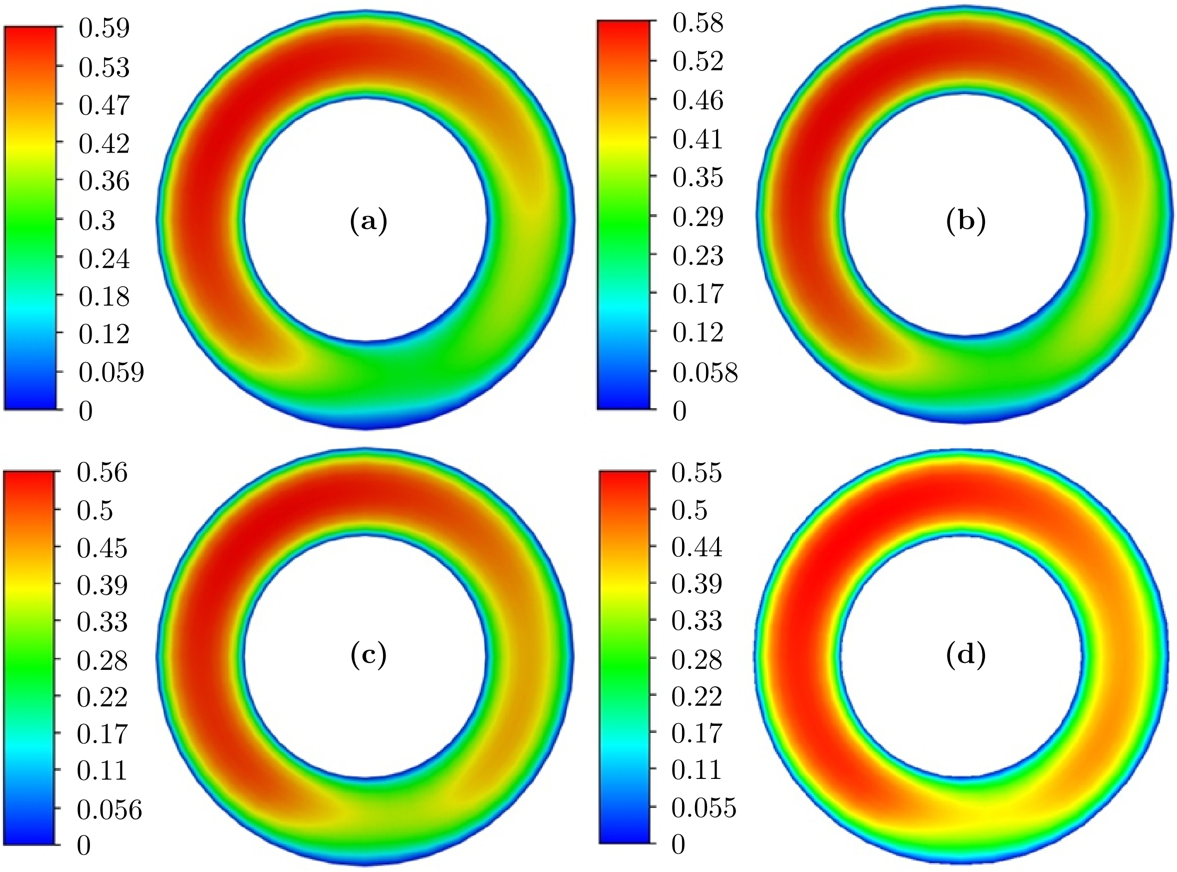


Рис. 2. Осевая скорость бурового раствора на выходе из кольцевого канала при различных массовых концентрациях МУНТ в буровом растворе: (a) 0%, (b) 0.10%, (c) 0.25%, (d) 0.50%

Ситуация существенно меняется при увеличении размера частиц шлама. Такие изменения скорости дисперсионной среды, безусловно, сказываются на распределениях скоростей частиц шлама, которые показаны на рис. 3. Распределение осевой скорости частиц становится также более однородным по периметру кольцевого канала. Кроме того, с увеличением концентрации трубок максимальная скорость частиц шлама незначительно увеличивается. Это способствует улучшению промывки скважины. При низких концентрациях трубок максимум профиля скорости частиц шлама сосредоточен в нижней части кольцевого канала. При увеличении концентрации МУНТ скорость частиц в верхней части канала повышается, то есть больше частиц шлама транспортируется в виде отдельных частиц.

Результаты моделирования показывают, что частицы шлама меньше 2 мм для данной буровой эмульсии и параметров бурения движутся вместе с буровым раствором в режиме гомогенной суспензии. Разница скоростей частиц шлама и бурового раствора (скорость проскальзывания) для таких частиц близка к нулю. В таком случае, шлам свободно удаляется из скважины, а эффективность промывки близка к максимальной (см. рис. 6). Ситуация су-

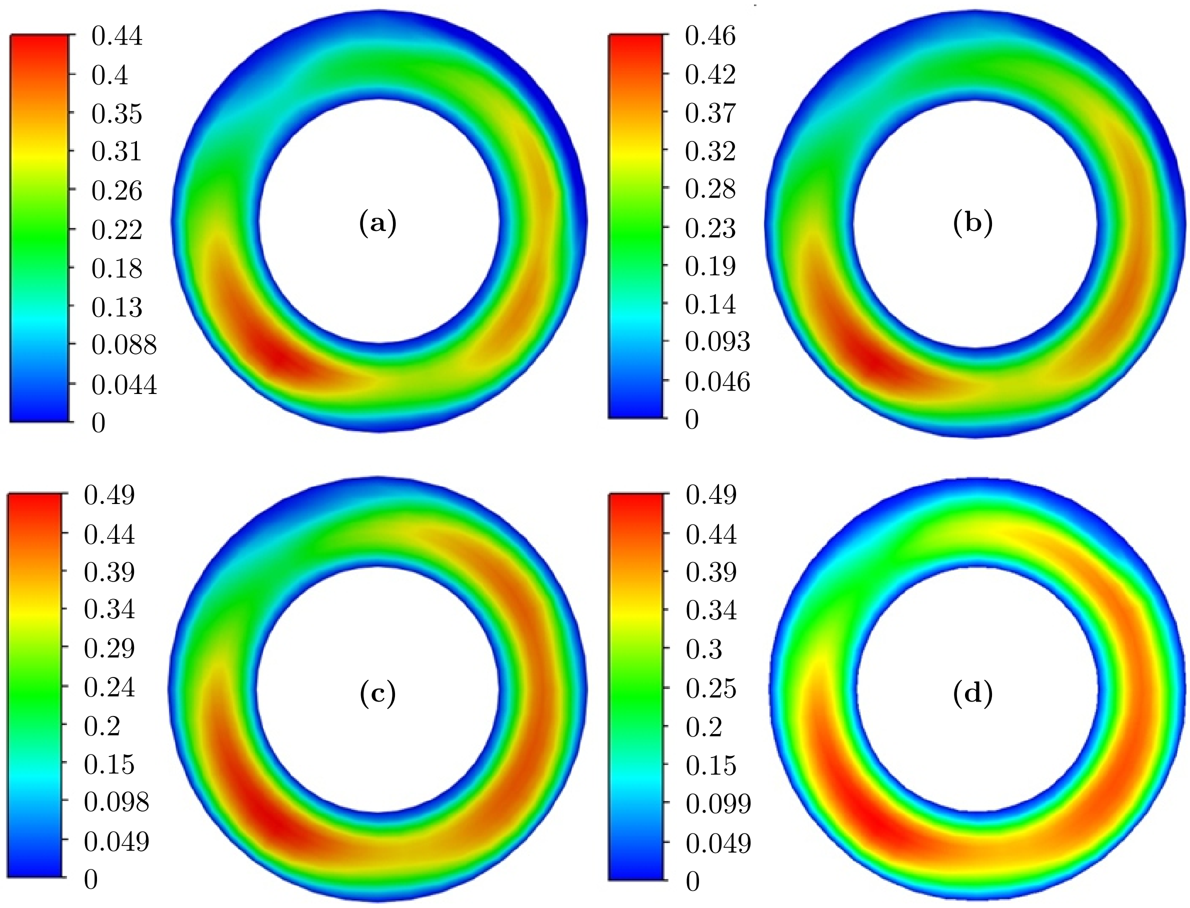


Рис. 3. Осевая скорость частиц шлама на выходе из кольцевого канала при различных массовых концентрациях МУНТ в буровом растворе: (a) 0%, (b) 0.10%, (c) 0.25%, (d) 0.50%

щественно меняется при увеличении размера частиц шлама.На рис. 4–5 показано распределение объёмной концентрации частиц шлама в кольцевом канале для частиц 4 мм. При таком размере большая часть частиц сепарировалась от основного течения и сконцентрировалась в нижней части кольцевого канала и движется в виде гранулированного слоя. Концентрация свободно движущихся частиц в потоке низкая и с увеличением размера частиц быстро уменьшается. Реализуется режим транспорта шлама в виде гранулированной среды(плотного слоя). Скорость движения этого гранулированного слоя в несколько раз меньше, чем скорость движения свободных частиц шлама. Данные режимы транспорта наиболее подвержены таким опасным явлениям, как шламонакопление, или прихват бурильной трубы. Для предотвращения возникновения этих явлений управляют параметрами бурения, например, увеличивают скорость вращения бурильной трубы или увеличивают расход бурового раствора.

При увеличении концентрации МУНТ в буровом растворе происходит изменение распределения концентрации частиц шлама в кольцевом канале. С увеличением концентрации МУНТ, меняется концентрация частиц шлама внутри гранулированном слоя данный эффект показан на рис. 4. С увеличением концентрации трубок концентрация частиц шлама в нижней части канала снижается, толщина этого слоя становится заметно меньше. И распределение частиц шлама становится более однородным, это значит, что основной объём частиц шлама движется в режиме гомогенной суспензии. Кроме того, с увеличением концентрации МУНТ увеличивается скорость движения самого слоя. Всё это приводит к улучшению условий транспорта частиц.

На рис. 6 представлены графики зависимостей интегральных параметров, характеризую-

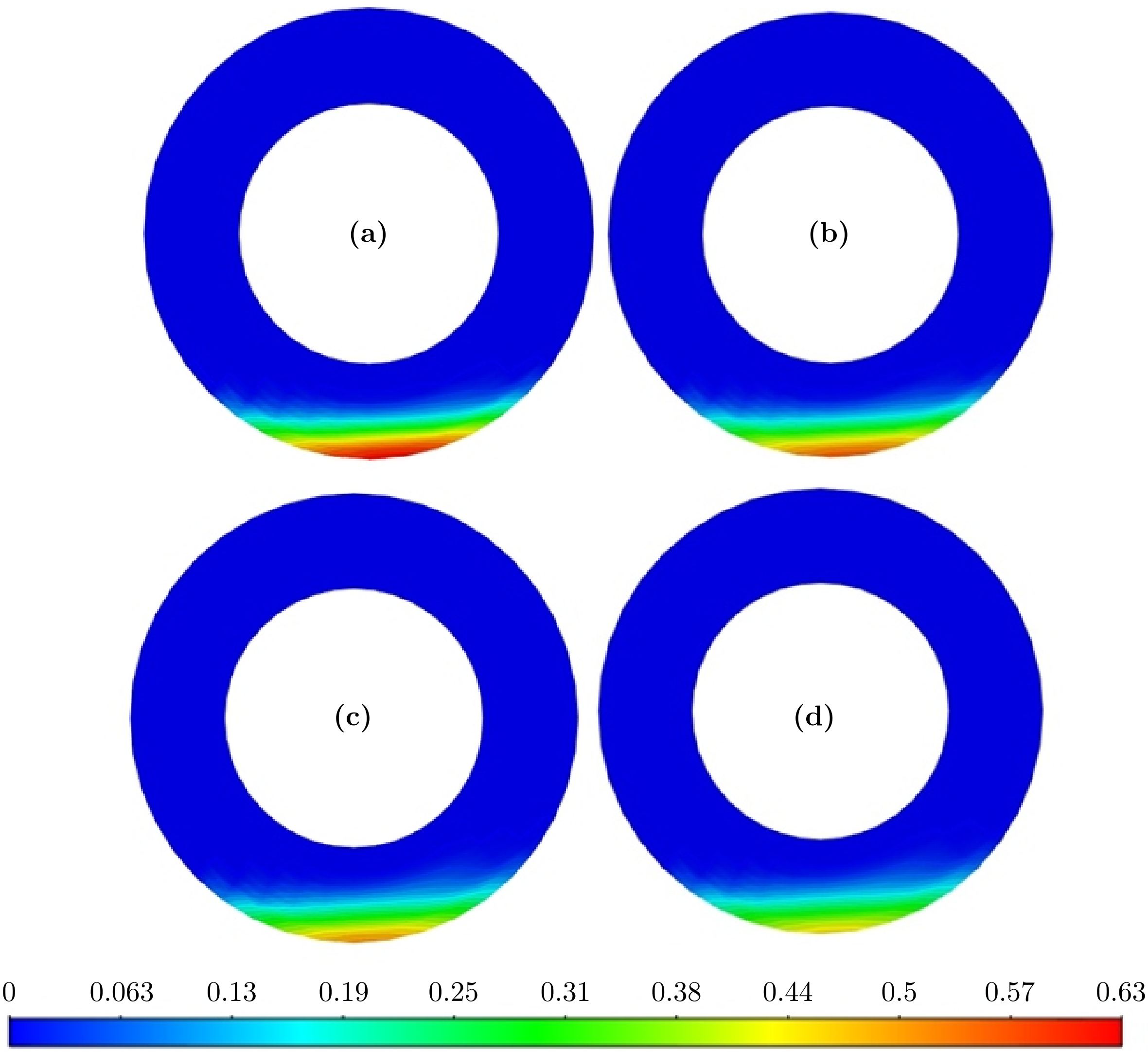


Рис. 4. Объёмная концентрация частиц шлама на выходе из кольцевого канала при различных массовых концентрациях МУНТ в буровом растворе: (a) 0%, (b) 0.10%, (c) 0.25%, (d) 0.50%

щих эффективность выноса шлама, от массовой концентрации МУНТ.

Установлено, что с повышением массовой концентрации многостенных нанотрубок коэффициент эффективности выноса шлама монотонно увеличивается для шлама различной дисперсности. При этом, чем больше размер транспортируемых частиц, тем выше эффективность от использования добавок МУНТ. Так добавка 0.5 масс.% нанотрубок приводит к увеличению эффективности промывки примерно на 40 % для частиц шлама размером 7 мм по сравнению с базовым раствором. Наименьшее влияние на коэффициент эффективности выноса шлама добавления МУНТ наблюдается для шлама дисперсностью 2 мм, так как эффективность выноса шлама этого размера достаточно велика для базового бурового раствора. Влияние добавок нанотрубок на эффективность выноса шлама, как уже было сказано выше, вызвано уменьшением разницы в скоростях несущего бурового раствора и частиц. В этом можно убедиться из анализа данных на рис. 6(b). Так установлено, что добавка 0.5 масс.% нанотрубок в буровую эмульсию приводит к уменьшению скорости проскальзывания частиц больше чем на 50% для частиц 7 мм по сравнению с базовым раствором. С уменьшением размера частиц скорость про-

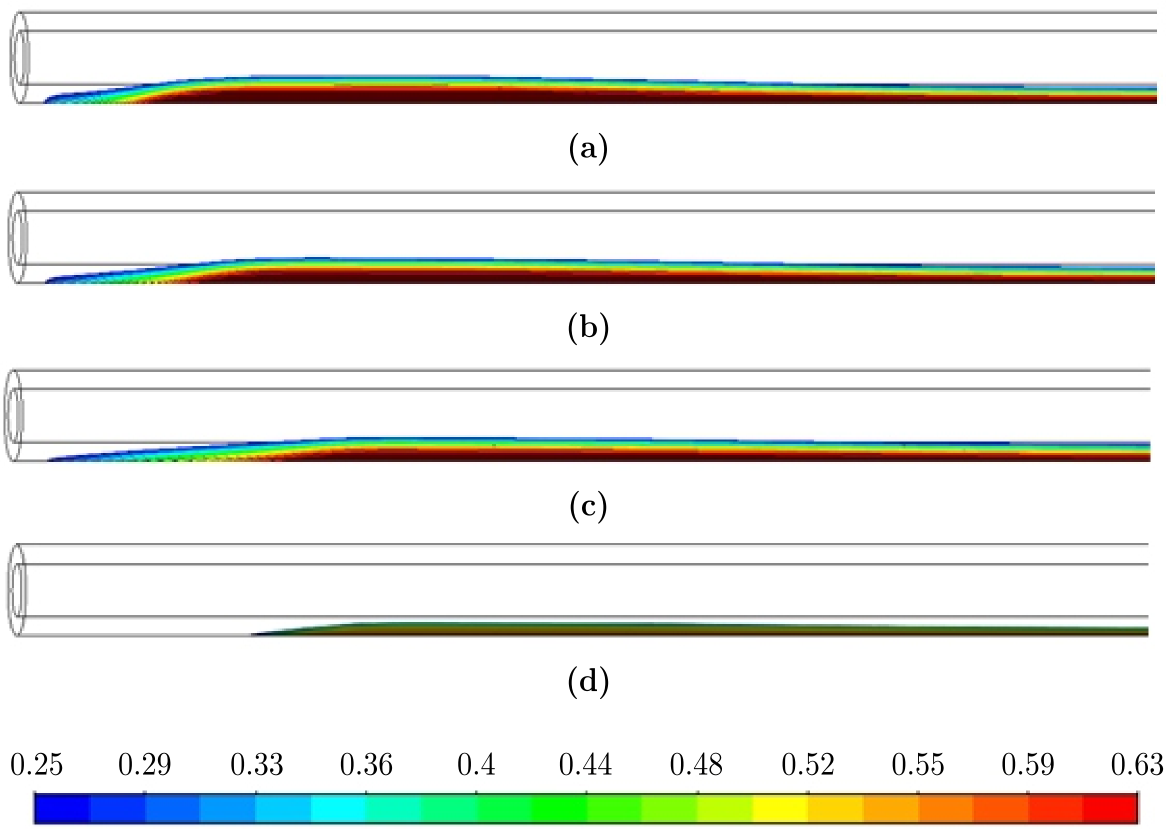


Рис. 5. Объёмная концентрация частиц шлама на стенке горизонтальной скважины при различных массовых концентрациях МУНТ в буровом растворе: (a) 0%, (b) 0.10%, (c) 0.25%, (d) 0.50%

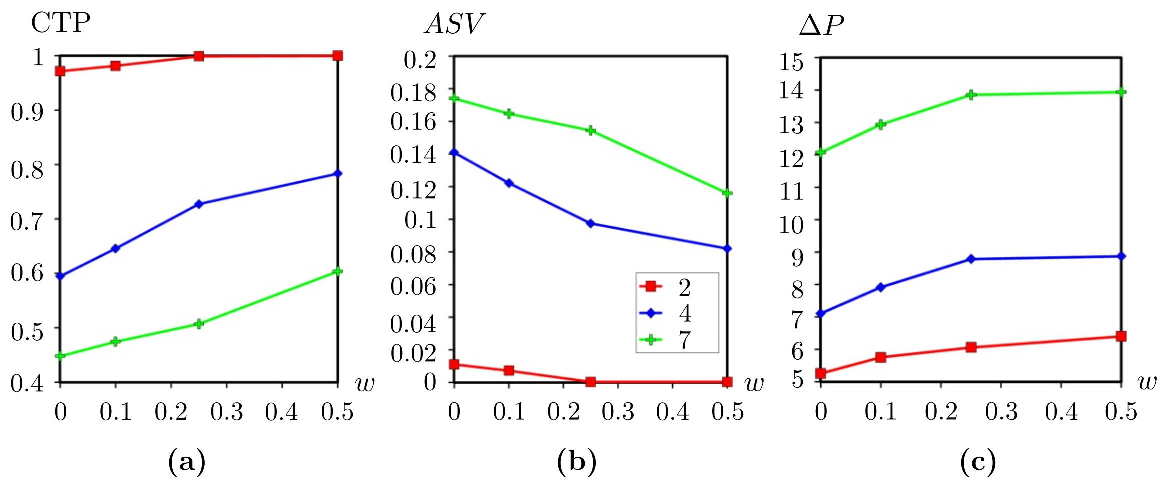


Рис. 6. Зависимость коэффициента эффективности выноса шлама (a), средней скорости проскальзывания частиц шлама (b) и перепада давления в канале (c) от концентрации МУНТ в буровом растворе

скальзывания уменьшается и, соответственно, эффект от добавки МУНТ тоже снижается, но не исчезает полностью. Существенное снижение скорости проскальзывания наблюдается для размера частиц 2 мм. Изменение скорости проскальзывания с ростом концентрации МУНТ вызвано изменением реологии рассматриваемых буровых эмульсий. Добавки приводят к увеличению показателя консистенции и предельного напряжение сдвига растворов. Естественно, что наличие нанотрубок в буровом растворе приводит к росту потерь давления в кольцевом канале. С увеличением концентрации наноматериалов потери давления увеличиваются (см. рис. 6(c)). Так добавка 0.5 масс.% нанотрубок приводит к росту потерь давления примерно на 15%. Это весьма умеренное приращение и по величине сопоставимо с приращением потерь давление при увеличении размера частиц шлама с 2 до 7 мм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено расчётное исследование влияния добавок многостенных углеродных нанотрубок в буровые растворы на углеводородной основе на эффективность выноса шлама из горизонтальной скважины. Для моделирования процесса транспорта шлама из скважины разработана математическая модель, основанная на эйлеровом подходе гранулированной среды для турбулентного режима. Буровой раствор при этом рассматривается как неньютоновская жидкость, для описания реологии которой использовалась модель Гершеля—Балкли с экспериментально измеренными реологическими коэффициентами для реального бурового раствора, модифицированного МУНТ. Для расчёта транспорта шлама в скважине при прокачивании модифицированных нанотрубками буровых растворов на углеводородной основе выбраны типичные параметры процесса бурения наклонно-направленных скважин.

Изучено влияние концентрации многостенных нанотрубок в буровом растворе на углеводородной основе на эффективность транспорта частиц шлама, размер которых варьировался в диапазоне от 2 до 7 мм. Исследована структура течения двухфазного потока в кольцевом канале при различных концентрациях МУНТ. Получены зависимости коэффициента эффективности выноса шлама, средней скорости проскальзывания частиц шлама и потерь давления от концентрации нанотрубок. Показано, что добавка нанотрубок приводит к значительному изменению картины течения бурового раствора, и как следствие, изменению режимов транспорта шлама. С увеличением концентрации МУНТ в буровом растворе распределение осевой скорости дисперсной фазы и дисперсионной среды становится более однородным по сечению кольцевого зазора. Вследствие этого, с увеличением концентрации трубок уменьшается толщина гранулированного слоя, и концентрация частиц шлама внутри этого слоя. Распределение частиц шлама становится более однородным по сечению канала. Это способствует повышению эффективности промывки скважины от шлама.

Было установлено, что с увеличением концентрации многостенных нанотрубок в буровой эмульсии коэффициент эффективности выноса шлама монотонно увеличивается, и при этом весьма существенно. Так в частности, добавка 0.5 масс.%. МУНТ приводит к увеличению эффективности промывки примерно на 40% для частиц шлама размером 7 мм по сравнению с базовым раствором. С уменьшением размера транспортируемых частиц эффективность промывки базовым буровым раствором и без того высокая, и эффект от добавки углеродных нанотрубок снижается. Влияние добавок нанотрубок на эффективность выноса шлама вызвано их влиянием на реологию рассматриваемых буровых эмульсий. Добавки приводят к увеличению показателя консистенции и предельного напряжение сдвига растворов. Таким образом, было показано, что добавка многостенных нанотрубок в буровые растворы на углеводородной основе может приводить к повышению эффективности транспорта шлама в горизонтальных скважинах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда № 23-79-30022; https://rscf.ru/project/23-79-30022/. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабаян Э. В., Мойса Н. Ю.* Буровые растворы. М: Инфра-Инженерия, 2019.
2. *Abdullah A. H., Ridha S., Mohshim D. F., Yusuf M., Kamyab H., Krishna S., Maoinser M. A.* A comprehensive review of nanoparticles: Effect on water-based drilling fluids and wellbore stability // Chemosphere. 2022. V. 308, N 1. Article 136274; DOI: 10.1016/j.chemosphere.2022.136274
3. *Ozkan A., Tiknas S., Ozkan V.* An Innovative Experimental Study on Improving the Rheological Properties of Na-Bentonite Water Based Drilling Muds using Graphene, Graphene Oxide and Graphene Oxide Functionalized with Gold Nanoparticles // ECS J. Solid State Sci. Technol. 2022. V. 11, N 8. Article 081006; DOI: 10.1149/2162-8777/ac83ef
4. *Jin J., Lv K., Sun J., Zhang J., Hou Q., Guo X., Liu K.* Robust superhydrophobic TiO_2@carbon nanotubes inhibitor with bombax structure for strengthening wellbore in water-based drilling fluid // J. Mol. Liq. 2023. V. 37015. Article 120946; DOI: 10.1016/j.molliq.2022.120946
5. *Ozkan A.* Effect of gold nanoparticle functionalized multi-walled carbon nanotubes on the properties of na-bentonite water based drilling fluid // Fresenius Environ. Bull. 2020. V. 29, N 1. P. 143–151; DOI: 10.18586/msufbd.489389
6. *Anoop K., Sadr R., Yrac R., Amani M.* Rheology of a colloidal suspension of carbon nanotube particles in a water-based drilling fluid // Powder Technol. 2019. V. 342. P. 585–593; DOI: 10.1016/j.powtec.2018.10.016
7. *Samsuri A., Hamzah A.* Water based mud lifting capacity improvement by multiwall carbon nanotubes additive // Int. J. Pet. Gas Eng. 2016. V. 3, N 8. P. 1–9.
8. *Aftab A., Ismail A. R., Ibupoto Z. H.* Enhancing the rheological properties and shale inhibition behavior of water-based mud using nanosilica, multi-walled carbon nanotube, and graphene nanoplatelet // Egypt. J. Pet. 2017. V. 26, N 2. P. 291–299; DOI: 10.1016/j.ejpe.2016.05.004
9. *Alvi M. A. A., Belayneh M., Saasen A., Fjelde K. K., Aadnoy B. S.* Effect of MWCNT and MWCNT functionalized -OH and -COOH nanoparticles in laboratory water based drilling fluid // Proc. Int. Conf. Offshore Mech. Arct. Eng. 2018. Article V008T11A069. DOI: 10.1115/OMAE2018-78702
10. *Lun C. K. K., Savage S. B., Jeffrey D. J., Chepurniy N.* Kinetic theories for granular flow: Inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flow field // J. Fluid Mech. 1984. V. 140, N 1. P. 223–256; DOI: 10.1017/S0022112084000586
11. *Ding J., Gidaspow D. A.* Bubbling fluidization model using the kinetic theory of granular flow // AIChE J. 1990. V. 36, N 4. P. 523–538; DOI: 10.1002/AIC.690360404
12. *Gidaspow D., Bezburuah R., Ding J.* Hydrodynamics of circulating fluidized beds, kinetic theory approach // Proc. 7th Eng. Found. Conf. Fluidization. 1991. P. 75–82.
13. *Minakov A. V., Zhigarev V. A., Mikhienkova E. I., Neverov A. L. , Buryukin F. A., Guzei D. V.* The effect of nanoparticle additives in the drilling fluid on pressure loss and cutting transport efficiency in the vertical boreholes // J. Pet. Sci. Eng. 2018. V. 171. P. 1149–1158; DOI: 10.1016/J.PETROL.2018.08.032
14. *Minakov A. V., Mikhienkova E. I., Neverov A. L., Rudyak V. Ya.* Comprehensive numerical study of the effect of nanoparticle additives on the cutting transport performance in horizontal boreholes // J. Computat. Des. Eng. 2021. V. 8, N 1. P. 283–297; DOI: 10.1093/jcde/qwaa078
15. *Herschel W. H., Bulkley R.* Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollosungen // Kolloid Z. 1926. V. 39, N 4. P. 291–300; DOI: 10.1007/bf01432034
16. *Saffman P. G., Bulkley R.* The lift on a small sphere in a slow shear flow // J. Fluid Mech. 1965. V. 22, N 2. P. 385–400; DOI: 10.1017/s0022112065000824
17. *Ogawa S., Umemura A., Oshima N.* On the equation of fully fluidized granular materials // J. Appl. Math. Phys. 1980. V. 31. P. 483–493.
18. *Menter F. R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J. 1994. V. 32, N 8. P. 1598–1605; DOI: 10.2514/3.12149

19. *Gavrilov A. A., Dekterev A. A., Minakov A. V., Rudyak V. Ya.* A numerical algorithm for modeling laminar flows in an annular channel with eccentricity // J. Appl. Ind. Math. 2011. V. 5, N 4. P. 559–568; DOI: 10.1134/S1990478911040119

20. *Гаврилов А. А., Минаков А. В., Дектерев А. А., Рудяк В. Я.* Численный алгоритм для моделирования установившихся ламинарных течений неньютоновских жидкостей в кольцевом зазоре с эксцентриситетом // Вычисл. технол. 2012. Т. 17, № 1. С. 44–56.

21. *Mikhienkova E. I., Lysakov S. V., Neverov A. L., Zhigarev V. A., Minakov A. V.* Experimental study on the influence of nanoparticles on oil-based drilling fluid properties // J. Pet. Sci. Eng. 2022. V. 208. Article 109452; DOI: 10.1016/j.petrol.2021.109452

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 532.5

A COMPUTATIONAL STUDY OF CUTTINGS TRANSPORT IN A HORIZONTAL WELL WITH AN OIL-BASED DRILLING FLUID MODIFIED BY MULTIWALLED CARBON NANOTUBES

© 2024 **V. A. Zhigarev**[1a], **D. V. Guzei**[1,2b], **E. I. Lysakova**[1c], **V. Ya. Rudyak**[3d], **A. V. Minakov**[1,2e]

[1]*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia,*
[2]*Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*
[3]*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (SIBSTRIN), Novosibirsk, 630008 Russia*

E-mails: [a]VZhigarev@sfu-kras.ru, [b]DGuzey@sfu-kras.ru, [c]EMikhienkova@sfu-kras.ru, [d]Valery.Rudyak@mail.ru, [e]AMinakov@sfu-kras.ru

Received 31.05.2023, revised 10.06.2024, accepted 03.07.2024

Abstract. We have conducted a computational study of the effect of adding multiwalled carbon nanotubes (MWCNTs) to oil-based drilling fluids on the efficiency of cuttings removal from an annular channel simulating a horizontal section of a well. To simulate the process of sludge transport in an annular channel, a mathematical model based on the Eulerian approach of a granular medium for a turbulent flow regime has been developed. The rheology of the drilling fluid modified with MWCNTs was described by the Herschel—Bulkley model with experimentally determined rheological coefficients. The base oil-based drilling fluid was an inverse emulsion with a ratio of hydrocarbon and water phases equal to 65/35. The concentration of MWCNTs in solutions varied from 0.1 to 0.5 wt %. The size of the transported sludge particles varied from 2 to 7 mm. The flow structure of a two-phase flow in an annular channel for various concentrations of MWCNTs has been studied. The dependences of the sludge removal efficiency coefficient, the average slip speed of sludge particles, and pressure losses on the concentration of nanotubes are obtained. It has been established that the addition of nanotubes leads to a significant change in the flow pattern of the drilling fluid and, as a result, to a change in the modes of cuttings transport. Addition of 0.5 wt % of MWCNTs leads to an increase in the efficiency of well flushing by approximately 40%. Thus, based on the results of the computational study, it has been shown that the addition of multiwalled nanotubes to oil-based drilling fluids can lead to an increase in the efficiency of cuttings transport in horizontal wells.

Keywords: model of granular media, mathematical modeling, oil-based drilling fluid, multiwalled carbon nanotubes, rheology, cuttings transport.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.305

REFERENCES

1. E. V. Babayan and N. Yu. Moisa, *Drilling Fluids* (Infra-Engineering, Moscow, 2019) [in Russian].
2. A. H. Abdullah, S. Ridha, D. F. Mohshim, M. Yusuf, H. Kamyab, S. Krishna, and M. A. Maoinser, "A comprehensive review of nanoparticles: Effect on water-based drilling fluids and wellbore stability," Chemosphere **308** (1), 136274 (2022). https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2022.136274
3. A. Ozkan, S. Tiknas, and V. Ozkan, "An innovative experimental study on improving the rheological properties of na-bentonite water based drilling muds using graphene, graphene oxide and graphene

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 598–611.

oxide functionalized with gold nanoparticles," ECS J. Solid State Sci. Technol. **11** (8), 081006 (2022). https://doi.org/10.1149/2162-8777/ac83ef

4. J. Jin, K. Lv, J. Sun, J. Zhang, Q. Hou, X. Guo, and K. Liu, "Robust superhydrophobic TiO2@carbon nanotubes inhibitor with bombax structure for strengthening wellbore in water-based drilling fluid," J. Mol. Liq. **37015**, 120946 (2023). https://doi.org/10.1016/j.molliq.2022.120946
5. A. Ozkan, "Effect of gold nanoparticle functionalized multi-walled carbon nanotubes on the properties of na-bentonite water based drilling fluid," Fresenius Environ. Bull. **29** (1), 143–151 (2020). https://doi.org/10.18586/msufbd.489389
6. K. Anoop, R. Sadr, R. Yrac, and M. Amani, "Rheology of a colloidal suspension of carbon nanotube particles in a water-based drilling fluid," Powder Technol. **342**, 585–593 (2019). https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.10.016
7. A. Samsuri and A. Hamzah, "Water based mud lifting capacity improvement by multiwall carbon nanotubes additive," Int. J. Pet. Gas Eng. **3** (8), 1–9 (2016).
8. A. Aftab, A. R. Ismail, and Z. H. Ibupoto, "Enhancing the rheological properties and shale inhibition behavior of water-based mud using nanosilica, multi-walled carbon nanotube, and graphene nanoplatelet," Egypt. J. Pet. **26** (2), 291–299 (2017). https://doi.org/10.1016/j.ejpe.2016.05.004
9. M. A. A. Alvi, M. Belayneh, A. Saasen, K. K. Fjelde, and B. S. Aadnoy, "Effect of MWCNT and MWCNT functionalized -OH and -COOH nanoparticles in laboratory water based drilling fluid," Proc. Int. Conf. Offshore Mech. Arct. Eng. V008T11A069 (2018). https://doi.org/10.1115/OMAE2018-78702
10. C. K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey, and N. Chepurniy, "Kinetic theories for granular flow: Inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flow field," J. Fluid Mech. **140** (1), 223–256 (1984). https://doi.org/10.1017/S0022112084000586
11. J. Ding and D. A. Gidaspow, "Bubbling fluidization model using the kinetic theory of granular flow," AIChE J. **36** (4), 523–538 (1990). https://doi.org/10.1002/AIC.690360404
12. D. Gidaspow, R. Bezburuah, and J. Ding, "Hydrodynamics of circulating fluidized beds, kinetic theory approach," *Proc. 7th Eng. Found. Conf. Fluidization* (1991), pp. 75–82.
13. A. V. Minakov, V. A. Zhigarev, E. I. Mikhienkova, A. L. Neverov, F. A. Buryukin, and D. V. Guzei, "The effect of nanoparticle additives in the drilling fluid on pressure loss and cutting transport efficiency in the vertical boreholes," J. Pet. Sci. Eng. **171**, 1149–1158 (2018). https://doi.org/10.1016/J.PETROL.2018.08.032
14. A. V. Minakov, E. I. Mikhienkova, A. L. Neverov, and V. Ya. Rudyak, "Comprehensive numerical study of the effect of nanoparticle additives on the cutting transport performance in horizontal boreholes," J. Comput. Des. Eng. **8** (1), 283–297 (2021). https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa078
15. W. H. Herschel and R. Bulkley, "Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollosungen," Kolloid Z. **39** (4), 291–300 (1926). https://doi.org/10.1007/bf01432034
16. P. G. Saffman and R. Bulkley, "The lift on a small sphere in a slow shear flow," J. Fluid Mech. **22** (2), 385–400 (1965). https://doi.org/10.1017/s0022112065000824
17. S. Ogawa, A. Umemura, and N. Oshima, "On the equation of fully fluidized granular materials," J. Appl. Math. Phys. **31**, 483–493 (1980).
18. F. R. Menter, "Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications," AIAA J. **32** (8), 1598–1605 (1994). https://doi.org/10.2514/3.12149
19. A. A. Gavrilov, A. A. Dekterev, A. V. Minakov, and V. Ya. Rudyak, "A numerical algorithm for modeling laminar flows in an annular channel with eccentricity," J. Appl. Ind. Math. **5** (4), 559–568 (2011). https://doi.org/10.1134/S1990478911040119
20. A. A. Gavrilov, A. V. Minakov, A. A. Dekterev, and V. Ya. Rudyak, "Numerical algorithm for modeling steady-state laminar flows of non-Newtonian fluids in an annular gap with eccentricity," Vychisl. Tekhnol. **17** (1), 44–56 (2012) [in Russian].
21. E. I. Mikhienkova, S. V. Lysakov, A. L. Neverov, V. A. Zhigarev, and A. V. Minakov, "Experimental study on the influence of nanoparticles on oil-based drilling fluid properties," J. Pet. Sci. Eng. **208**, 109452 (2022). https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109452

УДК 51-72:517.9:538.91

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ФАЗОВОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАЗВИТИЯ КАНАЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОБОЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 2024 Е. В. Зипунова[a], А. А. Кулешов[b], Е. Б. Савенков[c]

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Миусская пл., 4, г. Москва 125047, Россия

E-mails: [a]zipunova@keldysh.ru, [b]andrew_kuleshov@mail.ru, [c]savenkov@keldysh.ru

Поступила в редакцию 28.11.2023 г.; после доработки 03.02.2024 г.; принята к публикации 03.07.2024 г.

В настоящей работе представлены результаты численного исследования математической модели типа фазового поля для развития канала электрического пробоя. Модель включает в себя группу уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении, уравнение баланса электрического заряда и уравнение Аллена—Кана для описания эволюции фазового поля. Приводится краткое описание математической модели и вычислительных алгоритмов для решения её уравнений. Рассматривается ряд постановок задач о распространении канала электрического пробоя в однородной, макроскопически и микроскопически неоднородных средах. Исследуются факторы, влияющие на характер развития канала пробоя в зависимости от постановки задачи и распределения свойств среды.

Ключевые слова: модель фазового поля, модель диффузной границы, параметр порядка, уравнение Аллена—Кана, электрический пробой, неоднородная среда.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.306

ВВЕДЕНИЕ

Электрический пробой твёрдых диэлектриков является комплексным процессом [1], который заключается в быстрой, лавинообразной деградации диэлектрических свойств материала под воздействием достаточно сильного электрического поля. Обычно процесс пробоя приводит к образованию уединённого канала пробоя, диаметр которого существенно меньше его длины. С точки зрения математического моделирования значительную сложность построения эффективной математической модели развития канала пробоя (помимо необходимости учёта целого комплекса физических процессов, сопровождающих его развитие) и необходимых для её анализа вычислительных алгоритмов представляет то, что канал пробоя является эффективно одномерным объектом, эволюционирующим в трёхмерной области, занятой средой. Среди многообразия математических моделей, предложенных для описания динамики развития канала пробоя, особое место занимает предложенная в работе [2] модель типа фазового поля или, что в рассматриваемом случае одно и то же, модель типа «диффузной границы».

Модели типа фазового поля применяются для описания динамики каких-либо «включений» в однородной среде. В роли «включений» обычно выступают зоны однородности, соответствующие дисперсной фазе многофазной системы, в роли однородной среды — дисперсионная фаза. Распределение фаз в пространстве описывается так называемым фазовым полем или параметром порядка — определённой в пространстве гладкой функцией, значение которой практически постоянно в зонах однородности и быстро, но непрерывно, меняется в пределах разделяющего их слоя — «диффузной границы». Например, в задачах гидродинамики диффузная граница отделяет две несмешивающиеся жидкости. Диффузная граница имеет конечную толщину, которая определяется параметрами модели. Соответственно, модель имеет внутренние механизмы, обеспечивающие заданную толщину диффузной границы в ходе эволюции системы. С прикладной точки зрения, модели типа диффузной границы позволяют описать однородным по пространству и термодинамически согласованным способом динамику многофазных систем самой различной природы с прямым разрешением динамик межфазных границ.

В рассматриваемом классе математических моделей, для описания развития канала электрического пробоя, фазовое поле (или, что в рассматриваемом случае то же самое, поле параметра порядка) является скалярной функцией $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$, принимающей значения в интервале от 0 до 1. Каналом пробоя считается множество точек среды, в которых $\phi = 0$. Неповреждённой среде соответствует $\phi = 1$. Процесс образования и развития («роста») канала пробоя описывается как эволюция функции ϕ во времени. Повреждённое и неповреждённое состояния среды рассматриваются как две фазы, для перехода между которыми необходимо затратить определённую энергию, величина которой является параметром модели.

Предложенная в работе [2] модель построена как формальное, «механистическое» обобщение известных моделей типа диффузной границы для анализа распространения трещин в упругой среде, см. [3]. Строгий вывод модели предложен авторами настоящей работы в [4]. Вывод модели выполнен в рамках рациональной термомеханики сплошной среды и теории микросил и микронапряжений, предложенной в работах М. Гуртина (M. Gurtin), см., например, [5, 6], которая в настоящее время является основным инструментом построения и обоснования моделей типа диффузной границы. Вывод определяющих соотношений модели основан на применении процедуры Колмана—Нолла. Её суть заключается в том, что в качестве первичных соотношений модели постулируется конкретное множество параметров состояния, основные балансовые соотношения для консервативных величин и конкретный вид энтропийного неравенства. Последнее используется как ограничение на вид определяющих соотношений модели. Дальнейшее уточнение вида определяющих соотношений связано с заданием конкретного выражения для свободной энергии Гельмгольца, которое, в сущности, определяет конкретный вариант модели. В рассматриваемом случае основные допущения, используемые при задании вида свободной энергии, включают в себя следующие: переход состояния среды из повреждённой в неповреждённую фазу происходит в том случае, если значение плотности энергии электрического поля становится достаточно большим; количество энергии заданного вида, необходимое для образования участка канала пробоя единичной длины является заданным параметром среды (возможно, локальным); канал пробоя локализован в ограниченной области пространства — то есть повреждённая и неповреждённая фазы не «смешиваются» нигде за исключением узкого слоя «диффузной границы». Эти допущения минимальны в том смысле, что явно указывается лишь характер зависимости энергии системы от учитываемых физических полей. Конкретный способ их взаимодействия явно не постулируется.

Одновременно с этим известно, что электрический пробой является многообразным процессом: канал пробоя может развиваться однонаправленно или ветвиться; возможно развитие канала пробоя как между внешними границами материала, так и одновременное развитие множественных локальных пробоев, возникающих на внутренних границах раздела свойств материала или в локализованных зонах однородности.

Общие механизмы формирования этих эффектов в целом обеспечиваются допущениями модели. Однако возможность их реализации во всем многообразие вызывает вопросы. Исчерпывающий теоретический анализ уравнений модели, который бы дал на них ответ, вряд ли возможен в силу математической сложности системы уравнений, описывающих процесс. Поэтому естественным является исследование предложенной математической модели методами вычислительного эксперимента.

В настоящей работе приведены результаты численного исследования ранее предложенной авторами математической модели для описания процесса развития канала электрического пробоя. Цель работы — качественное исследование свойств решения в зависимости от ряда параметров модели.

Структура работы имеет следующий вид. В разделе 1 кратко описывается рассматриваемая математическая модель. В разделе 2 — соответствующие вычислительные алгоритмы. Раздел 3 посвящены непосредственно результатам численного исследования. В заключении формулируются основные выводы работы.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В настоящем разделе опишем коротко математическую модель, используемую в настоящей работе. Вывод модели представлен в работе [4]. Рассматриваемая модель является простейшей, она учитывает эволюцию электрического поля и плотности электрического заряда в рамках квази(электро)стационарного приближения уравнений Максвелла, и непосредственно развитие канала пробоя в виде эволюционного уравнения типа Аллена—Кана для параметра порядка. Тепловые и механические эффекты не учитываются. Детали вывода модели далее не описываются, формулируется лишь конечная форма уравнений, используемая в дальнейшем.

Уравнения Максвелла в квази(электро)стационарном приближении. Уравнения Максвелла в квази(электро)стационарном приближении имеют вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\mathrm{E}}, \quad \frac{\partial \rho_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{D}$ — вектор электрической индукции, $\boldsymbol{j}$ — вектор плотности потока электрического заряда (плотность электрического тока), ρ_{E} — объёмная плотность электрического заряда. При этом

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E},$$

где $\boldsymbol{E}$ — вектор напряжённости электрического поля, $\epsilon > 0$ — диэлектрическая проницаемость, $\sigma > 0$ — электропроводность.

В рассматриваемой постановке распределение электрического поля является потенциальным, поэтому $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$, где Φ — потенциал электрического поля. Отсюда $\boldsymbol{D} = -\epsilon\nabla\Phi$, $\boldsymbol{j} = -\sigma\nabla\Phi$, и уравнения (1) могут быть записаны в виде

$$\nabla \cdot (-\epsilon\nabla\Phi) = \rho_{\mathrm{E}}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{E}}}{\partial t} + \nabla \cdot (-\sigma\nabla\Phi) = 0. \tag{3}$$

В том случае, если электрофизические свойства среды зависят только от точки пространства, уравнения (2), (3) представляют собой замкнутую систему уравнений относительно поля электрического потенциала $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t)$ и плотности электрического заряда $\rho_{\mathrm{E}} = \rho_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}, t)$. В рассматриваемой модели они являются функциями параметра порядка, заданными в пространстве функции $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$, то есть

$$\epsilon(\boldsymbol{x}, t) = \epsilon^{\#}(\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{x}, t)), \quad \sigma(\boldsymbol{x}, t) = \sigma^{\#}(\boldsymbol{x}, \phi(\boldsymbol{x}, t)). \tag{4}$$

Здесь и далее считается, что $f^{\#}, f^{\times}, \ldots$ обозначают функциональные зависимости одной и той же величины f от различного множества аргументов.

Уравнение для параметра порядка. Уравнение для параметра порядка является уравнением типа Аллена—Кана и имеет вид

$$\frac{1}{m}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon'(\phi)\frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi) + \frac{\Gamma}{2}\Delta\phi + \beta\Gamma l^2 \nabla \cdot \left(\|\nabla\phi\|^2 \nabla\phi\right), \tag{5}$$

где $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$ — параметр порядка, $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t)$ — потенциал электрического поля. Штрихом обозначена производная по ϕ. Коэффициент подвижности m имеет смысл скорости изменения фазового поля при единичной приложенной (обобщённой термодинамической) силе. При $\beta = 0$ это уравнение совпадает с предложенным в [2]. Необходимость использования $\beta > 0$ обосновывается в [4]. Величины $\Gamma = \mathrm{const}$ и $l = \mathrm{const}$ являются параметрами. Первый из них определяет количество энергии, необходимой для создания единицы длины канала электрического пробоя, второй — радиус размытия «диффузной» границы канала пробоя. Функция $f = f(\phi)$ считается заданной. С её помощью можно задать количество энергии, необходимое для образования области пространства, занятой повреждённой средой, см. [7]. Более подробно вывод уравнения (5) и смысл входящих в него параметров рассмотрен в [4].

Уравнение (5) по существу является уравнением баланса обобщённых термодинамических микросил и микронапряжений (в смысле теории микросил и микронапряжений М. Гуртина), описывающих эволюцию «микросостояния» среды, см. [4] в рассматриваемом случае и работы [5, 6] в целом. Параметр порядка ϕ принимает значения от 0 до 1. Значение $\phi = 1$ соответствует неповреждённой среде (неповреждённой фазе), значение $\phi = 0$ — полностью повреждённой среде (повреждённой фазе). Промежуточные значения $0 < \phi < 1$ соответствуют частично повреждённой среде. Специфика модели заключается в том, что в силу вида свободной энергии (см. ниже), зоны повреждённой среды (то есть «канал пробоя») локализованы в пространстве, см. [7]. По существу, переход среды из неповреждённого в повреждённое состояние описывается как фазовый переход, энергия этого фазового перехода связана с энергией, необходимой для образования канала пробоя единичной длины.

Определяющие соотношения. Для замыкания уравнений (2), (3) и (5) модели необходимо задать зависимость (4) электрофизических свойств среды от параметра порядка.

Сначала отметим, что для рассматриваемой модели свободная энергия Гельмгольца среды определяется как [4]

$$\psi(\boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) = -\epsilon(\phi)\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 + \left[\Gamma\frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}\Gamma\nabla\phi\cdot\nabla\phi + \frac{1}{4}\beta\Gamma l^2\left\|\nabla\phi\right\|^4\right]. \tag{6}$$

В этом соотношение ϕ — параметр порядка; Γ, $l = \mathrm{const} > 0$ — параметры модели. Функция $f = f(\phi)$ — гладкая функция (функция деградации, см. ниже), которая удовлетворяет условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$, $f'(1) = 0$, $f'(x) \geqslant 0$ при $x \in (0, 1)$, см. [8]. В настоящей работе она задаётся в соответствии с выражением (10), то есть $f(\phi) = 4\phi^3 - 3\phi^4$. Первое слагаемое в (6) соответствует «обычной» энергии среды — в рассматриваемом случае это энергия электрического поля с учётом зависимости диэлектрической проницаемости от параметра порядка; второе — специфично для моделей диффузной границы.

Запишем выражение (6) в виде $\psi(\boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) = \psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{E}, \phi) + \psi_{\mathrm{br}}(\phi, \nabla\phi)$, где

$$\psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{E}, \phi) = -\epsilon(\phi)\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2, \quad \psi_{\mathrm{br}}(\phi, \nabla\phi) = \Gamma\frac{1 - f(\phi)}{l^2} + \frac{1}{4}\Gamma\nabla\phi\cdot\nabla\phi + \frac{1}{4}\beta\Gamma l^2\left\|\nabla\phi\right\|^4.$$

Заметим, что при $\phi = 1$, $\nabla\phi = 0$, имеем $\psi_{\mathrm{br}} = 0$ и энергия системы имеет вид $\psi(\boldsymbol{E}, \phi, \nabla\phi) = \psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{E}, \phi)$. В этом случае естественно считать, что

$$\psi(\boldsymbol{E}, \phi = 1) = \psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{E}, \phi = 1) = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mathrm{d}}\boldsymbol{E}^2, \tag{7}$$

где ϵ_{d} — диэлектрическая проницаемость неповреждённой среды.

Аналогично, при $\phi = 0$ и $\nabla\phi = 0$, то есть для полностью повреждённой среды, имеем

$$\psi_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{E}, \phi = 0) = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mathrm{br}}\boldsymbol{E}^2, \tag{8}$$

где ϵ_{br} — заданное значение диэлектрической проницаемости полностью повреждённой среды. Одновременно с этим имеем $\psi_{\mathrm{br}} = \Gamma/l^2$, где, как уже отмечалось, Γ — энергия, необходимая для образования единицы длины канала пробоя. Размерность Γ — «единица энергии»/«единицу длины». Такая нормировка коэффициентов в (6) отражает тот факт, что геометрически одномерный объект в рассматриваемой модели диффузной границы представляется эффективно одномерной, но трёхмерной область диаметром $2l$. Градиентные и алгебраические слагаемые в (6) (выражение в скобках) устроены так, что области, в которых ϕ принимает промежуточные между 0 и 1 значения, локализуются в пространстве, формируя эффективно одномерные трёхмерные области, соответствующие каналу пробоя, см. [7].

В процессе образования канала пробоя происходит изменение значений параметра порядка от значения 1 (полностью неповреждённая среда) до значения 0 (полностью повреждённая среда). В ходе этого процесса, при неизменном значении электрического поля, электрическая энергия среды изменяется от значений, определяемых соотношением (7) до значений, определяемых выражением (8) за счёт изменения свойств среды, конкретно, — её диэлектрической проницаемости $\epsilon = \epsilon(\phi)$, зависящей от параметра порядка ϕ. Указанная зависимость может быть задана различным способом. В настоящей работе, следуя [2], зададим её в виде

$$\epsilon(\phi(\boldsymbol{x}), t) = \frac{\epsilon_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{g(\phi(\boldsymbol{x}, t)) + \delta_\epsilon}, \tag{9}$$

где $\delta_\epsilon \ll 1$ — малый параметр, $g = g(s)$ — гладкая функция, интерполирующая между 0 и 1 на отрезке $[0, 1]$. Её конкретный вид может задан по-разному, далее используется выражение

$$g(s) = 4s^3 - 3s^4. \tag{10}$$

Заметим, что для неповреждённой среды $\phi = 1$ и значение диэлектрической проницаемости $\epsilon = \epsilon_{\mathrm{d}}/(1 + \delta_\epsilon) \approx \epsilon_{\mathrm{d}}$. Для полностью повреждённой среды $\phi = 0$ и $\epsilon = \epsilon_{\mathrm{br}} = \epsilon_{\mathrm{d}}/\delta_\epsilon$. Такая форма зависимости (9) объясняется тем, что для идеально проводящей среды в рамках квази(элетро)стационарного приближения диэлектрическую проницаемость обычно формально полагают бесконечной. Возможно использование других функций деградации, см. [8].

Аналогично должна быть задана зависимость электропроводности σ среды от фазового поля. Для полностью неповреждённой среды, которая считается диэлектриком, не проводящим электрический ток, можно считать $\sigma(\phi = 1) = \sigma_{\mathrm{d}} \ll 1$, для полностью повреждённой среды электропроводность равна электропроводности канала электрического пробоя, $\sigma = \sigma_{\mathrm{br}}$. Конкретная форма зависимости $\sigma(\phi)$ имеет вид аналогичный (9):

$$\sigma(\phi(\boldsymbol{x}), t) = \frac{\sigma_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{g(\phi(\boldsymbol{x}, t)) + \delta_\sigma}, \tag{11}$$

где $\delta_\sigma > 0$ — малый параметр.

Уравнения (2), (3) и (5), дополненные граничными и начальными условиями, представляют собой замкнутую систему уравнений относительно трёх неизвестных полей: фазового поля $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$, электрического потенциала $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t)$ и объёмной плотности заряда $\rho_{\mathrm{E}} = \rho_{\mathrm{E}}(\boldsymbol{x}, t)$.

Граничные и начальные условия. Рассмотрим более подробно вопрос постановки граничных условий. Пусть Ω — расчётная область — объём среды, в котором происходит развитие канала пробоя. Будем считать, что её граница $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_s \cup \Gamma_\Phi$, $\Gamma_\Phi \cap \Gamma_s = \emptyset$.

Будем считать, что на части Γ_s границы, с физической точки зрения, задано распределение заряда с поверхностной плотность ρ_Γ. Тогда на этой части границы граничное условие для электрического потенциала имеет вид

$$D_n|_{\Gamma_s} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_s} = -\rho_\Gamma, \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_s, \tag{12}$$

где ρ_Γ — заданная функция точки поверхности, $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали к границе области. На части границы Γ_Φ будем считать заданным условие Дирихле, то есть непосредственно значение электрического потенциала

$$\Phi(\boldsymbol{x}, t) = \Phi_\Gamma(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma_\Phi.$$

Величина эквивалентного поверхностного электрического заряда на этой части границы определяется выражением (12), которое выступает в качестве определения ρ_Γ.

Граничные условия для фазового поля далее обычно соответствуют ситуации, когда на границе области среда является неповреждённой, либо значение параметра порядка постоянно вдоль нормали к границе. Эти случаи соответствуют граничным условиям Дирихле $\phi = 1$ и Неймана $\partial\phi/\partial\boldsymbol{n} = 0$.

Полная система уравнений модели. С учётом изложенного, полная система уравнений модели имеет вид

$$\frac{\partial \rho_\mathrm{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (-\sigma \nabla \Phi) = 0, \tag{13}$$

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla \Phi) = \rho_\mathrm{E}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon'(\phi)\frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{\Gamma}{2}\Delta\phi + \beta\Gamma l^2 \nabla \cdot \left(\|\nabla\phi\|^2 \nabla\phi\right). \tag{15}$$

Первичными переменными модели являются $\Phi = \Phi(\boldsymbol{x}, t)$, $\rho_\mathrm{E} = \rho_\mathrm{E}(\boldsymbol{x}, t)$, $\phi = \phi(\boldsymbol{x}, t)$. Зависимости $\epsilon = \epsilon(\phi)$ и $\sigma = \sigma(\phi)$ считаются заданными в соответствии с (9) и (11). Конкретные значения скалярных параметров всех зависимостей: Γ, l, m, β в системе (14)–(15), значения ϵ_d и σ_d, параметры δ_ϵ и δ_σ в (9) и (11) — указываются ниже при описании конкретных вариантов расчётов.

2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

2.1. Аппроксимации по времени

Рассмотрим сначала аппроксимации по времени электродинамической части задачи, то есть уравнений (2) и (3) или, что то же самое, уравнений (14), (13), считая распределение фазового поля заданным, например, как $\phi = 1$.

Будем рассматривать полудискретную постановку, аппроксимируя уравнения модели только по времени t. Будем считать, что задача решается на временном отрезке $t \in [0, T]$, решение определяется в моменты времени t_n, $n = \overline{0, N}$,

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T.$$

Далее используем обозначения $(\Phi, \rho_\mathrm{E}) = (\Phi(t_n), \rho_\mathrm{E}(t_n))$, $(\hat{\Phi}, \hat{\rho}_\mathrm{E}) = (\Phi(t_{n+1}), \rho_\mathrm{E}(t_{n+1}))$, где зависимость от точки пространства не указывается, но предполагается.

Рассмотрим два способа построения аппроксимаций по времени. Аппроксимации по пространству могут быть выполнены одним из стандартных способов и приводятся при описании разностной схемы для решения полной задачи в последующих разделах.

Сначала рассмотрим явно-неявную схему. В этом случае сначала явным образом определяется ρ_E из уравнения

$$\frac{1}{\Delta t}(\hat{\rho}_\mathrm{E} - \rho_\mathrm{E}) + \nabla \cdot (-\sigma \nabla \Phi) = 0, \tag{16}$$

где $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ — шаг по времени. Далее рассчитывается потенциал электрического поля $\hat{\Phi}$ из уравнения

$$\nabla \cdot \left(-\epsilon \nabla \hat{\Phi}\right) = \hat{\rho}_\mathrm{E}. \tag{17}$$

По существу, указанные правила перехода $(\Phi, \rho_{\mathrm{E}}) \to (\hat{\Phi}, \hat{\rho}_{\mathrm{E}})$ являются одной итерацией метода Гаусса—Зейделя для решения уравнений полностью неявной схемы. В это случае переход $(\Phi, \rho_{\mathrm{E}}) \to (\hat{\Phi}, \hat{\rho}_{\mathrm{E}})$ осуществляется путём последовательного решения уравнений

$$\frac{1}{\Delta t}(\hat{\rho}_{\mathrm{E}}^{k+1} - \rho_{\mathrm{E}}) + \nabla \cdot \left(-\sigma \nabla \hat{\Phi}^{k}\right) = 0, \quad \nabla \cdot \left(-\epsilon \nabla \hat{\Phi}^{k+1}\right) = \hat{\rho}_{\mathrm{E}}^{k+1}$$

до сходимости. Здесь $k = 1, 2, \ldots$ — номер итерации, в качестве начального приближения электрического потенциала берётся его значение решения с предыдущего временного шага, $\hat{\Phi}^1 = \Phi$.

Однако, решаемая система уравнений такова, что в итерациях между уравнениями закона сохранения заряда и закона Гаусса нет необходимости. В самом деле, неявная схема может быть записана в виде

$$\nabla \cdot \left(-\epsilon \nabla \hat{\Phi}\right) = \hat{\rho}_{\mathrm{E}}, \quad \frac{1}{\Delta t}(\hat{\rho}_{\mathrm{E}} - \rho_{\mathrm{E}}) + \nabla \cdot \left(-\sigma \nabla \hat{\Phi}\right) = 0. \tag{18}$$

Обратим внимание, что ρ_{E} входит в эти уравнения линейно и ρ_{E} не является аргументом пространственных дифференциальных операторов. Это позволяет выразить $\hat{\rho}_{\mathrm{E}}$ через $\hat{\Phi}$ из первого уравнения и подставить результат во второе. Отсюда получим следующее уравнение относительно $\hat{\Phi}$:

$$\nabla \cdot \left[-(\epsilon + \Delta t \sigma) \nabla \hat{\Phi}\right] = \rho_{\mathrm{E}}. \tag{19}$$

После определения $\hat{\Phi}$ из последнего уравнения, ρ_{E} может быть определено из (18).

Таким образом, даже при использовании полностью неявной схемы, объём вычислений оказывается таким же, как при использовании явно-неявной схемы. Уменьшить его нельзя в силу того, что одно из уравнений модели не содержит временные производные.

В программе были реализованы обе схемы — явно-неявная вида (16), (17) и неявная вида (18), (19). Однако, при использованных в конкретных расчётах значениях физических параметров и параметров дискретизации, полностью неявная схема не показала преимуществ по сравнению с явно-неявной. По этой причине все представленные ниже расчёты были выполнены с использованием первой, явно-неявной схемы.

Для аппроксимации уравнения Аллена—Кана (15) по времени используется явная схема, причём значение $\hat{\Phi}$ потенциала электрического поля считается известным:

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\Delta t}\left(\hat{\phi} - \phi\right) = \epsilon'(\phi)\frac{1}{2}\nabla\hat{\Phi} \cdot \nabla\hat{\Phi} + \frac{\Gamma}{l^2}f'(\phi) + \frac{\Gamma}{2}\Delta\phi + \beta\Gamma l^2 \nabla \cdot \left(\|\nabla\phi\|^2 \nabla\phi\right).$$

Здесь, как и ранее, $\phi = \phi(t)$, $\hat{\phi} = \phi(t + \Delta t)$.

2.2. Аппроксимации по пространству

В настоящем разделе приведены конечномерные аппроксимации полевых уравнений (13), (14), (15). Чтобы не загромождать изложение, сначала формально рассмотрим случай неограниченной расчётной области, в которой введена декартова ортогональная система координат $\mathcal{O}x_1x_2x_3$ с координатами x_α, $\alpha = 1, 2, 3$.

Пусть h_α, $\alpha = 1, 2, 3$ — шаги сетки по соответствующему координатному направлению. Рассмотрим равномерную сетку $\omega_{h,\alpha}$ по оси $\mathcal{O}x_\alpha$ с узлами $x_{\alpha,m} = (m - 1/2)h_\alpha$, $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Будем считать, что узлы $x_{\alpha,m}$ соответствуют центрам расчётных ячеек и нумеруются целыми индексами. Также введём двойственную сетку $\omega^*_{h,\alpha}$ с узлами $x_{\alpha,m+1/2} = (x_{\alpha,m} + x_{\alpha,m+1})/2 = mh_\alpha$, $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. Узлы сетки $\omega^*_{h,\alpha}$ соответствуют граням ячеек и нумеруются полуцелыми индексами.

Определим необходимые в дальнейшем дискретные операторы. Пусть $H(\omega)$ — пространство сеточных функций, заданных на какой-либо из введённых сеток ω. Тогда для любой функции $v \in H(\omega_{h,\alpha})$ и $u \in H(\omega^*_{h,\alpha})$ определим усредняющие

$$(s_\alpha v)_{m-1/2} = \frac{v_m + v_{m-1}}{2}, \quad (s^*_\alpha y)_m = \frac{y_{m+1/2} + y_{m-1/2}}{2}$$

и разностные операторы

$$(\delta_\alpha v)_{m-1/2} = \frac{v_m - v_{m-1}}{h_\alpha}, \quad (\delta^*_\alpha u)_m = \frac{u_{m+1/2} - u_{m-1/2}}{h_\alpha}, \quad (\mathring{\delta}_\alpha v)_m = \frac{v_{m+1} - v_{m-1}}{2h_\alpha}.$$

Заметим, что $\mathring{\delta}_\alpha = \delta^*_\alpha \circ s_\alpha = s^*_\alpha \circ \delta_\alpha$. Очевидно, что

$$\delta_\alpha, s_\alpha : H(\omega_{h,\alpha}) \to H(\omega^*_{h,\alpha}), \quad \delta^*_\alpha, s^*_\alpha : H(\omega^*_{h,\alpha}) \to H(\omega_{h,\alpha}).$$

Теперь рассмотрим пространственный случай. Трёхмерная сетка, соответствующая центрам расчётных ячеек определяется как $\omega_h = \omega_{h,1} \times \omega_{h,2} \times \omega_{h,3}$. Аналогично вводятся сетки $\omega^*_{h,\alpha}$, соответствующие центрам граней, ортогональных направлению $l = 1, 2, 3$. Например, $\omega^{*,1}_h = \omega^*_{h,1} \times \omega_{h,2} \times \omega_{h,3}$ и аналогично для $l = 2, 3$. Целый или полуцелый индекс по направлению x_α буем обозначать i_α.

Определённые выше дискретные операторы усреднения и дифференцирования формально могут быть продолжены на заданные в пространстве сеточные функции, если считать, что они применяются только вдоль соответствующего направления α.

В дальнейшем для обозначения значений сеточных функций в узлах сетки будем использовать безындексные обозначения. Другими словами, далее считаем, что для каждого конкретного набора индексов i_1, i_2 и i_3, $u \coloneqq u_{i_1 i_2 i_3}$, где, в зависимости от области определения сеточной функции, индексы могут принимать целые или полуцелые значения. Также используем обозначения $u_{i_\alpha + k}$ для значений сеточной функции в узле, «сдвинутом» относительно текущего на величину k в направлении i_α; например, $u_{i_2+k} \equiv u_{i_1, i_2+k, i_3}$.

Перейдём непосредственно к описанию конечномерных аппроксимаций. Далее будем относить значения основных переменных ϕ, Φ и ρ_E к центрам расчётных ячеек — то есть к узлам основной сетки ω_h. Как и ранее, для какой-либо сеточной функции f будем использовать обозначение $f = f(t)$, $\hat{f} = f(t + \Delta t)$.

Аппроксимация уравнения (13) имеет вид

$$\frac{1}{\Delta t} (\hat{\rho}_\mathrm{E} - \rho_\mathrm{E}) + \sum_{\alpha=1,2,3} \delta^*_\alpha(-\sigma_{i_\alpha+1/2} \delta_\alpha \Phi) = 0, \tag{20}$$

где величины $\sigma_{i_\alpha+1/2} \in H(\omega^*_{h,\alpha})$, то есть отнесены к граням основной сетки, ортогональным направлению x_α и определены как

$$\frac{2}{\sigma_{i_\alpha+1/2}} = \frac{1}{\sigma(\phi_{i_\alpha})} + \frac{1}{\sigma(\phi_{i_\alpha+1})}.$$

Для аппроксимации уравнения Пуассона (14) используем классическую разностную схему, которая с использованием введённых обозначений имеет вид

$$\sum_{\alpha=1,2,3} \delta^*_\alpha(-\epsilon_{i_\alpha+1/2} \delta_\alpha \hat{\Phi}) = \hat{\rho}_\mathrm{E}, \quad \frac{2}{\epsilon_{i_\alpha+1/2}} = \frac{1}{\epsilon(\phi_{i_\alpha})} + \frac{1}{\epsilon(\phi_{i_\alpha+1})}. \tag{21}$$

Наконец, рассмотрим уравнение Аллена—Кана (15), которое предварительно запишем в виде

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{Q} + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2} \epsilon'_\phi (\nabla \Phi)^2, \tag{22}$$

где

$$\boldsymbol{Q} = \left[\lambda + \lambda_2 \|\nabla \phi\|^2\right] \nabla \phi, \quad \lambda = \frac{\Gamma}{2}, \quad \lambda_2 = \beta \Gamma l^2.$$

Для аппроксимации первого, дивергентного, слагаемого в правой части (22) имеем

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{Q}]_h = \sum_{\alpha=1,2,3} \delta^*_\alpha Q_\alpha.$$

Здесь сеточные функции $Q_\alpha \in H(\omega^*_{h,\alpha})$ отнесены к центрам граней сетки и определены как

$$Q_{l,i_\alpha+1/2} = K_{i_\alpha+1/2} \cdot (\delta_\alpha \phi)_{i_\alpha+1/2}, \quad K_{i_\alpha+1/2} = \lambda + \lambda_2 \left[s_\alpha \sum_{\beta=1,2,3} \left(\mathring{\delta}_\beta \phi \right)^2 \right]_{i_\alpha+1/2}.$$

В результате аппроксимации уравнения (22) имеют вид

$$\frac{1}{m}\frac{1}{\Delta t}\left(\hat{\phi} - \phi\right) = [\nabla \cdot \boldsymbol{Q}]_h + \frac{\Gamma}{l^2} f'(\phi) + \frac{1}{2}\epsilon'_\phi(\phi) \sum_{\alpha=1,2,3} \left(\mathring{\delta}_\alpha \hat{\Phi}\right)^2. \tag{23}$$

2.3. Аппроксимация граничных условий

Приведённые разностные уравнения предполагали, что аппроксимация системы уравнений (14)–(15) выполнена в неограниченной области. При расчёте задачи в ограниченной области будем считать, что она является параллелепипедом Ω, рёбра которого ориентированы вдоль координатных осей декартовой ортогональной системы координат $\mathcal{O}x_1x_2x_3$ и имеют длину L_1, L_2 и L_3, соответственно, $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$.

Будем считать, что основная расчётная сетка, к узлам которой отнесены первичные переменные, представляет собой разбиение Ω на ячейки — параллелепипеды с длиной рёбер h_α, так, что $h_\alpha = L_\alpha / N_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$, N_α — число ячеек вдоль оси x_α.

Как и ранее введём одномерные «основные» сетки $\omega_{h,\alpha}$ с узлами $x_{\alpha,m} = (m - 1/2)\, h_\alpha$, $m = \overline{1, N_\alpha}$ вдоль координатных направлений $\mathcal{O}x_\alpha$ и соответствующие двойственные сетки $\omega^*_{h,\alpha} = \left\{ x_{\alpha,m+1/2} = m h_\alpha,\ m = 0, N_\alpha \right\}$.

Отметим, что узлы сетки $\omega_{h,\alpha}$ соответствуют центрам (одномерных) ячеек и лежат строго внутри области Ω. Узлы сетки $\omega^*_{h,\alpha}$ соответствуют граням ячеек; при $m = 0, N_\alpha$ принадлежат границам $x_\alpha = 0$ и $x_\alpha = L_\alpha$ области Ω.

Трёхмерные сетки, используемые для аппроксимации уравнений в Ω могут быть построены аналогично рассмотренному ранее случаю. Например, основная сетка, состоящая из центров расчётных ячеек, определена как $\omega_h = \omega_{h,1} \times \omega_{h,2} \times \omega_{h,3}$, а сетка центров граней, ортогональных направлению оси $Ox = Ox_1$ задаётся как $\omega^*_{h,\alpha} = \omega^*_{h,1} \times \omega_{h,2} \times \omega_{h,3}$.

Заметим, что участвующие в записи разностных уравнений (21), (20) и (23) дискретные операторы имеют область определения (шаблон), выходящий за границы области. Поэтому будем считать, что к границе области примыкают слои фиктивных ячеек, которым сопоставлены индексы со значениями меньшими $1/2$ или большими, чем $N_\alpha + 1/2$. Уравнения, которые определяют значения решения в них, соответствуют аппроксимациям граничных условий на границе области.

Так, например, если на границе области, ортогональной координатному направлению Ox_α для какой-либо функции u задано граничное условия типа Дирихле вида $u = g$, где g — заданная функция, то соответствующее уравнение имеет вид $(s_\alpha u)_{i_\alpha+1/2} = g$ при $i_\alpha = 0$ или $i_\alpha = N_\alpha$. Аналогично, для граничного условия Неймана вида $-\epsilon \partial u / \partial \boldsymbol{n} = g$, соответствующее дискретное уравнение имеет вид $\gamma \epsilon_{i_\alpha+1/2} (\delta_\alpha u)_{i_\alpha+1/2} = g$, где $\gamma_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{e}_\alpha$ — единичный орт оси $\mathcal{O}x_\alpha$, $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной внешней нормали к границе области, $i_\alpha = 0$ или $i_\alpha = N_\alpha$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В настоящем разделе представлены результаты моделирования с использованием описанной выше модели. Рассматриваются тесты для однородной, макроскопически неоднородной и микроскопически неоднородной среды. Основная цель моделирования — исследование вариативности в развитии сценариев канала пробоя и качественное исследование возможностей модели. В связи с этим представленные расчёты являются пространственно двумерными, а параметры сред имеют модельные значения.

3.1. Однородная среда

В настоящем разделе рассматривается ряд постановок, демонстрирующих особенности развития канала пробоя в однородной среде. Рассматриваются две серии расчётов. В первой демонстрируется зависимость характера развития канала пробоя от начального распределения повреждённого материала. Вторая серия расчётов более детально демонстрирует особенности развития канала пробоя, в частности, характер распределения электрического заряда.

Во всех случаях задача рассматривается в пространственно двумерной постановке. Расчётная область является квадратом $\Omega = [0, A] \times [0, A]$ со стороной $A = 100$. Расчётная сетка имеет $N_x = N_y = N = 200$ ячеек вдоль каждой стороны квадрата, что соответствует шагу сетки $h = 0.5$. Параметр l, задающий радиус диффузного канала пробоя, равен 2 (то есть, 4-м шагам сетки), коэффициент подвижности $m = 10^{-3}$, коэффициент перед p-лапласианом $\beta = 0.5$.

На верхней и нижней границе Ω заданы постоянные значения электрического потенциала $\Phi^+ = 80$ и $\Phi^- = 0$, соответственно. На боковых границах расчётной области задавались однородные граничные условия Неймана.

Значение фазового поля на боковых границах Ω задавалось постоянным, соответствующим неповреждённой среде, $\phi = 1$. На верхней и нижней границах Ω для фазового поля задавались однородные граничные условия Неймана.

Материал, в котором происходит пробой, является однородным. Его диэлектрическая проницаемость в неповреждённом состоянии $\epsilon_\mathrm{d} = 4$. Электропроводность неповреждённой среды $\sigma_\mathrm{d} = 10^{-4}$, коэффициент $\delta_\sigma = 10^{-3}$. Соответственно электропроводность полностью повреждённого материала $\sigma_\mathrm{d}/\delta_\sigma = 0.1$. Удельная энергия каналообразования $\Gamma = 1.6928$.

Шаг по времени задавался как $\Delta t = 10^{-3} \cdot \Delta t_\mathrm{max}$, где $\Delta t_\mathrm{max} = 2 \cdot h^2/(\Gamma m)$.

Объёмная плотность заряда в начальный момент времени $\rho_\mathrm{E} = 0$.

Не указанные выше параметры модели, конкретно, значение параметра δ_ϵ и начальное распределение параметра порядка зависят от варианта расчёта и приведены ниже.

Серия расчётов 1. В описанных ниже в настоящем разделе расчётах значение параметра $\delta_\epsilon = 10^{-3}$. Соответственно, диэлектрическая проницаемость полностью повреждённого материала $\epsilon_\mathrm{d}/\delta_\epsilon = 4 \cdot 10^3$.

Распределение фазового поля соответствует полностью неповреждённой среде всюду в расчётной области, за исключением столбика ячеек, примыкающих к верхней границе области в её центре — в этих ячейках сетки $\phi = 0$. Рассматривается три варианта длины начальной зоны повреждённости: $L_1 = 5$ («короткая»), $L_2 = 11$ («средняя») и $L_3 = 15$ («длинная»). Для каждого варианта задания начального условия расчёт продолжался до тех пор, пока канал пробоя не «замыкался» на нижнюю границу области.

Результаты моделирования приведены на рис. 1. Первое, что обращает на себя внимание, это ветвление канала пробоя. Факт ветвления не задавался априорно и является следствием решения соответствующего уравнения Аллена—Кана. Вторым важным моментом является существенно различная скорость развития канала пробоя и, как следствие, время, необходимое для его достижения нижней границы области. Это можно объяснить следующим образом. Основной «движущей силой», вызывающей рост канала пробоя, является напряжённость электрического поля в окрестности кончике канала пробоя. Обратим внимание на то, что диэлектрическая проницаемость внутри повреждённой зоны сравнительно велика (она в $1/\delta_\epsilon$ раз больше, чем диэлектрическая проницаемость неповреждённой зоны). По этой причине градиент электрического потенциала вдоль канала пробоя в $\sim \delta_\epsilon$ раз меньше, чем в его окрестности; потенциал поля практически постоянен вдоль осевой линии канала пробоя, см. рис. 3. По этой причине напряжённость электрического поля в окрестности кончика более длинной начальной зоны поврежденности больше, чем в окрестности более короткой. Это вызывает более быстрый рост более длинного канала, особенно на начальной стадии развития процесса.

Обратим также внимание, что в случае короткой начальной зоны поврежденности наблюдается эффект вторичного (повторного) ветвления канала пробоя. При этом после второго ветвления развивается и «доходит» до нижней границы области лишь внешние «ветви».

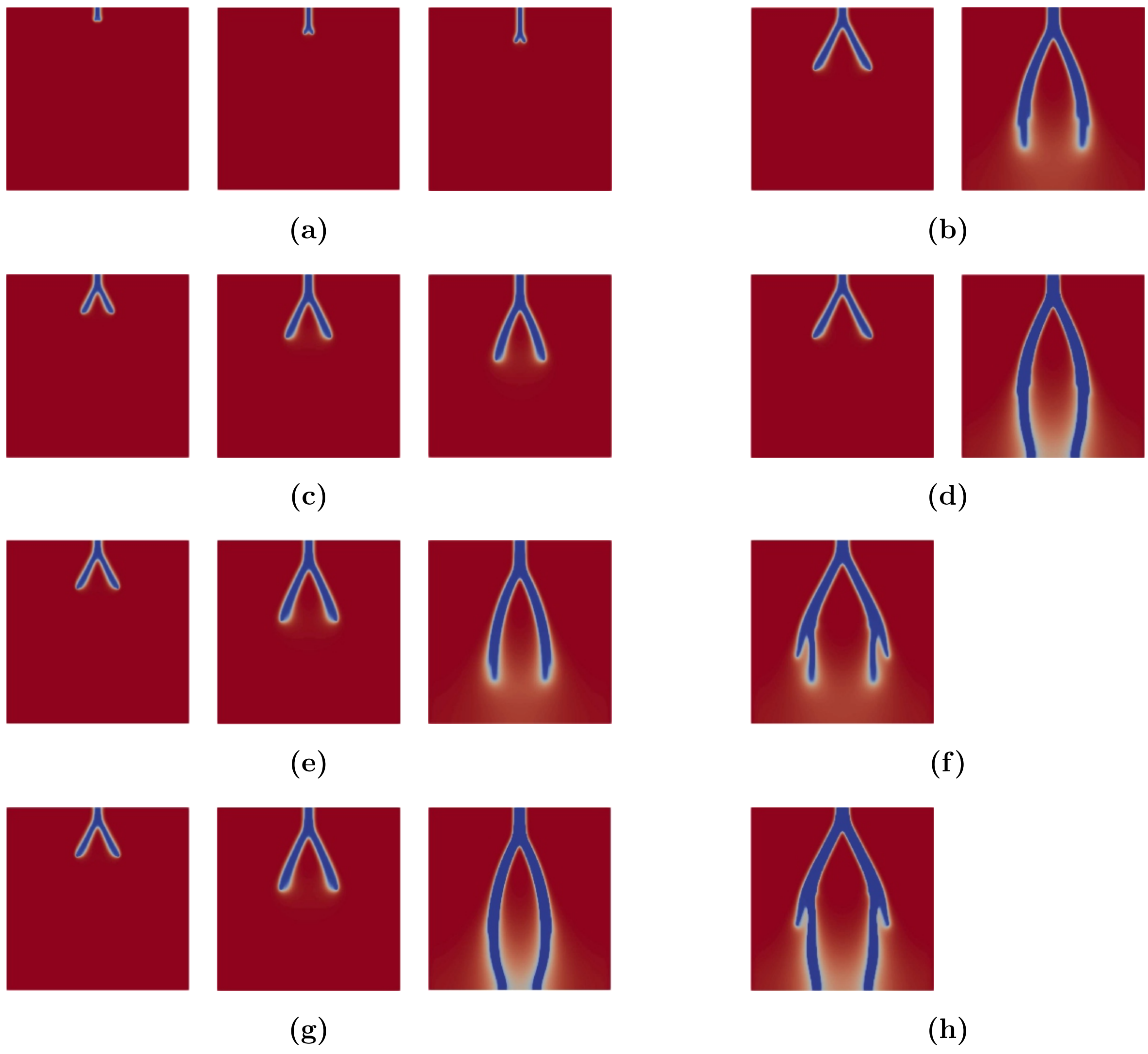


Рис. 1. Результаты расчётов для начальной зоны поврежденности различной длины. Левый столбец «короткая», средний — «средняя», правый — «длинная» для (a) $t = 400$, (c) $t = 2000$, (e) $t = 2440$, (g) $t = 2480$; Левый столбец «короткая», правый — «средняя» для (b) $t = 3000$, (d) $t = 3040$, (f) $t = 4240$, (h) $t = 4280$

Серия расчётов 2. В этом расчёте исследуется динамики развития канала пробоя с учётом перераспределения заряда. Постановка в целом сходна с рассмотренной выше за исключением того, что параметр $\delta_\epsilon = 0.1$. Соответственно диэлектрическая проницаемость полностью повреждённого материала $\epsilon_\mathrm{d}/\delta_\epsilon = 40$.

В начальный момент времени фазовое поле равняется единице всюду, за исключением столбика ячеек, примыкающих к верхней границе области в её центре — в этих ячейках сетки $\phi = 0$. Длина начальной зоны поврежденности в рассматриваемой постановке $L_2 = 11$. Расчёт продолжался до тех пор, пока канал пробоя не «замыкался» на нижнюю границу области.

Результаты моделирования приведены на рис. 2. Можно заметить, что в отличии от предыдущей постановки (рис. 1) в текущей постановке ветвления канала пробоя не происходит. Это связано с увеличением значения δ_ϵ, которое для предыдущей серии расчётов (рис. 1) имело значение $\delta_\epsilon = 10^{-3}$, а для текущего расчёта — $\delta_\epsilon = 0.1$. Другими словами, контраст значений диэлектрической проницаемости для повреждённой и неповреждённой среды здесь в 100 раз меньше, чем в предыдущей постановке. Это приводит к уменьшения максимального значения напряжённости в окрестности кончика канала пробоя при равной длине канала.

Эволюция фазового поля приведена на рис. 2 вверху. Соответствующее распределение электрического заряда — на том же рисунке внизу. Можно заметить, что заряд проникает во всю повреждённую область. В основном он распределён в нижней части канала, наиболее приближенной к нижней границе расчётной области, что соответствует общим представлениям о распределении электрического заряда в помещённом в электрическое поле проводнике (которым, с физической точки зрения, является канал пробоя). Детальный анализ результатов расчётов показывает, что внутри повреждённой области, образовавшейся в ходе развития канала пробоя, значение фазового поля близко к 0, но не достигает своего минимального значения и остаётся малой, но положительной величиной. Следовательно, в этой области электрическая проводимость не достигает своего максимального значения. Поэтому проводимость вновь образовавшейся части канала пробоя меньше, чем изначально повреждённой зоны, в которой $\phi \equiv 0$. По этой причине в окрестности кончика начальной зоны поврежденности можно наблюдать «запирание» электрического заряда. Расчёт на бо́льшие времена показывает, что при уменьшении параметра m с течением времени этот заряд релаксирует — чем медленнее развивается канал пробоя, тем больше времени есть у заряда, чтобы перераспределиться.

Наконец, на рис. 3 показано одномерное распределение фазового поля, диэлектрической проницаемости, электрической проводимости и электрического потенциала вдоль оси канала пробоя. Прежде всего обратим внимание на распределение фазового поля (синяя линия на рис. 3 слева). Видно, что внутри канала пробоя (отрезок оси $\mathcal{O}\xi$ от 0 и до $\xi_2 \approx 70$), его значение близко к 0 (среда полностью повреждена) и равна нулю в области, соответствующей начальному распределению канала пробоя (от точки 0 до точки $\xi_1 \approx 10$, см. рисунок). Во вновь образовавшейся части канала пробоя (от ξ_1 до ξ_2) значение фазового поля немного больше нуля (среда повреждена практически полностью, но не до конца). Это связано с тем, что вблизи полностью повреждённого состояния, при $\phi \to 0$, скорость изменения фазового поля существенно падает в силу того, что в соответствии с (9) и (10) справедливо $\epsilon'(\phi) \to 0$ — в результате первый член в правой части (15) сравнительно мал. Поэтому значение пространственной производной ϕ в окрестности точки ξ_1 имеет скачок, что приводит к соответствующему скачку электропроводности и, как следствие, появлению «избыточного» заряда в ξ_1 (чёрная и красная линия на рис. 3 слева). Вместе с тем в соответствии с допущениями модели, значение диэлектрической проницаемости в канале пробоя сравнительно велико (фиолетовая линия на рис. 3 справа), а градиент электрического поля в области канала пробоя существенно меньше, чем в неповреждённой части расчётной области. В пределе бесконечно большого значения ϵ_{br} диэлектрической проницаемости повреждённой среды, значение электрического поля в интервале от 0 до ξ_2 будет стремиться к нулю. Эти результаты прежде всего указывают направление возможного уточнения модели: для того, чтобы избежать эффекта «запирания» заряда в окрестности точки ξ_1, необходима модификация зависимости (2).

3.2. Макроскопически неоднородная среда

В настоящем разделе приведены примеры расчётов, демонстрирующих качественное поведение процесса развития канала электрического пробоя в рамках описанной математической

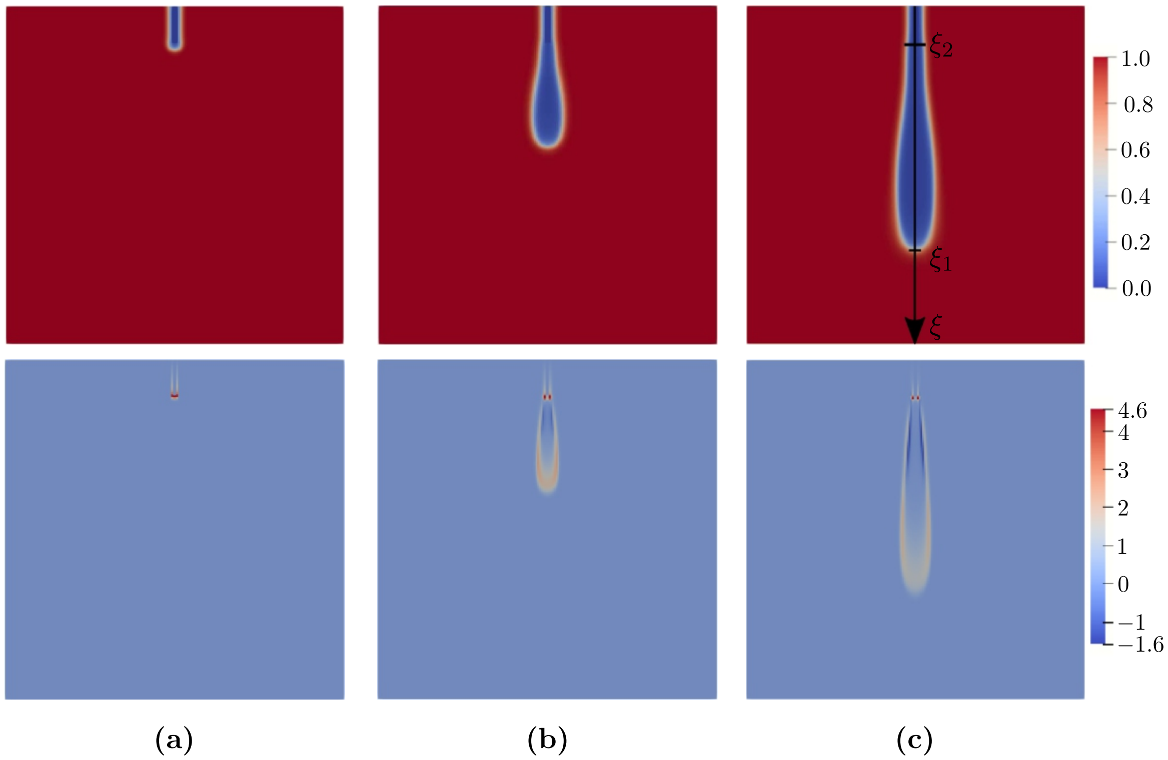


Рис. 2. Эволюция канала пробоя при $\delta_\epsilon = 0.1$ для (a) $t = 400$, (b) $t = 4000$, (c) $t = 5680$. Вверху — распределение фазового поля ϕ, внизу — распределение заряда ρ_{E}

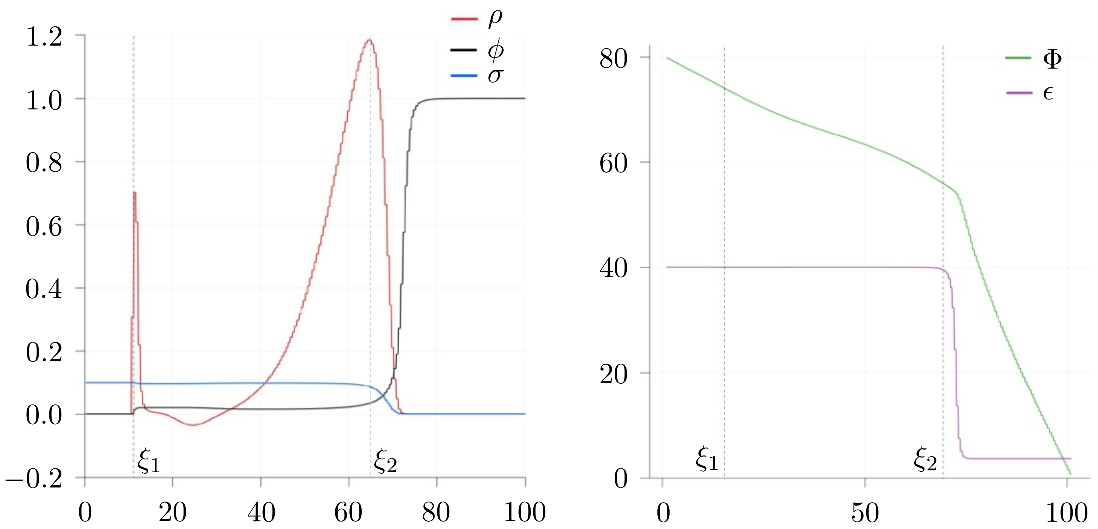


Рис. 3. Распределение полей ρ, ϕ, σ, Φ, ϵ вдоль оси симметрии образца (вариант расчёта с $\delta_\epsilon = 0.1$ при $t = 5680$ соответствует рис. 2(c). Абсцисса направлена от верхней границы области к нижней — вдоль направления роста канала пробоя

модели без учёта динамики электрического заряда.

Физическая постановка рассматриваемой задачи имеет следующий вид. Рассматривается двумерная область, моделирующая среду между обкладками конденсатора, к которым приложена заданная разность потенциалов. Среда является неоднородной и состоит из однородного материала (вмещающей среды, «матрицы»), внутри размещены включения, обладающие различными термодинамическими свойствами: диэлектрической проницаемостью ϵ_{d} для неповреждённого состояния материала и удельной энергией каналообразования Γ.

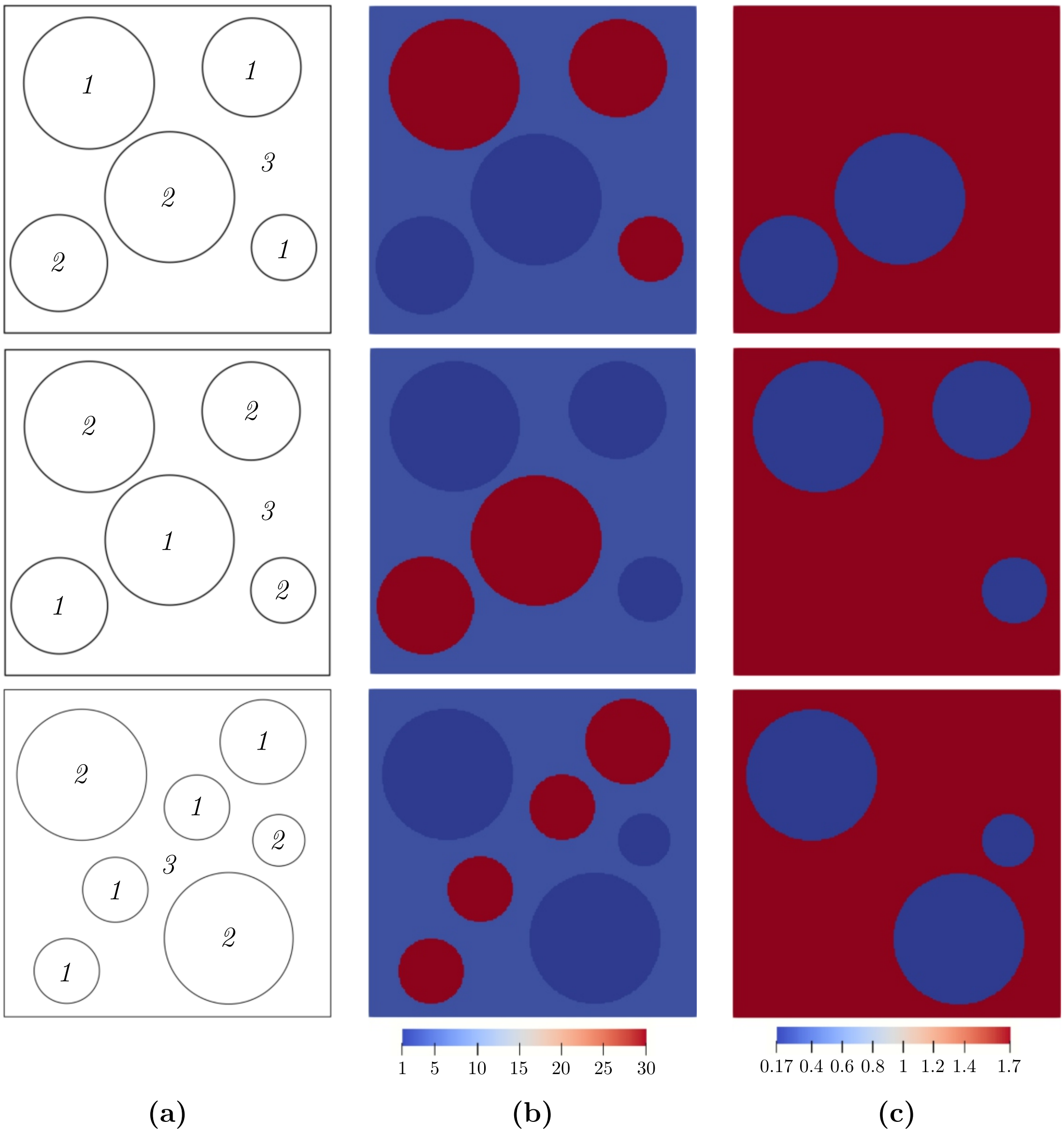


Рис. 4. Варианты по строкам 1, 2 и 3: (a) — геометрия включений, (b) — распределение ϵ_{d}, (c) — распределение Γ

Рассматриваются два типа материала включений, которые далее условно называются «воздухом» и «металлом». Термодинамические свойства включений в зависимости от образующего их материала представлены в таблице.

Не приведённые в ней параметры модели заданы как $\delta_\epsilon = 10^{-3}$, $l = 2$, коэффициент подвижности $m = 10^{-3}$, коэффициент перед p-лапласианом $\beta = 0.5$.

Во всех случаях расчётная область является квадратом $\Omega = [0, A] \times [0, A]$ со стороной $A = 100$. Расчётная сетка имеет $N_x = N_y = N = 200$ ячеек вдоль каждой стороны квадрата, что соответствует шагу сетки $h = 0.5$. Соответственно, параметр l, задающий радиус диффузного канала пробоя, равен 4-м шагам сетки. Временной шаг задавался как $\Delta t = 10^{-3} \cdot \Delta t_{\max}$, где $\Delta t_{\max} = 2 \cdot h^2/(\Gamma m)$.

На верхней и нижней границе Ω заданы постоянные значения электрического потенциала $\Phi^+ = 80$ и $\Phi^- = 0$, соответственно. На вертикальных границах расчётной области задава-

Параметры материалов в неоднородной среде

Материал	ϵ_{d}	Γ
«матрица»	3	1.6928
«металл»	$3 \cdot 10^1$	1.6928
«воздух»	1	$1.628 \cdot 10^{-1}$

лись однородные граничные условия Неймана.

Значение фазового поля на боковых границах Ω задавалось постоянным, соответствующим неповреждённой среде, $\phi = 1$. На верхней и нижней границах Ω для фазового поля задавались однородные граничные условия Неймана. Электропроводность неповреждённой среды $\sigma_{\mathrm{d}} = 0$, начальное распределение заряда $\rho_{\mathrm{E}}(t = 0) \equiv 0$. Начальные условия для фазового поля зависят от варианта расчёта и рассмотрены ниже.

Рассмотрено три варианта расчёта, которые отличаются геометрической структурой среды, то есть числом включений, способом их размещения и их размерами, см. рис. 3, строки 1, 2 и 3 соответственно.

Вариант 1. Расчёт соответствует геометрической модели среды, представленной на рис. 4 строка 1. Значения параметров материалов приведены в таблице.

Начальные условия для параметра порядка имитируют наличие в расчётной области «зародыша» канала пробоя, примыкающего к центру её верхней границы. Изначально повреждённая зона имеет вид столбика ячеек длиной 10 шагов сетки. В этих ячейках значения фазового поля задавалось как $\phi = 0$, во всех остальных ячейках расчётной области $\phi = 1 - 10^{-3}$.

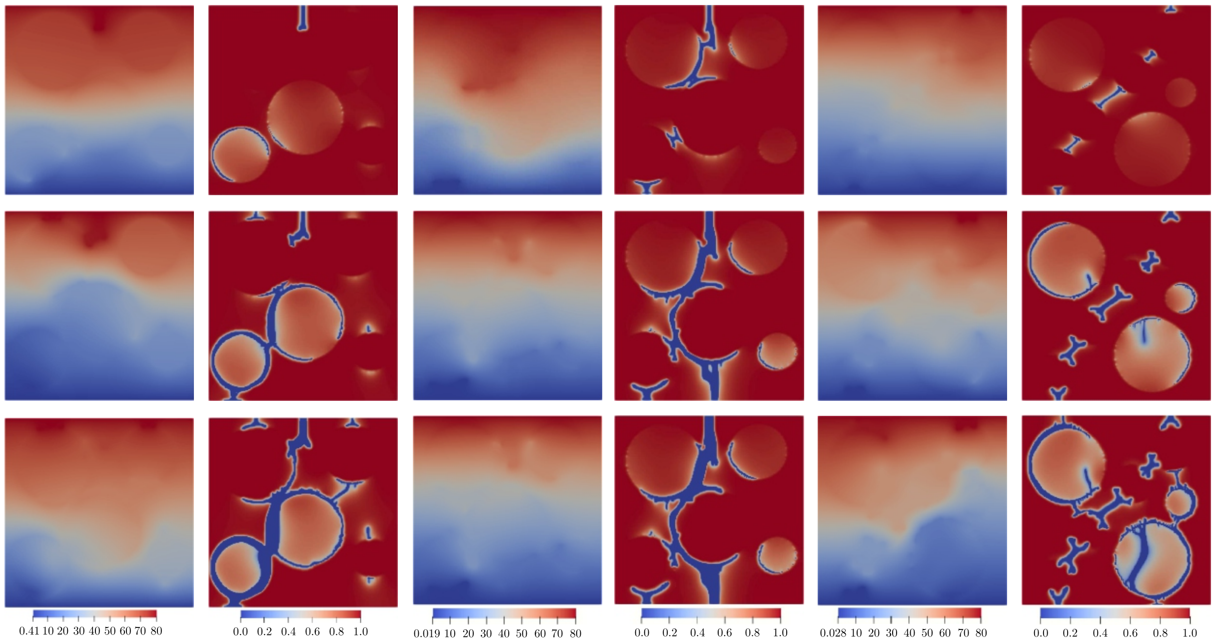
Результаты моделирования в разные моменты времени приведены на рис. 5(a). Видно, что с течением времени начинается, во-первых, развитие изначально заданного канала пробоя, и, во-вторых, поверхностного пробоя на границе между областями, заполненными «воздухом» и «матрицей» (отметим, что именно для этой пары из находящихся в контакте материалов скачок диэлектрической проницаемости имеет наибольшее значение). Соответствующие распределения электрического потенциала и параметра порядка приведены на рис. 5(a) при $t = 400$.

Далее, возникновение зон повреждённого материала приводит к существенному увеличению значения диэлектрической проницаемости в них (в рассматриваемом случае — в 1000 раз по сравнению с локальным неповреждённым значением). В результате появляются локализованные области со сравнительно большой напряжённостью электрического поля. Это, в свою очередь, приводит к дальнейшему развитию зон повреждённого материала и образованию поверхностных пробоев на границе между «матрицей» и «металлическими» включениями. Одновременно с этим в среде развиваются частичные (то есть развивающиеся внутри объёма материала, а не с его границы) пробои. Эти эффекты можно наблюдать на рис. 5(a) при $t = 600$.

Наконец, развитие этих процессов приводит к «замыканию» горизонтальных границ области связной областью, занятой повреждённой средой, см. рис. 5(a) при $t = 720$. С этого момента времени можно считать, что среда между обкладками полностью деградировала, то есть потеряла свои электроизоляционные свойства.

Вариант 2. Расчёт соответствует геометрической модели среды, представленной на рис. 4, строка 2. Значения параметров материалов приведены в таблице. В рассматриваемом варианте расчёта включения расположены таким же образом, как и в предыдущем — однако всюду свойства материалов включений переставлены местами (если в предыдущем расчёте включение было заполнено «воздухом», то теперь оно заполнено «металлом» — и наоборот). Начальные условия для фазового поля задавались так же, как в варианте 1.

В этом случае картина развития области деградации свойств среды качественно меняется. На начальном этапа развития процесса происходит прямолинейное развитие начальной зоны поврежденности в матрице, см. рис. 5(b) при $t = 400$. В дальнейшем развитие пробоя проходит



(a) **(b)** **(c)**

Рис. 5. Варианты 1 (a), 2 (b) и 3 (c). Распределение электрического потенциала (слева) и фазового поля (справа) в моменты времени $t = 400, 600, 720$

по границам между «матрицей» и включениями (причём заполненными как «воздухом», так и «металлом»), см. рис. 5(b) при $t = 600$ и $t = 720$. За счёт того, что на первых стадиях развития канала пробоя он образуется между распределёнными в пространстве включениями, практически сразу после начала развития процесса образуется связная область повреждённой среды, которая граничит с обеими обкладками. В результате полная деградация среды происходит сравнительно быстро.

Вариант 3. Рассматриваемый вариант расчёта отличается от предыдущих числом и положением включений а также начальным условием для фазового поля. В отличие от предыдущих расчётов, «металлические» включения расположены сравнительно близко друг от друга и образуют достаточно плотную последовательность. Соответствующее распределение свойств показано на рис. 4, строка 3. Помимо этого, область изначально повреждённого материала отсутствует.

Результаты расчётов приведены на рис. 5(c). Как и в предыдущем варианте расчёта, на начальных этапах зоны поврежденности имеют вид узких каналов, соединяющих «металлические» включения. Возникновения каналов в этих местах связано прежде всего с большими значениями напряжённости электрического поля, см. рис. 5(c) при $t = 520$. Далее начинают развиваться поверхностные пробои, которые уже наблюдались в предыдущих расчётах — они распространяются вдоль границ между «матрицей» и включениями, заполненными «воздухом». На поздних стадиях развития процесса наблюдается ещё один эффект — развитие каналов пробоя внутри заполненных «воздухом» включений, см. рис. 5(c) при $t = 840$ и $t = 1000$. Эти внутренние каналы пробоя развиваются одновременно с граничными, расположенными в том же включении.

3.3. Микроскопически неоднородная среда

В настоящем разделе рассмотрен пример расчёта, в котором пробой развивается в «микронеоднородной» среде. Считается, что неповреждённая среда является однородной, однако начальное распределение фазового поля является случайной величиной, принимающей значения в заданном диапазоне. При этом характерное изменение значений фазового поля происходит на пространственном масштабе порядка шага расчётной сетки. Такая ситуация соответствует сценарию, когда развитие пробоя моделируется начиная с заданного начального состояния, в котором присутствуют множество частичных пробоев. Интерес представляет развитие зон повреждаемости в пространственном масштабе всего материала, в частности, формирование системы множественных каналов пробоя. Факт формирования такой системы каналов при моделировании говорит о качественной корректности используемой модели (реализация такого сценария вероятна с точки зрения аналогии между диффузной моделью канала пробоя и диффузной моделью развития трещин в упругой среде).

Снова рассмотрим расчётную область $\Omega = [0, A] \times [0, A]$ в виде квадрата со стороной $A = 100$. Диэлектрическая проницаемость для неповреждённого материала $\epsilon_{\mathrm{d}} = 3$, коэффициент $\delta_\epsilon = 10^{-3}$. Соответственно, диэлектрическая проницаемость полностью повреждённого материала имеет значение $\epsilon_{\mathrm{br}} = \epsilon_{\mathrm{d}}/\delta_\epsilon = 3 \cdot 10^3$. Параметр l, задающий эффективный радиус диффузного канала пробоя, равен 2, коэффициент подвижности $m = 10^{-3}$, коэффициент перед p-лапласианом $\beta = 0.5$. Электропроводность неповреждённой среды $\sigma_{\mathrm{d}} = 0$, начальное распределение заряда $\rho_{\mathrm{E}}(t = 0) \equiv 0$. Значение удельной энергии каналообразования $\Gamma = 1.6928$.

Расчётная сетка имеет $N_x = N_y = N = 200$ ячеек вдоль каждой стороны квадрата, что соответствует шагу сетки $h = 0.5$. Соответственно, для эффективного радиуса канала имеем $l = 4h$. Временной шаг задавался как $\Delta t = 10^{-3} \cdot \Delta t_{\max}$, где $\Delta t_{\max} = 2 \cdot h^2/(\Gamma m)$.

На верхней и нижней границе Ω заданы постоянные значения электрического потенциала $\Phi^+ = 80$ и $\Phi^- = 0$, соответственно. На боковых границах расчётной области задавались однородные граничные условия Неймана.

Значение фазового поля на боковых границах Ω задавалось постоянным, соответствующим неповреждённой среде, $\phi = 1$. На верхней и нижней границах Ω для фазового поля задавались однородные граничные условия Неймана.

В начальный момент времени значение фазового поля в расчётной ячейке является случайной величиной, равномерно распределённой на отрезке от 0.5 до 1. Таким образом, среднее по области значение фазового поля в ячейке равняется 0.75.

Результаты расчётов в разные моменты времени приведён на рис. 6. Расчёт проводился до того момента времени, когда образующаяся система каналов пробоя становится связной, соединяющей верхнюю и нижнюю границы расчётной области (этот момент времени оценивался визуально). Начиная с этого момент времени можно считать, что среда в целом теряет свои изоляционные свойства.

В верхнем ряду рисунков приведено распределение фазового поля в последовательные моменты времени. Отчётливо видно постепенное образование системы каналов, ориентированных вдоль вертикального направления. Отметим, что каналы образуются во всём объёме области одновременно. Более отчётливо процесс формирования системы каналов иллюстрирует следующая серия рис. 6(a)–6(d), где маркерами показаны положения 7000 ячеек с минимальными на данный момент времени значениями фазового поля ϕ (соответствующие диапазоны значений фазового поля приведены в подписях).

На рис. 6(e)–6(h) приведены гистограммы распределения значений фазового поля в ячейках сетки; высота столбика гистограммы равна числу ячеек сетки расчётной области, значения в которых попадают в заданный диапазон. Равномерное распределение начального значения фазового поля явно отражено на рис. 6(e): столбики на гистограмме имеют примерно одинаковую высоту, значения фазового поля находятся в интервале от 0.5 до 1, что соответствует заданным характеристикам начального распределения. По мере развития процесса пробоя характер распределения значений фазового поля существенно меняется. Во-первых, начинают появляться ячейки, значения фазового поля в которых становится меньше 0.5 и монотонно убывают. Этим ячейкам соответствует самый левый столбик на гистограммах. Во вторых,

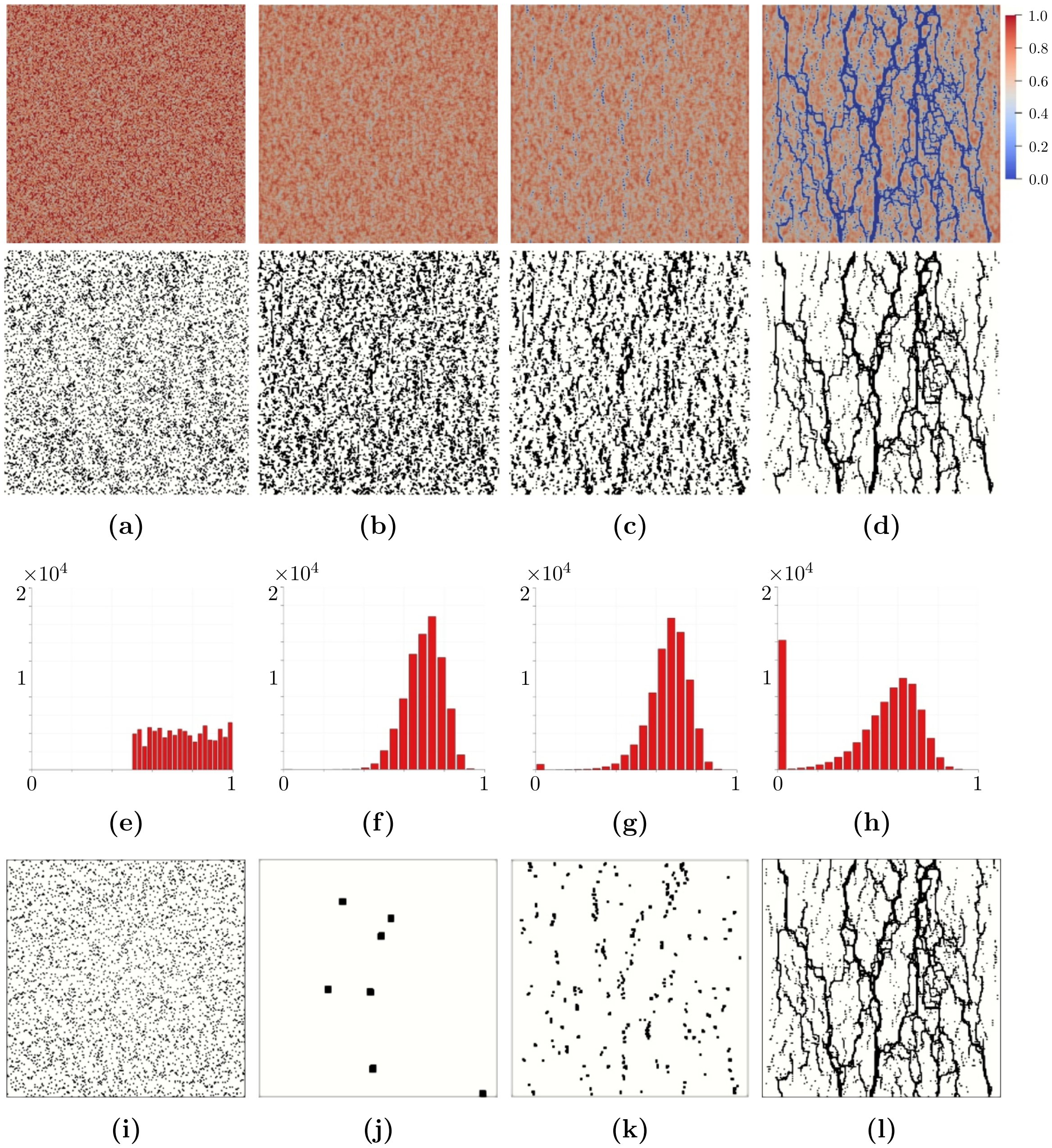


Рис. 6. Развитие пробоя из случайного начального распределения фазового поля в моменты времени $t = 0, 80, 120, 160$ по столбцам для (a) $\phi \in [0.5, 0.6]$, (b) $\phi \in [0, 0.65]$, (c) $\phi \in [0, 0.6]$, (d) $\phi \in [0, 0.05]$, (i) $\phi \in [0.5, 0.55]$, (j) $\phi \in [0, 0.1]$, (k) $\phi \in [0, 0.1]$, (l) $\phi \in [0, 0.1]$. Маркеры на рис. 6(j) и 6(k) увеличены

по мере развития процесса, самый левый столбик распределения, соответствующий значениям $\phi \sim 0$, становится все выше, что означает увеличение количества полностью повреждённых ячеек. Одновременно с этим, количество ячеек, в которых среда полностью не повреждена, уменьшается. Пик распределения в ходе процесса монотонно смещается справа налево, в область $\phi = 0$. Появление отчётливого максимума распределения в окрестности $\phi = 0$ соответствует моменту времени, когда наличие системы каналов начинает явно различаться в верхнем ряду рисунков (и, аналогично, серии рис. 6(e)–6(h) и 6(i)–6(l)). На серии рис. 6(i)–6(l) маркерами показаны ячейки сетки, которые соответствуют самому левому столбику гистограммы в соответствующий момент времени. Маркеры на этих рисунках относятся непосредственно к той части области, которую можно считать каналом пробоя, то есть полностью (или, в ранние моменты времени — максимально) повреждённой среде.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлены результаты численного исследования математической модели типа диффузной границы для развития канала электрического пробоя. В соответствии с общими идеями моделей этого типа, канал пробоя определяется как зона повреждённой среды, эволюция которой описывается с помощью заданной в пространстве гладкой функции — фазового поля (или, что в рассматриваемом случае одно и то же, параметра порядка). Свойства среды зависят от степени её поврежденности. В свою очередь поврежденность увеличивается в тех областях пространства, где значения напряжённости электрического поля сравнительно велики. Модель включает в себя группу уравнений Максвелла в квази(электро)стационарном приближении, уравнение баланса электрического заряда и уравнение Аллена-Кана, непосредственно описывающего эволюцию фазового поля.

Рассмотренная математическая модель является сильно связанной системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Развитие канала пробоя обуславливается сложным процессом взаимодействия электрического поля, динамики электрического заряда в условиях изменяющихся, по мере развития канала пробоя, электрофизических свойств среды.

Результаты моделирования показывают, что модель развития канала электрического пробоя рассмотренного типа позволяет качественно воспроизводить известный характер развития каналов пробоя (зон повреждаемости), описанный в современной литературе по физике пробоя: традиционный нитевидный пробой, внутренний пробой в матрице и включениях неоднородной среды, поверхностный пробой на границах включений и в окрестности границ расчётной области. В неоднородной среде развитие канала пробоя носит комплексный характер — в приведённых примерах одновременно присутствуют различные виды пробоя, развивающиеся параллельно или последовательно во времени.

Один из основных выводов, который можно сделать из представленных результатов расчётов заключается в том, что в случае неоднородной среды основной сценарий образования канала пробоя — это не его монотонное развитие от границ области вдоль направления электрического поля, — а слияние каналов множественных внутренних пробоев, образование которых начинается одновременно. Такой сценарий принципиально не реализуем в однородной среде, в которой канал развивается планомерно, стартуя от мест расположения локальных зон большой напряжённости электрического поля. В силу этого анализ развития канала пробоя даже в микронеоднородной среде, которая по формальным признакам допускает введение полей усреднённых, гомогенизированных, электрофизических свойств, принципиально невозможен без прямого разрешения микроструктуры среды.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа Е. В. Зипуновой и Е. Б. Савенкова (разделы 1, 2 и 4) выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00203). Работа А.А. Кулешова (разделы 3 и 5) выполнена при финансовой поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, соглашение с Министерством науки и высшего образования РФ № 075-15-2022-283. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воробьёв Г. А., Похолков Ю. П., Королев Ю. Д., Меркулов В. И.* Физика диэлектриков (область сильных полей). Томск: Изд-во ТПУ, 2011.
2. *Pitike K. C., Hong W.* Phase-field model for dielectric breakdown in solids // J. Appl. Phys. 2014. V. 115, N 4. Article 044101; DOI: 10.1063/1.4862929
3. *Ambati M., Gerasimov T., De Lorenzis L.* A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation // Comput. Mech. 2015. V. 55, N 2. P. 383–405; DOI: 10.1007/s00466-014-1109-y
4. *Zipunova E., Savenkov E.* Phase field model for electrically induced damage using microforce theory // Math. Mech. Solids. 2021. V. 27, N 6; DOI: 10.1177/10812865211052078
5. *Fried E., Gurtin M. E.* Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter // Physica. 1993. V. 68, N 3. P. 326–343; DOI: 10.1016/0167-2789(93)90128-N
6. *Gurtin M. E.* Generalized Ginzburg—Landau and Cahn—Hilliard equations based on a microforce balance // Phisica D. 1996. V. 92, N 3. P. 178–192; DOI: 10.1016/0167-2789(95)00173-5
7. *Zipunova E., Savenkov E.* On the Diffuse Interface Models for High Codimension Dispersed Inclusions // Mathematics. 2021. V. 9, N 18; DOI: 10.3390/math9182206
8. *Sargado J. M., Keilegavlen E., Berre I., Nordbotten J. M.* High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions // J. Mech. Phys. Solids. 2018. V. 111. P. 458–489; DOI: 10.1016/j.jmps.2017.10.015

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 51-72:517.9:538.91

NUMERICAL STUDIES OF THE PHASE FIELD MODEL DESCRIBING ELECTRIC BREAKDOWN IN A HETEROGENEOUS MEDIUM

© 2024 **E. V. Zipunova[a], A. A. Kuleshov[b], E. B. Savenkov[c]**

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia

E-mails: [a]zipunova@keldysh.ru, [b]andrew_kuleshov@mail.ru, [c]savenkov@keldysh.ru

Received 28.11.2023, revised 03.02.2024, accepted 03.07.2024

Abstract. This paper presents the results of numerical studies of the phase field model for the development of an electrical breakdown path. The model consists of Maxwell's equations in the quasi(electro)stationary approximation, the electric charge balance equation, and the Allen—Cahn equation describing the phase field evolution. Several problem settings concerning the development of a breakdown path in homogeneous as well as macro- and microheterogeneous media are considered.

Keywords: diffuse interface model, phase field, order parameter, electric breakdown.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.306

REFERENCES

1. G. A. Vorob'ev, Yu. P. Pokholkov, Yu. D. Korolev, and V. I. Merkulov, *Physics of Dielectrics (the Region of Strong Fields)* (Tomsk. Politekh. Univ., Tomsk, 2011) [in Russian].
2. K. C. Pitike and W. Hong, "Phase-field model for dielectric breakdown in solids," J. Appl. Phys. **115** (4), 044101 (2014). https://doi.org/10.1063/1.4862929
3. M. Ambati, T. Gerasimov, and L. De Lorenzis, "A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation," Comput. Mech. **55** (2), 383–405 (2015). https://doi.org/10.1007/s00466-014-1109-y
4. E. Zipunova and E. Savenkov, "Phase field model for electrically induced damage using microforce theory," Math. Mech. Solids **27** (6), (2021). https://doi.org/10.1177/10812865211052078
5. E. Fried and M. E. Gurtin, "Continuum theory of thermally induced phase transitions based on an order parameter," Physica **68** (3), 326–343 (1993). https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90128-N
6. M. E. Gurtin, "Generalized Ginzburg—Landau and Cahn—Hilliard equations based on a microforce balance," Physica D **92** (3), 178–192 (1996). https://doi.org/10.1016/0167-2789(95)00173-5
7. E. Zipunova and E. Savenkov, "On the diffuse interface models for high codimension dispersed inclusions," Mathematics **9** (18), (2021). https://doi.org/10.3390/math9182206
8. J. M. Sargado, E. Keilegavlen, I. Berre, and J. M. Nordbotten, "High-accuracy phase-field models for brittle fracture based on a new family of degradation functions," J. Mech. Phys. Solids **111**, 458–489 (2018). https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.10.015

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 612–630.

УДК 519.632.6

РАСЧЁТ ТЕРМОТОКОВ В ВОЛЬФРАМОВОЙ ПЛАСТИНКЕ И ТОНКОМ СЛОЕ ЕГО ПАРОВ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРЕВЕ С УЧЁТОМ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ И ФАЗЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ И ТЕРМОЭДС

Г. Г. Лазарева[a], **В. А. Попов**[b]

Российский университет дружбы народов (РУДН), ул. Миклухо-Маклая, 6, г. Москва 117198, Россия

E-mails: [a]lazareva-gg@rudn.ru, [b]v.a.popov94@gmail.com

Поступила в редакцию 15.11.2023 г.; после доработки 15.11.2023 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

В работе рассмотрена модель распределения тока в образце вольфрама и испаряемом веществе при нагреве поверхности электронным пучком. Модель основана на решении уравнений электродинамики и двухфазной задачи Стефана для расчёта температуры в области образца в цилиндрической системе координат. Использовано модельное распределение температуры в тонком слое испаряемого вольфрама, повторяющее температуру поверхности. Термотоки получены с использованием приближенных зависимостей от температуры электрического сопротивления и термоэдс вольфрама и его паров. Параметры модели взяты из экспериментов на стенде Beam of Electrons for materials Test Applications, созданного в ИЯФ СО РАН.

Ключевые слова: математическое моделирование, термотоки, вольфрам, импульсный нагрев, метод релаксации, стенд БЕТА, дивертор.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.307

ВВЕДЕНИЕ

Движение расплава является одним из самых разрушительных последствий развития неустойчивостей на современных термоядерных установках для изучения плазмы. При оплавлении и дальнейшем разогреве материала стенок, лимитеров или дивертора они начинают испаряться. Место контакта расплава и испарённого газа приводит в движение расплав под действием термоэлектрических эффектов из-за большого магнитного поля, необходимого для удержания плазмы. Представленная в работе математическая модель поможет детально разобраться в механизмах развития термотоков и позволит разработать методы их подавления.

Натурный эксперимент на экспериментальном стенде Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA), созданного в ИЯФ СО РАН [1] постоянно сопровождается численным [2]. Работа посвящена расчёту тока в образце, который рассматривается как возможный источник вращения вещества, который наблюдается в эксперименте. Неоднородность температуры в расплаве приводит к возникновению течения тока. Ещё большее влияние на возникновение тока оказывает разность электрического сопротивления и термоэдс в металле и его парах. В областях с перепадами параметров материала возникает электродвижущая сила. Важно, что в газе и в расплаве электродвижущая сила отличается. Поэтому возникает ненулевое ускоряющее напряжение на замкнутом контуре через газ и расплав, которое порождает ток по этому контуру. Величина удельного сопротивления нелинейно зависит от температуры. Возможно дать оценки, в каких областях газа и расплава будет хорошая проводимость и высокое напряжение. Но без использования математического моделирования сложно предсказать, в каких областях может наблюдаться наибольший ток. Ток взаимодействуя с магнитным полем приводит к движению вещества в целом.

Модель нагрева вольфрама основана на решении в области образца уравнений электродинамики и двухфазной задачи Стефана для температуры [3]. На настоящем этапе рассматривается случай, когда уравнения на поля и токи выписаны для образца вольфрама в цилиндрической системе координат с учётом электродвижущих сил, возникающих в газе над образцом. Предполагается, что характерное время изменения велико по сравнению с временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи. В [4] проведён анализ модели в упрощённой постановке при постоянных значениях электрического сопротивления и термоэдс в газе и металле. Результаты проведённого моделирования показывают, что выбор приближения параметров материала оказывают большое влияние на решение. В зависимости от профиля температуры на поверхности получены различные решения на границе сред. Показано, что с ростом термоэдс металла амплитуда тока будет прямо пропорционально возрастать, с ростом электрического сопротивления металла ток будет убывать.

Для определения удельного сопротивления в образце проводится расчёт распределения температуры на основе решения задачи Стефана [5]. Условие на границе свободный расплав - твёрдое тело состоит в непрерывности температуры и разрывности теплового потока за счёт поглощения или выделения известного количества тепла. В [6] показано, что подробность учёта коэффициентов задачи Стефана оказывает большое влияние на результаты решения уравнения электродинамики. В случае решения полной задачи Стефана ток неравномерно распределён по области, высокие значения сконцентрированы вне области расплава. Это обусловлено тем, что источником тока является не температура сама по себе, а перепад температур, как и в случае термопары, которая не будет источником энергии при однородном нагреве всей системы. При этом ток замыкается локально, так как в этой задаче работает принцип суперпозиции: от каждого участка поверхности ток возникает свой и спадает степенным образом. Поэтому детали нагрева сильно влияют на картину растекания тока. Для определения удельного сопротивления в испаряемом веществе на следующем этапе моделирования будет использоваться приближенное распределение температуры, полученное из расчётов системы уравнений газовой динамики [7–9].

Эффект возникновения электродвижущей силы при импульсном нагреве материалов хорошо известен и исследован многими авторами. Наиболее близки к рассматриваемой работе математические модели лазерной сварки, проводимые последние 15 лет. В работе Уханьских исследователей [10] представлена новая динамическая модель термоэлектрических явлений при сварке волоконным лазером нержавеющей стали. Эта модель включает сложные физические эффекты тепловых, электромагнитных, жидкостных и фазовых превращений, происходящих в зоне миллиметровой лазерной абляции, что позволило получить характеристики магнитного поля, силу Лоренца и динамику сварочной ванны. В работе [11] показано, что за счёт возникновения термотоков применение внешнего статического магнитного поля к сварке лазерным лучом может привести к изменению геометрии сварного шва. В работе показано, что ток может возникать из-за градиента термоэлектрической мощности и численно исследованы характеристики распределения тока от свойств материала на примере железа и алюминия. Эти зарубежные исследования проводятся в предположении существования термотоков, определяемых с помощью оценок. Существенное отличие нашего подхода состоит в определении термотоков на основе расчёта температур.

Расчёты токов проводятся и применительно к термоядерным исследованиям. В работе [12] представлены результаты расчётов, полученных конечно-разностным методом в новом модуле кода MEMOS-3D, для описания объёмной силы Лоренца, которая управляет макроскопическим движением слоя расплава в нестационарных экспериментах по плавлению вольфрама на токамаке. Модель основана на магнитостатическом пределе резистивного термоэлектрического магнитогидродинамического описания жидкого металла. Предложенный подход [12] показал другую морфологию эрозионной поверхности по сравнению с ранее применявшимся упрощённым подходом. Тем не менее, в этих исследованиях расчёт термотоков производится без учёта газовой фазы вещества. В работе [13] получено теоретическое выражение для тока, ограниченного пространственным зарядом, от прилегающих к плазме твёрдых поверхностей. Эта новая формула оценивается с помощью математического моделирования с использованием метода Particle in Cell (PIC) в одномерной постановке. Используемая в [13] модель рассматривает возникновение тока в пространстве между твёрдыми пластинами, которое не занято плотным веществом.

Расчёт проведён для анализа и планирования натурных экспериментов с целью определения влияния сил Ампера на динамику вещества. Дальнейшее развитие модели предполагает уточнение расчёта удельной электропроводности газа и термоэдс, в том числе включение учёта зависимости этих параметров от плотности газа. Уникальные условия рассматриваемых экспериментов не позволяют использовать существующие известные пакеты программ. Результаты расчётов итоговой модели будут использоваться для сравнения с экспериментальными данными, полученными на стенде BETA в ИЯФ СО РАН.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В экспериментах на установке BETA образцы прокатанного вольфрама подвергались воздействию осесимметричного электронного пучка [3]. Электроны с энергией $80 \div 90$ кэВ нагревают материал в слое, который является тонким по сравнению с характерной глубиной нагрева материала. Тепло, поглощённое поверхностью, распространяется в материал. Образец имеет размеры 25 мм $\times$ 25 мм и типичную толщину 4 мм. Поскольку за такое короткое время образец нагревается на глубину нескольких сотен микрон, область моделирования представляла собой поперечное сечение образца (толщина образца 3 мм) и тонкого слоя паров (толщина слоя 3 мм): область 12 мм $\times$ 6 мм (см. рис. 1). Численная модель распределения тока пучка в нагреваемом образце и в парах вольфрама сводится к совместному решению системы уравнений Максвелла и задачи Стефана.

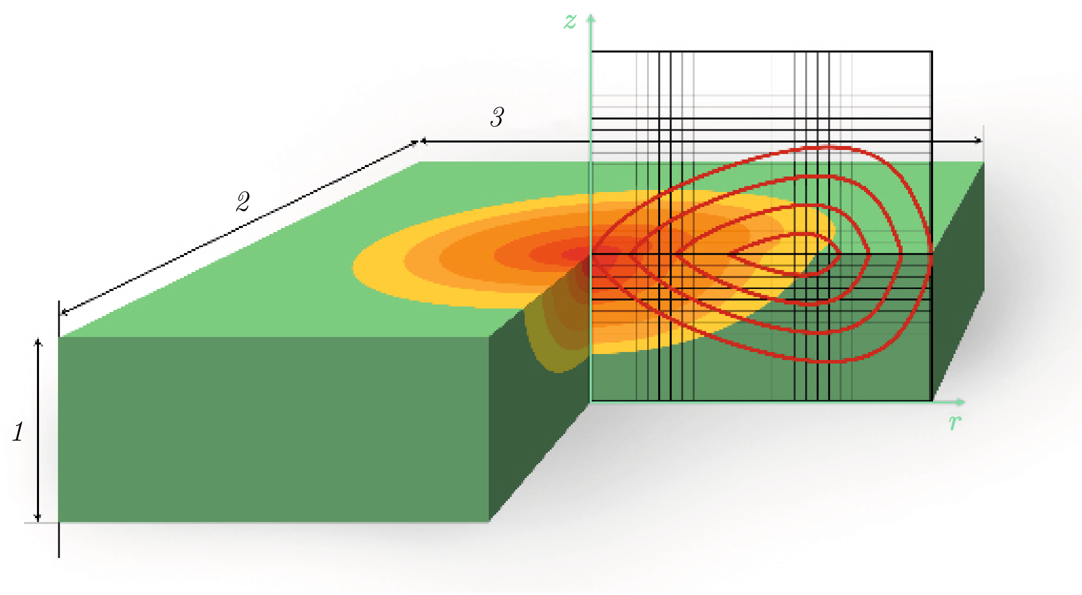


Рис. 1. Схема эксперимента: *1* — 3 мм, *2* — 25 мм, *3* — 25 мм. Не изображённый на схеме электронный пучок греет сверху. Распределение температуры схематично изображено цветом. На вставке в разрезе красным показаны замкнутые линии тока

Температура в образце рассчитывается, как результат решения двухфазной задачи Стефана с учётом испарения [6]. На границе фаз нормальная производная температуры терпит разрыв с известной энтальпией фазового перехода. Более того, фазовые переходы, присущие рассматриваемой задаче, включены в коэффициенты уравнения для температуры. Плотность, теплопроводность, удельная теплоёмкость вычисляются как зависимости от температуры материала. Эти функции имеют разрывы или теряют плавность при температуре плавления T_m.

Для расчётов использованы известные данные о градиенте температуры испаряющегося вольфрама над поверхностью [7]. Расчёты проведены в предположении, что температура газа не изменяется при рассмотрении 3 мм газа над поверхностью. При этом полученная в результате решения задачи Стефана зависимость температуры от радиуса сохраняется, что согласуется с уже существующими данными. Таким образом, температура газа T_{gas} равна температуре поверхности $T|_\gamma$ пластинки: $T_{gas}(r, z) = T(r)|_\gamma$. Существующие наработки позволяют вычислить температуру и плотность газа из системы уравнений газовой динамики, что будет использовано в дальнейшем при расширении модели.

1.1. Определение удельного сопротивления

Полученное распределение температуры позволяет рассчитать удельное сопротивление в образце [3] и в газе. Если удельное сопротивление ρ_e в образце задаётся в виде экспериментально полученной зависимости от температуры (см. рис. 1 и 2(a)), то удельное сопротивление в газе необходимо вычислить. Рассмотрим случай зависимости удельного сопротивления ρ_e только от температуры газа [14]. В упрощённом виде выражение для удельного сопротивления в газе может быть определено как величина обратно пропорциональная степени ионизации α:

$$\rho_e^{gas} = \frac{1}{A\alpha}, \quad A = \frac{10^4}{\text{Ом} \cdot \text{мм}}.$$

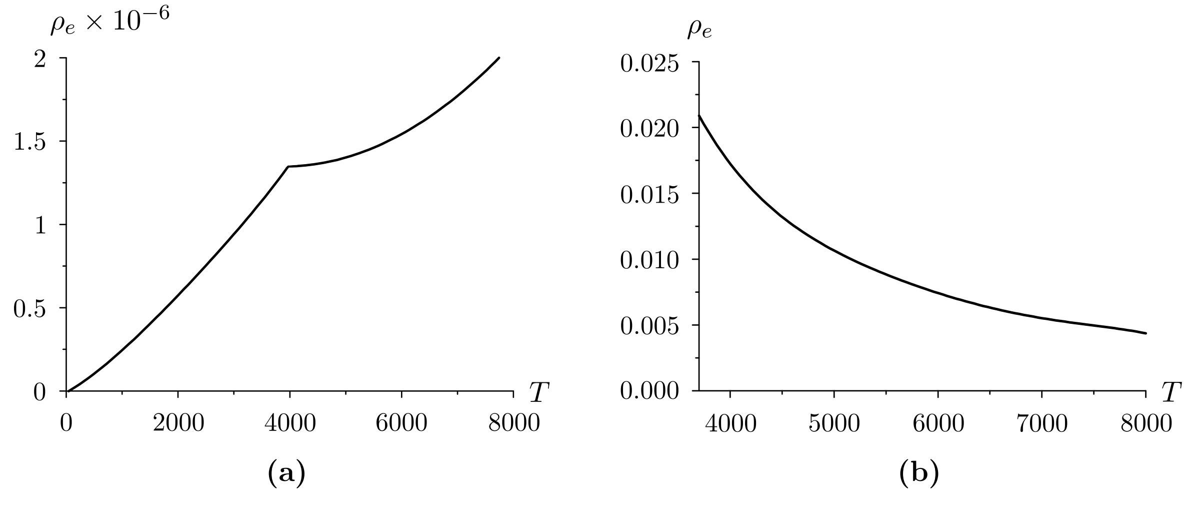


Рис. 2. График зависимости от температуры электрического сопротивления в образце (a) и в газе (b)

Причём удельную проводимость в газе достаточно определить при температуре выше температуры плавления. При температуре ниже температуры плавления длина свободного пробега электрона в насыщенных парах становится сравнима с размером облучаемой области. Это приводит к тому, что во внешних слоях плазменного облака движение электронов бесстолкновительное и может быть учтено только с использованием кинетических моделей. При рассматриваемых значениях магнитных полей бесстолкновительные электроны будут замагничены, что приведёт к тому, что токи поперек магнитного поля будут сильно им подавляться.

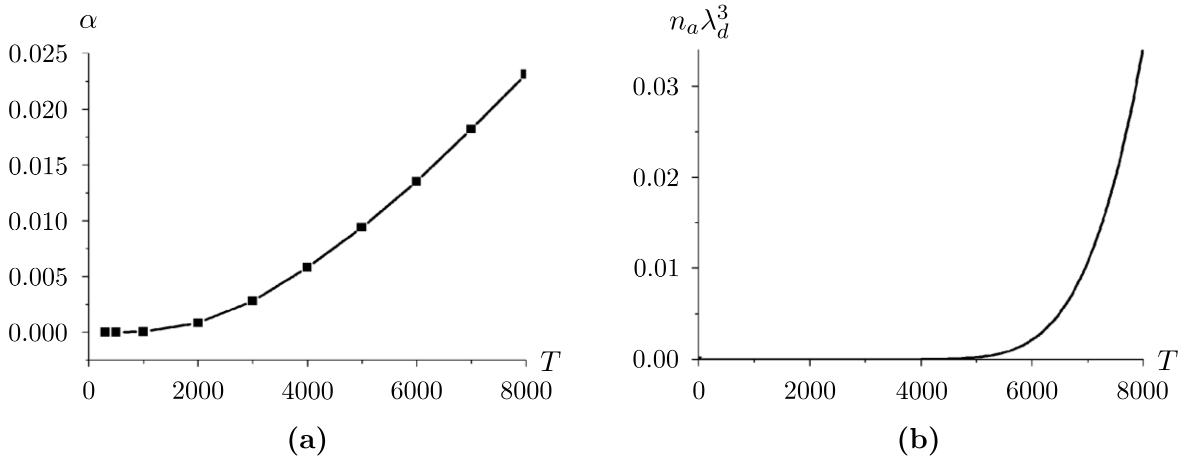


Рис. 3. График зависимости от температуры степени ионизации (a) и произведение длины волны Де Бройля и плотности насыщенных паров (b)

Степень ионизации (рис. 3(a)) определяется как положительный корень уравнения Саха

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{2}{n_a\lambda_d^3} exp\left(-\frac{I_t}{T}\right), \tag{1}$$

где λ_d — длина волны Де Бройля, $I_t = 92604$ — энергия ионизации вольфрама. Концентрации атомов (рис. 3(b)) на этом этапе моделирования определяется как плотность насыщенных паров

$$n_a = \frac{1}{kT} exp\left(26.191 - \frac{L}{T}\right), \tag{2}$$

где $k = 1.3 \cdot 10^{-23}$ Дж К$^{-1}$ — константа Больцмана, $L = 83971$ К — теплота кипения. Зависимость степени ионизации от температуры (рис. 3(a)) получена в результате решения уравнения (1) при различных значениях температуры с учётом зависимости от температуры произведения длины волны Де Бройля и плотности насыщенных паров (2) (рис. 3(b)).

Для удобства вычислений зависимость удельного сопротивления от температуры может быть интерполирована полиномом. В образце (рис. 2(a))

$$\rho_e^{met}(T(t,r,z)) = \begin{cases} -0.97 \cdot 10^{-2} + 1.93 \cdot 10^{-5}T + 7.83 \cdot 10^{-8}T^2 - \\ \quad -1.85 \cdot 10^{-11}T^3 + 2.08 \cdot 10^{-14}T^4, & T_0 \leqslant T < T_m, \\ 1.35 - 1.86 \cdot 10^{-5}(T - T_m) + 4.42 \cdot 10^{-8}(T-T_m)^2, & T_m \leqslant T \end{cases} \tag{3}$$

и в газе

$$\rho_e^{gas}(T(t,r,z)) = 0.448 - 3.223 \cdot 10^{-4}T + 1.034 \cdot 10^{-7}T^2 - 1.638 \cdot 10^{-11}T^3 \\ +1.302 \cdot 10^{-15}T^4 - 4.133 \cdot 10^{-20}T^5, \quad T_m \leqslant T. \tag{4}$$

1.2. Определение термоэдс

При расчёте токов без учёта испаряющегося газа граничные условия являлись определяющей характеристикой для определения токов. В новой постановке решение определяется правой частью уравнения, так как рассматриваемая область содержит источники тока за счёт учёта термоэмиссии. Однородные граничные условия Дирихле для тока в образце и газе над образцом упрощают проведение численных расчётов. Безусловно, такой выбор граничных условий является не точным. Но точность такого приближения можно повысить, увеличивая расчётную область. Это не противоречит постановке задачи, так как в моделируемом эксперименте образец закреплён в установке большого внутреннего диметра (100 мм), заполненной техническим вакуумом. Постановка задачи позволяет не определять ток на границе испаряемого газа. На первый план выходит расчёт термоэмиссии.

В металле термоэдс S известен только при небольших температурах. В расчётах использована зависимость $S(T)$ (см. рис. 4(a)), построенная по данным [15]. При высоких температурах использовано значение термоэдс при $T^s = 1350$ К. Известные зависимости термоэдс от температуры для других металлов показывают, что функция термоэдс возрастающая и имеет скачок в момент плавления [16]:

$$S^{met}(T(t,r,)) = \begin{cases} -1.5\cdot 10^{-3} + 6.2\cdot 10^{-6}T - 2.6\cdot 10^{-9}T^2, & T_0 \leqslant T < T^s, \\ 2.1\cdot 10^{-3}, & T^s \leqslant T. \end{cases} \tag{5}$$

В парах вольфрама термоэдс можно выразить через оценку [14] коэффициента Зеебека:

$$S^{gas} = A_s \ln\left(\alpha\lambda_d^3 n_a/2\right), \quad A_s = 1/11604 \text{ В/К} = 8.62\cdot 10^{-5} \text{ В/К}.$$

Аналогично удельной проводимости зависимость термоэдс от температуры может быть интерполирована при температуре выше температуры плавления:

$$S^{gas}(T(t,r,z)) = 4.43\cdot 10^{-3} - 1.04\cdot 10^{-6}T + 1.014\cdot 10^{-10}T^2 - 3.57\cdot 10^{-15}T^3, \quad T_m \leqslant T. \tag{6}$$

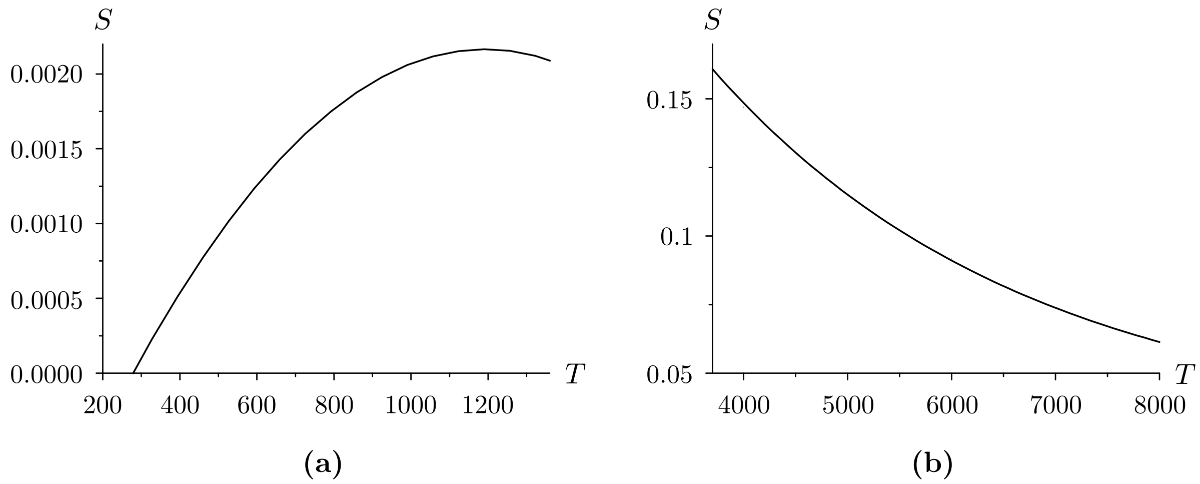


Рис. 4. График зависимости термоэдс от температуры в металле (a) и в газе (b)

1.3. Определение термотоков

Процесс распространения тока можно считать стационарным, так как характерное время изменения велико по сравнению с временем установления равновесия уравнений электродинамики на масштабе задачи [17]. Учёт процесса испарения гарантирует ограничение роста температуры в образце, что соответствует экспериментальным данным [2]. Система уравнений Максвелла для расчета тока в образце модифицирована для станционного случая в цилиндрической системе координат:

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \nabla\times\vec{B} = 0, \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \quad \nabla\cdot\vec{j} = 0,$$

где $\vec{B}$ — векторное магнитное поле, $\vec{E}$ — векторное электрическое поле, $\vec{j}$ — векторное поле плотности тока.

Замкнуть систему уравнений можно при помощи материального уравнения, в нашем случае обобщения закона Ома:

$$\rho_e \vec{j} = \left(\vec{E} - S\nabla T - \nabla\frac{\mu}{e}\right), \tag{7}$$

где μ — химический потенциал электронов, e — заряд электрона.

Запишем систему уравнений в цилиндрических координатах (r, φ, z) и введём векторный потенциал тока $F = (F_r, F_\varphi, F_z)$ такой, что $j = \nabla \times \vec{F}$.

Заметим, что производные по углу φ будут равны нулю в силу симметрии задачи относительно поворота [18, 19]. Выразим ток через векторный потенциал тока, учитывая нулевую производную по углу. Так как отсутствует вихревое электрическое поле, то ток течёт только по осевому и радиальному направлениям, и $E_\varphi = 0$. Отсюда следует, что $j_\varphi = 0$:

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_r \\ j_\varphi \\ j_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial r F_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial r F_\varphi}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для описания тока достаточно только одной функции F_φ, описывающей «завихрённость» тока. С учётом нулевой производной по углу φ и отсутствия вихревого электрического поля $E_\varphi = 0$ из обобщённого закона Ома (7) может быть получено уравнение на F_φ. Для этого применим ротор к уравнению (7) и учтём уравнение максвелла $\nabla \times \vec{E} = 0$:

$$\nabla \times \rho_e \vec{j} = \nabla \times \left(\vec{E} - S\nabla T - \nabla\frac{\mu}{e}\right) = \nabla \times (-S\nabla T) = -\nabla S \times \nabla T.$$

В силу потенциальности электрического поля и химического потенциала выражение сильно упрощается. Аналогично ранее рассмотренному случаю для термотоков в образце [3] для функции F_φ (7) получено

$$\frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho_e}\frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\frac{1}{\rho_e}\frac{\partial \rho_e}{\partial z} + F_\varphi\left(\frac{1}{r\rho_e}\frac{\partial \rho_e}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\right) = \\ = \frac{1}{\rho_e}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial r}\right).$$

После введения полного тока $I(r, z) = 2\pi r F_\varphi$ уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} + \frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial r} + \frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z} = \frac{2\pi r}{\rho_e}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial r}\right). \tag{8}$$

Обозначив $\varPhi = \ln(\rho_e/r)$, для ∇ — оператора дифференцирования в ортогональной системе координат (r, z) можно записать задачу в виде

$$\begin{gathered} \rho_e \nabla^2 I + \rho_e \nabla I \nabla \Phi = 2\pi r \nabla S \nabla T, \quad 0 < r < r_{\max}, \quad 0 < z < z_{\max}, \quad 0 < t, \\ \Phi = \ln(\rho_e/r), \\ I|_{t=0} = 0, \quad I|_{r=0} = 0, \quad I(r, 0) = 0, \\ \left.\frac{\partial I}{\partial n}\right|_{r=r_{\max}} = 0, \quad \left.\frac{\partial I}{\partial n}\right|_{z=z_{\max}} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

При расчёте токов без учёта испаряющегося газа [3] граничные условия являлись определяющей характеристикой для определения токов. В начально-краевой задаче (9) решение определяется правой частью уравнения, так как рассматриваемая область содержит источники тока за счёт учёта термоэмиссии. Однородные граничные условия Дирихле для тока в образце и газе над образцом упрощают проведение численных расчётов. Безусловно, такой выбор граничных условий является не точным. Но точность такого приближения можно повысить, увеличивая расчётную область. Это не противоречит постановке задачи, так как в моделируемом эксперименте образец закреплён в установке большого внутреннего диметра (10 см), заполненной техническим вакуумом. Постановка задачи (9) позволяет не определять ток на границе испаряемого газа. На первый план выходит расчёт термоэмиссии. Характерные значения параметров приведены в таблице.

Использованные для обезразмеривания размерные параметры, их значения и размерности

Параметр	Значение	Размерность
r_0	1	мм
t_0	10^2	мкс
λ_0	10^{-1}	Вт/мм·К
ρ_0	10^{-5}	кг/мм^3
c_0	10^8	Вт · мкс/кг · К
T_0	10^3	К
W_0	10^3	Вт/мм^2
I_0	10^3	А
j_0	10^3	А/мм^2
S_0	10^{-2}	В/К
ρ_{e0}	10^{-2}	Ом · мм

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача только в области образца была решена ранее [3]. Решить задачу только в области паров в настоящее время невозможно, так как постановка граничных условия для термотоков в газе над поверхностью металла вызывает большие трудности. В рассматриваемой постановке проблема постановки граничных условий снята, но возникает ряд сложностей. Амплитуду тока нельзя определить точно для непрерывной задачи с любой степенью упрощения, так как производные в точке разрыва принимают бесконечное значение. Без регуляризации нельзя приступать к численному решению задачи, так как можно получить решение, зависящее от шага h расчётной сетки.

Для использования схем сплошного счета учёт условий на границе между материалом пластинки и парами необходимо преобразовать уравнение (8). В слагаемом $\frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z}$ оба множителя терпят разрыв на поверхности образца. Производная тока по нормали к поверхности меняет знак, так как на границе металл—газ токи имеют максимум. При этом решение уравнения (8) имеет положительные вторые производные всюду вне поверхности образца. Производная по нормали к поверхности удельной проводимости – это производная от разрывной функции, так как удельная проводимость металла на два порядка выше проводимости газа, не зависимо от способа ее определения. Аналогично, слагаемое $\frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial r}$ в правой части уравнения (8) содержит производную от разрывной функции термоэдс. Производные по z от разрывных функций вычисляются с использованием дельта-функции Дирака. Предложенная [20] замена производной в точке разрыва на непрерывную функцию $\delta(z-z_0)$, умноженную на число, равное скачку термоэдс на промежутке $[z_0-2h, z_0+2h]$ адаптирована к рассматриваемой задаче. После регуляризации правой части уравнение (8) принимает вид

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}+\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial r}+\frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z}=$$
$$=\frac{2\pi r}{\rho_e}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{\partial T}{\partial r}\left\{\left.\frac{\partial S}{\partial z}\right|_{z\neq z_0}+\delta(z-z_0)[S]_{z=z_0}\right\}\right).$$

Так как производная $\frac{\partial I}{\partial z}$ терпит разрыв в точке максимума (при фиксированном r) функции I на границе раздела сред, слагаемое $\frac{\partial I}{\partial z}\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z}$ требует сглаживания $\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z}$. В результате получаем уравнение, дающее адекватное решение на границе раздела сред:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 I}{\partial z^2}+\frac{\partial I}{\partial r}\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial r}+\frac{\partial I}{\partial z}\left\{\left.\frac{\partial \ln(\rho_e/r)}{\partial z}\right|_{z\neq z_0}+\left.\frac{\partial P(\rho_e/r)}{\partial z}\right|_{z=z_0}\right\}=$$
$$=\frac{2\pi r}{\rho_e}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial z}-\frac{\partial T}{\partial r}\left\{\left.\frac{\partial S}{\partial z}\right|_{z\neq z_0}+\delta(z-z_0)[S]_{z=z_0}\right\}\right),$$

где $P(r,z)=\frac{\ln(\rho_e^{met}/r)}{1-\exp((z-z_0)/\varepsilon)}+\ln(\rho_e^{gas}/r)$ — сигмоида с $\varepsilon=0.05$ мм.

Увеличим расчетную область в два раза по осевому направлению. Зададим на сетке с узлами $r_i=ih$ с $i=1,\ldots,N_r$ и $z_k=kh$ с $k=1,\ldots,2N_z$ сеточные функции $T_{ik}=T(r_i,z_k)$, $I^n_{ik}=I(r_i,z_k)^n$. На этом этапе решается стационарная задача, используется значение $T_{ik}=T^n_{ik}$ на заданном шаге по времени, на котором достигаются достаточно высокие значения температуры. Причем в расчетной области, соответствующей образцу, задается температура, полученная из решения уравнения теплопроводности. В области, соответствующей парам, задается радиальное распределение температуры на поверхности: $T_{ik}=T(r_i,hN_z)$ для $i=1,\cdots N_r$, $k=N_z,\cdots 2N_z$ Пусть сеточные функции, лежащие на прямой $z=z_0$, имеют индексы $(i,N_z+1/2)$. Тогда конечно-разностная схема для системы уравнений (9) с учётом изменения (2) имеет вид

$$\begin{gathered}
\Phi_{i,k}=\ln\left(\rho_e(T_i,k)_k/r_i\right),\quad i=1,\cdots,N_r\quad k=1,\cdots,2N_z\\
ar_{i,k}=\frac{1}{4}\left(\ln(\rho_e/r)^n_{i+1,k}-\ln(\rho_e/r)^n_{i-1,k}\right),\\
az_{i,k}=\frac{1}{4}\left(\ln(\rho_e/r)^n_{i,k+1}-\ln(\rho_e/r)^{n+1}_{i,k-1}\right)_{k<k_0-l,k>k_0+l}+\\
+\frac{1}{4}\left(P_3(\rho_e/r)^n_{i,k+1}-P_3(\rho_e/r)^{n+1}_{i,k-1}\right)_{k_0-l\leqslant k\leqslant k_0+l},\\
F^n_{i,k}=\frac{1}{4}\frac{2\pi r_i}{\rho_e(T_{i,k})}(S(T_{i+1,k})-S(T_{i-1,k}))\cdot(T_{i,k+1}-T_{i,k-1})-\\
-(T_{i+1,k}-T_{i-1,k})\left(S(T_{i,k+1})-S(T_{i,k-1})\right)_{k<k_0-2,k>k_0+2}-\\
-h(T_{i+1,k}-T_{i-1,k})\left(1+\cos\left(\pi\frac{k-k_0}{2}\right)\right)\left(S(T_{i,k_0+1})-S(T_{i,k_0})\right)_{k_0-2\leqslant k\leqslant k_0+2},\\
I^{n+1}_{i,k}=(1-\omega)I^n_{i,k}+\frac{\omega}{4}\cdot\\
\cdot\left[I^{n+1}_{i-1,k}(1-ar_{i,k})+I^{n+1}_{i,k-1}(1-az_{i,k})I^n_{i+1,k}(1+ar_{i,k})+I^n_{i,k+1}(1+az_{i,k})-F^n_{i,k}\right],\\
i=2,\ldots,N_r-1,\quad k=2,\ldots,2N_z-1,\\
I_{i,1}=I_{1,k}=0,\quad I_{i,2N_z}=I_{i,2N_z-1},\quad I_{N_r,k}=I_{N_r-1,k}.
\end{gathered}\tag{10}$$

Решение уравнения (8) методом верхней релаксации [21] на каждом шаге по времени позволяет построить экономичный алгоритм при параметре релаксации $\omega=2-o(h)$ [22]. Наряду с другими преимуществами, метод верхней релаксации интересен удобством использования в цилиндрических координатах. Принцип выражения искомого элемента через соседние по схеме точек вида «крест» универсально и не зависит от выбора системы координат. Можно заметить, что задача (10) и алгоритм решения содержит деление на радиус только в аргументе функции логарифма в расчете коэффициента $\Phi_{i,k}$. Так как функция логарифма при росте аргумента возрастает довольно медленно, то деление на величины порядка $h/2$ при расчетах в окрестности оси симметрии не приводит к возникновению особенностей решения.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

Рассмотрим распределение температуры в расчетной области, полученное в результате решения задачи Стефана в образце [2] и равное значениям на поверхности при $z = z_0$ над образцом. На рис. 5(c) показано, что температура ниже координаты z_0 быстро падает с глубиной, так как образец за время импульсного нагрева прогревается в глубину на доли миллиметра. Выше поверхности температура высокая, не изменяется по z, убывает от центра области к краям пластинки. Температура поверхности, а значит и газа, почти не изменяется в центре области за счёт близости фронта плавления, который забирает тепло. При высоких температурах подобный эффект даст охлаждение испарением на поверхности. Именно в центре области возникает расплав. Первый расчет проведен при постоянных электрическом сопротивлении и термоэдс. В качестве значений выбраны близкие к данным для температуры 4000 K

$$\rho_e^{met} = 1.3 \cdot 10^{-4}, \quad S^{met} = 2.1 \cdot 10^{-5}, \quad \rho_e^{gas} = 1.9 \cdot 10^{-3}, \quad S^{gas} = 1.5 \cdot 10^{-3}.$$

На основе распределения температуры в расчетной области рассчитаны электрическое сопротивление и термоэдс в каждом узле сетки. Второй расчет проведен при полученных по формулам (3), (4), (5), (6) коэффициентах, зависящих от температуры. На нагреваемой поверхности пластинки термоток достигает максимальных значений, что обусловлено вкладом правой части уравнения (8). Расчет показал, что на границе металл—газ профиль термотока (рис. 5(d)) сильно зависит от способа учета коэффициентов модели. Обозначим термоток, полученный в результате расчетов с постоянными коэффициентами.

Графики рис. 5(d) согласуются с градиентом температуры на поверхности. На рис. 5 представлен расчет в расширенной по радиусу расчетной области. Распределения на рис. 5(a) показывают, что при больших радиусах, где нагрев не происходит, термотоков не возникает. Детальное рассмотрение показывает, что области слабого и сильного роста тока, а также область его убывания, полностью соответствует областям графика температуры с разными углами наклона (рис. 5(b)).

В области нагрева температура достигает режима насыщения и соответствущий термоток не высокий, так как слабо влияние термоэдс за счет небольшого градиента температуры. Сильный рост тока (область выделена прямоугольником на рис. 5(b)) возникает при высоком градиенте температуры. Дальнейшее убывание тока объясняется небольшим градиентом температуры и падением влияния сопротивления при больших радиусах.

Тем не менее, результаты показали, что требуется уточнение постановки задачи. В модели не было учтено магнитное поле, так как его влияние в металле и плотных парах (в центре области нагрева) не значительно. Именно в этих областях возникают термотоки, приводящие к экспериментально наблюдаемым явлениям. Но за счет такого упрощения модели токи распространяются за границу области пара над расплавом. В центре области, где температура максимальна, токи невелики и не могут спровоцировать наблюдаемое вращение вещества. При введении в задачу учета магнитного поля сопротивление будет расти начиная с определенного радиуса и максимальные значения термотоков переместятся в область расплава.

Изолинии термотоков замкнуты, термотоки распространяются лучше в металле, среде с большей проводимостью, чем газ, что согласуется с теорией (рис. 6). При этом картина изолиний термотоков почти симметрична относительно границы металл—газ. Расчеты с учетом зависимости электрического сопротивления и термоэдс от температуры металла и газа (рис. 6(b)) дают более симметричную картину изолиний.

Можно предположить, что термоэдс и проводимость металла и паров при высоких температурах отличаются от рассматриваемых нами значений, но данных о свойствах вещества при высоких температурах мало. Расчеты показывают [4], что с ростом термоэдс и падением проводимости металла амплитуда тока будет убывать. Наиболее важным является уточнение значений проводимости пара, который обратно пропорционально влияет на амплитуду тока.

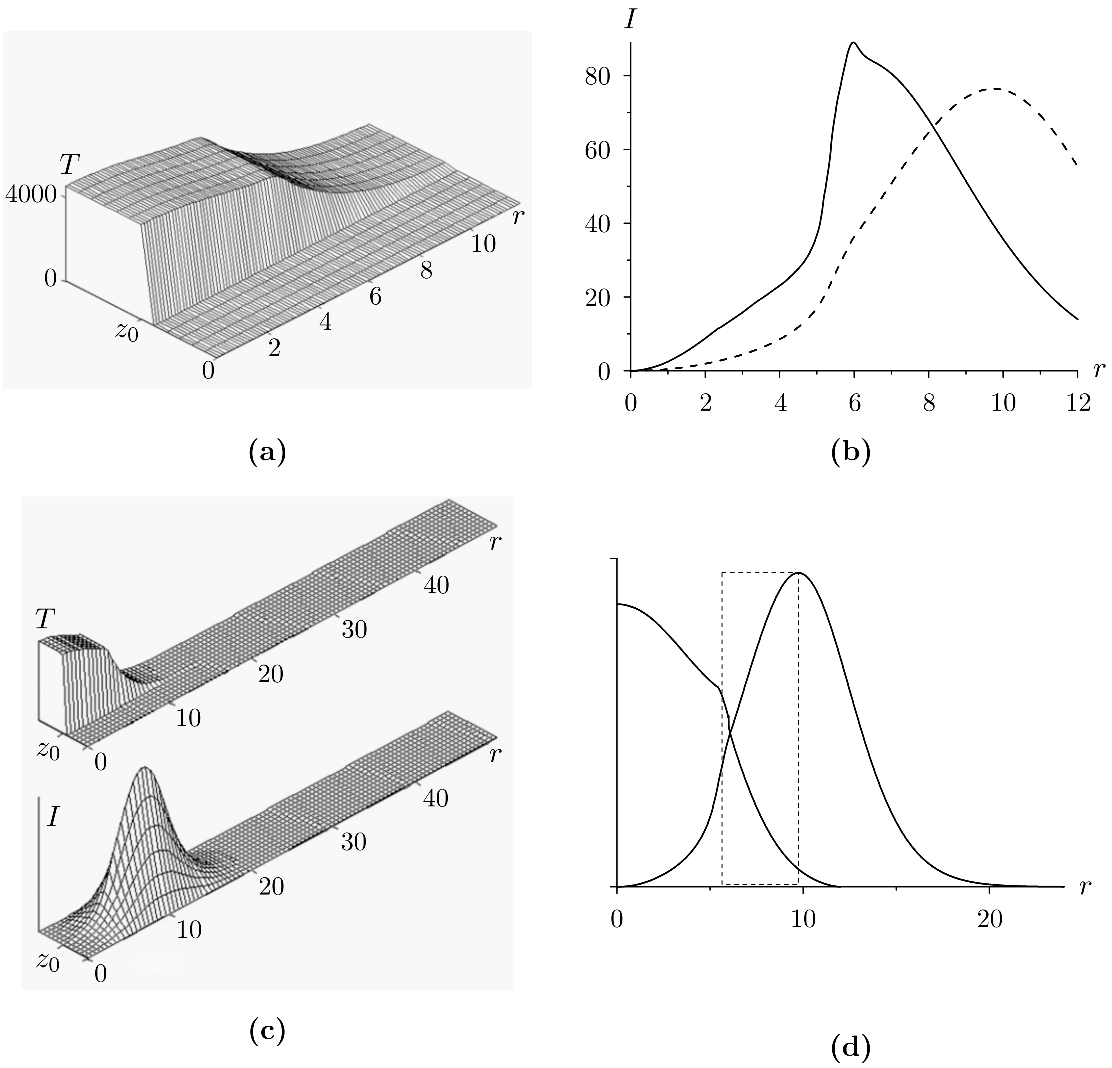


Рис. 5. Графики распределения температуры (a) и результаты расчета термотока на границе раздела сред (b) с постоянными (сплошная линия) и переменными (тире) коэффициентами электрического сопротивления и термоэдс, для увеличенной области моделирования: температура, ток при постоянных и переменных коэффициентах (c), температура и термоток на границе раздела сред (d)

Таким образом, расчеты показывают, что токи распространяются заметно дальше ожидаемой области и поэтому стоит предполагать, что влияние магнитного поля существенно. Важны также особенности температуры, для повышения точности желательно уточнение электрического сопротивления и термоэдс в газе и металле. Внесение изменений в уравнение (8) приведет к появлению новых слагаемых, которые нарушат симметричность матрицы коэффициентов системы разностных уравнений. Следовательно, новая постановка потребует выбрать новый метод решения.

Дальнейшее развитие модели предполагает расчет удельной электропроводности и термоэдс через интеграл по энергии электронов. Уточнение модели предполагает учет зависимости параметров возникновения термотоков не только от температуры, но и от плотности вещества над поверхностью. В работе [14] предложена теоретическая модель слабоионизованной плазмы испарённого вольфрама, которая может объяснить возникновение тока на неравномерно нагретой границе газа и расплава. Для создания модели слабой ионизации потребуется введение в модель газодинамического блока. Развитие трехфазной математической модели

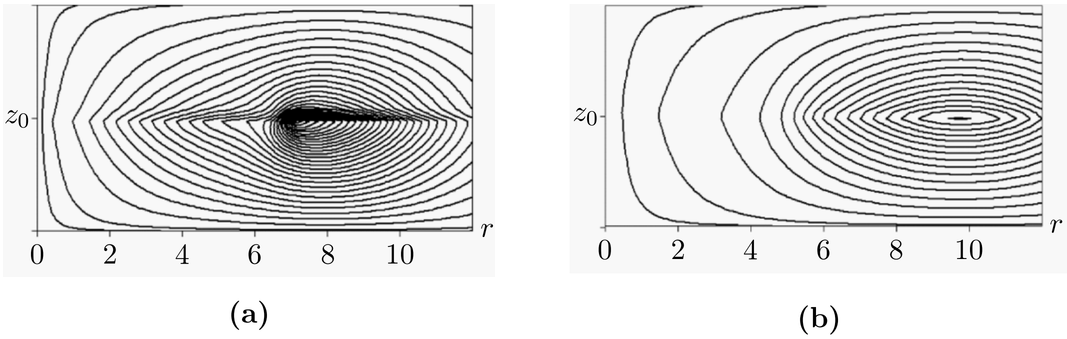


Рис. 6. Распределение радиальной компоненты тока на поперечном срезе пластинки и области над ней для постоянных (a) и переменных (b) электрического сопротивления и термоэдс

металл—расплав—газ возможно на различных структурных уровнях [23]. Влияние силы ампера на возникающие токи с учетом внешнего магнитного поле позволит качественно объяснить наблюдавшееся вращение расплава на установке BETA. Соответствующая математическая модель должна отражать динамику частично ионизированного газа с мгновенным установлением ионизационного равновесия. В таком случае будет возможен расчёт проводимости и темроэдс испаряемого вещества в релаксационном приближении в модели слабонеидеальной трёхкомпонентной плазмы. Результаты моделирования позволят объяснить механизмы возникновения новых особенностей движения и эрозии тугоплавких металлов, наблюдаемых в эксперименте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено математическое моделирование возникновения термотоков в образце вольфрама, основанное на решении уравнений электродинамики в области образца и над ним. Температура в области образца получена в результате решения двухфазной задачи Стефана в цилиндрической системе координат. Использовано модельное распределение температуры испаряемого вольфрама в рассматриваемом тонком слое паров, повторяющее температуру поверхности. Представлены зависимости от температуры электрического сопротивления и термоэдс, основанные на экспериментальных данных и известных оценках. Проведено сравнение результатов с расчетами задачи с постоянными значениями электрического сопротивления и термоэдс в газе и металле. Расчеты показывают существенное влияние особенностей температуры, важность определения электрического сопротивления и термоэдс в газе и металле. Поставлен вопрос о необходимости учета в математической модели магнитного поля. В области нагрева термоток не высокий в случае, если профиль температуры выполаживается, так как слабо влияние термоэдс за счет небольшого градиента температуры. При введении в задачу учета магнитного поля сопротивление пара будет расти начиная с определенного радиуса и максимальные значения термотоков переместятся в область расплава. Дальнейшее развитие модели предполагает уточнение расчета удельной электропроводности газа и термоэдс металла через более аккуратное вычисление транспортных коэффициентов с учётом зависимостей сечений взаимодействия от энергии, включение численного расчета температуры и плотности газа.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00134). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vyacheslavov L., Arakcheev A., Burdakov A., Kandaurov I., Kasatov A., Kurkuchekov V., Mekler K., Popov V., Shoshin A., Skovorodin D., Trunev Y., Vasilyev A.* Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1771. Article 060004.
2. *Arakcheev A. S., Apushkinskaya D. E., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Lazareva G. G., Maksimova A. G., Popov V. A., Snytnikov A. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N.* Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam // Fusion Eng. Des. 2018. V. 132. P. 13–17.
3. *Lazareva G. G., Popov V. A., Arakcheev A. S., Burdakov A. V., Shwab I. V., Vaskevich V. L., Maksimova A. G., Ivashin N. E., Oksogoeva I. P.* Mathematical simulation of the distribution of the electron beam current during pulsed heating of a metal target // J. Appl. Ind. Math. 2021. V. 24, N 2. P. 97–108.
4. *Лазарева Г. Г., Попов В. А., Окишев В. А.* Математическая модель динамики распределения тока электронного пучка в вольфрамовой пластинке и тонком слое его паров при импульсном нагреве с учетом электродвижущей силы // Сиб. журн. индустр. матем. 2023. Т. 27, № 1. С. 43–54
5. *Лазарева Г. Г., Аракчеев А. С., Попов В. А.* математическое моделирование плавления вольфрама при воздействии лазерного импульса // Доклады РАН. Матем., информ., проц. упр. 2023. Т. 509, № 1. С. 101–105.
6. *Lazareva G. G., Popov V. A.* Effect of Temperature Distribution on the Calculation of the thermal current in the Mathematical Model of Pulsed Heating of a Tungsten // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. P. 4457–4468.
7. *Lazareva G. G., Maksimova A. G.* Numerical Simulation of the Propagation of Tungsten Vapor above a Heated Surface // J. Appl. Ind. Math. 2022. V. 16, N 3. P. 472–480.
8. *Lazareva G. G., Arakcheev A. S., Maksimova A. G., Popov V. A.* Numerical model of evaporation of tungsten in vacuum under high-power transient heating // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1391, N 8. Article 012074.
9. *Lazareva G., Korneev V., Maksimova A., Arakcheev A.* Parallel algorithm for calculating the dynamics of tungsten vapor distribution // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 2028, N 1. Article 012010.
10. *Chen X., Pang Sh., Shao X., Wang Ch., Xiao J., Jiang P.* Three-dimensional transient thermoelectric currents in deep penetration laser welding of austenite stainless steel // Opt. Lasers Eng. 2017. V. 91. P. 196–205.
11. *Lange A., Cramer A., Beyer E.* Thermoelectric currents in laser induced melts pools // J. Laser Appl. 2009. V. 21, N 2. P. 82–87.
12. *Thoren E., Tolias P., Ratynskaia S., Pitts R. A., Krieger K.* Self-consistent description of the replacement current driving melt layer motion in fusion devices // Nucl. Fusion. 2018. V. 58, N 10. Article 106003.
13. *Takamura S., Ohno N., Ye M. Y., Kuwabara T.* Space-Charge Limited Current from Plasma-Facing Material // Contrib. Plasma Phys. 2004. V. 44, N 1–3. P. 126–137.
14. *Popov V. A., Arakcheev A. S., Kandaurov I. V., Kasatov A. A., Kurkuchekov V. V., Trunev Yu. A., Vasilyev A. A., Vyacheslavov L. N.* Theoretical simulation of the closed currents near non-uniformly strongly heated surface of tungsten due to thermo-emf // Phys. Plasmas. 2022. V. 29, N 3. Article 033503.
15. *Abadlia L., Gasser F., Khalouk K., Mayoufi M., Gasser J. G.* New experimental methodology, setup and LabView program for accurate absolute thermoelectric power and electrical resistivity measurements between 25 and 1600 K: Application to pure copper, platinum, tungsten, and nickel at very high temperatures // Rev. Sci. Instrum. 2014. V. 85, N 9. Article 095121.
16. *Fiflis P., Kirsch L., Andruczyk D., Curreli D., Ruzic D. N.* Seebeck coefficient measurements on Li, Sn, Ta, Mo, and W // J. Nucl. Mater. 2013. V. 438, N 1–3. P. 224–227.

17. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.

18. *Бухгольц Г.* Расчет электрических и магнитных полей. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.

19. *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954.

20. *Walden J.* On the approximation of singular source terms in differential equations // Numer. Methods Partial Diff. Equ. 1999. V. 15, N 4. P. 503–520.

21. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

22. *Стронгин Р. Г., Гергель В. П., Гришагин В. А., Баркалов К. А.* Параллельные вычисления в задачах глобальной оптимизации. М.: Изд-во МГУ, 2013.

23. *Годунов С. К., Киселев С. П., Куликов И. М., Мали В. И.* Моделирование ударно-волновых процессов в упругопластических материалах на различных (атомный, мезо и термодинамический) структурных уровнях. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2014.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.632.6

CALCULATION OF THERMAL CURRENTS IN A TUNGSTEN PLATE AND IN A THIN LAYER OF TUNGSTEN VAPOR DURING PULSE HEATING WITH ALLOWANCE FOR TEMPERATURE- AND PHASE-DEPENDENT ELECTRICAL RESISTANCE AND THERMO EMF

© 2024 **G. G. Lazareva**[a], **V. A. Popov**[b]

RUDN University, Moscow, 117198 Russia

E-mails: [a]lazareva-gg@rudn.ru, [b]v.a.popov94@gmail.com

Received 15.11.2023, revised 15.11.2023, accepted 17.04.2024

Abstract. In this paper, we consider a model of current distribution in a tungsten specimen and the evaporated substance when the surface is heated by an electron beam. The model is based on solving the equations of electrodynamics and the two-phase Stefan problem for calculating the specimen area temperature in a cylindrical coordinate system. We use a model temperature distribution in a thin layer of evaporated tungsten that replicates the surface temperature. Thermal currents are obtained using approximate temperature dependences of the electrical resistance and thermo emf of tungsten and its vapor. The model parameters are taken from experiments at the Beam of Electrons for materials Test Applications (BETA) stand, created at the Budker Institute of Nuclear Physics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Keywords: mathematical modelling, thermal current, tungsten, pulsed heating, successive overrelaxation method, BETA stand, divertor.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.307

REFERENCES

1. L. Vyacheslavov, A. Arakcheev, A. Burdakov, I. Kandaurov, A. Kasatov, V. Kurkuchekov, K. Mekler, V. Popov, A. Shoshin, D. Skovorodin, Y. Trunev, and A. Vasilyev, "Novel electron beam based test facility for observation of dynamics of tungsten erosion under intense ELM-like heat loads," AIP Conf. Proc. **1771**, 060004 (2016).
2. A. S. Arakcheev, D. E. Apushkinskaya, I. V. Kandaurov, A. A. Kasatov, V. V. Kurkuchekov, G. G. Lazareva, A. G. Maksimova, V. A. Popov, A. V. Snytnikov, Yu. A. Trunev, A. A. Vasilyev, and L. N. Vyacheslavov, "Two-dimensional numerical simulation of tungsten melting under pulsed electron beam," Fusion Eng. Des. **132**, 13–17 (2018).
3. G. G. Lazareva, V. A. Popov, A. S. Arakcheev, A. V. Burdakov, I. V. Shwab, V. L. Vaskevich, A. G. Maksimova, N. E. Ivashin, and I. P. Oksogoeva, "Mathematical simulation of the distribution of the electron beam current during pulsed heating of a metal target," J. Appl. Ind. Math. **24** (2), 97–108 (2021).
4. G. G. Lazareva, V. A. Popov, and V. A. Okishev, "Mathematical model of current distribution in a tungsten plate during pulsed heating," J. Appl. Ind. Math. **18** (1), 93–102 (2024).
5. G. G. Lazareva, A. S. Arakcheev, and V. A. Popov, "Mathematical modeling of melting tungsten exposed to pulsed laser beam," Dokl. Math. **107** (1), 83–87 (2023).
6. G. G. Lazareva and V. A. Popov, "Effect of temperature distribution on the calculation of the thermal current in the mathematical model of pulsed heating of a tungsten," Lobachevskii J. Math. **44**, 4457–4468 (2023).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 465–478.

7. G. G. Lazareva and A. G. Maksimova, “Numerical simulation of the propagation of tungsten vapor above a heated surface,” J. Appl. Ind. Math. **16** (3), 472–480 (2022).
8. G. G. Lazareva, A. S. Arakcheev, A. G. Maksimova, and V. A. Popov, “Numerical model of evaporation of tungsten in vacuum under high-power transient heating,” J. Phys. Conf. Ser. **1391** (8), 012074 (2019).
9. G. Lazareva, V. Korneev, A. Maksimova, and A. Arakcheev, “Parallel algorithm for calculating the dynamics of tungsten vapor distribution,” J. Phys. Conf. Ser. **2028** (1), 012010 (2021).
10. X. Chen, Sh. Pang, X. Shao, Ch. Wang, J. Xiao, and P. Jiang, “Three-dimensional transient thermoelectric currents in deep penetration laser welding of austenite stainless steel,” Opt. Lasers Eng. **91**, 196–205 (2017).
11. A. Lange, A. Cramer, and E. Beyer, “Thermoelectric currents in laser induced melts pools,” J. Laser Appl. **21** (2), 82–87 (2009).
12. E. Thoren, P. Tolias, S. Ratynskaia, R. A. Pitts, and K. Krieger, “Self-consistent description of the replacement current driving melt layer motion in fusion devices,” Nucl. Fusion. **58** (10), 106003 (2018).
13. S. Takamura, N. Ohno, M. Y. Ye, and T. Kuwabara, “Space-charge limited current from plasma-facing material,” Contrib. Plasma Phys. **44** (1–3), 126–137 (2004).
14. V. A. Popov, A. S. Arakcheev, I. V. Kandaurov, A. A. Kasatov, V. V. Kurkuchekov, Yu. A. Trunev, A. A. Vasilyev, and L. N. Vyacheslavov, “Theoretical simulation of the closed currents near non-uniformly strongly heated surface of tungsten due to thermo-emf,” Phys. Plasmas. **29** (3), 033503 (2022).
15. L. Abadlia, F. Gasser, K. Khalouk, M. Mayoufi, and J. G. Gasser, “New experimental methodology, setup and LabView program for accurate absolute thermoelectric power and electrical resistivity measurements between 25 and 1600 K: Application to pure copper, platinum, tungsten, and nickel at very high temperatures,” Rev. Sci. Instrum. **85** (9), 095121 (2014).
16. P. Fiflis, L. Kirsch, D. Andruczyk, D. Curreli, and D. N. Ruzic, “Seebeck coefficient measurements on Li, Sn, Ta, Mo, and W,” J. Nucl. Mater. **438** (1–3), 224–227 (2013).
17. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, New York—London, 1962; Mir, Moscow, 1965).
18. H. Buchholz, *Elektrische und magnetische Potentialfelder* (Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957; Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1961).
19. W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity* (McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1950; Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1954).
20. J. Walden, “On the approximation of singular source terms in differential equations,” Numer. Methods Partial Differ. Equat. **15** (4), 503–520 (1999).
21. A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Methods for Solving Grid Equations* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
22. R. G. Strongin, V. P. Gergel’, V. A. Grishagin, and K. A. Barkalov, *Parallel Computing in Global Optimization Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2013) [in Russian].
23. S. K. Godunov, S. P. Kiselev, I. M. Kulikov, and V. I. Mali, *Modeling of Shock-Wave Processes in Elastic-Plastic Materials at Various (Atomic, Meso, and Thermodynamic) Structural Levels* (Inst. Komp’yut. Issled., Izhevsk, 2014) [in Russian].

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 3. С. 111–125

УДК 517.951

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ И ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ ОБРАТНЫМИ ОДНОМЕРНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ЗАДАЧАМИ

А. С. Михайлов[1,2a], **В. С. Михайлов**[1b]

[1] *Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, наб. р. Фонтанки, 27, г. Санкт-Петербург 191023, Россия*

[2] *Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, г. Санкт-Петербург 199034, Россия*

E-mails: [a]mikhaylov@pdmi.ras.ru, [b]vsmikhaylov@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию 03.03.2024 г.; после доработки 29.05.2024 г.; принята к публикации 29.05.2024 г.

Метод граничного управления применяется к решению одномерных дискретных обратных задач. Определяются дискретные аналоги операторов, используемых в нём (операторы управления и реакции, связывающий оператор). Устанавливаются связи между операторами, отвечающими дискретному волновому уравнению и уравнению теплопроводности соответственно.

Ключевые слова: метод граничного управления, связь данных обратных задач, дискретные динамические системы.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.308

ВВЕДЕНИЕ

В статье метод граничного управления (см. [1, 2]) используется для решения одномерных обратных задач математической физики — обратных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности. В разделах 2 и 3 ставятся обратные задачи для волнового уравнения в дискретном случае. В разделе 4 решение классической проблемы моментов связывается с дискретной динамической системой и выводятся формулы, связывающие ганкелеву матрицу моментов с матрицей связывающего оператора динамической системы. В разделе 5 изучается обратная задача для дискретного уравнения теплопроводности. Оказывается, что матрица связывающего оператора для этой задачи совпадает с ганкелевой матрицей моментов. Это наблюдение позволяет установить связь таких объектов как связывающий оператор, оператор управления и оператор отклика для параболических и гиперболических задач в дискретном случае. Заметим, что вопрос о взаимно-однозначном соответствии между решениями прямых задач Коши для уравнений различных типов был исследован в монографии [3].

1. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим начально-краевую задачу для волнового уравнения вида

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + q(x)u(x,t) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geqslant 0, \\ u|_{x=0} = f, \quad t \geqslant 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $q(x)$ — потенциал (гладкая функция переменного x), а f — граничное управление Дирихле. Обозначим за $u^f(x,t)$ решение системы (1). Для классического решения справедливо следующее представление Дюамеля

$$u^f(x,t) = u^\delta(x,t) * f(t) = \begin{cases} f(t-x) + \int\limits_0^{t-x} w(x,t-s)f(s)ds, & t \geqslant x, \\ 0, & t < x, \end{cases} \tag{2}$$

где функция $w(x,t)$ является решением задачи Гурса

$$w_{tt} - w_{xx} + qw = 0, \quad x > 0, t > 0,$$
$$\frac{d}{dx}w(x,x) = -\frac{1}{2}q(x), \quad x \geqslant 0,$$
$$w(x,0) = 0, \quad x \geqslant 0.$$

Последнее проверяется прямой подстановкой представления (2) в систему (1).

Определим *оператор реакции* $R^{2T} : L^2(0,2T) \mapsto L^2(0,2T)$

$$R^{2T}f(t) := u^f_x(0,t) = -f'(t) + \int_0^t w_x(0,t-s)f(s)ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T. \tag{3}$$

Если в качестве управления $f(t)$ взять дельта-функцию Дирака, то получим, что

$$R^{2T}\delta(t) = u^\delta_x(0,t) = -\delta'(t) + w_x(0,t) = -\delta'(t) + r(t), \quad r(t) := w_x(0,t).$$

Заметим, что все построения (2)–(3) выполнялись при известном потенциале $q(x)$. Теперь сформулируем обратную задачу.

Обратная задача 1. По заданному оператору R^{2T} восстановить потенциал $q(x)$ на интервале $[0,T]$.

Эквивалентная формулировка. По заданному ядру оператора R^{2T} — функции $r(t)$ — восстановить потенциал $q(x)$ на интервале $[0,T]$.

Опишем схему метода граничного управления (более подробно см., например, [1]). Для этого нам потребуется ввести *оператор управления* $W^T : L^2(0,T) \mapsto L^2(0,T)$

$$(W^T f)(x) := u^f(x,T) = f(T-x) + \int_0^{T-x} w(x,T-s)f(s)ds \tag{4}$$

и *связывающий оператор* $C^T : L^2(0,T) \to L^2(0,T)$

$$C^T := (W^T)^* W^T, \quad (C^T f, g) = (W^T f, W^T g).$$

Центральный факт метода граничного управления состоит в том, что связывающий оператор C^T определяется оператором R^{2T}, т. е. данными обратной задачи.

Теорема 1 (см. [1]). *Оператор C^T есть положительный изоморфизм в $L^2(0,T)$ и справедливы следующие соотношение и представление*

$$C^T = \frac{1}{2}(S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T,$$

$$(C^T f)(t) = f(t) + \int_0^T \left[\frac{1}{2}\int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)d\eta\right] f(s)ds, \tag{5}$$

где вспомогательные операторы S^T и J^{2T} определяются как

$$(S^T)f(t) := \begin{cases} f(t), & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -f(2T-t), & T \leqslant t \leqslant 2T, \end{cases} \quad (J^{2T})f(t) := \int_0^t f(s)\,ds.$$

Замечание 1. Ядро $c(s,t)$ интегрального оператора C^T имеет вид

$$c(s,t) = \delta(t-s) + \frac{1}{2} \int\limits_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta)\, d\eta$$

и удовлетворяет системе

$$\begin{gathered} c_{tt}(s,t) = c_{ss}(s,t), \quad 0 \leqslant s \leqslant T, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ c(T,s) = c(s,T) = \delta(T-s), \quad c_s(T,s) = c_t(s,T) = -r(T-s) - \delta'(s-T). \end{gathered} \tag{6}$$

Для функции $\psi(x,\lambda)$ решения системы Штурма—Лиувилля

$$\begin{gathered} -\psi'' + q\psi = \lambda\psi, \quad x > 0, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1 \end{gathered} \tag{7}$$

поставим специальную задачу граничного управления: найти функцию $f_T \in L^2(0,T)$ такую, что

$$(W^T f_T)(x) = \psi(x,\lambda), \quad 0 \leqslant x \leqslant T. \tag{8}$$

Это означает, что требуется найти управление $f_T(t)$ такое, что $u^{f_T}(x,t)$ — решение системы (1) в момент времени $t = T$ совпадёт с функцией $\psi(x,\lambda)$. Другими словами, вопрос заключается в том, можно ли получить заданный профиль волны $\psi(x,\lambda)$ оперируя граничным управлением.

Теорема 2 (см. [1]). *Управление $f_T(\cdot) = (W^T)^{-1}\psi(\cdot,\lambda)$ является единственным в $L_2(0,T)$ решением уравнения*

$$(C^T f_T)(t) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}(T-t)}{\sqrt{\lambda}}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{9}$$

Заметим, что благодаря (4) и (8) мы знаем, что

$$u^{f_T}(T,T) = f_T(0) = \psi(T,\lambda), \tag{10}$$

где функция $f_T(t)$ найдена как решение уравнения (9). Тем самым, мы смогли восстановить значение $\psi(x,\lambda)$ в точке $x = T$. Будем считать, что в (8)–(10) число T является параметром и мы можем уменьшать его до 0. Тогда из (10) видно, что мы можем восстановить $\psi(x,\lambda)$ для $0 \leqslant x \leqslant T$. И когда значения функции $\psi(x,\lambda)$ восстановлено во всех точках $0 \leqslant x \leqslant T$, то потенциал $q(x)$ находится из (7) и (10) как

$$q(x) = \frac{\psi''(x,\lambda)}{\psi(x,\lambda)} + \lambda = \frac{d^2 f_T}{dT^2} f_T^{-1} + \lambda. \tag{11}$$

Заметим, что $\lambda = 0$ в (7)–(11) соответствует функции $T - t$ в правой части (9). Уравнение (9) является динамическим аналогом уравнения Крейна, см. [4, 5].

Верен следующий результат о *характеризации данных обратной задачи.*

Теорема 3 (см. [1]). *Оператор, определённый правой частью (3), есть оператор реакции для системы (1) в том и только в том случае, если оператор C^T, определяемый правой частью (5), есть положительно определённый изоморфизм в $L_2(0,T)$.*

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Данная задача изучалась в работах [6, 7]. Сформулируем постановку задачи, введём основные понятия и приведём результат.

2.1. Динамическая задача

Последовательности положительных чисел $\{a_0, a_1, \ldots\}$ (в дальнейшем мы предполагаем $a_0 = 1$) и вещественных чисел $\{b_1, b_2, \ldots\}$, сопоставим матрицу Якоби вида

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим дискретное волновое уравнение, связанное с A:

$$\begin{gathered} u_{n,t+1} + u_{n,t-1} - a_n u_{n+1,t} - a_{n-1}u_{n-1,t} - b_n u_{n,t} = 0, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n \in \mathbb{N} \\ u_{n,\,-1} = u_{n,\,0} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ u_{0,\,t} = f_t, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $f = (f_0, f_1, \ldots)$ — *граничное управление*. Решение задачи (12) обозначим через u^f. Для него справедливо следующее представление:

$$u^f_{n,t} = \prod_{k=0}^{n-1} a_k f_{t-n} + \sum_{s=n}^{t-1} w_{n,s} f_{t-s-1}, \quad n, t \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

где функция $w_{n,s}$ является решением задачи Гурса

$$\begin{gathered} w_{n,s+1} + w_{n,s-1} - a_n w_{n+1,s} - a_{n-1}w_{n-1,s} - b_n w_{n,s} = -\delta_{s,n}(1 - a_n^2)\prod_{k=0}^{n-1} a_k, \quad n, s \in \mathbb{N}, \quad s > n, \\ w_{n,n} - b_n \prod_{k=0}^{n-1} a_k - a_{n-1} w_{n-1,n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ w_{0,t} = 0, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{gathered}$$

а $\delta_{s,n}$ — символ Кронекера. Нетрудно показать, что задача Гурса имеет единственное решение.

Соответствие вход $\longmapsto$ выход в системе (12) реализуется *оператором реакции* $R^T : \mathbb{R}^T \mapsto \mathbb{R}^T$, определяемым правилом

$$\begin{gathered} \left(R^T f\right)_t := u^f_{1,\,t} = \sum_{s=0}^{t} r_s f_{t-1-s}, \quad t = 1, \ldots, T, \\ \left(R^T \delta\right)_t = u^\delta_{1,t} = r_{t-1}, \quad \text{где } \delta = (1, 0, \ldots), \end{gathered} \tag{14}$$

$r = (r_0, r_1, \ldots, r_{T-1})$ — *вектор реакции* (сверточное ядро оператора реакции).

Заметим, что все построения (13)–(14) выполнялись при известных коэффициентах a_k, b_k. Теперь сформулируем обратную задачу.

Обратная задача 2. По заданному оператору R^{2T} восстановить числа $a_1, a_2, \ldots, a_{T-1}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_T$.

Эквивалентная формулировка 1. По заданному ядру оператора R^{2T} — вектору $r = (r_0, r_1, \ldots, r_{2T-1})$ — восстановить числа $a_1, a_2, \ldots, a_{T-1}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_T$.

Для задачи (12) мы введём *оператор управления* $W^T : \mathbb{R}^T \mapsto \mathbb{R}^T$ и *связывающий оператор* $C^T : \mathbb{R}^T \mapsto \mathbb{R}^T$, действующие по правилу

$$W^T f := (u^f_{1,\,T}, \ldots, u^f_{T,\,T}), \quad C^T := (W^T)^* W^T, \quad (C^T f, g) = (W^T f, W^T g).$$

Верен следующий аналог теоремы 1.

Теорема 4 (см. [7]). *Оператор C^T есть положительный изоморфизм в $\mathbb{R}^T$ и справедливо следующее представление матрицы оператора C^T*

$$C_{ij}^T = \sum_{k=0}^{T-\max\{i,j\}} r_{|i-j|+2k},$$

$$C^T = \begin{pmatrix} r_0+r_2+\ldots+r_{2T-2} & \cdot & \ldots & r_T+r_{T-2} & r_{T-1} \\ r_1+r_3+\ldots+r_{2T-3} & \cdot & \ldots & r_{T-1}+r_{T-3} & r_{T-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{T-3}+r_{T-1}+r_{T+1} & \cdot & r_0+r_2+r_4 & r_1+r_3 & r_2 \\ r_T+r_{T-2} & \cdot & r_1+r_3 & r_0+r_2 & r_1 \\ r_{T-1} & \cdot & r_2 & r_1 & r_0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Замечание 2. Матрица C_{ij}^T удовлетворяет системе (дискретный аналог (6))

$$\begin{gathered} C_{i,j+1}^T + C_{i,j-1}^T = C_{i+1,j}^T + C_{i-1,j}^T, \quad i,j=2,\ldots,T \\ C_{i,T}^T = C_{T,i}^T = r_{T-i}, \quad C_{i,T+1}^T = C_{T+1,i}^T = 0, \quad i=1,\ldots,T. \end{gathered} \tag{16}$$

Как видно из (15), связывающий оператор выражается через данные обратной задачи (вектор реакции). Этот факт является ключевым для решения обратной задачи.

Далее рассмотрим дискретную задачу Коши для разностного уравнения

$$\begin{gathered} a_k\psi_{k+1} + b_k\psi_k + a_{k-1}\psi_{k-1} = 0, \\ \psi_0 = 0, \quad \psi_1 = 1, \end{gathered}$$

которая является аналогом (7). Сформулируем специальную задачу управления: найти управление $f^T \in \mathbb{R}^T$ такое, что

$$W^T f^T = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_T). \tag{17}$$

Пусть $\varkappa^T$ — решение задачи

$$\begin{gathered} \varkappa_{t+1}^T + \varkappa_{t-1}^T = 0, \quad t=1,\ldots,T, \\ \varkappa_T^T = 0, \quad \varkappa_{T-1}^T = 1. \end{gathered}$$

Верна следующая теорема.

Теорема 5 (см. [7]). *Управление f^T, определяемое (17), является единственным решением уравнения*

$$C^T f^T = \varkappa^T. \tag{18}$$

Заметим, что дискретные задачи и уравнения (17), (18) являются аналогами задач (8) и (9). Так же как и в непрерывном случае, далее мы можем восстановить искомые элементы матрицы A. В дискретном случае решение имеет вид

$$a_k = \frac{\left(\det C^{k+1}\right)^{\frac12}\left(\det C^{k-1}\right)^{\frac12}}{\det C^k}, \quad k=1,\ldots T-1, \tag{19}$$

$$b_k = -\frac{\det \widetilde{C}^k}{\det C^k} + \frac{\det \widetilde{C}^{k-1}}{\det C^{k-1}}, \quad k=1,\ldots T. \tag{20}$$

Здесь мы полагаем что матрицы C^k определяются правой частью (15) при $T=k$, $\det C^0 = 1$. Матрица $\tilde{C}^k$ получена из матрицы C^{k+1} удалением из неё первой строчки и второго столбца. Из формул (19), (20) и представления (15) видно, что a_k зависит от $r_0,\ldots,r_{2k}$, а b_k зависит от $r_0,\ldots,r_{2k-1}$.

Верны следующие результаты о *характеризации данных обратной задачи.*

Теорема 6 (см. [7]). *Вектор* $(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{2T-1})$ *является вектором реакции для какого-то дискретного волнового уравнения (12) тогда и только тогда, когда матрица* C^T*, определяемая правой частью (15), положительно определена.*

Теорема 7 (см. [7]). *Вектор* $(r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{2T-1})$ *является вектором реакции для какого-то дискретного волнового уравнения с* $a_k = 1$ $k = 1, \ldots, T-1$ *тогда и только тогда, когда матрица* C^T*, определяемая правой частью (15), положительно определена и* $\det C^k = 1$, $k = 1, \ldots, T$.

2.2. Спектральная задача

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим начально-краевую задачу для дискретного волнового уравнения с условием Дирихле при $n = N+1$: $v_{N+1,t} = 0$, $t = 0, 1, \ldots$.

$$\begin{gathered} v_{n,t+1} + v_{n,t-1} - a_n v_{n+1,t} - a_{n-1} v_{n-1,t} - b_n v_{n,t} = 0, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ v_{n,-1} = v_{n,0} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ v_{0,t} = f_t, \quad v_{N+1,t} = 0, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{gathered} \tag{21}$$

Решение данной системы обозначим через v^f. Пусть $\phi_n(\lambda)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{gathered} a_n \phi_{n+1} + b_n \phi_n + a_{n-1} \phi_{n-1} = \lambda \phi_n, \\ \phi_0 = 0, \ \phi_1 = 1. \end{gathered}$$

Обозначим

$$A_N := \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{N-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}.$$

Пусть $\{\varphi^{k,N}, \lambda_k^N\}_{k=1}^N$ — собственные векторы и собственные значения матрицы A_N такие, что $\varphi_1^{k,N} = 1$. Зададим числа ρ_k^N как

$$(\varphi^{k,N}, \varphi^{l,N}) =: \delta_{kl} \rho_k^N,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, δ_{kl} — символ Кронекера.

Множество пар

$$\{\lambda_k^N, \rho_k^N\}_{k=1}^N$$

называют *спектральными данными* оператора A_N. По спектральным данным строится *спектральная функция*,

$$\rho^N(\lambda) := \sum_{\{k \mid \lambda_k^N < \lambda\}} \frac{1}{\rho_k^N}. \tag{22}$$

Обратная задача 3. По заданным спектральным данным оператора A_N восстановить числа $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

Эквивалентная формулировка. По заданной спектральной функции ρ^N восстановить числа $a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

Решение v^f при разложении по собственному базису имеет вид

$$v_{n,t}^f = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^N c_t^k \varphi_n^k, & n = 1, \ldots, N, \\ f_t, & n = 0, \end{cases}$$

где коэффициенты c^k определяются соотношением

$$c^k = \frac{1}{\rho_k^N} \sum_{i=0}^{k} f_{k-i} \mathcal{T}_i(\lambda_k^N),$$

а функции $\mathcal{T}_i(\lambda)$ являются полиномами степени $i-1$ от λ и удовлетворяют системе

$$\begin{gathered} \mathcal{T}_{i+1} + \mathcal{T}_{i-1} - \lambda \mathcal{T}_i = 0, \\ \mathcal{T}_0 = 0, \quad \mathcal{T}_1 = 1. \end{gathered} \tag{23}$$

Таким образом полиномы $\mathcal{T}_i(2\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots$ — суть полиномы Чебышева второго рода, поскольку и те и другие удовлетворяют рекуррентным соотношениям (23).

Для задачи(21) введём *оператор реакции* $R_D^T : \mathbb{R}^T \mapsto \mathbb{R}^T$, *оператор управления* W_D^T : $\mathbb{R}^T \mapsto \mathbb{R}^T$ и *связывающий оператор* $C_D^T : \mathbb{R}^T \mapsto \mathbb{R}^T$, действующие по правилу

$$\left(R_D^T f\right)_t := v_{1,t}^f = \sum_{s=0}^{t} r_s^D f_{t-1-s}, \quad t = 0, \ldots, T,$$
$$W_D^T f := (v_{1,T}^f, \ldots, v_{T,T}^f), \quad C_D^T := (W^T)^* W^T, \quad (C_D^T f, g) = (W_D^T f, W_D^T g).$$

Теорема 8 (см. [7]). *Вектор реакции r^D и связывающий оператор C_D^N системы (21) выражаются через спектральные данные, а именно верны формулы*

$$r_{t-1}^D = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_t(\lambda)\, d\rho^N(\lambda), \quad t \in \mathbb{N},$$

$$\{C_D^N\}_{l+1,m+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_{N-l}(\lambda) \mathcal{T}_{N-m}(\lambda)\, d\rho^N(\lambda), \quad l, m = 0, \ldots, N-1.$$

Следствием этой теоремы является то, что из спектральных данных можно получить вектор реакции и связывающий оператор. Кроме того, $r_t^D = r_t$, $t \leqslant N$ и $C_D^N = C^N$. Следовательно, формулы (19)–(20) дают решение обратной спектральной задачи.

Приведённая выше постановка была дискретной, т. е. дискретизировались производные по пространственной и по временной переменной. Случай дискретизации только пространственной переменной изучен в работе [8].

3. ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ И ДИНАМИКА

Связь классической проблемы моментов (см., например, [9–11]) и обратной задачи для динамической системы исследовалась в работах [12, 13]. Сформулируем проблему и приведём результат.

Проблема моментов Гамбургера. По заданной последовательности *моментов* $s_0, s_1, s_2, \ldots$ найти борелевскую меру $d\rho(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ такую, что

$$s_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^k\, d\rho(\lambda), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Проблема моментов Стилтьеса. По заданной последовательности *моментов* $s_0, s_1, s_2, \ldots$ найти борелевскую меру $d\rho(\lambda)$ с носителем на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ такую, что $d\rho(\lambda)$ является решением проблемы моментов Гамбургера.

Проблема моментов Хаусдорфа. По заданной последовательности *моментов* $s_0, s_1, s_2, \ldots$ найти борелевскую меру $d\rho(\lambda)$ с носителем на отрезке $[0, 1]$ такую, что $d\rho(\lambda)$ является решением проблемы моментов Гамбургера.

Покажем, что проблемы моментов связаны с решением динамической задачи. Полиномы $\mathcal{T}_k(\lambda)$ из (23) являются линейной комбинацией полиномов $\{1, \lambda^2, \dots \lambda^k\}$.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_1(\lambda) \\ \mathcal{T}_2(\lambda) \\ \dots \\ \mathcal{T}_n(\lambda) \end{pmatrix} = \Lambda_n \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \dots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \dots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $\Lambda_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определяются как

$$\Lambda_n = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{cases} 0, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{если } i+j \text{ нечётно}, \\ C^j_{\frac{i+j}{2}}(-1)^{\frac{i+j}{2}+j}, & \text{если } i+j \text{ чётно}, \end{cases}$$

где C^i_j — биномиальные коэффициенты. По теореме 8 компоненты вектора реакции связаны с моментами соотношением

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \dots \\ r_{n-1} \end{pmatrix} = \Lambda_n \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \dots \\ s_{n-1} \end{pmatrix}, \quad r^i_{t-1} = \int_{-\infty}^{\infty} T_t(\lambda)\, d\rho^N(\lambda). \tag{25}$$

Процедура решения проблемы моментов состоит в следующем:

- Найти $(r_0, r_1, r_2, \dots, r_{2N-2})$ по $(s_0, s_1, \dots, s_{2N-2})$ по формуле (25).
- Восстановить $N \times N$ матрицу Якоби A^N, используя (19)–(20) для a_k, b_k.
- Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A^N. По формуле (22) построить спектральную функцию $\rho^N(\lambda)$ и перейти к (слабому) пределу по N стремящемуся к бесконечности (см. [12]).

Эта процедура использует матрицу A^N для восстановления спектральной меры, что требует вычисления элементов a_k, b_k. Следующая модификация позволяет исключить второй пункт указанной выше процедуры, при этом спектральная задача в третьем шаге изменится.

Рассмотрим матрицу B^N, элементы которой строятся из элементов матрицы C^N

$$B^N = \begin{pmatrix} c_{N,N+1} + c_{N,N-1} & \dots & c_{N,3} + c_{N,1} & c_{N,2} \\ c_{N-1,N+1} + c_{N-1,N-1} & \dots & c_{N-1,3} + c_{N-1,1} & c_{N-1,2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{1,N+1} + c_{1,N-1} & \dots & \dots & c_{1,2} \end{pmatrix},$$

где

$$C^N = \begin{pmatrix} c_{N,N} & \dots & c_{N,2} & c_{N,1} \\ c_{N-1,N} & \dots & c_{N-1,2} & c_{N-1,1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{1,N} & \dots & \dots & c_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Теорема 9 (см. [12]). *Собственные числа и собственные векторы f^N_k, $k = 1, \dots, N$ матрицы A^N — суть собственные числа и собственные векторы следующей обобщённой спектральной задачи*

$$B^N f^N_k = \lambda^N_k C^N f^N_k, \quad k = 1, \dots, N. \tag{26}$$

Найдя спектр и управления из (26), мы можем восстановить спектральную функцию A^N с граничным условием Дирихле при $n = N + 1$ следующим образом:

- Нормируем функции управления, выбрав $f_k^N : \left(C^N f_k^N, f_k^N\right) = 1$.
- Определим константу $\alpha_k^N := \left(R f_k^N\right)_N$.
- Определим нормирующие коэффициенты по формуле $\rho_k^N := (\alpha_k^N)^2$, $k = 1, \dots, N$.
- Восстановим спектральную функцию

$$\rho^N(\lambda) := \sum_{\{k \,|\, \lambda_k < \lambda\}} \frac{1}{\rho_k^N}.$$

и перейдём к (слабому) пределу при $N \to \infty$.

Таким образом может быть построено решение проблемы моментов без промежуточного построения матрицы A_N. Для характеризации данных обратной задачи, определим матрицы Ганкеля S_k^{N+1} через моменты $\{s_j\}_{j=k}^{2N+k}$ следующим образом

$$S_k^{N+1} := \begin{pmatrix} s_{2N+k} & s_{2N-1+k} & \dots & s_{N+1+k} & s_{N+k} \\ s_{2N-1+k} & s_{2N-2+k} & \dots & s_{N+k} & \dots \\ s_{2N-2+k} & \cdot & \cdot & \dots & s_{2+k} \\ \dots & s_{N+k} & \dots & s_{2+k} & s_{1+k} \\ s_{N+k} & \dots & s_{2+k} & s_{1+k} & s_k \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Теорема 10 (см. [13]). *Набор чисел $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ является моментами меры $d\rho$*

- *с носителем на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $S_0^N > 0$,*
- *с носителем на $\mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия $S_0^N > 0$, $S_1^N > 0$,*
- *с носителем на $\mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда выполнены два условия $S_0^N \geqslant S_1^N > 0$,*

при всех $N \in \mathbb{N}$.

Из представления (15) и связи (25) следует, что матрица моментов S_0^N связана с матрицей связывающего оператора C^N соотношением

$$C^N = (\tilde{\Lambda}_N)^* S_0^N \tilde{\Lambda}_N,$$

где

$$\tilde{\Lambda}_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} \Lambda_N^* \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Lambda}_{N,N} & \dots & \tilde{\Lambda}_{N,2} & \tilde{\Lambda}_{N,1} \\ \tilde{\Lambda}_{N-1,N} & \dots & \tilde{\Lambda}_{N-1,2} & \tilde{\Lambda}_{N-1,1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \tilde{\Lambda}_{1,N} & \dots & \dots & \tilde{\Lambda}_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Из вида матрицы Λ_N и соотношений для биномиальных коэффициентов следует, что матрица $\tilde{\Lambda}_N$ нижне-треугольная и удовлетворяет системе

$$\begin{gathered} \tilde{\Lambda}_{i,j} = 0, \quad 1 \leqslant j < i \leqslant N, \\ \tilde{\Lambda}_{i-1,j} = \tilde{\Lambda}_{i,j+1} + \tilde{\Lambda}_{i,j-1}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N, \\ \tilde{\Lambda}_{0,i} = 0, \; \tilde{\Lambda}_{i,i} = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \end{gathered}$$

а, следовательно, обратима и

$$S_0^N = (\tilde{\Lambda}_N^{-1})^* C^N \tilde{\Lambda}_N^{-1}.$$

Из вида $\tilde{\Lambda}_N$ и соотношений для биномиальных коэффициентов следует, что матрица $\tilde{\Lambda}_N^{-1}$ нижне-треугольная и удовлетворяет системе

$$\tilde{\Lambda}_{i,j}^{-1} = 0, \quad 1 \leqslant j < i \leqslant N,$$
$$\tilde{\Lambda}_{i,j+1}^{-1} = \tilde{\Lambda}_{i+1,j}^{-1} + \tilde{\Lambda}_{i-1,j}^{-1}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N,$$
$$\tilde{\Lambda}_{i,0}^{-1} = 0,\ \tilde{\Lambda}_{i,i}^{-1} = 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Формула (25) принимает вид

$$\begin{pmatrix} r_{N-1} \\ r_{N-2} \\ \dots \\ r_0 \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}_N^* \begin{pmatrix} s_{N-1} \\ s_{N-2} \\ \dots \\ s_0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} s_{N-1} \\ s_{N-2} \\ \dots \\ s_0 \end{pmatrix} = (\tilde{\Lambda}_N^*)^{-1} \begin{pmatrix} r_{N-1} \\ r_{N-2} \\ \dots \\ r_0 \end{pmatrix}.$$

4. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим начально-краевую задачу для дискретного уравнения теплопроводности:

$$\begin{gathered} v_{n,t+1} - a_n v_{n+1,t} - a_{n-1} v_{n-1,t} - b_n v_{n,t} = 0, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n \in \mathbb{N} \\ v_{n,0} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ v_{0,t} = f_t, \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{gathered} \tag{28}$$

где $f = (f_0, f_1, \dots)$ — *граничное управление*. Через v^f обозначим решение (28). Для него справедливо следующее представление

$$v_{n,t}^f = \prod_{k=0}^{n-1} a_k f_{t-n} + \sum_{s=n}^{t-1} w_{n,s} f_{t-s-1}, \quad n, t \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

где функция $w_{n,s}$ является решением задачи Гурса

$$w_{n,s+1} - a_n w_{n+1,s} - a_{n-1} w_{n-1,s} - b_n w_{n,s} = \delta_{s,n} a_n^2 \prod_{k=0}^{n-1} a_k, \quad n, s \in \mathbb{N}, \quad s > n,$$
$$w_{n,n} - b_n \prod_{k=0}^{n-1} a_k - a_{n-1} w_{n-1,n-1} = 0, \quad w_{n,n-1} = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$w_{0,t} = 0, \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Легко проверить, что задача Гурса разрешима, причём единственным образом.

Определим *оператор реакции* $R_v^T : \mathbb{R}^T \mapsto \mathbb{R}^T$ правилом

$$\begin{gathered} \left(R_v^T f\right)_t := v_{1,t}^f = \sum_{k=0}^{t} \sigma_k f_{t-1-k}, \quad t = 1, \dots, T, \\ \left(R_v^T \delta\right)_t = v_{1,t}^\delta = \sigma_{t-1}, \quad \text{где } \delta = (1, 0, \dots), \end{gathered} \tag{30}$$

а $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{T-1})$ — *вектор реакции* (сверточное ядро оператора реакции).

Заметим, что все построения (29)–(30) выполнялись при известных коэффициентах a_k, b_k. Теперь сформулируем обратную задачу.

Обратная задача 4. По заданному оператору R_v^{2T} восстановить числа $a_1, a_2, \dots a_{T-1}$ и $b_1, b_2, \dots b_T$.

Эквивалентная формулировка. По заданному ядру оператора R_v^{2T} — вектору $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{2T-1})$ восстановить числа $a_1, a_2, \dots a_{T-1}$ и $b_1, b_2, \dots b_T$.

Для системы (28) введём *оператор управления* $V^T : \mathbb{R}^T \mapsto \mathbb{R}^T$ и *связывающий оператор* $S^T : \mathbb{R}^T \mapsto \mathbb{R}^T$ по правилам

$$V^T f := (v^f_{1,T}, \dots, v^f_{T,T}); \quad S^T := (V^T)^* V^T, \quad (S^T f, g) = (V^T f, V^T g).$$

В случае, когда $a_k = 1$, $b_k = 0$ для всех k, назовём соответствующий оператор управления V_0^T.

Нетрудно проверить, что верно следующее представление (аналог теоремы 4).

Теорема 11. *Оператор S^T является положительным изоморфизмом в $\mathbb{R}^T$ и справедливо следующее представление матрицы оператора S^T*

$$S^T_{ij} = \sigma_{2T-(i+j)}, \quad S^T = \begin{pmatrix} \sigma_{2T-2} & \dots & \dots & \sigma_T & \sigma_{T-1} \\ \sigma_{2T-3} & \dots & \dots & \dots & \sigma_{T-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{T+1} & \dots & \sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 \\ \sigma_T & \dots & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \\ \sigma_{T-1} & \dots & \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Замечание 3. Матрица S^T_{ij} является ганкелевой и удовлетворяет системе (аналог (6) и (16))

$$S^T_{i,j+1} + S^T_{i,j-1} = S^T_{i+1,j} + S^T_{i-1,j}, \quad i,j = 2, \dots, T,$$
$$S^T_{i,T} = S^T_{T,i} = \sigma_{T-i}, \quad S^T_{i,T+1} = S^T_{T+1,i} = \sigma_{T-i}, \quad i = 1, \dots, T.$$

Замечание 4. Матрица моментов S_0^T (27) совпадёт с матрицей оператора S^T (31), если положить $s_k = \sigma_k$, $k = 0, \dots, 2T-2$. Это означает, что моменты $s_0, s_1, \dots$, из (24) могут быть интерпретированы как компоненты ядра оператора реакции (30) и наоборот: компоненты ядра оператора реакции могут быть интерпретированы как моменты.

Следовательно, все формулы, полученные в предыдущем разделе для матрицы моментов S_0^T, будут верны для матрицы связывающего оператора S^T. Например, из формул (19), (20) и соотношения $C^T = (\tilde{\Lambda}_T)^* S_0^T \tilde{\Lambda}_T$ следуют формулы, выражающие коэффициенты a_k, b_k через определители матриц S^T

$$a_k = \frac{\left(\det S^{k+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\det S^{k-1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\det S^k}, \quad k = 1, \dots T-1, \tag{32}$$

$$b_k = -\frac{\det \widetilde{S}^k}{\det S^k} + \frac{\det \widetilde{S}^{k-1}}{\det S^{k-1}}, \quad k = 1, \dots T. \tag{33}$$

Здесь мы предполагаем что $\det S^0 = 1$. Матрица $\tilde{S}^k$ получена из матрицы S^{k+1} удалением из неё первой строчки и второго столбца. Из формул (32), (33) и представления (31) видно, что a_k зависит от $\sigma_0, \dots, \sigma_{2k}$, а b_k зависит от $\sigma_0, \dots, \sigma_{2k-1}$. Свойства матриц моментов изучались в работах [14–16].

Главный итог этого раздела заключается в следующих утверждениях о связях между операторами, отвечающими дискретному волновому уравнению и уравнению теплопроводности.

Теорема 12. *Ядра операторов реакции R^T и R_v^T для двух задач: дискретного волнового уравнения (21) и дискретного уравнения теплопроводности (28) связаны соотношениями*

$$\begin{pmatrix} r_{T-1} \\ r_{T-2} \\ \dots \\ r_0 \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}_T^* \begin{pmatrix} \sigma_{T-1} \\ \sigma_{T-2} \\ \dots \\ \sigma_0 \end{pmatrix} \quad и \quad \begin{pmatrix} \sigma_{T-1} \\ \sigma_{T-2} \\ \dots \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = (\tilde{\Lambda}_T^*)^{-1} \begin{pmatrix} r_{T-1} \\ r_{T-2} \\ \dots \\ r_0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Кроме того, связывающие операторы C^T и S^T этих двух задач связаны соотношениями

$$C^T = (\tilde{\Lambda}_T)^* S^T \tilde{\Lambda}_T, \quad S^T = (\tilde{\Lambda}_T^{-1})^* C^T \tilde{\Lambda}_T^{-1}. \tag{35}$$

Заметим, что если $a_k = 1$, $b_k = 0$ при всех $k = 1, 2, \dots$, то из формулы (15) следует, что $C^T = I$ — единичная матрица. Тогда формулы (35) приведут к тождеству

$$S^T = (V_0^T)^* V_0^T = (\tilde{\Lambda}_T^{-1})^* \tilde{\Lambda}_T^{-1}.$$

Из единственности разложения Холецкого мы получаем следующее утверждение.

Замечание 5. Преобразование $\tilde{\Lambda}_N^{-1}$, осуществляющее связь (34)–(35) операторов реакций и связывающих операторов для уравнения теплопроводности и волнового уравнения является оператором управления для уравнения теплопроводности при $a_k = 1$, $b_k = 0$

$$\tilde{\Lambda}_T^{-1} = V_0^T.$$

Замечание 6. Из формул (35), определения связывающих операторов $S^T = (V^T)^* V^T$, $C^T = (W^T)^* W^T$ и единственности разложения Холецкого следует, что

$$W^T = V^T \tilde{\Lambda}_T.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для дискретных задач для уравнения теплопроводности и волнового уравнения показано, что операторы реакции, операторы управления и связывающие операторы связаны соотношениями

$$C^T = (\tilde{\Lambda}_T)^* S^T \tilde{\Lambda}_T, \quad S^T = (\tilde{\Lambda}_T^{-1})^* C^T \tilde{\Lambda}_T^{-1},$$
$$W^T = V^T \tilde{\Lambda}_T, \quad V^T = W^T (\tilde{\Lambda}_T)^{-1},$$
$$\begin{pmatrix} r_{T-1} \\ r_{T-2} \\ \dots \\ r_0 \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}_T^* \begin{pmatrix} \sigma_{T-1} \\ \sigma_{T-2} \\ \dots \\ \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sigma_{T-1} \\ \sigma_{T-2} \\ \dots \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = (\tilde{\Lambda}_T^*)^{-1} \begin{pmatrix} r_{T-1} \\ r_{T-2} \\ \dots \\ r_0 \end{pmatrix},$$

где в роли оператора преобразования $\tilde{\Lambda}_T^{-1}$ выступает оператор управления для задачи теплопроводности с нулевым потенциалом ($a_k = 1$, $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$)

$$\tilde{\Lambda}_T^{-1} = V_0^T.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджетов Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН и Санкт-Петербургского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belishev M. I.* Boundary control and inverse problems: The one-dimensional variant of the BC-method // J. Math. Sci. 2008. V. 155, N 3. P. 343–378; DOI: 10.1007/s10958-008-9220-2
2. *Belishev M. I., Mikhaylov V. S.* Unified approach to classical equations of inverse problem theory // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. V. 20, N 4. P. 461–488; DOI: 10.1515/jip-2012-0040
3. *Лаврентье М. М., Резницкая К. Г., Яхно В. Г.* Одномерные обратные задачи математической физики. Новосибирск: Наука, 1982.
4. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Доклады АН СССР. 1954. Т. 94, № 6. С. 987–990.
5. *Благовещенский А. С.* О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Труды МИАН СССР. 1971. Т. 115. С. 28–38.
6. *Mikhaylov A. S., Mikhaylov V. S.* Dynamic inverse problem for the discrete Schrödinger operator // Nanosyst. Phys. Chem. Math. 2016. V. 7, N 5. P. 842–853; DOI: 10.17586/2220-8054-2016-7-5-842-853
7. *Mikhaylov A. S., Mikhaylov V. S.* Dynamic inverse problem for Jacobi matrices // Inverse Probl. Imaging. 2019. V. 13, N 3. P. 431–447; DOI: 10.3934/ipi.2019021
8. *Mikhaylov A. S., Mikhaylov V. S.* Dynamic inverse problem for a Krein—Stieltjes string // Appl. Math. Lett. 2019. V. 96. P. 195–201; DOI: 10.1016/j.aml.2019.05.002
9. *Akhiezer N. I.* The classical moment problem. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1965; DOI: 10.1017/S0013091500011500
10. *Schmüdgen K.* The moment problem. Cham: Springer, 2017; DOI: 10.1007/978-3-319-64546-9
11. *Simon B.* The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator // Adv. Math. 1998. V. 137. P. 82–203; DOI: 10.1006/AIMA.1998.1728
12. *Mikhaylov A. S., Mikhaylov V. S.* Inverse problem for dynamical system associated with Jacobi matrices and classical moment problems // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 487, N 1. Article 123970; DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.123970
13. *Mikhaylov A. S., Mikhaylov V. S.* On an application of the Boundary control method to classical moment problems // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 2092. Article 012002; DOI: 10.1088/1742-6596/2092/1/012002
14. *Berg C., Chen Y., Ismail M. E. H.* Small eigenvalues of large Hankel matrices: The indeterminate case // Math. Scand. 2002. V. 91, N 1. P. 67–81; DOI: 10.7146/math.scand.a-14379
15. *Berg C., Szwarc R.* Inverse of infinite Hankel moment matrices // Symmetry Integr. Geom. 2018. V. 14. Article 109; DOI: 10.3842/SIGMA.2018.109
16. *Berg C., Szwarc R.* Closable Hankel Operators and Moment Problems // Integral Equ. Oper. Theory. 2020. V. 92, N 1. Article 5; DOI: 10.1007/s00020-020-2561-z

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.951

ON THE CONNECTIONS BETWEEN HYPERBOLIC AND PARABOLIC INVERSE ONE-DIMENSIONAL DISCRETE PROBLEMS

© 2024 A. S. Mikhaylov[1,2a], V. S. Mikhaylov[1b]

[1]*St.Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, St.Petersburg, 191023 Russia*
[2]*St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia*

E-mails: [a]mikhaylov@pdmi.ras.ru, [b]vsmikhaylov@pdmi.ras.ru

Received 03.03.2024, revised 29.05.2024, accepted 29.05.2024

Abstract. The boundary control method is applied to the solution of one-dimensional discrete inverse problems. The discrete counterparts of the operators used in the method (the control, response, and connecting operators) are defined. The relations between the operators corresponding to the discrete wave equation and the discrete heat equation are established.

Keywords: boundary control method, connection between data of inverse problems, discrete dynamical system.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.308

REFERENCES

1. M. I. Belishev, "Boundary control and inverse problems: The one-dimensional variant of the BC-method," J. Math. Sci. **155** (3), 343–378 (2008). https://doi.org/10.1007/s10958-008-9220-2
2. M. I. Belishev and V. S. Mikhaylov, "Unified approach to classical equations of inverse problem theory," J. Inverse Ill-Posed Probl. **20** (4), 461–488 (2012). https://doi.org/10.1515/jip-2012-0040
3. M. M. Lavrent'ev, K. G. Reznitskaya, and V. G. Yakhno, *One-Dimensional Inverse Problems of Mathematical Physics* (Nauka, Novosibirsk, 1982) [in Russian].
4. M. G. Krein, "On one method of effective solution of the inverse boundary value problem," Dokl. Akad. Nauk SSSR **94** (6), 987–990 (1954) [in Russian].
5. A. S. Blagoveshchenskii, "On a local method for solving a nonstationary inverse problem for an inhomogeneous string," Tr. MIAN SSSR **115**, 28–38 (1971) [in Russian].
6. A. S. Mikhaylov and V. S. Mikhaylov, "Dynamic inverse problem for the discrete Schrödinger operator," Nanosyst. Phys. Chem. Math. **7** (5), 842–853 (2016). https://doi.org/10.17586/2220-8054-2016-7-5-842-853
7. A. S. Mikhaylov and V. S. Mikhaylov, "Dynamic inverse problem for Jacobi matrices," Inverse Probl. Imaging **13** (3), 431–447 (2019). https://doi.org/10.3934/ipi.2019021
8. A. S. Mikhaylov and V. S. Mikhaylov, "Dynamic inverse problem for a Krein—Stieltjes string," Appl. Math. Lett. **96**, 195–201 (2019). https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.05.002
9. N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem* (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965). https://doi.org/10.1017/S0013091500011500
10. K. Schmüdgen, *The Moment Problem* (Springer, Cham, 2017). https://doi.org/10.1007/978-3-319-64546-9
11. B. Simon, "The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator," Adv. Math. **137**, 82–203 (1998). https://doi.org/10.1006/AIMA.1998.1728

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 503–515.

12. A. S. Mikhaylov and V. S. Mikhaylov, “Inverse problem for dynamical system associated with Jacobi matrices and classical moment problems,” J. Math. Anal. Appl. **487** (1), 123970 (2020). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.123970
13. A. S. Mikhaylov and V. S. Mikhaylov, “On an application of the Boundary control method to classical moment problems,” J. Phys. Conf. Ser. **2092**, 012002 (2021). https://doi.org/10.1088/1742-6596/2092/1/012002
14. C. Berg, Y. Chen, and M. E. H. Ismail, “Small eigenvalues of large Hankel matrices: The indeterminate case,” Math. Scand. **91** (1), 67–81 (2002). https://doi.org/10.7146/math.scand.a-14379
15. C. Berg and R. Szwarc, “Inverse of infinite Hankel moment matrices,” Symmetry Integr. Geom. **14**, 109 (2018). https://doi.org/10.3842/SIGMA.2018.109
16. C. Berg and R. Szwarc, “Closable Hankel operators and moment problems,” Integral Equat. Oper. Theory **92** (1), 5 (2020). https://doi.org/10.1007/s00020-020-2561-z

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 3. С. 126–142

УДК 539.3

О ЛУЧЕВЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ ПРИФРОНТОВЫХ РЕШЕНИЯХ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИНАМИКЕ ДЕФОРМАЦИЙ ЛИНЕЙНОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2024 **В. Е. Рагозина**[a], **Ю. Е. Иванова**[b], **О. В. Дудко**[c]

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН,
ул. Радио, 5, г. Владивосток 690041, Россия

E-mails: [a]ragozina@vlc.ru, [b]ivanova@iacp.dvo.ru, [c]dudko@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию 15.06.2023 г.; после доработки 16.05.2024 г.;
принята к публикации 03.07.2024 г.

Рассматривается динамика осесимметричных двумерных деформаций в линейноупругом полупространстве, ограниченном гладкой поверхностью вращения с положительной гауссовой кривизной. Приближенное решение начально-краевой задачи строится на основе лучевых рядов с разложением по времениподобной переменной. Для прифронтовых областей криволинейных волн сильных разрывов используется ограниченное число членов лучевого ряда с коэффициентами — разрывами производных перемещений по времени (начиная с производной первого порядка). Показано, что при двумерном характере процесса деформации на k-ом шаге лучевого метода необходимо учитывать компоненты лучевых рядов до $(k+1)$-го порядка включительно.

Ключевые слова: линейная упругая среда, осесимметричная задача, поверхности сильных разрывов, лучевые ряды, уравнение затухания.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.309

ВВЕДЕНИЕ

Исследования в области современного машиностроения, материаловедения, инженерного горного дела тесно связаны с решением задач нестационарной динамической деформации. При этом, исходя из требований и параметров эксплуатации, в основном учитываются наиболее значимые свойства реальных материалов (упругость [1–3], пластичность [4, 5], вязкость [6, 7] и т. д.). В зависимости от интересов исследователя и режимов деформирования модель сплошной среды уточняется в пользу линейности или нелинейности определяющих соотношений, учёта структуры материала, распространения тепла и т. д. Многие процессы динамического деформирования изотропных твёрдых сред происходят в пределах малых и обратимых (упругих) деформаций, поэтому их описание в рамках линейной изотропной упругости (модели Гука) сохраняет свою актуальность. Для решения краевых задач нестационарного деформирования применяются теоретические точные [8–10], теоретические приближенные [11–13] или же численные [14, 15] методы. Начиная с работ Адамара, одним из важнейших инструментов исследования систем гиперболических уравнений, описывающих динамику деформации твёрдых сред, являются характеристические направления и соотношения вдоль них [16]. В частности, в бесконечной или полуограниченной среде Гука поверхности передних фронтов волновых процессов движутся с характеристическими скоростями, а множество ортогональных к ним линий образует лучевую сетку [17]. Передние волновые фронты нестационарных динамических процессов несут на себе разрывы функций деформаций и напряжений или же их производных. Одновременно с этим основные изменения полей перемещений, деформаций и напряжений в прифронтовых областях (малой окрестности передних волновых фронтов) происходят в значительно большей степени вдоль лучевой координаты, чем по остальным направлениям. Перечисленные свойства лежат в основе варианта метода лучевых рядов [11, 18, 19], который традиционно используется для получения приближенных решений в прифронтовых областях. В [20] указано, что схему лучевого метода, в стандартной форме не пригодную для задач ударной деформации нелинейных сплошных сред, можно модифицировать, включая в структуру лучевого ряда дополнительные ряды по дельта-производным. Таким образом, метод лучевых рядов может применяться для динамических нестационарных задач и в линейных, и в нелинейных моделях твёрдых сред, включая задачи с разрывами полей деформаций.

В нашей работе строится приближенное решение двумерной осесимметричной начально-краевой задачи об упругих волнах деформаций в среде Гука с нагружаемой границей, имеющей положительную гауссову кривизну, осевую симметрию и необходимую гладкость. В остальном геометрия границы произвольна. В основу решения положен метод лучевых рядов в записи по времениподобной координате. Приближенные решения в прифронтовых областях продольной и поперечной волн деформаций строятся на основе двух шагов такого метода. В качестве примера рассмотрен частный случай с границей — параболоидом вращения. Полученные результаты описывают одну из сторон сложного процесса деформирования, который может происходить, в частности, при внедрении в среду некоторого объекта. Так, динамическая деформация осесимметричного типа возникает в задаче о начальном этапе контактного взаимодействия [21], где учитывается комплексное влияние краевых условий в контактной динамически формирующейся зоне и на плоских участках свободной границы. В задачах инженерной практики важное значение имеют исследования оптимальной формы осесимметричных тел для минимизации сопротивления внедрению и максимизации глубины проникания в сплошную среду [22]. Такие задачи решаются с привлечением численных методов и так же концентрируют внимание на контактной области. Представленная в статье постановка осесимметричной краевой задачи в перемещениях не относится к контактному типу: перемещения возникают в начальный момент времени всюду на границе, которая не имеет свободных участков. Данная идеализация позволяет сосредоточиться на решении для продольных и поперечных уходящих от границы волн деформаций без учёта эффектов взаимодействия волновых процессов со свободными участками. Лучевой метод решения переносит приоритет исследования на движущиеся в глубину среды области, примыкающие к передним волновым фронтам, т. е. основное внимание сосредоточено на динамических деформациях среды.

1. ОБЩИЕ МОДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поведение изотропной линейноупругой среды Гука описывает общая система уравнений

$$\begin{gathered}\sigma^{ij}_{,j} = \rho_0 \dot v^i, \quad \rho = \rho_0(1 - u^i_{,i}), \quad \sigma^{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \lambda e^k_k g^{ij} + 2\mu e^{ij}, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i},\\ v^i = \dot u^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} u_k, \quad u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} u^k, \quad u^i = g^{ij} u_j,\\ e^{ij} = g^{ik} g^{js} e_{ks}, \quad g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j, \quad i, j, k, s = 1, 2, 3,\end{gathered} \tag{1}$$

где ρ, ρ_0 — плотность среды в актуальном и свободном состоянии; W — упругий потенциал среды (λ, μ — адиабатические значения параметров Ламе); u^i, v^i, e^{ij}, σ^{ij} — контравариантные компоненты векторов перемещений и скорости, тензоров малых деформаций и напряжений Эйлера—Коши; Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля, согласованные с пространственной метрикой с компонентами g_{ij} в криволинейной системе координат x^i; t — время.

Пусть при $t \leqslant 0$ среда (1) покоится, не деформирована и занимает полупространство с границей Q_0 — гладкой осесимметричной поверхностью положительной гауссовой кривизны. Цилиндрическая система координат $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ имеет стандартную связь с декартовыми координатами z^i: $z^1 = x^1 \cos x^2$, $z^2 = x^1 \sin x^2$, $z^3 = x^3$. Совместим ось симметрии поверхности Q_0 с осью z, а образующий контур L_0 зададим в явной форме уравнениями $r = f(\delta)$, $z = -\delta$ $(\delta \geqslant 0)$, полагая, что функция $f(\delta) \geqslant 0$ обладает необходимо гладкостью. Тогда поверхность Q_0 определяется двухпараметрической вектор-функцией

$$\mathbf{r}_0(\delta, \varphi) = \left\{z_0^1,\ z_0^2,\ z_0^3\right\} = \left\{f(\delta)\cos\varphi,\ f(\delta)\sin\varphi,\ -\delta\right\}. \tag{2}$$

Простым примером такой поверхности при $f(\delta) = \sqrt{2p\delta}$, $p = \mathrm{const} > 0$ является параболоид вращения (рис. 1(a)). Упругая среда занимает область выше Q_0.

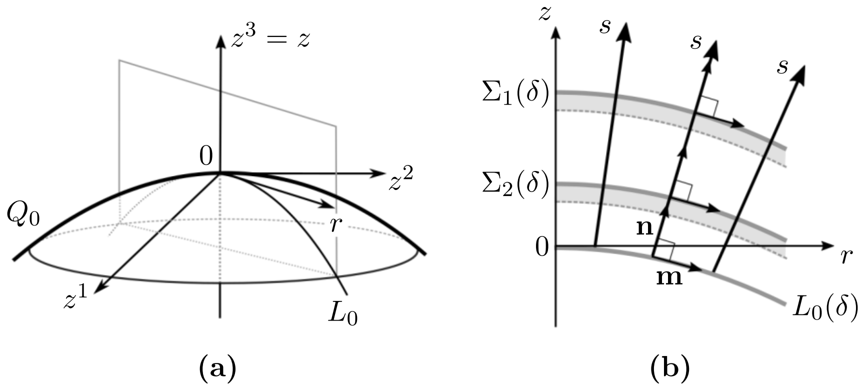


Рис. 1. Геометрия границы $Q_0 \in \mathbb{E}^3$ (a); передние волновые фронты Σ_1, Σ_2 и лучевые координаты s, δ на плоскости (r, z) (b)

Сформулируем краевую задачу в перемещениях. Считаем, что при $t \geqslant 0$ движение точек границы Q_0 известно и не зависит от φ:

$$\begin{gathered} U_r^0 = u_r(\mathbf{r}_0, t)|_{t\geqslant 0} = v_r t + \frac{a_r t^2}{2}, \quad U_z^0 = u_z(\mathbf{r}_0, t)|_{t\geqslant 0} = v_z t + \frac{a_z t^2}{2}, \\ u_r|_{t\leqslant 0} = u_z|_{t\leqslant 0} = 0, \quad v_r^2 + v_z^2 \neq 0. \end{gathered} \tag{3}$$

В (3) v_r, v_z, a_r, a_z — заданные функции параметра δ; $U_r^0/(C_1T) \ll 1$, $U_z^0/(C_1T) \ll 1$, где T — характерное время процесса, $C_1^2 {=} (\lambda{+}2\mu)/\rho_0$; индексы r, φ, z здесь и далее означают физические компоненты тензорных полей.

При заданном краевом условии (3) следствием движения границы Q_0 с уравнением (2) является нестационарное поле перемещений с компонентами $u_r(r,z,t)$, $u_z(r,z,t)$, $u_\varphi{=}0$. Скачок скоростей на границе Q_0 при $t = 0$, заданный в (3), вызывает в среде движение поверхностей разрывов деформаций — передних фронтов волновых процессов (рис. 1(b)). На каждой такой поверхности при вычислении функций $u_r(r,z,t)$, $u_z(r,z,t)$ должны выполняться дополнительные к (3) краевые условия. Во-первых, это геометрические и кинематические условия совместности разрывов [11]:

$$\begin{gathered} [q_{,i}] = \left[\frac{dq}{dn}\right] n_i + g_{ij} x^j_{,\alpha} a^{\alpha\beta} [q]_{,\beta}, \quad [\dot{q}] = -C\left[\frac{dq}{dn}\right] + \frac{\delta[q]}{\delta t}, \\ \frac{dq}{dn} = q_{,i} n^i, \quad x^i_{,\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}, \quad x^i_{,\alpha} n_i = 0, \quad n^i n_i = 1, \quad [q] = q^+ - q^-, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \end{gathered} \tag{4}$$

где q — обозначение для компоненты любого тензорного поля пространственного типа; q^+ и q^- — предельные значения q перед и за поверхностью разрывов Σ, которая движется со скоростью $C{>}0$ в направлении своей единичной внешней нормали $\mathbf{n} = \{n^1, n^2, n^3\}$ (рис. 1(b)); y^α — поверхностные координаты и $a^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты метрики на Σ; $\delta/\delta t$ — дельта-производная (производная по Томасу [11]).

Во-вторых, это динамические условия совместности разрывов [11] — следствия интегральных законов сохранения. Динамическое условие совместности на поверхности сильных разрывов Σ (следствие закона сохранения импульса) для модели (1) имеет вид

$$[\sigma^{ij}]n_j = -\rho_0 C[v^i], \tag{5}$$

откуда с учётом (4) получаем существование двух типов фронтов сильных разрывов в неограниченной линейноупругой среде (1): продольной (безвихревой) волны Σ_1 со скоростью $C_1{=}\sqrt{(\lambda{+}2\mu)/\rho_0}$ и поперечной (эквиволюминальной) волны Σ_2 со скоростью $C_2{=}\sqrt{\mu/\rho_0}$ [23]. Согласно (4), (5), для продольных волн выполняется

$$\left[\frac{du_i}{dn}\right] = \tau n_i, \quad [v_n] = [v_i]n^i \neq 0, \quad \tau = [u^i_{,j}]n_i n^j, \tag{6}$$

для поперечных волн справедливо

$$\left[\frac{du_i}{dn}\right] = \xi m_i, \quad \xi = [u^i_{,j}]m_i n^j, \tag{7}$$

где τ, ξ — нормальная и касательная компоненты волнового вектора разрывов на поверхности Σ_i соответственно; $\mathbf{m}{=}\{m^1, m^2, m^3\}$ — единичный вектор, касательный к Σ_i ($n^i m_i{=}0$, $m^i m_i{=}1$).

Помимо условий совместности (4), (5), на каждой поверхности сильных разрывов согласно гипотезе сплошности необходимо потребовать непрерывность перемещений:

$$[u_r] = 0, \quad [u_z] = 0. \tag{8}$$

Таким образом, согласно (3)–(8), от границы Q_0 с момента времени $t = 0$ по среде (1) движутся две поверхности сильных разрывов Σ_1 и Σ_2 с постоянными скоростями C_1 и C_2. При этом отметим, что геометрия и положение каждой поверхности Σ_i со скоростью $C_i = \text{const}$ определяется начальным условием $\Sigma_1|_{t=0} = \Sigma_2|_{t=0} {=} Q_0$ и не зависит от строящегося решения для полей перемещений и деформаций.

Условия (3)–(5), (8) применяются к системе уравнений Навье для $u_r(r,z,t)$, $u_z(r,z,t)$, следующей из системы (1):

$$\begin{gathered}
(\lambda + 2\mu)\left(u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2}\right) + (\lambda+\mu)u_{z,rz} + \mu u_{r,zz} = \rho_0 \ddot{u}_r, \\
\mu\left(u_{z,rr} + \frac{u_{z,r}}{r}\right) + (\lambda+\mu)\left(u_{r,rz} + \frac{u_{r,z}}{r}\right) + (\lambda+2\mu)u_{z,zz} = \rho_0 \ddot{u}_z, \\
u_{r,r} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{z,r} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad u_{r,rr} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \quad \text{и т. д.,}
\end{gathered} \tag{9}$$

что и определяет краевую динамическую задачу осесимметричного типа. Представление краевых условий задачи в перемещениях не является принципиальным для описанного далее способа решения, который без существенных сложностей переносится на краевую задачу в напряжениях.

2. ДВУШАГОВОЕ ЛУЧЕВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Ввиду независимости описанной краевой задачи от переменной φ все построения лучевого метода достаточно провести в плоскости $\varphi = \text{const}$. Учитывая $C_i = \text{const}$ $(i = 1, 2)$, лучевые направления в этой плоскости составляют семейство полупрямых, ортогональных к Q_0, а движущиеся поверхности Σ_i в каждый момент времени отсекают равные расстояния вдоль лучей.

Поэтому связь цилиндрических координат r, z с лучевыми координатами s, δ, образующими лучевую ортогональную сетку (рис. 1(b)), задаётся как

$$r(s,\delta) = f(\delta) + sn_r(\delta), \quad z = -\delta + sn_z(\delta),$$
$$n_r(\delta) = (1+(f')^2)^{-1/2}, \quad n_\varphi = 0, \quad n_z(\delta) = f'n_r(\delta), \quad f' = df/d\delta.$$

Здесь s — расстояние вдоль лучей, δ — координата эйконала [18], $\mathbf{n}(\delta) = \{n_r(\delta), 0, n_z(\delta)\}$ — единичный вектор внешней нормали к Q_0 (а также к Σ_1, Σ_2).

Для приближенного представления вектора $\mathbf{u}(r,z,t)$ в окрестности за подвижной поверхностью Σ_i принимаем функцию $\mathbf{u}^{(i)}(s,\delta,t)$, заданную в форме ряда по времениподобной переменной (разложение типа ряда Тейлора):

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}^{(i)}(s,\delta,t) = \mathbf{u}^{(i-1)}(s,\delta,t) - \theta(t-t_i)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left[\frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial t^j}\right]\Bigg|_{t=t_i}(t-t_i)^j, \\
\theta(t-t_i) = \begin{cases} 1, & t \geqslant t_i \\ 0, & t < t_i \end{cases}, \quad t_i = \frac{s}{C_i}, \quad \mathbf{u}^{(0)} = 0, \quad i = 1,2.
\end{gathered} \tag{10}$$

Такая функция традиционно называется приближенным лучевым решением [11,18,20]. В (10) $\theta(t-t_i)$ — ступенчатая функция Хэвисайда; $\mathbf{u}^{(i-1)}$, в свою очередь, может быть определена лучевым рядом за Σ_1 при $t \to 0$, когда Σ_2 находится в прифронтовой области Σ_1. На бóльших временах, когда волны Σ_1 и Σ_2 достаточно разошлись друг от друга, $\mathbf{u}^{(i-1)}$ является приближенным решением для $\mathbf{u}$ между Σ_1 и Σ_2, которое должно вычисляться аналитически или с помощью численных методов. В нашей статье считаем, что $\mathbf{u}^{(i-1)}$ задаётся лучевым решением по типу (10). Величины $[\partial \mathbf{u}/\partial t]$ на Σ_i определяются связью с τ, ξ согласно (4) и (6), (7). Скачки производных $[\partial^j \mathbf{u}/\partial t^j]$ являются основными неизвестными коэффициентами в (10). Разрывы остальных производных от $\mathbf{u}$ на Σ_i связаны с основными разрывами рекуррентными соотношениями — следствиями условий (4). Для определения основных скачков служат уравнения движения (9), продифференцированные частным образом по времени $(k-1)$ раз на k-м шаге лучевого метода, а затем записанные в разрывах в проекции на вектора $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. Условие непрерывности перемещений (8) выполняется для ряда (10) автоматически.

Ввиду громоздкости вычислений каждого шага метода и повышенных требований гладкости для геометрических функций на Σ_i и полей перемещений в окрестности Σ_i, лучевое разложение (10) для представления $\mathbf{u}^{(i)}(s,\delta,t)$ при $t \geqslant t_i$, как правило, применяется в форме

$$\mathbf{u}^{(i)}(s,\delta,t) = \mathbf{u}^{(i-1)}(s,\delta,t) - \sum_{j=1}^{G}\frac{1}{j!}\left[\frac{\partial^j \mathbf{u}}{\partial t^j}\right]\Bigg|_{t=t_i}(t-t_i)^j + \Delta_G(s,\delta,t) \tag{11}$$

с конечным числом членов ряда (j=1, 2, ..., G) и остаточным членом $\Delta_G(s,\delta,t)$. Значение G выбирается из соображений требуемой точности и обычно невелико (например, $G = 2$ в [20,24]). Вычисление бóльшего количества членов разложения проводится редко и при относительной простоте краевой задачи [25]. Вопрос точности приближенного лучевого решения рассмотрим в статье позже.

Остановимся на некоторых технических деталях применения формулы (11), а именно, на примере двух шагов лучевого метода покажем, что в неодномерных динамических задачах лучевое разложение на j-ом шаге метода приводит к необходимости учёта некоторых (но не всех) членов с $(j$+1)-ми степенями по $(t - t_i)$. Для этого в нашей краевой задаче положим

$G = 3$ и от (11) перейдём к соотношениям

$$\begin{gathered}
u_k^{(1)} = -\kappa_k^{(1)}(t-t_1) - \frac{\chi_k^{(1)}}{2}(t-t_1)^2 - \frac{\psi_k^{(1)}}{6}(t-t_1)^3 + \ldots, \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \\
u_k^{(2)} = u_k^{(1)} - \kappa_k^{(2)}(t-t_2) - \frac{\chi_k^{(2)}}{2}(t-t_2)^2 - \frac{\psi_k^{(2)}}{6}(t-t_2)^3 + \ldots, \quad t \geqslant t_2, \\
\kappa_k^{(i)} = [\dot{u}_k]|_{t=t_i}, \quad \chi_k^{(i)} = [\ddot{u}_k]|_{t=t_i}, \quad \psi_k^{(i)} = [\dddot{u}_k]|_{t=t_i}, \quad i,k = 1,2.
\end{gathered} \tag{12}$$

Здесь u_r, u_z в плоскости (r,z) для сокращения выкладок обозначены как u_1, u_2 соответственно, а для искомых разрывов производных по времени введены обозначения $\kappa_k^{(i)}$, $\chi_k^{(i)}$, $\psi_k^{(i)}$. Из (6) и (7) следует, что в (12) $\kappa_m^{(1)} = \kappa_j^{(1)} m^j = 0$, $\kappa_n^{(2)} = \kappa_j^{(2)} n^j = 0$, а разрывы $\chi_k^{(i)}$, $\psi_k^{(i)}$ и разрывы производных по времени более высокого порядка будут иметь ненулевые проекции и на $\mathbf{n}$, и на $\mathbf{m}$.

Поскольку уравнения лучевого метода в среде Гука на каждом шаге зависят от изменяющейся геометрии Σ_i (разрывы в этой среде подчиняются законам геометрической оптики [17]), приведём формулы для некоторых необходимых далее геометрических функций на Σ_i:

$$\begin{gathered}
a_{11}^0 = 1 + \left(f'\right)^2, \quad a_{22}^0 = f^2, \quad a_{12}^0 = 0, \quad b_{11}^0 = \frac{f''}{\sqrt{a_{11}^0}}, \quad b_{22}^0 = -\frac{f}{\sqrt{a_{11}^0}}, \quad b_{12}^0 = 0, \\
a_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^0(1-k_i s)^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad b_{ij} = \begin{cases} b_{ij}^0(1-k_i s), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad K_i|_{t=0} = k_i, \quad K = K_1 \cdot K_2, \\
k_1 = \frac{b_{11}^0}{a_{11}^0}, \quad k_2 = \frac{b_{22}^0}{a_{22}^0}, \quad H = \frac{a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}}{2} = \frac{1}{2}(K_1 + K_2), \quad K_i = \frac{k_i}{1 - s k_i}, \quad i,j = 1,2.
\end{gathered} \tag{13}$$

В (13) f — произвольная функция, согласно (2) определяющая геометрию границы Q_0; $a_{\alpha\beta}^0$ и $b_{\alpha\beta}^0$ — компоненты первой и второй квадратичных форм на Q_0, $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — эти же объекты на поверхности Q_s, отстоящей от Q_0 на расстояние s вдоль лучей; K_1, K_2 и k_1, k_2 — главные кривизны на Q_s и Q_0 соответственно; H и K — средняя и гауссова кривизна поверхности Q_s. Из (13) следует, что $y^1 = \delta$, $y^2 = \varphi$ — сетка главных направлений на Q_0, Q_s, а при $s = C_i t$ поверхность Q_s совпадает с Σ_i.

На первом шаге лучевого метода записываются в разрывах сами уравнения движения (9) с последующей их свёрткой с $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. На волне деформаций Σ_1 с учётом (13) это приводит к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\delta \kappa_n^{(1)}}{\delta t} = H^I C_1 \kappa_n^{(1)}, \quad \chi_m^{(1)} = -\frac{C_1 \kappa_{n,1}^{(1)}}{\sqrt{a_{11}}}, \\
\kappa_i^{(1)} = \kappa_n^{(1)} n_i, \quad \chi_i^{(1)} = \chi_n^{(1)} n_i + \chi_m^{(1)} m_i, \quad \kappa_{n,1}^{(1)} = \frac{\partial \kappa_n^{(1)}}{\partial \delta}, \quad H^I = H\big|_{s=C_1 t}, \quad y^1 = \delta.
\end{gathered} \tag{14}$$

На волне деформаций Σ_2 аналогично приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\delta \kappa_m^{(2)}}{\delta t} = H^{II} C_2 \kappa_m^{(2)}, \quad \chi_n^{(2)} = \frac{C_2}{\sqrt{a_{11}}} \left(\kappa_{m,1}^{(2)} + \frac{\partial \ln \sqrt{a_{22}}}{\partial \delta} \kappa_m^{(2)} \right), \\
\kappa_i^{(2)} = \kappa_m^{(2)} m_i, \quad \chi_i^{(2)} = \chi_n^{(2)} n_i + \chi_m^{(2)} m_i, \quad \kappa_{m,1}^{(2)} = \frac{\partial \kappa_m^{(2)}}{\partial \delta}, \quad H^{II} = H\big|_{s=C_2 t}.
\end{gathered} \tag{15}$$

Системы (14) и (15) выделяют на волнах Σ_1, Σ_2 функции $\kappa_n^{(1)}$, $\kappa_m^{(2)}$, имеющие приоритетное значение, для которых определяется решение дифференциальных уравнений затухания [11].

Координата δ входит в дифференциальные уравнения затухания в системах (14), (15) как параметр, т. е. интегрирование этих уравнений идёт в направлении вдоль луча. Из (14), (15) для $\varkappa_n^{(1)}$, $\varkappa_m^{(2)}$, $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$ получаем

$$\varkappa_n^{(1)}=\varkappa_n^0\sqrt{\frac{K^I}{K_0}},\quad \varkappa_m^{(2)}=\varkappa_m^0\sqrt{\frac{K^{II}}{K_0}},\quad \varkappa_n^{(1)}\Big|_{Q_0}=\varkappa_n^0,\quad \varkappa_m^{(2)}\Big|_{Q_0}=\varkappa_m^0,$$
$$K^I=K|_{s=C_1t}\,,\quad K^{II}=K|_{s=C_2t}\,,$$
$$\chi_m^{(1)}=-\frac{C_1}{\sqrt{a_{11}^0}}\frac{K_1^I}{k_1}\sqrt{\frac{K^I}{K_0}}\left\{\varkappa_{n,1}^0+\varkappa_n^0\left(\ln\sqrt{\frac{K^I}{K_0}}\right)_{,1}\right\},\quad K_0=K^I\big|_{t=0}=K^{II}\big|_{t=0}\,, \tag{16}$$
$$\chi_n^{(2)}=\frac{C_2}{\sqrt{a_{11}^0}}\frac{K_1^{II}}{k_1}\sqrt{\frac{K^{II}}{K_0}}\left\{\varkappa_{m,1}^0+\varkappa_m^0\left(\ln\sqrt{\frac{a_{22}K^{II}}{K_0}}\right)_{,1}\right\},\ K_1^I=K_1|_{s=C_1t}\,,\ K_1^{II}=K_1|_{s=C_2t}\,,$$

где индекс после запятой обозначает частное дифференцирование по координате $y^1=\delta$. Функции $\varkappa_n^{(1)}$, $\varkappa_m^{(2)}$, найденные из своих уравнений затухания на первом шаге метода, полностью определяют на Σ_j скачки $\varkappa_i^{(j)}$ и частично — скачки $\chi_i^{(j)}$, которые входят в (12) как коэффициенты при $(t-t_j)^2$. Из (16) следует, что определение функций $\chi_m^{(1)}$ и $\chi_n^{(2)}$ уже требует повышенной гладкости геометрических функций на Σ_i, поскольку $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$ вычисляются из уравнений, содержащих производные вдоль направления $y^1=\delta$ от гауссовых кривизн K^I, K^{II} и главных кривизн K_1^I, K_1^{II}.

Для определения $\varkappa_n^0$, $\varkappa_m^0$ ограничимся в (12) и (3) слагаемыми с первыми степенями по $(t-t_i)$ и по t соответственно. При этом, полагая в (12) $s=0$, из (3) получим

$$\varkappa_n^0=-v_n=-(v_rn_r+v_zn_z),\quad \varkappa_m^0=-v_m=-(v_rm_r+v_zm_z). \tag{17}$$

Далее для упрощения выкладок остановимся на случае, когда параметры v_r, v_z, a_r, a_z в условиях (3) приняты постоянными. При этом ввиду условий симметрии задачи и требования отсутствия разрывов сплошности среды исключаем расчёты в окрестности луча $\delta=0$. Это ограничение не принципиально и служит только для некоторого уменьшения объёма вычислений.

Авторы различных форм лучевого метода относят их к асимптотическим методам (например, [26]), для которых исключительно важен баланс между требуемой точностью приближения и уменьшением нарастающего объёма рекуррентных вычислений за счёт ограничения числа членов разложения. В этом вопросе обратим внимание на важное отличие лучевых разложений многомерных динамических задач от лучевых разложений одномерных задач. Соотношения (14), (15) многомерной задачи (следствия уравнений движения (9) в разрывах) включают как дифференциальные уравнения затухания для $\chi_n^{(1)}$, $\chi_m^{(2)}$, так и алгебраические уравнения для $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$. Зависимость $\chi_n^{(1)}$, $\chi_m^{(2)}$ от $y^1=\delta$ приводит к ненулевым решениям уравнений (14), (15) для $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$. Отбросить ненулевые функции $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$ из решения первого шага по формальному признаку — второй степени переменных $(t-t_1)$, $(t-t_2)$ — означает внести погрешность уже на стадии выполнения уравнений движения сразу за Σ_i (на Σ_i^-). И наоборот, включение $\chi_m^{(1)}$, $\chi_n^{(2)}$ в решение первого шага обеспечивает точное выполнение уравнений движения на Σ_i^-, если только они выполняются точно перед Σ_i (на Σ_i^+). Следующий (второй) шаг лучевого метода также связан с появлением алгебраических уравнений помимо уравнений затухания. Решения таких алгебраических уравнений дают слагаемые с переменными $(t-t_1)^3$, $(t-t_2)^3$ в рядах (11). Очевидно, что учёт всех слагаемых в (11), соответствующих j-му шагу метода, способен улучшить результат использования прифронтовых лучевых асимптотик в вычислительных схемах [24].

От (16) с учётом условий (17) нетрудно перейти к формулам для $u_1 = u_r$, $u_2 = u_z$, в которых компоненты перемещений u_r и u_z являются функциями s, δ, t. В общем случае произвольной функции $f(\delta)$, задающей граничную поверхность (2), переход к исходным координатам затруднён. Поэтому соотношения $u_i(s,\delta,t)$ необходимо рассматривать совместно со связью $r = r(s,\delta)$, $z = z(s,\delta)$. Если же ставится задача определить деформации, то они могут быть вычислены косвенно. Например, для e^I_{rr} с учётом связей координат r, z с лучевыми координатами s, δ и уравнениями для Q_0 можно записать

$$e^I_{rr} = u^{(I)}_{r,r} = \frac{\partial u^{(1)}_r}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\partial u^{(1)}_r}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial r}, \quad \frac{\partial s}{\partial r} = n_r, \quad \frac{\partial \delta}{\partial r} = \frac{n_r n_z}{1 - s k_1},$$

где $u^{(1)}_r$ представляется в форме (12). Аналогичный подход позволяет вычислить деформации e^I_{ij}, e^{II}_{ij}, где $i,j = 1,2$ соответствуют и заменяют r, z.

Кратко изложим соотношения, связанные со вторым шагом лучевого метода. Как правило, для шагов выше первого делают удобную (но по-прежнему громоздкую) запись уравнений в рекуррентной форме [11]. Когда эти уравнения используются для построения теоретического приближенного решения конкретной краевой задачи, то для их интегрирования на текущем шаге приходится проходить по всей предыдущей цепочке расчётов. Поэтому уравнения второго шага для нашей задачи приведём в их самостоятельной записи без обращения к рекуррентным соотношениям k-го шага:

$$\begin{gathered}
\frac{\delta\chi^{(1)}_n}{\delta t} = C_1 H^I \chi^{(1)}_n + \frac{C_1^2}{2}\Big(K^I - 3\left(H^I\right)^2\Big)\,\kappa^{(1)}_n + \frac{C_1^2}{2} a^{\alpha\beta}\kappa^{(1)}_{n,\alpha\beta}, \quad \psi^{(1)}_m = -\frac{C_1^2}{\sqrt{a_{11}}}\left(\frac{\chi^{(1)}_n}{C_1} + H^I\kappa^{(1)}_n\right)_{,1},\\
\frac{\delta\chi^{(2)}_m}{\delta t} = C_2 H^{II}\chi^{(2)}_m + \frac{C_2^2}{2}\left(\left(H^{II}\right)^2 - K^{II} - \left(K^{II}_1\right)^2 - \frac{\left(a^{22}a_{22,1}\right)^2}{4a_{11}}\right)\kappa^{(2)}_m + \frac{C_2^2}{2}a^{\alpha\beta}\kappa^{(2)}_{m,\alpha\beta},\\
\psi^{(2)}_n = \frac{C_2^2}{\sqrt{a_{11}}}\left(\frac{\chi^{(2)}_{m,1}}{C_2} + \frac{a^{22}a_{22,1}}{2}\frac{\chi^{(2)}_m}{C_2} + K^{II}_1\kappa^{(2)}_{m,1} - \frac{H^{II}\chi^{(2)}_n\sqrt{a_{11}}}{C_2} - \kappa^{(2)}_m\left(\left(3 + \frac{4\mu}{\lambda+\mu}\right)H^{II}_{,1} - \frac{b^{22}a_{22,1}}{2}\right)\right),\\
\kappa^{(1)}_{n,\alpha\beta} = \frac{\partial^2\kappa^{(1)}_n}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\kappa^{(1)}_{n,\sigma}, \quad \kappa^{(2)}_{m,\alpha\beta} = \frac{\partial^2\kappa^{(2)}_m}{\partial y^\alpha\partial y^\beta} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\kappa^{(2)}_{m,\sigma}.
\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля и компоненты метрического тензора на Σ_1 для $\chi^{(1)}_n$, $\psi^{(1)}_m$, на Σ_2 для $\chi^{(2)}_m$, $\psi^{(2)}_n$; индекс 1 после запятой означает частную производную по δ. В линейных неоднородных дифференциальных уравнениях затухания, входящих в (18), дифференциальный оператор для $\chi^{(1)}_n$, $\chi^{(2)}_m$ совпадает с оператором первого шага. Также уравнения затухания зависят от решения предыдущего шага в своей неоднородной части. В частности, первое уравнение в (18) содержит $\kappa_{n,\alpha\beta}$, т. е. для κ_n предполагается непрерывная дифференцируемость дважды по y^1, y^2. Кроме того, уравнения (18) требуют очередного повышения гладкости и для геометрических функций на Σ_i. Решая (18) относительно $\chi^{(1)}_n$ и $\chi^{(2)}_m$, получаем

$$\begin{gathered}
\chi^{(1)}_n = \sqrt{\frac{K^I}{K_0}}\left(\chi^0_n(\delta) + F^{(1)}_0(\delta)\frac{K^I_2}{k_2} + \sum_{j=1}^{3}F^{(1)}_j(\delta)\left(\frac{K^I_1}{k_1}\right)^j\right), \quad K^I_2 = K_2|_{s=C_1 t},\\
\chi^{(2)}_m = \sqrt{\frac{K^{II}}{K_0}}\left(\chi^0_m(\delta) + F^{(2)}_0(\delta)\frac{K^{II}_2}{k_2} + \sum_{j=1}^{3}F^{(2)}_j(\delta)\left(\frac{K^{II}_1}{k_1}\right)^j\right), \quad K^{II}_2 = K_2|_{s=C_2 t}.
\end{gathered} \tag{19}$$

Неизвестные функции $\chi_n^0(\delta)$, $\chi_m^0(\delta)$ в (19) вычисляются из краевых условий (3), куда подставлены соотношения (10), записанные до вторых степеней включительно по $(t-t_i)$ с учётом (16), (17) и (19). Такое выполнение краевых условий (3) приводит к следующему результату:

$$\chi_n^0(\delta) = -a_n - C_2 n_r \left(\kappa_m^0\right)' - \frac{C_2 n_z \kappa_m^0}{\sqrt{a_{11}^0}} - \sum_{j=0}^{3} F_j^{(1)}, \quad \chi_m^0(\delta) = -a_m - C_1 m_z \left(\kappa_n^0\right)' - \sum_{j=0}^{3} F_j^{(2)},$$
$$\kappa_n^0(\delta) = -v_n, \quad \kappa_m^0(\delta) = -v_m, \quad a_n = a_r n_r + a_z n_z, \quad a_m = a_r m_r + a_z m_z. \tag{20}$$

Функции $F_j^{(k)}(\delta)$ (j=$0,1,2,3$, k=$1,2$) в (19), (20) являются объектами, полностью определёнными и сложным образом зависящими от геометрии Q_0, функций κ_n^0, κ_m^0 и их производных.

Согласно (18), на втором шаге метода лучевых рядов в приближенном решении (10) двумерной динамической задачи появляются $\psi_m^{(1)}$, $\psi_n^{(2)}$, т. е. учитываются члены до третьей степени $(t-t_i)$ включительно. Подчеркнём, что такое решение имеет место только в ближних зонах за поверхностями сильных разрывов Σ_i (серые слои на рис. 1(b)). Как уже было сказано, использовать лучевой ряд за Σ_1 для определения решения перед Σ_2 и вычисления неизвестных функций переменной δ за счёт выполнения краевых условий (3) можно только на малых временах, близких к моменту возникновения граничных перемещений (3) (т. е. к $t=0$).

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ЛУЧЕВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С ГРАНИЦЕЙ — ПАРАБОЛОИДОМ ВРАЩЕНИЯ

На примере покажем результат применения лучевого метода к решению осесимметричных нестационарных задач динамики деформирования. Рассмотрим случай, когда криволинейная граница Q_0 является параболоидом вращения, т. е. в (2) примем $f(\delta)=\sqrt{2p\delta}$, $p=\mathrm{const}>0$. Для геометрических объектов на такой поверхности легко записать

$$n_r{=}-m_z{=}\sqrt{\frac{2\delta}{2\delta+p}}, \quad n_\varphi{=}m_\varphi{=}0, \quad n_z=m_r=\sqrt{\frac{p}{2\delta+p}}, \quad a_{11}^0=\frac{2\delta+p}{2\delta}, \quad a_{22}^0=2p\delta,$$
$$a_{12}^0=0, \quad b_{11}^0=-\frac{n_z}{2\delta}, \quad b_{22}^0=-2\delta n_z, \quad b_{12}^0{=}0, \quad k_1{=}-n_z, \quad k_2{=}-\frac{1}{\sqrt{p(2\delta+p)}}. \tag{21}$$

Тогда на первом шаге лучевого метода из (12), (16), (17) и (21) для $u_r^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ и $u_r^{(2)}$, $u_z^{(2)}$ в окрестностях позади Σ_1 и Σ_2 соответственно при малых временах получаем

$$u_r^{(1)} = -\kappa_n^{(1)} n_r(t{-}t_1) - \frac{\chi_m^{(1)}}{2} m_r (t{-}t_1)^2 = -\frac{1}{\sqrt{(1{-}sk_1)(1{-}sk_2)}}\sqrt{\frac{2\delta}{2\delta{+}p}}\left\{\kappa_n^0\left(t{-}\frac{s}{C_1}\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{W_1(s,\delta)}{2}\sqrt{\frac{p}{2\delta+p}}\left(t-\frac{s}{C_1}\right)^2\right\} - \ldots, \quad \frac{s}{C_1} \leqslant t \leqslant \frac{s}{C_2},$$
$$u_z^{(1)} = -\kappa_n^{(1)} n_z (t-t_1) - \frac{\chi_m^{(1)}}{2} m_z (t-t_1)^2 =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{(1-sk_1)(1-sk_2)}}\left\{\sqrt{\frac{p}{2\delta+p}}\kappa_n^0\left(t-\frac{s}{C_1}\right) + W_1(s,\delta)\frac{\delta}{2\delta+p}\left(t-\frac{s}{C_1}\right)^2\right\} - \ldots, \tag{22}$$

$$u_r^{(2)}=u_r^{(1)}-\kappa_m^{(2)}m_r(t-t_2)-\frac{\chi_n^{(2)}n_r}{2}(t-t_2)^2=u_r^{(1)}-\frac{1}{\sqrt{(1-sk_1)(1-sk_2)}}\left\{\sqrt{\frac{p}{2\delta+p}}\kappa_m^0\left(t-\frac{s}{C_2}\right)+\right.$$
$$\left.+W_2(s,\delta)\frac{\delta}{2\delta+p}\left(t-\frac{s}{C_2}\right)^2\right\}-\ldots,\quad t\geqslant\frac{s}{C_2},$$
$$u_z^{(2)}=u_z^{(1)}-\kappa_m^{(2)}m_z(t-t_2)-\frac{\chi_n^{(2)}}{2}n_z(t-t_2)^2=u_z^{(1)}-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(1-sk_1)(1-sk_2)}}\sqrt{\frac{2\delta}{2\delta+p}}\left\{-\kappa_m^0\left(t-\frac{s}{C_2}\right)+\frac{W_2(s,\delta)}{2}\sqrt{\frac{p}{2\delta+p}}\left(t-\frac{s}{C_2}\right)^2\right\}-\ldots, \tag{23}$$

где

$$W_1(s,\delta)=\frac{C_1}{(1-sk_1)}\left(\frac{\kappa_n^0 s}{2}\left(\frac{k_1'}{(1-sk_1)}+\frac{k_2'}{(1-sk_2)}\right)+\left(\kappa_n^0\right)'\right),\quad \kappa_n^0=-v_r\sqrt{\frac{2\delta}{2\delta+p}}-v_z\sqrt{\frac{p}{2\delta+p}},$$
$$W_2(s,\delta)=\frac{C_2}{(1-sk_1)}\left(\frac{\kappa_m^0 s}{2}\left(\frac{k_1'}{(1-sk_1)}+\frac{k_2'}{(1-sk_2)}\right)+\left(\kappa_m^0\right)'\right),\quad \kappa_m^0=-v_r\sqrt{\frac{p}{2\delta+p}}+v_z\sqrt{\frac{2\delta}{2\delta+p}},$$
$$k_1'=3\sqrt{\frac{p}{(2\delta+p)^5}},\qquad k_2'=\frac{1}{\sqrt{p(2\delta+p)^3}},$$
$$\left(\kappa_n^0\right)'=-\frac{v_r p}{\sqrt{2\delta}(2\delta+p)^3}+v_z\sqrt{\frac{p}{(2\delta+p)^3}},\quad \left(\kappa_m^0\right)'=v_r\sqrt{\frac{p}{(2\delta+p)^3}}+\frac{v_z p}{\sqrt{2\delta}(2\delta+p)^3}.$$

Сходным образом, но исключительно громоздко, можно записать u_r, u_z на втором шаге лучевого метода. Эту часть решения здесь не приводим из-за ограничения на объём статьи.

Покажем отдельные результаты, иллюстрирующие построенное лучевое приближение. При этом для исходных данных задачи примем значения: C_1=5931 м/с, C_2=3240 м/с, p=3 м, v_r=0.8 м/с, v_z=0.5 м/с, a_r=15 м/с^2, a_z=25 м/с^2. На рис. 2 показаны графики перемещений $u_r(s,\delta,t)$ и $u_z(s,\delta,t)$ в малые моменты времени τ_1=$1\cdot10^{-5}$с, τ_2=$2\cdot10^{-5}$с при фиксированных значениях $\delta\in\{1$ м; 2 м; 3 м; 15 м$\}$. Рис. 3 демонстрирует соответствующие графики деформаций $e_{rr}(s,\delta,t)$. Нелинейную формулу для вычисления $e_{rr}(s,\delta,t)$, полученную подстановкой перемещений $u_r^{(1)}$, $u_r^{(2)}$ в форме (22), (23) в (1), здесь не приводим из-за её громоздкости. Вертикальными линиями на рис. 2, 3 обозначены координаты фронтов Σ_1, Σ_2 в выбранные моменты времени, разные стили ломаных линий соответствуют различным значениям δ.

Согласно рис. 2, нелинейность перемещений (22), (23) по параметру s при выбранных малых временах (и соответственно на малых расстояниях от Σ_1, Σ_2) достаточно слаба, поскольку полученные графики близки к кусочно-линейным. В то же время, увеличение параметра δ заметно влияет на рост $u_r(s,\delta,t)$ и убывание $u_z(s,\delta,t)$. Близость непрерывных частей графиков деформаций к прямым и схожесть полученных диаграмм на рис. 3(a), 3(b) обусловлена выбором малых времён, при которых волны Σ_1 и Σ_2 находятся ещё достаточно близко друг от друга и от нагружаемой поверхности Q_0.

4. О ТОЧНОСТИ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ЛУЧЕВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с проблемой точности и области применимости лучевых рядов в решениях нестационарных многомерных задачах динамики деформирования. Если точное решение краевой задачи заменяется приближенным асимптотическим, то всегда возникает вопрос об области, где такое приближение обеспечивает необходимую точность. Этот же вопрос актуален и для лучевых представлений. Усечённые до нескольких

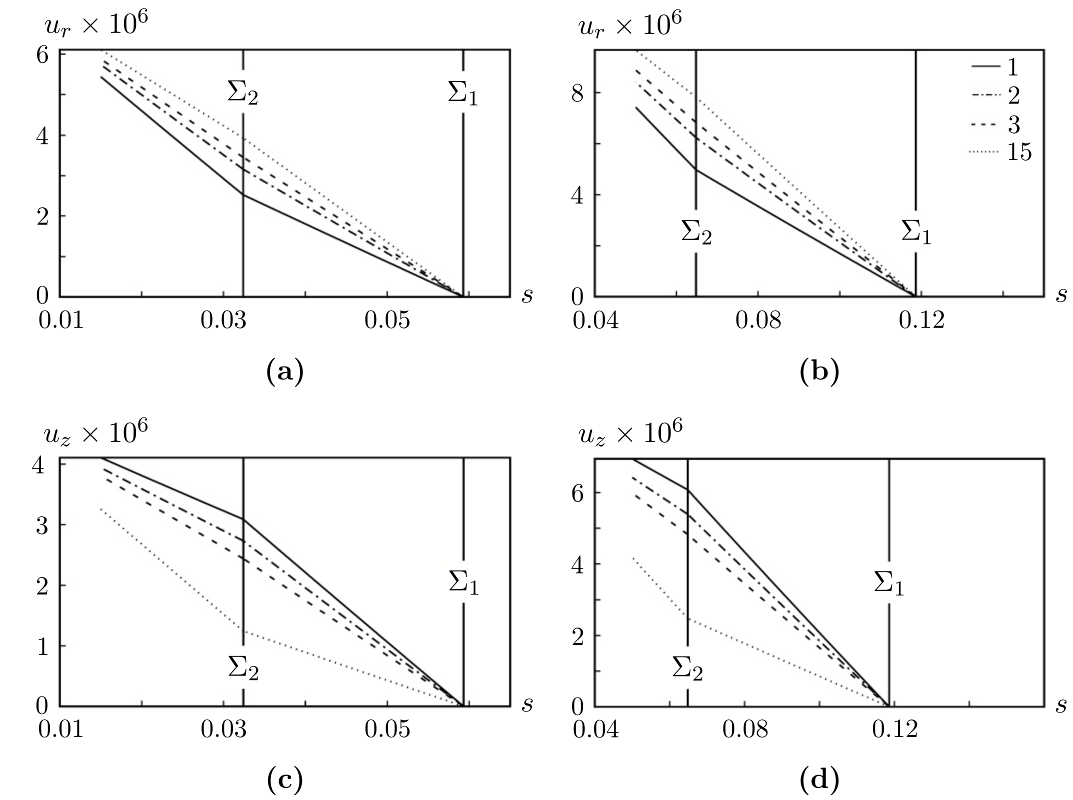


Рис. 2. Перемещения $u_r(s,\delta,t)$ и $u_z(s,\delta,t)$ при $t=\tau_1$ (a), (c) и $t=\tau_2$ (b), (d)

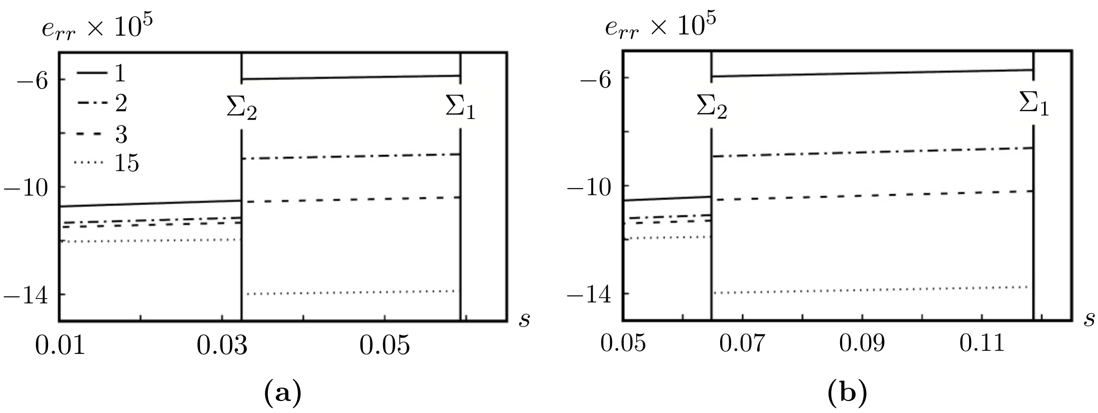


Рис. 3. Деформации $e_{rr}(s,\delta,t)$ при $t=\tau_1$ (a) и $t=\tau_2$ (b)

членов лучевые ряды в форме (11), которая используется для нестационарных краевых задач, изначально (по идеям в своей основе) относятся к асимптотическим методам, хотя и не используют безразмерные переменные. Действительно, лучевые разложения (11) можно записать относительно переменных $(t-t_1)/T$ и $(t-t_2)/T$, считая эти переменные малыми. Однако проблема доказательства асимптотического характера лучевых рядов подобной формы в настоящее время не имеет строгого математического решения. Пока что применение лучевого метода обосновывают его согласованностью с теорией характеристик и физикомеханическими свойствами волновых процессов (если не говорить об отдельных максимально простых краевых задачах).

Ещё одним вопросом, не имеющим на сегодняшний день ответа в общем виде, является определение области пригодности лучевых представлений (или, говоря иначе, на каком расстоянии от волнового фронта приближенное решение в лучевых рядах продолжает обеспечивать требуемую точность и адекватно отражать реальное состояние полей перемещений и деформаций). Здесь оценки возможны в тех случаях, когда наряду с лучевым решением имеется точное решение краевой задачи. Так, в плоской одномерной задаче о продольной волне деформаций точным решением для перемещения $u_1(z_1,t)$ будет функция $f\,(t-z_1/C_1)$, где $u_1^0 = u_1(0,t) = f(t)$ — краевое условие на границе полупространства. Применяя к этой задаче лучевой метод, приближенное решение ищем по формуле

$$u^*(z_1,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right]\bigg|_{t=\frac{z_1}{C_1}} \left(t - \frac{z_1}{C_1}\right)^k, \tag{24}$$

где для коэффициентов ряда из уравнений затухания следует $[\partial^k u/\partial t^k]\big|_\Sigma = \alpha_k = \text{const}$, $(k = 1,2,3,\ldots)$. Эти коэффициенты определяются из краевого условия как $\alpha_k = -\,d^k f(t)/dt^k\big|_{t=0}$. Поэтому, в частности, при $f(t) = vt + at^2/2$ достаточно двух шагов лучевого метода, чтобы точно выполнить краевое условие и формула (24) для u^* совпадала с точным решением в области $0 \leqslant z_1 \leqslant C_1 t$.

Ещё один достаточно простой пример — одномерная продольная сферическая волна, возникающая в среде при нестационарном воздействии на границу полости радиуса r_0. Полагаем, что граничные перемещения — известные функции:

$$u_r|_{r=r_0} = vt + \frac{at^2}{2}, \quad u_\varphi|_{r=r_0} = u_\theta|_{r=r_0} = 0, \tag{25}$$

где r, φ, θ — сферическая координатная система. Тогда, решая с учётом (25) уравнение движения, следующее из системы (1), легко получить точное решение для единственной отличной от нуля компоненты поля перемещений $u_r(r,t)$ $(u_\varphi = u_\theta = 0)$:

$$\begin{gathered} u_r(r,t) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \left\{ vt + \frac{a}{2}\left(t^2 - \frac{r^2 - r_0^2}{C_1^2}\right) + \exp\left(-\frac{C_1\zeta}{r_0}\right)\left(-\frac{v}{C_1}(r - r_0) + a\frac{r_0(r-r_0)}{C_1^2}\right)\right\}, \\ \zeta = t - \frac{r - r_0}{C_1}. \end{gathered} \tag{26}$$

Приближенное решение u_r^* определяем согласно (24) двумя шагами лучевого метода:

$$u_r^*(r,t) = \frac{r_0}{r} v\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{r_0 a}{r} - vC_1\frac{r - r_0}{r^2}\right)\zeta^2 + \ldots\,. \tag{27}$$

Точное решение (26) раскладываем в ряд Тейлора по переменной ζ в окрестности $\zeta = 0$ (в окрестности Σ):

$$u_r(r,t) = \frac{r_0}{r} v\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{r_0 a}{r} - vC_1\frac{r - r_0}{r^2}\right)\zeta^2 + O(\zeta^3). \tag{28}$$

Сравнивая формулы (27) и (28), приходим к выводу, что в данном примере приближенное решение на основе лучевого метода совпадает с рядом Тейлора точного решения до членов второй степени включительно. Выбор ширины прифронтовой области ζ^* $(0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta^*)$ здесь диктуется желаемой степенью точности приближения. Отметим, что применение лучевого метода на третьем, четвёртом и т. д. шагах также соответствует ряду Тейлора точного решения и увеличению ширины ζ^* прифронтовой области, где точность приближенного решения будет достаточной. Необходимо добавить, что лучевые ряды становятся непригодными в окрестности особых точек на волновом фронте, а также при пересечении нескольких волновых фронтов (в задаче с гладкой поверхностью вращения Q_0, у которой $K > 0$, такие ситуации не возникают).

В отличие от представленных примеров, в нашей задаче нет возможности сравнить лучевой ряд с точным решением. Многомерные нестационарные динамические задачи даже в модели среды Гука относятся к наиболее сложным случаям, для которых построение точного решения вызывает большие и не всегда преодолимые математические трудности. Для рассмотренной в п. 3 задачи представим графики невязок, возникающих в уравнениях движения (9) при подстановке в них формул (22), (23).

На рис. 4 приведены графики функций невязок уравнений Навье (9) в прифронтовой области продольной волны Σ_1: $\Psi_1(s)$, $\Phi_1(t)$ на рис. 4(a), 4(b) для первого уравнения системы (9); $\Psi_2(s)$, $\Phi_2(t)$ на рис. 4(c), 4(d) — для второго уравнения.

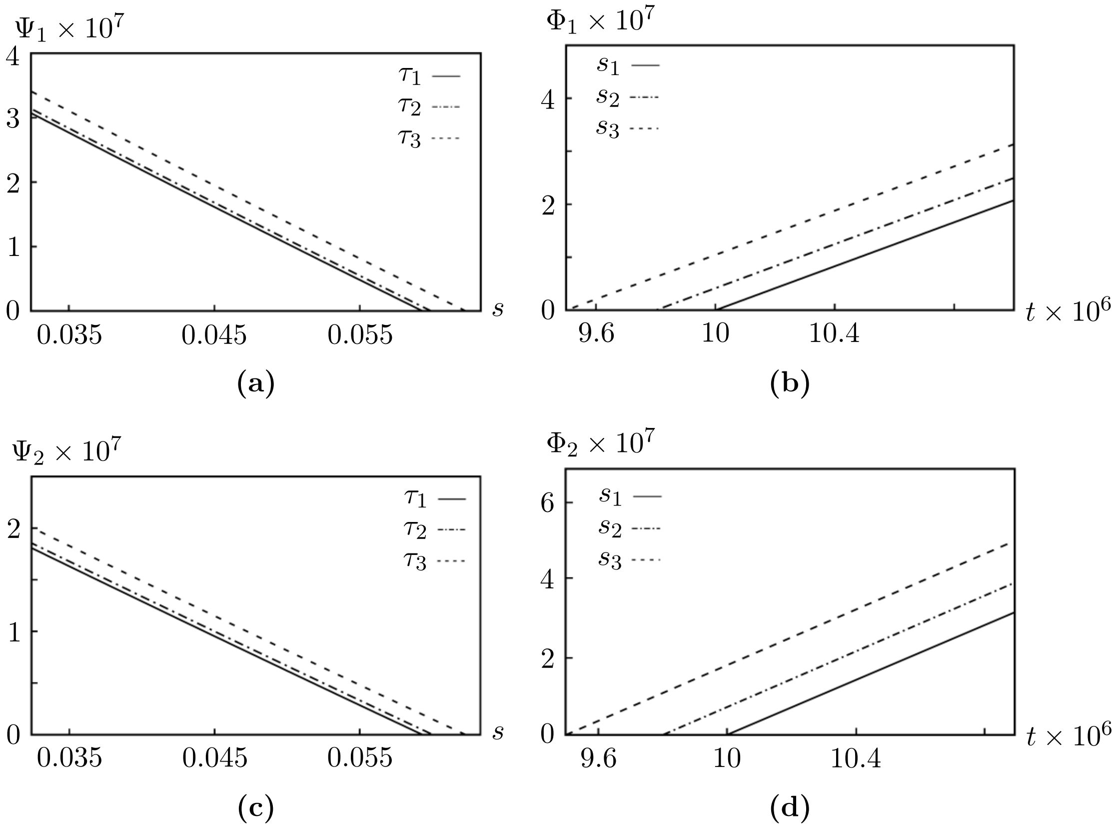


Рис. 4. Невязки уравнений движения (9) в прифронтовой области за Σ_1 в фиксированные моменты времени (a), (c) и в фиксированных точках пространства (b), (d)

Графики на рис. 4(a), 4(c) получены при фиксированном значении параметра $\delta = 1$ м для моментов времени $t_1 = 1{\cdot}10^{-5}$ с, $t_2 = 1.01{\cdot}10^{-5}$ с, $t_3 = 1.05{\cdot}10^{-5}$ с; графики на рис. 4(b), 4(d) получены для $s_1 = 0.05931$ м, $s_2 = 0.0581238$ м, $s_3 = 0.0563445$ м при $\delta = 10$ м. Таким образом, нулевые значения невязок соответствуют либо координате фронта Σ_1 в заданный момент времени (рис. 4(a), 4(c)), либо моментам времени, когда эта волна приходит в фиксированные точки пространства s_i (рис. 4(b), 4(d)). Меняя значение δ, можно получить невязки для всего семейства лучей. Представленные на рис. 4 графики показывают, что невязки уравнений (9), нулевые на продольной волне Σ_1, при малом отходе от неё по времени или пространственной координате растут практически линейно, оставаясь порядка 10^{-8}–10^{-7}. Можно предположить, что подобным линейным образом невязки ведут себя во всей прифронтовой области за Σ_1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Свойства упругих волн деформаций в массивах большой протяжённости, которые при решении краевых задач обычно представляются как область с бесконечно удалённой границей, входят в множество важнейших объектов исследований деформационного поведения среды, подверженной природным или техногенным механическим воздействиям. Одним из эффективных приёмов, позволяющих получить приближенные решения для полей перемещений, деформаций и напряжений в прифронтовых областях упругих волн разрыва скоростей, является лучевое разложение [11, 18, 27]. В нашей статье построено прифронтовое решение осесимметричной двумерной задачи динамики деформирования линейноупругой среды с границей в форме произвольной гладкой поверхности вращения с положительной гауссовой кривизной для двух шагов лучевого метода. Для частного случая границы — параболоида вращения — приведено решение для одного шага метода. Полученные решения показывают, что при двумерном характере деформаций в решение j-го шага лучевого метода необходимо включать часть слагаемых с множителем $(t - t_k)^{j+1}$. Именно этот подход позволяет существенно снизить погрешность приближенного решения в окрестности волн сильных разрывов. Очевидно, что данное свойство распространяется и на двумерные процессы деформации в нелинейноупругих материалах. При этом и для линейноупругих, и для нелинейноупругих сред лучевые приближенные решения в прифронтовых областях в комбинации с численными методами расчётов [15, 16], применяемыми в удалённых от передних фронтов областях, могут служить вполне эффективным инструментом численно-аналитического подхода [24].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института автоматики и процессов управления ДВО РАН (проект FWFW-2021-0005). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fedorova L. V.* Solution of the dynamic problem of the linear theory of elasticity // Mech. Solids. 2018. V. 53, N 6. P. 609–614; DOI: 10.3103/S002565441806002X
2. *Fesenko A., Vaysfel'd N.* The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity // Procedia Struct. Integrity. 2021. V. 33. P. 509–527; DOI: 10.1016/j.prostr.2021.10.058
3. *Ильяшенко А. В.* Распространение плоского ударного фронта в упругом слое // Изв. РАН. МТТ. 2022. Т. 5, № 5. С. 141–149; DOI: 10.31857/S0572329922050075
4. *Burenin A. A., Gerasimenko E. A., Kovtanyuk L. V.* On the unloading dynamics in an elastic/viscoplastic material predeformed by viscometric twisting // Mater. Phys. Mech. 2023. V. 51, N 1. P. 68–83; DOI: 10.18149/MPM.5112023_7
5. *Садовский В. М.* К теории ударных волн в изотропно упрочняющихся пластических средах // Прикл. мат. и мех. 2023. Т. 87, № 2. С. 254–264; DOI: 10.31857/S0032823523020133
6. *Surana K. S., Knight J., Reddy J. N.* Nonlinear waves in solid continua with finite deformation // Am. J. Comput. Math. 2015. V. 5, N 3. P. 345–386; DOI: 10.4236/ajcm.2015.53032
7. *Пшеничнов С. Г.* Нестационарные динамические задачи линейной вязкоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 84–96.
8. *Fesenko A. A., Moyseenok A. P.* Exact solution of a nonstationary problem for the elastic layer with rigid cylindrical inclusion // J. Math. Sci. 2020. V. 249. P. 478–495; DOI: 10.1007/s10958-020-04954-3
9. *Korovaytseva E. A., Pshenichnov S. G.* Solutions of non-stationary dynamic problems of linear viscoelasticity // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 328–334; DOI: 10.1134/s1995080219030120
10. *Тарлаковский Д. В., Салиев А. А., Мусурманова М. О., Шукуров А. М.* Нестационарные колебания упруго-пористого пространства с двумя сферическими полостями под действием сдвиговых волн // Материалы XXV междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А. Г. Горшкова. 2019. Т 2. С. 131–133.

11. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Ray expansion theory // Encycl. Contin. Mech. 2019. P. 2126–2141; DOI: 10.1007/978-3-662-53605-6_97-1

12. *Вестяк В. А., Тарлаковский Д. В.* Нестационарное осесимметричное деформирование упругого пространства со сферической полостью под действием объёмных сил // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2016. № 4. С. 48–54.

13. *Kachalov A. P.* Ray type solutions for waves of finite deformation in physically linear, nonlinear inhomogeneous elastic media // J. Math. Sci. 2017. V. 224. P. 79–89; DOI: 10.1007/s10958-017-3396-2

14. *Dyyak I., Horlatch V., Salamakha M.* Parallel solution of dynamic elasticity problems // Lect. Notes Mech. Eng. 2020. P. 562–571; DOI: 10.1007/978-3-030-22365-6_56

15. *Seriani G., Oliveira S. P.* Numerical modeling of mechanical wave propagation // Riv. del Nuovo Cim. 2020. N 43. P. 459–514; DOI: 10.1007/s40766-020-00009-0

16. *Петров И. Б.* Сеточно-характеристические методы. 55 лет разработки и решения сложных динамических задач // Comput. Math. Inf. Technol. 2023. Т. 6, № 1. С. 6–21; DOI: 10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21

17. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

18. *Вервейко Н. Д., Егоров М. В.* Математическое моделирование динамического деформирования упруговязкопластических оболочек конечной длины лучевым методом // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 2. С. 325–343; DOI: 10.14498/vsgtu1610.

19. *Loktev A. A., Gridasova E. A., Zapol'nova E. V.* Simulation of the railway under dynamic loading. Part 1. Ray method for dynamic problem // Contemp. Eng. Sci. 2015. V. 8, N 20. P. 799–807; DOI: 110.12988/ces.2015.57204

20. *Rossikhin Y. A., Burenin A. A., Potianikhin D. A.* Shock waves via ray expansions // Encyclopedia of Continuum Mechanics. 2019. P. 2264–2279; DOI: 10.1007/978-3-662-53605-6_100-1

21. *Казаков Ю. С., Тарлаковский Д. В.* Учёт трения на начальном этапе вертикального внедрения выпуклого ударника в упругую полуплоскость // Пробл. прочн. и пластич. 2022. Т. 84, № 2. С. 225–235; DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-225-235

22. *Котов В. Л., Линник Е. Ю., Тарасова А. А.* Исследование оптимальных форм осесимметричных тел, проникающих в грунтовые среды // Прикл. мех. техн. физ. 2016. Т. 57, № 5. С. 66–75; DOI: 10.15372/PMTF20160508

23. *Димитриенко Ю. И.* Механика сплошной среды: учеб. пособие: в 4 т. Т. 4. Основы механики твёрдых сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013.

24. *Герасименко Е. А.* К проблеме выделения разрывов в численных расчётах динамики деформирования // Учёные записки КнАГТУ. 2022. № 5. С. 46–54; DOI: 10.17084/20764359-2022-61-46

25. *Подильчук Ю. Н., Рубцов Ю. К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. Киев: Наукова Думка, 1988.

26. *Babich V. M., Buldyrev V. S.* Asymptotic methods in short-wavelength diffraction theory. Oxford: Alpha Science, 2009.

27. *Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е.* Решение одной многомерной задачи ударной деформации упругого полупространства с искривлённой границей на основе модифицированного лучевого метода // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 4. С. 132–143.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3

APPROXIMATE NEAR-FRONT RAY SOLUTIONS IN THE AXISYMMETRIC STRAIN DYNAMICS OF A LINEAR ELASTIC HALF-SPACE

V. E. Ragozina[a], **Yu. E. Ivanova**[b], **O. V. Dudko**[c]

Institute of Automation and Control Processes, Far East Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, 690041 Russia

E-mails: [a]ragozina@vlc.ru, [b]ivanova@iacp.dvo.ru, [c]dudko@iacp.dvo.ru

Received 15.06.2023, revised 16.05.2024, accepted 03.07.2024

Abstract. The dynamics of axisymmetric two-dimensional strains in a linear elastic half-space bounded by a smooth surface of revolution with positive Gaussian curvature is considered. An approximate solution of the initial-boundary value problem is constructed on the basis of ray series with expansion in a time-like variable. The limited number of terms of the ray series is used for near-front domains of curvilinear waves of strong discontinuities. The coefficients of this series are the discontinuities of the derivatives of displacements with respect to time (starting from the first derivative). It is shown that it is necessary to take into account the ray series components up to the $(k+1)$st order inclusive at the kth step of the ray method for a two-dimensional type of the deformation process.

Keywords: linear elastic medium, axisymmetric problem, surface of strong discontinuities, ray series, attenuation equation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.309

REFERENCES

1. L. V. Fedorova, "Solution of the dynamic problem of the linear theory of elasticity," Mech. Solids **53** (6), 609–614 (2018). https://doi.org/10.3103/S002565441806002X
2. A. Fesenko and N. Vaysfel'd, "The dynamical problem for the infinite elastic layer with a cylindrical cavity," Procedia Struct. Integr. **33**, 509–527 (2021). https://doi.org/10.1016/j.prostr.2021.10.058
3. A. V. Il'yashenko, "Propagation of a flat shock front in an elastic layer," Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela **5** (5), 141–149 (2022) [in Russian]. https://doi.org/10.31857/S0572329922050075
4. A. A. Burenin, E. A. Gerasimenko, and L. V. Kovtanyuk, "On the unloading dynamics in an elastic/viscoplastic material predeformed by viscometric twisting," Mater. Phys. Mech. **51** (1), 68–83 (2023). https://doi.org/10.18149/MPM.5112023_7
5. V. M. Sadovskii, "To the theory of shock waves in isotropically hardening plastic media," Prikl. Mat. Mekh. **87** (2), 254–264 (2023) [in Russian]. https://doi.org/10.31857/S0032823523020133
6. K. S. Surana, J. Knight, and J. N. Reddy, "Nonlinear waves in solid continua with finite deformation," Am. J. Comput. Math. **5** (3), 345–386 (2015). https://doi.org/10.4236/ajcm.2015.53032
7. S. G. Pshenichnov, "Nonstationary dynamic problems of nonlinear viscoelasticity," Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela no. 1, 84–96 [Mech. Solids **48** (1), 68–78 (2013)].
8. A. A. Fesenko and A. P. Moyseenok, "Exact solution of a nonstationary problem for the elastic layer with rigid cylindrical inclusion," J. Math. Sci. **249**, 478–495 (2020). https://doi.org/10.1007/s10958-020-04954-3

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 521–535.

9. E. A. Korovaytseva and S. G. Pshenichnov, “Solutions of non-stationary dynamic problems of linear viscoelasticity,” Lobachevskii J. Math. **40**, 328–334 (2019). https://doi.org/10.1134/s1995080219030120
10. D. V. Tarlakovskii, A. A. Saliev, M. O. Musurmanova, and A. M. Shukurov, “Nonstationary oscillations of an elastic-porous space with two spherical cavities under the action of shear waves,” *Mater. XXV mezhdunar. simpoz. “Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktsii i sploshnykh sred” im. A. G. Gorshkova* (Proc. XXV Gorshkov Int. Sympos. “Dynamic and technological problems of mechanics of structures and continuous media”), 2019, vol. 2, pp. 131–133 [in Russian].
11. Yu. A. Rossikhin and M. V. Shitikova, “Ray expansion theory,” in *Encycl. Contin. Mech.,* pp. 2126–2141 (2019). https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_97-1
12. V. A. Vestyak and D. V. Tarlakovskii, “Nonstationary axisymmetric strain of elastic space with a spherical cavity under the action of volumetric forces,” Vestn. Mosk. Gos. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. no. 4, 48–54 (2016) [in Russian].
13. A. P. Kachalov, “Ray type solutions for waves of finite deformation in physically linear, nonlinear inhomogeneous elastic media,” J. Math. Sci. **224**, 79–89 (2017). https://doi.org/10.1007/s10958-017-3396-2
14. I. Dyyak, V. Horlatch, and M. Salamakha, “Parallel solution of dynamic elasticity problems,” in *Lect. Notes Mech. Eng.* pp. 562–571 (2020). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6_56
15. G. Seriani and S. P. Oliveira, “Numerical modeling of mechanical wave propagation,” Riv. Nuovo Cim. **43**, 459–514 (2020). https://doi.org/10.1007/s40766-020-00009-0
16. I. B. Petrov, “Grid-characteristic methods. 55 years of developing and solving complex dynamic problems,” Comput. Math. Inf. Technol. **6** (1), 6–21 (2023) [in Russian]. https://doi.org/10.23947/2587-8999-2023-6-1-6-21
17. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (New York—London—Sydney—Toronto, John Wiley & Sons, 1974,; Mir, Moscow, 1977).
18. N. D. Verveiko and M. V. Egorov, “Mathematical modeling of dynamic strain of elastic-viscoplastic shells of finite length by the ray method,” Vestn. Samarsk. Gos. Tekh. Univ Ser. Fiz.-Mat. Nauki **22** (2), 325–343 (2018). https://doi.org/10.14498/vsgtu1610
19. A. A. Loktev, E. A. Gridasova, and E. V. Zapol’nova, “Simulation of the railway under dynamic loading. Part 1. Ray method for dynamic problem,” Contemp. Eng. Sci. **8** (20), 799–807 (2015). https://doi.org/110.12988/ces.2015.57204
20. Y. A. Rossikhin, A. A. Burenin, and D. A. Potianikhin, “Shock waves via ray expansions,” in *Enc. Contin. Mech.,* pp. 2264–2279, 2019. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_100-1
21. Yu. S. Kazakov and D. V. Tarlakovskii, “Taking into account friction at the initial stage of vertical penetration of a convex striker into an elastic half-plane,” Probl. Prochn. Plastichn. **84** (2), 225–235 (2022) [in Russian]. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-2-225-235
22. V. L. Kotov, E. Yu. Linnik, and A. A. Tarasova, “Study of optimal forms of axisymmetric bodies penetrating into soil media,” Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **57** (5), 66–75 (2016) [in Russian]. https://doi.org/10.15372/PMTF20160508
23. Yu. I. Dimitrienko, *Continuum Mechanics: A Textbook in 4 Vols. Vol. 4. Fundamentals of Solid Mechanics* (Izd. MGTU im. N.E Baumana, Moscow, 2013) [in Russian].
24. E. A. Gerasimenko, “To the problem of identifying discontinuities in numerical calculations of strain dynamics,” Uch. Zap. KnAGTU no. 5, 46–54 (2022) [in Russian]. https://doi.org/10.17084/20764359-2022-61-46
25. Yu. N. Podil’chuk and Yu. K. Rubtsov, *Ray Methods in the Theory of Wave Propagation and Scattering* (Naukova Dumka, Kiev, 1988) [in Russian].
26. V. M. Babich and V. S. Buldyrev, *Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory* (Alpha Science, Oxford, 2009).
27. V. E. Ragozina and Yu. E. Ivanova, “Solution of a multidimensional impact deformation problem for an elastic half-space with curved boundary on the basis of a modified ray method,” Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela no. 4, 132–143 (2016) [Mech. Solids **51** (4), 484–493 (2016)].

УДК 517.956

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПО ОТЫСКАНИЮ ИСТОЧНИКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ

© 2024 К. Б. Сабитов

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
просп. Октября, 71, г. Уфа 450054, Россия,
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологии,
просп. Ленина, 49, г. Стерлитамак 453103, Россия

E-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Поступила в редакцию 27.11.2023 г.; после доработки 27.03.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

В статье приводятся постановки обратных задач для уравнения теплопроводности по отысканию его правой части с дополнительным интегральным условием и обоснование их корректности в смысле Адамара в классе регулярных решений. Единственность решений поставленных задач доказана на основании интегральных тождеств. Методами разделённых переменных и интегральных уравнений решения задач построены в явном виде.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, обратные задачи, единственность решения, метод интегральных тождеств, существование решения, ряд, интегральное уравнение, устойчивость решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.310

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим более общее уравнение параболического типа

$$\mathcal{L}u \equiv N(x)u_t - K(t)u_{xx} + a(x,t)u_x + c(x,t)u = F(x,t) = f(x)g(t) \tag{1}$$

в области $D = \{(x,t)\, 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, l, T — заданные положительные постоянные, $N(x) > 0$, $K(t) > 0$, $a(x,t)$, $c(x,t)$ — заданные функции и поставим следующие задачи.

Задача 1. Найти пару функций $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(D), \quad u_x \in L_2(D); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,l) \cap L[0,l]; \tag{3}$$

$$\mathcal{L}u(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{6}$$

$$\int\limits_0^T u(x,t)g(t)\,dt = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(t)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Задача 2. Найти пару функций $u(x,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющих условиям (2), (4)–(6) и, кроме этого,

$$g(t) \in C(0,T) \cap L[0,T],$$

$$\int_0^l u(x,t)f(x)\,dx = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

где $\varphi(x)$, $h(t)$ и $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$,

$$\int_0^l \varphi(x)f(x)\,dx = h(0). \tag{9}$$

В задачах 1 и 2 интегральные условия (7) и (8) являются дополнительными условиями для определения функций $f(x)$ и $g(t)$.

Аналогичные обратные задачи изучены в работе [1], стр. 123–126, [2], стр. 248–252, для уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x)g(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T \tag{10}$$

с нулевыми граничными и начальным условиями

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

с заданием дополнительного условия

$$u(x_0,t) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x_0 \in [0,l]. \tag{11}$$

Для обратной задачи по определению функций $u(x,t)$ и $g(t)$ доказана теорема единственности и существования решения, когда $f(x_0) \neq 0$. Приведён пример функции $f(x)$, такой, что $f(x) = -f(l-x)$, и точки $x_0 = l/2$, где $f(l/2) = 0$, для которых эта обратная задача имеет не единственное решение. В случае задачи по отысканию пары функций $u(x,t)$ и $f(x)$ относительно неизвестной функции $f(x)$ получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода, тем самым показана некорректность постановки этой задачи, хотя при $g(t) \equiv 1$ и $x_0 = 0$ доказана единственность решения интегрального уравнения в классе $L_2[0,l]$.

В нашей работе [3] обратная задача по отысканию пары функций $u(x,t)$ и $g(t)$ для уравнения (10) с дополнительным условием (11) исследована при более слабых условиях относительно функции $f(x)$ и при $u(x,0) = \varphi(x) \neq 0$. Отдельно изучены случаи, когда $f(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$; $f(x_0) = f''(x_0) = 0$ и $f^{IV}(x_0) \neq 0$ и т. д. Во всех этих случаях доказаны теоремы об однозначной разрешимости этой задачи. Обратная задача по нахождению пары функций $u(x,t)$ и $f(x)$ для уравнения (10) изучена с дополнительным условием

$$u(x,t_0) = \varphi_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t_0 \leqslant T. \tag{12}$$

Здесь установлен критерий решения задачи, которое построено в виде суммы рядов Фурье.

Отметим, что задача 2 исследована для общих параболических уравнений с правой частью $F(x,t) = h(x,t)g(t)$ в работе [4]. Найдены достаточные условия относительно коэффициентов, при которых такая задача имеет единственное решение. При этом не исследованы вопросы о существенности достаточного условия

$$|h(x_0,t)| \geqslant h_0 = const > 0$$

на функцию $h(x,t)$ при неизвестной функции $g(t)$ и корректность задачи в зависимости от выбора точки x_0 из $[0,l]$.

В работе [5] рассмотрены обратные задачи нахождения свободного члена и коэффициента перед $u(x,t)$ в общем параболическом уравнении. Доказаны фредгольмовость линейной обратной задачи нахождения правой части специального вида, а также глобальные теоремы существования, единственности и устойчивости её решения.

Отметим также работу [6], где для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка

$$u'(t) = Au(t) + \varphi(t)p + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

в банаховом пространстве E изучена обратная задача по отысканию пары $u(t)$ и $p \in E$ с заданием условий $u(0) = u_0$, $u(T) = u_1$, где A — линейный замкнутый оператор и указаны достаточные условия на функции $\varphi(t)$ и $f(t)$, которые обеспечивают существование единственного решения поставленной задачи.

В работе [7] исследованы обратные задачи об определении функции $p(t) \in L_p(0,T;Y_0)$ (Y_0 — некоторое банахово пространство), входящей в правую часть операторно-дифференциального уравнения вида

$$L(t)u = u_t - A(t)u - B(t)u = f(t,u,p(t)),$$

где $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$, $\{B(t)\}_{t\in[0,T]}$ — семейства линейных определённых в некотором банаховым пространстве X операторов и $f(t,u,p(t))$ — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор. Получены локальные по времени теоремы существования и единственности решений. В другой работе [8] изучается обратная задача по отысканию решения и правой части специального вида для параболического уравнения

$$u_t - L_0 u = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)\delta(x - x_i) + f(x,t), \quad (x,t) \in (a,b) \times (0,T),$$

где $L_0 u = a(x)u_{xx} - b(x)u_x - c(x)u$ и δ — дельта-функция Дирака. Здесь неизвестными являются функции $u(x,t)$ — концентрация загрязняющего вещества в воздухе или водоёме, функции $N_i(t)$ — мощности источников загрязнения, точки $x_i \in (a,b)$ — точечные источники и r — число этих источников. Изучен вопрос о разрешимости, единственности и некоторых качественных свойствах решений. Приведены примеры, показывающие, что без дополнительных условий на взаимное расположение источников и точек измерений единственность может отсутствовать. В работе [9] для параболического уравнения

$$u_t + A(t,x,D)u = \sum_{i=1}^{s} f_i(x,t)q_i(t) + f_0(x,t),$$

где $A(t,x,D)$ — эллиптический оператор второго порядка, рассматривается обратная задача об определении решения u и функции $q_i(t)$ по интегральным данным переопределения $\int_G u\varphi_i(x)dx = \psi_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,s$. Решение параболического уравнения является обобщённым и в качестве правой части допускаются распределения из некоторых классов. При определённых условиях на данные задачи показано, что обратная задача корректна в классах Соболева и, в частности, имеют оценки об устойчивости.

В работе [10] для общего параболического уравнения исследуется обратная задача восстановления источника — правой части $F(x,t) = h(x,t)f(x)$, где неизвестной является функция $f(x)$. Для нахождения $f(x)$ помимо начальных и граничных условий задаётся дополнительное условие нелокального наблюдения вида

$$\int_0^T u(x,t)d\mu(t) = \chi(x).$$

Для поставленной задачи доказано свойство фредгольмовости, получены достаточные условия существования и единственности её решения. Эти условия имеют вид легко проверяемых неравенств и не содержат ограничений на величину $T > 0$ и диаметр рассматриваемой области Ω. Доказательство основывается на априорных оценках и качественных свойствах решений начально-краевых задач для параболических уравнений.

В данной работе введение дополнительных интегральных условий в виде (7) и (8) [11] вместо условий (11) и (12) позволяет установить на прямую единственность решения задач 1 и 2 для уравнения (1) методом интегральных тождеств и в случае, когда $N(x) \equiv 1$, $K(t) \equiv a^2$, $a = \mathrm{const} > 0$, $a(x,t) \equiv 0$, $c(x,t) \equiv \mathrm{const} \equiv c \geqslant 0$, построить решение в явном виде.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Теорема 1. *Пусть $K(t) \in C[0,T]$, $K(t) > 0$ при $t > 0$, $K(0) \geqslant 0$; $N(x) \in C[0,l]$, $N(x) > 0$ при $x > 0$, $N(0) \geqslant 0$, $a(x,t)$, $c(x,t)$, $a'_x(x,t) \in C(\overline{D})$, $2c - a'_x \geqslant 0$ в D; $g(t) \in C(0,T) \cap L[0,T]$, $g(t) \neq 0$ на $(0,T)$. Тогда, если существует решение задачи 1, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ и $f(x)$ — решение задачи 1 при нулевых условиях $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$. Тогда в области D имеет место тождество

$$2u\mathcal{L}u = (N(x)u^2)_t - (2K(t)uu_x - au^2)'_x + 2Ku_x^2 + (2c - a'_x)u^2 = 2uF(x,t). \tag{13}$$

Интегрируя тождество (13) по области $D_{\varepsilon,\delta} = \{(x,t)\, \varepsilon < x < l - \varepsilon,\ \delta < t < T - \delta\}$, где ε и δ — достаточно малые постоянные, затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$, получим

$$\int\limits_0^l N(x)u^2(x,t)\,dx + \int\limits_D \Big[2K(t)u_x^2 + (2c - a'_x)u^2\Big]\,dxdt =$$
$$= 2\int\limits_D uF(x,t)\,dxdt = 2\int\limits_0^l f(x)\left(\int\limits_0^T ug(t)\,dt\right)\,dx = 0.$$

Из данного равенства следует, что $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$, а из уравнения (1) при условии $g(t) \neq 0$ на $(0,T)$ вытекает, что $f(x) \equiv 0$.

Отметим, что идея доказательства этой теоремы исходит из работы [12]. □

Теорема 2. *Пусть коэффициенты $K(t)$, $N(x)$, $a(x,t)$, $c(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и $f(x) \in C(0,l) \cap L[0,l]$, $f(x) \neq 0$ на $(0,l)$. Тогда, если существует решение задачи 2, то оно единственно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и проводится на основании тождества (13).

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 1

В дальнейшем установим теоремы существования и устойчивости решений задач 1 и 2 для уравнения теплопроводности, т. е. в уравнении (1) положим, что $N(x) \equiv 1$, $K(t) \equiv a^2$, $a = \mathrm{const} > 0$, $a(x,y) \equiv 0$, $c(x,y) \equiv \mathrm{const} = c \geqslant 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$u_t - a^2u_{xx} + cu = F(x,t). \tag{14}$$

В постановке обратных задач 1 и 2 прямой задачей является начально-граничная задача (2), (5), (6) и (14). Решение этой задачи нами построено в явном виде [13], стр. 18–24,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x), \tag{15}$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n^2 t} + \int\limits_0^t F_n(s) e^{-\lambda_n^2 (t-s)}\, ds, \tag{16}$$

$$\varphi_n = \int\limits_0^l \varphi(x) X_n(x)\, dx, \tag{17}$$

$$F_n(t) = \int\limits_0^l F(x,t) X_n(x)\, dx, \tag{18}$$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \mu_n x, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad \lambda_n^2 = (a\mu_n)^2 + c.$$

При $F(x,t) = f(x)g(t)$ функции (18) и (16) принимают вид

$$F_n(t) = g(t) f_n,$$

$$f_n = \int\limits_0^l f(x) X_n(x)\, dx, \tag{19}$$

$$u_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n^2 t} + f_n g_n(t), \tag{20}$$

$$g_n(t) = \int\limits_0^t g(s) e^{-\lambda_n^2 (t-s)}\, ds. \tag{21}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $f(x) \in C^1[0,l]$, $f(0) = f(l) = 0$, $g(t) \in C[0,T]$, *то существует единственное решение задачи* (2), (5), (6) *и* (14) *и оно определяется формулой* (15), *где* $u_n(t)$ *находится по формуле* (20).

Доказательство теоремы 3 можно найти в работе [13], стр. 20–23.

Далее перейдём к обоснованию существования решения задачи 1 для уравнения (14).

Функцию (15) удовлетворим нелокальному интегральному условию (7):

$$\int\limits_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \right) g(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int\limits_0^T g(t) u_n(t)\, dt = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x), \tag{22}$$

где

$$\psi_n = \int\limits_0^l \psi(x) X_n(x)\, dx.$$

Из равенства (22) с учётом (20) найдём равенство для нахождения коэффициентов f_n:

$$\int\limits_0^T g(t) u_n(t)\, dt = \int\limits_0^T g(t) \Big[\varphi_n e^{-\lambda_n^2 t} + f_n g_n(t) \Big]\, dt = \psi_n$$

или

$$f_n \int\limits_0^T g(t) g_n(t)\, dt = \psi_n - \varphi_n \int\limits_0^T g(t) e^{-\lambda_n^2 t}\, dt. \tag{23}$$

Пусть $g(t) \equiv 1$. Тогда равенство (23) принимает вид

$$f_n \frac{1}{\lambda_n^2}\left[T + \frac{e^{-\lambda_n^2 T}}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_n^2}\right] = \psi_n - \frac{\varphi_n}{\lambda_n^2}\Big(1 - e^{-\lambda_n^2 T}\Big). \tag{24}$$

Отсюда находим неизвестные коэффициенты

$$f_n = \frac{\lambda_n^2}{\delta_n(T)}\left[\psi_n - \frac{\varphi_n}{\lambda_n^2}\Big(1 - e^{-\lambda_n^2 T}\Big)\right] \tag{25}$$

при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_n(T) = T - \frac{1}{\lambda_n^2}\Big(1 - e^{-\lambda_n^2 T}\Big) \neq 0.$$

В силу теоремы единственности решения задачи 1 выражение $\delta_n(T)$ не равно нулю при всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$. Тогда $\varphi_n = \psi_n \equiv 0$. Если при некотором $n = p \in \mathbb{N}$ выражение $\delta_p(T) = 0$, то из равенства (24) следует, что f_p — произвольная постоянная, вообще говоря, не равная нулю. Тогда обратная задача 1 с нулевыми граничными условиями при $g(t) \equiv 1$ имеет ненулевое решение

$$u(x,t) = \frac{f_p}{\lambda_p^2}\Big(1 - e^{-\lambda_p^2 t}\Big)X_p(x), \quad f(x) = f_p X_p(x).$$

Далее, найденные значения f_n по формуле (25) подставив в (20), получим

$$u_n(t) = \varphi_n\left[e^{-\lambda_n^2 t} - \frac{(1 - e^{-\lambda_n^2 t})(1 - e^{-\lambda_n^2 T})}{\lambda_n^2 \delta_n(T)}\right] + \psi_n \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 t}}{\delta_n(T)}. \tag{26}$$

Тогда решение обратной задачи 1 для уравнения (14) определяется рядами

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{27}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \tag{28}$$

где $u_n(t)$ и f_n находятся соответственно формулами (26) и (25).

Лемма. *Для коэффициентов $u_n(t)$ и f_n справедливы следующие оценки:*

$$|u_n(t)| \leqslant M_1\Big(|\varphi_n| + |\psi_n|\Big), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{29}$$

$$|u_n(t)| \leqslant M_2\left(\frac{1}{\lambda_n^2}|\varphi_n| + |\psi_n|\right), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$|u_n'(t)| \leqslant M_3 \lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2 t_0}\Big(|\varphi_n| + |\psi_n|\Big), \quad 0 < t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$|f_n| \leqslant M_4\Big(|\varphi_n| + \lambda_n^2|\psi_n|\Big), \tag{30}$$

где M_i — здесь и далее положительные постоянные, которые не зависят от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, t_0 — достаточно малое число.

Справедливость этих оценок непосредственно следует из формул (26) и (25) в силу ограниченности и отделённости от нуля выражения $\delta_n(T)$.

На основании леммы 1 ряд (27) на $\overline{D}$ и его производные по t и дважды по x на $\overline{D}_{t_0} = \overline{D} \cap \{t \geqslant t_0\}$ мажорируются соответственно числовыми рядами

$$M_5 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_n| + |\psi_n|\Big),$$

$$M_6 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(|\varphi_n| + n^2|\psi_n|\Big). \tag{31}$$

А ряд (28) в силу оценки (30) мажорируется рядом (31).

Теорема 4. *Если* $\varphi(x) \in C[0,l]$, $\varphi'(x) \in L_2(0,l)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(x) \in C^2[0,l]$, $\psi'''(x) \in L_2(0,l)$, $\psi(0) = \psi''(0) = \psi(l) = \psi''(l) = 0$, $g(t) \equiv 1$, *то существует единственное решение обратной задачи* 1 *для уравнения* (14) *и оно определяется суммами рядов* (27) *и* (28), *при этом* $u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{D}_{t_0})$ *и* $f(x) \in C[0,l]$.

Доказательство. В силу наложенных на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ условий коэффициенты φ_n и ψ_n, определённые соответственно формулами (17) и (14), их разложения в ряд Фурье по системе $X_n(x)$ на сегменте $[0,l]$ можно представить в виде

$$\varphi_n = \frac{1}{\mu_n}\varphi_n^{(1)}, \quad \psi_n = \frac{1}{\mu_n^3}\psi_n^{(3)},$$

здесь

$$\varphi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \varphi'(x)\cos\mu_n x\,dx, \quad \psi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \psi'''(x)\cos\mu_n x\,dx,$$

при этом справедливы неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(1)}|^2 \leqslant \|\varphi'(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(3)}|^2 \leqslant \|\psi'''(x)\|^2_{L_2[0,l]}.$$

Тогда числовой ряд (31) мажорируется сходящимся рядом

$$M_7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(|\varphi_n^{(1)}| + |\psi_n^{(3)}|\Big).$$

В силу этого ряды (27) и (28) сходятся равномерно на $\overline{D}$ и $[0,l]$ соответственно, при этом ряд (27) допускает почленное дифференцирование по t и дважды по x в $\overline{D}_{t_0}$. Покажем, что эти ряды удовлетворяют в $\overline{D}_{t_0}$ уравнению (14):

$$u_t - a^2 u_{xx} + cu = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)X_n(x) + a^2\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 u_n(t)X_n(x) + c\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)X_n(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[u_n'(t) + \lambda_n^2 u_n(t)\Big]X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x) = f(x),$$

так как функция (20) удовлетворяет при $g(t) \equiv 1$ равенству

$$u_n'(t) + \lambda_n^2 u_n(t) = f_n.$$

□

Замечание. Заметим, что при построении решения обратной задачи 1, формально воспользовавшись формулой (15) решения прямой задачи и условием (7), найдены неизвестные коэффициенты f_n по формуле (25). Затем решение задачи 1 ищется в виде суммы рядов (27) и (28) и доказано, что эти ряды удовлетворяют условиям (2)–(4), т. е. здесь мы не пользуемся теоремой 3. Можно было напрямую искать решение обратной задачи в виде суммы рядов (27) и (28). Исходя из условий (4), (6) и (7) найти неизвестные их коэффициенты $u_n(t)$ и f_n.

Устойчивость решения задачи 1 от заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ устанавливается следующим утверждением.

Теорема 5. *Для решения задачи* (2), (3), (5)–(7), (14) *имеют место оценки*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leqslant M_8\Big(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\Big), \tag{32}$$

$$\|f(x)\|_{L_2[0,l]} \leqslant M_9\Big(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi''(x)\|_{L_2[0,l]}\Big), \tag{33}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leqslant M_{10}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{C[0,l]}\Big),$$

$$\|f(x)\|_{C[0,l]} \leqslant M_{11}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'''(x)\|_{C[0,l]}\Big). \tag{34}$$

Доказательство. Поскольку система $X_n(x)$ ортонормированная на $[0,l]$, то в силу оценки (29) на основании формулы (27) имеем

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leqslant 2M_1^2 \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n^2 + \psi_n^2) = 2M_1^2\Big(\|\varphi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]}\Big).$$

Отсюда следует оценка (32).

Пусть (x,t) — любая точка из $\overline{D}$. Тогда из формулы (27) с учётом оценки (29) получим

$$|u(x,t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} M_1 \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| + |\psi_n|. \tag{35}$$

Далее, используя представления

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^{(1)}}{\mu_n}, \quad \psi_n = \frac{\psi_n^{(1)}}{\mu_n},$$

где

$$\varphi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi'(x)\cos\mu_n x\,dx, \quad \psi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi'(x)\cos\mu_n x\,dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(1)}|^2 \leqslant \|\varphi'(x)\|^2_{L_2[0,l]}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(1)}|^2 \leqslant \|\psi'(x)\|^2_{L_2[0,l]},$$

и неравенство Коши—Буняковского из (35), получим

$$|u(x,t)| \leqslant \widetilde{M}_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|\varphi_n^{(1)}| + \frac{1}{n}|\psi_n^{(1)}| \leqslant \widetilde{M}_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(1)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n^{(1)}|^2\right)^{1/2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}_2\Big(\|\varphi'(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{L_2[0,l]}\Big) \leqslant M_{10}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi'(x)\|_{C[0,l]}\Big),$$

где $\widetilde{M}_i$ — здесь и далее положительные постоянные.

Аналогично доказываются оценки (33) и (34).

Пусть теперь $g(t) \not\equiv 1$. В условиях теоремы 1 $g(t) \neq 0$ на $(0, T)$. Поэтому при $g(t) \in C[0, T]$ можно считать, что $g(t) \geqslant g_0 = \mathrm{const} > 0$. Тогда функции $g_n(t)$ можно представить в виде

$$g_n(t) = g(\xi) \int\limits_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-s)}\, ds = g(\xi) \frac{1 - e^{-\lambda_n^2 t}}{\lambda_n^2},$$

где $0 < \xi < t$, и аналогично устанавливаются справедливость теорем 4 и 5. □

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ 2

Решение начально-граничной задачи (15) удовлетворим нелокальному интегральному условию (8). Тогда с учётом (19) получим

$$\int\limits_0^l u(x,t) f(x)\, dx = \int\limits_0^l \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) f_n = h(t). \tag{36}$$

В равенство (36) подставим (20) с учётом (21). Тогда получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно неизвестной функции $g(t)$:

$$\int\limits_0^t g(s) K(s,t)\, ds = \widetilde{h}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{37}$$

где

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 e^{-\lambda_n^2 (t-s)}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{38}$$

$$\widetilde{h}(t) = h(t) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{39}$$

При этом необходимо с учётом равенства (9) выполнение условия

$$\int\limits_0^l \varphi(x) f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n f_n. \tag{40}$$

В силу наложенных условий относительно функций $\varphi(x)$ и $f(x)$ в теореме 3 при исследовании прямой задачи (2), (5), (6) и (14) ядро $K(s,t)$ и правая часть $\widetilde{h}(t)$ интегрального уравнения (37) непрерывны дифференцируемы по t в областях определения, т. е. ряды в (38) и (39) сходятся равномерно в областях задания и допускают почленное дифференцирование по t. В силу этого дифференцируя уравнение (37) получим

$$g(t) \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 + \int\limits_0^t \frac{\partial K(s,t)}{\partial t} g(s)\, ds = \widetilde{h}'(t). \tag{41}$$

В силу теоремы 2 функция $f(x) \neq 0$ на $(0, l)$, поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \int\limits_0^l f^2(x)\, dx = \|f(x)\|^2_{L_2[0,l]} > 0.$$

Следовательно, интегральное уравнение (41) является уравнением Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью. Как известно, что такие уравнения однозначно разрешимы в классе непрерывных на $[0,T]$ функций.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 3, $f(x)\not\equiv 0$ на $(0,l)$, $h(t)\in C^1[0,T]$ и выполнены условия* (9) *и* (40)*, то существует единственное решение обратной задачи* 2 *для уравнения* (14)*. При этом функция $g(t)$ определяется как решение интегрального уравнения* (41)*, затем функция $u(x,t)$ — по формуле* (15) *как решение начально-граничной задачи* (2), (5), (6) *и* (14).

Далее докажем устойчивость решения задачи 2 для уравнения (14) в зависимости от функций $\varphi(x)$ и $h(x)$.

Теорема 7. *Для решения задачи 2 для уравнения* (14) *справедливы оценки*

$$\|g(t)\|_{C[0,T]}\leqslant M_{12}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}+\|h'(t)\|_{C[0,T]}\Big). \tag{42}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})}\leqslant M_{13}\Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}+\|h'(x)\|_{C[0,T]}\Big). \tag{43}$$

Отметим, что в этих оценках постоянные M_{11} и M_{12} зависят от функции $f(x)$.

Доказательство. Решение интегрального уравнения (41) можно построить через резольвенту $R(s,t,\lambda)$ ядра $H(s,t)=\dfrac{\partial K(s,t)}{\partial t}$ по формуле

$$g(t)=\overline{h}(t)+\lambda\int\limits_0^t R(s,t,\lambda)\overline{h}(t)\,ds, \tag{44}$$

где

$$\lambda=\frac{1}{\|f\|^2_{L_2}},\quad \overline{h}=\frac{\widetilde{h}'(t)}{\|f\|^2_{L_2}}.$$

Поскольку λ не является характеристическим числом ядра $H(s,t)$, то резольвента $R(s,t,\lambda)$ при любом $\lambda>0$ является непрерывной на квадрате $[0,T]\times[0,T]$, поэтому она ограничена. Предварительно оценим

$$\begin{gathered}|\widetilde{h}'(t)|\leqslant|h'(t)|+\sum_{n=1}^\infty|f_n||\varphi_n|\lambda_n^2\leqslant\\ \leqslant|h'(t)|+\widetilde{M}_3\sum_{n=1}^\infty|f_n^{(1)}||\varphi_n^{(1)}|\leqslant|h'(t)|+\widetilde{M}_3\left(\sum_{n=1}^\infty|f_n^{(1)}|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^\infty|\varphi_n^{(1)}|^2\right)^{1/2}\leqslant\\ \leqslant\|h'(t)\|_{C[0,T]}+\widetilde{M}_3\|\varphi'(x)\|_{L_2[0,l]}\leqslant\|h'(t)\|_{C[0,T]}+\widetilde{M}_4\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]},\end{gathered} \tag{45}$$

где

$$f_n^{(1)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f'(x)\cos\mu_n x\,dx.$$

Тогда из формулы (44) с учётом (45) имеем

$$|g(t)|\leqslant\widetilde{M}_5\Big(\|h'(t)\|_{C[0,T]}+\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}\Big).$$

Отсюда следует оценка (42).

Пусть $(x,t) \in \overline{D}$. Тогда из формулы (15) на основании (20), (42), получим оценку (43):

$$|u(x,t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| + |f_n||g_n(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|\varphi_n| + \frac{|f_n|}{\lambda_n^2} \|g(t)\|_{C[0,T]} \right) \leqslant \widetilde{M}_6 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n^{(1)}|}{n} + \|g(t)\|_{C[0,T]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} |f_n| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{M}_7 \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n^{(1)}|^2 \right)^{1/2} + \|g(t)\|_{C[0,T]} \right) \leqslant M_{13} \Big(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|h'(t)\|_{C[0,T]} \Big).$$

□

В заключение отметим, что представляет интерес исследование обратных задач 1 и 2 для общего параболического уравнения (1) по части доказательства теорем существования и устойчивости решения. Особый интерес представляют случаи, когда $K(t) = t^n$, $N(x) = x^m$, $n, m \in \mathbb{R}$, $|n| + |m| > 0$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджетов Института механики имени Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН (прект 123021200015-5 (FMRS-2023-00-15)) и Стерлитамакского филиала Уфимского университета науки и технологии. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.
2. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009.
3. *Сабитов К. Б., Зайнуллов А. Р.* Обратные задачи для уравнения теплопроводности по отысканию начального условия и правой части // Учён. зап. Казан. ун-та. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 161, № 2. С. 271–291.
4. *Прилепко А. И., Соловьёв В. В.* Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I; II // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 10. С. 1791–1799; Т. 23, № 11. С. 1971–1980.
5. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // Матем. сб. 1992. Т. 184, № 4. С. 49–68.
6. *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 9. С. 1614–1621.
7. *Пятков С. Г.* О некоторых обратных задачах для операторно-дифференциальных уравнений первого порядка // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 1. С. 183–193.
8. *Пятков С. Г., Сафонов Е. И.* О некоторых классах обратных задач об определении функции источников // Матем. тр. 2016. Т. 19, № 1. С. 178–196.
9. *Пятков С. Г., Уварова М. В.* Об определении функции источника в задачах тепломассопереноса по интегральным условиям переопределения // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19, № 4. С. 93–100.
10. *Костин А. Б.* Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Математический сборник. 2013. Т. 204, № 10. С. 3–46.

11. *Сабитов К. Б.* Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 10. С. 1468–1478.
12. *Romanov V., Hasanov A.* Uniqueness and stability analysis of final data inverse sourse problems for evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2022. V. 30, N 3. P. 425–446.
13. *Сабитов К. Б.* Обратные задачи для уравнений математичской физики. М.: Наука, 2023.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.956

INVERSE PROBLEMS OF FINDING A SOURCE IN THE HEAT EQUATION FROM A NONLOCAL OBSERVATION

K. B. Sabitov

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, 450054 Russia, Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Bashkortostan, 453103 Russia

E-mail: sabitov_fmf@mail.ru

Received 27.11.2023, revised 27.03.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. The article presents the statement of inverse problems of finding the right-hand side of the heat equation from an additional integral condition and justifies their Hadamard wellposedness in the class of regular solutions. The uniqueness of solutions of the problems is proved on the basis of integral identities. The solutions of the problems are constructed explicitly using separation of variables and the integral equation method.

Keywords: heat equation, inverse problem, uniqueness of solution, method of integral identities, existence of solution, series, integral equation, stability of solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.310

REFERENCES

1. A. M. Denisov, *Introduction to the Theory of Inverse Problems* (Mosk. Gos. Univ., Moscow, 1994) [in Russian].
2. S. I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems* (Sib. Nauchn. Izd., Novosibirsk, 2009) [in Russian].
3. K. B. Sabitov and A. R. Zainullov, "Inverse problems for the heat equation to find the initial condition and the right-hand side," Uch. Zap. Kazan. Univ. Fiz.-Mat. Nauki **161** (2), 271–291 (2019) [in Russian].
4. A. I. Prilepko and V. V. Solov'ev, "Solvability theorems and Rothe's method in inverse problems for parabolic equations. I; II," Differ. Uravn. **23** (10), 1791–1799 (1987); **23** (11), 1971–1980 (1987) [in Russian].
5. A. I. Prilepko and A. B. Kostin, "On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation," Mat. Sb. **184** (4), 49–68 (1992) [Sb. Math. **75** (2), 473–490 (1993)].
6. D. G. Orlovskii, "On the problem of determining the parameter of the evolution equation," Differ. Uravn. **26** (9), 1614–1621 (1990) [in Russian].
7. S. G. Pyatkov, "On some inverse problems for first order operator-differential equations," Sib. Mat. Zh. **60** (1), 183–193 (2019). [Sib. Math. J. **60** (1), 140–147 (2019)].
8. S. G. Pyatkov and E. I. Safonov, "On some classes of inverse problems of recovering a source function," Mat. Tr. **19** (1), 178–198 (2016) [Sib. Adv. Math. **27** (2), 119–132 (2017)].
9. S. G. Pyatkov and M. V. Uvarova, "On determining the source function in heat and mass transfer problems under integral overdetermination conditions," Sib. Zh. Ind. Mat. **19** (4), 93–100. [J. Appl. Ind. Math. **10** (4), 549–555 (2016)].
10. A. B. Kostin, "The inverse problem of recovering the source in a parabolic equation under a condition of nonlocal observation," Mat. Sb. **204** (10), 3–46 (2013). [Sb. Math. **204** (10), 1391–1434 (2013)].

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 536–547.

11. K. B. Sabitov, “Boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a nonlocal integral condition,” Differ. Uravn. **46** (10), 1468–1478 (2010). [Differ. Equations **46** (10), 1472–1481 (2010)].

12. V. Romanov and A. Hasanov, “Uniqueness and stability analysis of final data inverse sourse problems for evolution equations,” J. Inverse Ill-Posed Probl. **30** (3), 425–446 (2022).

13. K. B. Sabitov, *Inverse Problems for Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 2023) [in Russian].

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 3. С. 157–164

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ ЧЛЕНОМ

© 2024 А. С. Фоменко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mail: as.fomenko1@gmail.com

Поступила в редакцию 25.03.2024 г.; после доработки 21.05.2024 г.;
принята к публикации 03.07.2024 г.

Рассмотрена начально-краевая задача для полулинейного параболического дифференциального уравнения, содержащего нелокальный по времени член. Данный член содержит интеграл от решения по всему интервалу времени, на котором рассматривается задача. Доказана разрешимость в классах Гёльдера. Установлена единственность решения при ограничении на длину интервала времени, по которому проводится интегрирование в нелокальном члене.

Ключевые слова: нелокальное по времени параболическое уравнение, начально-краевая задача, разрешимость, единственность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.311

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ИССЛЕДУЕМОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $n \geqslant 2$. В пространственно-временном цилиндре $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $T \in (0,+\infty)$, рассмотрим следующую параболическую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \varphi\Big(\int\limits_0^T u(\cdot,s)\,ds\Big)u = f, \tag{1}$$

$$u(\boldsymbol{x},t) = g(\boldsymbol{x},t) \quad \text{при } \boldsymbol{x} \in S, \tag{2}$$

$$u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

где $S = \partial\Omega$, $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $t \in [0,T]$, $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ — искомая функция, $f : \Omega_T \to \mathbb{R}$, $g : S \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — заданные функции, условия на которые будут выписаны ниже. Функцию φ будем называть потенциалом взаимодействия.

В уравнении (1) в аргументе φ стоит интеграл от решения по всему интервалу $(0,T)$, на котором рассматривается задача. По этой причине мы будем называть данное уравнение нелокальным по времени. Задачи подобного типа возникают, например, при моделировании хаотичной динамики полимерной молекулы (полимерной цепочки) в водном растворе см. [1, 2]. В таких моделях искомая функция представляет собой плотность вероятности того, что t-й сегмент цепочки находится в точке $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Роль времени в данном случае играет параметр длины дуги вдоль цепочки, общая длина которой равна T. Заметим, однако, что решение задачи (1)–(3) не является плотностью вероятности. Дело в том, что интеграл от плотности вероятности должен быть равен единице, а искомая функция u этим свойством, вообще говоря, не обладает. Решение задачи (1)–(3) естественно называть статистическим весом. Так как движение каждого звена влияет через окружающую жидкость на все остальные звенья, потенциал взаимодействия φ зависит от интеграла от решения по всей длине цепочки.

Нелокальные уравнения возникают также в теории популяций см. [3, 4]. Уравнения в таких моделях являются ультрапараболическими, причём роль второго времени играет возраст особей. Нелокальные члены в данном случае могут присутствовать как в уравнении, так и в краевых условиях.

Заметим, что наличие в уравнении интеграла от решения по всему интервалу $(0, T)$ предполагает знание «будущего» для определения состояния системы в текущий момент времени. Такая ситуация не характерна для теории параболических уравнений и требует новых подходов при доказательстве разрешимости задачи. Например, решения нелинейных параболических уравнений часто строятся на достаточно малом промежутке времени, а потом продолжаются, если это возможно, на весь исследуемый интервал. В данном случае такой подход неприменим. Кроме того, как правило, локальная по времени единственность решения предполагает и глобальную. В рамках данной работы нам не удалось доказать единственность без ограничений на длину интервала времени, по которому проводится интегрирование в нелокальном члене.

Существуют работы, посвящённые исследованию похожих задач. Доказательство слабой разрешимости в пространствах Соболева задачи (1)–(3) с $g \equiv 0$ можно найти в [5, 6, 7]. В [8] доказано существование сильного решения с $f \equiv 0$ и $g \equiv 0$. В [9] установлены слабая разрешимость и единственность решения задачи с интегро-дифференциальным оператором Леви вместо лапласиана. Единственность решения доказана при некотором ограничении на величину T.

До настоящего времени подобные задачи исследовались лишь в пространствах Соболева. В данной работе рассмотрены вопросы существования и единственности решения задачи в классах Гёльдера, поскольку эти пространства являются одним из основных инструментов при изучении классических параболических задач. Кроме того, поскольку подобная задача может возникнуть в других областях математики, в предложенной работе исследована задача с ненулевой правой частью и неоднородными краевыми условиями.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Чтобы определить понятие решения задачи (1)–(3), введём стандартные определения пространств Гёльдера. Прежде всего определим расстояние

$$d(P, Q) = \left(|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}|^2 + |t - \tilde{t}|\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $P = (\boldsymbol{x}, t)$, $Q = (\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{t})$. Нетрудно проверить, что d удовлетворяет всем аксиомам метрики. Далее, введём обозначения

$$\begin{gathered}
\|u\|_0 = \sup_{\Omega_T} |u|, \\
H_\alpha(u) = \sup_{P, Q \in \Omega_T} \frac{|u(P) - u(Q)|}{d(P, Q)^\alpha}, \\
\|u\|_\alpha = \|u\|_0 + H_\alpha(u), \\
\|u\|_{1,\alpha} = \|u\|_\alpha + \sum \|D_x u\|_\alpha + \|D_t u\|_\alpha, \\
\|u\|_{2,\alpha} = \|u\|_{1,\alpha} + \sum \|D_x^2 u\|_\alpha,
\end{gathered}$$

где суммы берутся по всем частным производным указанного порядка. Обозначим через $C^\alpha(\Omega_T)$ пространство функций u, определённых на Ω_T, для которых $\|u\|_\alpha < \infty$. Аналогично определим пространства $C^{1,\alpha}(\Omega_T)$ и $C^{2,\alpha}(\Omega_T)$.

Мы будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $C^{2,\alpha}$, если её граница S локально представима в виде

$$x_i = h(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где h, $D_x h$, $D_x^2 h$ непрерывны по Гёльдеру с показателем α.

Обозначим через $\Omega_0 = \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \boldsymbol{x} \in \Omega,\, t = 0\}$ нижнее основание цилиндра Ω_T, а через $S_T = \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \boldsymbol{x} \in S,\, t \in (0, T)\}$ — его боковую поверхность. Положим $S_0 = \overline{\Omega}_0 \cap \overline{S}_T$.

Пусть ψ — некоторое продолжение начальных и граничных условий в Ω_T:

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} g(\boldsymbol{x}, t), & \boldsymbol{x} \in S, \\ u_0(\boldsymbol{x}), & t = 0. \end{cases}$$

Заметим, что если Ω — область класса $C^{2,\alpha}$ и $\psi \in C^{2,\alpha}(\Omega_T)$, то производные $D_x u_0$, $D_x^2 u_0$, $D_t g$ однозначно определены по непрерывности на S_0 и не зависят от выбора ψ.

Будем называть уравнение, начальные и граничные условия (1)–(3) задачей A.

Определение. Функцию $u \in C^{2,\alpha}(\Omega_T)$ будем называть решением задачи A, если она удовлетворяет (1)–(3) в классическом смысле.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, Ω — область класса $C^{2,\alpha}$, φ локально непрерывна по Гёльдеру с показателем α и $\varphi \geqslant 0$, $\psi \in C^{2,\alpha}(\Omega_T)$, $f \in C^{\alpha}(\Omega_T)$. Пусть, кроме того, выполняется условие согласования на S_0:*

$$g_t - \Delta u_0 + \varphi\Big(\int\limits_0^T g(\cdot, s)\, ds\Big) g = f.$$

Тогда существует решение задачи A, принадлежащее классу $C^{2,\alpha}(\Omega_T)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ A

Данный параграф посвящён доказательству теоремы 1. Прежде всего получим априорную оценку максимума модуля классического решения следующей задачи:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \eta\, w = f \quad \text{в } \Omega_T, \tag{4}$$

$$w(\boldsymbol{x}, t) = g(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{при } \boldsymbol{x} \in S, \tag{5}$$

$$w(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

где $\eta : \Omega_T \to \mathbb{R}_+$ — заданная функция. Следует отметить, что данная оценка не будет зависеть от η.

Лемма. *Пусть Ω, ψ, f обладают той же регулярностью, что и в условии теоремы 1. Пусть $\eta \in C^{\alpha}(\Omega_T)$, и выполняется условие согласования на S_0:*

$$g_t - \Delta u_0 + \eta\, g = f.$$

Тогда для классического решения w задачи (4)–(6) справедлива оценка

$$\|w\|_0 \leqslant T\|f\|_0 + \sup_{\Omega_0 \cup S_T} |\psi|. \tag{7}$$

Доказательство. Решение w существует и единственно (см. [10], гл. 3, §3, теорема 7). Обозначим $\widetilde{w} = \|f\|_0 t + w$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{w}$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t} - \Delta \widetilde{w} + \eta\, \widetilde{w} \geqslant 0 \quad \text{в } \Omega_T,\\ \widetilde{w}(\boldsymbol{x}, t) = g(\boldsymbol{x}, t) + \|f\|_0 t \quad \text{при } \boldsymbol{x} \in S,\\ \widetilde{w}(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}).\end{gathered}$$

В силу неотрицательности η мы можем применить принцип максимума для $\widetilde{w}$ (см. [11], гл. 7, §7.1, теорема 9) и получить неравенство

$$\widetilde{w} \geqslant -\sup_{\Omega_0 \cup S_T} \left(-\min(\psi + \|f\|_0 t, 0)\right) \geqslant -\sup_{\Omega_0 \cup S_T} |\psi|,$$

из которого следует оценка

$$w \geqslant -\|f\|_0 t - \sup_{\Omega_0 \cup S_T} |\psi|. \tag{8}$$

Аналогично рассмотрим случай с $\widetilde{w} = \|f\|_0 t - w$ и получим

$$w \leqslant \|f\|_0 t + \sup_{\Omega_0 \cup S_T} |\psi|. \tag{9}$$

Комбинируя (8) и (9), получаем оценку (7). Лемма доказана. □

Замечание 1. Если решение u задачи A существует, то оно удовлетворяет (4)–(6) с $\eta = \varphi\Big(\int\limits_0^T u(\cdot, s)\, ds\Big)$. Следовательно, в силу неотрицательности φ для u справедлива оценка (7).

Введём обозначение $I = [-TB, TB]$, где $B = T\|f\|_0 + \sup\limits_{\Omega_0 \cup S_T} |\psi|$.

Замечание 2. Из леммы следует, что значение интеграла в аргументе функции φ в уравнении (1) должно принадлежать отрезку I. То есть фактически φ определена на этом отрезке, где она является ограниченной функцией.

Для доказательства теоремы 1 мы будем использовать теорему Шаудера о неподвижной точке. Приведём её формулировку (см. также [10], гл. 7, §1, теорема 2).

Теорема (Шаудера). *Пусть Y — замкнутое выпуклое подмножество из пространства Банаха X, пусть Z — непрерывный на Y оператор, такой что ZY содержится в Y и ZY компактно в X. Тогда Z имеет неподвижную точку, т. е. существует точка y_0, такая что $Zy_0 = y_0$.*

Перейдём к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Рассмотрим в качестве Y множество функций

$$V_M = \{v \in C^{1,\alpha}(\Omega_T) \mid \|v\|_{1,\alpha} \leqslant M,\ \|v\|_0 \leqslant B, v = \psi \text{ на } \Omega_0 \cup S_T\},$$

где число M будет определено далее. Определим отображение $Z : V_M \to C^{1,\alpha}(\Omega_T)$, о котором говорится в теореме Шаудера, следующим образом: $Zv = w$, если w является классическим решением задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \varphi\Big(\int\limits_0^T v(\cdot, s)\, ds\Big) w = f \quad \text{в } \Omega_T,\\ w(\boldsymbol{x}, t) = g(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{при } \boldsymbol{x} \in S,\\ w(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}).\end{gathered}$$

Решение данной задачи существует, единственно и принадлежит $C^{2,\alpha}(\Omega_T)$ (см. [10], гл. 3, §3, теорема 7), что является обоснованием корректности определения оператора Z. Докажем, что Z имеет неподвижную точку. Прежде всего покажем, что при некотором M образ отображения Z принадлежит V_M. Оценка $\|w\|_0 \leqslant B$ следует из леммы. Докажем неравенство $\|w\|_{1,\alpha} \leqslant M$. Рассмотрим функцию $w_0 = w - \psi$. Нетрудно видеть, что w_0 удовлетворяет задаче с однородными начальными и граничными условиями с функцией $\widetilde{f}_v = f - L_v\psi$ в правой части, где $L_v\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} - \Delta\psi + \varphi\Big(\int\limits_0^T v(\cdot,s)\,ds\Big)\psi$. Следовательно, так как $\widetilde{f}_v = 0$ на S_0, для w_0 справедлива оценка (см. [10], гл. 7, §2, теорема 4)

$$\|w_0\|_{1,\alpha} \leqslant K\|\widetilde{f}_v\|_0, \tag{10}$$

где K зависит только от α, $\sup\limits_I \varphi$, Ω_T. Тогда для w имеем

$$\|w\|_{1,\alpha} \leqslant K\|f\|_0 + K\|L_v\psi\|_0 + \|\psi\|_{1,\alpha}.$$

Величину $\|L_v\psi\|_0$ можно оценить следующим образом:

$$\|L_v\psi\|_0 \leqslant \|\psi_t\|_0 + \|\Delta\psi\|_0 + \sup_I \varphi\|\psi\|_0 \leqslant \|\psi\|_{2,\alpha} + \sup_I \varphi\|\psi\|_0.$$

Тогда, выбирая $M \geqslant K\|f\|_0 + K\|\psi\|_{2,\alpha} + K\sup\limits_I \varphi\|\psi\|_0 + \|\psi\|_{1,\alpha}$, получим, что $w \in V_M$.

Докажем теперь, что Z отображает V_M в компактное подмножество из V_M. Для этого воспользуемся уже упомянутым результатом (см. [10], гл. 7, §2, теорема 4). Дело в том, что оценка (10) справедлива также для произвольного $\delta < 1$ с некоторой, вообще говоря, другой постоянной K. Поэтому для w_0 имеет место оценка

$$\|w_0\|_{1,\delta} \leqslant K'\|\widetilde{f}_v\|_0,$$

где $\alpha < \delta < 1$, а K' зависит от δ, $\sup\limits_I \varphi$, Ω_T. Следовательно, для w справедливо неравенство

$$\|w\|_{1,\delta} \leqslant \widetilde{M}$$

с некоторой постоянной $\widetilde{M}$. Тогда образ V_M под действием Z является ограниченным в $C^{1,\delta}(\Omega_T)$ множеством, что в свою очередь гарантирует его компактность в $C^{1,\alpha}(\Omega_T)$ (см. [10], гл. 7, §1, теорема 1).

Докажем непрерывность оператора Z. Возьмём произвольную последовательность $\{v_m\} \subset V_M$, сходящуюся к v в $C^{1,\alpha}(\Omega_T)$. Пусть $w = Zv$, $w_m = Zv_m$. Тогда $\zeta_m = w_m - w$ является классическим решением задачи

$$\frac{\partial\zeta_m}{\partial t} - \Delta\zeta_m + \varphi\Big(\int\limits_0^T v_m(\cdot,s)\,ds\Big)\zeta_m = \Big(\varphi\Big(\int\limits_0^T v(\cdot,s)\,ds\Big) - \varphi\Big(\int\limits_0^T v_m(\cdot,s)\,ds\Big)\Big)w \quad \text{в } \Omega_T,$$

$$\zeta_m(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad \text{при } \boldsymbol{x} \in S,$$

$$\zeta_m(\boldsymbol{x},0) = 0.$$

Следовательно, для ζ_m справедлива оценка

$$\|\zeta_m\|_{1,\alpha} \leqslant K\Big\|\Big(\varphi\Big(\int\limits_0^T v(\cdot,s)\,ds\Big) - \varphi\Big(\int\limits_0^T v_m(\cdot,s)\,ds\Big)\Big)w\Big\|_0.$$

Так как φ непрерывна по Гёльдеру на I, можем заключить

$$\Big\|\Big(\varphi\Big(\int\limits_0^T v(\cdot,s)\,ds\Big)-\varphi\Big(\int\limits_0^T v_m(\cdot,s)\,ds\Big)\Big)w\Big\|_0\leqslant\|w\|_0H_\alpha(\varphi)\Big\|\int\limits_0^T(v_m-v)\,ds\Big\|_0^\alpha,$$

где $H_\alpha(\varphi)=\sup\limits_{x,x'\in I}\frac{|\varphi(x)-\varphi(x')|}{|x-x'|^\alpha}$. Оценивая теперь разность под интегралом по максимуму, получаем неравенство

$$\|\zeta_m\|_{1,\alpha}\leqslant KT^\alpha\|w\|_0H_\alpha(\varphi)\|v_m-v\|_0^\alpha=\widetilde{K}\|v_m-v\|_0^\alpha,$$

где $\widetilde{K}=KT^\alpha\|w\|_0H_\alpha(\varphi)$. Отсюда заключаем, что $\|\zeta_m\|_{1,\alpha}\to 0$ при $m\to\infty$. Таким образом, отображение Z является непрерывным на V_M.

Наконец, поскольку V_M — замкнутое выпуклое множество в банаховом пространстве $C^{1,\alpha}(\Omega_T)$, можно применить теорему Шаудера и сделать заключение, что Z имеет неподвижную точку u, принадлежащую классу $C^{2,\alpha}(\Omega_T)$. Теорема доказана. □

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ *A*

Данный параграф посвящён исследованию вопроса единственности решения задачи A.

Теорема 2. *Пусть K — постоянная из оценки* (10), *а I и B — отрезок и постоянная, определённые перед замечанием 2. Если справедливо неравенство*

$$KTBL(\varphi)<1,$$

где

$$L(\varphi)=\sup_{x,x'\in I}\frac{|\varphi(x)-\varphi(x')|}{|x-x'|}<\infty,$$

то решение задачи A единственно.

Доказательство. Предположим, что u_1, u_2 — решения задачи A. Обозначим $u=u_1-u_2$. Нетрудно видеть, что u удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+\varphi\Big(\int\limits_0^T u_1(\cdot,s)\,ds\Big)u=\Big(\varphi\Big(\int\limits_0^T u_2(\cdot,s)\,ds\Big)-\varphi\Big(\int\limits_0^T u_1(\cdot,s)\,ds\Big)\Big)u_2\quad\text{в }\Omega_T,$$

$$u(\boldsymbol{x},t)=0\quad\text{при }\boldsymbol{x}\in S,$$

$$u(\boldsymbol{x},0)=0.$$

Применяя оценку (10) для u и используя липшицевость функции φ, имеем

$$\|u\|_{1,\alpha}\leqslant KTBL(\varphi)\|u\|_0,$$

откуда получаем, что

$$(1-KTBL(\varphi))\|u\|_0\leqslant 0.$$

Следовательно, $u\equiv 0$. Теорема доказана. □

Заметим, что условие теоремы 2 накладывает ограничение на длину интервала времени, по которому проводится интегрирование в нелокальном члене. При этом в доказательстве теоремы нигде не используется тот факт, что этот интервал совпадает с интервалом, на котором рассматривается задача. Следовательно, справедлив более общий результат, заключающийся в единственности решения сформулированной ниже задачи.

Пусть $u \in C^{2,\alpha}(\Omega_T)$, $T \in (0, +\infty)$ и u удовлетворяет в классическом смысле следующим соотношениям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \varphi\Big(\int\limits_{t_0}^{t_0+T_0} u(\cdot, s)\, ds\Big) u = f \quad \text{в } \Omega_T,$$
$$u(\boldsymbol{x}, t) = g(\boldsymbol{x}, t) \quad \text{при } \boldsymbol{x} \in S,$$
$$u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}),$$

где $t_0 \in [0, T)$, $T_0 > 0$ и $t_0 + T_0 \leqslant T$. Если $KT_0BL(\varphi) < 1$, то решение задачи будет единственным. Постоянные K и B — те же самые, что и в условии теоремы 2.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00261; https://rscf.ru/project/23-21-00261/). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Starovoitov V. N., Starovoitova B. N.* Modeling the dynamics of polymer chains in water solution. Application to sensor design // J. Phys. Conf. Ser. 2017. V. 894, N 1. Article 012088; DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012088
2. *Старовойтов В. Н.* Разрешимость регуляризованной краевой задачи о хаотичной динамике полимерной молекулы // Сиб. электрон. матем. изв. 2023. Т. 20, № 2. С. 1597–1604; DOI: 10.33048/semi.2023.20.098
3. *Walker C.* Some results based on maximal regularity regarding population models with age and spatial structure // J. Elliptic Parabol. Equ. 2018. V. 4, N 1. P. 69–105; DOI: 10.1007/s41808-018-0010-9
4. *Webb G. F.* Population Models Structured by Age, Size, and Spatial Position. Berlin: Springer, 2008.
5. *Starovoitov V. N.* Initial boundary value for a nonlocal in time parabolic equation // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 1311–1319; DOI: 10.17377/semi.2018.15.107
6. *Starovoitov V. N.* Boundary value problem for a global-in-time parabolic equation // Math. Methods Appl. Sci. 2021. V. 44, N 1. P. 1118–1126; DOI: 10.1002/mma.6816
7. *Starovoitov V. N.* Weak solvability of a boundary value problem for a parabolic equation with a global-in-time term that contains a weighted integral // J. Elliptic Parabol. Equ. 2021. V. 7, N 2. P. 623–634; DOI: 10.1007/s41808-021-00103-2
8. *Walker C.* Strong solutions to a nonlocal-in-time semilinear heat equation // Q. Appl. Math. 2021. V. 79. P. 265–272; DOI: 10.1090/qam/1579
9. *Djida J.-D., Foghem Gounoue G. F., Tchaptchie Y. K.* Nonlocal complement value problem for a global in time parabolic equation // J. Elliptic Parabol. Equ. 2022. V. 8, N 2. P. 767–789; DOI: 10.1007/s41808-022-00175-8
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М: Мир, 1968.
11. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

SOLVABILITY OF AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH A TIME-NONLOCAL TERM IN HÖLDER SPACES

A. S. Fomenko

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia

E-mail: as.fomenko1@gmail.com

Received 25.03.2024, revised 21.05.2024, accepted 03.07.2024

Abstract. We consider an initial–boundary value problem for a semilinear parabolic differential equation with a time-nonlocal term. This term contains the integral of the solution over the entire time interval on which the problem is considered. The solvability of the problem in Hölder classes is proved. The uniqueness of the solution is established under a constraint on the length of the time interval over which the solution is integrated in the nonlocal term.

Keywords: time-nonlocal parabolic equation, initial–boundary value problem, solvability, uniqueness.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.311

REFERENCES

1. V. N. Starovoitov and B. N. Starovoitova, "Modeling the dynamics of polymer chains in water solution. Application to sensor design," J. Phys. Conf. Ser. **894** (1), 012088 (2017). https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012088
2. V. N. Starovoitov, "Solvability of a regularized boundary value problem of chaotic dynamics of a polymer molecule," Sib. Elektron. Mat. Izv. **20** (2), 1597–1604 (2023) [in Russian]. https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.098
3. C. Walker, "Some results based on maximal regularity regarding population models with age and spatial structure," J. Elliptic Parabol. Equat. **4** (1), 69–105 (2018). https://doi.org/10.1007/s41808-018-0010-9
4. G. F. Webb, *Population Models Structured by Age, Size, and Spatial Position* (Springer, Berlin, 2008).
5. V. N. Starovoitov, "Initial–boundary value problem for a nonlocal in time parabolic equation," Sib. Elektron. Mat. Izv. **15**, 1311–1319 (2018). https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.107
6. V. N. Starovoitov, "Boundary value problem for a global-in-time parabolic equation," Math. Methods Appl. Sci. **44** (1), 1118–1126 (2021). https://doi.org/10.1002/mma.6816
7. V. N. Starovoitov, "Weak solvability of a boundary value problem for a parabolic equation with a globalin- time term that contains a weighted integral," J. Elliptic Parabol. Equat. **7** (2), 623–634 (2021). https://doi.org/10.1007/s41808-021-00103-2
8. C.Walker, "Strong solutions to a nonlocal-in-time semilinear heat equation," Q. Appl. Math. **79**, 265–272 (2021). https://doi.org/10.1090/qam/1579
9. J.-D. Djida, G. F. Foghem Gounoue, and Y. K. Tchaptchie, "Nonlocal complement value problem for a global in time parabolic equation," J. Elliptic Parabol. Equat. **8** (2), 767–789 (2022). https://doi.org/10.1007/s41808-022-00175-8
10. A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964; Mir, Moscow, 1968).
11. L. C. Evans, *Partial Differential Equations* (Am. Math. Soc., Providence, RI, 1998; Tamara Rozhkovskaya, Novosibirsk, 2003).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 441–447.

УДК 533.6.011

О ВЛИЯНИИ РАЗМЕРА КАПЛИ НА ПЕРИОД ИНДУКЦИИ РАЗРУШЕНИЯ В ПОТОКЕ ЗА УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

© 2024 А. А. Шебелева[1a], А. В. Минаков[1,2b], С. В. Поплавский[3c], В. М. Бойко[3d]

[1]*Сибирский федеральный университет,*
просп. Свободный, 79, г. Красноярск 660041, Россия,
[2]*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,*
просп. Акад. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,
[3]*Институт теоретической и прикладной механики*
им. С. А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]an_riv@mail.ru, [b]aminakov@sfu-kras.ru, [c]s.poplav@itam.nsc.ru, [d]bvm@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 04.08.2023 г.; после доработки 11.03.2024 г.;
принята к публикации 17.04.2024 г.

В настоящей работе проведено расчётное исследование влияния начального диаметра капли воды на динамику и период индукции разрушения в потоке за проходящей ударной волной. Для этого проведена серия расчётов при фиксированном числе Вебера $We = 400$ и варьируемом начальном диаметре капли воды $d = 1.4, 2.8, 5.6$ мм. Численная методика основана на VOF-методе, для учёта турбулентности использовалась LES-модель, для описания поведения межфазной границы на основных турбулентных масштабах применялась технология адаптированных динамических сеток, которая позволяла разрешить вторичные капли воды размером до 20 мкм. Исследована форма капли, структура потока вблизи и в следе капли, а также характер массоуноса. В результате расчётов были получены зависимости времени разрушения от безразмерного диаметра капли, установлено время индукции разрушения, а также посчитана постоянная времени взаимодействия капли с потоком для оценки задержки разрушения капель.

Ключевые слова: математическое моделирование, VOF-метод, LES-модель, динамические сетки, ударные волны, аэродинамическое дробление капель, время индукции разрушения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.312

ВВЕДЕНИЕ

Аэродинамическое дробление капель жидкости, вызванное взаимодействием с проходящей ударной волной (УВ), генерирующей воздушный поток, имеет важное значение для многих приложений промышленной газодинамики [1, 2]. Например, сверхзвуковые воздушно-реактивные двигатели, где скорость перемешивания и горения капель жидкого топлива значительно повышается за счёт фрагментации капель под действием детонационных волн [3], или капли дождя, попадающие на поверхность самолёта с высокими скоростями, вызывающие эрозию, или производство металлических порошков, используемых в аддитивном производстве. Исследование динамики и дробления капель в потоке за проходящими УВ занимает особое место в тематике аэродинамического дробления жидкостей [4, 5] и, начиная с ранних работ, развивалось в следующих направлениях. Во-первых, это задачи горения аэрозолей углеводородных топлив применительно к промышленной взрыво-безопасности [6–8] и к перспективным детонационным двигателям [9]. Так как распыление протекает одинаково для всех маловязких жидкостей [4,5], можно его изучать на воде, что, как отмечалось, представляет самостоятельный интерес. Это второе направление изучения капель в УВ: динамика [10–13] и механизмы дробления капель при внезапном попадании в поток [4,14–16].

Для анализа механизмов разрушения капель наиболее информативна визуализация деформации капли и типа её разрушения (морфологические признаки). Поскольку видеорегистрация процесса в экспериментах это позволяет, то и численное моделирование, направленное на визуализацию процесса, наиболее эффективно, поскольку решает две важные задачи. Во-первых, это методическая задача в части верификации вычислительной методики сравнения расчёта с экспериментом [17–19]. Во-вторых, математическое моделирование позволяет изучать влияние различных факторов на процесс, например, размера капель. Есть, наконец, и скрытые процессы, недоступные для наблюдения в эксперименте: движение жидкости в капле в ходе деформации, развитие сопряжённого пограничного слоя и неустойчивость поверхности. Однако, все представления о механизмах разрушения капель основывают лишь на данных о характере её деформации до массоуноса [4,5,14]. Теоретически физика аэродинамического разрушения контролируется числом Онезорге $Oh = \mu_l/(\rho_l\sigma d_0)^{0,5}$ и числом Вебера $We = \rho_g u_g^2 d_0/\sigma$ [20]. При числах Онезорге $Oh \ll 1$ влиянием вязкости жидкости можно пренебречь, так что процесс разрушения определяется числом Вебера, которое зависит от размера капель d_0. Нам известна только одна работа по распаду капель в УВ с варьированием размера капель в широком диапазоне [21], в которой, как и в [19] проводилось и численное моделирование, и экспериментальное, но это не было систематическим исследованием влияния размера капель.

Известны три основных режима фрагментации в зависимости от типа неустойчивости межфазной границы. При малых числах Вебера $10 < We < 10^2$ неустойчивость Рэлея—Тейлора следует рассматривать как основной движущий механизм разрушения. При высоких числах Вебера $We > 10^3$ процесс разрушения слоёв жидкости, формирующихся на наветренной поверхности капли, определяется неустойчивостью Кельвина—Гельмгольца. Этот вид неустойчивости межфазной границы приводит к срыву гребней волн, характерных для сдвиговых течений в сопряжённом пограничном слое в жидкости [16,22]. Диапазон $10^2 < We < 10^3$ считается переходным, а доминирующим здесь считается механизм срыва жидкого пограничного слоя с экватора капли [23].

Аэродинамическое разрушение капель определяется множеством параметров, а исследование роли каждого из них возможно при постоянных прочих. На смену режимов разрушения, особенно на границах диапазонов, может влиять любой из параметров, входящих в число We, и в том числе размер капель. Цель данной работы — моделирование влияния размера капель при фиксированном числе Вебера из диапазона $10^2 < We < 10^3$.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЁТА ДРОБЛЕНИЯ КАПЕЛЬ В ПОТОКЕ ЗА ПРОХОДЯЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Для моделирования распада газокапельных течений в настоящее время существует достаточно большое количество математических моделей. Данные модели отличаются способами описания процессов движения газа и частиц, а так же применяемыми допущениями и ограничениями. Для выбора подходящей модели нужно учитывать информацию о структуре течения и требуемой точности его описания. Наиболее полные обзоры методов решения задач с подвижными контактными границами представлены в работах [24–29]. Для расчёта течений со свободной поверхностью, благодаря простоте реализации и эффективности, наибольшую популярность получил метод жидкости в ячейках (VOF) [29]. Идея VOF-метода состоит в том, что жидкость и газ рассматриваются как единая двухкомпонентная среда, а пространственное распределение фаз в пределах расчётной области определяется при помощи специальной функции маркёра $F(x, y, z, t)$. Объёмная доля жидкой фазы в расчётной ячейке принимается: $F(x, y, z, t) = 0$,если ячейка заполнена газом, $F(x, y, z, t) = 1$, если ячейка полностью заполнена жидкостью, $0 < F(x, y, z, t) < 1$, если через ячейку проходит граница раздела фаз. Поскольку свободная поверхность движется вместе с жидкостью, то слежение за перемещением свободной границы выполняется путём решения уравнения переноса объёмной доли жидкой фазы в ячейке:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i} F = 0, \tag{1}$$

где u_i — вектор скорости двухфазной среды, найденный из решения системы уравнений гидродинамики: уравнения сохранения массы или уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \tag{2}$$

и уравнений движения или закона сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + F_{s_i}. \tag{3}$$

Здесь τ_{ij} — тензор подсеточных напряжений, F_s — вектор объёмных сил, p — статическое давление, ρ — плотность двухфазной среды. Составляющие тензора вязких напряжений

$$\sigma_{ij} \equiv \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij}, \tag{4}$$

где μ — динамическая вязкость двухфазной среды. Плотность и ньютоновская вязкость рассматриваемой двухкомпонентной среды находятся через объёмную долю жидкости в ячейке по правилу смеси:

$$\rho = \rho_1 F + (1 - F)\rho_2, \tag{5}$$

$$\mu = \mu_1 F + (1 - F)\mu_2, \tag{6}$$

где ρ_1, μ_1 — плотность и вязкость жидкости, ρ_2, μ_2 — плотность и вязкость газа. Полученные величины плотности ρ и вязкости μ входят в уравнения движения и определяют физические свойства двухфазной среды. При рассмотрении течений жидкости со свободной границей особое внимание уделяется явлению поверхностного натяжения. Изучение течений, контролируемых силами поверхностного натяжения, является сложной самостоятельной задачей. Поэтому к достоинствам VOF-метода также стоит отнести и то обстоятельство, что он позволяет относительно просто моделировать влияние сил поверхностного натяжения. Чаще всего для моделирования поверхностного натяжения в рамках VOF-метода используется CSF-алгоритм [30], предполагающий введение в уравнения движения дополнительной объёмной силы F_s, величина которой определяется из соотношения

$$F_s = \sigma k \nabla F, \tag{7}$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, k — кривизна свободной поверхности, которая определяется как дивергенция вектора нормали:

$$k = \nabla \left(\frac{n}{|n|} \right). \tag{8}$$

Нормаль к свободной поверхности вычисляется, в свою очередь, как градиент объёмной доли жидкой фазы в ячейке:

$$n = \nabla F. \tag{9}$$

Важным обстоятельством при расчёте распада капель является моделирование турбулентности. В данной работе для моделирования турбулентности использовалась LES-модель [31].

Тензор τ_{ij} называют тензором подсеточных напряжений, его составляющие определяются по аналогии с RANS моделями из соотношения Буссинеска:

$$\tau_{ij} - \frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij} = -2\mu_t S_{ij}.$$

Здесь S_{ij} — тензор скоростей деформации:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Величину μ_t называют подсеточной вязкостью. В данной работе использовалась модель подсеточной вязкости, предложенная Смагоринским [31]:

$$\mu_t = \rho L_s^2 \left|S\right|,$$

где L_s — длина смешения подсеточных масштабов:

$$L_s = \min\left(\mathrm{kd}, \mathrm{C_s V^{1/3}}\right),$$

$$|S| \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}.$$

Здесь k — константа Кармана, d — расстояние до ближайшей стенки, V — объём вычислительной ячейки C_s — константа Смагоринского. В данной работе было использовано значение $C_s = 0.17$. Методика решения уравнений (1)–(9) подробно описана в [19]. Разностный аналог конвективно-диффузионных уравнений находился с помощью метода конечного объёма для структурированных многоблочных сеток, при применении которого обеспечивалась консервативность полученной схемы. Для аппроксимации конвективных членов уравнений гидродинамики (3) использовалась центрально-разностная схема второго порядка. Для аппроксимации нестационарных слагаемых уравнений гидродинамики применялась неявная схема первого порядка. Диффузионные потоки и источниковые члены аппроксимировались со вторым порядком точности. Связь между полями скорости и давления реализовывалась при помощи SIMPLEC-процедуры на совмещённых сетках. Такой подход позволял преодолеть описанные выше трудности с разрешением подвижной межфазной границы раздела. Полученная система разностных уравнений решалась итерационным способом с применением многосеточного решателя.

Тестирование численной методики дробления капель за проходящими ударными волнами подробно описано авторами в работах [18, 19]. Показано качественное сравнение результатов по динамики деформации, форме поверхности капли на характерных стадиях разрушения и в сходные моменты времени. Судя по результатам, близки не только средние показатели роста миделя, но и фазы поверхностных волн, приходящих на периферию капли. Проведено количественное сравнение расчёта с экспериментом по темпу роста поперечного размера капли и времени индукции массоуноса, показано хорошее согласие расчёта с экспериментом [18, 19].

В расчётах использовалась декартова равномерная расчётная сетка. Общая детализация исходной равномерной сетки составляла 6.5 миллионов узлов. Однако методические расчёты показали, что такой сетки недостаточно для разрешения границы раздела фаз образующихся мелких капель. Поэтому была применена технология градиентной адаптации расчётной сетки. С помощью данной технологии расчётная сетка в процессе расчёта автоматически сгущается в области больших градиентов решения. В качестве управляющего параметра был выбран градиент объёмной доли жидкости. В начальный момент времени на каплю приходится 40 расчётных ячеек по её диаметру. При этом на границу раздела приходится не менее 8 ячеек. Общее количество расчётных узлов в оптимизированной сетке в процессе расчёта приближалось к 15 миллионам узлов. Применение такой детализированной сетки позволило разрешить вторичные капли размером до 20 мкм.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Для моделирования разрушения капли в потоке за проходящей ударной волной был использован пакет Ansys Fluent. Расчётная область представляет собой параллелепипед с размерами $3*3*5$ см. На одной из граней параллелепипеда задавалось условие входа с фиксированным значением скорости, определяемым из значения числа Вебера, на остальных гранях расчётной области ставились условия свободного выхода. В начальный момент времени на расстоянии 5 мм от входа в расчётную область помещалась сферическая капля воды, на которую воздействует проходящая ударная волна, генерирующая воздушный поток. Скорость потока варьировалась от 55.4 до 110.8 м/с.

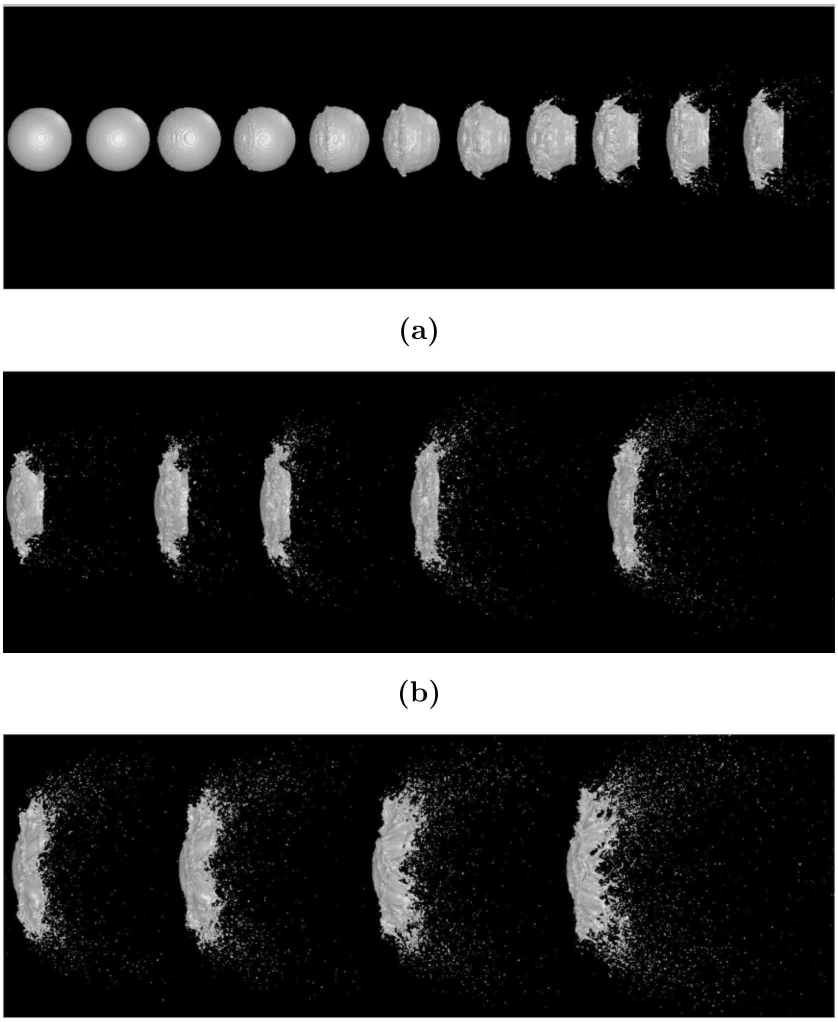
В расчётах использовались следующие физические свойства фаз: плотность 998.2 кг/м^3 и вязкость воды $1.003 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·сек), плотность 1.7 кг/м^3 и вязкость воздуха $1.789 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·сек), коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0.073$ Н/м.

Проведено расчётное исследование влияния начального диаметра капли на динамику и период индукции разрушения (задержку массоуноса) в потоке за ударной волной (УВ). Для этого проведена серия расчётов при фиксированном числе Вебера $We = 400$ и варьируемом начальном диаметре капли воды $d = 1.4, 2.8, 5.6$ мм.

На рис. 1 представлена динамика поведения капли воды в потоке с начальным размером капли $d_{01} = 1.4$ мм, скоростью газа $u_{g1} = 110.8$ м/с, константа времени $t_{0m} = (d_0/u_{g1}) * (\rho_l/\rho_2) \approx 306$ мкс. Серия на рис. 1(а) соответствует периоду пребывания капли за УВ $t_N = 150$ мкс, снимки сделаны через каждые 15 мкс. Хорошо известно, что при рассматриваемых в работе высоких значениях числа Вебера распад капли из-за развития многочисленных неустойчивостей на границе раздела происходит несимметрично. Даже если постановка и начальные параметры эксперимента изначально были осесимметричны. Поскольку задача решалась в полной трёхмерной постановке и для моделирования турбулентности использовалась вихреразрешающая LES-модель турбулентности, то в этих условиях возникновение трёхмерных неустойчивостей и потеря симметрии в численном решении происходила естественным образом.

На рис. 1 показана возможная эволюция капли до 285 мкс, что позволяет видеть такую особенность, как поперечное вытягивание плёнки у плоской донной части капли, что в дальнейшем становится зоной массоуноса. Отношение максимального диаметра деформированной капли к начальному, к моменту начала разрушения достигает величины $d_{max}/d_{01} = 1.169$, где d_{max} — это максимальный размер капли перед началом её разрушения, $d_{01} = 1.4$ мм — начальный диаметр капли, время индукции разрушения — это время начала разрушения поверхности капли, в этот момент капля максимально деформируется по миделю, но срыв ещё не наступает. Первый признак начала разрушения капли — это появление плёнки вниз по потоку. Погрешность определения времени индукции порядка величины временного шага — $5 * 10^{-7}$с. В данном случае время индукции составляет $t_1 = 89$ мкс (рис. 1(а), интервал между 6 и 7 кадрами, отсчёт идёт слева направо).

На рис. 2 представлена динамика разрушения капли воды с начальным диаметром капли $d_{02} = 2.8$ мм, скоростью газа $u_{g2} = 78.3$ м/с, постоянная времени $t_{0m} = 867$ мкс. Серия на рис. 2 соответствует периоду пребывания капли за УВ $t_N = 900$ мкс, «снимки» сделаны через каждые 50 мкс. Отношение максимального диаметра деформированной капли к начальному, к моменту начала разрушения достигает величины $d_{max}/d_{02} = 1.177$, начало массоуноса приходится на интервал между кадрами 5 и 6 (рис. 2(а)), время индукции разрушения, это время начала разрушения капли в данном случае составляет $t_2 = 234$ мкс.



(a)

(b)

(c)

Рис. 1. Численное моделирование динамики разрушения капли воды $d_{01} = 1.4$ мм в потоке за УВ, скорость газа $u_{g1} = 110.8$ м/с; (a) период до 150 мкс; (b) период 165–225 мкс; (c) период 240–285 мкс

На рис. 3 представлена динамика разрушения капли воды с начальным диаметром $d_{03} = 5.6$ мм, скоростью газа $u_{g3} = 55.4$ м/с, постоянная времени $t_{0m} = 2452$ мкс, время пребывания капли в потоке $t_N = 1900$ мкс, «снимки» сделаны через каждые 100 мкс. Отношение максимального диаметра деформированной капли к начальному, к моменту начала разрушения достигает величины $d_{max}/d_{03} = 1.21$, начало массоуноса приходится на интервал между кадрами 7 и 8 (рис. 3(a)), время индукции разрушения $t_3 = 624$ мкс.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

По рис. 1–3 видно, что характер деформации капли на ранней стадии взаимодействия с УВ с образованием двух кольцевых волн у миделя и вблизи донной поверхности демонстрирует все признаки режима срыва жидкого пограничного слоя, что вполне соответствует выбранному числу $We = 400$. Гребни этих волн из-за нестабильности позже становятся очагами массоуноса по механизму, предложенному в [23], это же видно и по расчётным «снимкам». Особенности этого типа деформации подробно анализировались в [19], и в частности, выполаживание донной поверхности объяснялось импактным действием возвратного течения вблизи

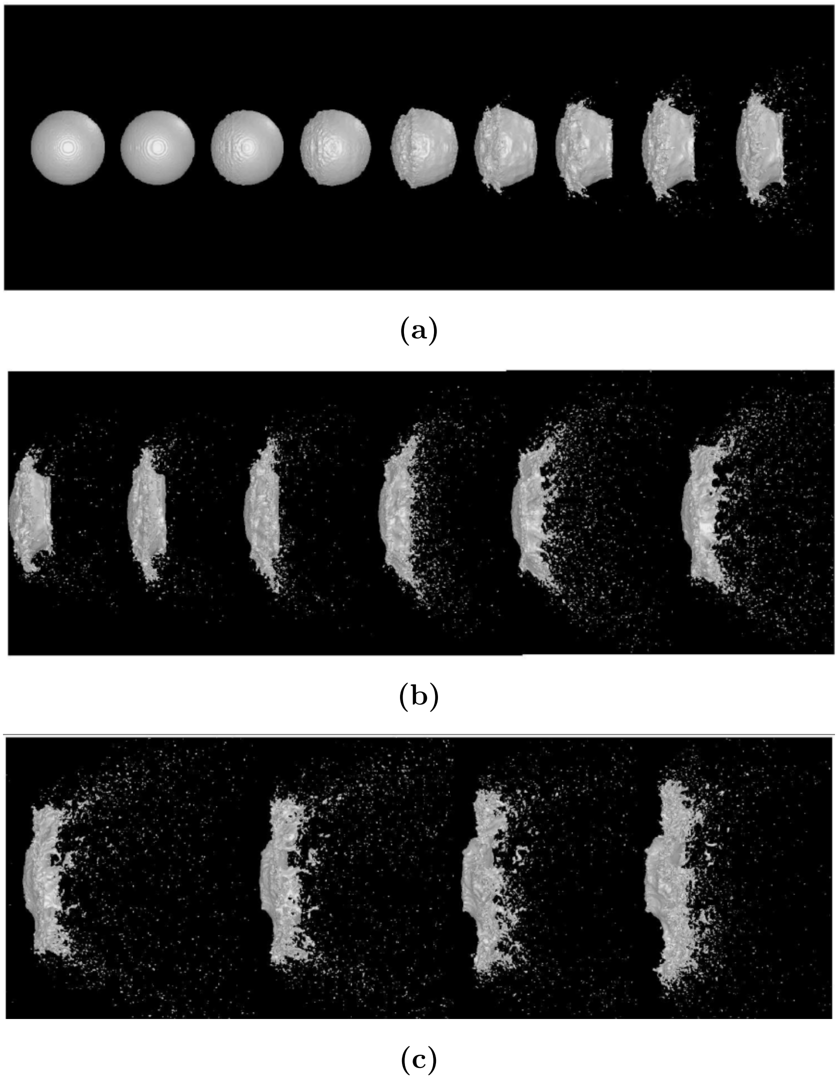
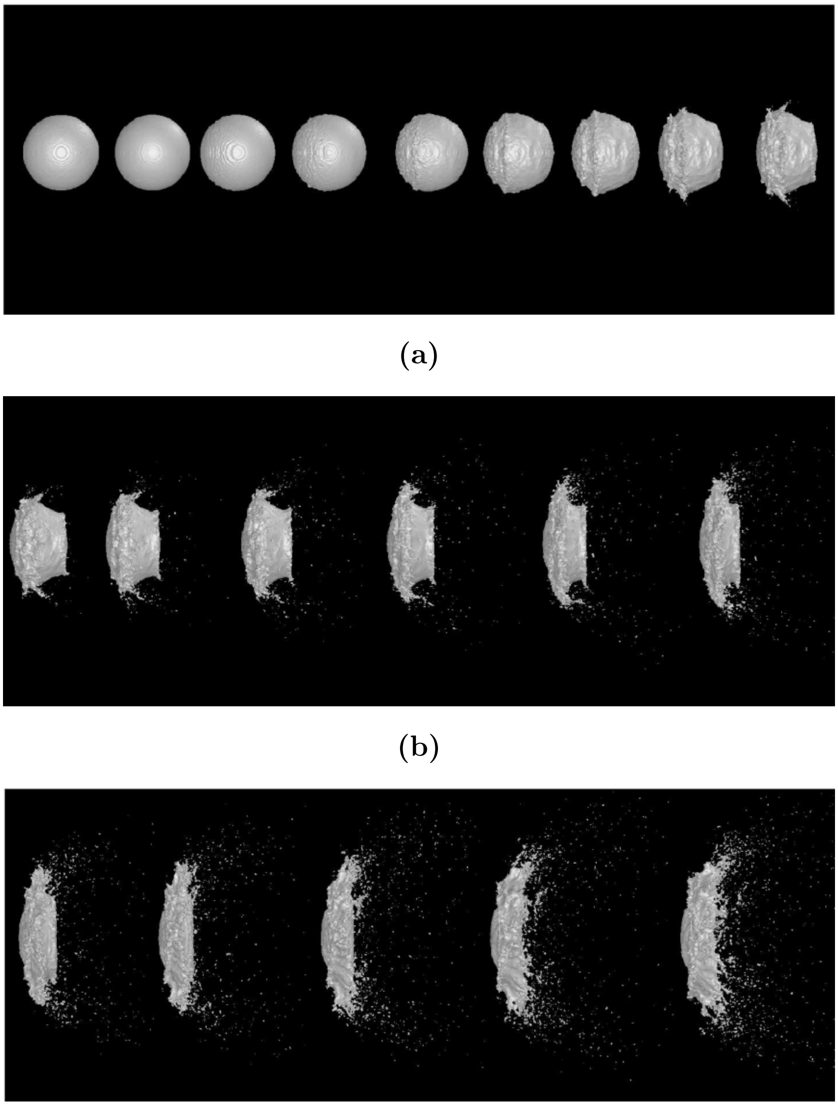


Рис. 2. Численное моделирование динамики разрушения капли воды $d_{02} = 2.8$ мм в потоке за УВ, скорость газа $u_{g2} = 78.3$ м/с; (a) период 0–400 мкс; (b) период 450–700 мкс; (c) период 750–900 мкс

оси аэродинамического следа. На более поздней стадии взаимодействия (серии б) рис. 1–3 наветренная поверхность также становится плоской с выраженным ростом диаметра миделя капли. На рис. 4 представлено сравнение темпа роста миделя капель воды с разным начальным размером. Как видно из графика, начальный диаметр капли воды после взаимодействия с проходящей УВ практически никак не влияет на темп деформации.

В таблице приводятся основные параметры и количественные результаты расчётов. Безразмерный период индукции $T_i = t_i/t_{0m}$ это отношение периода индукции массоуноса к постоянной времени $t_{0m} = (d_0/u_g) \cdot (\rho_l/\rho_g)^{0.5}$. Как видно из таблицы, с увеличением начального диаметра капли воды, период индукции массоуноса также увеличивается, безразмерный период индукции составляет $T_i \approx 0.36$. Данный результат получен при фиксированном значении числа Вебера.

Сравнение полученного в расчётах периода индукции массоуноса $t_i = 312$ мкс для капли с $d_0 = 2.8$ мм (см. таблицу) показывает хорошее согласие с экспериментами. Действительно, по аппроксимации экспериментальных данных и параметрическому анализу в [23] установлено, что для этого режима разрушения $t_i \approx a/We^{0.5}$, а для капель воды «естественного» размера



(a)

(b)

(c)

Рис. 3. Численное моделирование динамики разрушения капли воды $d_{03} = 5.6$ мм в потоке за УВ, скорость газа $u_{g3} = 55.4$ м/с; (a) период 0–800 мкс; (b) период 900–1400 мкс; (c) период 1500–1900 мкс

$a \approx 6.7$ мс. Тогда при $We = 400$ согласно [23] получаем $t_i = 330$ мкс, а расхождение расчётов и экспериментов $\sim 5\%$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате расчетов были получены зависимости максимальной степени деформации ядра капли перед началом ее разрушения d_{max}/d_0, а так же время индукции разрушения капли воды t в потоке за УВ. Используя эмпирическую формулу $t_i = 0.36 \cdot (d_0/u_g) \cdot (\rho_l/\rho_g)^{0.5}$, где скорость u_g и плотность ρ_g газа вычисляются по числу Маха УВ, рассчитан количественный показатель для сравнения расчетов с опытами — период индукции массоуноса t_i. Показано, что с увеличением начального размера капли задержка массоуноса увеличивается. Данные, полученные в результате численного моделирования в части задержек разрушения капель хорошо согласуются с результатами экспериментов и параметрического анализа из [23], а расхождение составляет $\sim 5\%$.

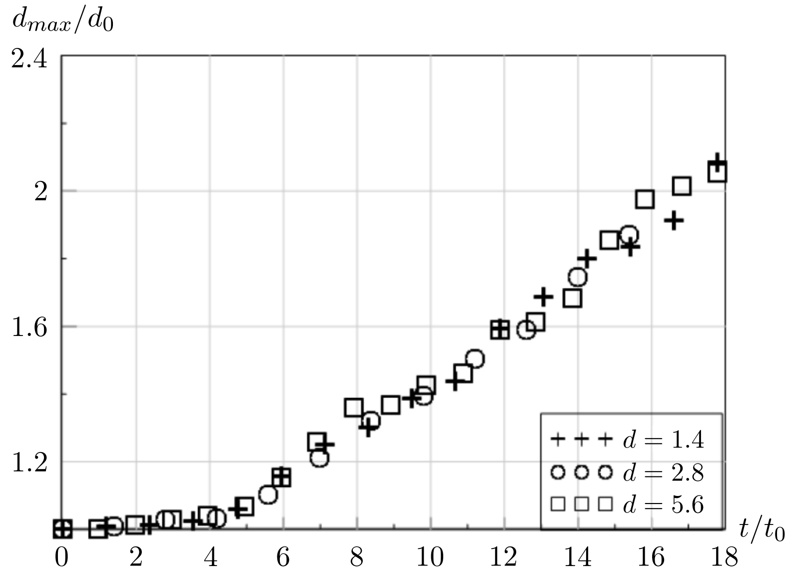


Рис. 4. Темп поперечной деформации капли воды

d_0, мм	d_{max}/d_0	We	u_g,м/с	t_i, мкс	t_{0m}, мкс	$T_i = t_i/t_{0m}$
1.4	1.169	400	110.8	110	306	0.3595
2.8	1.177	400	78.3	312	867	0.3599
5.6	1.210	400	55.4	882	2452	0.3597

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Сибирского федерального университета (проект FSRZ-2020-0012) и Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2021–2023 годы (проект 121030500158-0). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Villermaux E.* Fragmentation // Annu. Rev. Fluid Mech. 2007. V. 39. P. 419–446.
2. *Nicholls J. A., Ranger A. A.* Aerodynamic shattering of liquid drops // AIAA J. 1989. V. 7. P. 285–290.
3. *Benjamin M. A., Jensen R. J., Arienti M.* Review of atomization: Current knowledge and future requirements for propulsion combustors // At. Sprays. 2010. V. 20, P. 485–512.
4. *Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Когарко С. М.* Разновидности дробления капель в ударных волнах и их характеристики // Инж.-физ. журнал. 1974. Т. 27, № 1. С. 119–126.
5. *Бойко В. М., Папырин А. Н., Поплавский С. В.* О динамике дробления капель в ударных волнах // Прикл. мех. техн. физ. 1987. Т. 28, № 2. С. 108–115.
6. *Гельфанд Б. Е., Губин С. А., Тимофеев У. И., Шепарнев С. М.* Разрушение совокупности капель жидкости в ударных волнах // Прикл. мех. техн. физ. 1978. Т. 19, № 6. С. 43–48.
7. *Boiko V. M., Lotov V. V., Papyrin A. N.* Ignition of Liquid Fuel Drops in Shock Waves // Prog. Astron. Aeronaut. 1991. V. 132. P. 205–219.
8. *Гельфанд Б. Е., Крамаренко В. Н., Соловьёв В. С.* Современное состояние и задачи исследований детонации в системе капли жидкости — газ // Сб. Детонация. 1977. С. 28–39.

9. *Dinh T. N., Li G. J., Theofanous T. G.* An Investigation of Droplet Breakup in a High Mach, Low Weber Number Regime // Proc. 41st AIAA Aerosp. Sci. Meet. Exhibit. 2003. P. 30–35.
10. *Бойко В. М., Поплавский С. В.* Динамика частиц и капель в потоке за ударной волной // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 3. С. 110–120.
11. *Ranger A. A., Nicholls J. A.* Shape and surrounding flowfield of a drop in a high-speed gas stream // AIAA J. 1970. V. 8, N 9. P. 7120–1722.
12. *Бойко В. М., Поплавский С. В.* К вопросу о динамике ускорения капли на ранней стадии скоростной релаксации в ударной волне // Физ. горения и взрыва. 2009. Т. 45, № 2. С. 101–110.
13. *Ortiz C., Joseph D. D., Beavers G. S.* Acceleration of a liquid drop suddenly exposed to a high-speed airstream // Int. J. Multiph. Flow. 2004. V. 30, N 2. P. 217–224.
14. *Gelfand B. E.* Droplet breakup phenomena in flows with velocity lag // Progr. Energy Combust. Sci. 1996. V. 22, N 3. P. 201–265.
15. *Бойко В. М., Поплавский С. В.* Экспериментальное исследование двух типов срывного разрушения капли в потоке за ударной волной // Физ. горения и взрыва. 2012. Т. 48, № 4. С. 76–82.
16. *Theofanous T. G., Li G. J.* On the physics of aerobreakup // Phys. Fluids. 2008. V. 20. P. 1–14.
17. *Minakov A. V., Shebeleva A. A.,Strizhak P. A., Chernetskiy M. Yu., Volkov R. S.* Study of the Weber number impact on secondary breakup of droplets of coal water slurries containing petrochemicals // Fuel. 2019. V. 254. Article 1100094.
18. *Poplavski S. V. Minakov A. V., Shebeleva A. A.* An early stage of the drop interaction with shock wave: airflow, deformation, destruction // J. Phys. Conf. Ser. 2019. V. 1359. Article 012032.
19. *Poplavski S. V. Minakov A. V., Shebeleva A. A., Boyko V. M.* On the interaction of water droplet with a shock wave: Experiment and numerical simulation // Int. J. Multiph. Flow. 2020. V. 127. P. 103273.
20. *Guildenbecher D. R., Lopez-Rivera C., Sojka P. E.* Secondary atomization // Exp. Fluids. 2009. V. 46. P. 371–402.
21. *Sharma S., Singh A. P., Rao S. S., Kumar A., Basu S.* Shock induced aerobreakup of a droplet // J. Fluid Mech. 2021. V. 929. Article A27; DOI: 10.1017/jfm.2021.860
22. *Rossano V., Cittadini A., De Stefano G.* Computational Evaluation of Shock Wave Interaction with a Liquid Droplet // Appl. Sci. 2022. V. 12. Article. 1349.
23. *Поплавский С. В.* Параметрическое исследование разрушения капли за ударной волной по механизму срыва пограничного слоя // Прикл. мех. техн. физ. 2022. Т. 63, № 3. С. 43–53.
24. *Aggarwal S. K., Peng F.* A review of droplet dynamics and vaporization modeling for engineering calculations // J. Eng. Gas Turbines Power. 1995. V. 117. P. 453–461.
25. *Minakov A. V.* Numerical algorithm for moving boundary fluid dynamics problems and its testing // Comput. Math. Math. Phys. 2014. V. 54, N 10. P. 1560–1570.
26. *Франк А. М.* Дискретные модели несжимаемой жидкости. М. Физматлит, 2001.
27. *Tavangar S., Hashemabadi S. H, Saberimoghadam A.* CFD simulation for secondary breakup of coal–water slurry drops using OpenFOAM // Fuel Process. Technol. 2015. V. 132. P. 153–163.
28. *Kothe D. B., Rider W. J.* Volume tracking of interfaces having surface tension in two and three dimensions // Proc. 34th AIAA Aerosp. Sci. Meet. Exhibit. 1996. Article. 859.
29. *Hirt S. W., Nichols B. D.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comput. Phys. 1981. V. 39. P. 201–226.
30. *Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A.* Continuum method for modeling surface tension // J. Comput. Phys. 1992. V. 100. P. 335–354.
31. *Smagorinsky J.* General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. TheBasicExperiment // Mon. Weather Rev. 1963. V. 91. P. 99–164.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 533.6.011

ON THE INFLUENCE OF DROPLET SIZE ON THE BREAKUP INDUCTION PERIOD IN THE FLOW BEHIND A SHOCK WAVE

© 2024 **A. A. Shebeleva**[1a], **A. V. Minakov**[1,2b], **S. V. Poplavski**[3c], **V. M. Boyko**[3d]

[1] *1Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia,*
[2] *Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[3] *Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]an_riv@mail.ru, [b]aminakov@sfu-kras.ru, [c]s.poplav@itam.nsc.ru, [d]bvm@itam.nsc.ru

Received 04.08.2023, revised 11.03.2024, accepted 17.04.2024

Abstract. In this paper, we computationally study the influence of the initial diameter of a water droplet on the dynamics and breakup induction period in the flow behind a passing shock wave. For this purpose, a series of calculations were performed for a fixed Weber number $\mathrm{We} = 400$ and a variable initial diameter $d = 1.4, 2.8, 5.6$ mm of the water droplet. The numerical technique is based on the VOF method, the LES model is used to take into account turbulence, and the technology of adapted dynamic grids is used to describe the behavior of the interfacial boundary at main turbulent scales; this has made it possible to resolve secondary water droplets up to 20 μm in size. The droplet shape, the flow structure near and in the droplet wake, and the nature of mass entrainment were investigated. As a result of the calculations, the dependences of the breakup time on the dimensionless droplet diameter were obtained, the breakup induction time was determined, and the time constant of droplet interaction with the flow was calculated to estimate the droplet breakup lag.

Keywords: mathematical modeling, VOF method, LES model, dynamic grid, shock wave, aerodynamic droplet breakup, breakup induction time.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.312

REFERENCES

1. E. Villermaux, "Fragmentation," Annu. Rev. Fluid Mech. **39**, 419–446 (2007).
2. J. A. Nicholls and A. A. Ranger, "Aerodynamic shattering of liquid drops," AIAA J. **7**, 285–290 (1989).
3. M. A. Benjamin, R. J. Jensen, and M. Arienti, "Review of atomization: Current knowledge and future requirements for propulsion combustors," At. Sprays **20**, 485–512 (2010).
4. B. E. Gel'fand, S. A. Gubin, and S. M. Kogarko, "Types of droplet fragmentation in shock waves and their characteristics," Inzh.-Fiz. Zh. **27** (1), 119–126 (1974) [in Russian].
5. V. M. Boiko, A. N. Papyrin, and S. V. Poplavskii, "Dynamics of droplet breakup in shock waves," Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **28** (2), 108–115 (1987) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **28** (2), 263–269 (1987)].
6. B. E. Gel'fand, S. A. Gubin, E. N. Timofeev, and S. M. Sheparnev, "Breakup of a liquid drop aggregate in shock waves," Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **19** (6), 43–48 (1978) [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **19** (6), 742–746 (1978)].
7. V. M. Boiko, V. V. Lotov, and A. N. Papyrin, "Ignition of liquid fuel drops in shock waves," Progr. Astron. Aeronaut. **132**, 205–219 (1991).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 548–557.

8. B. E. Gel'fand, V. N. Kramarenko, and V. S. Solov'ev, "State of the art and tasks of research into detonation in the liquid-droplet-gas system," in *Sb. Detonatsiya* (Coll. Detonation) (1977), pp. 28–39 [in Russian].
9. T. N. Dinh, G. J. Li, and T. G. Theofanous, "An investigation of droplet breakup in a high Mach, low Weber number regime," *Proc. 41st AIAA Aerosp. Sci. Meet. Exhibit.* (2003), pp. 30–35.
10. V. M. Boiko and S. V. Poplavskii, "Particle and drop dynamics in the flow behind a shock wave," Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Zhidk. Gaza (3), 110–120 (2007) [Fluid Dyn. **42**, 433–441 (2007)].
11. A. A. Ranger and J. A. Nicholls, "Shape and surrounding flowfield of a drop in a high-speed gas stream," AIAA J. **8** (9), 7120–1722 (1970).
12. V. M. Boiko and S. V. Poplavski, "On the dynamics of drop acceleration at the early stage of velocity relaxation in a shock wave," Fiz. Goreniya Vzryva **45** (2), 101–110 (2009) [Combust. Explos. Shock Waves **45** (2), 198–204 (2009)].
13. C. Ortiz, D. D. Joseph, and G. S. Beavers, "Acceleration of a liquid drop suddenly exposed to a high-speed airstream," Int. J. Multiphase Flow **30** (2), 217–224 (2004).
14. B. E. Gelfand, "Droplet breakup phenomena in flows with velocity lag," Progr. Energy Combust. Sci. **22** (3), 201–265 (1996).
15. V. M. Boiko and S. V. Poplavski, "Experimental study of two types of stripping breakup of the drop in the flow behind the shock wave," Fiz. Goreniya Vzryva **48** (4), 76–82 (2012) [Combust. Explos. Shock Waves **48** (4), 440–445 (2012)].
16. T. G. Theofanous and G. J. Li, "On the physics of aerobreakup," Phys. Fluids. **20**, 1–14 (2008).
17. A. V. Minakov, A. A. Shebeleva, P. A. Strizhak, M. Yu. Chernetskiy, and R. S. Volkov, "Study of the Weber number impact on secondary breakup of droplets of coal water slurries containing petrochemicals," Fuel **254**, 1100094 (2019).
18. S. V. Poplavski, A. V. Minakov, and A. A. Shebeleva, "An early stage of the drop interaction with shock wave: Airflow, deformation, destruction," J. Phys. Conf. Ser. **1359**, 012032 (2019).
19. S. V. Poplavski, A. V. Minakov, A. A. Shebeleva, and V. M. Boyko, "On the interaction of water droplet with a shock wave: Experiment and numerical simulation," Int. J. Multiphase Flow **127**, 103273 (2020).
20. D. R. Guildenbecher, C. Lopez-Rivera, and P. E. Sojka, "Secondary atomization," Exp. Fluids **46**, 371–402 (2009).
21. S. Sharma, A. P. Singh, S. S. Rao, A. Kumar, and S. Basu, "Shock induced aerobreakup of a droplet," J. Fluid Mech. **929**, A27 (2021). https://doi.org/10.1017/jfm.2021.860
22. V. Rossano, A. Cittadini, and G. De Stefano, "Computational evaluation of shock wave interaction with a liquid droplet," Appl. Sci. **12**, 1349 (2022).
23. S. V. Poplavski, "Parametric study of droplet breakup behind a shock wave by the sheet striping mechanism," Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **63** (3), 43–53 [J. Appl. Mech. Tech. Phys. **63** (3), 408–417 (2022)].
24. S. K. Aggarwal and F. Peng, "A review of droplet dynamics and vaporization modeling for engineering calculations," J. Eng. Gas Turbines Power **117**, 453–461 (1995).
25. A. V. Minakov, "Numerical algorithm for moving boundary fluid dynamics problems and its testing," Comput. Math. Math. Phys. **54** (10), 1560–1570 (2014).
26. A. M. Frank, *Discrete Models of Incompressible Fluid* (Fizmatlit, Moscow, 2001) [in Russian].
27. S. Tavangar, S. H. Hashemabadi, and A. Saberimoghadam, "CFD simulation for secondary breakup of coal-water slurry drops using OpenFOAM," Fuel Process. Technol. **132**, 153–163 (2015).
28. D. B. Kothe and W. J. Rider, "Volume tracking of interfaces having surface tension in two and three dimensions," *Proc. 34th AIAA Aerosp. Sci. Meet. Exhibit.* (1996), 859.
29. S. W. Hirt and B. D. Nichols, "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries," J. Comput. Phys. **39**, 201–226 (1981).
30. J. U. Brackbill, D. B. Kothe, and C. A. Zemach, "Continuum method for modeling surface tension," J. Comput. Phys. **100**, 335–354 (1992).
31. J. Smagorinsky, "General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. The basic experiment," Mon. Weather Rev. **91**, 99–164 (1963).

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 3. С. 177–195

УДК 517.958

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ТОМОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ДАННЫМ МНОГОКРАТНОГО ИМПУЛЬСНОГО ЗОНДИРОВАНИЯ

© 2024 **И. П. Яровенко**[a], **П. А. Ворновских**[b], **И. В. Прохоров**[c]

Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, г. Владивосток 690041, Россия

E-mails: [a]yarovenko@iam.dvo.ru, [b]vornovskikh_pa@dvfu.ru,
[c]prokhorov@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 14.01.2024 г.; после доработки 02.05.2024 г.;
принята к публикации 22.05.2024 г.

В рамках математической модели, основанной на интегро-дифференциальном уравнении переноса излучения, предложен новый экстраполяционный подход к проблеме повышения качества томографических изображений путём серийного облучения среды импульсами различной длительности. Результаты численного моделирования на цифровом тестовом фантоме продемонстрировали высокую эффективность алгоритма для подавления паразитного влияния рассеянного излучения и повышения контрастности изображений.

Ключевые слова: импульсная томография, нестационарное уравнение переноса излучения, обратные задачи, коэффициент ослабления.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.313

ВВЕДЕНИЕ

Компьютерная томография (КТ) уже на протяжении многих лет остаётся одним из наиболее информативных методов медицинской диагностики, позволяющим получать трёхмерные изображения внутренней структуры биологических объектов [1]. Особую актуальность в последнее время приобрели задачи дальнейшего совершенствования методов компьютерной томографии, повышения качества и контраста получаемых изображений. Это связано как с общим прогрессом в области медицинской визуализации и появлением новых технических возможностей, так и с ростом специфических требований к точности диагностики в условиях распространения различных заболеваний [2, 3]. На качество томографической реконструкции влияет множество физических факторов, таких как сильное ослабление сигнала в плотных средах, деструктивное влияние рассеянного излучения, шумы регистрирующей аппаратуры, неконтролируемые движения пациента в процессе сканирования и т. д. [4]. Одним из наиболее значимых является эффект рассеяния рентгеновских лучей на неоднородностях структуры объекта, приводящий к существенной потере контрастности изображения и возникновению артефактов [5]. В связи с этим, достаточно обширный пласт работ в области компьютерной томографии направлен на разработку методов подавления влияния рассеянного излучения. Зачастую подобные методы основаны на различном качественном поведении рассеянной и не рассеянной (баллистической) составляющих сигнала. Так в работах [6, 7] предлагалось применение источников излучения имеющих особенности типа разрыва либо сингулярности, что позволяло подавлять влияние рассеянного излучения за счёт различной гладкости рассеянной и баллистической составляющих сигнала. Аналогичный подход использовался в [8] для одновременного восстановления коэффициентов ослабления и рассеяния. В дальнейшем идеи основанные на использовании источников специального типа были успешно применены в поляризационной томографии [9] и оптической томографии кожных покровов [10]. В конусно-лучевой компьютерной томографии [11, 12] для фильтрации рассеяния используются элементы, блокирующие часть поля зрения детектора (подвижный блокиратор или решётку с пластинами). Анализ сигнала в заблокированных областях позволяет оценить интенсивность рассеянного излучения, скорректировать его влияние и подавить связанные с ним артефакты на реконструированных изображениях. В работе [13] применялось частотное разделение рассеянного и баллистического излучения при спектральном анализе полученных изображений. В [14] баллистическая составляющая выделялась путём энергетической фильтрации фотонов претерпевших комптоновское рассеяние. Появление источников рентгеновского излучения производящих ультра-короткие импульсы привело к развитию методов временной дискриминации рассеянного излучения [15, 16]. Для коррекции рассеянного сигнала также используются методы глубокого обучения, приобретшие в последнее время большую популярность [17].

Данная статья продолжает исследования начатые в работах [18, 19], где нами был предложен подход к восстановлению неизвестного коэффициента ослабления с помощью экстраполяционного метода, основанного на анализе поведения решения начально-краевой задачи для нестационарного уравнения переноса излучения. Была установлена зависимость плотности потока выходящего излучения от параметра, характеризующего длительность зондирующего импульса и показано, что вклад рассеянной компоненты в проекционных данных падает при уменьшении значений параметра.

Экстраполяция плотности потока выходящего излучения по данным многократного просвечивания импульсами различной длительности, в область сверхмалых значений параметра позволяет асимптотически выделить баллистическую компоненту и исключить вклад рассеяния. В этом случае нахождение коэффициента ослабления является хорошо изученной задачей и сводится к обращению преобразования Радона от искомой функции [20, 21].

Последующий численный анализ выявил существенный недостаток предложенного метода экстраполяции проекционных данных — высокую чувствительность к погрешности измерений, что приводит к потере устойчивости решения обратной задачи томографии. Так при уровне относительной ошибки в измерении проекционных данных порядка 5% метод демонстрирует полную потерю различимости внутренней структуры объекта [19, 22]. Это серьёзно ограничивает практическое применение подхода в реальных условиях, где шумы и искажения в исходных данных практически неизбежны. Для преодоления указанного недостатка в настоящей работе предлагается иной подход, который основан на экстраполяции непосредственно в пространстве восстановленных томографических изображений. На ряде численных экспериментов продемонстрировано, что такой способ обработки менее чувствителен к ошибкам измерений и демонстрирует вполне приемлемую устойчивость.

Отметим, что экстраполяционные методы достаточно давно и плодотворно используются для повышения качества томографических изображений. В большей степени разрабатываемые алгоритмы применяются к стационарным задачам томографии в условиях неполноты проекционных данных при этом используются как методы непосредственной экстраполяции недостающих данных [21, 23], так и итерационные подходы [24]. В работе [25] предлагается экстраполяционный метод восстановления спектральной зависимости сигнала в двух энергетической томографии с помощью методов глубокого обучения. В отличие от предлагаемого нами подхода, в упомянутых работах не учитываются нестационарная природа и структурные особенности измеряемого сигнала.

1. ПОСТАНОВКИ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение, описывающее нестационарный процесс взаимодействия излучения с веществом, вида [16]

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r + \mu(r)\right) I(r,\omega,t) = \sigma(r)\int\limits_{\Omega} p(r,\omega\cdot\omega')I(r,\omega',t)d\omega'. \tag{1}$$

Функция $I(r, \omega, t)$ интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени $t \in [0, T]$, в точке $r \in \mathbb{R}^3$, движущихся со скоростью c в направлении единичного вектора $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$. Функции μ и σ имеют смысл коэффициентов ослабления и рассеяния, а через p обозначена индикатриса рассеяния.

Исследуемый объект содержится в цилиндре G с центром в начале координат, диаметром основания d и высотой l, $G = \{r = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{r_1^2 + r_2^2} < d/2, \ -l/2 < r_3 < l/2\}$. Обозначим через Π_ω плоскость, касательную к границе области G и перпендикулярную направлению ω, $\Pi_\omega = \{r \in \mathbb{R}^3 : r \cdot \omega = d/2\}$. Очевидно, что плоскости $\Pi_{-\omega}$ и Π_ω параллельны и находятся на расстоянии d друг от друга.

Сканирование объекта осуществляется путём синхронного поворота плоскостей с источниками излучения $\Pi_{-\omega^*}$ и детекторами $\Pi_{+\omega^*}$ в горизонтальных сечениях $\omega^* \in \Omega^* = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega : \omega_3 = 0\}$.

Рассматривая прямую задачу для уравнения (1), мы будем опускать параметрическую зависимость решения уравнения $I_{\omega^*}(r, \omega, t)$ от направления ω^*, которое характеризует положение внешнего источника облучения. Для краткости изложения введём ряд обозначений $X = G \times \Omega \times [0, T]$, $X_0 = G \times \Omega \times \{t = 0\}$, $\Omega_{-\omega^*} = \{\omega \in \Omega : -\omega^* \cdot \omega > 0\}$, $Y^- = \Pi_{-\omega^*} \times \Omega_{-\omega^*} \times [0, T]$, $X^- = Y^- \cup X_0$, и присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия

$$I|_{X_0} = h_0(r, \omega), \tag{2}$$

$$I|_{Y^-} = h_{ext}(z, \omega, t), \tag{3}$$

где h_0 характеризует состояние процесса в начальный момент времени, а функция h_{ext} описывает плотность потока излучения падающего на объект. На множестве $X_0 \times Y^-$ построим функцию

$$h(z, \omega, t) = \begin{cases} h_0(z, \omega), & \text{если } (z, \omega, t) \in X_0, \\ h_{ext}(z, \omega, t), & \text{если } (z, \omega, t) \in Y^- \end{cases}$$

и объединим условия (2) и (3) в одно начально-краевое условие следующего вида:

$$I|_{X^-} = h(r, \omega, t). \tag{4}$$

Прямая задача. В прямой задаче требуется определить функцию I из уравнения (1) и условия (4) при заданных μ, σ, p, c, h.

Относительно коэффициентов уравнения (1) и функции h в условии (4) предполагается, что $\mu, \sigma \in L^\infty(G)$, $p(r, \omega \cdot \omega') \in L^\infty(G \times [-1, 1])$, $h \in L^\infty(X^-)$. Физика описываемого процесса подразумевает, что все функции неотрицательные, справедливо $\sigma \leqslant \mu$ и индикатриса рассеяния p удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_\Omega p(r, \omega \cdot \omega') d\omega' = 1$$

для почти всех $r \in G$. Не нарушая общности будем полагать, что вне области G функции μ, σ продолжены нулём, то есть вне G излучение со средой не взаимодействует.

Для простоты изложения мы ограничимся случаем, когда серийное облучение среды, зависящее от направления ω^*, осуществляется прямоугольными импульсами длительностью ϵ вида

$$h(\xi, \omega, t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & (\xi, \omega, t) \in \Pi_{-\omega^*} \times \Omega_{-\omega^*} \times (0, \epsilon), \\ 0, & (\xi, \omega, t) \notin \Pi_{-\omega^*} \times \Omega_{-\omega^*} \times (0, \epsilon). \end{cases} \tag{5}$$

Отметим, что использование нами такого вида источника направлено в первую очередь для упрощения математических выкладок. В тоже время практическое построение источников рентгеновского излучения, имеющих форму прямоугольных импульсов во временном диапазоне вполне реалистично и рассматривалось, например, в работе [26].

Обозначим через $L_{r,\omega}$ луч исходящий из точки $r \in \mathbb{R}^3$ в направлении ω, $L_{r,\omega} = \{r + \omega\tau : \tau > 0\}$, а через $d(r, -\omega)$ расстояние от точки $r \in G$ до плоскости $\Pi_{-\omega^*}$ в направлении $-\omega$, и пусть $d(r, -\omega, t) = \min\{d(r, -\omega), ct\}$. Если луч $L_{r,\omega}$ не имеет общей точки с плоскостью $\Pi_{-\omega^*}$, то очевидно, что $d(r, -\omega, t) = ct$.

Решением прямой задачи будем называть функцию I из пространства

$$W^1_\infty = \{I \in L^\infty(X) : \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r\right) I \in L^\infty(X)\}$$

такую, что для почти всех $(r, \omega, t) \in X$ функция $I(r - \tau\omega, \omega, t - \tau/c)$ абсолютно непрерывна по τ на множестве $[0, d(r, -\omega, t)] \setminus \{c(t - \epsilon)\}$, удовлетворяет уравнению (1) и условию (4) почти всюду на X и X^-, соответственно.

Заметим, что такое определение решения и сделанные выше предположения приводят к тому, что прямая задача будет однозначно разрешима [19]. Исследованию прямых задач для стационарных и нестационарных уравнений переноса излучения подобного рода посвящено не мало работ, отметим лишь несколько широко известных монографий по этой тематике [27–32].

Обратная задача. Под обратной задачей будем понимать задачу определения функции μ из соотношений (1), (4) и дополнительного условия

$$\int\limits_{d/c}^{d/c+\epsilon} I(\eta, \omega^*, t)dt = H(\eta, \omega^*), \quad (\eta, \omega^*) \in \Pi_{\omega^*} \times \Omega^*, \tag{6}$$

в которых величины c, d, ϵ и функции $h(\xi, \omega^*, t), H(\eta, \omega^*)$ при $(\xi, \omega^*, t) \in \Pi_{\omega^*} \times \Omega^* \times [0, T]$, $(\eta, \omega^*) \in \Pi_{\omega^*} \times \Omega^*$ заданы.

Таким образом, для нахождения коэффициента ослабления нужны только лишь усреднённые значения плотности потока, что несколько снижает требования к временному разрешению детекторов.

2. АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТА ОСЛАБЛЕНИЯ ПРИ МАЛОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЗОНДИРУЮЩЕГО ИМПУЛЬСА И ПРОЦЕДУРА ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Хорошо известно, что начально-краевая задачи (1), (4) эквивалентна уравнению интегрального типа

$$I = I_0 + \mathcal{A}\mathcal{S}I,$$

для решения которого справедливо представление в виде равномерно сходящегося ряд Неймана [16]

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{A}\mathcal{S})^n I_0, \tag{7}$$

где операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$ определяются выражениями

$$\mathcal{A}f(r, \omega, t) = \int\limits_0^{d(r,-\omega,t)} \exp\left(-\int\limits_0^{\tau} \mu(\eta - \tau'\omega)d\tau'\right) f(r - \omega\tau, \omega, t - \tau/c)d\tau,$$

$$\mathcal{S}f(r, \omega, t) = \sigma(r) \int\limits_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega', t) d\omega'.$$

В представлении (7) функция

$$I_0(r,\omega,t) = h(\eta - d(r,-\omega,t)\omega, \omega, t - d(r,-\omega,t)/c) \exp\left(-\int\limits_0^{d(r,-\omega,t)} \mu(\eta - \tau\omega) d\tau\right)$$

имеет смысл интенсивности нерассеянного поля (баллистическая компонента), а функция $I_n = (\mathcal{AS})^n I_0$ при $n = 1, 2, \ldots$ описывает n-кратно рассеянное поле.

В рамках данного исследования мы ограничимся приближением однократного рассеяния, оставляя в ряде Неймана только два первых слагаемых: $I = I_0 + I_1$. Найдём интеграл в правой части (6) от функций I_0 и I_1. С учётом вида функции h для всех $\eta \in \Pi_{\omega^*}$ получаем

$$\int\limits_{d/c}^{d/c+\epsilon} I_0(\eta,\omega^*,t)dt = \int\limits_{d/c}^{d/c+\epsilon} h(\eta,\omega^*,t)dt \exp\left(-\int\limits_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*)d\tau\right) = \\ = \exp\left(-\int\limits_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*)d\tau\right).$$

Для интеграла от величины I_1 справедлива следующая лемма, устанавливающая оценку на скорость роста вклада однократно рассеянного излучения в зависимости от длительности импульса входящего излучения [19]. Для удобства дальнейших рассуждений мы приведём её небольшое доказательство.

Лемма. *Для всех $\eta \in \Pi_{\omega^*}$ функция I_1 удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\int\limits_{d/c}^{d/c+\varepsilon} I_1(\eta,\omega^*,t)dt \leqslant \frac{\overline{\sigma} d}{2}\Phi(\varepsilon), \tag{8}$$

где $\overline{\sigma} = \sup\limits_{(r)\in G} \sigma(r)$ и

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{c\varepsilon}{d}\ln\left|1 + \frac{d}{c\varepsilon}\right| + 1 - \frac{d}{c\varepsilon}\ln\left|1 + \frac{c\varepsilon}{d}\right|\right). \tag{9}$$

Доказательство. Так как $I_1 = \mathcal{AS}I_0$, то

$$I_1(\eta,\omega^*,t) = \int\limits_0^d \exp\left(-\int\limits_0^\tau \mu(\eta - \tau'\omega^*)d\tau'\right) \frac{\sigma(\eta - \tau\omega^*)}{4\pi} \times \\ \times \int\limits_\Omega \exp\left(-\int\limits_0^{d(\eta-\tau\omega^*,\omega)} \mu(\eta - \tau\omega^* - \tau'\omega)d\tau'\right) \times \\ \times h(\eta - \tau\omega^* - d(\eta - \tau\omega^*,\omega)\omega, \omega, t - \tau/c - d(\eta - \tau\omega^*,\omega)/c) d\omega d\tau. \tag{10}$$

Учитывая форму импульса внешнего источника излучения и проводя параметризацию вектора ω через сферические углы

$$\omega_1 = \cos\alpha\sqrt{1-\nu^2}, \quad \omega_2 = \sin\alpha\sqrt{1-\nu^2}, \quad \omega_3 = \nu, \quad \nu = \omega\cdot\omega^*,$$

из (10) получаем

$$I_1(\eta,\omega^*,t)\leqslant\frac{\overline{\sigma}}{2\varepsilon}\int\limits_0^d\int\limits_0^1\chi_\varepsilon(t-\tau/c-(d-\tau)/(c\nu))d\nu d\tau, \tag{11}$$

где $\chi_\varepsilon(t)$ характеристическая функция отрезка $[0,\varepsilon]$. Сделаем следующую замену переменных в интеграле из правой части соотношения (11):

$$s=t-\tau/c-(d-\tau)/(c\nu),\quad \nu=\frac{d-\tau}{c(t-s)-\tau},\quad d\nu=\frac{c(d-\tau)ds}{(c(t-s)-\tau)^2},$$

где переменная s изменяется на интервале $(0,\min\{\varepsilon,t-d/c\})$. Учитывая диапазон изменения переменной t, $d/c\leqslant t\leqslant d/c+\varepsilon$, получаем

$$I_1(\eta,\omega^*,t)\leqslant\frac{\overline{\sigma}c}{2\varepsilon}\int\limits_0^d\int\limits_0^{t-d/c}\frac{(d-\tau)dsd\tau}{(c(t-s)-\tau)^2}=-\frac{\overline{\sigma}}{2\varepsilon}\int\limits_0^d\left.\frac{(d-\tau)}{(c(t-s)-\tau)}\right|_0^{t-d/c}d\tau=$$

$$=\frac{\overline{\sigma}}{2\varepsilon}\int\limits_0^d\frac{(ct-d)(d-\tau)}{(ct-\tau)(d-\tau)}d\tau=\frac{\overline{\sigma}}{2\varepsilon}(ct-d)\ln\left|\frac{ct}{ct-d}\right|.$$

Таким образом, для всех $t\in(d/c,d/c+\varepsilon)$

$$I_1(\eta,\omega^*,t)\leqslant\frac{\overline{\sigma}}{2\varepsilon}(ct-d)\ln\left|\frac{ct}{ct-d}\right|. \tag{12}$$

Интегрируя обе части неравенства (12) по промежутку $(d/c,d/c+\varepsilon)$, получаем

$$\int\limits_{d/c}^{d/c+\varepsilon}I_1(\eta,\omega^*,t)dt\leqslant\frac{\overline{\sigma}}{2\varepsilon}\int\limits_{d/c}^{d/c+\varepsilon}(ct-d)\ln\left|\frac{ct}{ct-d}\right|dt=\frac{\overline{\sigma}}{2\varepsilon}\left(\frac{(ct-d)^2}{2c}\ln\left|\frac{ct}{ct-d}\right|\Bigg|_{d/c}^{d/c+\varepsilon}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{d/c}^{d/c+\varepsilon}\frac{(ct-d)^2}{2c}\left(\frac{1}{t}-\frac{c}{ct-d}\right)dt\right)=\frac{\overline{\sigma}}{2\varepsilon}\left(\frac{(c\varepsilon)^2}{2c}\ln\left|\frac{d+c\varepsilon}{c\varepsilon}\right|+\int\limits_{d/c}^{d/c+\varepsilon}\frac{d(ct-d)}{2t}dt\right)=$$

$$=\frac{\overline{\sigma}d}{4}\left(\frac{c\varepsilon}{d}\ln\left|1+\frac{d}{c\varepsilon}\right|+1-\frac{d}{c\varepsilon}\ln\left|1+\frac{c\varepsilon}{d}\right|\right)=\frac{\overline{\sigma}d}{2}\Phi(\varepsilon),$$

где функция $\Phi(\varepsilon)$ определяется соотношением (9). Таким образом лемма доказана. □

Из неравенства (8) видно, что при уменьшении длительности зондирующего импульса осреднённые значения функции I_1 стремятся к нулю. По аналогии с доказательством леммы 1 можно показать, что осреднённые по промежутку времени значения функций $I_2, I_3, \ldots$ также сходятся к нулю при $\varepsilon\to0$. Получение аналитических выражений для скорости асимптотической сходимости к нулю при $\varepsilon\to0$ функций

$$\int\limits_{d/c}^{d/c+\varepsilon}I_n(\eta,\omega^*,t)dt$$

для $n>1$ достаточно громоздко и сопряжено оформительскими трудностями, поэтому здесь не приводятся. Асимптотическая оценка для компоненты I_2, описывающей двукратное рассеяние, доказана в [19].

В исследовании [33] проводились численные эксперименты по оценке скорости роста величин

$$\Psi_m(\varepsilon) = \int\limits_{d/c}^{d/c+\varepsilon} \sum_{n=1}^{m} I_n(\eta, \omega^*, t)dt$$

для характерных в медицинской компьютерной томографии значений коэффициентов ослабления и рассеяния излучения. Результаты экспериментов показали, что для фиксированного ε монотонно возрастающая последовательность $\Psi_m(\varepsilon)$ достаточно быстро стабилизируется с ростом m и сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Если ограничиться приближением однократного рассеяния, то при доказательстве леммы 1 можно воспользоваться теоремой о среднем, а не оценивать грубо подынтегральные экспоненты сверху. Тогда приближенное решение можно записать в виде

$$H(\eta, \omega^*, \varepsilon) = \int\limits_{d/c}^{d(1+\varepsilon)/c} I(\eta, \omega^*, t, \varepsilon)dt = \exp\left(-\int\limits_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*)d\tau\right) + C(\eta, \omega^*)\Phi(\varepsilon), \tag{13}$$

где функция $C(\eta, \omega^*)$ содержит значения экспоненциальных ядер из (10). Так как функция $C(\eta, \omega^*)$ не зависит от ε, то мы можем определить её значение в точке (η, ω^*) по данным облучения среды двумя импульсами различной длительности ε_1, ε_2, $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Используя данные двух измерений $H(\eta, \omega^*, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2$, можно выразить линейный интеграл от искомой функции μ:

$$\int\limits_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*)d\tau = -\ln\left|H(\eta, \omega^*, \varepsilon_1) - \frac{H(\eta, \omega^*, \varepsilon_1) - H(\eta, \omega^*, \varepsilon_2)}{\Phi(\varepsilon_1) - \Phi(\varepsilon_2)}\Phi(\varepsilon_1)\right|. \tag{14}$$

Левая часть соотношения (14) является лучевым преобразованием Радона искомой функции $\mu(r)$. Информации о семействе таких линейных интегралов на множестве $\Pi_{\omega^*} \times \Omega^*$ достаточно для обращения преобразования Радона [20, 21]. Таким образом соотношение (14) даёт приближенное решение обратной задачи.

Подробное тестирование данного подхода было проведено в работах [18, 19]. Результаты численных экспериментов продемонстрировали, что при зондировании импульсами небольшой длительности (порядка нескольких десятков пикосекунд) даже такое грубое приближение позволяет построить хорошую аппроксимацию решения уравнения переноса излучения в многократно рассеивающей среде и решить обратную задачу восстановления неизвестного коэффициента ослабления. Более того, добавление учёта вклада рассеяния высших кратностей приводит к тому, что экстраполяционный метод решения задачи томографии становится весьма требовательным к точности входных данных и очень быстро теряет устойчивость с ростом ошибки в проекционных данных.

Справедливости ради стоит заметить, что неустойчивость характерна и для случая учёта только однократного рассеяния. В частности, как уже упоминалось во введении, при уровне относительной ошибки в измерении проекционных данных порядка 5% метод демонстрирует полную потерю различимости внутренней структуры объекта [19, 22]. Мы связываем данное обстоятельство с тем, что при решении условно корректной задачи обращения преобразования Радона используются данные, полученные в результате потенциально неустойчивой процедуры экстраполяции. При этом каждая проекция экстраполируется независимо от остальных, что может вносить дополнительные искажения в набор проекционных данных. В рамках текущего исследования мы предлагаем использовать несколько другой подход к решению задачи томографии, а именно сначала обращать преобразование Радона по проекционным данным без коррекции, а после применять процедуру экстраполяции в пространстве восстановленных изображений. На наш взгляд, такой подход будет обладать большей устойчивостью к ошибкам в проекционных данных. Это предположение связано с тем, что при обращении преобразования Радона будут использоваться «сырые» проекционные данные, в которых, как правило, данные согласованы между проекциями, а процедура экстраполяции будет проводится независимо для каждого пикселя итогового изображения и, появление каких-либо выбросов, связанных с неустойчивостью процедуры экстраполяции, будет носить локальный характер и минимально влиять на качество итогового изображения.

В качестве функциональной зависимости для построения экстраполяционной формулы в пространстве изображений мы будем так же использовать функцию $\Phi(\varepsilon)$, определяемую соотношением (9). Приведём некоторые соображения, позволяющие получить формулу для экстраполяционной процедуры в пространстве изображений. Выразим из соотношения (13) баллистическую составляющую сигнала и прологарифмируем, тогда

$$\int\limits_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*)d\tau = -\ln H(\eta,\omega^*,\varepsilon) - \ln\left(1 - \frac{C(\eta,\omega^*)\Phi(\varepsilon)}{H(\eta,\omega^*,\varepsilon)}\right). \tag{15}$$

Учитывая, что $\Phi(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то из (15) при малых ε приходим к следующему приближенному соотношению:

$$\int\limits_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*)d\tau = -\ln H(\eta,\omega^*,\varepsilon) + \frac{C(\eta,\omega^*)\Phi(\varepsilon)}{H(\eta,\omega^*,\varepsilon)}. \tag{16}$$

Применяя к обеим частям (16) оператор обращения преобразования Радона, получаем

$$\mu(r) = \mu(r,\varepsilon) + \widetilde{C}(r,\varepsilon)\Phi(\varepsilon),$$

где $\mu(r,\varepsilon)$ — значение коэффициента ослабления, восстановленное про проекционным данным $H(\eta,\omega^*,\varepsilon)$, а величина $\widetilde{C}(r,\varepsilon)$ обратное преобразование Радона от $C(\eta,\omega^*)/H(\eta,\omega^*,\varepsilon)$. Если дополнительно предположить, что функция $\widetilde{C}(r,\varepsilon)$ не зависит от ε, то аналогично случаю выше, мы можем определить $\widetilde{C}(r)$ по известным $H(\eta,\omega^*,\varepsilon_i)$, $i = 1, 2$, и получить экстраполяционную формулу для определения коэффициента ослабления

$$\mu(r) = \mu(r,\varepsilon_1) - \frac{\mu(r,\varepsilon_1) - \mu(r,\varepsilon_2)}{\Phi(\varepsilon_1) - \Phi(\varepsilon_2)}\Phi(\varepsilon_1). \tag{17}$$

Отметим, что уточняющая формула (17) получена в предположение о независимости величины $\widetilde{C}$ от ε. Формально, данное приближение можно получить, если разложить функцию $\widetilde{C}$ в ряд по ε и ограничиться только первым членом в разложении. Как показали приведённые в следующем параграфе численные эксперименты, использование даже такого грубого приближения позволяет получить томограммы коэффициента ослабления $\mu(r)$ достаточно хорошего качества.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для сравнительного тестирования предложенных алгоритмов мы будем использовать специально разработанный цифровой фантом, предложенный в работе [22]. Он представляет собой цилиндр с диаметром и высотой 10 см, заполненный базовым веществом с коэффициентом ослабления эквивалентным воде. Фантом содержит цилиндрические включения диаметром

0.6 см и высотой 10 см, с заданными значениями коэффициента ослабления в единицах Хаунсфилда (HU), традиционно применяемых в компьютерной томографии. Они связаны со значениями коэффициента ослабления вещества μ по следующему линейному закону:

$$HU = \frac{\mu - \mu_{water}}{\mu_{water} - \mu_{air}} \times 1000,$$

где μ — коэффициент ослабления вещества, а μ_{water}, μ_{air} — коэффициенты ослабления для воды и воздуха, соответственно.

Включения содержат материалы со следующими значениями коэффициента ослабления: $-1000HU$, $-600HU$, $-100HU$, $300HU$, $500HU$ и $2100HU$, которые соответствуют основным материалам характерным для дентальной конусно-лучевой томографии [34]. Центры включений расположены на концентрических окружностях на разных расстояниях от центра фантома для того чтобы можно было оценить эффект влияния местоположения включения на точность восстановления. Поперечное сечение фантома схематично изображено на рис. 1(a).

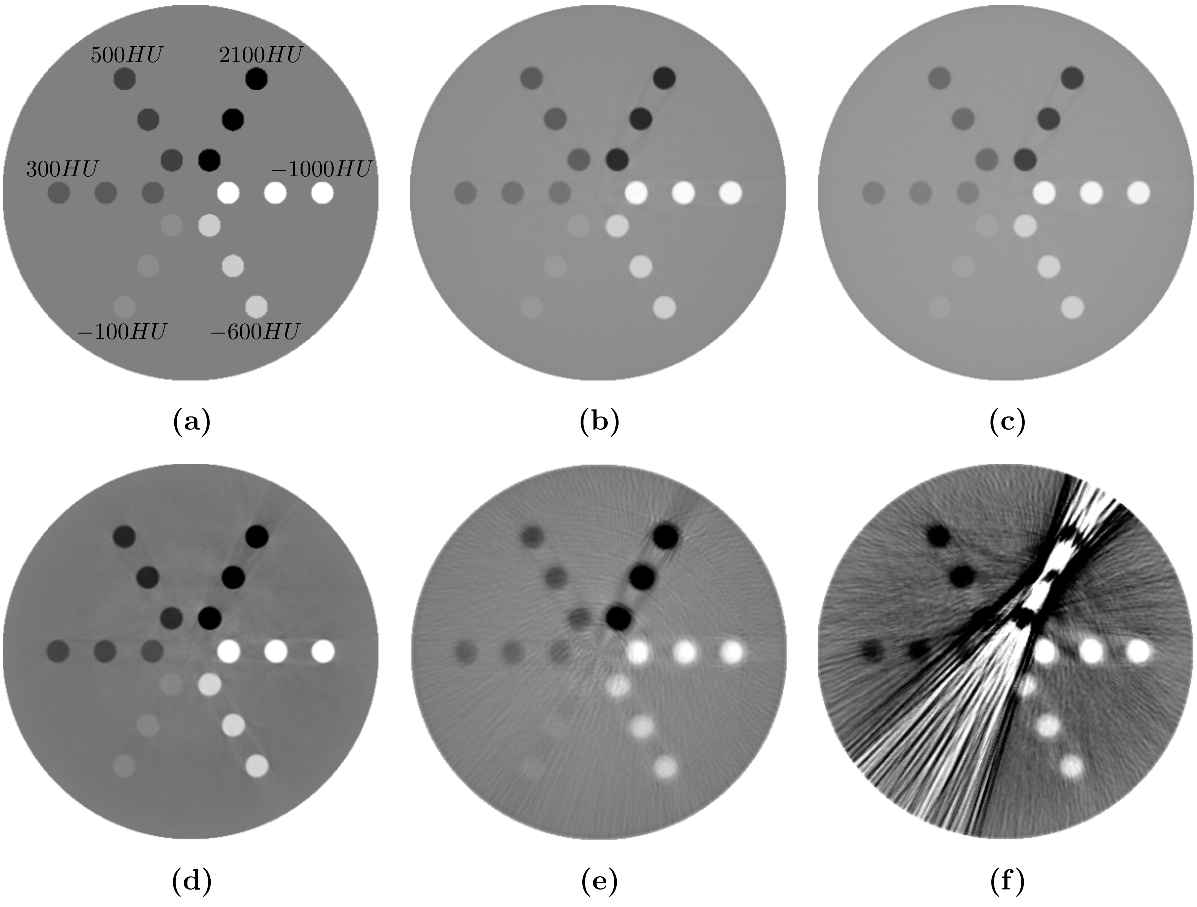


Рис. 1. Цифровой фантом: (a) — схематичное изображение поперечного сечения фантома; (b), (c) — реконструкция по необработанным данным соответствующим длительностям импульса 50 пс и 100 пс; (d), (e), (f) — реконструкция по экстраполированным данным для уровня ошибки в проекционных данных в 1%, 2%, 5%

В численных экспериментах моделировался томограф, содержащий 200 детекторов, дискретизация по углу составляла 600 направлений. Для описания серийного облучения среды использовался импульсный источник определяемый формулой (5), с длительностью импульсов, которая варьировалась в экспериментах. Для моделирования проекционных данных генерируемых томографическим сканером мы использовали метод Монте-Карло [35], чтобы найти выходящее излучение $H(\varepsilon_i) = H(\eta, \omega^*, \varepsilon_i)$, соответствующее различной длительности импульсов ε_i входящего излучения. В расчётах методом Монте-Карло моделировалось до 10 актов взаимодействия излучения с веществом. Такое количество было выбрано путём предварительных расчётов для различного числа учитываемых актов взаимодействия излучения с веществом. Для контроля уровня ошибки в проекционных данных вычислялась выборочная дисперсия [35], количество генерируемых траекторий выбиралось в зависимости от необходимой точности моделирования измерений в проекционных данных и варьировалось от 10^4 до 10^7.

После нахождения $H(\eta, \omega^* \varepsilon_i)$, независимо для каждой проекции, соответствующей направлению ω^*, выполнялась экстраполяция данных о выходящем излучении согласно формуле (14). Затем с помощью алгоритма свёртки и обратной проекции находилась функция μ [20]. Для сравнения и дальнейшего использования в экстраполяционной процедуре вычислялись значения преобразования Радона функции μ без экстраполяции

$$\int\limits_0^d \mu(\eta - \tau\omega^*) d\tau = -\ln |H(\eta, \omega^* \varepsilon_i)| ,$$

что соответствует формуле классической томографии без применения методов подавления рассеяния [20].

На рис. 1(b) и 1(c) приведены изображения восстановления коэффициента ослабления по необработанным проекционным данным, соответствующим длительностям импульса входящего излучения в 50 и 100 пикосекунд, при этом уровень ошибки в проекционных данных не превышает 1%. Как видно из рисунка, все включения на томограммах восстановились достаточно хорошо, но численные значения восстановленных коэффициентов получаются завышенными (имеют более светлый тон) в сравнении с референтными значениями. Особенно это заметно для фоновой среды. Также видно, что с увеличением длительности импульса входящего излучения погрешность в определении значений коэффициента ослабления нарастает. Увеличение уровня погрешности в проекционных данных с 1% до 5% приводит к увеличению погрешности восстановления, однако контрастность соответствующих томограмм при этом изменяется не значительно, поэтому здесь они не приводятся. На рис. 1(d), 1(f) приведены томограммы, полученные при восстановлении коэффициента ослабления по экстраполированным данным в зависимости от уровня ошибки, с которым были вычислены проекционные данные. Хорошо видно, что с ростом ошибки в проекционных данных качество томограмм заметно падает, особенно вблизи включений содержащих плотные материалы. Проблема появления артефактов на томограммах, вызванных металлическими включениями, хорошо известна и вопросам борьбы с ней посвящено множество публикаций, из последних отметим работы [36,37]. На томограммах, построенных по необработанным данным, артефакты выражены в меньшей степени поскольку в расчётах использовались достаточно малые импульсы, что позволяет отфильтровать паразитное влияние рассеянного сигнала на качество изображений.

При увеличении длительностей импульсов, применяемых в экстраполяционной процедуре, неустойчивость метода начинает проявляться даже при ошибке измерения проекционных данных не превышающей 1%. Данная ситуация хорошо видна на рис. 2, где приведены результаты серии экспериментов восстановления коэффициента ослабления по экстраполированным данным, полученным по результатам облучения импульсами с длительностью 100, 200 и 300 пикосекунд. Томограммы 1(a)–1(c) показывают как меняются результаты реконструкции по необработанным данным в зависимости от увеличения длительности импульса входящего излучения, а рис. 1(d)–1(f) демонстрируют результаты восстановления коэффициента ослабления по экстраполированным проекционным данным. Использование экстраполированных проекционных данных с использованием длительностей в 200 и 300 пикосекунд приводят к полной невозможности восстановления коэффициента ослабления.

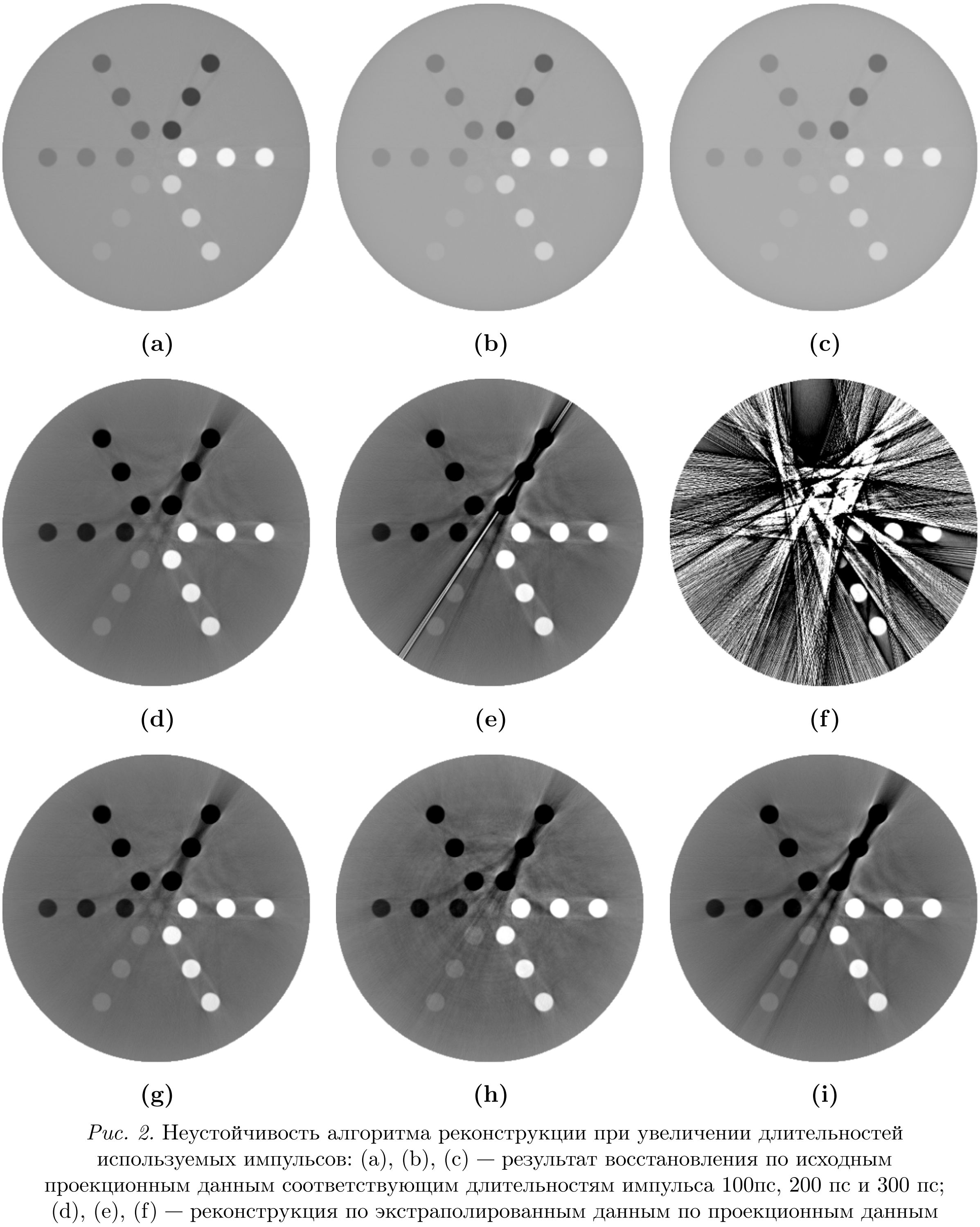
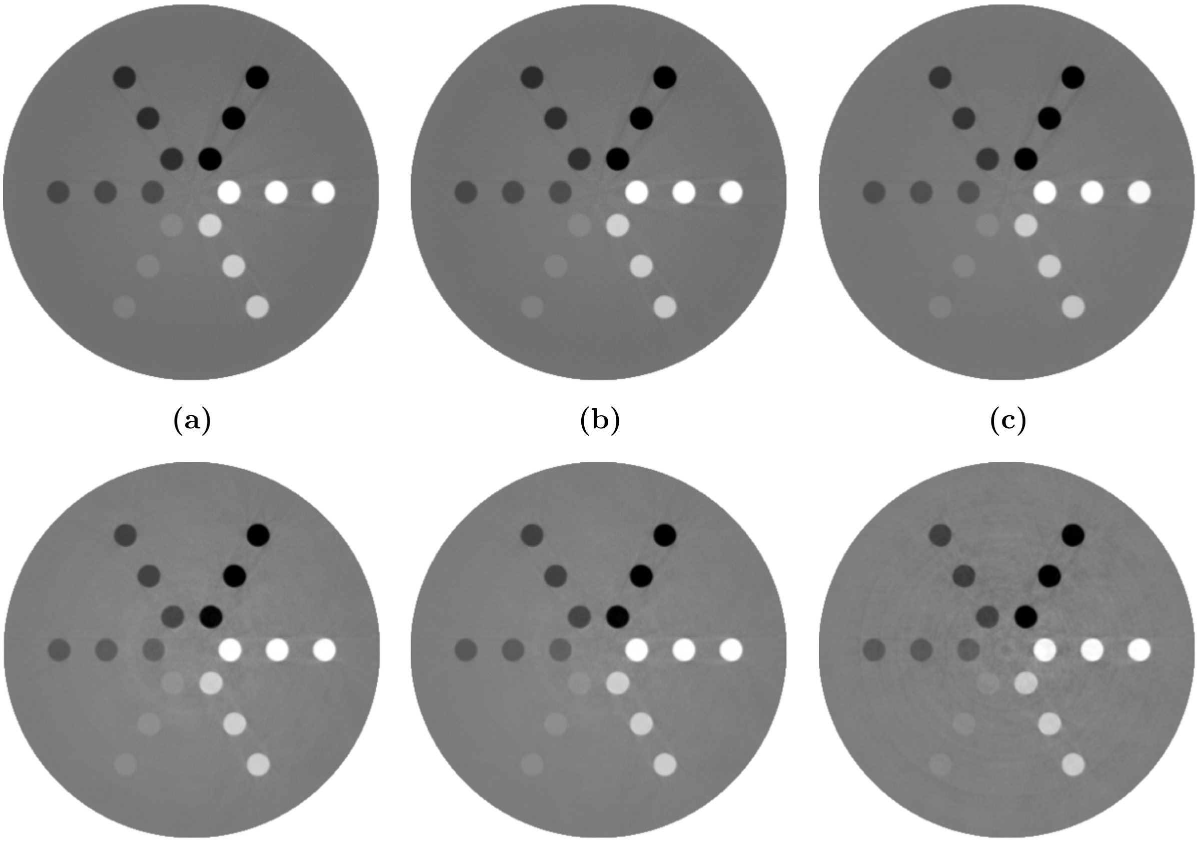


Рис. 2. Неустойчивость алгоритма реконструкции при увеличении длительностей используемых импульсов: (a), (b), (c) — результат восстановления по исходным проекционным данным соответствующим длительностям импульса 100пс, 200 пс и 300 пс; (d), (e), (f) — реконструкция по экстраполированным данным по проекционным данным соответствующим длительностям 100 и 200пс, 100пс и 300пс, 200пс и 300пс; (g), (h), (i) — реконструкция по экстраполированным проекционным данным после проведения коррекции на отрицательные значения. Уровень ошибки в проекционных данных не превышает 1%

При экстраполяции функции H, особенно для проекций «проходящих» вблизи плотных включений, могут появляться отрицательные значения, что приводит к появлению артефактов при обращении преобразования Радона. Попытка введения простой коррекции (пороговой фильтрации), заключающаяся в добавлении ко всем проекционным данным константы, сдви-



(a) **(b)** **(c)**

(d) **(e)** **(f)**

Рис. 3. Результаты восстановления коэффициента ослабления при помощи экстраполяции в пространстве изображений в зависимости от применяемых длительностей импульсов и ошибке измерения проекционных данных (δ). (a) — 100 и 200 пикосекунд, $\delta = 1\%$; (b) — 100 и 300 пикосекунд, $\delta = 1\%$ и (c) — 200 и 300 пикосекунд, $\delta = 1\%$; (d) — 100 и 200 пикосекунд, $\delta = 5\%$; (e) — 100 и 300 пикосекунд, $\delta = 5\%$ и (f) — 200 и 300 пикосекунд, $\delta = 5\%$

гающей значение проекций в положительную область привела к улучшению качества томограмм, но полностью устранить проявление артефактов не удалось (рис. 2(g)–2(i)). Как уже говорилось ранее, мы связываем это с тем, что каждая проекция экстраполируется независимо от остальных. Это вносит дополнительные искажения в набор проекционных данных, которые приводят к появлению артефактов.

На рис. 3 приведены томограммы полученные в результате восстановления коэффициента ослабления путём экстраполяции в пространстве изображений с помощью формулы (17) для различных длительностей импульса входящего излучения и разной точности измерения проекционных данных. Как видно из рисунка, применение данного подхода даёт существенное улучшение качества и контраста томограмм. Для формальной оценки качества реконструкции мы вычисляли среднеквадратичную ошибку (MSE), индекс структурной схожести (SSIM) и пиковое соотношение сигнала и шума (PSNR) между изображением с референтными значениями и каждым из изображений приведённых на рис. 3 [38]. Для сравнения вычислялись аналогичные показатели для томограмм построенных по необработанным данным (рис. 2(a)–2(c)) и томограмм полученных в результате обработки экстраполированных проекционных данных (рис. 2(g)–2(i)). Полученные значения представлены в таблице 1.

Судя по значениям всех трёх метрик качества, применение экстраполяции в пространстве изображений позволяет существенно улучшить качество восстановления. При этом использо-

Таблица 1

Метрики оценки качества реконструкции между референтным изображением и изображениями, полученными в результате реконструкции: MSE — среднеквадратичная ошибка; SSIM — индекс структурной схожести и PSNR — пиковое соотношение сигнал/шума

Метрики схожести томограмм	**MSE**	**SSIM**	**PSNR**
Не обработанные проекционные данные, ошибка 1%			
Длительность импульса 100 пс	0.0075	0.9444	21.27
Длительность импульса 200 пс	0.018	0.9170	17.45
Длительность импульса 300 пс	0.0243	0.9027	16.14
Экстраполяция по формуле (14), ошибка 1%			
Длительность импульсов 100-200 пс	0.0088	0.9153	21.63
Длительность импульсов 100-300 пс	0.0117	0.844	20.56
Длительность импульсов 200-300 пс	0.069	0.8504	19.30
Экстраполяция по формуле (17), ошибка 1%			
Длительность импульсов 100-200 пс	0.0002	0.9742	37.10
Длительность импульсов 100-300 пс	0.0002	0.9734	36.98
Длительность импульсов 200-300 пс	0.0002	0.9724	36.80
Экстраполяция по формуле (17), ошибка 5%			
Длительность импульсов 100-200 пс	0.0002	0.9632	36.43
Длительность импульсов 100-300 пс	0.0003	0.9369	36.03
Длительность импульсов 200-300 пс	0.0008	0.9261	34.07

вание импульсов с большей длительностью несущественно ухудшает качество реконструкции. Увеличение погрешности в проекционных данных конечно ухудшает качество изображений, но все включения на томограммах (рис. 3(d)–3(f)) при этом остаются достаточно контрастными. Количественные значения восстановленных коэффициентов так же не сильно отличаются от референтных значений. Об этом же свидетельствуют и значения приведённых в таблице 1 метрик схожести изображений.

Чтобы количественно оценить качество реконструкции для каждого из материалов входящих в фантом, мы вычисляли средние значения коэффициента ослабления, полученные в результате реконструкции для каждого из включений. Для включений содержащих одинаковые материалы, но локализованных в разных местах фантома, данные значения усреднялись по всем подобным включениям. После этого полученные значения сравнивались с референтными значениями в единицах Хаунсфилда. Получившиеся в результате численных экспериментов значения коэффициента μ приведены в таблице 2. В первой строке содержатся референтные значения коэффициентов. В последующих строках приведены средние значения коэффициентов ослабления, полученные в результате реконструкции фантома по данным без предварительной обработки и при реконструкции фантома по проекционным данным, полученным путём экстраполяции с помощью формулы (14) и результаты экстраполяции в пространстве изображений по формуле (17).

Из таблицы 2 видно, что применение экстраполяции в пространстве проекционных данных позволяет немного повысить контрастность томограмм, но полученные численные значения коэффициента ослабления получаются далёкими от референтных значений, особенно при восстановлении более плотных включений. С увеличением длительности применяемых импульсов погрешность при восстановлении искомого коэффициента также стремительно нарастает. Применение экстраполяционной формулы (17) напротив, существенно увеличивает точность восстановления значений коэффициента ослабления даже при довольно ощутимой погрешности в проекционных данных.

Таблица 2

Средние значения восстановленных коэффициентов ослабления μ в единицах Хаунсфилда в зависимости от длительности импульсов и уровня погрешности в проекционных данных. Для каждого включения приведено: точное значение μ; среднее значение μ, полученное при обращении преобразования Радона без предварительной обработки выходящего излучения; среднее значение μ, полученные по экстраполяционным формулам (14) и (17)

Точное значение $\mu[HU]$	**-1000**	**-600**	**-100**	**0**	**300**	**500**	**2100**
Не обработанные проекционные данные, погрешность 1%							
Длительность импульса 100 пс	-886	-609	-265	212	-2	134	1456
Длительность импульса 200 пс	-835	-620	-353	306	-152	-49	1190
Длительность импульса 300 пс	-819	-631	-394	-351	-218	-129	450
Экстраполяция по формуле (14), погрешность 1%							
Длительность импульсов 100-200 пс	-1463	-814	60	234	771	1184	2414
Длительность импульсов 100-300 пс	-1644	-914	109	444	954	1453	3305
Длительность импульсов 200-300 пс	-1615	-919	87	314	923	1423	3099
Экстраполяция по формуле (17), погрешность 1%							
Длительность импульсов 100-200 пс	-982	-589	-97	-26	281	496	2005
Длительность импульсов 100-300 пс	-972	-583	-96	-32	278	477	1987
Длительность импульсов 200-300 пс	-933	-564	-92	-34	268	457	1957
Экстраполяция по формуле (17), погрешность 5%							
Длительность импульсов 100-200 пс	-925	-560	-88	-29	288	482	1990
Длительность импульсов 100-300 пс	-973	-589	-114	-47	264	456	1898
Длительность импульсов 200-300 пс	-963	-583	-108	-43	269	464	1820

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый подход к повышению качества изображений, получаемых в импульсной рентгеновской томографии. Метод базируется на установлении функциональной зависимости восстановленных изображений от длительности зондирующих импульсов и проведением экстраполяционной процедуры. Методами математического моделирования показано, что разработанный алгоритм позволяет эффективно подавлять влияние рассеянного излучения и существенно повышать контрастность изображений.

Из приведённых в статье экспериментов может сложиться впечатление, что ранее предложенный метод экстраполяции в пространстве проекционных данных обладает крайне низкой устойчивостью и, как следствие, ограниченной применимостью. Это далеко не так поскольку используемый в работе фантом специально создан для демонстрации подобных проблем разрабатываемых алгоритмов. Если в среде отсутствуют сильно рассеивающие неоднородности типа металлических включений, либо такие включения имеют небольшие пространственные размеры, то применение экстраполяционного подхода для фильтрации рассеяния в пространстве проекционных данных может демонстрировать весьма неплохие результаты [18, 19]

Предложенный в данной работе альтернативный подход позволяет существенно повысить устойчивость метода даже для сред, содержащих сильно рассеивающие неоднородности и при значительном уровне шума в проекционных данных. Помимо этого, алгоритм обладает большей устойчивостью к ошибкам исходных данных, вызванным увеличением длительности зондирующих импульсов.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00378; https://rscf.ru/project/23-21-00378/). Других источников финансирования

проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Withers P. J., Bouman C., Carmignato S., Cnudde V., Grimaldi D., Hagen C. K., Maire E., Manley M., Du Plessis A., Stock S. R.* X-ray computed tomography // Nat. Rev. Methods Primers. 2021. V. 1, N 1. Article 18.
2. *Abhisheka B., Biswas S. K., Purkayastha B., Das D., Escargueil A.* Recent trend in medical imaging modalities and their applications in disease diagnosis: a review // Multimed. Tools. Appl. 2023. V. 83. P. 1–36.
3. *Altaf F., Islam S. M., Akhtar N., Janjua N. K.* Going deep in medical image analysis: concepts, methods, challenges, and future directions // IEEE Access. 2019. N 7. P. 99540–99572.
4. *Kalender W. A.* Computed Tomography: Fundamentals, System Technology, Image Quality, Applications. Erlangen: Publicis, 2011.
5. *Mazurov A. I., Potrakhov N. N.* Effect of Scattered X-Ray Radiation on Imaging Quality and Techniques for Its Suppression // Biomed. Eng. 2015. V. 48. P. 241–245.
6. *Аниконов Д. С.* Единственность определения коэффициента уравнения переноса при специальном типе источника // Доклады АН СССР. 1985. Т. 284, № 5. С. 1033–1037.
7. *Anikonov D. S., Prokhorov I. V., Kovtanyuk A. E.* Investigation of scattering and absorbing media by the methods of X-ray tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N 4. P. 259–282.
8. *Antyufeev V. S., Bondarenko A. N.* X-ray tomography in scattering media // SIAM J. Appl. Math. 1996. V. 56, N 2. P. 573–587.
9. *Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V.* Tomography problem for the polarized-radiation transfer equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2006. V. 14, N 6. P. 609–620.
10. *Prokhorov I. V., Yarovenko I. P., Nazarov V. G.* Optical tomography problems at layered media // Inverse Probl. 2008. V. 24, N 2. Article 025019.
11. *Zhao C., Chen X., Ouyang L., Wang J., Jin M.* Robust moving-blocker scatter correction for cone-beam computed tomography using multiple-view information // PLOS ONE. 2017. V. 12, N 12. Article 0189620.
12. *Altunbas C., Park Y., Yu Z., Gopal A.* A unified scatter rejection and correction method for cone beam computed tomography // Med. Phys. 2021. V. 48, N 3. P. 1211–1225.
13. *Blinov A. B., Blinov N. N.* X-Ray Image Improvement by Filtering of Scattered Radiation // Biomed. Eng. 2014. V. 47. P. 235–238.
14. *Яровенко И. П.* Метод решения задачи томографии, основанный на специфике комптоновского рассеяния // Вычисл. технол. 2012. Т. 17. С. 99–109.
15. *Fetisov G.V.* X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: progress and achievements // Phys.–Usp. 2020. V. 63, N 1. P. 2–32.
16. *Prokhorov I. V., Yarovenko I. P.* Determination of the attenuation coefficient for the nonstationary radiative transfer equation // Comput. Math. Math. Phys. 2021. V. 61, N 12. P. 2088–2101.
17. *Maier J., Sawall S., Knaup M., Kachelrie M.* Deep Scatter Estimation (DSE): Accurate Real-Time Scatter Estimation for X-Ray CT Using a Deep Convolutional Neural Network // J. Nondestr. Eval. 2018. V. 37, N 57. Article 9.
18. *Прохоров И. В., Яровенко И. П.* Повышение качества томографических изображений при облучении среды импульсами различной длительности // Доклады РАН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 505. С. 71–78.
19. *Yarovenko I. P., Prokhorov I. V.* An extrapolation method for improving the quality of tomographic images using multiple short-pulse irradiations // J. Inverse Ill-posed Probl. 2024. V. 32, N 1. P. 57–74.

20. *Natterer F.* The Mathematics of Computerized Tomography. Chichester: Wiley, 1986.

21. *Herman G., Natterer F.* Mathematical Aspects of Computerized Tomography. Oberwolfach: Springer Science & Business Media, 2013.

22. *Yarovenko I. P., Kazantsev I. G* An extrapolation method for improving the linearity of CT-values in X-ray pulsed tomography / Far Eastern Math. J. 2022. V. 22, N 2. P. 269–275.

23. *Choi J., Dong B., Zhang X.* Limited tomography reconstruction via tight frame and simultaneous sinogram extrapolation // J. Comput. Math. 2016. V. 34. P. 575–589.

24. *Gao H., Zhang L., Chen Z., Xing Y., Cheng J.* An Extrapolation Method for Image Reconstruction from a Straight-line Trajectory // IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Rec. 2006. N 4. P. 2304–2308.

25. *Clark D. P., Schwartz F. R., Marin D., Ramirez-Giraldo J. C., Badea C. T.* Deep learning based spectral extrapolation for dual-source, dual-energy x-ray computed tomography // Med. Phys. 2020. V. 47, N 9. P. 4150–4163.

26. *Lozovoy V., Rasskazov G., Ryabtsev A., Dantus M.* Phase-only synthesis of ultrafast stretched square pulses // Opt. Express. 2015. V. 23. Article 27105.

27. *Ершов Ю. И., Шихов С. Б.* Математические основы теории переноса. М.: Атомиздат, 1985.

28. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН СССР. 1961. V. 61. P. 3–158.

29. *Гермогенова Т. А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.

30. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.

31. *Новиков В. М., Шихов С. Б.* Теория параметрического воздействия на перенос нейтронов. М.: Энергоиздат, 1982.

32. *Agoshkov V. I.* Boundary value problems for transport equations. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Basel: Birkhauser, 1998.

33. *Nazarov V. G., Prokhorov I. V., Yarovenko I. P.* Identification of an Unknown Substance by the Methods of Multi-Energy Pulse X-ray Tomography // Mathematics. 2023. V. 11, N 15. Article 3263.

34. *Mah P., Reeves T. E., McDavid W. D.* Deriving Hounsfield units using grey levels in cone beam computed tomography // Dentomaxillofac. Radiol. 2010. V. 39. P. 323–335.

35. *Михайлов Г. А., Медведев И. Н.* Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования. Новосибирск: Омега Принт, 2011.

36. *Osipov S., Chakhlov S,, Zhvyrblia V., Sednev D., Osipov O., Usachev E.* The Nature of Metal Artifacts in X-ray Computed Tomography and Their Reduction by Optimization of Tomography Systems Parameters // Appl. Sci. 2023. V. 13. Article 2666.

37. *Zhang Y., Yu H.* Convolutional Neural Network Based Metal Artifact Reduction in X-Ray Computed Tomography // IEEE Trans. Med. Imaging. 2017. V. 37. P. 1370–1381.

38. *Wang Z., Bovik A., Sheikh H., Simoncelli E.* Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity // IEEE Trans. Image Process. 2004. V. 13. P. 600–612.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.958

EXTRAPOLATION OF TOMOGRAPHIC IMAGES BASED ON DATA OF MULTIPLE PULSED PROBING

© 2024 I. P. Yarovenko[a], P. A. Vornovskikh[b], I. V. Prokhorov[c]

Institute of Applied Mathematics, Far East Branch, Russian Academy of Sciences, Vladivostok, 690041 Russia

E-mails: [a]yarovenko@iam.dvo.ru, [b]vornovskikh_pa@dvfu.ru, [c]prokhorov@iam.dvo.ru

Received 14.01.2024, revised 02.05.2024, accepted 22.05.2024

Abstract. This paper proposes a new approach to improving image quality in pulsed X-ray tomography. The method is based on establishing a functional dependence of the reconstructed images on the duration of the probing pulses and applying an extrapolation procedure. The numerical experiments demonstrated that the developed algorithm effectively suppresses the influence of scattered radiation and significantly increases image contrast. The proposed alternative approach allows substantially increasing the stability of the method even for media containing strong scattering inhomogeneities and with a significant level of noise in the projection data. In addition, the algorithm has greater stability to errors in the source data caused by an increase in the duration of the probing pulses. The numerical experiments confirmed the high efficiency of the extrapolation tomography algorithm for recovering the internal structure of the test object.

Keywords: impulse tomography, nonstationary radiation transfer equation, inverse problem, attenuation coefficient.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.313

REFERENCES

1. P. J. Withers, C. Bouman, S. Carmignato, V. Cnudde, D. Grimaldi, C. K. Hagen, E. Maire, M. Manley, A. Du Plessis, and S. R. Stockm, "X-ray computed tomography," Natl. Rev. Methods Primers **1** (1), 18 (2021).
2. B. Abhisheka, S. K. Biswas, B. Purkayastha, D. Das, and A. Escargueil, "Recent trend in medical imaging modalities and their applications in disease diagnosis: A review," Multimedia Tools. Appl. **83**, 1–36 (2023).
3. F. Altaf, S. M. Islam, N. Akhtar, and N. K. Janjua, "Going deep in medical image analysis: concepts, methods, challenges, and future directions," IEEE Access (7), 99540–99572 (2019).
4. W. A. Kalender, *Computed Tomography: Fundamentals, System Technology, Image Quality, Applications* (Publicis, Erlangen, 2011).
5. A. I. Mazurov and N. N. Potrakhov, "Effect of scattered X-ray radiation on imaging quality and techniques for its suppression," Biomed. Eng. **48**, 241–245 (2015).
6. D. S. Anikonov, "Uniqueness of determining the coefficient of the transfer equation for a special type of source," Dokl. Akad. Nauk SSSR **284** (5), 1033–1037 (1985) [in Russian].
7. D. S. Anikonov, I. V. Prokhorov, and A. E. Kovtanyuk, "Investigation of scattering and absorbing media by the methods of X-ray tomography," J. Inverse Ill-Posed Probl. **1** (4), 259–282 (1993).
8. V. S. Antyufeev and A. N. Bondarenko, "X-ray tomography in scattering media," SIAM J. Appl. Math. **56** (2), 573–587 (1996).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 3, pp. 583–597.

9. A. E. Kovtanyuk and I. V. Prokhorov, "Tomography problem for the polarized-radiation transfer equation," J. Inverse Ill-Posed Probl. **14** (6), 609–620 (2006).
10. I. V. Prokhorov, I. P. Yarovenko, and V. G. Nazarov, "Optical tomography problems at layered media," Inverse Probl. **24** (2), 025019 (2008).
11. C. Zhao, X. Chen, L. Ouyang, J. Wang, and M. Jin, "Robust moving-blocker scatter correction for conebeam computed tomography using multiple-view information," PLOS ONE **12** (12), 0189620 (2017).
12. C. Altunbas, Y. Park, Z. Yu, and A. Gopal, "A unified scatter rejection and correction method for cone beam computed tomography," Med. Phys. **48** (3), 1211–1225 (2021).
13. A. B. Blinov and N. N. Blinov, "The method for solving tomography problem based on the specifics of the Compton scattering," Biomed. Eng. **47**, 235–238 (2014).
14. I. P. Yarovenko, "X-Ray image improvement by filtering of scattered radiation," Vychisl. Tekhnol. **17**, 99–109 (2012) [in Russian].
15. G. V. Fetisov, "X-ray diffraction methods for structural diagnostics of materials: Progress and achievements," Phys.-Usp. **63** (1), 2–32 (2020).
16. I. V. Prokhorov and I. P. Yarovenko, "Determination of the attenuation coefficient for the nonstationary radiative transfer equation," Comput. Math. Math. Phys. **61** (12), 2088–2101 (2021).
17. J. Maier, S. Sawall, M. Knaup, and M. Kachelrie, "Deep Scatter Estimation (DSE): Accurate real-time scatter estimation for X-Ray CT using a deep convolutional neural network," J. Nondestr. Eval. **37** (57), 9 (2018).
18. I. V. Prokhorov and I. P. Yarovenko, "Improving the quality of tomographic images of a medium using irradiation with pulses of different duration," Dokl. Ross. Akad. Nauk Inf. Protsess. Upr. **505**, 71–78 (2022) [Dokl. Math. **106** (1), 272–278 (2022)].
19. I. P. Yarovenko and I. V. Prokhorov, "An extrapolation method for improving the quality of tomographic images using multiple short-pulse irradiations," J. Inverse Ill-Posed Probl. **32** (1), 57–74 (2024).
20. F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography* (Wiley, Chichester, 1986).
21. G. Herman and F. Natterer, *Mathematical Aspects of Computerized Tomography* (Springer Science & Business Media, Oberwolfach, 2013).
22. I. P. Yarovenko and I. G. Kazantsev, "An extrapolation method for improving the linearity of CT-values in X-ray pulsed tomography," Far East. Math. J. **22** (2), 269–275 (2022).
23. J. Choi, B. Dong, and X. Zhang, "Limited tomography reconstruction via tight frame and simultaneous sinogram extrapolation," J. Comput. Math. **34**, 575–589 (2016).
24. H. Gao, L. Zhang, Z. Chen, Y. Xing, and J. Cheng, "An extrapolation method for image reconstruction from a straight-line trajectory," IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Rec. (4), 2304–2308 (2006).
25. D. P. Clark, F. R. Schwartz, D. Marin, J. C. Ramirez-Giraldo, and C. T. Badea, "Deep learning based spectral extrapolation for dual-source, dual-energy X-ray computed tomography," Med. Phys. **47** (9), 4150–4163 (2020).
26. V. Lozovoy, G. Rasskazov, A. Ryabtsev, and M. Dantus, "Phase-only synthesis of ultrafast stretched square pulses," Opt. Express **23**, 27105 (2015).
27. Yu. I. Ershov and S. B. Shikhov, *Mathematical Foundations of Transfer Theory* (Atomizdat, Moscow, 1985) [in Russian].
28. V. S. Vladimirov, "Mathematical problems of single-velocity theory of particle transport," Tr. MIAN SSSR **61**, 3–158 (1961) [in Russian].
29. T. A. Germogenova, *Local Properties of Solutions to the Transport Equation* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
30. C. Cercignani, *Theory and Application of the Boltzmann Equation* (Scottish Academic Press, Edinburgh— London, 1975; Mir, Moscow, 1978).
31. V. M. Novikov and S. B. Shikhov, *Theory of Parametric Influence on Neutron Transport* (Energoizdat, Moscow, 1982) [in Russian].
32. V. I. Agoshkov, *Boundary Value Problems for Transport Equations. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology* (Birkhäuser, Basel, 1998).

33. V. G. Nazarov, I. V. Prokhorov, and I. P. Yarovenko, “Identification of an unknown substance by the methods of multi-energy pulse X-ray tomography,” Mathematics **11** (15), 3263 (2023).

34. P. Mah, T. E. Reeves, and W. D. McDavid, “Deriving Hounsfield units using grey levels in cone beam computed tomography,” Dentomaxillofac. Radiol. **39**, 323–335 (2010).

35. G. A. Mikhailov and I. N. Medvedev, *Optimization of Weight Algorithms of Statistical Modeling* (Omega Print, Novosibirsk, 2011) [in Russian].

36. S. Osipov, S. Chakhlov, V. Zhvyrblia, D. Sednev, O. Osipov, and E. Usachev, “The nature of metal artifacts in X-ray computed tomography and their reduction by optimization of tomography systems parameters,” Appl. Sci. **13**, 2666 (2023).

37. Y. Zhang and H. Yu, “Convolutional neural network based metal artifact reduction in X-ray computed tomography,” IEEE Trans. Med. Imaging **37**, 1370–1381 (2017).

38. Z. Wang, A. Bovik, H. Sheikh, and E. Simoncelli, “Image quality assessment: From error visibility to structural similarity,” IEEE Trans. Image Process. **13**, 600–612 (2004).

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2024. Том 27, № 3

Зав. редакцией Т. А. Звонарева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 14.11.2024 г.
Формат $60 \times 84\,{}^1\!/\!{}_8$. Усл. печ. л. 22,7.
Объём $14,4$ МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия