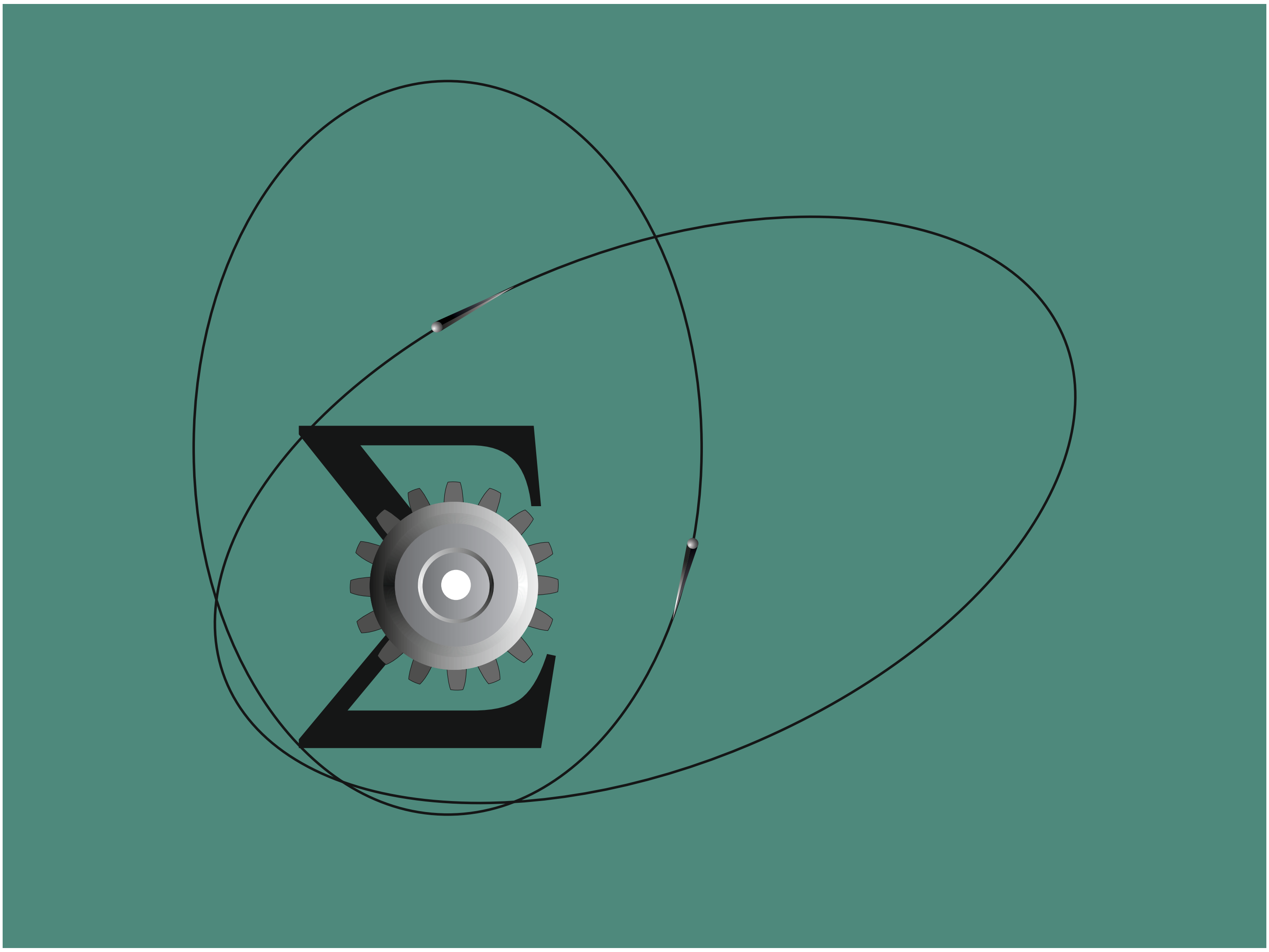
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 27 № 4 2024



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Учредители журнала:
Сибирское отделение РАН
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году | Выходит 4 раза в год

Том 27, № 4(100) | Научный журнал | **Октябрь–декабрь, 2024 г.**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СибЖИМ
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998 4 issues per year

Vol. 27, No. 4(100) Scientific journal **October–December, 2024**

CONTENTS

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:
SibJIM
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS
pr. Akad. Koptyuga 4
Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

УДК 519.6:517.95

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

© 2024 А. А. Афанасьева[a], А. В. Старченко[b]

Томский государственный университет,
просп. Ленина, 36, г. Томск 634050, Россия

E-mails: [a]anna.afanaseva@stud.tsu.ru, [b]starch@math.tsu.ru

Поступила в редакцию 09.06.2024 г.; после доработки 05.11.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

Разработан вычислительный алгоритм решения обратной задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке, представляющей собой обратную коэффициентную задачу для разностной схемы, построенной на неструктурированных сетках для уравнения эллиптического типа с интегро-дифференциальными граничными условиями. Итерационный алгоритм основан на итеративно регуляризированном методе Гаусса—Ньютона, в котором вычисляется обратная матрица от основной матрицы системы линейных уравнений; аналитически находятся производные от основной матрицы, коэффициенты которой линейно зависят от проводимости. Реализация вычислительного алгоритма выполнена для двумерного случая 16-электродной модели круга с одной вставкой. Проведено исследование влияния выбора начального приближения и погрешности входных данных на сходимость итерационного процесса.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, уравнение эллиптического типа с кусочно-постоянными коэффициентами, интегро-дифференциальное граничное условие, метод конечного объёма, неструктурированные сетки, полная электродная модель, реконструкция проводимости, итеративно регуляризованный метод Гаусса—Ньютона.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.401

ВВЕДЕНИЕ

Электроимпедансная томография (ЭИТ) — это метод визуализации, который позволяет восстановить значения электрической проводимости внутри проводящего ток объекта с помощью измерений результирующего напряжения на электродах, расположенных на его границе, вызванных электродными токами известной величины. Сложность ЭИТ в том, что она является некорректной обратной задачей и из-за недостаточно проработанных математических подходов данный метод визуализации демонстрирует лишь скромное качество изображения по сравнению с другими методами [1], являясь, в то же время, одним из самых безопасных.

На практике обратная задача ЭИТ решается разными методами [2]: неитерационными, итерационными, машинного обучения и другими. Среди этих методов в ЭИТ широко применяются методы регуляризации [3–5]. Они улучшают устойчивость получения решения за счёт добавления регуляризирующего слагаемого к целевой функции. Среди итерационных методов решения нелинейных некорректных обратных задач широкое применение получили итеративно регуляризованные методы Гаусса—Ньютона [6–8].

Итеративно регуляризованные методы Гаусса—Ньютона применяются для получения в процессе итераций устойчивого решения нелинейной плохо обусловленной задачи $F(x) = y$, где $F : X \to Y$ — дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор, X, Y — гильбертовы пространства, а входные данные y задаются приближенно y^δ, где $\|y^\delta - y\| \leqslant \delta$. В этом методе итерационная последовательность $\{x_k^\delta\}$ вычисляется из [6–8]

$$x_{k+1}^\delta = x_k^\delta - \left(\alpha_k E + F'(x_k^\delta)F'(x_k^\delta)\right)^{-1}\left[F'(x_k^\delta)(F'(x_k^\delta) - y^\delta) + \alpha_k(x_k^\delta - x_0)\right], \quad k = 0, ..., k^\delta - 1, \quad (1)$$

где α_k — заданная монотонно уменьшающаяся последовательность положительных чисел; $x_0 \in X$; k^δ — индекс остановки итерационного процесса. В [6] были указаны требования к выбору начального приближения x_0 и последовательности α_k, что в итоге позволило доказать сходимость итерационного процесса (1) и его регуляризирующие свойства. В [7] было предложено апостериорное правило выбора значения k^δ. В [8] итерационный процесс (1) был применён к решению обратной задачи ЭИТ в полной электродной постановке, в которой прямые задачи решались с помощью метода Галеркина и использовались синтетические данные. В [8] отмечается, что для итеративно регуляризованного метода Гаусса—Ньютона (1) необходимо проводить дальнейшие исследования для повышения качества реконструкции изображений в условиях зашумлённых данных.

Целью данной работы является построение алгоритма на основе итеративно регуляризуемого метода Гаусса—Ньютона [6–8] для численно решения обратной задачи ЭИТ в полной электродной постановке по реконструкции распределения электрической проводимости в области исследования с помощью консервативного метода конечного объёма на неструктурированных сетках.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается, что исследуемый биологический объект D, через который пропускается слабый электрический ток относительно низкой частоты, находится в воздухе, имеет достаточно гладкую границу Γ и его внутренняя структура характеризуется кусочно-постоянными значениями коэффициента электропроводности σ (рис. 1).

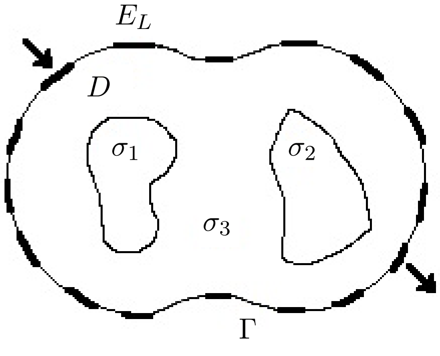


Рис. 1. Модель объекта с приложенными электродами и неоднородностями внутри

На поверхности объекта прикреплены электроды размерами E_l ($l = 1, ..., L$ — количество электродов), через которые можно подавать и принимать электрический ток. Электроды имеют одинаковые размеры. На электродах фиксируется не только сила тока $\{I_l\}$, но и напряжение $\{U_l\}$. Предполагая, что рассматриваемый процесс не изменяется во времени и двумерен, величина магнитного поля невелика, внутренние источники тока отсутствуют, из уравнений Максвелла и закона Ома в стационарных проводниках можно получить уравнение эллиптического типа для электрического потенциала u внутри области D в следующем виде [1, 9–11]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \quad (x,y) \in D. \quad (2)$$

Здесь $\sigma(x, y)$ — распределение электрической проводимости внутри D.

На границе объекта Γ_{air}, граничащей с воздухом, плотность электрического тока равна нулю, и из закона Ома получаются граничные условия Неймана для электрического потенциала

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_{air}} = 0. \tag{3}$$

Здесь n — внешняя нормаль к границе области D.

На границе области Γ_l, соприкасающейся с поверхностью l-го электрода, в данной работе используется наиболее отвечающая реальным условиям, так называемая полная электродная модель [1, 8–10, 12–14]

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = U_l, (x, y) \in \Gamma_l, \quad \int\limits_{\Gamma_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = I_l, \quad l = 1, ..., L. \tag{4}$$

Эта параметризация взаимодействия токопроводящего объекта с электродами учитывает качество крепления электрода длиной E_l к поверхности за счёт различных значений электрического сопротивления z_l, $l = 1, ..., L$. Заметим, что в случае, когда напряжения $\{U_l\}$ на электродах неизвестны, а известны значения силы электрического тока $\{I_l\}$, можно, скомбинировав граничные условия полной электродной модели (4), получить интегро-дифференциальное граничное условие вида

$$u + z_l \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{E_l} \left(\int\limits_{\Gamma_l} u\, ds + z_l I_l \right), \quad l = 1, ..., L. \tag{5}$$

Из-за отсутствия источников тока внутри объекта сумма $\sum\limits_{l=1}^{L} I_l$ должна быть равна нулю по закону сохранения заряда [1, 8–10, 12–14].

Если решается прямая задача ЭИТ, её математическая постановка при известных значениях распределения электрической проводимости $\sigma(x, y)$, электрического сопротивления электродов $\{z_l\}$ и электрического тока на электродах $\{I_l\}$ включает дифференциальное уравнение (2) и граничные условия к нему (3) и (5). Искомой величиной является распределение электрического потенциала $u(x, y)$, по которой из

$$U_l = \frac{1}{E_l} \left(\int\limits_{\Gamma_l} u\, ds + z_l I_l \right), \quad l = 1, ..., L$$

можно найти напряжения на электродах.

В работе [13] доказано, что такая математическая постановка (2)–(4) имеет единственное решение при выполнении условия

$$\sum_{l=1}^{L} U_l = 0.$$

При решении обратной задачи ЭИТ требуется при известных наборах пропускания электрического тока через электроды (при, так называемых, токовых конфигурациях $\{I_l\}$) и измерениях напряжения на электродах $\{U_l\}$ получить распределение электрической проводимости $\sigma(x, y)$ внутри области $\bar{D}$. Если значения электрического сопротивления электродов $\{z_l\}$ неизвестны, то они также подлежат определению при решении обратной задачи [1, 12]. Таким образом, постановка обратной задачи ЭИТ предполагает, что известны значения напряжения на электродах $\{\widetilde{U}_l^\mu\}$, $l = 1, ..., L$, $\mu = 1, ..., M$ при M рассмотренных токовых конфигурациях $\{I_l^\mu\}$, $l = 1, ..., L$, $\mu = 1, ..., M$. Причём для каждого μ выполняются следующие условия:

$$\sum_{l=1}^{L} I_l^\mu = 0, \quad \sum_{l=1}^{L} \widetilde{U}_l^\mu = 0.$$

Предположим также, что известными являются и значения электрического сопротивления электродов $\{z_l\}$. Тогда искомое распределение электрической проводимости $\sigma_{min}(x, y)$ внутри области D должно удовлетворять минимуму функции

$$\Phi(\sigma_{min}) = \arg\min_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{M} (\vec{r}^{\mu}(\sigma), \vec{r}^{\mu}(\sigma)) \right), \quad \vec{r}^{\mu}(\sigma) = \vec{U}^{\mu}(\sigma) - \vec{\widetilde{U}}^{\mu}, \quad \mu = 1, ..., M. \qquad (6)$$

В (6) $\vec{U}^\mu(\sigma)$ — полученные значения напряжения на электродах в результате решения μ-й прямой задачи (2)–(5) при некотором распределении $\sigma(x, y)$ и известной токовой конфигурации $\vec{I}^\mu = (I_1^\mu, I_2^\mu, ..., I_L^\mu)^T$.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ЭИТ (2)–(5)

Для решения прямой задачи ЭИТ (2)–(5) будет использоваться численный метод, опирающийся на неструктурированные сетки и метод конечного объёма, в результате применения которых получается консервативная разностная схема в виде системы линейных уравнений с разреженной несимметричной матрицей без диагонального преобладания. Выбор неструктурированной сетки обусловлен сложной формой рассматриваемой замкнутой области $\bar{D}$ в общем случае (рис. 1). Триангуляция области исследования выполнялась с использованием пакета Gambit [15]. В качестве конечных объёмов рассматривались барицентрические ячейки [16, 17]. Использование барицентрических ячеек в качестве конечных объёмов не требует применения условий сопряжения на границе конечного объёма, поскольку она проходит по треугольникам $P_0P_mP_{m+1}$, внутри каждого из которых коэффициент электрической проводимости принимается постоянным (рис. 2).

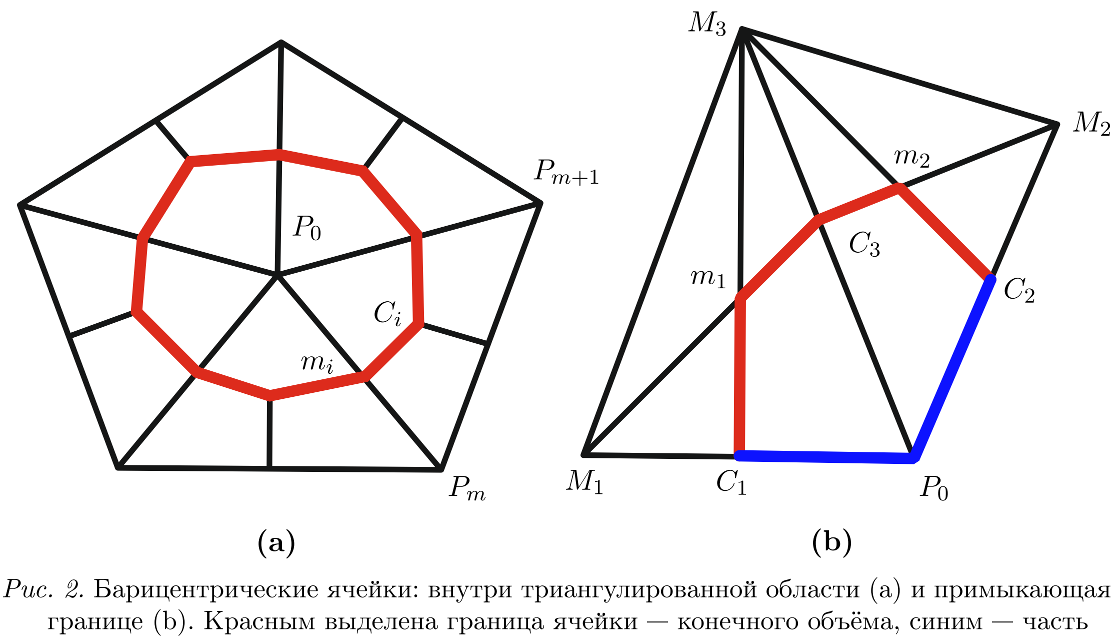


Рис. 2. Барицентрические ячейки: внутри триангулированной области (a) и примыкающая к границе (b). Красным выделена граница ячейки — конечного объёма, синим — часть границы

Искомые значения электрического потенциала $u(x, y)$ ассоциируются с вершинами треугольников, а значения электрической проводимости — с номером треугольника. В результате интегрирования по каждому конечному объёму, включая и приграничные конечные объёмы, получается система линейных уравнений, коэффициенты матрицы которой представляют собой результат геометрических вычислений, умноженный на значение сеточной функции электрической проводимости для внутренних узлов сетки. При вычислении интегралов в (4) или (5) использовалась формула трапеций. В итоге для внутренних узлов неструктурированной сетки разностная схема для нахождения сеточных значений u_h будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{M_0} \frac{\sigma_m}{4S_m}[u_{P_0}\left((y_{P_m} - y_{P_{m+1}})^2 + (x_{P_{m+1}} - x_{P_m})^2\right) +$$
$$+u_{P_m}\left((y_{P_{m+1}} - y_{P_0})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_0} - x_{P_{m+1}})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m})\right) +$$
$$+u_{P_{m+1}}\left((y_{P_0} - y_{P_m})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_m} - x_{P_0})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m})\right)] = 0, \quad P_0 \in \omega_h.$$

Здесь M_0 — количество треугольников в барицентрической ячейке с общей вершиной P_0. Суммирование выполняется по всем треугольным элементам сетки с общей вершиной P_0, находящейся внутри области $\bar{D}$, причём, когда значение индекса $m+1$ становится больше M_0, то нужно его взять равным 1 (рис. 2).

Для граничных узлов сетки

$$\sum_{m=1}^{M_0} \frac{\sigma_m}{4S_m}[u_{P_0}\left((y_{P_m} - y_{P_{m+1}})^2 + (x_{P_{m+1}} - x_{P_m})^2\right) +$$
$$+u_{P_m}\left((y_{P_{m+1}} - y_{P_0})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_0} - x_{P_{m+1}})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m})\right) +$$
$$+u_{P_{m+1}}\left((y_{P_0} - y_{P_m})(y_{P_m} - y_{P_{m+1}}) + (x_{P_m} - x_{P_0})(x_{P_{m+1}} - x_{P_m})\right)]+$$
$$+\frac{j_1|C_1P_0|}{z_l}\left(\frac{1}{2E_l}\sum_{k=1}^{K-1}(u_{N_k} + u_{N_{k+1}})|N_kN_{k+1}| + \frac{z_lI_l}{E_l} - \frac{u_{M_1} + 3u_{P_0}}{4}\right) +$$
$$+\frac{j_2|P_0C_2|}{z_l}\left(\frac{1}{2E_l}\sum_{k=1}^{K-1}(u_{N_k} + u_{N_{k+1}})|N_kN_{k+1}| + \frac{z_lI_l}{E_l} - \frac{3u_{P_0} + u_{M_2}}{4}\right) = 0, \quad P_0 \in \gamma_h.$$

Здесь $j_1 = 1$, если $M_1P_0 \in \Gamma_l$, иначе $j_1 = 0$; $j_2 = 1$, если $P_0M_2 \in \Gamma_l$, иначе $j_2 = 0$; K — количество узлов сетки на электроде с номером l (рис. 2).

После аппроксимации дифференциальной задачи (2), (3), (5) получается разностная схема вида

$$A_h(\sigma_h)u_h = b_h(\vec{I}). \tag{7}$$

Здесь $A_h(\sigma_h)$ — матрица коэффициентов разностной схемы, $A_h \in \mathbb{R}^{N\times N}$, коэффициенты матрицы линейно зависят от электрической проводимости, N — количество узлов неструктурированной сетки; $b_h(\vec{I})$ — правая часть разностной схемы, зависящая от выбранной токовой конфигурации $\vec{I} = (I_1, I_2, ..., I_L)^T$, $\sum\limits_{l=1}^{L} I_l = 0$; $u_h = (u_1, u_2, ..., u_N)^T$ — численное решение (7) — потенциал электрического тока.

При решении прямой задачи ЭИТ при известных токовых конфигурациях $\vec{I}$ искомыми величинами наряду с потенциалом электрического тока являются значения напряжения на внешней поверхности электродов, которые с учётом полной электродной модели, определяются из дискретного аналога следующего условия: $U_l = \frac{1}{E_l}\int\limits_{E_l} u\, ds + \frac{z_lI_l}{E_l}$, $l = 1, .., L$. Эти условия при дискретизации можно переписать в виде: $\vec{U} = Pu_h + \vec{d}$, где компоненты вектора $\vec{d}$ имеют вид: $d_l = \frac{z_l I_l}{E_l}$, а P — это матрица размером $L \times N$, в которой ненулевые элементы суть коэффициенты квадратурной формулы трапеций. В конце концов зависимость напряжения на электродах от электрической проводимости можно представить как

$$\vec{U}(\sigma_h) = Pu_h(\sigma_h) + \vec{d}.$$

Заметим, что среди уравнений или ко всем уравнениям системы (7) должно быть добавлено условие: $0 = \sum_l P_l u_h + \sum_l d_l$ обеспечивающее единственное решение прямой задачи [13]. Обозначим модифицированную таким образом систему (7) как

$$B_h(\sigma_h)u_h = c_h(\vec{I}).$$

И тогда

$$\vec{U}(\sigma_h) = P[B_h(\sigma_h)]^{-1}c_h(\vec{I}) + \vec{d}. \tag{8}$$

Численное решение разностной схемы выполняется либо прямым методом Гаусса с частичным выбором главного элемента или итерационным методом бисопряженных градиентов BiCGStab Вандерворста. Решения прямой задачи ЭИТ, получаемые с помощью этих двух методов, совпадают с высокой точностью ($\sim 10^{-14}$) при использовании в расчётах на компьютере вещественного типа с двойной точностью. Оценённый по правилу Рунге из численных решений прямых задач на сетках ω_h, $\omega_{h/2}$ (получена путём разбиения каждого треугольника сетки ω_h на 4 треугольника путём добавления в вершины середин сторон треугольника сетки ω_h) и $\omega_{h/4}$ (получена путём разбиения каждого треугольника сетки $\omega_{h/2}$ на 4 треугольника путём добавления в вершины середин сторон треугольника сетки $\omega_{h/2}$) порядок аппроксимации разностной схемы близок ко второму, трудность определения устойчивости разностной схемы связана с интегро-дифференциальным граничным условием. Более подробная информация про численный метод решения прямой задачи ЭИТ опубликована в [18].

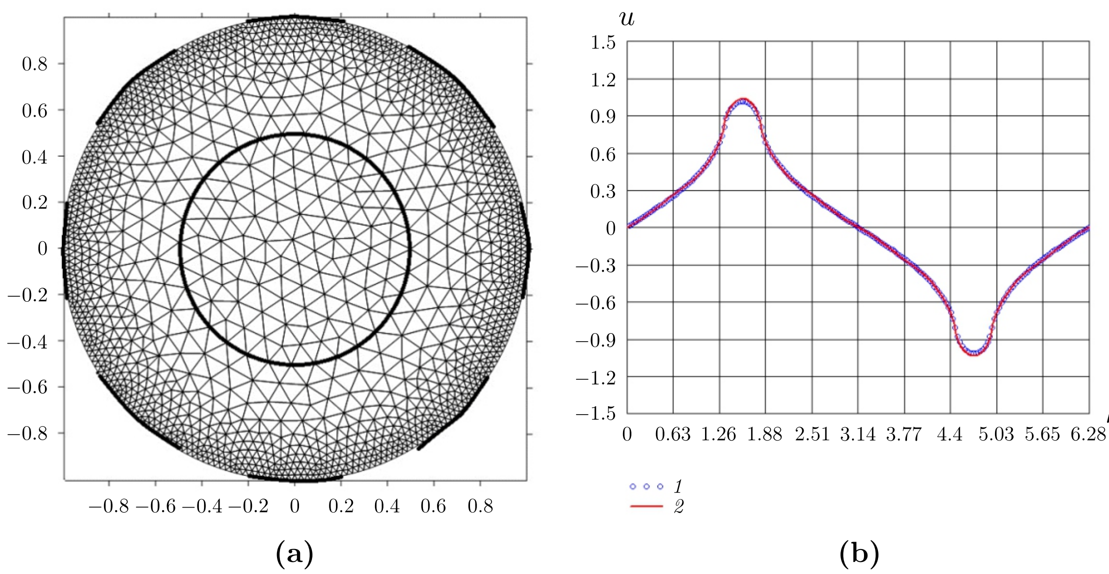


Рис. 3. Неструктурированная сетка из 1547 узлов для круговой области ($\sigma = 1.0$) с концентрической вставкой с $\sigma = 0.66$ и 8 электродной модели (a) и сравнение рассчитанных численно (*1*) и с использованием приближенного аналитического (*2*) решения [18, 19] значений электрического потенциала на границе области (b)

Для проверки численного метода решения прямой задачи ЭИТ была взята простая модель, для которой известно приближенное аналитическое решение в виде рядов Фурье [19] и сопоставлено с численным решением. В качестве тестовой задачи была рассмотрена модель круга радиусом единица, на поверхности круга располагалось 8 электродов, а внутри — круглая вставка радиусом 0.5 м и имеющая электрическую проводимость 0.66 См/м. Электроды, расположенные сверху и снизу, служили токоподающими и токопринимающми электродами ($\phi = \pi/2$; $\phi = 3\pi/2$). Рассматривалась сила тока 1 мА. Для рассчитанных численно и с помощью приближенного аналитического решения значений электрического потенциала на границе области среднеквадратическая ошибка RMSE составила 0.0065. Полученная ошибка составляет менее 1% и говорит о хорошей точности численного решения при относительно небольшом количестве используемых узлов неструктурированной сетки (рис. 3).

3. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЭИТ

В данной работе при решении обратной задачи ЭИТ применяется один из широко известных методов решения нелинейных плохообусловленных задач — регуляризация А. Н. Тихонова [3–6]. Следуя её основной идее, добавим в (6) так называемый регуляризирующий член, управляя которым можно устойчиво получить приближенное распределение проводимости внутри области, близкое к истинному. В таком случае

$$\Phi(\sigma_{min}) = \arg\min_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{M} \|\vec{U}^{\mu}(\sigma) - \vec{\tilde{U}}^{\mu}\|_2^2 + \frac{\alpha}{2}\|\sigma - \sigma_0\|_2^2 \right). \tag{9}$$

В (9) $\|\cdot\|_2$ — сферическая норма; σ_0 — некоторое известное распределение электрической проводимости. Рассмотрим итерационный процесс последовательной минимизации целевой функции (9), следуя [6–8]:

$$\sigma_h^{(k+1)} = \sigma_h^{(k)} - (H(\sigma_h^{(k)}) + \alpha_{k+1}E)^{-1}\nabla\Phi(\sigma_h^{(k)}). \tag{10}$$

Здесь $\sigma_h^{(k)} = (\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, ..., \sigma_{NT}^{(k)})^T$ — кусочно-постоянное распределение электрической проводимости в $\bar{D}$ на k-й итерации; NT — количество треугольников;

$$\nabla\Phi(\sigma_h) = \left(\frac{\partial\Phi(\sigma_h)}{\partial\sigma_1}, \frac{\partial\Phi(\sigma_h)}{\partial\sigma_2}, ..., \frac{\partial\Phi(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}} \right)^T;$$

$$\frac{\partial\Phi(\sigma_h)}{\partial\sigma_j} = \sum_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_j}, \vec{r}^{\mu}(\sigma_h) \right) + \alpha_{k+1}(\sigma_h - (\sigma_0)_h), \quad j = 1, ..., NT;$$

E — единичная матрица размером $NT \times NT$; $H(\sigma_h)$ — приближенное представление матрицы Гессе:

$$H(\sigma_h) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_1}, \frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_1} \right) & \cdots & \sum\limits_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_1}, \frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}}, \frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_1} \right) & \cdots & \sum\limits_{\mu=1}^{M} \left(\frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}}, \frac{\partial\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)}{\partial\sigma_{NT}} \right) \end{bmatrix};$$

$$\alpha_k > \alpha_{k+1} > 0, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0 \ [6, 7].$$

При вычислении производных от величин напряжений на электродах $\vec{U}^{\mu}(\sigma_h)$ воспользуемся следующим приёмом [17].

Дифференцируя (8), получим

$$\frac{\partial\vec{U}(\sigma_h)}{\partial\sigma_j} = P\frac{\partial[B_h(\sigma_h)]^{-1}}{\partial\sigma_j}c_h(\vec{I}) = P\frac{\partial[B_h(\sigma_h)]^{-1}}{\partial\sigma_j}B_h(\sigma_h)u_h(\sigma_h), \quad j = 1, .., NT.$$

Пользуясь тождеством $[B_h(\sigma_h)]^{-1}B_h(\sigma_h) = E$, получим окончательную формулу

$$\frac{\partial \vec{U}(\sigma_h)}{\partial \sigma_j} = P\frac{\partial [B_h(\sigma_h)]^{-1}}{\partial \sigma_j}c_h(\vec{I}) = -P[B_h(\sigma_h)]^{-1}\frac{\partial B_h(\sigma_h)}{\partial \sigma_j}u_h(\sigma_h), \quad j = 1, ..., NT. \tag{11}$$

В итоге итерационный алгоритм решения обратной задачи ЭИТ будет состоять из следующих этапов:

0. Задание начального распределения электрической проводимости $\sigma_h^{(0)}, (\sigma_0)_h$, $\alpha_0 = Const > 0$, $k = 0$, расчёт матрицы P;
1. нахождение обратной матрицы для основной матрицы системы линейных уравнений разностной схемы $B_h(\sigma_h^{(k)})$;
2. аналитическое вычисление производных от основной матрицы $\frac{\partial B_h(\sigma_h)}{\partial \sigma_j}$;
3. численное решение набора прямых задач ЭИТ для различных токовых конфигураций активных электродов: $u_h^\mu(\sigma_h^{(k)}) = [B_h(\sigma_h^{(k)})]^{-1}\vec{c_h}(\vec{I^\mu})$, $\mu = 1, ..., M$;
4. вычисление напряжений на электродах по формуле (8) и производных по формуле (11);
5. расчёт параметра $\alpha_{k+1} = \alpha_k/2$, вычисление $\nabla\Phi(\sigma_h^{(k)})$ и H;
6. обращение матрицы $H + \alpha_{k+1}E$ методом Холесского;
7. уточнение электрической проводимости $\sigma_h^{(k+1)}$ с помощью (10).

Если условия завершения глобального итерационного процесса не выполнены, то $k = k+1$ и перейти на п. 1.

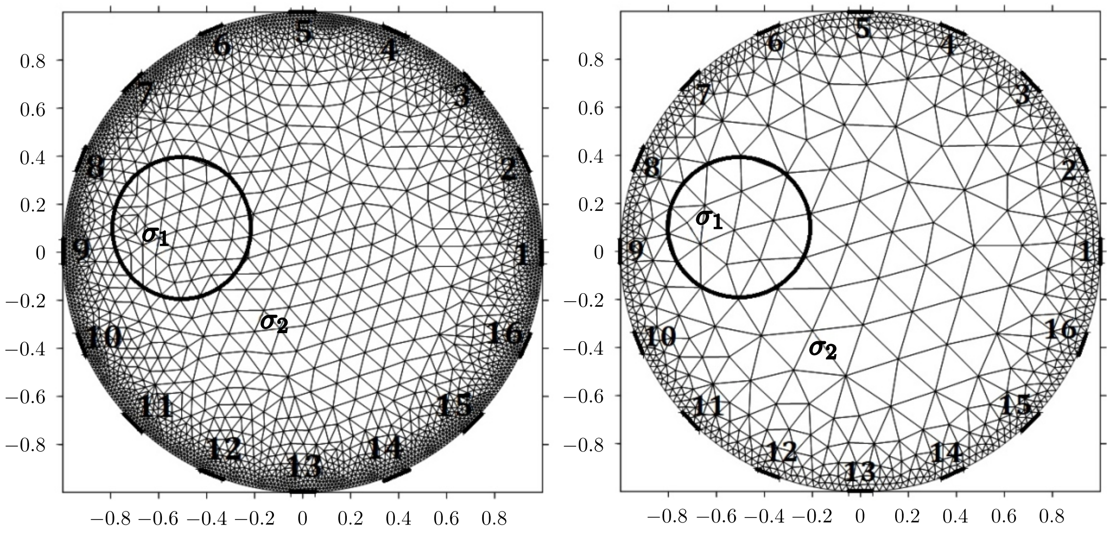
4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Рассмотрим применение разработанного итерационного алгоритма решения обратной задачи ЭИТ на следующем примере. Пусть исследуемый объект, для которого нужно найти значения электрической проводимости, имеет форму круга единичного радиуса и к нему на границе прикреплены шестнадцать электродов, значения сопротивления которых известны: $z_l = 1.0$ Ом · м, $l = 1, \ldots, L$. Внутри области исследования размещена одна круговая вставка (рис. 4). Центр вставки — $(-0.5; 0.1)$, её радиус $\rho_1 = 0.3$ м. Центры электродов шириной 0.1 м расположены при $\phi_l = 2\pi/L \cdot (l-1)$, $l = 1, ..., L$.

Для получения «измеренных» значений напряжений на электродах рассматривалось $M = L(L-1)/2 = 120$ [14] вариантов парного подключения электродов (один электрод рассматривался как токоподающий, другой — токопринимающий). Т. е. всего рассматривалось для решения обратных задач $120 \cdot 16 = 1920$ измерений. Решения M прямых задач ЭИТ для получения синтетических данных проводились на сетке с 3057 вершинами и 5696 треугольниками (рис. 4(a)) при следующих значениях электрической проводимости: $\sigma_1 = 0.5$ См/м; $\sigma_2 = 1.0$ См/м. Сила тока равнялась ± 1 мА Решение обратной задачи по этим синтетическим данным выполнялось на сетке с 1424 треугольниками (рис. 4(b)).

При решении обратной задачи ЭИТ по описанной выше итерационной процедуре рассматривались два варианта задания начального распределения электрической проводимости внутри области:

- Вариант 1: $\sigma_1 = 1.0$; $\sigma_2 = 1.0$; $\sigma_0 = 1.0$; $\alpha_0 = 1.0$ (использование фонового значения σ_2 при задании начальных значений проводимости).



(a) **(b)**

Рис. 4. (a) — расчётная сетка для решения прямой задачи для получения синтетических данных, (b) — расчётная сетка для решения обратной задачи

- Вариант 2: $\sigma_1 = 0.5$; $\sigma_2 = 1.0$; $\sigma_0 = 0.5$ в области 1 и 1.0 в области 2; $\alpha_0 = 1.0$ (идеальный вариант).

Также был рассмотрен вариант с другим начальным значением параметра регуляризации:

- Вариант 3: $\sigma_1 = 1.0$; $\sigma_2 = 1.0$; $\sigma_0 = 1.0$; $\alpha_0 = 0.1$ (по сравнению с вариантом 1 уменьшено начальное значение параметра регуляризации).

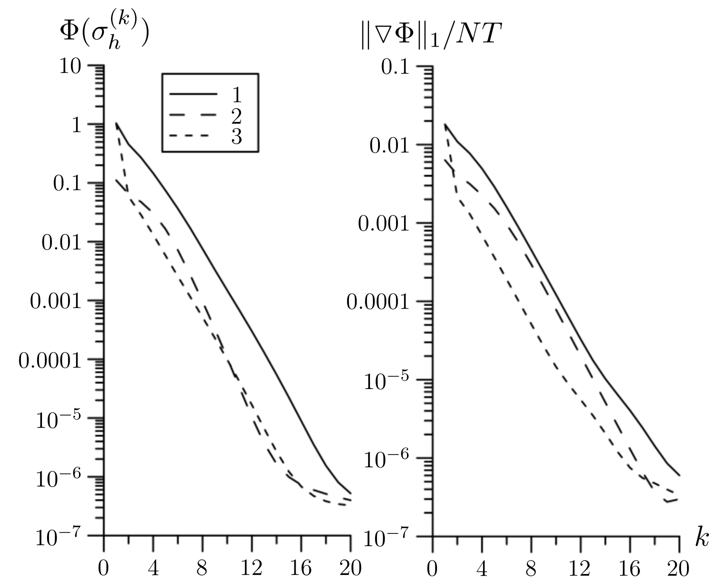
На рис. 5(a) приведены графики изменения значений функции $\Phi(\sigma_h^{(k)})$ (6) и l_1-нормы её градиента $\|\nabla\Phi\|_1/NT$ от номера итерации для различных вариантов задания начальных приближений электрической проводимости и начального значения параметра регуляризации. Из рисунка видно, что с увеличением номера итерации для всех рассмотренных вариантов наблюдается монотонная сходимость итерационного процесса. Причём, чем дальше начальное распределение электрической проводимости находится от искомого, тем большего количества итераций требуется для получения минимума целевой функции с наперёд заданной точностью. Кроме того, результаты расчётов показывают, что важную роль в ускорении сходимости итерационного процесса играет выбор начального значения регуляризационного параметра α_0.

Для оценки качества реконструкции распределения проводимости внутри области исследования (рис. 5(b)) рассчитывались значения среднеквадратичной ошибки

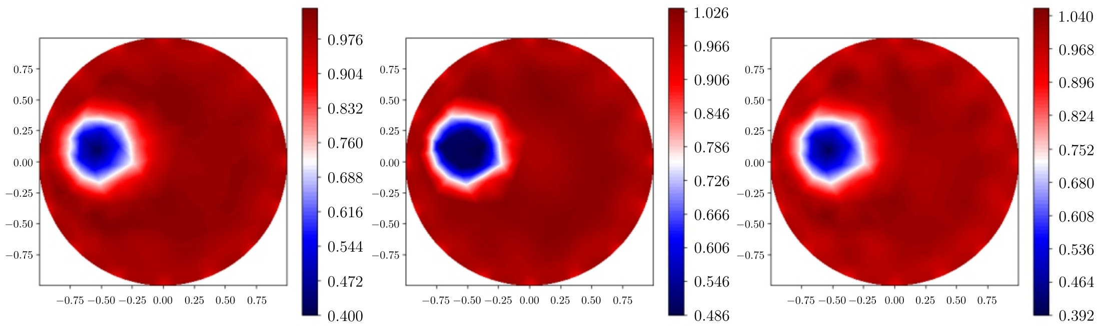
$$\mathrm{RMSE} = \left[\frac{1}{NT}\sum_{i=1}^{NT}(\sigma_i - (\sigma_{exact})_i)^2\right]^{1/2}.$$

Для рассмотренных вариантов получены следующие значения RMSE = 0.040 (вариант 1), 0.029 (вариант 2), 0.041 (вариант 3). Эти значения позволяют сделать вывод о небольшом влиянии выбранных начальных условий итерационного процесса на результат реконструкции.

Также для рассматриваемого случая решения обратной задачи ЭИТ (рис. 4(b)) было проведено исследование влияние величины «шума» в измеренных значениях напряжения на электродах (в синтетических данных значения напряжения на электродах по абсолютной величине менялось от 11.5 до 0.0002 В) на качество определения значений электрической проводимости. Сравнивались результаты решения обратной задачи ЭИТ для следующих входных данных, полученных из численного решения M прямых задач:



(a)



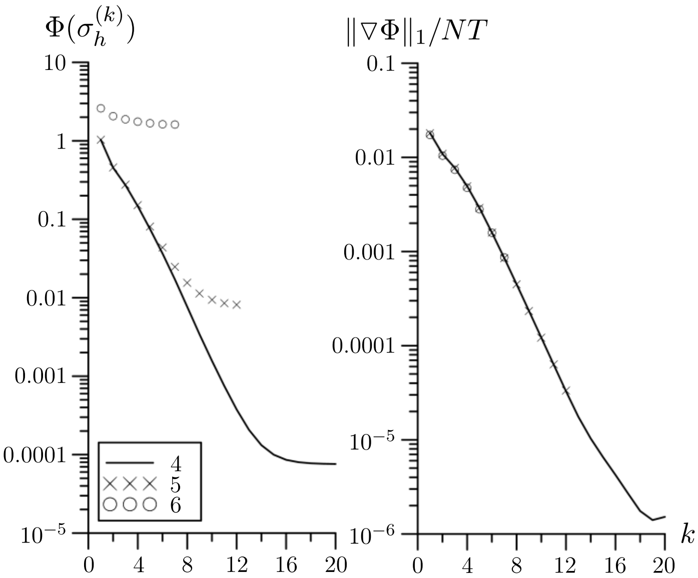
(b)

Рис. 5. (a) — сходимость итерационного процесса в зависимости от выбора начального приближения (k — итерации), (b) — результаты реконструкции распределения электрической проводимости для вариантов 1–3

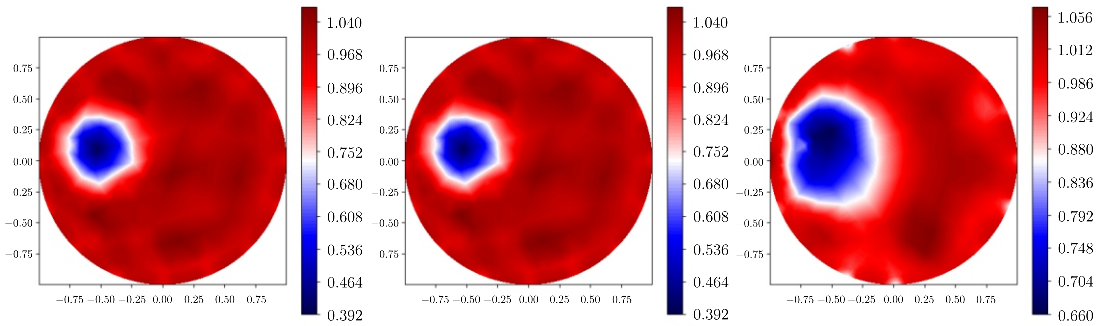
- Вариант 4: Округлённые до тысячных значения $\tilde{\vec{U}}^\mu$, $\mu = 1, ..., M$.
- Вариант 5: Округлённые до сотых значения $\tilde{\vec{U}}^\mu$, $\mu = 1, ..., M$.
- Вариант 6: К невозмущённым значениям $\tilde{\vec{U}}^\mu$, $\mu = 1, ..., M$ добавлен 1% «шума» (с помощью псевдослучайных чисел с нормально распределённым отклонением с нулевым средним значением и единичной дисперсией).

Итерационный процесс решения обратной задачи ЭИТ заканчивался в случае, когда число итераций становилось больше 20, либо, когда итерационный процесс для «зашумлённых» данных начинал расходиться — увеличивались значения целевой функции и нормы её градиента. Из рис. 6(a) видно, что варианты слабого возмущения синтетических измерений (варианты 4 и 5) практически не оказывают заметного влияния на ход итерационных вычислений и приводят к близким к искомым значениям электрической проводимости (рис. 6(b)). Получены значения RMSE = 0.043 (вариант 4), 0.045 (вариант 5), 0.053 (вариант 6).

Эти результаты подтверждают выводы, полученные в работе [10], о том что большую информацию, необходимую для успешного решения обратной задачи ЭИТ, несут измерения



(a)



(b)

Рис. 6. (a) — сходимость итерационного процесса с использованием входных данных с погрешностью (k — итерации), (b) — результаты реконструкции распределения электрической проводимости для вариантов 4–6

на электродах, наиболее близких к расположенным внутри области реконструкции неоднородностям, или на активных (токоподающих и токопринимающих) электродах, расположенных оппозитно искомым артефактам. Напряжения на электродах, более удалённых от неоднородностей или основного пути прохождения электрического тока, невелики, и они дают малый вклад в общее влияние измерений на процесс реконструкции внутренней структуры объекта. Для варианта 6, когда относительная величина «шума» была одного уровня для значений напряжений всех электродов (1% «шума») независимо от их величины, получено наименее качественное воспроизведение искомых значений электрической проводимости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для восстановления распределения электрической проводимости внутри исследуемого объекта разработан итерационный метод решения обратной задачи электроимпедансной томографии, который опирается на итеративно регуляризированный метод Гаусса—Ньютона, в котором вычисляется обратная матрица от основной матрицы системы линейных уравнений; аналитически находятся производные от основной матрицы, коэффициенты которой линейно зависят от проводимости.

Итерационный метод реализован численно для двумерного случая и протестирован с помощью синтетических данных на модели круга с 16 электродами и одной неконцентрической круговой вставкой, имеющей отличающуюся электрическую проводимость. Исследовано влияние выбора начального приближения и неустранимой погрешности входных данных на сходимость итерационного процесса и точность определения значений электрической проводимости внутри области решения. Результаты расчётов показали, что среднеквадратичная ошибка реконструкции электрической проводимости для рассмотренных в работе условий не превосходит 6%.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашения 075-02-2024-1437 и 075-02-2025-1728/2). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Borcea L.* Electric Impedance Tomography. Topical Review // Inverse Probl. 2002. V. 18. P. R99–R136.
2. *Hao Y., Liu H., Liu Z., Wang Z., Jia J.* High-resolution conductivity reconstruction by electrical impedance tomography using structure-aware hybrid-fusion learning // Comput. Methods Programs Biomed. 2024. V. 243. Article 107861; DOI: 10.1016/j.cmpb.2023.107861
3. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
4. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
5. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
6. *Бакушинский А. Б.* К проблеме сходимости интеративно-регуляризованного метода Гаусса—Ньютона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32, № 9. С. 1503–1509.
7. *Qi-Nian J.* On the Iteratively Regularized Gauss-Newton Method for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems // Math. Comp. 2000. V. 69, N 232. P. 1603–1623; DOI: 10.1090/S0025-5718-00-01199-6
8. *Ahmad S., Strauss T., Kupis S., Khan T.* Comparison of statistical inversion with iteratively regularized Gauss Newton method for image reconstruction in electrical impedance tomography // Appl. Math. Comput. 2019. V. 358. P. 436–448; DOI: 10.1016/j.amc.2019.03.063
9. *Gehre M., Kluth T., Lipponen A., Jin B., Seppanen A., Kaipio J. P., Maass P.* Sparsity reconstruction in electrical impedance tomography: An experimental evaluation // J. Comput. Appl. Math. 2012. V. 236, N 8. P. 2126–2136; DOI: 10.1016/j.cam.2011.09.035
10. *Darbas M., Heleine J., Mendoza R., Velasco A. C.* Sensitivity analysis of the complete electrode model for electrical impedance tomography // AIMS Mathematics. 2021. V. 6, N 7. P. 7333–7366; DOI: 10.3934/math.2021431
11. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 1. 5-е изд., испр. М.: Наука, 1994.
12. *Gehre M., Jin B.* Expectation Propagation for Nonlinear Inverse Problems — with an Application to Electrical Impedance Tomography // Numer. Anal. 2013. P. 1–35; DOI: 10.1016/j.jcp.2013.12.010
13. *Somersalo E., Cheney M., Isaacson D.* Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography // SIAM J. Appl. Math. 1992. V. 52. P. 1023–1040; DOI: 10.1137/0152060
14. *Cheney M., Isaacson D., Newell J. C.* Electrical Impedance Tomography // SIAM Review. 1999. V. 41, N 1. P. 85–101.
15. *Батурин О. В., Батурин Н. В., Матвеев В. Н.* Построение расчётных моделей в препроцессоре Gambit универсального программного комплекса Fluent. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2010.

16. *Шерина Е. С., Старченко А. В.* Разностные схемы на основе метода конечных объёмов для задачи электроимпедансной томографии // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2014. № 3(29). С. 25–38.

17. *Li J., Yuan Y.* Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography // Appl. Math. Model. 2009. V. 3. N 5. P. 2175–2186; DOI: 10.1016/j.apm.2008.05.025

18. *Афанасьева А. А., Старченко А. В.* Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в полной электродной постановке // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2022. № 78. С. 5–21; DOI: 10.17223/19988621/78/1

19. *Старченко А. В., Седнев М. А., Панько С. В.* Приближенное аналитическое решение прямой задачи электроимпедансной томографии в неоднородном круге с учётом сопротивления электродов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. № 74. С. 19–29; DOI: 10.17223/19988621/74/3

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.6:517.95

NUMERICAL SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY USING THE ITERATION METHOD

© 2024 **A. A. Afanasyeva**[a], **A. V. Starchenko**[b]

Tomsk State University, Tomsk, 634050 Russia

E-mails: [a]anna.afanaseva@stud.tsu.ru, [b]starch@math.tsu.ru

Received 09.06.2024, revised 05.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. A computational algorithm has been developed for solving the inverse problem of electrical impedance tomography in a complete electrode model, which is an inverse coefficient problem for a difference scheme built on unstructured grids for an elliptic equation with integro-differential boundary conditions. The iteration algorithm is based on the iterative regularized Gauss—Newton method in which the inverse matrix of the main matrix of the system of linear equations is calculated; the derivatives of the main matrix whose coefficients depend linearly on conductivity are found analytically. The implementation of the computational algorithm is performed for the two-dimensional case of a 16-electrode disk model with one insert. The influence of the choice of the initial approximation and the error in the input data on the convergence of the iteration process has been studied.

Keywords: coefficient inverse problem, elliptic equation with piecewise constant coefficients, integro-differential boundary condition, finite volume method, unstructured grid, complete electrode model, conductivity reconstruction, iteratively regularized Gauss—Newton method.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.401

REFERENCES

1. L. Borcea, "Electric Impedance Tomography. Topical Review," Inverse Probl. **18**, R99–R136 (2002).
2. Y. Hao, H. Liu, Z. Liu, Z. Wang, and J. Jia, "High-resolution conductivity reconstruction by electrical impedance tomography using structure-aware hybrid-fusion learning," Comput. Methods Programs Biomed. **243**, 107861 (2024). https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2023.107861
3. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems* (Nauka, Moscow, 1986) [in Russian].
4. M. M. Lavrent'ev, V. G. Romanov, and S. P. Shishatskii, *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].
5. S. I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems* (Sib. Nauchn. Izd., Novosibirsk, 2009) [in Russian].
6. A. B. Bakushinskii, "To the problem of convergence of the iterative-regularized Gauss—Newton method," Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **32** (9), 1503–1509 (1992) [Comput. Math. Math. Phys. **32** (9), 1353–1359 (1992)].
7. J. Qi-Nian, "On the iteratively regularized Gauss—Newton method for solving nonlinear ill-posed problems," Math. Comp. **69** (232), 1603–1623 (2000). https://doi.org/10.1090/S0025-5718-00-01199-6
8. S. Ahmad, T. Strauss, S. Kupis, and T. Khan, "Comparison of statistical inversion with iteratively regularized Gauss Newton method for image reconstruction in electrical impedance tomography," Appl. Math. Comput. **358**, 436–448 (2019). https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.03.063

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 631–642.

9. M. Gehre, T. Kluth, A. Lipponen, B. Jin, A. Seppanen, J. P. Kaipio, and P. Maass, “Sparsity reconstruction in electrical impedance tomography: An experimental evaluation,” J. Comput. Appl. Math. **236** (8), 2126–2136 (2012). https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.09.035
10. M. Darbas, J. Heleine, R. Mendoza, and A. C. Velasco, “Sensitivity analysis of the complete electrode model for electrical impedance tomography,” AIMS Math. **6** (7), 7333–7366 (2021). https://doi.org/10.3934/math.2021431
11. L. I. Sedov, *Continuum Mechanics. Vol. 1* (Nauka, Moscow, 1994) [in Russian].
12. M. Gehre and B. Jin, “Expectation propagation for nonlinear inverse problems — with an application to electrical impedance tomography,” Numer. Anal., 1–35 (2013). https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.12.010
13. E. Somersalo, M. Cheney, and D. Isaacson, “Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography,” SIAM J. Appl. Math. **52**, 1023–1040 (1992). https://doi.org/10.1137/0152060
14. M. Cheney, D. Isaacson, and J. C. Newell, “Electrical impedance tomography,” SIAM Rev. **41** (1), 85–101 (1999).
15. O. V. Baturin, N. V. Baturin, and V. N. Matveev, *Construction of Computational Models in the Gambit Preprocessor of the Universal Software Package Fluent* (Izd. Samarsk. Gos. Aerokosm. Univ., Samara, 2010) [in Russian].
16. E. S. Sherina and A. V. Starchenko, “Difference schemes based on the finite volume method for the problem of electrical impedance tomography,” Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. no. 3 (29), 25–38 [in Russian].
17. J. Li and Y. Yuan, “Numerical simulation and analysis of generalized difference method on triangular networks for electrical impedance tomography,” Appl. Math. Model. **3** (5), 2175–2186 (2009). https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.05.025
18. A. A. Afanasyeva and A. V. Starchenko, “Numerical solution of the direct problem of electrical impedance tomography in the complete electrode formulation,” Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. (78), 5–21 (2022) [in Russian]. https://doi.org/10.17223/19988621/78/1
19. A. V. Starchenko, M. A. Sednev, and S. V. Pan’ko, “Approximate analytical solution of the direct problem of electrical impedance tomography in an inhomogeneous disk taking into account the resistance of the electrodes,” Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh. (74), 19–29 (2021) [in Russian]. https://doi.org/10.17223/19988621/74/3

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В БЛОЧНОЙ СРЕДЕ С ТОНКИМИ ВЯЗКОУПРУГИМИ ПРОСЛОЙКАМИ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Е. А. Ефимов

Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия

E-mail: efimov@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 13.05.2024 г.; после доработки 21.11.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

Рассматривается трёхмерная модель блочной среды с упругими блоками и тонкими упругими и вязкоупругими прослойками. Прослойки описываются упрощёнными дифференциально-разностными соотношениями. Описывается численный алгоритм решения динамических задач, основанный на методе расщепления. Приводятся результаты моделирования распространения волн в блочном полупространстве. Сопоставляется поведение поверхностных волн в блочно-слоистой среде и в дискретно-периодической среде, состоящей из жёстких масс с упругими связями. Результаты расчётов показывают хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Ключевые слова: блочно-слоистая среда, упругие блоки, тонкие прослойки.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.402

ВВЕДЕНИЕ

Особенности распространения сейсмических волн указывают на необходимость учёта блочной структуры пород. Концепция о блочном иерархическом строении горных пород с вложенными друг в друга блоками была разработана М. А. Садовским [1]. В блочных средах наблюдаются эффекты, нехарактерные для однородных сред, например, волны маятникового типа, возникающие за счёт деформации прослоек между блоками [2]. Когда прослойки намного податливее блоков, применяются математические модели, в которых деформациями блоков можно пренебречь. Таким образом, блочная среда может быть представлена в виде дискретно-периодической решётки жёстких масс, связанных между собой упругими элементами. Данная модель хорошо исследована численно и аналитически в одномерном, двумерном и трёхмерном случаях [3–6]. Когда связи между блоками обладают достаточной жёсткостью, возникает необходимость учёта упругого деформирования блоков. В работе [7] предложена модель, учитывающая упругие свойства блоков, описывающая распространение низкочастотных волн. Уравнения модели записываются относительно перемещений центров блоков, что позволяет рассматривать блочную среду как дискретно-периодическую.

В данной работе рассматривается среда из блоков в форме параллелепипедов одинаковых размеров. Блоки описываются уравнениями теории упругости, а прослойки упрощёнными дифференциально-разностными соотношениями в виде граничных условий между соседними блоками. Предполагается, что толщина прослойки много меньше размеров блока, поэтому учитываются только напряжения на площадках, отделяющих блоки от прослоек. Получаемая при этом математическая модель сохраняет свойство термодинамической согласованности, удовлетворяя интегральному закону сохранения энергии. Отдельный интерес представляет анализ волновых полей в средах с блоками и прослойками, имеющими различные реологические свойства. Задачи в двумерной постановке для блочных сред с упругими блоками и с вязкоупругими, пористыми и пористыми влагонасыщенными прослойками были исследованы в работах [8–10].

Более последовательным следовало бы считать подход, в котором и блоки, и прослойки моделируются уравнениями динамической теории упругости. Численная реализация такой модели содержит ряд трудностей, связанных, в частности, с согласованием шагов по времени. Когда материалы прослоек обладают сложными реологическими свойствами такими, как сыпучесть, разномодульность, упругопластичность, представление прослойки в качестве трёхмерного объекта, а не одномерного, усложняет задачу построения процедур корректировки решения [11, 12], и вместо одномерных множеств допустимых напряжений приходится рассматривать трёхмерные выпуклые множества.

В данной статье представлена трёхмерная модель блочной среды с упругими блоками и тонкими вязкоупругими прослойками. Приведены результаты численного моделирования распространения волн в блочном полупространстве. Проведены расчёты, воспроизводящие эксперимент, опубликованный в работе [7].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Изображённая на рис. 1 блочно-слоистая среда представляет собой периодическую структуру, состоящую из блоков в виде параллелепипедов одинаковых размеров. Блоки разделяются прослойками, толщина которых в каждом из направлений может задаваться отдельно.

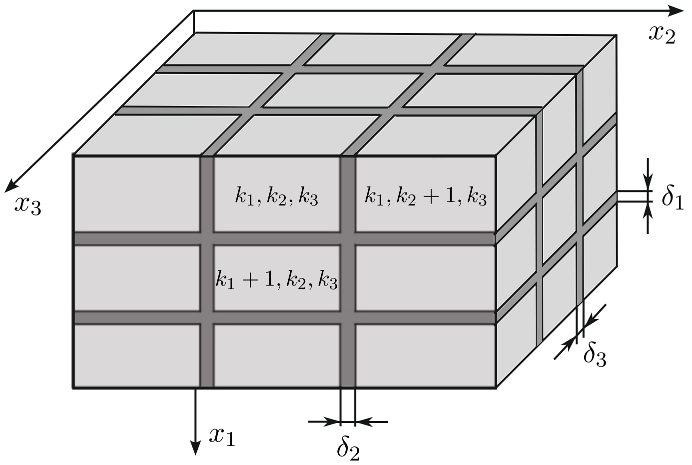


Рис. 1. Блочно-слоистая структура

Уравнения движения и определяющие уравнения для однородных изотропных упругих блоков с учётом малой деформации записываются в виде

$$\begin{gathered}
\rho\,\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}\,, \quad \rho\,\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3}\,, \\
\rho\,\frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}\,, \\
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right), \quad \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right), \qquad (1) \\
\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right), \\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right).
\end{gathered}$$

Здесь ρ — плотность материала блоков, λ и μ — параметры Ламе.

Вязкоупругие прослойки описываются моделью Пойнтинга—Томсона, известной также как модель стандартного линейного тела. Реологическая схема модели (рис. 2) состоит из упругого элемента b_0, который соединён последовательно с параллельно стоящими упругим b и вязким η элементами.

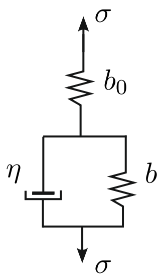


Рис. 2. Реологическая схема Пойнтинга—Томсона

Данная модель лишена недостатков, присущих более простым моделям вязкоупругого тела. Так, модель Максвелла, представляющая собой последовательное соединение упругого и вязкого элементов, при приложении постоянной нагрузки бесконечно деформируется. Модель Кельвина—Фойгта, в которой вязкий и упругий элементы соединены параллельно, при высокочастотных нагрузках ведёт себя как абсолютно твёрдое тело. Тело, описываемое моделью Пойнтинга—Томсона, при низкочастотных нагрузках становится податливым, так как работают оба упругих элемента b и b_0, при высокочастотных нагрузках становится более жёстким с модулем b_0.

Упрощённая модель деформирования прослоек представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Производные по пространству заменяются разностными соотношениями, при этом в прослойке учитываются только касательные напряжения и напряжение, нормальное к поверхностям соседних блоков. Введём тензор условных напряжений s_{ij}, соответствующий упругому элементу b реологической схемы (рис. 2). Система уравнений для прослоек в направлении оси x_1 между блоками (k_1, k_2, k_3) и (k_1+1, k_2, k_3) запишется в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\rho' \frac{d}{dt}\frac{v_1^+ + v_1^-}{2} = \frac{\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-}{\delta_1}, \quad \rho' \frac{d}{dt}\frac{v_2^+ + v_2^-}{2} = \frac{\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-}{\delta_1}, \quad \rho' \frac{d}{dt}\frac{v_3^+ + v_3^-}{2} = \frac{\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-}{\delta_1}, \\
\frac{1}{\lambda_0' + 2\mu_0'}\,\frac{d}{dt}\frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} = \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1} - \frac{1}{\eta_p}\left(\frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} - \frac{s_{11}^+ + s_{11}^-}{2}\right), \\
\frac{1}{\mu_0'}\,\frac{d}{dt}\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} = \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1} - \frac{1}{\eta_s}\left(\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} - \frac{s_{12}^+ + s_{12}^-}{2}\right), \\
\frac{1}{\mu_0'}\,\frac{d}{dt}\frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} = \frac{v_3^+ - v_3^-}{\delta_1} - \frac{1}{\eta_s}\left(\frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} - \frac{s_{13}^+ + s_{13}^-}{2}\right), \\
\frac{1}{\lambda' + 2\mu'}\,\frac{d}{dt}\frac{s_{11}^+ + s_{11}^-}{2} = \frac{1}{\eta_p}\left(\frac{\sigma_{11}^+ + \sigma_{11}^-}{2} - \frac{s_{11}^+ + s_{11}^-}{2}\right), \\
\frac{1}{\mu'}\,\frac{d}{dt}\frac{s_{12}^+ + s_{12}^-}{2} = \frac{1}{\eta_s}\left(\frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2} - \frac{s_{12}^+ + s_{12}^-}{2}\right), \\
\frac{1}{\mu'}\,\frac{d}{dt}\frac{s_{13}^+ + s_{13}^-}{2} = \frac{1}{\eta_s}\left(\frac{\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-}{2} - \frac{s_{13}^+ + s_{13}^-}{2}\right).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Верхними индексами «+» и «−» обозначены скорости и напряжения на границах взаимодействующих блоков, δ_1 — толщина прослоек между блоками в направлении x_1. Штрихами обозначены упругие параметры материала прослоек. Модули с нулевыми индексами λ_0' и μ_0' относятся к «верхнему» упругому элементу b_0, λ' и μ' — модули для «нижнего» элемента b, η_s и η_p — коэффициенты вязкости для продольных и поперечных волн. Совершенно аналогично записываются уравнения вдоль направлений оси x_2 и x_3 с толщиной прослоек δ_2 и δ_3.

Итоговая система уравнений содержит (1) и три системы вида (2), записанные для всех направлений x_1, x_2 и x_3. Можно показать, что для ограниченной области блочного пространства Ω, полученная система является термодинамически согласованной. В случае упругих прослоек закон сохранения представляется как сумма кинетических и потенциальных энергий всех блоков и прослоек, равная потоку вектора Умова—Пойнтинга на поверхности области Ω блочного пространства. Закон сохранения для уравнений динамики блочной среды с упругими прослойками в трёхмерной постановке выписывается аналогичным образом, что и для уравнений в двумерной постановке [13]. В закон сохранения для среды с вязкоупругими прослойками добавятся члены, выражающие диссипацию механической энергии в прослойках.

Термодинамическая согласованность модели гарантирует корректность постановки начально-краевых задач с диссипативными граничными условиями. Для симметрической t-гиперболической системы, записанной в матричной форме

$$A\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{3}$$

диссипативные граничные условия будут иметь вид

$$U\sum_{i=1}^{3} n_i B_i U \leqslant 0,$$

где n — вектор внешней нормали к области Ω. Можно показать, что обычные для теории упругости граничные условия в скоростях и напряжениях относятся к диссипативным [14].

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Система уравнений в блоках (1) записывается в матричной форме (3) с вектором неизвестных $U = (v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13})$. Алгоритм решения основан на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным [15]. Данный метод имеет второй порядок сходимости по времени и пространству, если схемы для решения одномерных расщеплённых задач имеют порядок не ниже второго. После процедуры расщепления для блоков получаются одномерные системы вида

$$A\frac{\partial U}{\partial t} = B_i \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

каждая из которых состоит из независимых подсистем плоских продольных и поперечных волн. Для решения одномерных задач применяется схема «предиктор-корректор», основанная на методе распада разрыва Годунова [16]. Рассмотрим систему плоских волн

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \rho c^2 \frac{\partial v}{\partial x}.$$

На шаге предиктор схемы через скорости и напряжения с нижнего слоя по времени вычисляются инварианты Римана на границах ячеек сетки $I_j^{\pm} = \rho c v_{j\pm 1/2} \pm \sigma_{j\pm 1/2}$. На данном этапе применяется предельная реконструкция инвариантов, позволяющая достичь второго порядка аппроксимации на монотонных участках решения [17]. Далее вычисляются значения скоростей и напряжений на границах ячеек v_j, σ_j:

$$v_j = \frac{I_j^+ + I_j^-}{2\rho c}, \quad \sigma_j = \frac{I_j^+ - I_j^-}{2},$$

затем на шаге «корректор» вычисляются скорости и напряжения с текущего временного слоя

$$v^{j+1/2} = v_{j+1/2} + \frac{\tau}{\rho h}(\sigma_{j+1} - \sigma_j), \quad \sigma^{j+1/2} = \sigma_{j+1/2} + \frac{\rho c^2 \tau}{h}(v_{j+1} - v_j),$$

где шаг по времени τ удовлетворяет условию Куранта.

Уравнения (2) описывают распространение возмущений в прослойках между блоками вдоль оси x_1, аналогичный вид имеют уравнения вдоль x_2 и x_3. Система (2) состоит из трёх независимых подсистем. Рассмотрим, например, подсистему плоских продольных волн, связывающую v_1, σ_{11} и s_{11}. Для краткости записи обозначим $v = v_1$, $\sigma = \sigma_{11}$, $s = s_{11}$, $b_0 = \lambda_0' + 2\mu_0'$, $b = \lambda' + 2\mu'$, $\eta_p = \eta$. Для решения используется бездиссипативный вариант схемы Г. В. Иванова [18]. Для каждой прослойки по толщине отводится одна ячейка разностной сетки. Схема строится следующим образом. Система уравнений для плоских волн, проходящих через прослойку, записывается в виде

$$\rho' \frac{d}{dt}\frac{v^+ + v^-}{2} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{1}{b_0}\frac{d}{dt}\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = \frac{v^+ - v^-}{\delta} - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right),$$
$$\frac{1}{b}\frac{d}{dt}\frac{s^+ + s^-}{2} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right).$$

На шаге «корректор» разностной схемы уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\rho' \frac{\hat{v} - v}{\tau} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{1}{b_0}\frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau} = \frac{v^+ - v^-}{\delta} - \frac{1}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right), \\ \frac{1}{b}\frac{\hat{s} - s}{\tau} = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right).\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\hat{v}$, $\hat{\sigma}$ относятся к верхнему временному слою, а v, σ — к нижнему, а знаками «+»,«−» отмечены значения на границах соседних блоков (см рис. 3).

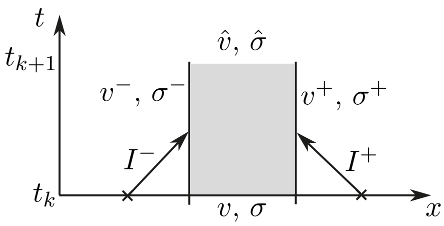


Рис. 3. Обозначения в разностной схеме для прослойки

После умножения соответствующих уравнений на $(\hat{v} + v)/2$, $(\hat{\sigma} + \sigma)/2$ и $(\hat{s} + s)/2$ и их последующего суммирования получим дискретный аналог закона сохранения

$$\rho' \frac{\hat{v}^2 - v^2}{2\tau} + \frac{1}{b_0}\frac{\hat{\sigma}^2 - \sigma^2}{2\tau} + \frac{1}{b}\frac{\hat{s}^2 - s^2}{2\tau} + = \frac{\sigma^+ v^+ - \sigma^- v^-}{\delta} + D + D^h,$$

где диссипация механической энергии $D = -(\sigma^+ + \sigma^- - s^+ - s^-)^2/(4\eta)$, а мощность схемной диссипации имеет вид

$$D^h = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}\left(\frac{\hat{v} + v}{2} - \frac{v^+ + v^-}{2}\right) + \frac{v^+ - v^-}{\delta}\left(\frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} - \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2}\right) +$$
$$+ \frac{1}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right)\left(\frac{\hat{\sigma} + \sigma}{2} - \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{\hat{s} + s}{2} + \frac{s^+ + s^-}{2}\right).$$

Отсутствие схемной диссипации имеет место при условии $\hat{\sigma} + \sigma = \sigma^+ + \sigma^-$, $\hat{v} + v = v^+ - v^-$ и $\hat{s} + s = s^+ - s^-$. Используя эти соотношения, перепишем уравнения (4):

$$v^+ + v^- = 2v + \frac{\tau}{\rho'\delta}(\sigma^+ - \sigma^-), \quad \sigma^+ + \sigma^- = 2\sigma + \frac{b_0\tau}{\delta}(v^+ - v^-) - \frac{b_0\tau}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right),$$
$$s^+ + s^- = 2s + \frac{b\tau}{\eta}\left(\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} - \frac{s^+ + s^-}{2}\right). \tag{5}$$

Для определения значений на границах блоков и прослойки $v^\pm$, $\sigma^\pm$ воспользуемся соотношениями на характеристиках

$$I^+ = \rho c v^+ + \sigma^+, \quad I^- = \rho c v^- - \sigma^-,$$

из которых получаются выражения для $v^+ + v^-$ и $\sigma^+ + \sigma^-$:

$$v^+ + v^- = \frac{I^+ + I^- - (\sigma^+ - \sigma^-)}{\rho c}, \quad \sigma^+ + \sigma^- = I^+ - I^- - \rho c(v^+ - v^-).$$

Подстановка этих выражений в (5) даст

$$v^+ - v^- = \frac{1}{\alpha}\big(\beta(I^+ - I^-) - 2\sigma - \frac{2b_0\tau}{2\eta + b\tau}s\big), \quad \sigma^+ - \sigma^- = \frac{\rho'\delta}{\rho'\delta + \rho c\tau}(I^+ + I^- - 2\rho c v),$$
$$s^+ + s^- = \frac{b\tau}{2\eta + b\tau}\big(I^+ - I^- - \rho c(v^+ - v^-)\big) + \frac{4\eta}{2\eta + b\tau}s. \tag{6}$$

Здесь коэффициенты α и β выражаются формулами

$$\alpha = \rho c + \frac{b_0\tau}{\delta} + \frac{b_0\tau\rho c}{2\eta}\left(1 - \frac{b\tau}{2\eta + b\tau}\right), \quad \beta = 1 + \frac{b_0\tau}{2\eta}\left(1 - \frac{b\tau}{2\eta + b\tau}\right).$$

Выражения для скоростей и напряжений на текущем временном слое внутри прослойки $\hat{v}$, $\hat{\sigma}$ определяются из уравнений шага «корректор» (4). При вычислении значений в приграничных узлах блоков участвуют выражения $v^\pm$, $\sigma^\pm$, которые получаются путём сложения и вычитания уравнений (5) и (6).

Одно из преимуществ данной схемы состоит абсолютной устойчивости. Это позволяет обойти проблему согласования шагов по времени при вычислениях в блоках и прослойках. Можно также применить данную схему для решения уравнений в блоках. При этом на шаге «предиктор» схемы получится система линейных уравнений с трёхдиагональной матрицей [18]. При отсутствии схемной диссипации данная схема имеет второй порядок сходимости, но является немонотонной. Введение искусственной схемной диссипации позволяет сглаживать осцилляции.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Расчёты проводились на многопроцессорной компьютерной системе кластерной архитектуры серии МВС Института вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск). Авторский программный комплекс написан на языке Fortran с использованием библиотеки MPI (Message Passing Interface). Вычислительная область разбивается на большие блоки, представляющие собой параллелепипеды одинаковых размеров, каждый из которых обрабатывается одним MPI-процессом, на данном этапе задаётся толщина прослоек первого уровня δ'_j, $j = 1, 2, 3$. Обмен данными между процессами происходит на шаге «предиктор» разностной схемы. Каждый большой блок в свою очередь разбивается на малые блоки одинаковых размеров с толщиной прослоек второго уровня δ''_j, $j = 1, 2, 3$. Таким образом, реализуется двухуровневая блочная иерархическая среда. Можно реализовать большее количество иерархических уровней, разбивая малые блоки на более мелкие.

Рассмотрим задачу Лэмба в блочном полупространстве в трёхмерной постановке. Решение вычисляется в $\Omega = [0; L_1] \times [0; L_2] \times [0; L_3]$. Будем считать, что прослойки во всех направлениях имеют одинаковую толщину $\delta = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3$. На свободной поверхности полупространства $x_1 = 0$ задаются условия $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$, а на верхней грани блока $k_1 = 1$, $k_1 = 1$, $k_3 = 1$ в точке $x_2 = x_3 = 0$ задаётся источник $\sigma_{11}(t) = p_0\delta(t)$, $\delta(t)$ — дельта-функция. В расчётах задавалось импульсное воздействие постоянной амплитуды p_0 длительностью один шаг по времени τ. На границах $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$ задаются условия симметрии

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = v_2 = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = v_3 = 0.$$

На остальных границах ($x_1 = L_1$, $x_2 = L_2$ и $x_3 = L_3$) вычислительной области используется упрощённый вариант слабоотражающих граничных условий, состоящий в приравнивании нулю инвариантов Римана, переносящих возмущения в направлении противоположном распространению волны [19,20]. Можно также ввести вдоль границ идеально согласованный слой (Perfectly Matched Layer) [21], проходя через который волны стремительно затухают без отражений от границ. На самом деле оба подхода имитируют прохождение волн вглубь *однородной* среды без отражений, то есть блочное строение среды за границами вычислительной области не учитывается.

Рассмотрим блочную среду из $45 \times 45 \times 45$ кубических блоков со стороной $H = 160$ мм, на каждый блок приходится 16^3 узлов равномерной разностной сетки. Плотность, скорости распространения продольных и поперечных волн в блоках соответственно равны $\rho = 2400$ кг/м^3, $c_p = 4500$ м/с, $c_s = 2700$ м/с, а в прослойках $\rho' = 1200$ кг/м^3, $c'_p = 1000$ м/с, $c'_s = 700$ м/с. На рис. 4 представлены линии уровня скорости v_1 в один и тот же момент времени ($t = 1.6$ мс) после приложения нагрузки в однородной упругой среде (a) и блочных средах с толщиной прослоек $\delta = 1.5$ мм и $\delta = 8$ мм (b), (c), а также в иерархической блочной среде, крупные блоки которой состоят из $9 \times 9 \times 9$ малых блоков со стороной 160 мм, толщина прослоек между крупными блоками $\delta' = 8$ мм, между малыми блоками $\delta'' = 1.5$ мм (d).

В среде с тонкими прослойками $\delta = 1.5$ мм за фронтами волн возникают осцилляции, с увеличением толщины прослоек их частота уменьшается, скорость распространения волн в среде также снижается. В иерархической среде сильнее заметно частичное отражение волн от прослоек, разделяющих крупные блоки.

Скорости распространения низкочастотных волн блочной среде можно определить по формулам [7]

$$\tilde{c}_p = \sqrt{\frac{\rho' c'^2_p}{\rho \Delta_p}}, \quad \tilde{c}_s = \sqrt{\frac{\rho' c'^2_s}{\rho \Delta_s}},$$

где

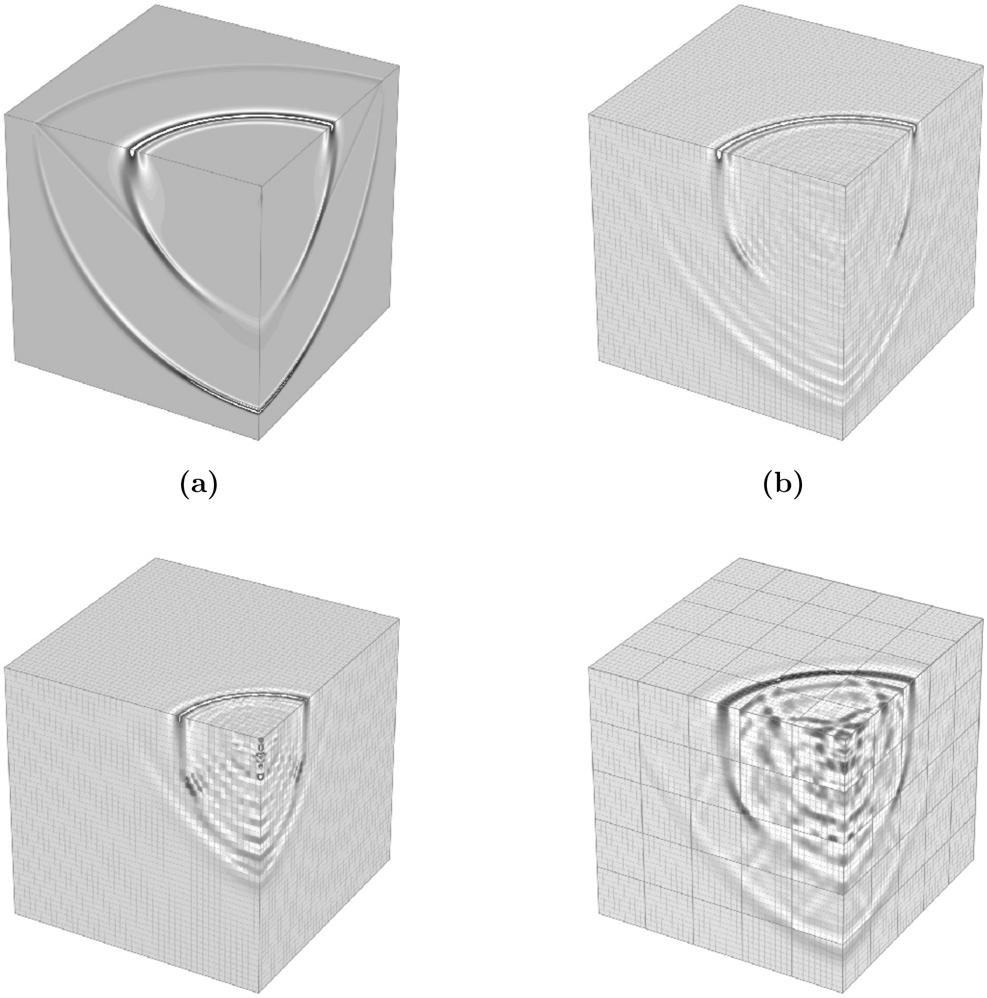
$$\Delta_p = \frac{\rho' c'^2_p}{\rho c_p^2} + \frac{\delta}{H}, \quad \Delta_s = \left(2 - \frac{\rho' c'^2_s}{\rho c_s^2}\right)\frac{\delta}{H} + \frac{\rho' c'^2_s}{\rho c_s^2},$$

H — размер блока, δ — толщина прослойки. Данные скорости используются для вычисления времени прибытия продольной волны t_P, поперечной t_S и волны Рэлея t_R в точку, удалённую от источника на расстояние r:

$$t_P = r/\tilde{c}_p, \quad t_S = r/\tilde{c}_s, \quad t_R = r/\tilde{c}_R.$$

Скорость рэлеевской волны определяется по формуле

$$\tilde{c}_R = \xi \tilde{c}_s,$$



(a) **(b)** **(c)** **(d)**

Рис. 4. Линии уровня v_1 в однородной упругой среде с параметрами ρ, c_p, c_s (a), в блочных средах с толщиной прослоек $\delta = 1.5$ мм (b) и $\delta = 8$ мм (c), в иерархической среде $\delta' = 8$ мм, $\delta'' = 1,5$ мм (d)

где ξ — положительный вещественный корень уравнения $\xi^6 - 8\xi^4 + 8(3 - 2\dfrac{\tilde{c}_s^2}{\tilde{c}_p^2})\xi^2 - 16(1 - \dfrac{\tilde{c}_s^2}{\tilde{c}_p^2}) = 0$, удовлетворяющий требованию $\tilde{c}_s^2/\tilde{c}_p^2 < 1$ [22].

Когда прослойки намного податливее блоков, можно воспользоваться моделью дискретно-периодической решётки, в узлах которой находятся жёсткие блоки в виде точечных масс [6]. Дискретно-периодичоская модель среды представляет собой массив жёстких блоков массой M, связанных пружинами длиной l жёсткостью K_1 в направлениях осей x_1, x_2, x_3. Уравнения движения дискретно-периодической системы записываются в перемещениях, упругие связи между блоками записываются в виде разностных соотношений [6]. Жёсткость у пружин в «диагональных» направлениях принимается $K_2 = K_1$, в такой решётке волны во всех направлениях распространяются с одинаковой скоростью. Численный алгоритм строится относительно просто, поскольку связи между блоками в модели представлены в разностном виде, а вторая производная по времени от перемещений аппроксимируется стандартным конечно-разностным способом [6]. Задача Лэмба для дискретно-периодической среды в двумерной постановке была решена аналитически [5]. Аналитическое решение задачи в трёхмерной постановке пока не найдено.

Пусть материал блоков описывается параметрами $\rho = 6250$ кг/м^3, $c_p = 6000$ м/с, $c_s = 3464$ м/с. Рассмотрим три блочные среды, в которых плотности прослоек равны $\rho' = 1800, 1200$ и 400 кг/м^3, а соотношение импедансов блоков и прослоек $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 11.57$, 80 и 625. Для всех материалов коэффициент Пуассона $\nu = \nu' = 0.25$. Блочная среда состоит из $45 \times 45 \times 45$ блоков со сторонами $H = 160$ мм, связанными прослойками толщиной $\delta = 10$ мм.

Сравним поведение волн на поверхности блочного полупространства для двух различных моделей блочной среды, когда на блок с координатами $k_1 = 1$, $k_1 = 1$, $k_3 = 1$ действует источник $v_1(t) = v_0\delta(t)$. На рис. 5 представлены зависимости вертикальной компоненты скорости $v_1(t)$ в блоке с координатами $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 23$. Для модели с упругими блоками синим цветом показана зависимость $v_1(t)$ в центральной точке верхней грани блока. Красная линия соответствует решению для дискретно-периодической модели с массой блоков $M = \rho H^3$, длиной пружин $l = H + \delta$ и коэффициентами жёсткости пружин $K_1 = K_2 = \tilde{c}_p^2 M/(3l^2)$. Тонкой чёрной линией показано численное решение, полученное для однородной среды со средней плотностью $\tilde{\rho}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$ и скоростями распространения продольных и поперечных волн $\tilde{c}_p$, $\tilde{c}_s$.

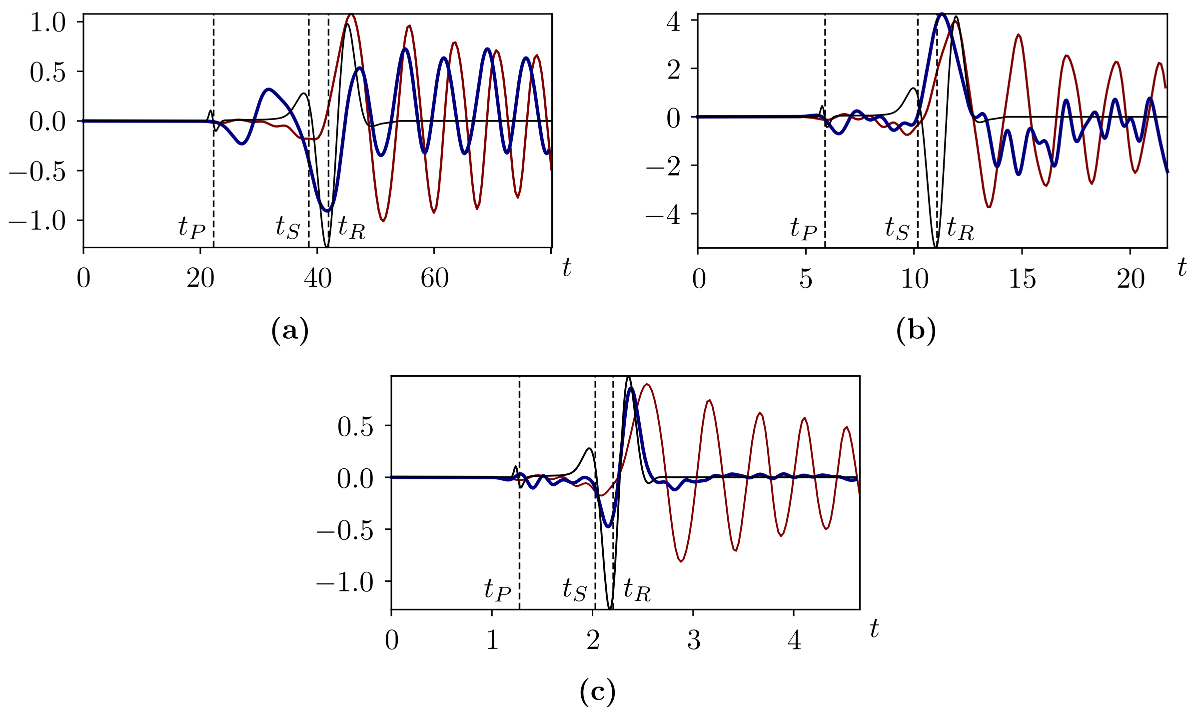


Рис. 5. Осциллограммы вертикальной компоненты скорости поверхностных волн $v_1(t)$ (t[мс]) блока $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 23$ для среды с $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 625$ (a), $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 80$ (b), $(\rho c_p)/(\rho' c'_p) = (\rho c_s)/(\rho' c'_s) = 11.57$ (c). Красные линии показывают решение в дискретно-периодической решётке, синие — в блочной среде с упругими блоками и прослойками, чёрные — в однородной упругой среде

Во всех случаях наблюдаются колебания относительно решения, полученного для однородной среды. Характер поверхностных волн в блочной среде с достаточно податливыми прослойками качественно воспроизводится дискретно-периодической моделью. С вычислительной точки зрения выгоднее использовать дискретные модели для описания сред, в которых прослойки намного податливее блоков. В среде с более жёсткими прослойками, осцилляции относительно решения в однородной среде проявляются в меньшей степени. Представление блоков в виде жёстких масс не вполне адекватно для сред с достаточно жёсткими прослойками, поскольку не учитывается распространение волн внутри блока. Более сложная модель, учитывающая упругие свойства блоков, записываемая относительно перемещений центральных точек блоков, была получена для решения задач в двумерной постановке в работе [7].

Верификация математической модели проведена на экспериментальных данных, опубликованных в статье [7]. В эксперименте на двуосном стенде сборка из $6 \times 6 \times 1$ блоков одинаковых размеров $89 \times 125 \times 250$ мм закреплена по контуру. Все блоки выполнены из оргстекла ($\rho = 2040$ кг/м^3, $c_p = 2670$ м/с), прослойки толщиной 5 мм сделаны из резины с модулями сдвига $10^7/1.3$ Па и $1.35 \cdot 10^7/1.3$ Па в направлениях x_1 и x_2, соответственно. В расчётах предполагается, что модули сдвига прослоек соответствуют состоянию, когда деформируются оба упругих элемента реологической схемы (рис. 2). Коэффициент Пуассона принимается равным 0.3 для блоков и для прослоек. Ударное воздействие в центральной точке верхней грани блока с координатами $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ длительностью $T_{imp} = 0.2$ мс задавалось по формуле

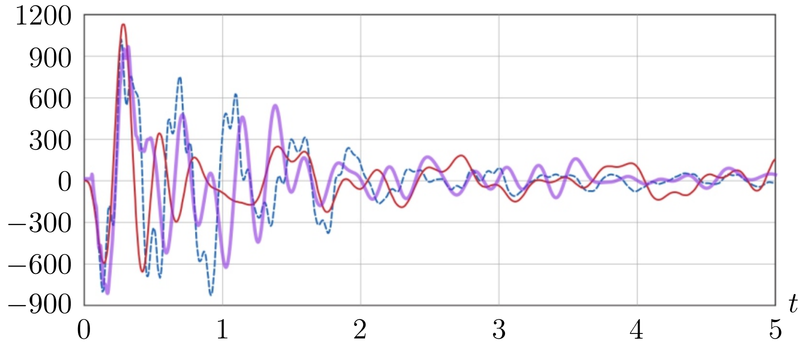
$$p(t) = \begin{cases} p_0 \sin(\pi t/T_{imp}), & 0 < t \leqslant T_{imp}, \\ 0, & t > T_{imp}. \end{cases}$$

Акселерометр устанавливался в центральной точке боковой грани блока $k_1 = k_2 = 2$. На рис. 6 представлены графики ускорений из работы [7] и графики, полученные в результате численного моделирования. Зависимости ускорения от времени, измеренные в ходе эксперимента, обозначены синей пунктирной линией, красные сплошные показывают ускорения, рассчитанные по модели динамического взаимодействия блоков из той же статьи [7]. Кривые фиолетового цвета соответствуют вычислениям, выполненным для модели среды с упругими блоками и вязкоупругими прослойками, описываемых уравнениями (2). Недостаток данных о материале прослоек оставляет некоторый произвол в выборе параметров вязкоупругой среды (рис. 2). Параметры реологической схемы определяются при помощи τ-метода, предложенного в [23]. Данный метод используется для вычисления оптимальных параметров SLS модели вязкоупругого тела, при которых добротность будет приблизительно постоянна в определённом частотном диапазоне. В методе используются дополнительные предположения, связанные с малостью времён релаксаций, через которые вычисляются параметры среды. В расчётах предполагалось, что добротности для продольных и поперечных волн вязкоупругой среды приблизительно постоянны в частотном диапазоне от 10 до 5000 Гц и равны $Q_p = 20$ и $Q_s = 10$, соответственно. Данной ситуации соответствуют параметры среды: $\eta_p = 15 \cdot 10^3$ Па·с, $\eta_s = 2.6 \cdot 10^3$ Па·с, $\lambda_0 = 1 \cdot 10^7$ Па, $\mu_0 = 0.9 \cdot 10^7$ Па, $\lambda = 1.9 \cdot 10^8$ Па, $\mu = 4.1 \cdot 10^7$ Па.

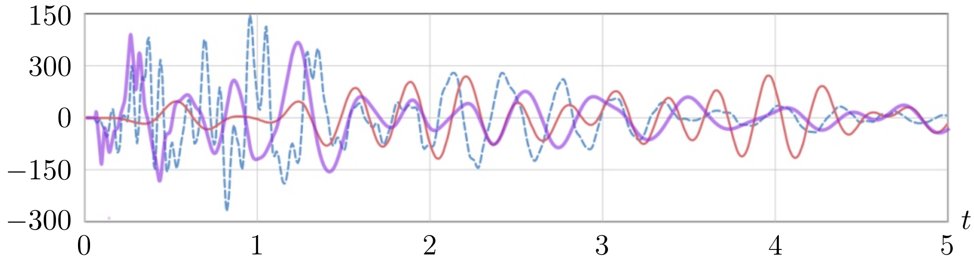
Полученные в результате расчётов зависимости ускорений $w_i(t) = \partial v_i(t)/\partial t$, $i = 1, 2$ хорошо согласуются с данными эксперимента. Ускорения вычислялись как конечная разность $w(t) = (v(t + \tau) - v(t))/\tau$. Воспроизводится качественная картина поведения волн, несмотря на расхождения по фазе. Ускорение $w_1(t)$ практически повторяет экспериментальные данные. На графиках с ускорением $w_2(t)$ на начальном этапе измерений преобладают высокочастотные составляющие, они не предусматриваются в расчётной модели, предложенной в [7]. Также стоит отметить, что при расчёте задачи в двумерной постановке высокочастотная составляющая также подавляется. По-видимому, это связано с тем, что в эксперименте акселерометр располагается на боковой грани блока, что не может быть учтено в двумерной постановке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена трёхмерная модель динамики блочной среды с тонкими прослойками. Для описания прослоек применяются упрощённые уравнения, которые обеспечивают термодинамическую согласованность модели. Реализован программный комплекс для многопроцессорных систем кластерной архитектуры, позволяющий моделировать двухуровневые иерархические блочные среды. Поверхностные волны, распространяющиеся в блочной среде с достаточно податливыми прослойками, качественно схожи с поверхностными волнами в



(a)



(b)

Рис. 6. Графики вертикальной составляющей ускорения $w_1(t)$ (a) и горизонтальной $w_2(t)$ (b) в центральной точке боковой поверхности блока $k_1 = k_2 = 2$ (t[мс])

дискретно-периодической решётке жёстких масс, соединённых пружинками. Предложенная модель блочно-слоистой среды с тонкими вязкоупругими прослойками хорошо воспроизводит экспериментальные измерения из работы [7].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (соглашение 075-02-2024-1378). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Садовский М. А.* Естественная кусковатость горной породы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. С. 829–832.
2. *Курленя М. В., Опарин В. Н., Востриков В. И.* Волны маятникового типа. 2. Методика экспериментов и основные результаты физического моделирования // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1996. № 4. С. 3–39.
3. *Александрова Н. И., Черников А. Г., Шер Е. Н.* Экспериментальная проверка одномерной расчётной модели распространения волн в блочной среде // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2005. № 3. С. 46–55.
4. *Александрова Н. И., Шер Е. Н.* Распространение волн в двумерной периодической модели блочной среды. Ч.1: Особенности волнового поля при действии импульсного источника // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2010. № 6. С. 57–68.

5. *Alexandrova N. I.* The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium // Wave Motion. 2014. V. 51, N 5. P. 818–832; DOI: 10.1016/j.wavemoti.2014.02.002
6. *Alexandrova N. I.* Seismic waves in a three-dimensional block medium // Proc. R. Soc. A. 2016. V. 472, N 2192. Article 20160111; DOI: 10.1098/rspa.2016.0111
7. *Сарайкин В. А., Черников А. Г., Шер Е. Н.* Распространение волн в двумерной блочной среде с вязкоупругими прослойками (теория и эксперимент) // Прикл. мех. техн. физ. 2015. Т. 56, № 4. С. 688–697; DOI: 10.15372/PMTF20150416
8. *Садовский В. М., Садовская О. В., Похабова М. А.* Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера // Вычисл. мех. сплошн. сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 52–60; DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.1.6.
9. *Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Lukyanov A. A.* Modeling of wave processes in blocky media with porous and fluid-saturated interlayers // J. Comput. Phys. 2017. V. 345. P. 834–855; DOI: 10.1016/j.jcp.2017.06.001.
10. *Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V.* Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2018. V. 33, N 2. P. 111–121; DOI: 10.1515/rnam-2018-0010.
11. *Садовская О. В., Садовский В. М.* Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
12. *Садовский В. М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997.
13. *Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V.* Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum // Wave Motion. 2015. V. 52. P. 138–150; DOI: 10.1016/j.wavemoti.2014.09.008.
14. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
15. *Марчук Г. И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
16. *Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко Г. П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.
17. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
18. *Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д.* Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твёрдых тел. Новосибирск: Сиб. унив. Изд-во, 2002.
19. *Ильгамов М. А., Гильманов А. И.* Неотражающие условия на границах расчётной области. М.: Физматлит, 2003.
20. *Анисимов С. А. Кургузов В. Д.* Моделирование неотражающих условий при численном решении задач теории упругости // Вычисл. технол. 1999. Т. 4, № 1. С. 3–13.
21. *Appelo D., Hagstrom G. Kreiss* Perfectly matched layers for hyperbolic systems: General formulation, well-posedness and stability // SIAM J. Appl. Math. 2006. V. 67. P. 1–23; DOI: 10.1137/050639107
22. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10-ти томах Т. VII. Теория упругости. М.: Физматлит, 1985.
23. *Blanch J. O., Robertsson J. O., Symes W. W.* Modeling of a constant Q; methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique // Geophysics. 1995. V. 60. P. 176–184; DOI: 10.1190/1.1443744

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3

MODELING OF WAVE PROPAGATION IN A BLOCKY MEDIUM WITH THIN VISCOELASTIC INTERLAYERS IN A SPATIAL SETTING

 E. A. Efimov

Institute of Computational Modeling of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia

E-mail: efimov@icm.krasn.ru

Received 13.05.2024, revised 21.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. A three-dimensional model of a blocky medium with elastic blocks and thin elastic and viscoelastic interlayers is considered. The interlayers are described by simplified differential-difference relations. A numerical algorithm for solving dynamical problems based on splitting method is presented. The results of simulation of wave propagation in blocky half-space are presented. We compare the behaviour of surface waves arising in a blocky layered medium and in a discrete periodic medium consisting of rigid masses connected to each other by elastic springs. Results of computations using the proposed model are in good agreement with the experimental data.

Keywords: blocky-layered medium, elastic block, thin interlayer.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.402

REFERENCES

1. M. A. Sadovskii, "Natural lumpiness of rock," Dokl. Akad. Nauk SSSR **247**, 829–832 (1979) [in Russian].
2. M. V. Kurlenya, V. N. Oparin, and V. I. Vostrikov, "Pendulum-type waves. 2. Experimental methods and main results of physical modeling," Fiz.-Tekh. Probl. Razrab. Polezn. Iskopaemykh (4), 3–39 (1996) [in Russian].
3. N. I. Aleksandrova, A. G. Chernikov, and E. N. Sher, "Experimental verification of a one-dimensional calculation model of wave propagation in a blocky medium," Fiz.-Tekh. Probl. Razrab. Polezn. Iskopaemykh (3), 46–55 (2005) [in Russian].
4. N. I. Aleksandrova and E. N. Sher, "Propagation of waves in a two-dimensional periodic model of a blocky medium. Part 1: Features of the wave field under the action of a pulsed source," Fiz.-Tekh. Probl. Razrab. Polezn. Iskopaemykh (6), 57–68 (2010) [in Russian].
5. N. I. Alexandrova, "The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium," Wave Motion **51** (5), 818–832 (2014). https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.02.002
6. N. I. Alexandrova, "Seismic waves in a three-dimensional block medium," Proc. R. Soc. A **472** (2192), 20160111 (2016). https://doi.org/10.1098/rspa.2016.0111
7. V. A. Saraikin, A. G. Chernikov, and E. N. Sher, "Propagation of waves in a two-dimensional blocky medium with viscoelastic layers (theory and experiment," Prikl. Mekh. Tekh. Fiz. **56** (4), 688–697 (2015) [in Russian]. https://doi.org/10.15372/PMTF20150416
8. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and M. A. Pokhabova, "Modeling of elastic waves in a blocky medium based on the Cosserat continuum equations," Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred **7** (1), 52–60 (2014) [in Russian]. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.1.6
9. V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, and A. A. Lukyanov, "Modeling of wave processes in blocky media with porous and fluid-saturated interlayers," J. Comput. Phys. **345**, 834–855 (2017). https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.06.001

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 656–668.

10. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, "Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media," Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. **33** (2), 111–121 (2018). https://doi.org/10.1515/rnam-2018-0010
11. O. V. Sadovskaya and V. M. Sadovskii, *Mathematical Modeling in Problems of Granular Media Mechanics* (Fizmatlit, Moscow, 2008) [in Russian].
12. V. M. Sadovskii, *Discontinuous Solutions in Problems of Dynamics of Elastic-Plastic Media* (Nauka, Moscow, 1997) [in Russian].
13. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, "Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum," Wave Motion **52**, 138–150 (2015). https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.09.008
14. S. K. Godunov, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
15. G. I.Marchuk, *Splitting Methods* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
16. S. K. Godunov, A. V. Zbrodin, M. Ya. Ivanov, and G. P. Kraiko, *Numerical Solution of Multidimensional Problems of Gas Dynamics* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
17. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, and A. Yu. Semenov, *Mathematical Issues of Numerical Solution of Hyperbolic Systems of Equations* (Fizmatlit, Moscow, 2001) [in Russian].
18. G. V. Ivanov, Yu. M. Volchkov, I. O. Bogulskii, S. A. Anisimov, and V. D. Kurguzov, *Numerical Solution of Dynamic Problems of Elastic-Plastic Deformation of Solids* (Sib. Univ. Izd., Novosibirsk, 2002) [in Russian].
19. M. A. Il'gamov and A. I. Gil'manov, *Nonreflecting Conditions at the Boundaries of the Computational Domain* (Fizmatlit, Moscow, 2003) [in Russian].
20. S. A. Anisimov and V. D. Kurguzov, "Modeling of nonreflecting conditions in numerical solution of elasticity theory problems," Vychisl. Tekhnol. **4** (1), 3–13 (1999) [in Russian].
21. D. Appelo, T. Hagstrom, and G. Kreiss, "Perfectly matched layers for hyperbolic systems: General formulation, well-posedness and stability," SIAM J. Appl. Math. **67**, 1–23 (2006). https://doi.org/10.1137/050639107
22. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Fizmatlit, Moscow, 1985) [in Russian].
23. J. O. Blanch, J. O. Robertsson, and W. W. Symes, "Modeling of a constant Q; methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique," Geophysics **60**, 176–184 (1995). https://doi.org/10.1190/1.1443744

УДК 517.91

МОДЕЛЬ ГИБРИДНОЙ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С РЕЖИМОМ УБЕЖИЩА: РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

© 2024 А. Н. Кириллов[a], А. М. Сазонов[b]

*Институт прикладных математических исследований,
ФИЦ «Карельский научный центр РАН»,
ул. Пушкинская, 11, г. Петрозаводск 185910, Россия*

E-mails: [a]krllv1812@yandex.ru, [b]sazon-tb@mail.ru

Поступила в редакцию 09.10.2023 г.; после доработки 02.12.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

Статья посвящена регуляризации математической модели динамики популяций хищника и жертвы с внутривидовой конкуренцией в виде гибридной динамической системы, состоящей из двух двумерных систем, переключающихся между собой. Переключения систем позволяют моделировать особый режим убежища (Refuge), при котором число жертв слишком мало, и хищникам трудно их обнаружить. Проведена регуляризация представленной модели посредством использования двух линий переключения с целью избежать учащающихся переключений (chattering) между системами. Для регуляризованной модели найдены предельные множества. Проводится исследование чувствительности модели по отношению к введению переключений. Найдено условие, при котором гибридизация качественно не меняет глобальную устойчивость равновесия. В ином случае предельными множествами являются циклы.

Ключевые слова: гибридные системы, динамика популяций, регуляризация, предельные множества.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.403

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию регуляризации и чувствительности гибридной системы с переключениями, моделирующей динамику популяций хищника и жертвы с учётом внутривидовой конкуренции жертв. Переключения позволяют моделировать режим убежища, при котором число доступных жертв слишком мало, и хищники практически не могут их обнаружить. Подробное описание режима убежища представлено в [1, 2]. Введение внутривидовой конкуренции в модель «хищник—жертва» позволяет стабилизировать систему, получив затухающие колебания численности популяций [3], что невозможно при использовании модели Лотки—Вольтерры [2]. Недостатком вольтерровской модели также является чувствительность к введению переключений, в то время как модель с внутривидовой конкуренцией более груба по отношению к переключениям [4].

Гибридные системы с переключениями, исследуемые методом определения движения на кривой S, разработанным А. Ф. Филипповым [5], активно используются для моделирования различных экологических процессов. Например, в работе [6] представлена модель динамики популяций сельскохозяйственных вредителей и подселяемых к ним естественных хищников-врагов, где внешнее воздействие на популяции моделируется посредством переключений. Статья [7] посвящена моделированию влияния неполной вакцинации на распространение инфекции с использованием системы с переключениями. Особый интерес в данном анализе представляют скользящие режимы. В работах [1, 4] представлены двумерные гибридные системы с режимом «убежища». Для конкретных векторных полей построен режим скольжения на прямой $x = \lambda y$, исследована соответствующая динамика с переключениями.

Однако режим скольжения описывает идеальную динамику, тем более не реализующуюся в экологических системах, для которых не характерны быстрые переключения. Для преодоления этого недостатка в настоящей работе предлагается метод регуляризации гибридной системы, позволяющий снизить число переключений между подсистемами, и, тем самым, избежать учащающихся переключений (chattering) [8, 9]. Под регуляризацией гибридной системы с переключениями понимается сведение задачи со скользящим режимом к форме, для которой применимы классические методы исследования, тем самым избегая скольжения [8]. В [8] предложены некоторые конкретные методы регуляризации, такие как, например, введение запаздывания при переключениях или метод пограничного слоя. Метод, используемый в настоящей работе в некотором смысле аналогичен методу пограничному слоя.

Далее рассмотрим подробнее гибридную модель динамики популяций типа «хищник—жертва» с внутривидовой конкуренцией жертв, представленную в [4]. В качестве фазового пространства системы естественно рассматривать множество $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Линией переключения в данной модели является луч $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \lambda y\}$, где x, y — количественные характеристики популяций жертв и хищников, соответственно, $\lambda > 0$ — заданная пороговая постоянная, характеризующая минимальное количество жертв, необходимое хищнику в единицу времени для поддержания всех жизненных функций, $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$. Смысл такой линии переключения состоит в следующем. Если количество жертв, приходящихся на одного хищника, достаточно велико, имеется взаимодействие популяций типа «хищник—жертва». В противном случае, при $\frac{x}{y} < \lambda$, система переходит в так называемый режим «убежища» (Refuge-regime), при котором взаимодействие популяций хищника и жертвы отсутствует.

Для описания динамики популяций в режиме взаимодействия при условии, что количество жертв, приходящихся на одного хищника, достаточно велико, то есть $\frac{x}{y} > \lambda$, рассмотрим модель, представленную в [3]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - by - cx) = f_1(x, y), \\ \dot{y} &= y(kbx - m) = f_2(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t), y(t)$ — численности популяций жертв и хищников, соответственно, $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ — коэффициент прироста жертв в отсутствие хищников, $b > 0$ — коэффициент интенсивности потребления хищником жертв, $m > 0$ — коэффициент естественной смертности хищников, $0 < k < 1$ — доля полученной с потребляемой хищником биомассой энергии, которая расходуется им на воспроизводство, $c > 0$ описывает внутривидовую конкуренцию. Таким образом, система (1) действует в множестве $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x > \lambda y\} \subset \mathbb{R}^2_+$. В [3] показано, что система (1) имеет единственное асимптотически устойчивое равновесие $P = (x^*, y^*)$, где $x^* = \frac{m}{kb}$, $y^* = \frac{akb - cm}{kb^2}$ при условии

$$\frac{m}{kb} < \frac{a}{c}.$$

При этом, если $cm(c + 4kb) < 4a(kb)^2$, то $P = (x^*, y^*)$ — фокус, а $cm(c + 4kb) > 4a(kb)^2$, то $P = (x^*, y^*)$ — узел.

Однако, когда число жертв становится достаточно малым, то есть $\frac{x}{y} < \lambda$, хищникам сложно их найти, и система переключается в так называемый режим убежища (Refuge-regime) (см. [1, 4]), который в данном исследовании задаётся системой вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - cx) = g_1(x, y), \\ \dot{y} &= -my = g_2(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, система (2) действует в множестве $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x < \lambda y\} \subset \mathbb{R}^2_+$. Отметим, что в системе (2) отсутствует взаимодействие между хищниками и жертвами. Линеаризуя систему (2), нетрудно установить, что она имеет единственное асимптотически устойчивое равновесие $\left(\frac{a}{c}, 0\right)$.

Пусть, $\lambda \neq \lambda^*$, где $\lambda^* = \frac{mb}{akb-cm}$, то есть, положение равновесия системы (1) не лежит на луче l.

Замечание 1. Равенство $\lambda = \lambda^*$ задаёт поверхность коразмерности 1 в 6-мерном арифметическом пространстве параметров. Соответствующее множество параметров имеют лебегову меру ноль. В статье же рассматриваются случаи общего положения, что естественно при анализе процессов на основе конкретных математических моделей.

Определение 1. Будем называть псевдоравновесием гибридной системы точку X, лежащую на линии переключения, если векторное поле скольжения в этой точке нулевое, $v(X) = (0, 0)$.

Определение 2. Будем называть равновесие P или псевдоравновесие $\tilde{P}$ системы ОДУ глобально устойчивым, если решение этой системы $r(t, z_0) \to P(\tilde{P})$ при $t \to \infty$ для любой начальной точки z_0.

Теорема 1 [4]. *Пусть $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Тогда равновесие $P = \left(\frac{m}{kb}, \frac{akb-cm}{kb^2}\right)$ глобально устойчиво в $\mathbb{R}^2_+$ для гибридной системы (1), (2).*

Теорема 2 [4]. *Пусть $\lambda > \lambda^*$. Тогда у гибридной системы (1), (2) существует глобально устойчивое псевдоравновесие*

$$\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{ak\lambda - m}{kc\lambda}, \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2}\right).$$

Проведём регуляризацию представленной модели. Суть данной техники состоит в изменении модели таким образом, чтобы переключения происходили с задержкой. В данной работе регуляризация системы происходит за счёт введения двух линий переключения $l_1 : x = \lambda_1 y$ и $l_2 : x = \lambda_2 y$, $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. При этом, на l_1 переключение происходит только от системы со взаимодействием популяций (1) к режиму убежища (2), а на l_2 наоборот. При использовании регуляризации такого типа возникает проблема исследования чувствительности результата к изменениям параметров, задающих линию переключения. Как будет показано, в предлагаемой модели в случае $\lambda < \lambda^*$ качественное поведение системы сохраняется, а при $\lambda > \lambda^*$ появляются предельные циклы. При этом, если предельный цикл единственный, то он является глобально устойчивым.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

1.1. Обозначения

Пусть $z_0 \in \mathbb{R}^2_+$ — начальная точка. Обозначим, $r(t, z_0)$ — решение системы (1), где $r(0, z_0) = z_0$, $r_R(t, z_0)$ — решение системы (2), где $r_R(0, z_0) = z_0$. Обозначим, $\gamma(z_0)$ — положительную полутраекторию системы (1), которая, как известно [3], является либо закручивающейся спиралью, при $cm(c + 4kb) < 4a(kb)^2$, либо параболой, при $cm(c + 4kb) > 4a(kb)^2$, $\zeta(z_0)$ — положительную полутраекторию системы (2).

Определение 3. Под положительной полутраекторией гибридной системы будем понимать последовательность отрезков положительных полутраекторий систем (1), (2), где конечная точка каждого отрезка является начальной для следующего.

Будем обозначать интервалы лучей $(AB) \subset l = \{(x, y) \in l : y_a < y < y_b\}$, где $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \theta y\}$, $\theta > 0$, $A = (x_a, y_a) \in l, B = (x_b, y_b) \in l$. Введём также порядок точек на луче: будем писать $A < B$, где $A = (x_a, y_a) \in l$, $B = (x_b, y_b) \in l$, если $x_a < x_b$.

1.2. Регуляризация модели

Далее работа будет посвящена регуляризации описанной выше модели. Для регуляризации модели введём два луча переключения. Рассмотрим гибридную динамическую систему, в которой системы (1) и (2) последовательно переключаются между собой. Переключение от системы (1) к (2) происходит на луче $l_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \lambda_1 y\}$, обратное переключение происходит на луче $l_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \lambda_2 y\}$, где $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Переключения предполагаются мгновенными и происходят строго по очереди. Тем самым, за счёт введения двух лучей переключения l_1, l_2, реализуется задержка при переключении и происходит регуляризация гибридной системы, позволяющая избежать учащающегося переключения между системами, которое невозможно на практике для экологических систем.

Пусть, $\lambda_1, \lambda_2 \neq \lambda^*$, то есть, положение равновесия системы (1) не лежит на лучах l_1, l_2.

Ясно, что если z_0 расположена в области $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x < \lambda_1 y\}$, то движение из неё будет происходить по траектории $\zeta(z_0)$, если z_0 расположена в области $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x > \lambda_2 y\}$, то движение из неё будет происходить по траектории $\gamma(z_0)$. Если начальная точка $z_0 \in \mathbb{R}^2_+$, расположена в области $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : \lambda_1 y < x < \lambda_2 y\}$, то через неё проходят две положительные полутраектории систем (1) и (2), соответственно. Таким образом, для определения решения с начальной точкой $z_0 \in E$ требуется дополнительно определить начальный режим — (1) или (2).

2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. *Существуют единственная положительная полутраектория γ_1^* системы (1) и единственная положительная полутраектория ζ_1^* системы (2), для которых луч l_1 является касательным.*

Нетрудно показать, что точки касания луча l_1 и положительных полутраекторий систем (1), (2) имеют вид

$$Q_1 = (x_{q1}, y_{q1}) = \left(\frac{(a+m)\lambda_1}{c\lambda_1 + b(1+k\lambda_1)}, \frac{a+m}{c\lambda_1 + b(1+k\lambda_1)}\right) = \gamma_1^* \cap l_1,$$

$$\tilde{Q}_1 = (x_{\tilde{q}1}, y_{\tilde{q}1}) = \left(\frac{a+m}{c}, \frac{a+m}{c\lambda_1}\right) = \zeta_1^* \cap l_1.$$

Лемма 2. *Существуют единственная положительная полутраектория γ_2^* системы (1) и единственная положительная полутраектория ζ_2^* системы (2), для которых луч l_2 является касательным.*

Нетрудно показать, что точки касания луча l_2 и положительных полутраекторий систем (1), (2) имеют вид

$$Q_2 = (x_{q2}, y_{q2}) = \left(\frac{(a+m)\lambda_2}{c\lambda_2 + b(1+k\lambda_2)}, \frac{a+m}{c\lambda_2 + b(1+k\lambda_2)}\right) = \gamma_2^* \cap l_2,$$

$$\tilde{Q}_2 = (x_{\tilde{q}2}, y_{\tilde{q}2}) = \left(\frac{a+m}{c}, \frac{a+m}{c\lambda_2}\right) = \zeta_2^* \cap l_2.$$

Как можно видеть, точки касания $Q(\lambda) = \left(\frac{(a+m)\lambda}{c\lambda+b(1+k\lambda)}, \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}\right)$ лежат на отрезке прямой $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = \frac{a+m}{b} - \frac{c+bk}{b}x\}$, концами которого являются Q_1 и Q_2. Отметим также, что возможен случай, когда $\gamma_1^* = \gamma_2^* = \gamma^*$, однако такая особенность не повлияет на дальнейшие выводы.

2.1. Диффеоморфизмы, порождённые траекториями систем (1), (2)

Определение 4. Пусть точка $z \in l_2$ такова, что траектория системы (1), проходящая через z, первый раз (в смысле наименьшего временного промежутка) пересекает луч l_1 в некоторой точке $\tilde{z}$. Тогда имеем отображение $F : z \to \tilde{z} = F(z)$, которое будем называть отображением Пуанкаре луча l_2 в l_1. Аналогично можно определить отображение Пуанкаре луча l_1 в l_2 вдоль траекторий системы (2).

Лемма 3. *Пусть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2 < \lambda^*$. Тогда определён диффеоморфизм (отображение Пуанкаре) F:*

$$F\colon [A_2\infty) \to [Q_1\infty),$$

$$F(z) = r(t^1(z), z) \in [Q_1\infty),$$

где $t^1(z)$ — момент времени, такой что $r(t,z) \in E \cup E_2$ для любого $t \in (0, t^1(z))$.

Доказательство. Обозначим, $r^*(t, z_0)$ — решение системы (1), соответствующее положительной полутраектории γ_1^*. Покажем, что при $\lambda < \lambda^*$ существует точка $A_1 = (x_{a1}, y_{a1}) \in l_2$, такая что $r^*(t_1, z_0) = A_1$, $r^*(t_q, z_0) = Q_1$, $r^*(t, z_0) \notin l_i, i = 1, 2$ при $t \in (t_q, t_1)$, $t_q < t_1$, то есть, A_1 — первая точка пересечения γ_1^* и l_2 после касания с l_1 в Q_1. Поскольку равновесие $P \in E_2$ глобально устойчиво в $\mathbb{R}^2_+$ для системы (1), то за конечное время положительная полутраектория γ_1^* из точки Q_1 попадает в E_2, пересекая луч $l_2 \subset \partial E_2$ в некоторой точке A_1. Покажем, что существует точка $A_2 = (x_{a2}, y_{a2}) \in l_2$, такая что $r^*(t_2, z_0) = A_2$, $r^*(t_q, z_0) = Q_1$, $r^*(t, z_0) \notin l_i$, $i = 1, 2$ при $t \in (t_2, t_q)$, $t_2 < t_q$ для начальной точки z_0, то есть, A_2 — последняя точка пересечения γ_1^* и l_2 до касания с l_1 в Q_1. Пусть, $\tau = (-1, \lambda)$ — нормаль к лучу $l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \lambda y\}$, направленная из E в E_1, где $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Обозначим, $H(y) = f \cdot \tau$ — скалярное произведение векторного поля f на τ. Имеем для $z = (x, y) \in l$

$$H(y) = \lambda y(c\lambda + b(1 + \lambda k)y - (a + m)).$$

Тогда, в $\mathbb{R}^2_+$, $H(y) > 0$ при $y > \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$, где $\frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$ — ордината точки касания Q луча l с положительной полутраекторией системы (1). Таким образом, при обратном ходе времени любой луч l пересекается положительными полутраекториями системы (1) в направлении из E_1 в E, что означает существование точки A_2. Очевидно, в случае существования нескольких точек пересечения γ_1^* и l_2 из них можно выбрать первую до касания γ_1^* с l_1 и последнюю после касания. Обозначим, $(A_2\tilde{Q}_2) = \{(x, y) \in l_2 : y_{a2} < y < \tilde{y}_{q2}\}$, $F(\tilde{Q}_2) = \gamma(\tilde{Q}_2) \cap l_1$, $(Q_1 F(\tilde{Q}_2)) = \{(x, y) \in l_1 : y_{q1} < y < \tilde{y}_{q2}\}$.

Ясно, что для открытого интервала (A_1A_2) не существует образа при отображении F, поскольку для того, чтобы положительной полутраектории $\gamma(z)$ при $z \in (A_1A_2)$ пересечь l_1, ей необходимо пересечь γ_1^*, что невозможно, и $\gamma(z) \cap l_1 = \varnothing$. Поскольку l_1 касается γ_1^*, и пересечение положительных полутраекторий невозможно, то положительная полутраектория $\gamma(z) \subset E_2$ для любой $z \in (OA_2)$. Отметим также, что на промежутке $(OA_1]$ при переключении от системы (2) к системе (1) происходит прошивание из области E в область E_2, то есть, векторы скоростей обеих систем (1), (2) на интервале (OA_1) направлены в область E_2. Поскольку для любой $z \in (OA_1]$ справедливо $\gamma(z) \cap \gamma_1^* = \varnothing$, то для любой $z \in (OA_1]$ имеем, $\gamma(z) \subset E_2$, то есть, $\gamma(z) \cap l_1 = \varnothing$. При этом, $(0A_1]$ либо отображается вдоль траекторий системы (1) в (A_1A_2), либо $\gamma(z) \cap l_2 = \varnothing$. Положительная полутраектория $\gamma(z)$ при $z \in (A_2\infty)$ имеет хотя бы одну общую точку с l_1, поскольку в противном случае $\gamma(z)$ пересечёт γ_1^*, что невозможно. Следовательно, для $z \in (A_2\infty)$ существует $t(z) : z \in (A_2\infty), r(t(z), z) \in (Q_1\infty)$. Обозначим $t_m = \min t(z)$, где $r(t(z), z) \in (Q_1\infty)$. Очевидно, для точки A_2 существует единственное t_m, такое что $Q_1 = r(t_m, A_2) \in l_1$. □

Из леммы 3 следует, что $F(z) = r(t_m, z) \in [Q_1\infty)$, где $z \in [A_2\infty)$.

Лемма 4. *Пусть $\lambda^* < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Тогда определён диффеоморфизм (отображение Пуанкаре) F:*

$$F\colon (Q_2\infty) \to (Q_1\infty),$$

$$F(z) = r(t^2(z), z) \in (Q_1\infty),$$

где $t^2(z)$ — момент времени, такой что $r(t,z) \in E \cup E_2$ для любого $t \in (0, t^2(z))$.

Доказательство. Пусть $\tau = (-1, \lambda)$ — нормаль к лучу $l(\lambda) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \lambda y\}$, где $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Тогда скалярное произведение

$$f \cdot \tau = \lambda y (y(c\lambda + b + kb\lambda) - (a+m)).$$

Имеем, $f(z) \cdot \tau(z) > 0$ при $y > \frac{a+m}{c\lambda + b(1+k\lambda)}$, $f(z)\cdot\tau(z) < 0$ при $y < \frac{a+m}{c\lambda+b(1+k\lambda)}$, для $z \in l(\lambda) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \lambda y\}$. Положительная полутраектория $\gamma(z)$ имеет хотя бы одну общую точку с l_1, поскольку равновесие P глобально устойчиво для системы (1), и $\lambda^* < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Следовательно, существует $t(z) : z \in (Q_2\infty), r(t(z), z) \in (Q_1\infty)$. Обозначим $t_m = \min t(z)$, где $r(t(z), z) \in (Q_1\infty)$. □

Из леммы 4 следует, что $F(z) = r(t_m, z) \in (Q_1\infty)$, где $z \in (Q_2\infty)$.

Замечание 2. В дальнейшем для удобства отождествляем записи $GF(z_0)$ и $G(F(z_0))$.

Найдём области определения и значений диффеоморфизма G, отображения Пуанкаре, порождённого траекториями векторного поля $g = (g_1, g_2)$ системы (2).

Лемма 5. *Пусть $x < \frac{a+m}{c}$. Тогда определён диффеоморфизм (отображение Пуанкаре) G:*

$$G\colon l_1 \to (O\tilde{Q}_2),$$

$$G(z) = r_R(t^3(z), z) \in (O\tilde{Q}_2),$$

где $t^3(z)$ — момент времени, такой что $r_R(t,z) \in E \cup E_1$ для любого $t \in (0, t^3(z))$.

Доказательство. Пусть $\tau = (-1, \lambda)$, где $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Тогда скалярное произведение

$$g \cdot \tau = -\lambda y (a + m - c\lambda y).$$

Имеем, $g(z) \cdot \tau(z) > 0$ при $y > \frac{a+m}{c\lambda}$, $g(z) \cdot \tau(z) < 0$ при $y < \frac{a+m}{c\lambda}$, для $z \in l(\lambda) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \lambda y\}$. Положительная полутраектория $\zeta(z)$ имеет хотя бы одну общую точку с l_2, поскольку равновесие $\left(\frac{a}{c}, 0\right)$ глобально устойчиво для системы (2). Следовательно, существует $t(z) : z \in l_1, r_R(t(z), z) \in (O\tilde{Q}_2)$. Обозначим $t_m = \min t(z)$, где $r_R(t(z), z) \in (O\tilde{Q}_2)$. Ясно, что в силу невозможности пересечения положительных полутраекторий $G(z) < \tilde{Q}_2$ для любого $z \in l_1$, так как $\tilde{Q}_2 = \left(\frac{a+m}{c}, \frac{a+m}{\lambda c}\right) = \zeta_2^* \cap l_2$ — точка касания, а касательная положительная полутраектория $\zeta_2^* \subset E_2$. □

Из леммы 5 следует, что $G(z) = r_R(t_m, z) \in (O\tilde{Q}_2)$, где $z \in l_1$.

Лемма 6. *Множество точек касания лучей $l(\lambda) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \lambda y\}$ и положительных полутраекторий системы (1) имеет вид*

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = \frac{a+m}{b} - \frac{c+bk}{b}x\}.$$

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 7. *Пусть $\lambda > \lambda^*$, $L = \{z = (x, y) : f(z) = \mu g(z)\}$, где $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = \frac{k}{m} x(a - cx)\}.$$

Доказательство. Пусть $f = \mu g$. Если $M \in L$, то нетрудно показать, что $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : y = \frac{k}{m} x(a - cx)\}$.

Псевдоравновесие $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{ak\lambda - m}{kc\lambda}, \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2}\right)$. Отсюда, $\tilde{x}kc\lambda = \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda}$, следовательно, $\lambda = \frac{m}{k(a - c\tilde{x})}$. Подставив полученное λ в выражение для $\tilde{y}$, получим, $\tilde{y} = \frac{k}{m} x(a - cx)$. □

Следствие 1. Равновесие $P = S \cap L$, псевдоравновесие $\tilde{P}(\lambda) = \left(\frac{ak\lambda - m}{kc\lambda}, \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2}\right) \in L$ для любого $\lambda > \lambda^*$.

Лемма 8. *Пусть $\lambda > \lambda^*$, $\tau(x) = (y'(x), -1) = (\frac{k}{m}(a - 2cx), -1)$ — нормаль к L в точке $z = \left(x, \frac{k}{m} x(a - cx)\right)$. Тогда*

$$f(z) \cdot \tau(x) = \frac{bk^2}{m^2} x(a - cx)(a + m - 2cx) \left(\frac{m}{bk} - x\right),$$

$$g(z) \cdot \tau(x) = \frac{k}{m} x(a - cx)(a + m - 2cx),$$

где $\tau(x) = (y'(x), -1) = (\frac{k}{m}(a - 2cx), -1)$ — нормаль к L в точке $z = \left(x, \frac{k}{m} x(a - cx)\right)$.

Доказательство. Найдём скалярные произведения $f(z) \cdot \tau(x)$, $g(z) \cdot \tau(x)$:

$$f(z) \cdot \tau(x) = \frac{k}{m}(a - 2cx)x\left(a - \frac{k}{m} x(a - cx) - cx\right) + \frac{k}{m} x(a - cx)(kbx - m) = \\ = \frac{bk^2}{m^2} x(a - cx)(a + m - 2cx)\left(\frac{m}{bk} - x\right).$$

$$g(z) \cdot \tau(x) = \frac{k}{m}(a - 2cx)x(a - cx) + m\frac{k}{m} x(a - cx) = \frac{k}{m} x(a - cx)(a + m - 2cx).$$

□

Следствие 2. Рассмотрим скалярное произведение $f(z) \cdot g(z)$, где $z = (x, y) \in L$ (рис. 1).
Если $m \geqslant a$, то
$f \cdot g > 0$, $f \cdot \tau > 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x < \frac{m}{bk}$,
$f \cdot g < 0$, $f \cdot \tau < 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x \in \left(\frac{m}{bk}, \frac{a}{c}\right)$.
Если $m < a$, $\frac{m}{bk} < \frac{a+m}{2c} < \frac{a}{c}$, то
$f \cdot g > 0$, $f \cdot \tau > 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x < \frac{m}{bk}$,
$f \cdot g < 0$, $f \cdot \tau < 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x \in \left(\frac{m}{bk}, \frac{a}{c}\right)$,
$f \cdot g < 0$, $f \cdot \tau < 0$, $g \cdot \tau < 0$ при $x > \frac{a}{c}$.
Если $m < a$, $\frac{m}{bk} > \frac{a+m}{2c}$, то
$f \cdot g > 0$, $f \cdot \tau > 0$, $g \cdot \tau > 0$ при $x < \frac{a+m}{2c}$,
$f \cdot g > 0$, $f \cdot \tau < 0$, $g \cdot \tau < 0$ при $x \in \left(\frac{a+m}{2c}, \frac{m}{bk}\right)$,
$f \cdot g < 0$, $f \cdot \tau > 0$, $g \cdot \tau < 0$ при $x > \frac{m}{bk}$.

Следствие 2 показывает взаимное расположение векторных полей f, g и нормали τ к кривой L, и векторных полей f, g между собой, что даёт геометрическую характеристику поведения траекторий на L.

Обозначим, $D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : y > \frac{a+m}{b} - \frac{c+bk}{b} x, \frac{x}{\lambda_2} < y < \frac{x}{\lambda_1}\}$, $L_d = L \cap D$. Представим D_0 в виде объединения $D_0 = D_1 \cup D_2$, где $D_1 \cap D_2 = L_d$, $(Q_1 Q_2) \subset \bar{D}_1$, $L_d \subset \bar{D}_2$. Отметим, что такое разбиение корректно, поскольку $\tilde{x}_1 > x_{q1}$, $\tilde{x}_2 > x_{q2}$.

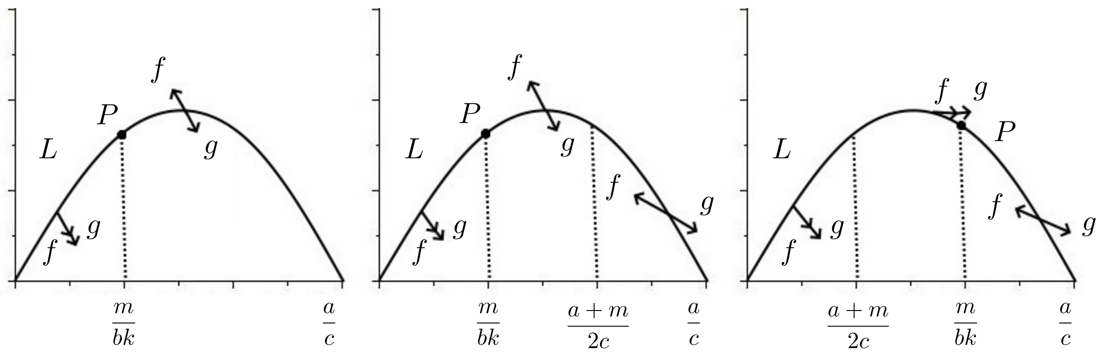


Рис. 1. Векторные поля f, g систем (1), (2) на L

Лемма 9. *Пусть* $\lambda > \lambda^*$ *и существует точка* $B = (x_b, y_b) = (Q_1Q_2) \cap \zeta(\tilde{P}_1)$, *где* $\tilde{P}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$. *Тогда существует* $\hat{\lambda} > \lambda_2$ *такое, что* $\tilde{x}_1 < x_b$ *(рис. 2(a)).*

Доказательство. Поскольку $\tilde{P}_1 \in L$, то $\tilde{x}_1 < \frac{a}{c}$, и, следовательно, скалярное произведение $g(\tilde{P}_1) \cdot (1, 0) = x(a - cx) > 0$.

Найдём точку $\tilde{B} = (\tilde{x}_b, \tilde{y}_b) = l_2 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x = \tilde{x}_1\}$. Имеем

$$\tilde{y}_b = \frac{a+m}{b} - \frac{c+bk}{b}\lambda_2\tilde{y}_b.$$

Отсюда, $\tilde{y}_b = \frac{a+m}{b+(c+bk)\lambda_2}$. Следовательно, $\tilde{y}_b$ убывает при возрастании λ_2. Пусть $\hat{\lambda}$ такое, что $B = l(\lambda^*) \cap \zeta(\tilde{P}_1)$. Тогда, при $\lambda_2 < \hat{\lambda}$, получим, $\tilde{y}_b > y_b$ и $\tilde{x}_1 < x_b$. □

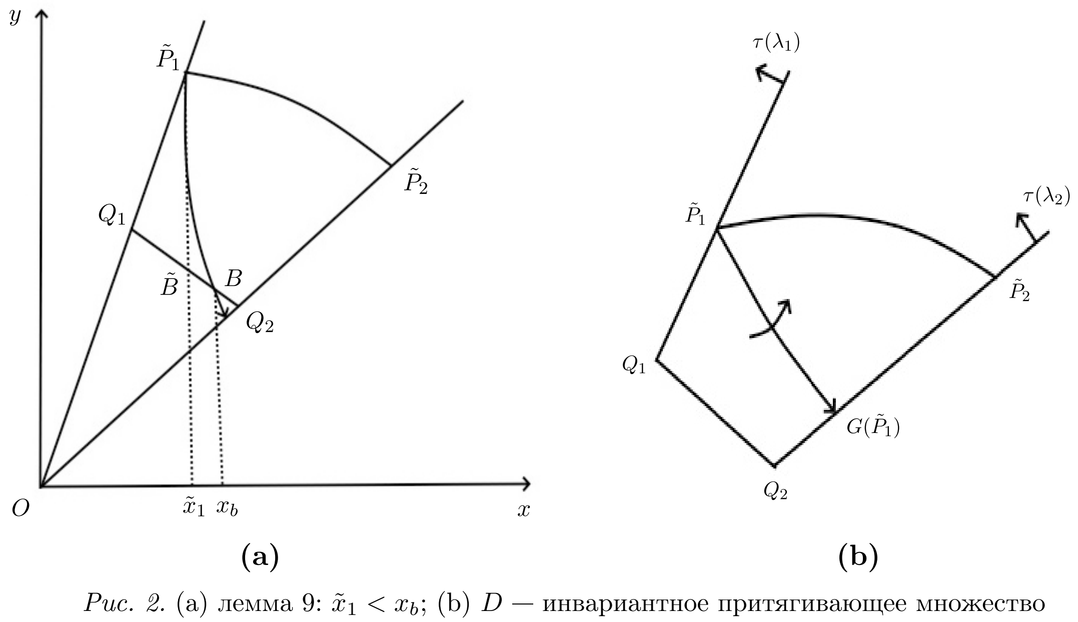


Рис. 2. (a) лемма 9: $\tilde{x}_1 < x_b$; (b) D — инвариантное притягивающее множество

Следствие 3. При достаточно малой разности $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$: $G(\tilde{P}_1) > Q_2$.

При достаточно малом $\lambda_2 - \lambda_1$, по Следствию к лемме 9, $G(\tilde{P}_1) \in (Q_2\infty)$. Обозначим, $D \subset D_0$ — неограниченное множество, имеющее в качестве границ лучи l_1, l_2 и положительную полутраекторию $\zeta(\tilde{P}_1)$ ($\zeta(\tilde{P}_1)$ — связное множество).

Теорема 3. *Пусть $\lambda > \lambda^*$ и $\lambda_2 - \lambda_1$ достаточно мало. Тогда для любой начальной точки z_0 положительная полутраектория гибридной системы (1), (2) за конечное время входит в D и остаётся в D, то есть D — инвариантное притягивающее множество (аттрактор) (рис. 2(b)).*

Доказательство. Для любого $z \in (\tilde{P}_1\infty)$ скалярное произведение $g(z) \cdot \tau(\lambda) < 0$ для любого $0 < \lambda \leqslant \lambda_1$ (см. доказательство леммы 5). Следовательно, $\zeta(z)$ входит в D через $(\tilde{P}_1\infty)$.

Для любого $z \in (G(\tilde{P}_1)\infty)$ скалярное произведение $f(z) \cdot \tau(\lambda) > 0$ для любого $\lambda \geqslant \lambda_2$ (см. доказательство леммы 4). Следовательно, $\gamma(z)$ входит в D через $(G(\tilde{P}_1)\infty)$.

Для любого $z \in \zeta(\tilde{P}_1)$ вектор $f(z)$ направлен в D. Следовательно, $\gamma(z)$ входит в D через $\zeta(\tilde{P}_1)$. Очевидно, положительные полутраектории $\zeta(z)$ при $z \in D$ не могут покинуть D через $\zeta(\tilde{P}_1)$, поскольку пересечение траекторий невозможно. □

2.2. Взаимное положение траекторий систем (1), (2)

Лемма 10. *Пусть $\lambda < \hat{\lambda}$, $A_2 < \tilde{Q}_2$. Тогда для любого $\lambda_2 \in \left(\lambda, \hat{\lambda}\right)$ для любых начальных точек $z_0 \in (A_2\tilde{Q}_2)$ справедливо $GF(z_0) < z_0$.*

Доказательство. Обозначим, $W = A_2Q_1F(\tilde{Q}_2)\tilde{Q}_2 \subset E$ — множество, ограниченное лучами l_1, l_2 и положительными полутраекториями γ^* и $\gamma(\tilde{Q}_2)$.

Проведём доказательство методом от противного. Предположим, что существует точка $z_0 \in (A_2\tilde{Q}_2)$, такая что $GF(z_0) \geqslant z_0$. Тогда существует $z \in W$, такая что $z = \gamma(z_0) \cap \zeta(F(z_0))$. Положительная полутраектория $\gamma(z_0)$ разбивает W на два множества: ограниченное W_1, W_2, где $A_2 \in W_1$, $\tilde{Q}_2 \in W_2$. Чтобы $GF(z) \geqslant z$ необходимо, существование точки $z = \gamma(z_0) \cap \zeta(F(z_0))$. При этом, векторное поле $g(z)$ должно быть направлено в область W_2. Ясно, что существует $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, такое что $z \in l(\lambda)$. Тогда, если $v(z) = (v_1, v_2) \subset l(\lambda)$ — филипповское векторное поле в точке $z \in l(\lambda)$, то $v_1 > 0$, $v_2 > 0$. Последнее невозможно, так как филипповское векторное поле для любой точки z на луче $l(\lambda)$ имеет вид

$$v(z) = (v_1, v_2) = yS(y)(\lambda i + j), \tag{3}$$

где $S(y) = \frac{(ak\lambda - m - kc\lambda^2 y)}{1 + k\lambda}$, i, j — соответствующие орты. Тогда, если $\lambda < \frac{m}{ak}$, то $S(y) < 0$ для всех $y > 0$, если $\lambda \in \left(\frac{m}{ak}, \hat{\lambda}\right)$ имеем, $S(y) < 0$ при $y > \frac{ak\lambda - m}{kc\lambda^2} = \tilde{y}_2$. Следовательно, $S(y) < 0$ для всех $z \in W$. Итак, для $z = \gamma(z_0) \cap \zeta(F(z_0))$ имеем, $v_1 < 0$, $v_2 < 0$. Получили противоречие, следовательно, $GF(z_0) < z_0$. □

Лемма 11. *Пусть $\lambda > \hat{\lambda}$. Тогда для любого $\lambda_1 \in \left(\hat{\lambda}, \lambda\right)$ справедливо*
$GF(z_0) < z_0$, если $z_0 \in D_2$,
$GF(z_0) > z_0$, если $z_0 \in D_1$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in D_2$. Проведём доказательство методом от противного. Предположим, что существует точка $z \in l_2 \cap D_2$, такая что $GF(z) \geqslant z$. Ясно, что существует $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, такое что $z \in l(\lambda)$. Положительная полутраектория $\gamma(z)$ разбивает D_2 на два множества: ограниченное W_1, где $L_d \subset W_1$, и неограниченное W_2. Чтобы $GF(z) \geqslant z$ необходимо, чтобы векторное поле $g(z)$ было направлено в область W_2. Тогда, если $v(z) = (v_1, v_2)$ — филипповское векторное поле в точке $z \in l_2$, то $v_1 > 0$, $v_2 > 0$. Последнее невозможно, так как филипповское векторное поле для любой точки z на луче $l(\lambda)$ имеет вид (3). Следовательно, $v_1 < 0$, $v_2 < 0$ в D_2. Получили противоречие, следовательно, $GF(z_0) < z_0$.

Аналогичные рассуждения можно провести для $z_0 \in D_1$. □

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

3.1. Случай $\lambda < \lambda^*$

Теорема 4. *Пусть $\lambda < \lambda^*$. Тогда существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для любого $\lambda_2 \in (\lambda, \lambda + \delta)$ для любой начальной точки гибридной системы (1), (2) положение равновесия P глобально устойчиво в $\mathbb{R}^2_+$ (рис. 3).*

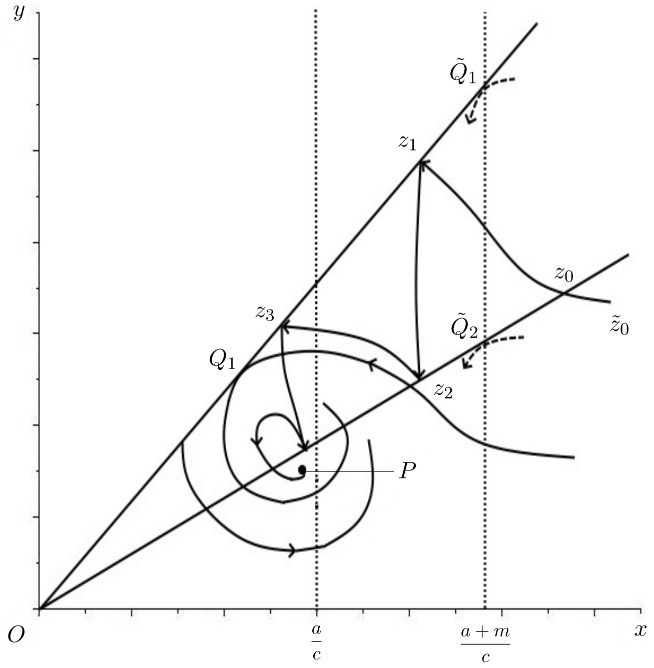


Рис. 3. Глобальная устойчивость P при $\lambda < \lambda^*$

Доказательство. Пусть начальная точка $\tilde{z}_0 \in E_1 \cup E$, причём начальным режимом в E является, является режим убежища, описываемый системой (2). Тогда, согласно вышеизложенному, существует единственная точка $z_0 = \gamma(\tilde{z}_0) \cap l_2$.

Пусть начальная точка $\tilde{z}_0 \in E_2 \cup E$, причём начальным режимом в E является режим взаимодействия, описываемый системой (1). Тогда либо существует $z_0 = (x_0, y_0) = r(t_l, \tilde{z}_0) \in l_2$, такая что $r(t, \tilde{z}_0) \notin l_2$ для всех $t \in [0, t_l)$, либо $\gamma(\tilde{z}_0) \subset E_2$, и, следовательно, $r(t, \tilde{z}_0) \to P$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим случай, когда $\gamma(\tilde{z}_0) \cap l_2 = z_0$. Пусть точка касания $\tilde{Q}_2 > A_2$, где $\tilde{Q}_2 = \gamma_1^* \cap l_2$. Возможны четыре случая, в зависимости расположения точки z_0.

Случай 1: $z_0 \in (A_1A_2)$. Поскольку $\gamma_1^* \cap \gamma(z_0) = \varnothing$, то $\gamma(z_0) \cap l_1 = \varnothing$, и переключение к системе (2) не произойдёт. Таким образом, $\gamma(z_0) \subset E_2 \cup E$, и $r(t, \tilde{z}_0) \to P$ при $t \to \infty$ [3].

Случай 2: $z_0 \in (OA_1]$. Как было указано ранее, на $(OA_1]$ имеем прошивание из E в E_2, при этом $\gamma_1^* \cap l_2 = A_1$. Таким образом, как было указано ранее, $(0A_1]$ либо отображается вдоль траекторий системы (1) в (A_1A_2), либо $\gamma(z_0) \cap l_2 = \varnothing$. Поэтому $F(z_0) = \varnothing$, и $\gamma(z_0) \subset E_2 \cup E$. Следовательно, $r(t, \tilde{z}_0) \to P$ при $t \to \infty$.

Случай 3: $z_0 \in (A_2\tilde{Q}_2)$. В этом случае $\gamma(z_0) \cap l_1 = z_1 = (x_1, y_1)$, и происходит переключение к (2), далее $\zeta(z_0) \cap l_2 = z_2 = (x_2, y_2)$. По лемме 10, $z_2 < z_0$. Повторяя данную процедуру, получаем последовательность точек $z_i, i = 0, 1, \ldots$, где $z_{2i+1} \in l_1$, $z_{2i} \in l_2$. Покажем, что существует $i^* \in \mathbb{N}$, такое что $z_{2i^*} \in (0A_2)$. Предположим обратное, что $z_{2i} \in (A_2\tilde{Q}_2)$ для всех $i = 0, 1, \ldots$. В силу невозможности пересечения положительных полутраекторий и леммы 10, имеем $z_{2i+1} < z_{2i-1}$ для любого i. Таким образом, получаем две убывающие числовые последовательности x_{2i-1}, y_{2i-1}, ограниченные снизу. Следовательно, у каждой из них существует предел $x_l = \lim_{i\to\infty} x_{2i-1}$, $y_l = \lim_{i\to\infty} y_{2i-1}$. Обозначим, $z_l = (x_l, y_l)$. Если $x_l > x_{q1}$, то существует $\tilde{z}_l = (\tilde{x}_l, \tilde{y}_l) = FG(z_l)$, и $\tilde{x}_l < x_l$ (лемма 10), что противоречит тому, что $x_{2i-1} \to x_l$. Следовательно, $z_l = Q_1$. Тогда, в силу непрерывности g_i, $i = 1, 2$, предельной точкой для $z_{2i} \in l_2$ будет $G(Q_1)$. По лемме 10, $G(Q_1) \in (OA_2)$, и в силу непрерывности g_i, $i = 1, 2$, существует i^*, такое что $z_{2i^*} \in (OA_2)$. Таким образом, переходим либо к случаю 1, либо к случаю 2, в каждом из которых $r(t, \tilde{z}_0) \to P$ при $t \to \infty$.

Случай 4: $z_0 \in (\tilde{Q}_2\infty)$. В этом случае $\gamma(z_0) \cap l_1 = z_1 = (x_1, y_1)$, и происходит переключение к (2), далее $\zeta(z_0) \cap l_2 = z_2 = (x_2, y_2)$. Как было показано ранее, $z_2 \in (A_2\tilde{Q}_2)$, и далее переходим к случаю 3.

Если $A_2 > \tilde{Q}_2$, то для любого $z_0 \in l_2$ получим либо $z_2 \in (A_1A_2)$, либо $\gamma(z_0) \cap l_1 = \varnothing$, и дальнейшее переключение к системе (2) невозможно. □

3.2. Случай $\lambda > \lambda^*$

Будем понимать под траекторией точки $p \in \mathbb{R}^2_+$ гибридной системы с переключениями, как это общепринято, траекторию, сшитую (в моменты переключений решений) из дуг траекторий систем (1), (2), а именно множество $\eta(p) = \{f(t,p), t \in \mathbb{R}\}$, где $f(t,p)$ — соответствующее этой траектории решение, $f(0,p) = p$, f — непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция, совпадающая с решением системы (1) или (2) на временных промежутках, ограниченных точками переключения. Точнее, пусть $\{\tau_i\}$ — множество моментов времени переключения между (1) и (2), $i \in \mathbb{N}$, $\tau_i < \tau_{i+1}$. Предположим, что при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ динамика задаётся системой (1). Тогда $f(t,p) = r(t - \tau_{i-1}, p)$ при $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$ Далее, пусть при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ динамика регулируется системой (2). Тогда $f(t,p) = r_R(t, r(\tau_i - \tau_{i-1}, p))$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, и далее, аналогично, происходит чередование, конечное или бесконечное, в зависимости от точки p, решений систем (1), (2). Тогда на случай гибридной системы переносится классическое нижеследующее определение [17].

Определение 5. Пусть существует последовательность $\{t_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $t_n \in \mathbb{R}$, $t_{n+1} > t_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n, p) = q.$$

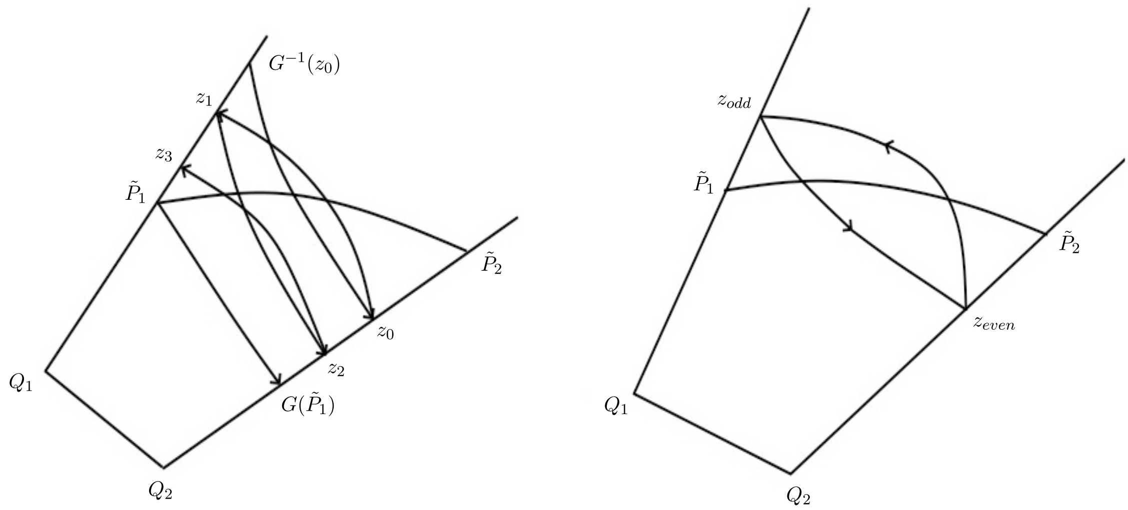
Тогда точка q называется ω-предельной точкой для траектории $\eta(p)$. При этом множество всех ω-предельных точек траектории $\eta(p)$ называется её ω-предельным множеством.

Теорема 5. *Пусть $\lambda > \lambda^*$. Тогда существует достаточно малое $\delta > 0$ такое, что для любого $\lambda_2 \in (\lambda, \lambda + \delta)$ существует предельный цикл $C \subset D$ гибридной системы (1), (2). При этом, если C единственный, то он глобально устойчив, то есть C является ω-предельным множеством для любой положительной полутраектории гибридной системы (1), (2).*

Доказательство. Пусть начальная точка $z_0 \in (\tilde{P}_2\infty)$. Тогда, согласно лемме 11, $GF(z_0) < z_0$.

Рассмотрим последовательности $\{z_{2i+1} \in (Q_1\infty)\}$, $\{z_{2i}\} \in (Q_2\infty)$ (рис. 4(a)), где $z_{2i+1} = F(z_{2i})$, $z_{2i+2} = G(z_{2i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$. По лемме 11, $z_{2i+1} < z_{2i-1}$, следовательно, $z_{2i+2} < z2i$ для всех $z_{2i+1} > \tilde{P}_1$. Получим убывающую числовую последовательность x_{2i-1}. Поскольку, $x_{2i-1} > \tilde{x}_1$ для любого i, то по лемме 9, данная последовательность ограничена снизу $\tilde{x}_1$. Следовательно, у неё существует предел $x_{odd} = \lim\limits_{i\to\infty} x_{2i-1}$, $y_{odd} = \lim\limits_{i\to\infty} y_{2i-1}$. Обозначим за $z_{odd} = (x_{odd}, y_{odd})$ предельную точку для $\{z_{2i+1}\}$. Тогда точка $z_{even} = (x_{even}, y_{even}) > G(\tilde{P}_1)$ будет предельной для $\{z_{2i}\}$ (рис. 4(b)).

Покажем, что $z_{odd} \neq \tilde{P}_1$. Предположим обратное, $z_{odd} = \tilde{P}_1$. Тогда $z_{even} = G(\tilde{P}_1)$, и получаем цикл $\tilde{P}_1G(\tilde{P}_1)$, так как $FG(\tilde{P}_1) = \tilde{P}_1$. При этом, по Следствию к лемме 8, положительные полутраектории $\gamma(z)$ системы (1) не могут пересечь дугу $\tilde{P}_1G(\tilde{P}_1)$ в направлении отрезка



(a) **(b)**

Рис. 4. (a) поведение положительных полутраекторий в D при $\lambda > \lambda^*$; (b) предельный цикл $z_{odd}z_{even}$ при $\lambda > \lambda^*$

(Q_1Q_2). Следовательно, две различные дуги $F^{-1}(\tilde{P}_1)\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_1G(\tilde{P}_1)$ положительных полутраекторий системы (1) проходят через точку $\tilde{P}_1$, что невозможно. Итак, $z_{odd}\ \tilde{P}_1$, $z_{even} > G(\tilde{P}_1)$, и $z_{odd}G(z_{odd})FG(z_{odd})$ — предельный цикл, то есть, $z_{odd} = GF(z_{odd})$ (рис. 4(b)).

В случае, если данный предельный цикл $z_{odd}z_{even}$ единственный, то из доказательства его существования и теоремы 3 следует, что он будет являться ω-предельным множеством для любой начальной точки $z_0 \in \mathbb{R}^2_+$ гибридной системы (1), (2), что мы будем называть глобальной устойчивостью цикла.

Аналогичные рассуждения можно провести для $z_1 \in (Q_1\tilde{P}_1)$, исследуя последовательность точек $z_{2i} \in (Q_2\tilde{P}_2)$, для которой предельная точка $z_{even} \in (Q_2\tilde{P}_2)$. □

Следствие 4. Пусть существуют два предельных цикла, которые содержат точки z_{odd}, w_{odd} соответственно и $z_{odd} < w_{odd}$. Тогда $z_{even} < w_{even}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена регуляризация гибридной модели динамики популяций хищника и жертвы с внутривидовой конкуренцией посредством использования двух линий переключения с целью избежать учащающихся переключений (chattering) между системами, что несвойственно для систем взаимодействующих популяций. Основными результатами исследования являются предельные множества данной динамической системы, а также выводы о чувствительности модели по отношению к введению переключений. Показано, что в случае $\lambda < \lambda^*$ введённые переключения качественно не меняют характер поведения положительных полутраекторий, сохраняя глобальную устойчивость равновесия P системы (1). Однако при $\lambda > \lambda^*$ поведение положительных полутраекторий изменяется, предельными множествами становятся циклы, в случае существования единственного цикла, он является глобально устойчивым. Таким образом, можно сказать, что значение λ^* для параметра λ является бифуркационным для представленной гибридной системы. Кроме того, отметим, что для случая $\lambda > \lambda^*$ возникает проблема исследования вопроса о количестве предельных циклов в гибридной системе (1), (2).

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Института прикладных математических исследований, ФИЦ «Карельский научный центр РАН». Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chen X., Huang L.* A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator—prey model // J. Math. Anal. Appl. 2015. V. 428, N 2. P. 817–837; DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.03.045
2. *Кириллов А. Н., Сазонов А. М.* Гибридная модель динамики популяций с режимом убежища: регуляризация и самоорганизация // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2023. Т. 33, № 3. С. 467–482; DOI: 10.35634/vm230306
3. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
4. *Кириллов А. Н., Сазонов А. М.* Модель «хищник—жертва» с переменной структурой взаимодействия // Тр. КарНЦ РАН. 2023. № 4. С. 36–40; DOI: 10.17076/mat1767
5. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
6. *Deng J., Tang S., Lai C.-H.* Non-smooth ecological systems with a switching threshold depending on the pest density and its rate of change // Nonlinear Anal. Hybri. 2021. V. 42, N 8. P. 1–24; DOI: 10.1016/j.nahs.2021.101094
7. *Zhang Y., Xiao Y.* Global dynamics for a Filippov epidemic system with imperfect vaccination // Nonlinear Anal. Hybri. 2020. V. 38, N 6. P. 1–20; DOI: 10.1016/j.nahs.2020.100932
8. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
9. *Acary V., Brogliato B., Orlov Y.* Chattering-Free Digital Sliding-Mode Control with State Observer and Disturbance Rejection // IEEE Trans. Automat. Contr. 2012. V. 57, N 5. P. 1–16; DOI: 10.1109/TAC.2011.2174676
10. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
11. *Завалишин Н. Н., Логофет Д. О.* Моделирование экологических систем по заданной диаграмме «запасы—потоки» // Матем. моделирование. 1997. Т. 9, № 9. С. 3–17.
12. *Shih S.-D.* The period of a Lotka—Volterra system // Taiwan. J Math. 1997. V. 1, N 4. P. 451–470.
13. *Atehortua A., Ladino L., Valverde J.* Population dynamics of a two-stage migratory species with predation and capture // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2014. V. 16, N 1. P. 27–39; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2013.09.003
14. *Петросян Л. А., Захаров В. В.* Математические модели в экологии. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.
15. *Базыкин А. Д.* Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва—Ижевск: ИКИ, 2003.
16. *Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П.* Динамические системы и модели биологии. М.: Физмалит, 2011.
17. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ОГИЗ, 1947.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.91

A MODEL OF HYBRID POPULATION DYNAMICS WITH REFUGE-REGIME: REGULARIZATION AND LIMIT SETS

© 2024 A. N. Kirillov[a], A. M. Sazonov[b]

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Center, Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185910 Russia

E-mails: [a]krllv1812@yandex.ru, [b]sazon-tb@mail.ru

Received 09.10.2023, revised 02.12.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. The paper is devoted to the regularization of the population "predator—prey" dynamics with the preys' intraspecific competition. The model has the form of the hybrid system consisting of the two two-dimensional systems switching between each other. The switching of the systems allows us to reproduce the special Refuge-regime when the prey number is very small and the predators have complications to find preys. The regularization of the system by using two switching lines to avoid chattering is provided. The limit sets for the regularized model are established. The studying of the model sensitivity to the switchings. The condition under which the hybridization does not change the global stability of an equilibrium is derived. In the other case the limit sets are cycles.

Keywords: hybrid system, population dynamics, regularization, limit set.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.403

REFERENCES

1. X. Chen and L. Huang, "A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator—prey model," J. Math. Anal. Appl. **428** (2), 817–837 (2015). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.03.045
2. A. N. Kirillov and A. M. Sazonov, "Hybrid model of population dynamics with a refuge regime: Regularization and self-organization," Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki **33** (3), 467–482 (2023) [in Russian]. https://doi.org/10.35634/vm230306
3. Yu. M. *Svirezhev and D. O. Logofet, Stability of Biological Communities* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
4. A. N. Kirillov and A. M. Sazonov, "'Predator—prey' model with variable interaction structure," Tr. KarNTs RAN (4), 36–40 (2023) [in Russian]. https://doi.org/10.17076/mat1767
5. A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side* (Nauka, Moscow, 1985) [in Russian].
6. J. Deng, S. Tang, and C.-H. Lai, "Non-smooth ecological systems with a switching threshold depending on the pest density and its rate of change," Nonlinear Anal. Hybri. **42** (8), 1–24 (2021). https://doi.org/10.1016/j.nahs.2021.101094
7. Y. Zhang and Y. Xiao, "Global dynamics for a Filippov epidemic system with imperfect vaccination," Nonlinear Anal. Hybri. **38** (6), 1–20 (2020). https://doi.org/10.1016/j.nahs.2020.100932
8. V. I. Utkin, *Sliding Modes in Optimization and Control Problems* (Nauka, Moscow, 1981) [in Russian].
9. V. Acary, B. Brogliato, and Y. Orlov, "Chattering-free digital sliding-mode control with state observer and disturbance rejection," IEEE Trans. Autom. Control **57** (5), 1–16 (2012). https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2174676

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 709–721.

10. P. Hartman, *Ordinary Differential Equations* (John Wiley & Sons, New York—London—Sydney, 1964; Mir, Mosvow, 1970).
11. N. N. Zavalishin and D. O. Logofet, “Modeling of ecological systems according to a given ‘stocks—flows’ diagram ,” Mat. Model. **9** (9), 3–17 (1997) [in Russian].
12. S.-D. Shih, “The period of a Lotka—Volterra system,” Taiwan. J Math. **1** (4), 451–470 (1997).
13. A. Atehortua, L. Ladino, and J. Valverde, “Population dynamics of a two-stage migratory species with predation and capture,” Nonlinear Anal. Real World Appl. **16** (1), 27–39 (2014). https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2013.09.003
14. L. A. Petrosyan and V. V. Zakharov, *Mathematical Models in Ecology* (Izd. SPbGU, St. Petersburg, 1997) [in Russian].
15. A. D. Bazykin, *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations* (IKI, Moscow—Izhevsk, 2003) [in Russian].
16. A. S. Bratus’, A. S. Novozhilov, and A. P. Platonov, *Dynamical Systems and Models of Biology* (Fizmalit, Moscow, 2011) [in Russian].
17. V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations* (OGIZ, Moscow, 1947) [in Russian].

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 4. С. 49–67

УДК 004.94:519.63:532.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКАЧКИ УГЛЕКИСЛОГО ГАЗА В ПЛАСТ С МЕТАНОМ И ВОДОЙ С УЧЁТОМ ОБРАЗОВАНИЯ ГИДРАТА УГЛЕКИСЛОГО ГАЗА

© 2024 Н. Г. Мусакаев[a], С. Л. Бородин[b]

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, ул. Таймырская, 74, г. Тюмень 625026, Россия

E-mails: [a]musakaev68@yandex.ru, [b]S.L.Borodin@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.06.2024 г.; после доработки 21.11.2024 г.; принята к публикации 11.12.2024 г.

Увеличение концентрации углекислого газа в атмосфере, вызванное сжиганием топлива, негативно сказывается на текущей биосфере Земли. Одним из способов избавиться от избытка диоксида углерода в атмосфере является его улавливание и хранение. Предлагаются различные методы долгосрочного хранения диоксида углерода, в том числе в различных геологических формациях в газогидратной форме, так как газовые гидраты обладают рядом уникальных свойств, например, есть возможность стабильного хранения достаточно большого количества газа в малом объёме при относительно небольшом давлении. Одним из объектов для создания подземных хранилищ диоксида углерода являются истощённые месторождения природного газа, так как они хорошо изучены, известны характеристики пластов, их геометрические размеры, а также имеются пробурённые скважины. Для изучения закономерностей процесса формирования подземного газогидратного хранилища углекислого газа в статье представлена математическая модель процесса закачки диоксида углерода в зонально-неоднородный пористый пласт, изначально насыщенный метаном и водой, сопровождающегося образованием газогидрата. В отличие от предыдущих работ математическая модель дополнительно учитывает ряд факторов: растворимость углекислого газа в воде, зональную неоднородность пласта, теплообмен рассматриваемой области пористой среды с окружающими непроницаемыми для вещества породами, фильтрацию воды и газа. Построены численные решения задачи, описывающие распределения параметров (давления, температуры, насыщенности гидратом углекислого газа) в пласте.

Ключевые слова: математическая модель, захоронение углекислого газа, многофазная фильтрация, образование газового гидрата.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.404

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы чрезмерные выбросы парниковых газов, в том числе и диоксида углерода, приводят к увеличению их концентрации в атмосфере, что негативным образом влияет на устойчивое развитие как природы, так и общества [1]. Измерения, собранные в погодной обсерватории на Мауна-Лоа, показывают рост средней концентрации атмосферного углекислого газа с 316 ppmv в марте 1958 г. до 427 ppmv в апреле 2024 г. (примерно на 35 %) [2]. Изучение ледяных кернов в Восточной Антарктиде, где возраст льда достигает 800 тыс. лет, показало, что концентрация диоксида углерода изменялась в пределах от 180 до 210 ppmv во время ледниковых периодов и в пределах от 280 до 300 ppmv в более тёплые периоды. Однако в настоящее время наблюдается быстрый беспрецедентный рост и по скорости прироста, и по достигнутой величине концентрации CO_2. Подходящим способом избавиться от избытка диоксида углерода в атмосфере является его секвестрация [3]. В настоящее время технология секвестрации в основном включает три метода: захоронение CO_2 в геологических формациях, морская секвестрация и карбонизация минералов [4]. Карбонизация минералов представляет собой преобразование CO_2 в твёрдую неорганическую углекислоту. Однако из-за высокой стоимости, негативного воздействия на окружающую среду карбонизация минералов была исключена из крупномасштабного внедрения [5]. Растворение углекислого газа в океане не является приемлемым методом, т. к. может привести к непредсказуемым экологическим проблемам, например, если большое количество CO_2 попадает в океан, то это может привести к снижению pH морской воды и нанести ущерб морским экосистемам [6]. Геологическое хранение диоксида углерода в настоящее время является одним из наиболее приемлемых вариантов для крупномасштабного сокращения выбросов CO_2 во всём мире [5, 7–9]. И хотя возможная утечка CO_2 в атмосферные/морские системы представляет опасность для окружающей среды, простая концепция и большой объём хранения делают подземный способ хранения диоксида углерода перспективным [10]. Предлагаются различные методы долгосрочного хранения диоксида углерода, в том числе хранение CO_2 в различных геологических формациях в газогидратной форме [11, 12]. При одинаковых термобарических условиях в единице объёма газового гидрата содержится значительно больше газа, чем в свободном состоянии (до некоторых высоких значений давления), поэтому в газогидратной форме можно хранить большое количество диоксида углерода при относительно низких давлениях [13, 14]. Также газовые гидраты, как и многолетнемёрзлые породы, могут препятствовать выходу газа в атмосферу [15].

Ещё закачка углекислого газа в пласт может быть применена для решения задачи добычи газа из газогидратных месторождений [16–19]. Возможно замещение метана в составе гидрата углекислым газом, т. к. гидрат углекислого газа термодинамически более стабилен, чем гидрат метана при одинаковых параметрах [20]. В работах [21, 22] возможность замещения CO_2-CH_4 подтверждается экспериментами, кроме того, показано, что процесс замещения может происходить в присутствии как газообразного, так и жидкого диоксида углерода.

Исследование процесса образования газового гидрата в пористой среде при закачке газа в пласт представлено в ряде работ [10, 23–28]. В этих работах показано, что в зависимости от исходного термодинамического состояния системы «пористая среда — насыщающий флюид» и интенсивности закачки газа в пористой среде возможно формирование трёх характерных зон: ближней, примыкающей к границе нагнетания газа зоны (насыщена газом и его гидратом); дальней невозмущённой зоны (поры пласта в этой зоне заполнены газом и водой) и промежуточной зоны, в которой газ, вода и газогидрат находятся в состоянии фазового равновесия. В существующих математических моделях процесса образования газогидрата при закачке газа в пласт не учитывается растворимость газа в воде. Такое допущение вполне приемлемо, если в пласт закачивается метан, растворимость которого в воде очень мала. Для углекислого газа такое допущение является неприемлемым, т. к. диоксид углерода хорошо растворим в воде, причём его растворимость с увеличением давления растёт. Также, как правило, рассматривается закачка газа в однородный пласт. Но в природных условиях пористые коллекторы редко бывают однородными. Может присутствовать зональная неоднородность, при которой пласт состоит из нескольких зон различной проницаемости. Проницаемость пористого пласта является одним из факторов, который определяет эффективность подземного газогидратного хранения углекислого газа [29]. Также необходимо учесть теплоотдачу от пористого коллектора в выше- и нижележащие горные породы, так как образование газогидратов сопровождается выделением тепла, и внешний теплообмен может существенным образом сказаться на термодинамических параметрах в пласте.

Для принятия эффективных технологических и инженерных решений создания подземных газогидратных хранилищ диоксида углерода необходимы исследования, в том числе, и теоретические [10, 30, 31]. В работе представлена математическая модель процесса закачки углекислого газа в пористый пласт, насыщенный метаном и водой, с учётом образования газового гидрата CO_2. Данная модель дополнительно учитывает растворимость углекислого газа в воде, зональную неоднородность пласта, теплообмен рассматриваемой области пористой среды с окружающими горными породами, фильтрацию и газа, и воды.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть пористый пласт высотой H и радиусом R_c в начальный момент времени насыщен метаном и водой, давление p_0 и температура T_0 которых соответствуют условиям стабильного существования гетерогенной смеси газа и воды, пласт состоит из двух зон с различной проницаемостью ($\boldsymbol{k_{01}}$ и $\boldsymbol{k_{02}}$) и окружён непроницаемыми для флюидов (газожидкостная смесь, газовая и жидкая фазы) горными породами, с которыми учитывается теплообмен за счёт теплопроводности (рис. 1). Через скважину радиуса r_w при постоянном давлении p_{inj} в пласт закачивается углекислый газ с постоянной температурой T_{inj}. При этом T_{inj} ниже равновесной температуры образования гидрата углекислого газа для давления p_{inj}, следовательно, термодинамические условия в пористой среде после начала закачки углекислого газа в пласт допускают образование его гидрата.

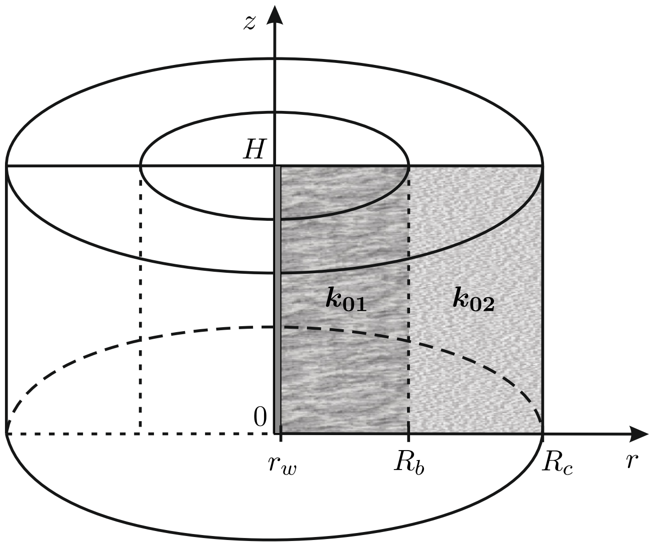


Рис. 1. Схематичное представление постановки задачи

Окружающие непроницаемые породы не представлены на рис. 1, их толщина подбирается при расчётах, чтобы температурные возмущения не доходили до внешних границ; таким образом учитывается внешний теплообмен пласта с окружающими горными породами за счёт теплопроводности. Задача рассматривается в двумерной (радиальная ось r и вертикальная ось z), осесимметричной (вокруг оси z) постановке.

Начальные условия в пористом пласте запишем следующим образом:

$$t = 0, r_w \leqslant r \leqslant R_c, 0 \leqslant z \leqslant H: \quad p = p_0, \quad T = T_0, \quad S_l = S_{w0}, \quad S_g = 1 - S_{w0},$$

$$S_{hcd} = 0, \quad \omega_{g(M)} = 1, \quad \omega_{g(CD)} = 0, \quad \omega_{l(W)} = 1, \quad \omega_{l(CD)} = 0,$$

$$r_w \leqslant r \leqslant R_b, 0 \leqslant z \leqslant H: \quad \boldsymbol{k_0} = \boldsymbol{k_{01}}. \quad R_b < r \leqslant R_c, 0 \leqslant z \leqslant H: \quad \boldsymbol{k_0} = \boldsymbol{k_{02}}.$$

Начальные условия в окружающих непроницаемых породах:

$$t = 0, \quad r \notin [r_w, R_c], \quad z \notin [0, H]: \quad T = T_0, \quad \boldsymbol{k} = 0.$$

Условия на границе закачки углекислого газа:

$$t > 0, r = r_w, 0 \leqslant z \leqslant H: \quad p = p_{inj} > p_0, \quad T = T_{inj}, \quad S_g = 1, \quad \omega_{g(CD)} = 1.$$

Условия на внешних границах непроницаемых горных пород:

$$\partial T/\partial r = 0, \quad \partial T/\partial z = 0, \quad \partial p/\partial r = 0, \quad \partial p/\partial z = 0.$$

Выше и далее нижними индексами sk, l, g и hcd отмечены параметры, относящиеся к скелету пористой среды, жидкости, газу и гидрату углекислого газа, соответственно; нижние индексы в скобках (W), (M), (CD) относятся к компонентам воды, метана и диоксида углерода, соответственно. t — время, с; r и z — радиальная и вертикальная координаты, м; r_w — радиус скважины, м; R_b — радиус первой зоны, м; R_c — радиус пласта, м; H — высота пласта, м; p — давление, Па; T — температура, К; S_i — насыщенность пор i-ой фазой; S_{w0} — исходная водонасыщенность; $\omega_{i(\alpha)}$ — массовое содержание в i-ой фазе компоненты α; $\boldsymbol{k_0}$ — тензор абсолютной проницаемости пористой среды, использование тензора позволяет учитывать анизотропию пласта, м^2.

При математическом моделировании положим, что вода может входить в состав как жидкой, так и газогидратной фазы; метан присутствует только в газовой фазе; диоксид углерода может находиться в газообразном состоянии (углекислый газ), входить в состав гидрата CO_2, а также присутствовать в растворённом виде в воде. Примем следующие допущения: температуры всех фаз в некотором бесконечно малом объёме системы совпадают (рассматривается однотемпературная модель); капиллярные эффекты не учитываются; пренебрегается растворением метана в воде, а также испарением воды в газовую фазу; пористость пласта постоянна; скелет пористой среды и гидрат углекислого газа несжимаемы и неподвижны; газовый гидрат является двухкомпонентной системой с постоянными массовыми долями компонент (углекислый газ и вода); объём жидкости при растворении в ней углекислого газа не меняется; фазовые переходы происходят в равновесном режиме [32, 33].

Для вышеописанной постановки задачи запишем уравнения сохранения масс компонент в различных фазах [31, 34, 35]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_{g(M)}\rho_g\phi S_g\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\omega_{g(M)}\rho_g\phi S_g(v_g)_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\omega_{g(M)}\rho_g\phi S_g(v_g)_z\right) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_{g(CD)}\rho_g\phi S_g\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\omega_{g(CD)}\rho_g\phi S_g(v_g)_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\omega_{g(CD)}\rho_g\phi S_g(v_g)_z\right) = \\ = J_{hcd(CD)\to g(CD)} + J_{l(CD)\to g(CD)},\end{gathered} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_{l(W)}\rho_l\phi S_l\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\omega_{l(W)}\rho_l\phi S_l(v_l)_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\omega_{l(W)}\rho_l\phi S_l(v_l)_z\right) = J_{hcd(W)\to l(W)}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_{l(CD)}\rho_l\phi S_l\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\omega_{l(CD)}\rho_l\phi S_l(v_l)_r\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\omega_{l(CD)}\rho_l\phi S_l(v_l)_z\right) = J_{g(CD)\to l(CD)}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_{hcd(W)}\rho_{hcd}\phi S_{hcd}\right) = J_{l(W)\to hcd(W)}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_{hcd(CD)}\rho_{hcd}\phi S_{hcd}\right) = J_{g(CD)\to hcd(CD)}, \tag{6}$$

$$S_g + S_l + S_{hcd} = 1, \quad \sum_\alpha \omega_{i(\alpha)} = 1, \quad J_{j(\alpha)\to i(\alpha)} = -J_{i(\alpha)\to j(\alpha)}. \tag{7}$$

Здесь ρ_i — плотность i-ой фазы, кг/м^3; ϕ — пористость пласта; $(v_i)_r$ и $(v_i)_z$ — скорость i-ой фазы в направлении оси r и z, соответственно, м/с; $J_{j(\alpha)\to i(\alpha)}$ — интенсивность перехода массы компоненты α из j-ой фазы в i-ую, кг/(м^3·с).

В качестве закона движения примем закон фильтрации Дарси, который может быть записан следующим образом [32]:

$$\phi S_i(v_i)_r = -\frac{k_{ri}}{\mu_i}k_r\frac{\partial p}{\partial r}, \quad \phi S_i(v_i)_z = -\frac{k_{ri}}{\mu_i}k_z\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_i g\right), \tag{8}$$

где k_{ri} — относительная фазовая проницаемость для i-ой фазы; μ_i — динамическая вязкость i-ой фазы, Па·с; k_r и k_z — абсолютная проницаемость пористой среды в направлении оси r и z, соответственно, м^2; g — значение ускорения свободного падения, м/с^2.

Относительные фазовые проницаемости определяются следующим образом [25, 32, 36]:

$$k_{rg} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant S_g \leqslant 0.1, \\ \left(\frac{S_g - 0.1}{1-0.1}\right)^{3.5}(4 - 3S_g), & 0.1 < S_g \leqslant 1, \end{cases} \qquad k_{rl} = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant S_l \leqslant 0.2, \\ \left(\frac{S_l - 0.2}{1-0.2}\right)^{3.5}, & 0.2 < S_l \leqslant 1. \end{cases}$$

Для расчёта абсолютной проницаемости пористой среды, содержащей газовый гидрат, можно использовать следующее уравнение [36–40]:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k_0}(1 - S_{hcd})^N, \quad N \geqslant 0,$$

где $\boldsymbol{k_0}$ — абсолютная проницаемость пористой среды при отсутствии газогидрата, м^2. Показатель степени N зависит от типа заполнения газогидратом пористой среды, в расчётах будем принимать $N = 8$, так как при таком значении проницаемость наиболее близка к экспериментальным точкам, представленным в [40].

Для газовой фазы используется следующее уравнение состояния:

$$p = z_g \rho_g R_g T, \tag{9}$$

где z_g — коэффициент сжимаемости газа; $R_g = R/M_g$ — удельная газовая «постоянная», этот параметр может изменяться в зависимости от состава газовой фазы, Дж/(кг·К); R — универсальная газовая постоянная, Дж/(моль·К); M_g — молярная масса газа, кг/моль.

Для коэффициента сжимаемости газа используется уравнение Латонова—Гуревича [41]:

$$z_g = (0.4\lg(T/T_{cr}) + 0.73)^{p/p_{cr}} + 0.1p/p_{cr},$$

где T_{cr} и p_{cr} — критические температура и давление газа, соответственно, которые для рассматриваемой смеси газов можно рассчитать из следующих выражений

$$T_{cr} = \chi_{g(M)} T_{cr(M)} + \chi_{g(CD)} T_{cr(CD)}, \quad p_{cr} = \chi_{g(M)} p_{cr(M)} + \chi_{g(CD)} p_{cr(CD)},$$

где $T_{cr(\alpha)}$ и $p_{cr(\alpha)}$ — критические температура и давление компоненты α газовой фазы; $\chi_{g(\alpha)}$ — мольная доля компоненты α в газовой фазе.

Используя уравнения (1)–(9), можно получить следующие выражения для расчёта давления (10), массовой доли метана (11) и углекислого газа (12) в газовой фазе, насыщенности жидкостью (13) и насыщенностью газом (14):

$$\begin{gathered} \frac{S_g}{z_g \rho_g R_g T}\frac{\partial p}{\partial t} = S_g\left(\frac{1}{z_g}\frac{\partial z_g}{\partial t} + \frac{1}{R_g}\frac{\partial R_g}{\partial t} + \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t}\right) - \frac{S_l}{\rho_l}\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \\ + \frac{1}{\phi\rho_g}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho_g\frac{k_{rg}}{\mu_g}k_r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{\phi\rho_g}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_g\frac{k_{rg}}{\mu_g}k_z\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_g g\right)\right) + \\ + \frac{1}{\phi\rho_l}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho_l\frac{k_{rl}}{\mu_l}k_r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{\phi\rho_l}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_l\frac{k_{rl}}{\mu_l}k_z\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_l g\right)\right) + \\ + \frac{\partial S_{hcd}}{\partial t}\left(1 - \omega_{hcd(CD)}\frac{\rho_{hcd}}{\rho_g} - \omega_{hcd(W)}\frac{\rho_{hcd}}{\rho_l}\right) + J_{g(CD)\to l(CD)}\left(\frac{1}{\phi\rho_l} - \frac{1}{\phi\rho_g}\right), \end{gathered} \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_{g(M)}\rho_g S_g\right) = \frac{1}{\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\omega_{g(M)}\rho_g\frac{k_{rg}}{\mu_g}k_r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\omega_{g(M)}\rho_g\frac{k_{rg}}{\mu_g}k_z\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_g g\right)\right), \tag{11}$$

$$\omega_{g(CD)} = 1 - \omega_{g(M)}, \tag{12}$$

$$\rho_l \frac{\partial S_l}{\partial t} = \frac{1}{\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho_l \frac{k_{rl}}{\mu_l} k_r \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{\phi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_l \frac{k_{rl}}{\mu_l} k_z \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_l g\right)\right) - \\ -S_l \frac{\partial \rho_l}{\partial t} - \omega_{hcd(W)} \rho_{hcd} \frac{\partial S_{hcd}}{\partial t} + \frac{1}{\phi} J_{g(CD)\to l(CD)}, \tag{13}$$

$$S_g = 1 - S_l - S_{hcd}. \tag{14}$$

Насыщенность гидратом углекислого газа рассчитывается по методике, которая будет подробно описана далее во втором разделе.

Для расчёта массовой концентрации углекислого газа в воде в зависимости от парциального давления углекислого газа и температуры используются следующие уравнения [42]:

$$K_H^{CD} = \left(B_1 + B_2\left(T - T_0\right)\right) B_3, \quad \chi_{l(CD)} = \frac{p_{g(CD)}}{K_H^{CD}},$$

$$\omega_{l(CD)} = \frac{\chi_{l(CD)} M_{(CD)}}{M_{(W)}} \left(1 + \frac{\chi_{l(CD)} M_{(CD)}}{M_{(W)}} - \chi_{l(CD)}\right)^{-1}, \tag{15}$$

где $B_1 = 70$ МПа, $B_2 = 3.38$ МПа/С, $B_3 = 10^6$, $T_0 = 273.15$ К. $p_{g(CD)}$ — парциальное давление углекислого газа в газовой фазе, Па; $\chi_{l(CD)}$ — мольная доля диоксида углерода в воде; $M_{(CD)}$ и $M_{(W)}$ — молярная масса диоксида углерода и воды, соответственно, кг/моль.

Массовая доля воды в жидкости может быть найдена из выражения

$$\omega_{l(W)} = 1 - \omega_{l(CD)}.$$

Используя уравнение сохранения массы (4), а также сделанные допущения, можно записать следующие выражения для расчёта интенсивности растворения углекислого газа в воде (15) и для расчёта плотности жидкости (16):

$$J_{g(CD)\to l(CD)} = \rho_w \phi \frac{\partial}{\partial t}\left(S_l \frac{\omega_{l(CD)}}{\omega_{l(W)}}\right), \tag{16}$$

$$\rho_l = \frac{\rho_w}{\omega_{l(W)}}. \tag{17}$$

Для расчёта температуры можно получить следующее выражение, отражающее закон сохранения энергии для рассматриваемой задачи [31]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \rho_g c_g \eta_g \phi S_g \frac{\partial p}{\partial t} + \\ +\rho_g c_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} k_r \frac{\partial p}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_g \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \rho_g c_g \frac{k_{rg}}{\mu_g} k_z \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_g g\right)\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \varepsilon_g \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{c_g}\right) + \\ +\rho_l c_l \frac{k_{rl}}{\mu_l} k_r \frac{\partial p}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial r} + \varepsilon_l \frac{\partial p}{\partial r}\right) + \rho_l c_l \frac{k_{rl}}{\mu_l} k_z \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_l g\right)\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \varepsilon_l \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g}{c_l}\right) + \\ +\phi \rho_{hcd} L_{hcd} \frac{\partial S_{hcd}}{\partial t} + L_{gl(CD)} J_{g(CD)\to l(CD)}, \tag{18}$$

$$\rho c = (1 - \phi)\,\rho_{sk} c_{sk} + \phi\left(S_g \rho_g c_g + S_l \rho_l c_l + S_{hcd} \rho_{hcd} c_{hcd}\right),$$

$$\lambda = (1 - \phi)\,\lambda_{sk} + \phi\left(S_g \lambda_g + S_l \lambda_l + S_{hcd} \lambda_{hcd}\right),$$

$$\varepsilon_g = -\frac{0.4p}{\rho_g c_g z_g p_{cr} \ln 10}\left(0.4 \lg\left(\frac{T}{T_{cr}}\right) + 0.73\right)^{\frac{p}{p_{cr}} - 1}, \quad \eta_g = \frac{1}{\rho_g c_g} - \varepsilon_g, \quad \varepsilon_l = \frac{1}{\rho_l c_l}.$$

Здесь ρc — объёмная теплоёмкость насыщенной пористой среды, Дж/(м^3·К); c_i — изобарная удельная теплоёмкость i-ой фазы, Дж/(кг·К); T — температура, К; λ — коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды, Вт/(м·К); λ_i — коэффициент теплопроводности i-ой фазы, Вт/(м·К); ε_i — коэффициент Джоуля—Томсона для i-ой фазы, К/Па; η_g — коэффициент адиабатического охлаждения газа, К/Па; L_{hcd} — удельная теплота образования/разложения гидрата углекислого газа, Дж/кг; $L_{gl(CD)}$ — удельная теплота растворения углекислого газа воде или испарения углекислого газа из воды, Дж/кг.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

В расчётах толщина окружающих непроницаемых горных пород подбирается таким образом, чтобы температурные возмущения не доходили до их внешних границ. При этом особенностью расчётного подхода является то, что везде (и в пористом пласте, и в окружающих породах) решаются одни и те же уравнения пьезо- (10) и температуропроводности (18). Так как в окружающих непроницаемых горных породах абсолютная проницаемость равна нулю, то все члены уравнений, связанные с фильтрацией, оказываются равными нулю. То есть в этих породах изменение температуры возможно только за счёт слагаемого в уравнении температуропроводности, обусловленного теплопроводностью. Система уравнений математической модели решается численно, с использованием метода простой итерации; покоординатного расщепления, неявной схемы и метода прогонки для решения дифференциальных уравнений. При этом параметры, которые рассчитаны на более ранних шагах алгоритма, используются в расчётах параметров на более поздних шагах алгоритма. Далее нижние индексы j и k будут относиться к параметрам в j,k-ом узле пространственной сетки; верхними индексами old, $iter$, new отмечены параметры для предыдущего шага по времени, итерационные и для нового шага по времени, соответственно.

Алгоритм расчётов следующий:

1. Задаются входные данные и заполняются массивы с начальными распределениями параметров в пласте.

2. Из уравнения (10) рассчитывается распределение давления $p_{j,k}^{new}$ методом покоординатного расщепления [43], с использованием неявной схемы и метода прогонки.

3. Из уравнения (18) рассчитывается распределение температуры $T_{j,k}^{new}$ методом покоординатного расщепления [43], с использованием неявной схемы и метода прогонки, при этом берётся уже найденное на шаге 2 распределение давления $p_{j,k}^{new}$.

4. Из уравнения (11) рассчитывается распределение массовой доли метана в газовой фазе $(\omega_{g(M)})_{j,k}^{new}$ методом покоординатного расщепления [43], с использованием неявной схемы и метода прогонки. После чего из уравнения (12) рассчитывается распределение массовой доли углекислого газа в газовой фазе $(\omega_{g(CD)})_{j,k}^{new}$.

5. Рассчитывается распределение насыщенности гидратом углекислого газа $(S_{hcd})_{j,k}^{new}$, с использованием условия равновесности фазового перехода, по следующему алгоритму:

I) Вычисляются парциальные давления углекислого газа $(p_{cd})_{j,k}^{new}$ и метана $(p_m)_{j,k}^{new}$ в газовой фазе:

$$(p_{cd})_{j,k}^{new} = \left(\chi_{g(CD)}\right)_{j,k}^{new} p_{j,k}^{new}, \quad (p_m)_{j,k}^{new} = \left(\chi_{g(M)}\right)_{j,k}^{new} p_{j,k}^{new},$$

$$\left(\chi_{g(CD)}\right)_{j,k}^{new} = \frac{\left(\omega_{g(CD)}\right)_{j,k}^{new}}{M_{(CD)}} (M_g)_{j,k}^{new}, \quad \left(\chi_{g(M)}\right)_{j,k}^{new} = \frac{\left(\omega_{g(M)}\right)_{j,k}^{new}}{M_{(M)}} (M_g)_{j,k}^{new},$$

$$(M_g)_{j,k}^{new} = \left(\frac{\left(\omega_{g(M)}\right)_{j,k}^{new}}{M_{(M)}} + \frac{\left(\omega_{g(CD)}\right)_{j,k}^{new}}{M_{(CD)}} \right)^{-1},$$

где $\chi_{g(CD)}$ и $\chi_{g(M)}$ — мольная доля углекислого газа и метана в газовой смеси; M_g — молярная масса газовой смеси, кг/моль; $M_{(CD)}$ и $M_{(M)}$ — молярные массы диоксида углерода и метана, соответственно, кг/моль.

II) С помощью эмпирических соотношений из [44] вычисляются равновесные параметры для гидрата углекислого газа — равновесная температура для парциального давления CO_2 $(T_{ecdh})_{j,k}^{new} = T_{ecdh}((p_{cd})_{j,k}^{new})$ и равновесное давление для текущей пластовой температуры $(p_{ecdh})_{j,k}^{new} = p_{ecdh}(T_{j,k}^{new})$.

III) Вычисляется сумма парциального давления метана и равновесного давления для гидрата углекислого газа, таким образом, мы находим пластовое давление, при котором гидрат CO_2 будет в состоянии фазового равновесия для текущего количества метана в газовой смеси:

$$(p_{eq})_{j,k}^{new} = (p_m)_{j,k}^{new} + (p_{ecdh})_{j,k}^{new}.$$

IV) Если термодинамические условия в пласте допускают разложение гидрата CO_2, то есть парциальное давление углекислого газа меньше равновесного давления для его гидрата $(p_{cd})_{j,k}^{new} < (p_{ecdh})_{j,k}^{new}$, и гидрат есть $(S_{hcd})_{j,k}^{iter} > 0$, то идём к пункту ***V***, иначе к пункту ***VII***.

V) Рассчитывается, какое количество гидрата CO_2 может разложиться при понижении пластовой температуры до $(T_{ecdh})_{j,k}^{new}$ и при повышении пластового давления до $(p_{eq})_{j,k}^{new}$:

$$\Delta S^T = \left(T_{j,k}^{new} - (T_{ecdh})_{j,k}^{new}\right) \frac{(\rho c)_{j,k}^{iter}}{\phi_{j,k}\rho_{hcd}L_{hcd}},$$

$$\Delta S^p = \frac{\left(p_{j,k}^{new} - (p_{eq})_{j,k}^{new}\right)(S_g)_{j,k}^{iter}}{p_{j,k}^{new}} \Big/ \left(1 - \omega_{hcd(CD)}\frac{\rho_{hcd}}{(\rho_g)_{j,k}^{iter}} - \omega_{hcd(W)}\frac{\rho_{hcd}}{(\rho_l)_{j,k}^{iter}}\right).$$

VI) Определяем количество гидрата, которое может разложиться для текущей итерации, и находим гидратонасыщенность для новой итерации:

$$\Delta S = \min\left((S_{hcd})_{j,k}^{iter}, \Delta S^T, \Delta S^p\right),$$

$$(S_{hcd})_{j,k}^{new} = (S_{hcd})_{j,k}^{iter} - \Delta S.$$

Идём к пункту ***XI***.

VII) Если термодинамические условия допускают образование гидрата углекислого газа, то есть парциальное давление CO_2 выше равновесного давления для гидрата CO_2 $(p_{cd})_{j,k}^{new} > (p_{ecdh})_{j,k}^{new}$, и присутствуют гидратообразователи, а именно вода $(S_l)_{j,k}^{iter} > 0$ и углекислый газ $(p_{cd})_{j,k}^{new} > 0$, то идём к пункту ***VIII***, иначе к пункту ***X***.

VIII) Рассчитывается, какое количество гидрата CO_2 может образоваться при повышении пластовой температуры до $(T_{ecdh})_{j,k}^{new}$, при понижении пластового давления до $(p_{eq})_{j,k}^{new}$ и при переходе всей воды в гидрат:

$$\Delta S^T = \left((T_{ecdh})_{j,k}^{new} - T_{j,k}^{new}\right) \frac{(\rho c)_{j,k}^{iter}}{\phi_{j,k}\rho_{hcd}L_{hcd}},$$

$$\Delta S^p = \frac{\left((p_{eq})_{j,k}^{new} - p_{j,k}^{new}\right)(S_g)_{j,k}^{iter}}{p_{j,k}^{new}} \Big/ \left(1 - \omega_{hcd(CD)}\frac{\rho_{hcd}}{(\rho_g)_{j,k}^{iter}} - \omega_{hcd(W)}\frac{\rho_{hcd}}{(\rho_l)_{j,k}^{iter}}\right),$$

$$\Delta S^w = \rho_w (S_l)_{j,k}^{iter} / \left(\omega_{hcd(W)}\rho_{hcd}\right).$$

IX) Определяем количество гидрата, которое может образоваться для текущей итерации, и находим гидратонасыщенность для новой итерации:

$$\Delta S = \min\left(\Delta S^T, \Delta S^p, \Delta S^w\right),$$

$$(S_{hcd})_{j,k}^{new} = (S_{hcd})_{j,k}^{iter} + \Delta S.$$

Идём к пункту ***XI***.

X) Насыщенность гидратом CO_2 не изменяется на данной итерации $(S_{hcd})_{j,k}^{new} = (S_{hcd})_{j,k}^{iter}$.

XI) Расчёт насыщенности гидратом углекислого газа завершён.

6. Распределение насыщенностью жидкостью $(S_l)_{j,k}^{new}$ рассчитывается явно из уравнения (13) (IMPES-метод). Газонасыщенность $(S_g)_{j,k}^{new}$ рассчитывается из уравнения (14).

7. Из уравнения (15) рассчитывается массовая концентрация углекислого газа в воде $(\omega_{l(CD)})_{j,k}^{new}$, после чего определяются интенсивность растворения углекислого газа в воде $(J_{g(CD)\to l(CD)})_{j,k}^{new}$ из уравнения (16) и плотность жидкости $(\rho_l)_{j,k}^{new}$ из уравнения (17).

8. Из всех рассчитанных распределений параметров по всем точкам пространственной сетки определяется максимальная погрешность итерации. Для параметров, которые не могут быть равны нулю (давление и температура) определяется модуль относительной погрешности между новыми (new) и итерационными ($iter$) параметрами, а для параметров, которые могут быть равны нулю (насыщенности, массовые доли, интенсивность растворения углекислого газа в воде), определяется модуль абсолютной погрешности между новыми (new) и итерационными ($iter$) параметрами. Переопределяем все итерационные параметры ($iter$), присваивая им значения новых (new). Если максимальное значение погрешности итерации больше заданного малого значения (в расчётах используется 10^{-8}), то повторяем итерационную процедуру, то есть идём к шагу **2**, иначе идём к шагу **9**.

9. Делаем шаг по времени. Если достигнуто время окончания расчётов, то идём к шагу **10**, иначе переопределяем параметры для предыдущего шага по времени (old), присваивая им значения новых (new), и идём к шагу **2**.

10. Расчёт завершён, вывод результатов расчёта.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

На основе построенного алгоритма был разработан программный продукт, позволяющий рассчитать основные параметры неизотермической фильтрации при наличии фазовых переходов. Построены распределения параметров через 30 суток после начала закачки углекислого газа в зонально-неоднородный пористый пласт, изначально насыщенный метаном и водой. Данные распределения построены при наличии теплообмена (за счёт теплопроводности) с окружающими непроницаемыми горными породами. Расчёты проводились при следующих значениях параметров: $r_w = 0.1$ м; $R_b = 50$ м; $k_{01} = 10^{-14}$ м^2; $R_c = 100$ м; $k_{02} = 10^{-13}$ м^2; $H = 10$ м; $p_0 = 1$ МПа; $p_{inj} = 3$ МПа; $T_0 = 5$ C; $T_{inj} = 5$ C; $\phi = 0.2$; $S_{w0} = 0.2$; $\rho_{sk} = 2000$ кг/м^3; $\rho_w = 1000$ кг/м^3; $\rho_{hcd} = 1100$ кг/м^3; $c_{sk} = 1000$ Дж/(кг·К); $c_l = 4200$ Дж/(кг·К); $c_{hcd} = 2000$ Дж/(кг·К); $c_{g(M)} = 2500$ Дж/(кг·К); $c_{g(CD)} = 1000$ Дж/(кг·К); $\lambda_{sk} = 1.5$ Вт/(м·К); $\lambda_l = 0.6$ Вт/(м·К); $\lambda_{hcd} = 0.5$ Вт/(м·К); $\lambda_{g(M)} = 0.03$ Вт/(м·К); $\lambda_{g(CD)} = 0.015$ Вт/(м·К); $L_{hcd} = 390$ кДж/кг; $L_{gl(CD)} = 480$ кДж/кг; $\omega_{hcd(CD)} = 0.28$; $\mu_l = 1.5 \cdot 10^{-3}$ Па·с; $\mu_{g(M)} = 10^{-5}$ Па·с; $\mu_{g(CD)} = 1.5 \cdot 10^{-5}$ Па·с; $\Delta r = 0.05$ м; $\Delta z = 0.1$ м; $\Delta t = 300$ с.

В математической модели настоящей работы учитывается растворимость углекислого газа в воде. Чтобы оценить вклад указанного фактора, на рисунках приведены распределения параметров, рассчитанные без учёта растворимости и с её учётом.

На рис. 2 представлены распределения насыщенности гидратом углекислого газа в пласте, полученные в результате расчёта с вышеприведёнными параметрами. На данном рисунке и далее серым цветом показаны непроницаемые для подвижных флюидов горные породы.

Из данных, представленных на рис. 2, видно, что для рассмотренного набора параметров закачка углекислого газа в пористый пласт даже при температуре, равной исходной T_0, приводит к образованию гидрата CO_2. Учёт растворимости CO_2 в воде приводит к меньшим значениям протяжённости области пласта, в которой присутствует газогидрат.

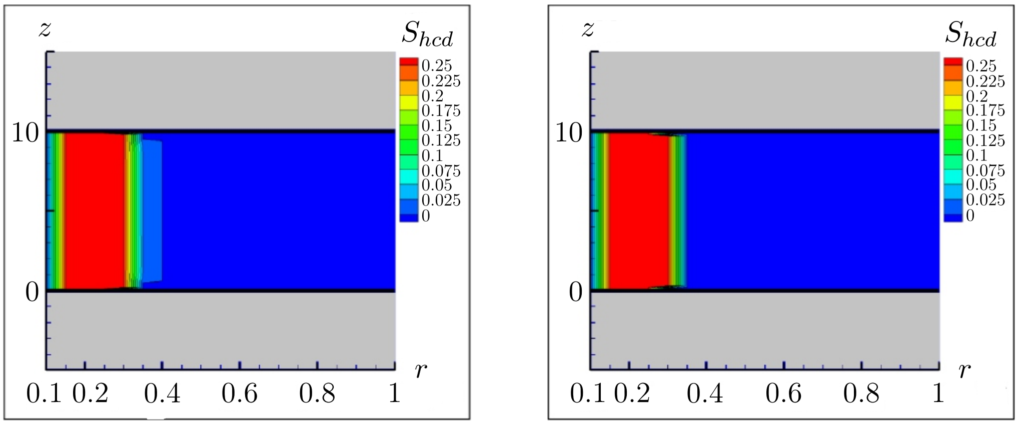


Рис. 2. Распределения насыщенности гидратом CO_2 S_{hcd}: без учёта растворимости CO_2 в воде — слева; с учётом — справа. Для удобства восприятия распределения представлены вблизи скважины до $r = 1$ м. z измеряется в м

Из рис. 3 видно, что давление в пласте повышается вследствие фильтрации углекислого газа вглубь пласта. При этом учёт растворимости углекислого газа в воде снижает темпы фильтрации, что обусловлено меньшими значениями давления, вызванные растворением части газообразного диоксида углерода в воде (рис. 4).

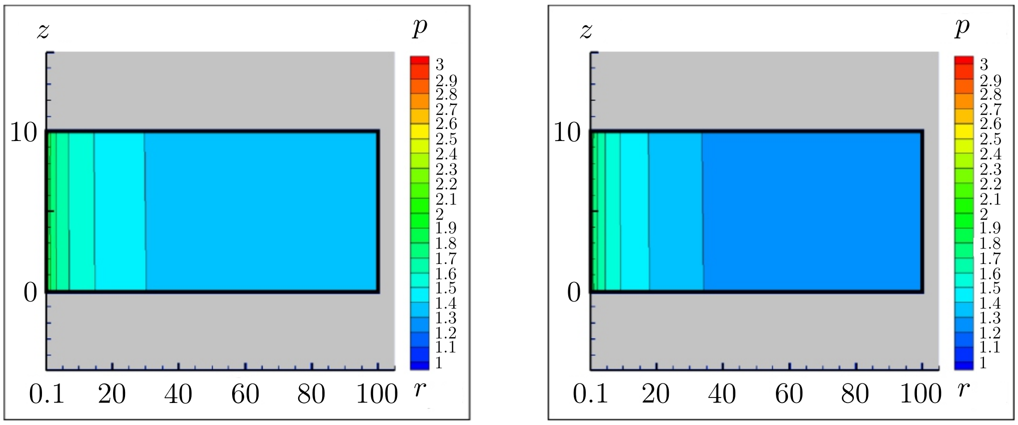


Рис. 3. Распределения давления p[МПа]: без учёта растворимости CO_2 в воде — слева; с учётом — справа. z и r измеряются в м

При закачке углекислого газа в пласт происходит вытеснение метана углекислым газом, о чём можно судить по построенным распределениям массовой доли CO_2 и CH_4 в газовой фазе (рис. 5). Видно, что проникновение углекислого газа вглубь пласта меньше для случая с учётом его растворимости в воде, так как часть CO_2 переходит в жидкую фазу (рис. 4). Также стоит отметить, что на некотором участке пласта имеет место совместная фильтрация углекислого газа и метана, при этом протяжённость этого участка пласта меньше в случае учёта растворимости CO_2. Эти расчёты отличаются от данных, представленных в работах [23, 45], в которых принят фронтальный режим вытеснения метана углекислым газом.

Анализ рис. 2 и 5 показывает, что при закачке углекислого газа в пласт, для рассматриваемого набора параметров, в нём формируются несколько областей: в первой, ближней к скважине области, пористая среда насыщена углекислым газом и его гидратом; во второй — присутствуют углекислый газ, его гидрат и вода; в третьей — углекислый газ и вода, в четвёртой — углекислый газ, метан и вода; в пятой, дальней невозмущённой области, присутствуют метан и вода. Стоит отметить, что для принятых расчётных параметров размеры второй обла-

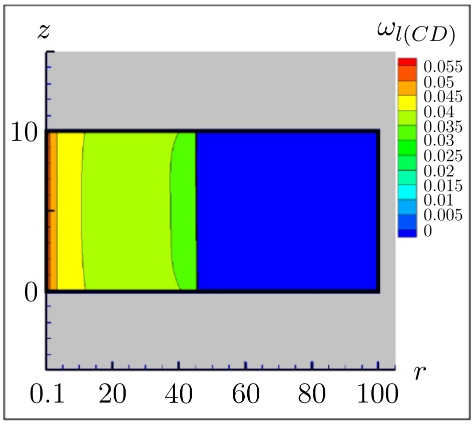


Рис. 4. Распределение массовой доли CO_2 в жидкости $\omega_{l(CD)}$. z и r измеряются в м

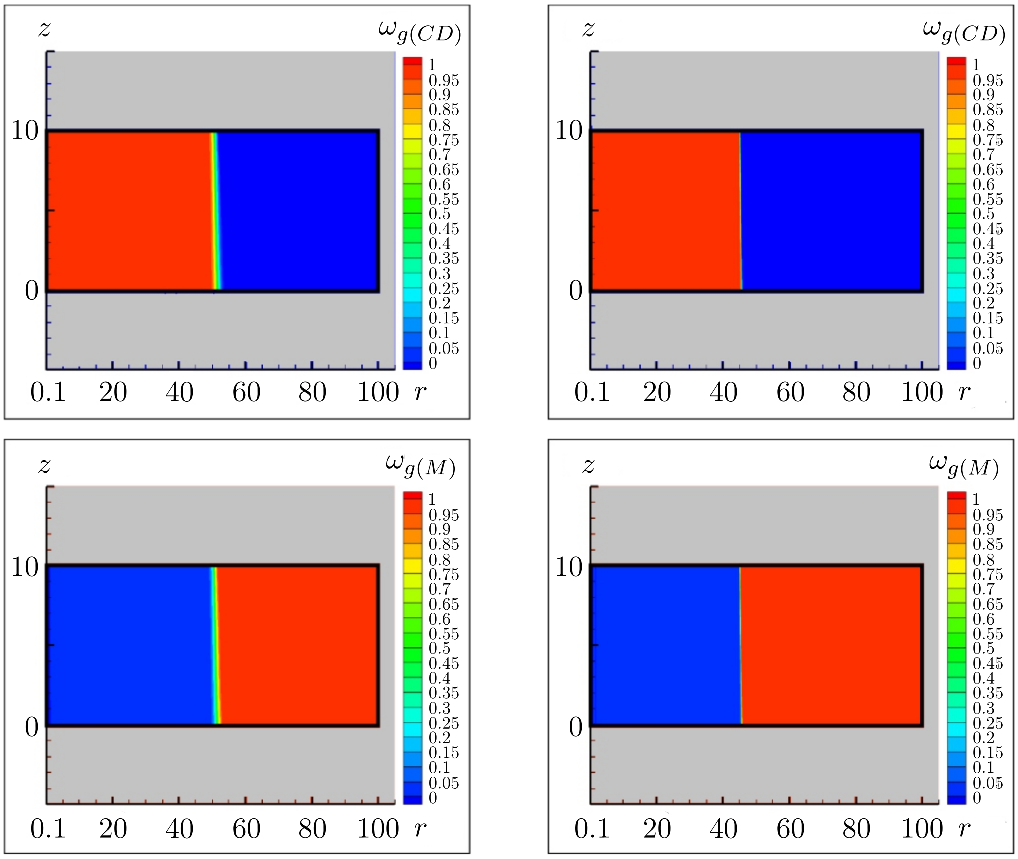


Рис. 5. Распределения массовой доли углекислого газа $\omega_{g(CD)}$ (верхние рисунки) и метана $\omega_{g(M)}$ (нижние рисунки) в газовой фазе: без учёта растворимости CO_2 в воде — слева; с учётом — справа. z и r измеряются в м

сти, в которой углекислый газ, его гидрат и вода находятся в состоянии фазового равновесия, пренебрежимо малы (в расчётах протяжённость составила величину порядка 10 см), поэтому фактически имеет место фронтальный режим гидратообразования.

Из данных, представленных на рис. 6, виден немонотонный характер изменения по координате r температуры в ближней к скважине области, вызванный действием неизотермических эффектов при фильтрации газа и выделением скрытой теплоты образования гидрата CO_2. Растворение углекислого газа в воде также является экзотермической реакцией, поэтому в области растворения происходит дополнительное повышение температуры. Более высокие значения температуры в этом случае также способствуют уменьшению протяжённости области, в которой присутствует газогидрат. Также наблюдается изменение температуры в окружающих пористый пласт горных породах (рис. 6), что объясняется теплообменом с ними за счёт теплопроводности.

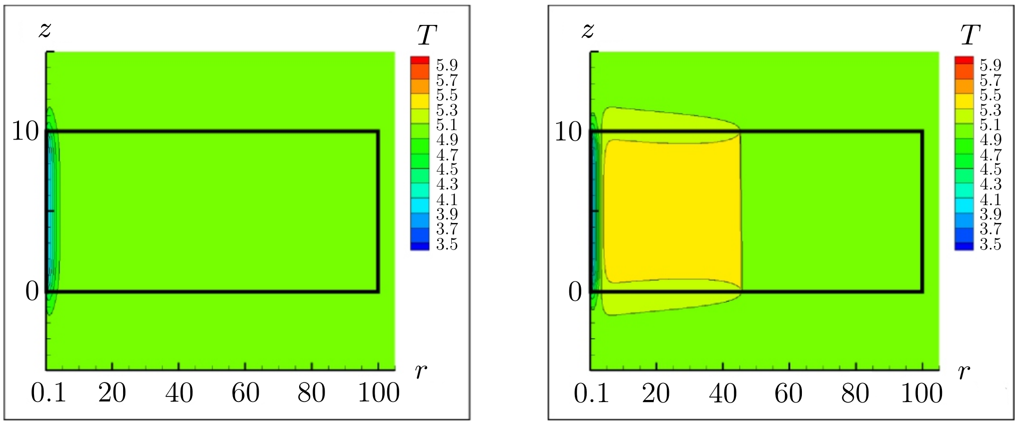


Рис. 6. Распределения температуры T[°C]: без учёта растворимости CO_2 в воде — слева; с учётом — справа. z и r измеряются в м

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В двумерном осесимметричном приближении выполнено математическое моделирование неизотермической фильтрации газожидкостной смеси с учётом образования газового гидрата при нагнетании углекислого газа в пористый пласт, поры которого в начальном состоянии заполнены метаном и водой. Разработана вычислительная программа, позволяющая рассчитать основные параметры (температура, давление, насыщенности фаз, состав фаз и др.) в пористой среде. Расчётным путём показано, что учёт растворимости углекислого газа в воде приводит к большим значениям температуры, меньшим темпам фильтрации и меньшей протяжённости области пористой среды, в которой присутствует гидрат CO_2.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-29-00093; https://rscf.ru/project/24-29-00093/). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Misyura S., Strizhak P., Meleshkin A., Morozov V., Gaidukova O., Shlegel N., Shkola M.* A review of gas capture and liquid separation technologies by CO_2 gas hydrate // Energies. 2023. V. 16, N 8. Article 3318; DOI: 10.3390/en16083318

2. Измерения погодной обсерватории Мауна-Лоа. ftp://aftp.cmdl.noaa.gov/products/trends/co2/co2_mm_mlo.txt

3. *Feyzi V., Mohebbi V.* Experimental study and modeling of the kinetics of carbon-dioxide hydrate formation and dissociation: A mass transfer limited kinetic approach // J. Nat. Gas. Sci. Eng. 2020. V. 77. Article 103273; DOI: 10.1016/j.jngse.2020.103273

4. *Cao X., Wang H., Yang K., Wu S., Chen Q., Bian J.* Hydrate-based CO_2 sequestration technology: Feasibilities, mechanisms, influencing factors, and applications // J. Nat. Gas. Sci. Eng. 2022. V. 219. Article 111121; DOI: 10.1016/j.petrol.2022.111121
5. *Muhammad H. A., Lee G., Cho J., Bhatti U. H., Baik Y-J., Lee B.* Design and optimization of CO_2 pressurization system integrated with a supercritical CO_2 power cycle for the CO_2 capture and storage system // Energy Convers. Manag. 2019. V. 195. P. 609–619; DOI: 10.1016/j.enconman.2019.05.029
6. *Chang R., Choi D., Kim M. H., Park Y.* Tuning crystal polymorphisms and structural investigation of precipitated calcium carbonates for CO_2 mineralization // ACS Sustain. Chem. Eng. 2016. V. 5, N 2. P. 1659–1667; DOI: 10.1021/acssuschemeng.6b02411
7. *Заводовский А. Г., Мадыгулов М. Ш., Решетников А. М.* Кинетика роста газогидрата Фреона-12 при термоциклировании образца // Криосфера Земли. 2017. Т. 21, № 5. С. 55–62; DOI: 10.21782/KZ1560-7496-2017-5(55-62)
8. *Mac Dowell N., Fennell P. S., Shah N., Maitland G. C.* The role of CO_2 capture and utilization in mitigating climate change // Nat. Clim. Chang. 2017. V. 7. P. 243–249; DOI: 10.1038/nclimate3231
9. *Massah M., Sun D., Sharifi H., Englezos P.* Demonstration of gas-hydrate assisted carbon dioxide storage through horizontal injection in lab-scale reservoir // J. Chem. Thermodyn. 2018. V. 117. P. 106–112; DOI: 10.1016/j.jct.2017.09.019
10. *Veluswamy H. P., Kumar A., Seo Y., Lee J. D., Linga P.* A review of solidified natural gas (SNG) technology for gas storage via clathrate hydrates // Appl. Energy. 2018. V. 216. P. 262–285; DOI: 10.1016/j.apenergy.2018.02.059
11. *Kim S., Santamarina J. C.* Engineered CO_2 injection: The use of surfactants for enhanced sweep efficiency // Int. J. Greenh. Gas Control. 2014. V. 20. P. 324–332; DOI: 10.1016/j.ijggc.2013.11.018
12. *Hassanpouryouzband A., Yang J., Tohidi B., Chuvilin E., Istomin V., Bukhanov B.* Geological CO_2 capture and storage with flue gas hydrate formation in frozen and unfrozen sediments: Method development, real time-scale kinetic characteristics, efficiency, and clathrate structural transition // ACS Sustain. Chem. Eng. 2019. V. 7, N 5. P. 5338–5345; DOI: 10.1021/acssuschemeng.8b06374
13. *Истомин В. А., Якушев В. С.* Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992.
14. *Chatti I., Delahaye A., Fournaison L., Petitet J-P.* Benefits and drawbacks of clathrate hydrates: A review of their areas of interest // Energy Convers. Manag. 2005. V. 46, N 9-10. P. 1333–1343; DOI: 10.1016/j.enconman.2004.06.032
15. *Богоявленский В. И., Янчевская А. С., Богоявленский И. В., Кишанков А. В.* Газовые гидраты на акваториях Циркумарктического региона // Арктика: экология и экономика. 2018. № 3(31). С. 42–55; DOI: 10.25283/2223-4594-2018-3-42-55
16. *Цыпкин Г. Г.* Образование гидрата при инжекции жидкой двуокиси углерода в пласт, насыщенный метаном и водой // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 5. С. 99–107; DOI: 10.7868/S0568528116050157
17. *Pandey Sh., Solms N.* Hydrate stability and methane recovery from gas hydrate through CH_4-CO_2 replacement in different mass transfer scenarios // Energies. 2019. V. 12, N 12. Article 2309; DOI: 10.3390/en12122309
18. *Khasanov M. K., Rafikova G. R., Musakaev N. G.* Mathematical model of carbon dioxide injection into a porous reservoir saturated with methane and its gas hydrate // Energies. 2020. V. 13, N 2. Article 440; DOI: 10.3390/en13020440
19. *Goel N.* In situ methane hydrate dissociation with carbon dioxide sequestration: Current knowledge and issues // J. Pet. Sci. Eng. 2006. V. 51, N 3–4. P. 169–184; DOI: 10.1016/j.petrol.2006.01.005
20. *Ndlovu P., Babaee S., Naidoo P.* Review on CH_4-CO_2 replacement for CO_2 sequestration and CH_4/CO_2 hydrate formation in porous media // Fuel. 2022. V. 320. Article 123795; DOI: 10.1016/j.fuel.2022.123795
21. *Espinoza D. N., Santamarina J. C.* P-wave monitoring of hydrate-bearing sand during CH_4-CO_2 replacement // Int. J. Greenh. Gas Control. 2011. V. 5, N 4. P. 1031–1038; DOI: 10.1016/j.ijggc.2011.02.006
22. *Yuan Q., Sun C.-Y., Liu B., Wang X., Ma Z.-W., Ma Q.-L., Yang L.-Y., Chen G.-J., Li Q.-P., Li S., Zhang K.* Methane recovery from natural gas hydrate in porous sediment using pressurized liquid CO_2 // Energy Convers. Manag. 2013. V. 67. P. 257–264; DOI: 10.1016/j.enconman.2012.11.018

23. *Цыпкин Г. Г.* Математическая модель конверсии гидрата CH_4 в гидрат CO_2 при больших скоростях инжекции углекислого газа в пласт // Докл. РАН. Физ., технич. науки. 2021. Т. 496, № 1. С. 60–64; DOI: 10.31857/S2686740020060188

24. *Шагапов В. Ш., Рафикова Г. Р., Хасанов М. К.* К теории образования газогидрата в частично водонасыщенной пористой среде при нагнетании метана // Теплофиз. высок. темпер. 2016. Т. 54, № 6. С. 911–920; DOI: 10.7868/S004036441606017X

25. *Bondarev E. A., Rozhin I. I., Popov V. V., Argunova K. K.* Underground storage of natural gas in hydrate state: Primary injection stage // J. Eng. Thermophys. 2018. V. 27. P. 221–231; DOI: 10.1134/S181023281802008X

26. *Шагапов В. Ш., Чиглинцева А. С., Русинов А. А., Хасанов М. К.* К теории процесса нагнетания холодного газа в снежный массив, сопровождаемый гидратообразованием // Инж.-физ. журнал. 2018. Т. 91, № 6. С. 1605–1616; DOI: 10.1007/s10891-018-1889-6

27. *Musakaev N. G., Khasanov M. K.* Solution of the problem of natural gas storages creating in gas hydrate state in porous reservoirs // Mathematics. 2020. V. 8, N 1. Article 36; DOI: 10.3390/math8010036

28. *Khasanov M. K., Musakaev N. G., Stolpovsky M. V., Kildibaeva S. R.* Mathematical model of decomposition of methane hydrate during the injection of liquid carbon dioxide into a reservoir saturated with methane and its hydrate // Mathematics. 2020. V. 8, N 9. Article 1482; DOI: 10.3390/math8091482

29. *Баренблатт Г. И., Лобковский Л. И., Нигматулин Р. И.* Математическая модель истечения газа из газонасыщенного льда и газогидратов // Докл. АН. 2016. Т. 470, № 4. С. 458–461; DOI: 10.7868/S0869565216280148

30. *Roostaie M., Leonenko Y.* Analytical modeling of methane hydrate dissociation under thermal stimulation // J. Pet. Sci. Eng. 2020. V. 184. Article 106505; DOI: 10.1016/j.petrol.2019.106505

31. *Borodin S. L., Musakaev N. G., Belskikh D. S.* Mathematical modeling of a non-isothermal flow in a porous medium considering gas hydrate decomposition: A review // Mathematics. 2022. V. 10, N 24. Article 4674; DOI: 10.3390/math10244674

32. *Басниев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М.* Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993.

33. *Abu-Nab A. K., Koldoba A. V., Koldoba E. V., Poveshchenko Yu. A., Podryga V. O., Rahimly P. I., Bakeer A. E.* On the theory of methane hydrate decomposition in a one-dimensional model in porous sediments: Numerical study // Mathematics. 2023. V. 11, N 2. Article 341; DOI: 10.3390/math11020341

34. *Nigmatulin R. I.* Dynamics of Multiphase Media. Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1991.

35. *Бородин С. Л., Бельских Д. С.* Математическое моделирование равновесного полного замещения метана углекислым газом в газогидратном пласте при отрицательных температурах // Вестн. ТГУ. Физ.-мат. моделир. Нефть, газ, энергетика. 2020. Т. 6, № 2(22). С. 63–80; DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-2-63-80

36. *Попов В. В.* Численное исследование разложения гидратов идеального газа в пласте при понижении давления и одновременном нагревании // Математич. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 4. С. 83–97; DOI: 10.25587/SVFU.2019.39.76.008

37. *Konno Y., Masuda Y., Hariguchi Y., Kurihara M., Ouchi H.* Key factors for depressurization-induced gas production from oceanic methane hydrates // Energy Fuels. 2010. V. 24, N 3. P. 1736–1744; DOI: 10.1021/ef901115h

38. *Sakamoto Y., Komai T., Miyazaki K., Tenma N., Yamaguchi T., Zyvoloski G.* Laboratory-scale experiments of the methane hydrate dissociation process in a porous media and numerical study for the estimation of permeability in methane hydrate reservoir // J. Thermodyn. 2010. Article 452326; DOI: 10.1155/2010/452326

39. *Liang W., Wang J., Li P.* Gas production analysis for hydrate sediment with compound morphology by a new dynamic permeability model // Appl. Energy. 2022. V. 322. Article 119434; DOI: 10.1016/j.apenergy.2022.119434

40. *Zhang P., Liu B., Hu L., Meegoda J. N.* Coupled multiphase flow and pore compression computational model for extraction of offshore gas hydrates // Comput. Geotech. 2022. V. 145. Article 104671; DOI: 10.1016/j.compgeo.2022.104671

41. *Латонов В. В., Гуревич Г. Р.* Расчёт коэффициента сжимаемости природного газа // Газ. промышленность. 1969. № 2. С. 7–9.

42. *Воронов В. П., Городецкий Е. Е., Григорьев Б. А., Муратов А. Р.* Экспериментальное исследование процесса замещения метана в газовом гидрате диоксидом углерода // Научно-технич. сборн. Вести газ. науки. 2011. № 2(7). С. 235–248.

43. *Косарев В. И.* 12 лекций по вычислительной математике (вводный курс). Изд. 3-е, испр. и доп. М.: Физматкнига, 2013.

44. *Musakaev N. G., Borodin S. L.* To the question of the interpolation of the phase equilibrium curves for the hydrates of methane and carbon dioxide // MATEC Web Conf. 2017. V. 115. Article 05002; DOI: 10.1051/matecconf/201711505002

45. *Мусакаев Н. Г., Хасанов М. К.* Математическое моделирование процесса образования газогидрата при закачке диоксида углерода в насыщенный метаном и льдом пласт // Криосфера Земли. 2016. Т. 20, № 3. С. 63–70; DOI: 10.21782/KZ1560-7496-2016-3(63-70)

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 004.94:519.63:532.5

MATHEMATICAL MODELING OF CARBON DIOXIDE INJECTION INTO A RESERVOIR WITH METHANE AND WATER TAKING INTO ACCOUNT THE FORMATION OF CARBON DIOXIDE HYDRATE

N. G. Musakaev[a], **S. L. Borodin**[b]

Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Tyumen, 625026 Russia

E-mails: [a]musakaev68@yandex.ru, [b]S.L.Borodin@yandex.ru

Received 24.06.2024, revised 21.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. An increase in the concentration of carbon dioxide in the atmosphere caused by the combustion of fuels has a negative impact on the current biosphere of the Earth. One way to get rid of excess carbon dioxide in the atmosphere is to capture and store it. Various methods for long-term storage of carbon dioxide are proposed, including in various geological formations in gas hydrate form, since gas hydrates have a number of unique properties, for example, it is possible to stably store a sufficiently large amount of gas in a small volume at a relatively low pressure. One of the objects for creating underground carbon dioxide storage facilities are depleted natural gas deposits, since they are well studied, the characteristics of the deposits, their geometric dimensions are known, and there are drilled wells. To study the patterns of the formation process of an underground gas hydrate carbon dioxide storage, the article presents a mathematical model of the process of carbon dioxide injection into a zonally heterogeneous porous reservoir, initially saturated with methane and water, accompanied by the formation of gas hydrate. Unlike previous works, the mathematical model additionally takes into account a number of factors: the solubility of carbon dioxide in water, zonal heterogeneity of a reservoir, heat exchange of the reservoir with the surrounding rocks impermeable to matter, filtration of water and gas. Numerical solutions of the problem were constructed to describe the distribution of parameters (pressure, temperature, carbon dioxide hydrate saturation) in the reservoir.

Keywords: mathematical model, carbon dioxide burial, multiphase filtration, gas hydrate formation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.404

REFERENCES

1. S. Misyura, P. Strizhak, A. Meleshkin, V. Morozov, O. Gaidukova, N. Shlegel, and M. Shkola, "A review of gas capture and liquid separation technologies by CO_2 gas hydrate," Energies **16** (8), 3318 (2023). https://doi.org/10.3390/en16083318
2. *Measurements from the Mauna Loa Weather Observatory.* ftp://aftp.cmdl.noaa.gov/products/trends/CO_2/CO_2_mm_mlo.txt.
3. V. Feyzi and V. Mohebbi, "Experimental study and modeling of the kinetics of carbon-dioxide hydrate formation and dissociation: A mass transfer limited kinetic approach," J. Nat. Gas. Sci. Eng. **77**, 103273 (2020). https://doi.org/10.1016/j.jngse.2020.103273
4. X. Cao, H. Wang, K. Yang, S. Wu, Q. Chen, and J. Bian, "Hydrate-based CO_2 sequestration technology: Feasibilities, mechanisms, influencing factors, and applications," J. Nat. Gas. Sci. Eng. **219**, 111121 (2022). https://doi.org/10.1016/j.petrol.2022.111121
5. H. A. Muhammad, G. Lee, J. Cho, U. H. Bhatti, Y-J. Baik, and B. Lee, "Design and optimization of CO_2 pressurization system integrated with a supercritical CO_2 power cycle

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 744–758.

for the CO_2 capture and storage system," Energy Convers. Manage. **195**, 609–619 (2019). https://doi.org/10.1016/j.enconman.2019.05.029

6. R. Chang, D. Choi, M. H. Kim, and Y. Park, "Tuning crystal polymorphisms and structural investigation of precipitated calcium carbonates for CO_2 mineralization," ACS Sustain. Chem. Eng. **5** (2), 1659–1667 (2016). https://doi.org/10.1021/acssuschemeng.6b02411
7. A. G. Zavodovskii, M. Sh. Madygulov, and A. M. Reshetnikov, "Kinetics of Freon-12 gas hydrate growth during sample thermal cycling," Kriosfera Zemli **21** (5), 55–62 (2017) [in Russian]. https://doi.org/10.21782/KZ1560-7496-2017-5(55-62)
8. N. Mac Dowell, P. S. Fennell, N. Shah, and G. C. Maitland, "The role of CO_2 capture and utilization in mitigating climate change," Nat. Clim. Chang. **7**, 243–249 (2017). https://doi.org/10.1038/nclimate3231
9. M. Massah, D. Sun, H. Sharifi, and P. Englezos, "Demonstration of gas-hydrate assisted carbon dioxide storage through horizontal injection in lab-scale reservoir," J. Chem. Thermodyn. **117**, 106–112 (2018). https://doi.org/10.1016/j.jct.2017.09.019
10. H. P. Veluswamy, A. Kumar, Y. Seo, J. D. Lee, and P. Linga, "A review of solidified natural gas (SNG) technology for gas storage via clathrate hydrates," Appl. Energy **216**, 262–285 (2018). https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.02.059
11. S. Kim and J. C. Santamarina, "Engineered CO_2 injection: The use of surfactants for enhanced sweep efficiency," Int. J. Greenh. Gas Control **20**, 324–332 (2014). https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2013.11.018
12. A. Hassanpouryouzband, J. Yang, B. Tohidi, E. Chuvilin, V. Istomin, and B. Bukhanov, "Geological CO_2 capture and storage with flue gas hydrate formation in frozen and unfrozen sediments: Method development, real time-scale kinetic characteristics, efficiency, and clathrate structural transition," ACS Sustain. Chem. Eng. **7** (5), 5338–5345 (2019). https://doi.org/10.1021/acssuschemeng.8b06374
13. V. A. Istomin and V. S. Yakushev, *Gas Hydrates in Natural Conditions* (Nedra, Moscow, 1992) [in Russian].
14. I. Chatti, A. Delahaye, L. Fournaison, and J-P. Petitet, "Benefits and drawbacks of clathrate hydrates: A review of their areas of interest," Energy Convers. Manage. **46** (9–10), 1333–1343 (2005). https://doi.org/10.1016/j.enconman.2004.06.032
15. V. I. Bogoyavlenskii, A. S. Yanchevskaya, I. V. Bogoyavlenskii, and A. V. Kishankov, "Gas hydrates in the waters of the circumarctic region," Arktika: Ekol. Ekon. **3** (31), 42–55 (2018) [in Russian]. https://doi.org/10.25283/2223-4594-2018-3-42-55
16. G. G. Tsypkin, "Formation of hydrate in injection of liquid carbon dioxide into a reservoir saturated with methane and water," Fluid Dyn. **51** (5), 672–679 (2016).
17. Sh. Pandey and N. Solms, "Hydrate stability and methane recovery from gas hydrate through CH_4–CO_2 replacement in different mass transfer scenarios," Energies **12** (12), 2309 (2019). https://doi.org/10.3390/en12122309
18. M. K. Khasanov, G. R. Rafikova, and N. G. Musakaev, "Mathematical model of carbon dioxide injection into a porous reservoir saturated with methane and its gas hydrate," Energies **13** (2), 440 (2020). https://doi.org/10.3390/en13020440
19. N. Goel, "In situ methane hydrate dissociation with carbon dioxide sequestration: Current knowledge and issues," J. Pet. Sci. Eng. **51** (3–4), 169–184 (2006). https://doi.org/10.1016/j.petrol.2006.01.005
20. P. Ndlovu, S. Babaee, and P. Naidoo, "Review on CH_4–CO_2 replacement for CO_2 sequestration and CH_4/CO_2 hydrate formation in porous media," Fuel **320**, 123795 (2022). https://doi.org/10.1016/j.fuel.2022.123795
21. D. N. Espinoza and J. C. Santamarina, "P-wave monitoring of hydrate-bearing sand during CH_4–CO_2 replacement," Int. J. Greenhouse Gas Control **5** (4), 1031–1038 (2011). https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2011.02.006
22. Q. Yuan, C.-Y. Sun, B. Liu, X. Wang, Z.-W. Ma, Q.-L. Ma, L.-Y. Yang, G.-J. Chen, Q.-P. Li, S. Li, and K. Zhang, "Methane recovery from natural gas hydrate in porous sediment using pressurized liquid CO_2," Energy Convers. Manage. **67**, 257–264 (2013). https://doi.org/10.1016/j.enconman.2012.11.018
23. G. G. Tsypkin, "Mathematical model of conversion of CH_4 hydrate to CO_2 hydrate at high rates of carbon dioxide injection into a reservoir," Dokl. Phys. **66** (1), 30–33 (2021). https://doi.org/10.31857/S2686740020060188

24. V. Sh. Shagapov, G. R. Rafikova, and M. K. Khasanov, "On the theory of formation of gas hydrate in partially water-saturated porous medium when injecting methane," High Temperature **54** (6), 858–866 (2016). https://doi.org/10.7868/S004036441606017X

25. E. A. Bondarev, I. I. Rozhin, V. V. Popov, and K. K. Argunova, "Underground storage of natural gas in hydrate state: Primary injection stage," J. Eng. Thermophys. **27**, 221–231 (2018). https://doi.org/10.1134/S181023281802008X

26. V. Sh. Shagapov, A. S. Chiglintseva, A. A. Rusinov, and M. K. Khasanov, "To the theory of the process of cold gas injection into a snow massif, accompanied by hydrate formation," Inzh.-Fiz. Zh. **91** (6), 1605–1616 (2018) [in Russian]. https://doi.org/10.1007/s10891-018-1889-6

27. N. G. Musakaev and M. K. Khasanov, "Solution of the problem of natural gas storages creating in gas hydrate state in porous reservoirs," Mathematics **8** (1), 36 (2020). https://doi.org/10.3390/math8010036

28. M. K. Khasanov, N. G. Musakaev, M. V. Stolpovsky, and S. R. Kildibaeva, "Mathematical model of decomposition of methane hydrate during the injection of liquid carbon dioxide into a reservoir saturated with methane and its hydrate," Mathematics **8** (9), 1482 (2020). https://doi.org/10.3390/math8091482

29. G. I. Barenblatt, L. I. Lobkovsky, and R. I. Nigmatulin, "A mathematical model of gas outflow from gas-saturated ice and gas hydrates," Dokl. Earth Sci. **470** (2), 1046–1049 (2016). https://doi.org/10.7868/S0869565216280148

30. M. Roostaie and Y. Leonenko, "Analytical modeling of methane hydrate dissociation under thermal stimulation," J. Pet. Sci. Eng. **184**, 106505 (2020). https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106505

31. S. L. Borodin, N. G. Musakaev, and D. S. Belskikh, "Mathematical modeling of a non-isothermal flow in a porous medium considering gas hydrate decomposition: A review," Mathematics **10** (24), 4674 (2022). https://doi.org/10.3390/math10244674

32. K. S. Basniev, I. N. Kochina, and V. M. Maksimov, *Underground Hydromechanics* (Nedra, Moscow, 1993) [in Russian].

33. A. K. Abu-Nab, A. V. Koldoba, E. V. Koldoba, Yu. A. Poveshchenko, V. O. Podryga, P. I. Rahimly, and A. E. Bakeer, "On the theory of methane hydrate decomposition in a one-dimensional model in porous sediments: Numerical study," Mathematics **11** (2), 341 (2023). https://doi.org/10.3390/math11020341

34. R. I. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media* (Hemisphere, Washington, 1991).

35. S. L. Borodin and D. S. Bel'skikh, "Mathematical modeling of equilibrium complete substitution of methane with carbon dioxide in a gas hydrate reservoir at negative temperatures," Vestn. TGU. Fiz.-Mat. Model. Neft' Gaz Energ. **6** (2(22)), 63–80 (2020) [in Russian]. https://doi.org/10.21684/2411-7978-2020-6-2-63-80

36. V. V. Popov, "Numerical study of the decomposition of ideal gas hydrates in a reservoir with decreasing pressure and simultaneous heating," Mat. Zam. SVFU **26** (4), 83–97 (2019) [in Russian]. https://doi.org/10.25587/SVFU.2019.39.76.008

37. Y. Konno, Y. Masuda, Y. Hariguchi, M. Kurihara, and H. Ouchi, "Key factors for depressurization-induced gas production from oceanic methane hydrates," Energy Fuels **24** (3), 1736–1744 (2010). https://doi.org/10.1021/ef901115h

38. Y. Sakamoto, T. Komai, K. Miyazaki, N. Tenma, T. Yamaguchi, and G. Zyvoloski, "Laboratory-scale experiments of the methane hydrate dissociation process in a porous media and numerical study for the estimation of permeability in methane hydrate reservoir," J. Thermodyn., 452326 (2010). https://doi.org/10.1155/2010/452326

39. W. Liang, J. Wang, AND P. Li, "Gas production analysis for hydrate sediment with compound morphology by a new dynamic permeability model," Appl. Energy **322**, 119434 (2022). https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119434

40. P. Zhang, B. Liu, L. Hu, and J. N. Meegoda, "Coupled multiphase flow and pore compression computational model for extraction of offshore gas hydrates," Comput. Geotech. **145**, 104671 (2022). https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2022.104671

41. V. V. Latonov and G. R. Gurevich, "Calculation of the compressibility coefficient of natural gas," Gaz. Prom-st. (2), 7–9 (1969) [in Russian].

42. V. P. Voronov, E. E. Gorodetskii, B. A. Grigoriev, and A. R. Muratov, "Experimental study of the process of methane substitution in gas hydrate with carbon dioxide. Nauchno-Tekh. Sb. Vesti Gaz Nauki **2** (7), 235–248 (2011) [in Russian].

43. V. I. Kosarev, *12 Lectures on Computational Mathematics* (Introductory Course) (Fizmatkniga, Moscow, 2013) [in Russian].

44. N. G. Musakaev and S. L. Borodin, "To the question of the interpolation of the phase equilibrium curves for the hydrates of methane and carbon dioxide," MATEC Web Conf. **115**, 05002 (2017). https://doi.org/10.1051/matecconf/201711505002

45. N. G. Musakaev and M. K. Khasanov, "Mathematical modeling of the process of gas hydrate formation during injection of carbon dioxide into a formation saturated with methane and ice," Kriosf. Zemli **20** (3), 63–70 (2016) [in Russian]. https://doi.org/10.21782/KZ1560-7496-2016-3(63-70)

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 4. С. 68–83

УДК 539.3:517.95

О СОПРЯЖЕНИИ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ ТИМОШЕНКО В УПРУГИХ ТЕЛАХ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ

© 2024 Н. А. Николаева

Северо-Восточный федеральный университет,
ул. Кулаковского, 48, г. Якутск 677000, Россия

E-mail: niknataf@mail.ru

Поступила в редакцию 13.10.2023 г.; после доработки 21.05.2024 г.;
принята к публикации 03.07.2024 г.

Исследуется задача о сопряжении тонких упругих включений Тимошенко, расположенных в двумерном упругом теле с трещиной. Предполагается, что трещина пересекает тонкое включение в некоторой точке, являющейся точкой взаимного контакта. В точке контакта и на берегах трещины задаются нелинейные краевые условия типа неравенств, которые позволяют предотвратить взаимное проникание частей включения и берегов трещины соответственно. Установлены существование и единственность решения задачи. Получена дифференциальная постановка в виде краевой задачи, содержащая в себе условия сопряжения.

Ключевые слова: условия сопряжения, нелинейные краевые условия, включение Тимошенко, трещина, вариационное неравенство.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.405

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования обусловлена стремительным увеличением применения композиционных материалов с тонкими волокнами при создании различных конструкций и изделий. При эксплуатации данных конструкций наличие инородных включений может привести к образованию трещин. Это вызывает необходимость изучения математических задач равновесия упругих тел с тонкими включениями и трещинами. При этом существенную роль играет выбор краевых условий на берегах трещины. Существует два подхода для описания задач теории трещин. Первый подход — это классический, который характеризуется линейными краевыми условиями на берегах [1]. В этом случае допускается взаимное проникание берегов трещины, что является недостатком модели. Второй же подход описывается нелинейными краевыми условиями вида системы равенств и неравенств, которые обеспечивают взаимное непроникание берегов трещины (см. [2, 3]). В случае отслоения также применимы описанные методы моделирования трещин, поскольку отслоение подразумевает наличие трещины между включением и материалом матрицы. В представленной работе для описания трещин применяются нелинейные краевые условия. На сегодняшний день опубликовано значительное количество результатов, где при описании отслоения тонких включений используются указанные нелинейные краевые условия. Широкий класс задач данного направления можно разделять по способу моделирования тонких включений, расположенных в упругих телах.

Математические модели тонких упругих включений Тимошенко с возможным отслоением в упругом теле были сформулированы в работах [4, 5]. Впоследствии по указанному направлению были рассмотрены различные постановки задач и исследованы предельные переходы по параметру жёсткости [6], была выведена формула Гриффитса [7], проанализирован случай, когда включение Тимошенко пересекает внешнюю границу под нулевым углом [8], были построены и проверены численные алгоритмы решения [9], а также изучены задачи сопряжения [10–12].

Исследования математических моделей тонких жёстких включений при наличии отслоения в упругих телах берут своё начало с публикации [13]. В дальнейшем для данной модели были рассмотрены задачи оптимального управления параметрами включения [14], численное решение [15], некоторые контактные задачи [16–18] и задачи сопряжения [19–21].

Модель Бернулли—Эйлера является одной из наиболее распространённых моделей для описания поведения тонких упругих включений в упругом теле [22, 23]. В частности, с включением Бернулли—Эйлера были исследованы задачи о равновесии двумерного вязкоупругого тела [24], задача с параметром повреждаемости [25], задача о равновесии пластины, сопряжённой с препятствием [26], а также различные задачи о сопряжении [20, 27, 28].

Отдельно отметим работы, где обсуждаются общие и всесторонние вопросы сопряжения математических моделей линейной теории упругости. В работе [29] на примере бигармонического уравнения сформулированы условия сопряжения для стержней и пластин. В [30–32] рассмотрены разнообразные задачи о сопряжении линейных структур и стержней. В [33–35] изучены условия сопряжения в рамках теории упругих балок. Сопряжения линейных включений и трещин рассмотрены в [36–38].

В представленной работе рассматривается задача равновесия двумерного упругого тела с трещиной и с тонким упругим включением. Упругое включение моделируется балкой Тимошенко. На берегах трещины задаются краевые условия взаимного непроникания берегов. Предполагается, что трещина точкой пересечения делит включение на две части. Таким образом, возникает контакт частей включения в одной точке. Указанная точка является точкой сопряжения. В этом случае, исходя из геометрии расположения трещины и включения, условие непроникания учитывается и в точке сопряжения. Наличие данного краевого условия исключает взаимное проникание частей включения друг в друга и является естественным с точки зрения механики. Целью данной работы является доказательство однозначной разрешимости поставленной задачи и отыскание краевых условий в точке сопряжения для дифференциальной постановки. При этом дифференциальная постановка будет рассмотрена для двух случаев: 1) когда тонкие включения не имеют отслоения и 2) когда имеется отслоение одного из сопряжённых включений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

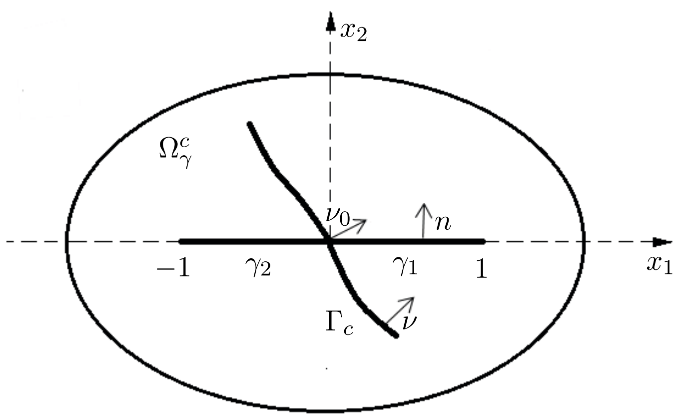


Рис. 1. Область Ω с трещиной Γ_c и тонкими включениями γ_1, γ_2

Пусть $\overline{\gamma} \subset \Omega$, $\overline{\Gamma}_c \subset \Omega$ — гладкие кривые без самопересечений такие, что $\gamma \cap \Gamma_c = \{(0,0)\}$, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0,0)\}$, $\gamma_1 = (0,1) \times \{0\}$, $\gamma_2 = (-1,0) \times \{0\}$. Здесь Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ. Предположим, что кривые Γ_c и γ можем продолжить до пересечения внешней границы Γ, разбивая при этом область Ω на четыре подобласти D_i с липшицевыми границами ∂D_i, причём $meas(\Gamma \cap \partial D_i) > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор нормали к Γ_c, через $n = (0, 1)$ — единичный вектор нормали к γ, через $\tau = (\nu_2, -\nu_1)$ и $s = (1, 0)$ — касательные вектора к Γ_c и γ соответственно. Нормаль в точке $(0, 0)$, которая совпадает с направлением нормали ν к Γ_c, обозначим через ν_0 (см. рис. 1). Пусть также $\Omega^c_\gamma = \Omega \setminus (\overline{\gamma} \cup \overline{\Gamma}_c)$.

В рассматриваемой модели область Ω^c_γ будет соответствовать упругому телу в естественном состоянии, Γ_c — трещине, а γ_1 и γ_2 — тонким упругим включениям с заданными свойствами. В частности, считаем, что поведение упругих включений γ_1 и γ_2 описывается моделью балок Тимошенко (см., например, [39]). Введём тензор модулей упругости $A = \{a_{ejkl}\}$ с обычными свойствами симметрии

$$a_{ejkl} = a_{jekl} = a_{klej}, \quad a_{ejkl} \in L^\infty(\Omega)$$

и положительной определённости

$$a_{ejkl}\xi_{kl}\xi_{ej} \geqslant c_0|\xi|^2, \quad \forall\, \xi_{ej} = \xi_{je}, \quad c_0 = const > 0, \quad e, j, k, l = 1, 2.$$

Всюду в работе все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

Обозначим через $u = (u_1, u_2)$ и $\sigma = \{\sigma_{ej}\}$ поле перемещений и тензор напряжения упругого тела Ω^c_γ, $e, j = 1, 2$. Функции $v^{(i)}$, $w^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$ будут определены на тонких включениях γ_i и рассмотрены как функции одной переменной x_1, $i = 1, 2$. Вместе с тем функции $v^{(i)}$, $w^{(i)}$ описывают вертикальные и горизонтальные перемещения, а $\varphi^{(i)}$ — углы поворота нормального сечения включений γ_i, $i = 1, 2$. Скачок функции v на Γ_c обозначим через $[v] = v^+ - v^-$, где $v^\pm$ соответствуют значениям v на положительном и отрицательном берегах кривой Γ_c по отношению к нормали ν. Тензор деформаций введём по формулам: $\varepsilon = \{\varepsilon_{ej}\}$, $\varepsilon_{ej}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_e}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_e}\right)$, $e, j = 1, 2$. Кроме того, $\sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$, $\sigma_\nu = \sigma_{ej}\nu_j\nu_e$, $\sigma_\tau = \sigma_{ej}\nu_j\tau_e$, $u_\nu = u\nu$, $u_\tau = u\tau$, $u_n = un$, $u_s = us$, где $e, j = 1, 2$.

2. СЛУЧАЙ БЕЗ ОТСЛОЕНИЯ

В этом разделе мы рассматриваем задачу равновесия упругого тела с трещиной и тонкими упругими включениями без отслоения. Для данной задачи будет приведена вариационная постановка, доказаны существование и единственность решения, а также сформулирована дифференциальная постановка, которая эквивалентна вариационной.

Рассмотрим вариационную постановку задачи. С этой целью введём множество допустимых функций

$$K_1 = \{(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \mid u \in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2,\ (v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in H^1(\gamma_i)^3,\ v^{(i)} = u_n,\ w^{(i)} = u_s \text{ на } \gamma_i,$$
$$i = 1, 2;\ [u_\nu] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_c;\ ((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0\},$$

где $H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)$ — подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega^c_\gamma)$:

$$H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma) = \left\{v \in H^1(\Omega^c_\gamma) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\right\}.$$

Приведём значение условий, которые входят в определение множества K_1. Равенства $v^{(i)} = u_n$, $w^{(i)} = u_s$ на γ_i означают совпадение вертикальных (по оси x_2) и горизонтальных (по оси x_1) перемещений упругого тела с перемещениями включений на γ_i, $i = 1, 2$. Неравенство $[u_\nu] \geqslant 0$ описывает взаимодействие берегов трещины Γ_c, допуская их контакт (знак равенства) либо расхождение (знак строгого неравенства), и одновременно исключает проникание берегов трещины. Данное условие непроникания выполнено почти всюду на Γ_c. Тогда в точке $(0,0)$ может быть допущено проникание включений γ_1 и γ_2 друг в друга. Условие $((w^{(1)},v^{(1)})(0+)-(w^{(2)},v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0$, в свою очередь, обеспечивает непроникание включений γ_1 и γ_2 в точке контакта.

Введём функционал энергии

$$\Pi(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\Big\{(w_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)})^2 + (v_x^{(i)}+\varphi^{(i)})^2\Big\}.$$

Здесь и далее по тексту, где не указано, считаем, что $i=1,2$. Вдобавок, для упрощения будем писать $\sigma(u)\varepsilon(u)=\sigma_{ej}(u)\varepsilon_{ej}(u)$, $fu=f_eu_e$, $v_x=\dfrac{dv}{dx}$, $x=x_1$, $(x_1,x_2)\in\Omega$.

Теорема 1. *Задача минимизации*

найти $(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)})\in K_1$, *так что* $\Pi(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)})=\inf\limits_{K_1}\Pi$

имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)})\in K_1,$$

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(\bar u-u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar u-u) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\Big\{w_x^{(i)}(\bar w_x^{(i)}-w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar\varphi_x^{(i)}-\varphi_x^{(i)})\Big\}+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}(v_x^{(i)}+\varphi^{(i)})(\bar v_x^{(i)}+\bar\varphi^{(i)}-v_x^{(i)}-\varphi^{(i)})\geqslant 0 \qquad (1)$$

для всех $(\bar u,\bar v^{(i)},\bar w^{(i)},\bar\varphi^{(i)})\in K_1$, $i=1,2$.

Доказательство. Множество K_1 в силу выпуклости и замкнутости будет слабо замкнутым. Функционал Π является слабо полунепрерывным снизу. Доказательство этого свойства мы приводить не будем, поскольку с аналогичной схемой рассуждения можно ознакомиться в [2]. Таким образом, для доказательства существования решения нам достаточно показать коэрцитивность функционала Π. Итак, при $(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)})\in K_1$, $\alpha>0$ и $\beta>0$ имеем

$$\Pi(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\Big\{(w_x^{(i)})^2+(\varphi_x^{(i)})^2+(v_x^{(i)}+\varphi^{(i)})^2\Big\}\pm$$
$$\pm\alpha\int\limits_{\gamma_1}((v^{(1)})^2+(w^{(1)})^2)\pm\beta\int\limits_{\gamma_2}((v^{(2)})^2+(w^{(2)})^2).$$

В силу неравенства Корна, непрерывности вложения пространства $H^1_\Gamma(\Omega_\gamma^c)$ в $L^2(\gamma_i)$ и условий $u_n=v^{(i)}$, $u_s=w^{(i)}$ на γ_i при малых $\alpha>0$, $\beta>0$ будут справедливы оценки

$$\frac{1}{8}\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(u)-\alpha\int\limits_{\gamma_1}((v^{(1)})^2+(w^{(1)})^2)\geqslant 0,\quad \frac{1}{8}\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(u)-\beta\int\limits_{\gamma_2}((v^{(2)})^2+(w^{(2)})^2)\geqslant 0. \qquad (2)$$

На основании леммы, доказанной в [6], получим, что существуют константы $c_2>0$, $c_3>0$, не зависящие от функций такие, что

$$\int\limits_{\gamma_1}\Big\{(w_x^{(1)})^2+(\varphi_x^{(1)})^2+(v_x^{(1)}+\varphi^{(1)})^2\Big\}+\alpha\int\limits_{\gamma_1}((v^{(1)})^2+(w^{(1)})^2)\geqslant c_2\left\|(v^{(1)},w^{(1)},\varphi^{(1)})\right\|^2_{H^1(\gamma_1)^3},$$
$$\int\limits_{\gamma_2}\Big\{(w_x^{(2)})^2+(\varphi_x^{(2)})^2+(v_x^{(2)}+\varphi^{(2)})^2\Big\}+\beta\int\limits_{\gamma_2}((v^{(2)})^2+(w^{(2)})^2)\geqslant c_3\left\|(v^{(2)},w^{(2)},\varphi^{(2)})\right\|^2_{H^1(\gamma_2)^3}.$$
$$(3)$$

Учитывая (2), (3), неравенства Корна и Коши, для функционала энергии запишем

$$\Pi(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)}) \geqslant c_0\,\|u\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2} - c_1\,\|u\|_{H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2} + c_2\left\|(v^{(1)},w^{(1)},\varphi^{(1)})\right\|^2_{H^1(\gamma_1)^3} + \\ + c_3\left\|(v^{(2)},w^{(2)},\varphi^{(2)})\right\|^2_{H^1(\gamma_2)^3}.$$

Отсюда следует коэрцитивность функционала Π на множестве K_1.

Докажем единственность решения методом от противного. Допустим, что задача (1) имеет два решения: $(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)})$ и $(\tilde u,\tilde v^{(i)},\tilde w^{(i)},\tilde\varphi^{(i)})$. Поскольку неравенство справедливо для всех $(\bar u,\bar v^{(i)},\bar w^{(i)},\bar\varphi^{(i)}) \in K_1$, в неравенство для первого решения $(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)})$ в качестве пробного элемента $(\bar u,\bar v^{(i)},\bar w^{(i)},\bar\varphi^{(i)})$ возьмём второе решение $(\tilde u,\tilde v^{(i)},\tilde w^{(i)},\tilde\varphi^{(i)})$. Также в неравенство для второго решения $(\tilde u,\tilde v^{(i)},\tilde w^{(i)},\tilde\varphi^{(i)})$ подставим $(\bar u,\bar v^{(i)},\bar w^{(i)},\bar\varphi^{(i)}) = (u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)})$. После этого сложим полученные неравенства. Тогда, с одной стороны, верно соотношение

$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma}\sigma(u-\tilde u)\varepsilon(u-\tilde u) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\left\{(w^{(i)}_x-\tilde w^{(i)}_x)^2 + (\varphi^{(i)}_x-\tilde\varphi^{(i)}_x)^2\right\} + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}(v^{(i)}_x+\varphi^{(i)}-\tilde v^{(i)}_x-\tilde\varphi^{(i)})^2 \leqslant 0.$$

С другой стороны, из рассуждений, аналогичных рассуждениям доказательства коэрцитивности функционала Π, справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma}\sigma(u-\tilde u)\varepsilon(u-\tilde u) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\left\{(w^{(i)}_x-\tilde w^{(i)}_x)^2 + (\varphi^{(i)}_x-\tilde\varphi^{(i)}_x)^2\right\} + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}(v^{(i)}_x+\varphi^{(i)}-\tilde v^{(i)}_x-\tilde\varphi^{(i)})^2 \geqslant 0.$$

В результате получим

$$\int\limits_{\Omega^c_\gamma}\sigma(u-\tilde u)\varepsilon(u-\tilde u) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\left\{(w^{(i)}_x-\tilde w^{(i)}_x)^2 + (\varphi^{(i)}_x-\tilde\varphi^{(i)}_x)^2\right\} + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}(v^{(i)}_x+\varphi^{(i)}-\tilde v^{(i)}_x-\tilde\varphi^{(i)})^2 = 0.$$

Отсюда приходим к необходимому противоречию: $(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)}) = (\tilde u,\tilde v^{(i)},\tilde w^{(i)},\tilde\varphi^{(i)})$. Таким образом, задача (1) имеет единственное решение.

Теорема 1 полностью доказана. $\square$

Приведём дифференциальную формулировку задачи (1). Данная постановка состоит в следующем: для заданных внешних сил $f=(f_1,f_2)\in L^2(\Omega)^2$ требуется найти поле перемещений $u=(u_1,u_2)$, тензор напряжения σ, определённые в Ω^c_γ, и функции $v^{(i)}$, $w^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, определённые на γ_i, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega^c_\gamma, \tag{4}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{5}$$

$$[u_\nu]\geqslant 0, \quad \sigma_\nu\leqslant 0, \quad [\sigma_\nu]=0, \quad \sigma^\pm_\tau = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu]=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{6}$$

$$-v^{(i)}_{xx}-\varphi^{(i)}_x = [\sigma_n], \quad -w^{(i)}_{xx} = [\sigma_s], \quad -\varphi^{(i)}_{xx}+v^{(i)}_x+\varphi^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \tag{7}$$

$$v^{(i)} = u_n, \quad w^{(i)} = u_s \quad \text{на} \quad \gamma_i, \tag{8}$$

$$\varphi^{(1)}+v^{(1)}_x = w^{(1)}_x = \varphi^{(1)}_x = 0 \quad \text{при} \quad x=1, \quad \varphi^{(2)}+v^{(2)}_x = w^{(2)}_x = \varphi^{(2)}_x = 0 \quad \text{при} \quad x=-1, \tag{9}$$

$$((w^{(1)},v^{(1)})(0+)-(w^{(2)},v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\varphi^{(1)}_x(0+) = \varphi^{(2)}_x(0-) = 0, \tag{11}$$

$$(w_x^{(2)}w^{(2)})(0-)+(\varphi^{(2)}+v_x^{(2)})v^{(2)}(0-)-(w_x^{(1)}w^{(1)})(0+)-(\varphi^{(1)}+v_x^{(1)})v^{(1)}(0+)=0, \tag{12}$$

$$(w_x^{(2)}\bar{w}^{(2)})(0-)+(\varphi^{(2)}+v_x^{(2)})\bar{v}^{(2)}(0-)-(w_x^{(1)}\bar{w}^{(1)})(0+)-(\varphi^{(1)}+v_x^{(1)})\bar{v}^{(1)}(0+)\geqslant 0 \tag{13}$$

$$\forall\ (\bar{v}^i,\bar{w}^i)\in H^1(\gamma_i)^2,\quad ((\bar{w}^{(1)},\bar{v}^{(1)})(0+)-(\bar{w}^{(2)},\bar{v}^{(2)})(0-))\nu_0\geqslant 0,$$

$i=1,2$. Здесь (4) — суть уравнения равновесия упругого тела и линейный закон Гука, (7) — уравнения равновесия тонких включений γ_1 и γ_2, которые в точности соответствуют моделям упругих балок Тимошенко. При этом в уравнениях (7) правые части $[\sigma_n],[\sigma_s]$ описывают силы, действующие на включения со стороны упругого тела. Условие (5) описывает закрепление тела на внешней границе Г. Краевые условия (6) являются типичными для данного класса задач (см. [3]). Соотношения (8) прокомментированы выше при определении множества K_1. Первая группа краевых условий (9) соответствует нулевой перерезывающей силе, нулевой деформации растяжения (сжатия) и нулевому моменту тонкого включения γ_1 в точке $x=1$; вторая группа краевых условий (9) определяет аналогичное для тонкого включения γ_2 в точке $x=-1$. Оставшиеся условия (10)–(13) описывают сопряжение тонких включений γ_1 и γ_2 в точке $(0,0)$.

Теорема 2. *Дифференциальная постановка* (4)–(13) *эквивалентна вариационной задаче* (1) *на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим получение полной системы краевых условий (4)–(13) из вариационного неравенства (1). Сперва с помощью подстановки в (1) тестовых функций вида $(\bar{u},\bar{v}^{(i)},\bar{w}^{(i)},\bar{\varphi}^{(i)})=(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)})\pm(\theta,0,0,0)$, где $\theta\in C_0^\infty(\Omega_\gamma^c)^2$, убеждаемся, что выполнено уравнение равновесия из (4) в смысле обобщённых функций. Получение краевых условий (6) на кривой Γ_c мы опустим, поскольку аналогичную схему доказательства можно найти в [19]. Обоснуем справедливость (7)–(13). Возьмём в (1) в качестве пробных функций элементы: $(\bar{u},\bar{v}^{(i)},\bar{w}^{(i)},\bar{\varphi}^{(i)})=(u,v^{(i)},w^{(i)},\varphi^{(i)})\pm(\tilde{u},\tilde{v}^{(i)},\tilde{w}^{(i)},\tilde{\varphi}^{(i)})$, где $(\tilde{u},\tilde{v}^{(i)},\tilde{w}^{(i)},\tilde{\varphi}^{(i)})\in K_1$, $[\tilde{u}_\nu]=0$ на Γ_c, $((\tilde{w}^{(1)},\tilde{v}^{(1)})(0+)-(\tilde{w}^{(2)},\tilde{v}^{(2)})(0-))\nu_0=0$. Получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c}\sigma(u)\varepsilon(\tilde{u})-\int\limits_{\Omega_\gamma^c}f\tilde{u}+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\left\{w_x^{(i)}\tilde{w}_x^{(i)}+\varphi_x^{(i)}\tilde{\varphi}_x^{(i)}+(v_x^{(i)}+\varphi^{(i)})(\tilde{v}_x^{(i)}+\tilde{\varphi}^{(i)})\right\}=0.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая уравнения равновесия (4) и условия (6), находим

$$\begin{gathered}-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}[\sigma n]\tilde{u}-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\left\{w_{xx}^{(i)}\tilde{w}^{(i)}+(\varphi_{xx}^{(i)}-v_x^{(i)}-\varphi^{(i)})\tilde{\varphi}^{(i)}+(v_{xx}^{(i)}+\varphi_x^{(i)})\tilde{v}^{(i)}\right\}+\\+w_x^{(1)}\tilde{w}^{(1)}\mid_{x=0+}^{x=1}+\varphi_x^{(1)}\tilde{\varphi}^{(1)}\mid_{x=0+}^{x=1}+(v_x^{(1)}+\varphi^{(1)})\tilde{v}^{(1)}\mid_{x=0+}^{x=1}+w_x^{(2)}\tilde{w}^{(2)}\mid_{x=-1}^{x=0-}+\\+\varphi_x^{(2)}\tilde{\varphi}^{(2)}\mid_{x=-1}^{x=0-}+(v_x^{(2)}+\varphi^{(2)})\tilde{v}^{(2)}\mid_{x=-1}^{x=0-}=0.\end{gathered} \tag{14}$$

Далее выберем в (14) тестовые функции, обладающие свойствами

$$\tilde{v}^{(i)}=\tilde{w}^{(i)}=\tilde{\varphi}^{(i)}=0\quad\text{при}\quad x=0+,0-,1,-1.$$

Получаем равенство

$$-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}([\sigma_n]\tilde{u}_n+[\sigma_s]\tilde{u}_s)-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\left\{w_{xx}^{(i)}\tilde{w}^{(i)}+(\varphi_{xx}^{(i)}-v_x^{(i)}-\varphi^{(i)})\tilde{\varphi}^{(i)}+(v_{xx}^{(i)}+\varphi_x^{(i)})\tilde{v}^{(i)}\right\}=0,$$

откуда благодаря равенствам $\tilde{v}^{(i)}=\tilde{u}_n,\ \tilde{w}^{(i)}=\tilde{u}_s$ на γ_i следуют уравнения (7).

Вернёмся к равенству (14), справедливому для указанных выше функций $(\tilde u, \tilde v^{(i)}, \tilde w^{(i)}, \tilde\varphi^{(i)})$. В силу (7), мы будем иметь

$$w_x^{(1)}\tilde w^{(1)}\,|_{x=0+}^{x=1} +\varphi_x^{(1)}\tilde\varphi^{(1)}\,|_{x=0+}^{x=1} +(v_x^{(1)}+\varphi^{(1)})\tilde v^{(1)}\,|_{x=0+}^{x=1} +$$
$$+w_x^{(2)}\tilde w^{(2)}\,|_{x=-1}^{x=0-} +\varphi_x^{(2)}\tilde\varphi^{(2)}\,|_{x=-1}^{x=0-} +(v_x^{(2)}+\varphi^{(2)})\tilde v^{(2)}\,|_{x=-1}^{x=0-}= 0.$$

Поскольку на функции $\tilde v^{(i)}, \tilde w^{(i)}$ при $x = 1, -1$, а на $\tilde\varphi^{(i)}$ при $x = 1, -1, 0+, 0-$ отсутствуют ограничения, из последнего равенства получим краевые условия (9) и (11).

Подставим теперь в вариационное неравенство (1) пробные элементы $(\bar u, \bar v^{(i)}, \bar w^{(i)}, \bar\varphi^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) + (\tilde u, \tilde v^{(i)}, \tilde w^{(i)}, \tilde\varphi^{(i)})$, $(\tilde u, \tilde v^{(i)}, \tilde w^{(i)}, \tilde\varphi^{(i)}) \in K_1$, $[\tilde u_\nu] = 0$ на Γ_c. Мы имеем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\tilde u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f\tilde u + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\left\{w_x^{(i)}\tilde w_x^{(i)} + \varphi_x^{(i)}\tilde\varphi_x^{(i)} + (v_x^{(i)}+\varphi^{(i)})(\tilde v_x^{(i)}+\tilde\varphi^{(i)})\right\} \geqslant 0.$$

Отсюда, интегрируя по частям, а также применяя краевые условия (4), (6)–(11), получим неравенство

$$-w_x^{(1)}\tilde w^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)}+\varphi^{(1)})\tilde v^{(1)}(0+) + w_x^{(2)}\tilde w^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)}+\varphi^{(2)})\tilde v^{(2)}(0-) \geqslant 0,$$

которое справедливо для всех функций $(\tilde v^i, \tilde w^i) \in H^1(\gamma_i)^2$ таких, что

$$((\tilde w^{(1)}, \tilde v^{(1)})(0+) - (\tilde w^{(2)}, \tilde v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0.$$

Таким образом, мы обосновали, что из (1) следует условие (13).

И наконец, приступим к доказательству справедливости равенства (12). Для этого в вариационное неравенство (1) последовательно выберем в роли пробных элементов функции: $(\bar u, \bar v^{(i)}, \bar w^{(i)}, \bar\varphi^{(i)}) = (0,0,0,0)$ и $(\bar u, \bar v^{(i)}, \bar w^{(i)}, \bar\varphi^{(i)}) = 2(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\left\{w_x^{(i)}w_x^{(i)} + \varphi_x^{(i)}\varphi_x^{(i)} + (v_x^{(i)}+\varphi^{(i)})(v_x^{(i)}+\varphi^{(i)})\right\} = 0.$$

Интегрирование по частям и применение условий (4), (6)–(8) здесь даёт равенство

$$w_x^{(1)}w^{(1)}\,|_{x=0+}^{x=1} +\varphi_x^{(1)}\varphi^{(1)}\,|_{x=0+}^{x=1} +(v_x^{(1)}+\varphi^{(1)})v^{(1)}\,|_{x=0+}^{x=1} +$$
$$+w_x^{(2)}w^{(2)}\,|_{x=-1}^{x=0-} +\varphi_x^{(2)}\varphi^{(2)}\,|_{x=-1}^{x=0-} +(v_x^{(2)}+\varphi^{(2)})v^{(2)}\,|_{x=-1}^{x=0-}= 0,$$

из которого в силу условий (9) и (11) приходим к справедливости равенства (12). Таким образом, теорема в одну сторону доказана.

Достаточность. Пусть теперь выполнены все соотношения (4)–(13). Возьмём $(\bar u, \bar v^{(i)}, \bar w^{(i)}, \bar\varphi^{(i)}) \in K_1$. Умножим (4) на $(\bar u - u)$, первое равенство в (7) на $(\bar v^{(i)} - v^{(i)})$, второе — на $(\bar w^{(i)} - w^{(i)})$, третье — на $(\bar\varphi^{(i)} - \varphi^{(i)})$. Проинтегрируем по Ω_γ^c и γ_i соответственно. Сложим интегралы. Тогда мы имеем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c}(-\mathrm{div}\ \sigma - f)(\bar u - u) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}(-v_{xx}^{(i)} - \varphi_x^{(i)} - [\sigma_n])(\bar v^{(i)} - v^{(i)}) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}(-w_{xx}^{(i)} - [\sigma_s])(\bar w^{(i)} - w^{(i)}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}(-\varphi_{xx}^{(i)} + v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar\varphi^{(i)} - \varphi^{(i)}) = 0.$$

Интегрируя это тождество по частям, мы получаем

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar u - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar u - u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\Big\{w_x^{(i)}(\bar w_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar\varphi_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar v_x^{(i)} + \bar\varphi^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)})\Big\} =$$

$$-\int\limits_{\Gamma_c}[\sigma\nu(\bar u - u)] - \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}[\sigma n(\bar u - u)] + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}[\sigma_n](\bar v^{(i)} - v^{(i)}) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}[\sigma_s](\bar w^{(i)} - w^{(i)}) +$$

$$+w_x^{(1)}(\bar w^{(1)} - w^{(1)})\,|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)}(\bar\varphi^{(1)} - \varphi^{(1)})\,|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})(\bar v^{(1)} - v^{(1)})\,|_{x=0+}^{x=1} +$$

$$+w_x^{(2)}(\bar w^{(2)} - w^{(2)})\,|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)}(\bar\varphi^{(2)} - \varphi^{(2)})\,|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})(\bar v^{(2)} - v^{(2)})\,|_{x=-1}^{x=0-}.$$

Для получения вариационного неравенства (1) нам достаточно показать, что правая часть последнего равенства неотрицательна. Покажем это. В силу (8), (9), (11), (12) и последних трёх условий из (6) последнее равенство можем переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar u - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar u - u) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i}\Big\{w_x^{(i)}(\bar w_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar\varphi_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar v_x^{(i)} + \bar\varphi^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)})\Big\} = \qquad (15)$$

$$-\int\limits_{\Gamma_c}\sigma_\nu[\bar u_\nu] - w_x^{(1)}\bar w^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\bar v^{(1)}(0+) + w_x^{(2)}\bar w^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})\bar v^{(2)}(0-).$$

Первое слагаемое правой части (15) неотрицательно в силу второго неравенства из (6) и неравенства $[\bar u_\nu] \geqslant 0$, а сумма оставшихся слагаемых неотрицательна по условию (13). Следовательно, правая часть (15) неотрицательна. Таким образом, мы показали, что из (4)–(13) следует вариационное неравенство (1).

Итак, теорема 2 полностью доказана. □

3. СЛУЧАЙ С ОТСЛОЕНИЕМ

В данном разделе будет исследована задача равновесия упругого тела с трещиной и тонкими упругими включениями. При этом будет предполагаться наличие отслоения на положительном берегу γ_1 (см. рис. 1). В данном случае существование отслоения означает, что помимо трещины Γ_c существует ещё и трещина между включением γ_1 и упругим телом. Оказывается, что для данного случая условия сопряжения в контактной точке для дифференциальной постановки будут идентичными с предыдущим случаем. Вместе с тем, формулировки задачи, а также доказательство эквивалентности будут значительно отличаться. Обозначения останутся прежними.

Приведём вариационную постановку задачи. Для этого введём множество допустимых функций

$$K_2 = \{(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \mid u \in H^1_\Gamma(\Omega^c_\gamma)^2,\ (v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in H^1(\gamma_i)^3,\ v^{(2)} = u_n,\ w^{(2)} = u_s \text{ на } \gamma_2;$$
$$v^{(1)} = u_n^-,\quad w^{(1)} = u_s^- \text{ на } \gamma_1;\quad [u_n] \geqslant 0 \text{ на } \gamma_1;\quad [u_\nu] \geqslant 0 \text{ на } \Gamma_c;$$
$$((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0,\quad i = 1, 2\}$$

и запишем функционал энергии

$$\Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} fu + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} \Big\{(w_x^{(i)})^2 + (\varphi_x^{(i)})^2 + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})^2\Big\}.$$

Теорема 3. *Задача минимизации*

$$\textit{найти } (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_2, \textit{ так что } \Pi(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) = \inf_{K_2} \Pi$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \in K_2,$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar u - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar u - u) + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} \Big\{w_x^{(i)}(\bar w_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar\varphi_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)})\Big\} + \\ + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\gamma_i} (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar v_x^{(i)} + \bar\varphi^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \geqslant 0\end{aligned} \tag{16}$$

для всех $(\bar u, \bar v^{(i)}, \bar w^{(i)}, \bar\varphi^{(i)}) \in K_2$, $i = 1, 2$.

Теорема 3 доказывается тем же путём, что и теорема 1 из предыдущего раздела, поэтому выкладки мы здесь опустим.

Приведём дифференциальную формулировку для данного случая. Найти u, σ, определённые в Ω_γ^c, и $v^{(i)}, w^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, определённые на γ_i, такие, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f, \quad \sigma = A\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega_\gamma^c, \tag{17}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{18}$$

$$[u_\nu] \geqslant 0, \quad \sigma_\nu \leqslant 0, \quad [\sigma_\nu] = 0, \quad \sigma_\tau^{\pm} = 0, \quad \sigma_\nu[u_\nu] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c, \tag{19}$$

$$-v_{xx}^{(i)} - \varphi_x^{(i)} = [\sigma_n], \quad -w_{xx}^{(i)} = [\sigma_s], \quad -\varphi_{xx}^{(i)} + v_x^{(i)} + \varphi^{(i)} = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_i, \tag{20}$$

$$v^{(1)} = u_n^-, \quad w^{(1)} = u_s^- \quad \text{на} \quad \gamma_1, \quad v^{(2)} = u_n, \quad w^{(2)} = u_s \quad \text{на} \quad \gamma_2, \tag{21}$$

$$\varphi^{(1)} + v_x^{(1)} = w_x^{(1)} = \varphi_x^{(1)} = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \quad \varphi^{(2)} + v_x^{(2)} = w_x^{(2)} = \varphi_x^{(2)} = 0 \quad \text{при} \quad x = -1, \tag{22}$$

$$[u_n] \geqslant 0, \quad \sigma_n^+ \leqslant 0, \quad \sigma_s^+ = 0, \quad \sigma_n^+[u_n] = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1, \tag{23}$$

$$((w^{(1)}, v^{(1)})(0+) - (w^{(2)}, v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0, \tag{24}$$

$$\varphi_x^{(1)}(0+) = \varphi_x^{(2)}(0-) = 0, \tag{25}$$

$$(w_x^{(2)} w^{(2)})(0-) + (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)})v^{(2)}(0-) - (w_x^{(1)} w^{(1)})(0+) - (\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})v^{(1)}(0+) = 0, \tag{26}$$

$$\begin{gathered}(w_x^{(2)} \bar w^{(2)})(0-) + (\varphi^{(2)} + v_x^{(2)})\bar v^{(2)}(0-) - (w_x^{(1)} \bar w^{(1)})(0+) - (\varphi^{(1)} + v_x^{(1)})\bar v^{(1)}(0+) \geqslant 0 \\ \forall\ (\bar v^i, \bar w^i) \in H^1(\gamma_i)^2, \quad ((\bar w^{(1)}, \bar v^{(1)})(0+) - (\bar w^{(2)}, \bar v^{(2)})(0-))\nu_0 \geqslant 0, \quad i = 1, 2.\end{gathered} \tag{27}$$

Здесь первые два равенства из (21) гарантируют совпадение вертикальных и горизонтальных перемещений упругого тела с перемещениями включения на γ_1^-. Группа нелинейных краевых условий (23) описывает отслоение тонкого включения на γ_1^+.

Теорема 4. *Формулировки* (16) *и* (17)–(27) *эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство. *Необходимость.* Докажем, что из вариационного неравенства (16) следуют все условия (17)–(27). А именно, приведём доказательство справедливости краевых условий (20), (22)–(27). Остальные условия получаются аналогично предыдущей модели.

Итак, возьмём в (16) тестовые функции вида

$$(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) + (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}),$$

где $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_2$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c, $\tilde{v}^{(i)} = \tilde{w}^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i)} = 0$ на γ_i. Интегрирование по частям и применение уравнений равновесия (17) и условий (19) приводит к неравенству

$$-\int\limits_{\gamma_1} \sigma^+ n \tilde{u}^+ = -\int\limits_{\gamma_1} (\sigma_n^+ \tilde{u}_n^+ + \sigma_s^+ \tilde{u}_s^+) \geqslant 0,$$

откуда получаем

$$\sigma_n^+ \leqslant 0, \quad \sigma_s^+ = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1.$$

Справедливость условия $\sigma_n^+[u_n] = 0$ из (23) доказывается локально. Схожие рассуждения можно найти в [19]. Таким образом, мы убедились в верности всех соотношений (23).

Рассмотрим теперь функции $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) \pm (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$, где $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_2$, $((\tilde{w}^{(1)}, \tilde{v}^{(1)})(0+) - (\tilde{w}^{(2)}, \tilde{v}^{(2)})(0-))\nu_0 = 0$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c, $[\tilde{u}_n] = 0$ на γ_1. Производя подстановку функций $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)})$ в (16), мы будем иметь равенство

$$\begin{gathered} -\int\limits_{\gamma_1} [(\sigma n)\tilde{u}] - \int\limits_{\gamma_2} [\sigma n]\tilde{u} - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \left\{ w_{xx}^{(i)} \tilde{w}^{(i)} + (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)})\tilde{\varphi}^{(i)} + (v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)})\tilde{v}^{(i)} \right\} + \\ + w_x^{(1)} \tilde{w}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)} \tilde{\varphi}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\tilde{v}^{(1)} \Big|_{x=0+}^{x=1} + \\ + w_x^{(2)} \tilde{w}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)} \tilde{\varphi}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})\tilde{v}^{(2)} \Big|_{x=-1}^{x=0-} = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Здесь для первого слагаемого в силу (23) можем записать цепочку преобразований

$$-\int\limits_{\gamma_1} [(\sigma n)\tilde{u}] = -\int\limits_{\gamma_1} [\sigma_n \tilde{u}_n] - \int\limits_{\gamma_1} [\sigma_s \tilde{u}_s] \pm \int\limits_{\gamma_1} \sigma_n^+ \tilde{u}_n^- - \int\limits_{\gamma_1} \sigma_s^+ \tilde{u}_s^- = -\int\limits_{\gamma_1} [\sigma_n]\tilde{u}_n^- - \int\limits_{\gamma_1} [\sigma_s]\tilde{u}_s^-.$$

Учитывая это и равенства $\tilde{v}^{(1)} = \tilde{u}_n^-$, $\tilde{w}^{(1)} = \tilde{u}_s^-$ на γ_1, $\tilde{v}^{(2)} = \tilde{u}_n$, $\tilde{w}^{(2)} = \tilde{u}_s$ на γ_2, а также предполагая, что $\tilde{v}^{(i)} = \tilde{w}^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i)} = 0$ при $x = 0, 1, -1$, из (28) получим

$$-\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} ([\sigma_s] + w_{xx}^{(i)})\tilde{w}^{(i)} - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} ([\sigma_n] + v_{xx}^{(i)} + \varphi_x^{(i)})\tilde{v}^{(i)} - \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} (\varphi_{xx}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)})\tilde{\varphi}^{(i)} = 0.$$

Отсюда следуют все уравнения (20). Далее, возвращаясь к равенству (28), получим справедливость всех соотношений (22) и (25).

Чтобы получить следующее условие, сначала поочерёдно выберем в вариационное неравенство (16) функции $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (0, 0, 0, 0)$ и $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = 2(u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)})$. Затем проинтегрируем по частям и применим условия (17)–(22), (25). В результате получим равенство вида

$$-\int\limits_{\gamma_1} \sigma^+ n[u] - w_x^{(1)} w^{(1)}(0+) - (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})v^{(1)}(0+) + w_x^{(2)} w^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})v^{(2)}(0-) = 0,$$

откуда находим (26), поскольку здесь первое слагаемое равно нулю в силу последних двух условий из (23).

И наконец, путём подстановки в вариационное неравенство (16) пробных функций $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) = (u, v^{(i)}, w^{(i)}, \varphi^{(i)}) + (\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)})$, где $(\tilde{u}, \tilde{v}^{(i)}, \tilde{w}^{(i)}, \tilde{\varphi}^{(i)}) \in K_2$, $[\tilde{u}_\nu] = 0$ на Γ_c, $[\tilde{u}_n] = 0$ на γ_1, и применения доказанных выше краевых условий, убедимся в справедливости условия (27). Таким образом, теорема в одну сторону доказана.

Достаточность. Докажем теперь, что из (17)–(27) следует (16). Из (17) и (20) для произвольной функции $(\bar{u}, \bar{v}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}, \bar{\varphi}^{(i)}) \in K_1$ после интегрирования получим

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)}(\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \right\} =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_c} [\sigma\nu(\bar{u} - u)] - \int\limits_{\gamma_1} [\sigma n(\bar{u} - u)] \pm \int\limits_{\gamma_1} \sigma_n^+(\bar{u}_n^- - u^-) \pm \int\limits_{\gamma_1} \sigma_s^+(\bar{u}_s^- - u_s^-) -$$

$$- \int\limits_{\gamma_2} [\sigma n(\bar{u} - u)] + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} [\sigma_n](\bar{v}^{(i)} - v^{(i)}) + \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} [\sigma_s](\bar{w}^{(i)} - w^{(i)}) +$$

$$+ w_x^{(1)}(\bar{w}^{(1)} - w^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + \varphi_x^{(1)}(\bar{\varphi}^{(1)} - \varphi^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} + (v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})(\bar{v}^{(1)} - v^{(1)}) \Big|_{x=0+}^{x=1} +$$

$$+ w_x^{(2)}(\bar{w}^{(2)} - w^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-} + \varphi_x^{(2)}(\bar{\varphi}^{(2)} - \varphi^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-} + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})(\bar{v}^{(2)} - v^{(2)}) \Big|_{x=-1}^{x=0-}.$$

Очевидно, что для того чтобы получить вариационное неравенство (16), достаточно доказать неотрицательность правой части равенства выше. Действительно, применяя краевые условия (19), (21)–(23), (25) и (26), последнее равенство переписывается в виде

$$\int\limits_{\Omega_\gamma^c} \sigma(u)\varepsilon(\bar{u} - u) - \int\limits_{\Omega_\gamma^c} f(\bar{u} - u) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_i} \left\{ w_x^{(i)}(\bar{w}_x^{(i)} - w_x^{(i)}) + \varphi_x^{(i)}(\bar{\varphi}_x^{(i)} - \varphi_x^{(i)}) + (v_x^{(i)} + \varphi^{(i)})(\bar{v}_x^{(i)} + \bar{\varphi}^{(i)} - v_x^{(i)} - \varphi^{(i)}) \right\} = \qquad (29)$$

$$= -\int\limits_{\gamma_1} \sigma_n^+[\bar{u}_n] - \int\limits_{\Gamma_c} \sigma_\nu[\bar{u}_\nu] - w_x^{(1)}\bar{w}^{(1)}(0+) -$$

$$-(v_x^{(1)} + \varphi^{(1)})\bar{v}^{(1)}(0+) + w_x^{(2)}\bar{w}^{(2)}(0-) + (v_x^{(2)} + \varphi^{(2)})\bar{v}^{(2)}(0-).$$

Первое и второе слагаемые правой части равенства (29) неотрицательны в силу (19), (23) и условий $[\bar{u}_n] \geqslant 0$ на γ_1, $[\bar{u}_\nu] \geqslant 0$ на Γ_c. Сумма оставшихся слагаемых правой части (29) будет неотрицательна по условию (27). Следовательно, из (29) получаем вариационное неравенство (16).

Теорема 4 полностью доказана. □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изучена задача о сопряжении тонких упругих включений, которые расположены в двумерном упругом теле с трещиной. При этом предполагается, что трещина проходит между включениями. Мы исследовали два случая: случай без отслоения, а также случай с отслоением, где на одном из берегов одного из включений имеется трещина. Для каждого случая получены следующие результаты:

1. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи равновесия.

2. Получены эквивалентные дифференциальные постановки задач, включающие в себя условия сопряжения в точке контакта.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект FSRG-2023-0025). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
2. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of Cracks in Solids. Southampton—Boston: WIT Press, 2000.
3. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
4. *Итоу Х., Лойгеринг Г., Хлуднев А. М.* Тонкие включения Тимошенко в упругом теле с возможным отслоением // Докл. АН. 2014. Т. 59, № 9. С. 401–404.
5. *Khludnev A. M., Leugering G.* On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2015. V. 20, N 5. P. 495–511; DOI: 10.1177/1081286513505106
6. *Itou H., Khludnev A. M.* On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 39, N 17. P. 4980–4993; DOI: 10.1002/mma.3279
7. *Shcherbakov V. V.* The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // ZAMM-Z. Angew. Math. Mech. 2016. V. 96, N 11. P. 1306–1317; DOI: 10.1002/zamm.201500145
8. *Khludnev A. M., Popova T. S.* Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle // Acta Mech. Solida Sin. 2017. V. 30, N 3. P. 327–333.
9. *Rudoy E. M., Lazarev N. P.* Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 334, N 17. P. 18–26.
10. *Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S.* Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 4. P. 1–14; DOI: 10.1177/1081286515594655
11. *Khludnev A. M., Popova T. S.* Junction problem for Euler—Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Quart. Appl. Math. 2016. V. 74, N 4. P. 705–718; DOI: 10.1090/qam/1447
12. *Хлуднев А. М., Попова Т. С.* Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужёсткого включения // Математические заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 1. С. 73–89.
13. *Khludnev A. M., Leugering G.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // Math. Meth. Appl. Sci. 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967; DOI: 10.1002/mma.1308
14. *Щербаков В. В.* Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 1. С. 138–147.
15. *Рудой Е. М.* Численное решение задачи о равновесии упругого тела с отслоившимся тонким жёстким включением // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19, № 2. С. 74–87.
16. *Лазарев Н. П.* Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жёсткого включения // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2014. Т. 1. С. 32–45.
17. *Николаева Н. А.* Пластина Кирхгофа—Лява с плоским жёстким включением // Челяб. физ.-матем. журн. 2023. Т. 8, № 1. С. 29–46; DOI: 10.47475/2500-0101-2023-18103
18. *Фанкина И. В.* Контактная задача для упругой пластины с тонким жёстким включением // Сиб. журн. индустр. матем. 2016. Т. 19, № 3. С. 90–98.
19. *Николаева Н. А.* О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 4. С. 68–80.

20. *Faella L., Khludnev A. M.* Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39, N 12. P. 3381–3390.
21. *Хлуднев А. М., Попова Т. С.* Об иерархии тонких включений в упругих телах. // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 87–107.
22. *Khludnev A. M.* Equilibrium of an elastic body with closely spaced thin inclusions // Comp. Math. Math. Phys. 2018. V. 58, N 10. P. 1660–1672; DOI: 10.1134/S096554251810007X
23. *Khludnev A. M., Leugering G.* Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // Math. Mech. Complex Sys. 2014. V. 2, N 1. P. 1–21.
24. *Попова Т. С.* Задачи о тонких включениях в двумерном вязкоупругом теле // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 21, № 2. С. 66–78.
25. *Khludnev A. M.* On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24, N 9. P. 2742–2753; DOI: 10.1177/1081286518796472.
26. *Фурцев А. И.* О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2017. Т. 17, № 4. С. 94–111; DOI: 10.17377/PAM.2017.17.9
27. *Николаева Н. А.* Задача о равновесии упругого тела с трещиной и тонкими включениями, которые сопряжены между собой // Дальневост. матем. журн. 2024. Т. 24, № 1. С. 73–95; DOI: 10.47910/FEMJ202408
28. *Khludnev A. M., Popova T. S.* Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control // Comp. Math. Appl. 2019. V. 77, N 1. P. 253–262.
29. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
30. *Boerquin F., Ciarlet P. G.* Modeling and justification of eigenvalue problems for junctions between elastic structures // J. Funct. Anal. 1989. V. 87, N 2. P. 392–427.
31. *Le Dret H.* Modeling of the junction between two rods // J. Math. Pures Appl. 1989. V. 68, N 3. P. 365–397.
32. *Дуранте Т, Назаров С. А., Кардоне Дж.* Моделирование сочленений пластин и стержней посредством самосопряжённых расширений // Вестник СПбГУ. 2009. Т. 1, № 2. С. 3–14.
33. *Gaudiello A., Monneau R., Mossino J., Murat F., Sili A.* Junctions of elastic plates and beams // ESAIM Contr. Optim. CA. 2007. V. 13, N 3. P. 419–457.
34. *Боган Ю. А.* Об условиях сопряжения А. А. Самарского и В. Б. Андреева в теории упругих балок // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 662–669.
35. *Боган Ю. А.* Осреднение неоднородной упругой балки при сопряжении элементов шарниром конечной жёсткости // Сиб. журн. индустр. матем. 1998. Т. 1, № 2. С. 67–72.
36. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Стащук Н. Г.* Взаимодействие жёстких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983.
37. *Мочалов Е. В., Сильвестров В. В.* Задача взаимодействия тонких жёстких остроконечных включений, расположенных между разными упругими материалами // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 5. С. 99–117.
38. *Мхитарян С. М.* О напряжённом состоянии упругой бесконечной пластины с конечной трещиной, взаимодействующей с абсолютно жёстким тонким включением // Доклады НАН РА. 2018. Т. 118, № 1. С. 39–48.
39. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1973.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 539.3:517.95

JUNCTION PROBLEM FOR ELASTIC TIMOSHENKO INCLUSIONS IN ELASTIC BODIES WITH A CRACK

N. A. Nikolaeva

North-Eastern Federal University, Yakutsk, 677027 Russia

E-mail: niknataf@mail.ru

Received 13.10.2023, revised 21.05.2024, accepted 03.07.2024

Abstract. The paper is concerned with a junction problem for Timoshenko elastic inclusions placed in an elastic body with a crack. It is assumed that the crack crosses the thin inclusion at some point. This point is a mutual contact point. Inequality-type boundary conditions are imposed at the point of contact and on the crack edges to prevent mutual penetration between inclusion parts and crack edges, respectively. Existence and uniqueness theorems are established. Differential formulation in the form of a boundary value problem that contains junction boundary conditions is presented.

Keywords: junction conditions, nonlinear boundary conditions, Timoshenko inclusion, crack, variational inequality.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.405

REFERENCES

1. N. F. Morozov, *Mathematical Issues of Crack Theory* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
2. A. M. Khludnev and V. A. Kovtunenko, *Analysis of Cracks in Solids* (WIT Press, Southampton—Boston, 2000).
3. A. M. Khludnev, *Problems of Elasticity Theory in Nonsmooth Domains* (Fizmatlit, Moscow, 2010) [in Russian].
4. H. Itou, G. Leugering, and A. M. Khludnev, "Timoshenko thin inclusions in an elastic body with possible delamination," Dokl. Phys. **59** (9), 401–404 (2014).
5. A. M. Khludnev and G. Leugering, "On Timoshenko thin elastic inclusions inside elastic bodies," Math. Mech. Solids **20** (5), 495–511 (2015). https://doi.org/10.1177/1081286513505106
6. H. Itou and A. M. Khludnev, "On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies," Math. Meth. Appl. Sci. **39** (17), 4980–4993 (2016). https://doi.org/10.1002/mma.3279
7. V. V. Shcherbakov, "The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions," ZAMM-Z. Angew. Math. Mech. **96** (11), 1306–1317 (2016). https://doi.org/10.1002/zamm.201500145
8. A. M. Khludnev and T. S. Popova, "Timoshenko inclusions in elastic bodies crossing an external boundary at zero angle," Acta Mech. Solida Sin. **30** (3), 327–333 (2017).
9. E. M. Rudoy and N. P. Lazarev, "Domain decomposition technique for a model of an elastic body reinforced by a Timoshenko's beam," J. Comput. Appl. Math. **334** (17), 18–26 (2018).
10. A. M. Khludnev, L. Faella, and T. S. Popova, "Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies," Math. Mech. Solids. **22** (4), 1–14 (2017). https://doi.org/10.1177/1081286515594655
11. A. M. Khludnev and T. S. Popova, "Junction problem for Euler–Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies," Quart. Appl. Math. **74** (4), 705–718 (2016). https://doi.org/10.1090/qam/1447

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 775–787.

12. A. M. Khludnev and T. S. Popova, "The problem of conjugation of the elastic inclusion of Timoshenko and a semi-rigid inclusion," Mat. Zam. SVFU **25** (1), 73–89 (2018) [in Russian].

13. A. M. Khludnev and G. Leugering, "On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks," Math. Meth. Appl. Sci. **33** (16), 1955–1967 (2010). https://doi.org/10.1002/mma.1308

14. V. V. Shcherbakov, "On an optimal control problem for the shape of thin inclusions in elastic bodies," Sib. Zh. Ind. Mat. **16** (1), 138–147 (2013) [J. Appl. Ind. Math. **7** (3), 435–443 (2013)]. https://doi.org/10.1134/S1990478913030174

15. E. M. Rudoy, "Numerical solution of an equilibrium problem for an elastic body with a delaminated thin rigid inclusion," Sib. Zh. Ind. Mat. **19** (2), 74–87 (2016) [J. Appl. Ind. Math. **10** (2), 264–276 (2016)]. https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2016.19.207

16. N. P. Lazarev, "The problem of equilibrium of the Timoshenko plate containing a crack along a thin rigid inclusion," Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mech. Komp'yut. Nauki **1**, 32–45 (2014) [in Russian].

17. N. A. Nikolaeva, "Kirchhoff—Love plate with a flat rigid inclusion," Chelyab. Fiz.-Mat. Zh. **8** (1), 29–46 (2023) [in Russian]. https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-18103

18. I. V. Fankina, "A contact problem for an elastic plate with a thin rigid inclusion," Sib. Zh. Ind. Mat. **19** (3), 90–98 (2016) [J. Appl. Ind. Math. **10** (3), 333–340 (2016)]. https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.411

19. N. A. Nikolaeva, "About integration of the crack with thin inclusions in elastik bodies," Sib. Zh. Ind. Mat. **22** (4), 68–80 (2019) [J. Appl. Ind. Math. **22** (4), 68–80 (2019)]. https://doi.org/10.1134/S1990478919040112

20. L. Faella and A. M. Khludnev, "Junction problem for elastic and rigid inclusions in elastic bodies," Math. Methods Appl. Sci. **39** (12), 3381–3390 (2016).

21. A. M. Khludnev and T. S. Popova, "On the hierarchy of thin inclusions in elastic bodies.," Mat. Zam. SVFU **23** (1), 87–107 (2016) [in Russian].

22. A. M. Khludnev, "Equilibrium of an elastic body with closely spaced thin inclusions," Comput. Math. Math. Phys. **58** (10), 1660–1672 (2018). https://doi.org/10.1134/S096554251810007X

23. A. M. Khludnev andf G. Leugering, "Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies," Math. Mech. Complex Sys. **2** (1), 1–21 (2014).

24. T. S. Popova, "Problems on thin inclusions in a two-dimensional viscoelastic body," Sib. Zh. Ind. Mat. **21** (2), 66–78 (2018.) [J. Appl. Ind. Math. **12** (4), 313–324 (2018)]. https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2018.21.206

25. A. M. Khludnev, "On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter," Math. Mech. Solids **24** (9), 2742–2753 (2018). https://doi.org/10.1177/1081286518796472.

26. A. I. Furtsev, "On the contact of a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion," Sib. Zh. Chistoi Prikl. Mat. **17** (4), 94–111 (2017). https://doi.org/10.17377/PAM.2017.17.9

27. N. A. Nikolaeva, "Equilibrium problems for elastic body with a crack and thin conjugated inclusions," Dal'nevost. Mat. Zh. **24** (1), 73–95 (2024) [in Russian]. https://doi.org/10.47910/FEMJ202408

28. A. M. Khludnev and T. S. Popova, "Semirigid inclusions in elastic bodies: Mechanical interplay and optimal control," Comput. Math. Appl. **77** (1), 253–262 (2019).

29. A. A. Samarskii and V. B. Andreev, *Difference Methods for Elliptic Equations* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].

30. F. Boerquin and P. G. Ciarlet, "Modeling and justification of eigenvalue problems for junctions between elastic structures," J. Funct. Anal. **87** (2), 392–427 (1989).

31. H. Le Dret, "Modeling of the junction between two rods," J. Math. Pures Appl. **68** (3), 365–397 (1989).

32. T. Durante, G. Cardone, and S. A. Nasarov, "Modeling junction of plates and beams by means of self-adjoint extensions," Vestn. S.-Peterburgurg Gos. Univ. **1** (2), 3–14 (2009) [J. Control. Vestn. St. Petersb. Univ. Math. **42** (2), 67–75 (2009)].

33. A. Gaudiello, R. Monneau, J. Mossino, F. Murat, and A. Sili, "Junctions of elastic plates and beams," ESAIM Control Optim. CA **13** (3), 419–457 (2007).

34. Yu. A. Bogan, “On the conjugation conditions of A. A. Samarskii and V. B. Andreev in the theory of elastic beams,” Mat. Zam. **92** (5), 662–669 (2012) [in Russian].
35. Yu. A. Bogan, “Averaging of a nonuniform elastic beam with the connection of elements by a hinge of finite rigidity,” Sib. Zh. Ind. Mat. **1** (2), 67–72 (1998) [in Russian].
36. L. T. Berezhnitskii, V. V. Panasyuk, and N. G. Stashchuk, *Interaction of Rigid Linear Inclusions and Cracks in a Deformable Body* (Nauk. Dumka, Kiev, 1983) [in Russian].
37. E. V. Mochalov and V. V. Silvestrov, “Problem of interaction of thin rigid needle-shaped inclusions located between different elastic materials,” Izv. RAN. MTT (5), 99–117 (2011) [Mech. Solids **46** (5), 739–754 (2011)].
38. S. M. Mkhitaryan, “On the stress state of an elastic infinite plate with a finite crack interacting with an absolutely rigid thin inclusion,” Dokl. NAN RA **118** (1), 39–48 (2018) [in Russian].
39. E. I. Grigolyuk and I. T. Selezov, *Results of Science and Technology* (VINITI, Moscow, 1973) [in Russian].

УДК 51-76:514.124:573.2:615.015.2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВАНИЯ МЕТОДА ИЗОБОЛ

© 2024 **В. Г. Панов**

Институт промышленной экологии УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 20, г. Екатеринбург 620137, Россия

E-mail: vpanov@ecko.uran.ru

Поступила в редакцию 08.11.2022 г.; после доработки 03.09.2024 г.;
принята к публикации 29.10.2024 г.

Предлагаются более точные определения понятий и конструкций, используемых в медико-биологических науках для анализа совместного действия факторов с помощью изобологрannamм. Приведены формальные определения понятий нулевого взаимодействия, масштабно эквивалентных дозо-ответных функций, многообразия нулевого взаимодействия. Предложена общая конструкция, формализующая условия применимости и основные методы анализа комбинированного действия с помощью изобол. Получены уравнения многообразий нулевого взаимодействия как в случае масштабно эквивалентных, так и для произвольных функций отклика. Приведены примеры.

Ключевые слова: комбинированное (совместное) действие факторов, изобола, дозо-ответная функция, нулевое взаимодействие, супераддитивность, субаддитивность, коммутативная диаграмма.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.406

ВВЕДЕНИЕ

Феномен нетривиальности совместного действия нескольких факторов состоит в том, что имеет место несовпадение наблюдаемой величины отклика от воздействия этих факторов и ожидаемой его величины, которая вычисляется каким-либо образом на основе информации об изолированном воздействии факторов. Например, хорошо известно, что совместное действие нескольких лекарственных препаратов может иметь не тот эффект, который можно было бы ожидать, зная изолированный эффект каждого из них. Тем не менее до сих пор нет общепринятого стандарта терминологического описания этого явления. Общепризнанно, что имеются различные типы совместного действия биологически активных агентов, но названия этих типов, способы их идентификации, и даже то, является ли тот или иной вид совместного действия действительно особым видом, остаются предметом многочисленных дискуссий [1–3].

Метод изобол является одним из основных методов оценки типа совместного (комбинированного) действия факторов в медицине, и особенно, в токсикологии и фармакологии. Несмотря на то, что он был предложен около 150 лет назад (первыми считаются работы T. R. Fraser 1870–1872 гг.), его предпосылки остаются сформулированными недостаточно строго, что не мешает его широкому использованию как в практических, так и в теоретических исследованиях в этих науках. Первоначально этот метод рассматривался как вычислительная процедура для оценки типа совместного действия агентов. Долгое время его развитие было направлено на распространение области возможных приложений метода. К настоящему времени разнообразие приложений метода изобол подтверждает его универсальность как способа исследования комбинированного действия биологически активных агентов [4–8].

Приложения метода естественно порождали необходимость его развития и модификации, что нашло отражение в обзорах [1, 9–11]. Однако основные понятия и принципы метода остаются неизменными, общепринятыми и всё же сформулированными недостаточно строго.

Важной особенностью метода изобол является оперирование только наблюдаемыми характеристиками изучаемого явления. Он не апеллирует к механизму, приводящему к тому изменению состояния живой системы, которое происходит при воздействии данных факторов. Сложность таких механизмов требует обращения к таким наукам как биофизика, биохимия, молекулярная биология и др. Для рассматриваемого метода выводы основаны только на знании функциональной зависимости регистрируемого отклика от каждого изолированно действующего агента и такой же зависимости от всех действующих агентов вместе. Как следствие, исследователь получает только качественные выводы о том, отличается ли совместное действие агентов от некоторого гипотетического, которое постулируется как совместное действие, представляющее отсутствие взаимодействия агентов.

Таким образом, здесь биологический объект рассматривается как «чёрный ящик», внутренняя структура которого неизвестна и исследуется по принципу «воздействие-отклик». Это исследование использует только изолированные дозо-ответные зависимости действующих агентов и такую же зависимость при их совместном воздействии. Математически эти зависимости представляется некоторыми монотонными функциями одной или нескольких переменных. В этой ситуации естественным является предположение о том, что все действующие факторы различны, хотя это не является необходимым для изложенного ниже формализма (см. ниже замечание 1 и аксиому (А3) в п. 3).

Очень кратко анализ совместного действия факторов с помощью изобол можно описать как задачу определения такого геометрического объекта (многообразия) в пространстве всевозможных наборов значений действующих агентов (дозовых комбинаций), все точки которого *по определению* являются комбинациями *без взаимодействия* (в терминологии работы [12] они называются *комбинациями с нулевым взаимодействием*; соответственно, точки нулевого взаимодействия образуют некоторое множество, которое, как правило, является дифференцируемым многообразием). Предполагая, что дозы агентов задаются неотрицательными числами, можно считать, что пространство дозовых комбинаций n действующих агентов образует гипероктант (ортант) в $\mathbb{R}^n$. Многообразие нулевого взаимодействия разделяет гипероктант дозовых комбинаций на две области — ограниченную внутреннюю, содержащую точку 0 и неограниченную внешнюю. Тогда точки, лежащие в ограниченной части, представляют супераддитивное совместное действие агентов (или синергизм), а точки внешней области — субаддитивное совместное действие (или антагонизм). Ключевым элементом этого анализа является определение понятия нулевого взаимодействия и вывод уравнения многообразия нулевого взаимодействия. До сих пор общепринятым остаётся представление о линейности многообразия нулевого взаимодействия, подкрепляемое работой [12], в которой это было доказано при выполнении некоторых предположений (см. ниже следствие 3 из теоремы). Как в самой работе [12], так и в последующих работах [4–11], эти предположения считаются выполняющимися всегда, так что линейность изоболы нулевого взаимодействия *de facto* является общепринятым постулатом, на котором основываются модификации метода изобол [1].

Более подробно постановка задачи состоит в задании переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ (представляющих действующие факторы), воздействие каждой из которых описывается зависимостью $y = f_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Эти функции практически всегда предполагаются монотонными, а при нарушении монотонности область изменения аргументов ограничивают так, чтобы на каждой части монотонность имела место. Здесь x_i выражает некоторую меру действующего агента, например, его концентрацию, а значения всех функций отклика $f_i(x_i)$ имеют один и тот же смысл, т. е. измеряются в одних и тех же единицах. Например, это может быть количество гемоглобина в крови г/л), масса печени подопытного животного г, или г/100 г массы животного), коэффициент де Ритиса (безразмерная величина) и т. п. Совместное (одновременное, комбинированное, сочетанное) действие данных переменных описывается полной функцией отклика $Y = Y(x_1, \ldots, x_n)$, которая измеряется в тех же единицах, что и функции $f_i(x_i)$. При этом функции $f_i(x_i)$ и полная функция отклика $Y(x_1, \ldots, x_n)$ обычно связаны равенством

$$f_i(x_i) = Y(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Замечание 1. Каждая переменная x_i фактически является «помеченным числом», где метка отражает химические, физические или иные специфические свойства связанного с ней действующего фактора. Обычная метка такого рода — химическая формула вещества. Однако это могут быть и другие характеристики действующего агента: магнитное поле, действующее на подопытных животных (соответствующая переменная задаёт напряжённость поля, которая была в эксперименте), физическая нагрузка (переменная задаёт её интенсивность), пылевая нагрузка (переменная — плотность пылевой нагрузки) и т. д.

Обозначим метки агентов символами θ_i, $i = 1, \ldots, n$, и будем считать, что количество меток совпадает с числом действующих агентов. Гипотетически возможно, что некоторые переменные представляют один и тот же действующий агент (с одной и той же меткой). Однако в этом случае, как принято в токсикологии и фармакологии, такие переменные должны редуцироваться до одной переменной с этой меткой. Например, если первые $m \leqslant n$ переменных представляют один и тот же агент с меткой θ_1, то должно выполняться равенство

$$\begin{gathered} Y\left(x_1(\theta_1), \ldots, x_m(\theta_1), x_{m+1}(\theta_2), \ldots, x_n(\theta_{n-m+1})\right) = \\ = Y\left(\sum_{j=1}^{m} x_j(\theta_1), 0, \ldots, 0, x_{m+1}(\theta_2), \ldots, x_n(\theta_{n-m+1})\right). \end{gathered}$$

В частности, если $x_j(\theta_k)$ — значения одной и той же переменной с меткой θ_k, то выполняется равенство

$$Y\left(x_1(\theta_k), x_2(\theta_k), \ldots, x_n(\theta_k)\right) = Y\left(0, \ldots, 0, \sum_{j=1}^{n} x_j(\theta_k), 0, \ldots, 0\right) = f_k\left(\sum_{j=1}^{n} x_j(\theta_k)\right). \tag{2}$$

В этом случае функция Y фактически будет зависеть от меньшего числа переменных (для формулы (2) это будет функция одной переменной). Напротив, $Y(x(\theta_1), x(\theta_2), \ldots, x(\theta_n))$ остаётся функцией n переменных, несмотря на то, что все аргументы равны.

Кроме того, функция $Y\left(x_1(\theta_1), x_2(\theta_2), \ldots, x_n(\theta_n)\right)$ инвариантна по отношению к порядку следования аргументов

$$Y\left(x_1(\theta_1), x_2(\theta_2), \ldots, x_n(\theta_n)\right) = Y\left(P\left(x_1(\theta_1), x_2(\theta_2), \ldots, x_n(\theta_n)\right)\right),$$

где P — произвольная перестановка n-элементного множества.

1. ПОНЯТИЕ НУЛЕВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Понятие нулевого, или аддитивного, взаимодействия представляет собой тот тип совместного действия факторов, относительно которого оцениваются другие его типы. Первое определение этого понятия было дано в работе [12] и там же оно было использовано для доказательства линейности изоболы нулевого взаимодействия при некоторых дополнительных предположениях на функции отклика изолированных агентов. Минимальное уточнение этого определения связано с необходимостью введения явной зависимости этого понятия от функции f_k.

Определение 1. Пусть даны n (помеченных) вещественных переменных x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x_i \in [0; a_i]$, $a_i > 0$, и функция $Y(x_1, \ldots, x_n)$, определённая на $\prod\limits_{i=1}^{n} [0; a_i]$. Обозначим через $f_i\,(x_i)$ функцию одной переменной, определяемую равенством (1). Пусть все функции $f_i(x_i)$ монотонны в одном и том же смысле. Аргументы $\{x_1, \ldots, x_n\}$ назовём имеющими *нулевое* (*аддитивное*) совместное действие в точке $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ относительно k-го агента $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, если существуют такие значения $x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}$ аргумента x_k, что выполняются равенства

$$f_k(x_k^{(j)}) = f_j(x_j^0), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad x_k^{(k)} = x_k^0, \quad Y(x_1^0, \ldots, x_n^0) = Y_0,$$
$$Y(x_1^0, \ldots, x_n^0) = Y\left(0, \ldots, 0, \sum_{j=1}^{n} x_k^{(j)}, 0, \ldots 0\right) = f_k\left(\sum_{j=1}^{n} x_k^{(j)}\right) = Y_0.$$

Замечание 2. Это определение предлагает считать нулевое взаимодействие не отсутствием взаимодействия (в каком бы то ни было смысле), а таким взаимодействием, которое может быть эффективно представлено как совместное действие одного и того же агента в различных дозах. Иначе говоря, это определение полагает взаимодействие агента с самим собой прототипом любого нулевого взаимодействия. Поэтому, представляется очевидным, что это понятие должно зависеть от конкретного действующего агента и его функции отклика. Однако до сих пор выводы о характере совместного действия формулируются в литературе безотносительно к какому-либо агенту, т. е. как свойство всего множества данных агентов.

Определение 2. Для полной функции отклика $Y(x_1, \ldots, x_n)$ изоболой (изоболограммой), соответствующей уровню отклика (или эффекту) Y_0 называется множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$Y(x_1, \ldots, x_n) = Y_0. \tag{3}$$

Если функция $Y(x_1, \ldots, x_n)$ — гладкая и её градиент невырожден на множестве уровня $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid Y(x_1, \ldots, x_n) = Y_0\}$, то, как следует из теоремы о неявной функции, изобола (3) будет гладким многообразием.

Для более формального изложения введём зависимость переменных $x_1, \ldots, x_n$ от идентифицирующих их «меток» θ_i, $\theta_i \neq \theta_j$, $i \neq j$. Эти метки образуют некоторый «алфавит», «буквы» которого задают идентификаторы действующих агентов, величина каждого из которых выражается обычным числом. Набор этих меток образует алфавит $\mathcal{A} = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$, последовательность символов в котором будем считать фиксированной, как и в обычном алфавите.

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОНЯТИЯ НУЛЕВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Пусть для каждой метки θ_i из алфавита $\mathcal{A}$ задана *монотонная* функция f_{θ_i}, определённая на некотором множестве $D_{\theta_i} \subset \mathbb{R}$. Как правило, эти функции определены на $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$, на отрезке $[0; a]$, $a > 0$, на отрезке $[a_{\theta_i}, b_{\theta_i}]$ или таких же открытых справа полуинтервалах. Пространство n-наборов аргументов (дозовых комбинаций) определим как произведение $\prod_{i=1}^{n} D_{\theta_i}$.

Введём следующие обозначения:

- $\mathcal{A}$ будет обозначать не только упорядоченный алфавит меток действующих факторов, но и слово длины n, образованное всеми буквами этого алфавита, расположенными в естественном порядке: $\mathcal{A} = \theta_1\theta_2 \cdots \theta_n$. Все рассматриваемые ниже слова w над алфавитом $\mathcal{A}$ будут иметь вид $w = \mathcal{A} = \theta_1\theta_2 \cdots \theta_n$ или $w = \theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

- $D^n_{\mathcal{A}} = \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} D_\alpha$ — пространство (n-мерных) наборов, соответствующих слову $\mathcal{A}$. Аналогично, $D^n_{\theta_i} = \prod\limits_{j=1}^{n} D_{\theta_i}$ — пространство n-мерных наборов переменной $x_i\left(\theta_i\right) \in D_{\theta_i}$, $\theta_i \in \mathcal{A}$.

- $\boldsymbol{f}_{\mathcal{A}} = \left(f_{\theta_1}, f_{\theta_2}, \ldots, f_{\theta_n}\right)$ — n-мерное отображение, соответствующее слову $\mathcal{A}$. При этом в силу монотонности функций f_{θ_i} определено обратное отображение $\boldsymbol{f}^{-1}_{\mathcal{A}} = \left(f^{-1}_{\theta_1}, f^{-1}_{\theta_2}, \ldots, f^{-1}_{\theta_n}\right)$; $\boldsymbol{f}_{\mathcal{A}} \colon D^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f}^{-1}_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{E}\left(\boldsymbol{f}_{\mathcal{A}}\right) \to D^n_{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{E}\left(\boldsymbol{f}_{\mathcal{A}}\right)$ — область значений отображения $\boldsymbol{f}_{\mathcal{A}}$. Аналогично для каждого θ_i, $i = 1, \ldots, n$, определено обратимое отображение $\boldsymbol{f}_{\theta_i} = \left(f_{\theta_i}, f_{\theta_i}, \ldots, f_{\theta_i}\right) \colon D^n_{\theta_i} \to \mathbb{R}^n$.

Будем также предполагать выполнение следующих аксиом.

(A1) Все функции $f_{\theta_i} \colon D_{\theta_i} \to \mathbb{R}$ монотонны в одном и том же смысле.

(A2) Для каждого пространства D^n_w определена функция отклика $Y_w \colon D^n_w \to \mathbb{R}$.

(A3) Для каждого $\theta_i \in \mathcal{A}$ определена *ретракция* $\sigma_{\theta_i} \colon D^n_{\theta_i} \to D_{\theta_i}$ пространства $D^n_{\theta_i}$, удовлетворяющая равенству $Y_{\theta_i} = f_{\theta_i} \circ \sigma_{\theta_i}$.

(A4) Все функции f_{θ_i} имеют одну и ту же область значений, которая содержится в области значений функции $Y_{\mathcal{A}}$. т. е. выполняется равенство $\mathcal{E}(f_{\theta_i}) = \mathcal{E}(f_{\theta_j})$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$ и включение $\mathcal{E}(Y_{\mathcal{A}}) \supseteq \mathcal{E}(f_{\theta_i})$.

Замечание 3. С точки зрения токсикологии/фармакологии ретракции σ_α осуществляют свёртывание многокомпонентного воздействия с одним и тем же веществом в разных дозах в однокомпонентное воздействие этого же вещества в дозе, равной $\sigma_\alpha(x_1(\alpha), \ldots, x_n(\alpha))$. Естественная свёртка в этих науках представляет собой суммирование, что определяет ведущую роль в вопросах описания комбинированного воздействия функции $\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. Однако, если дозы заданы в логарифмической шкале, то такая свёртка будет произведением аргументов.

Следующее отображение определяет естественное преобразование пространств n-мерных наборов.

Определение 3. Для любой пары слов (w, w') над алфавитом $\mathcal{A}$ определено отображение $\varphi_{ww'} \colon D^n_w \to D^n_{w'}$, определяемое следующей суперпозицией:

$$\varphi_{ww'} = \boldsymbol{f}^{-1}_{w'} \circ \boldsymbol{f}_w.$$

В силу того, что метки алфавита $\mathcal{A}$ попарно различны, их можно опустить, сохраняя только зависимость от номера i и порядок следования, соответствующий порядку в алфавите $\mathcal{A}$. Тогда можно ввести следующие упрощённые обозначения (обозначим также $\overline{n} = 12\ldots n$; для полной функции отклика $Y_{\mathcal{A}} = Y_{\overline{n}}$ будет использоваться обозначение Y без индексов):

$$D_{\theta_i} = D_i, \quad D^n_{\mathcal{A}} = D^n_{\overline{n}}, \quad Y_{\mathcal{A}} = Y, \quad Y_{\theta_i} = Y_i,$$
$$\boldsymbol{f}_{\mathcal{A}} = \boldsymbol{f}_{\overline{n}}, \quad \boldsymbol{f}_{\theta_i} = \boldsymbol{f}_i, \quad \sigma_{\theta_i} = \sigma_i, \quad Y_i = f_i \circ \sigma_i.$$

Следовательно, имеем отображения (здесь и ниже $w = \overline{n}$ или $w \in \{1, \ldots, n\}$; то же для w')

$$f_i \colon D_i \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{f}_w \colon D^n_w \to \mathbb{R}^n,$$
$$\varphi_{ww'} \colon D^n_w \to D^n_{w'}, \quad \sigma_i \colon D^n_i \to D_i.$$

В этих обозначениях определения отображения $\varphi_{ww'}$ и ретракции σ_i есть условия коммутативности диаграмм

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] D_w^n \arrow[rr, "\varphi_{ww'}"] \arrow[dr, "\boldsymbol{f}_w"'] & & D_{w'}^n \\ & \mathcal{E}(\boldsymbol{f}_w) \arrow[ur, "\boldsymbol{f}_{w'}^{-1}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] D_i^n \arrow[rr, "\sigma_i"] \arrow[dr, "Y_i"'] & & D_i \arrow[dl, "f_i"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

соответственно.

Тогда понятие нулевого взаимодействия можно сформулировать следующим образом. Пусть

$$\boldsymbol{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \in D_{\overline{n}}^n,$$

и зафиксировано некоторое $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. В силу аксиомы (A4) для любого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ найдётся такое $x_k^{(j)}(\theta_k) = x_k^{(j)} \in D_k$, что выполняются равенства $f_k\left(x_k^{(j)}\right) = f_j\left(x_j^0\right)$, а именно, $\boldsymbol{x}_k^0 = \left(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(n)}\right) = \varphi_{\overline{n}k}\left(\boldsymbol{x}^0\right)$.

Тогда условие нулевого взаимодействия в точке $\boldsymbol{x}^0$ есть требование выполнения равенства

$$Y\left(\boldsymbol{x}^0\right) = Y_k\left(\boldsymbol{x}_k^0\right),$$

что можно выразить как условие коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{x}^0 \arrow[r, "\varphi_{\overline{n}k}"] \arrow[d, "Y"'] & \boldsymbol{x}_k^0 \arrow[d, "\sigma_k"] \\ \mathbb{R} & D_k \arrow[l, "f_k"] \end{tikzcd}$$

Здесь $\varphi_{\overline{n}k} = \boldsymbol{f}_k^{-1} \circ \boldsymbol{f}_{\overline{n}} = \left(f_k^{-1} \circ f_1, f_k^{-1} \circ f_2, \ldots, f_k^{-1} \circ f_n\right)$.

Таким образом, условие нулевого взаимодействия в точке $\boldsymbol{x}^0$ принимает вид

$$Y\left(\boldsymbol{x}^0\right) = \left(f_k \circ \sigma_k \circ \varphi_{\overline{n}k}\right)\left(\boldsymbol{x}^0\right) \tag{4}$$

или, учитывая аксиому (A3), $Y\left(\boldsymbol{x}^0\right) = \left(Y_k \circ \varphi_{\overline{n}k}\right)\left(\boldsymbol{x}^0\right)$.

Более полно понятие нулевого взаимодействия представлено в следующем определении.

Определение 4. Пусть даны монотонные (в одном смысле) функции одной переменной f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и функция $Y(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных. Пусть для этих функций выполняются аксиомы (A1)–(A4). Будем говорить, что в точке $\boldsymbol{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ выполняется условие нулевого взаимодействия относительно k-го агента, если

(1) $Y(\boldsymbol{x}^0) \in \mathcal{E}(f_k)$;

(2) для точки $\boldsymbol{x}_k^0 = \varphi_{\overline{n}k}\left(\boldsymbol{x}^0\right) \in D_k^n$ выполняется равенство $Y\left(\boldsymbol{x}^0\right) = f_k\left(\sigma_k\left(\boldsymbol{x}_k^0\right)\right)$.

Замечание 4. С учётом приведённых свойств условие нулевого взаимодействия вместе с определением ретракции можно изобразить в виде следующей коммутативной диаграммы.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{x}^0 \arrow[r, "\varphi_{\overline{n}k}"] \arrow[dr, "Y"'] & \boldsymbol{x}_k^0 \arrow[r, "\sigma_k"] \arrow[d, "Y_k"'] & D_k \arrow[dl, "f_k"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd} \tag{5}$$

Коммутативность левой части диаграммы (5) означает условие нулевого взаимодействия в точке $\boldsymbol{x}^0$, а коммутативность правой части следует из аксиомы (A3).

В результате проведённой формализации теорема о строении многообразия нулевого взаимодействия становится тривиальной.

Теорема. *Если в точке $\boldsymbol{x}^0$ выполняется условие нулевого взаимодействия относительно k-го агента, то для координат этой точки имеет место равенство*

$$\left(\sigma_k \circ \varphi_{\overline{n}k}\right)\left(\boldsymbol{x}^0\right) = X_k, \tag{6}$$

где X_k — значение k-й переменной, соответствующее величине отклика $Y(\boldsymbol{x}^0)$ для функции f_k, т. е. $f_k\left(X_k\right) = Y\left(\boldsymbol{x}^0\right)$.

Доказательство. Равенство (6) сразу следует из равенства (4), благодаря монотонности функции f_k и аксиоме (A4). □

Определение 5. Пространством нулевого взаимодействия относительно k-ой переменной, соответствующим величине отклика $Y_0 \in \mathcal{E}(f_k)$ называется множество точек $\boldsymbol{x} \in D_{\overline{n}}^{n}$, удовлетворяющих равенству

$$\left(f_k \circ \sigma_k \circ \varphi_{\overline{n}k}\right)(\boldsymbol{x}) = Y_0. \tag{7}$$

Как правило, функции f_k, σ_k гладкие и если градиент суперпозиции $f_k \circ \sigma_k \circ \varphi_{\overline{n}k}$ невырожден на пространстве нулевого взаимодействия, то уравнение (7) определяет гладкое многообразие. Дальше эти условия будут предполагаться выполненными и будет использоваться термин *многообразие нулевого взаимодействия*.

Следствие 1. Многообразие нулевого взаимодействия относительно k-ой переменной, соответствующее уровню отклика $Y_0 \in \mathcal{E}\left(f_k\right)$, задаётся уравнением

$$\left(\sigma_k \circ \varphi_{\overline{n}k}\right)(\boldsymbol{x}) = f_k^{-1}\left(Y_0\right). \tag{8}$$

Приведём вид уравнения (8) при обычной ретракции, заданной равенством

$$\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Следствие 2. Пусть в условиях теоремы выполняется равенство (9). Тогда уравнение многообразия нулевого взаимодействия (8) относительно k-го агента при величине отклика $Y_0 \in \mathcal{E}\left(f_k\right)$ принимает вид

$$\sum_{j=1}^{n} f_k^{-1}\left(f_j(x_j)\right) = X_k \tag{10}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{f_k^{-1}\left(f_j(x_j)\right)}{f_k^{-1}\left(f_j(X_j)\right)} = 1, \tag{11}$$

где X_j — величина j-го агента, удовлетворяющая равенству $f_j\left(X_j\right) = Y_0$.

Следствие 2 сводится к известному результату из работы [12] при дополнительном условии масштабной эквивалентности (см. определение 6 ниже). Следующее свойство дозо-ответных функций приведено в работе [12] без названия, но существенно использовано там при выводе уравнения многообразия нулевого взаимодействия (см. [12], Appendix 1).

Определение 6. Пусть $f_i(x_i), i = 1, \ldots, n$ монотонные (в одинаковом смысле) функции, определённые на отрезках $[0, a_i), a_i > 0$. Назовём эти функции *масштабно эквивалентными*, если существует такая монотонная функция $g(x)$, определённая на промежутке $[0, A)$, $A > 0$, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует такое положительное число λ_i, что $\lambda_i[0, a_i) \subset [0, A)$ и для всех $x_i \in [0, a_i)$ выполняется равенство

$$f(x_i) = g(\lambda_i x_i). \tag{12}$$

Из равенства (12) следует, что, при необходимости сужая область определения функций f_i, можно добиться выполнения равенств $\mathcal{E}(f_i) = \mathcal{E}(f_j)$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Кроме того, здесь предполагается справедливость равенств (1), что гарантирует выполнение аксиомы (A4). Из условия (12) следуют равенства

$$f_j^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda_j} g^{-1}(y), \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n, \quad f_j^{-1}(f_i(x_i)) = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} x_i.$$

В частности, из равенства $f_i(x_i) = f_j(x_j)$ вытекает равенство $\lambda_i x_i = \lambda_j x_j$. Отсюда следует, что для масштабно эквивалентных функций (12) уравнение многообразия нулевого взаимодействия является уравнением гиперплоскости.

Следствие 3 [12]. Пусть в условиях теоремы выполняется равенство (9) и условие масштабной эквивалентности (12). Тогда уравнение многообразия нулевого взаимодействия (6) не зависит от агента, определено однозначно и имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{X_j} = 1, \tag{13}$$

где X_k — величина k-ой переменной, соответствующая величине отклика Y_0.

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Изоболы нулевого взаимодействия могут не быть линейными

Рассмотрим гипотетический пример, в котором функции отклика для каждого из двух агентов выбраны так, что условие (12) не выполняется. А именно, пусть функции f_1, f_2 определены на отрезке $[0; 1]$ и заданы равенствами

$$f_1(x_1) = x_1, \quad f_2(x_2) = x_2^2.$$

Так как эти функции, очевидно, не связаны равенством (12), то уравнение нулевого взаимодействия для них имеет вид (10) (или в симметричной форме (11)), что приводит к следующим уравнениям (при ретракции (9)):

$$k = 1: \ x_1 + x_2^2 = const, \quad k = 2: \ \sqrt{x_1} + x_2 = const.$$

Соответствующие изоболы аддитивности имеют *различный вид* и зависят от k (см. рис. 1).

В работе [12] оспаривается мнение S. W. Loewe о том, что изобола нулевого взаимодействия *может не быть линейной*, если функции $f_i(x_i)$ сильно различны. Напротив, автор работы [12] считает, что *независимо* от вида функций $f_i(x_i)$, нулевое взаимодействие представляется гиперплоскостью, выражаемой уравнением (13). Это действительно так при выполнении условия (12). Однако в общем случае многообразие нулевого взаимодействия описывается уравнением (10), которое не будет линейным при произвольных функциях $f_i(x_i)$. Приведённый пример подтверждает справедливость этого заключения.

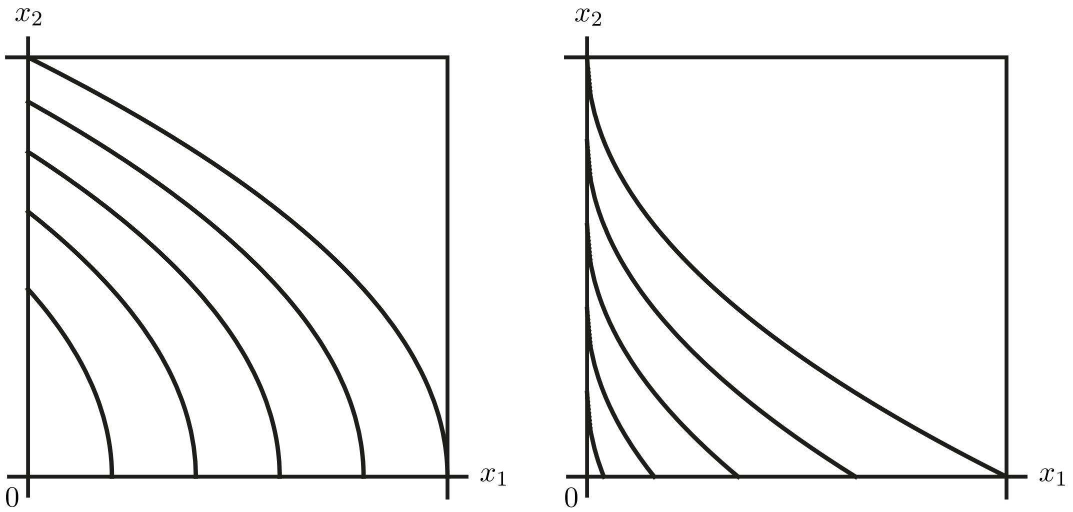


Рис. 1. Нелинейные изоболы нулевого взаимодействия: слева — относительного первой переменной; справа — относительно второй

3.2. Некоторые модели полной функции отклика

Практическое применение метода изобологрмамм предполагает знание полной функции отклика $Y(x_1, \ldots, x_n)$, что редко случается. Вместо этого имеются экспериментальные данные, которые позволяют построить ту или иную аппроксимацию этой функции. Качество выводов, полученных с помощью такой аппроксимации, прямо зависит от качества этой аппроксимации. При этом, как правило, ограничиваются небольшим числом переменных [13], так как чем больше действующих факторов, тем труднее интерпретировать тип их совместного действия.

Наиболее часто встречаются полиномиальные аппроксимации, в частности, так называемая модель главных эффектов с взаимодействием

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{p} b_i x_i + \sum_{i,j=1, i<j}^{p} b_{ij} x_i x_j + \varepsilon \tag{14}$$

и квадратическая модель

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{p} b_i x_i + \sum_{i,j=1, i<j}^{p} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{p} b_{ii} x_i^2 + \varepsilon, \tag{15}$$

где ε — ошибка модели.

Важным вопросом является проверка того, выполняется ли для выбранной модели условие масштабной эквивалентности (12), которое гарантирует линейность и единственность многообразия нулевого взаимодействия (при заданной величине отклика Y_0). Если условие (12) не выполняется, то характеризация типа совместного действия будет зависеть от того, относительно какой переменной выполняется определение 1. Рассмотрим выполнимость этого условия для моделей (14) и (15) от двух переменных, предполагая, что функции f_1, f_2 задаются равенством (1).

3.3. Линейная модель с взаимодействием

Пусть в модели (14) $p = 2$ и $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. В этом случае при одинаковых знаках коэффициентов b_1, b_2 условие (12) выполняется, так что выводы о характере совместного действия, полученные на основании уравнения (13), корректны.

Действительно, без ограничения общности можно считать, что $b_0 = 0$. Тогда

$$f_1(x_1) = b_1 x_1, \quad f_2(x_2) = b_2 x_2.$$

Значит, $g(x) = x$, если $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ и $g(x) = -x$, если $b_1 < 0$, $b_2 < 0$. В обоих случаях $\lambda_i = |b_i|$, $i = 1, 2$.

3.4. Квадратическая модель

Для квадратической модели (15) при $p = 2$ функции отклика каждой переменной задаются равенствами

$$f_1(x_1) = b_0 + b_1 x_1 + b_{11} x_1^2, \tag{16}$$

$$f_2(x_2) = b_0 + b_2 x_2 + b_{22} x_2^2. \tag{17}$$

Следовательно, эти функции будут монотонны только в определённой области значений независимых переменных x_1 и x_2 и условие (12) может не выполняться. Кроме того, даже если эти функции имеют одинаковую монотонность на некоторых промежутках $x_1 \in [0; a_1]$, $x_2 \in [0; a_2]$, необходимо также проверять, что их области значений совпадают.

Нетрудно проверить, что равенство (12) для функций (16), (17) будет выполняться тогда и только тогда, когда b_1, b_2 одного знака и имеет место равенство

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 = \frac{b_{11}}{b_{22}}. \tag{18}$$

Таким образом, для квадратической модели (15) даже при наличии промежутков одинаковой монотонности функций (16), (17) и одинаковой области значений функций f_1, f_2 на этих промежутках, условие (12) может не выполняться.

3.5. Практический пример

Рассмотрим пример из работы [14], в которой исследовалось влияние очищенной пшеничной муки (Refined Wheat Flour, далее будет использоваться сокращение RWF, обозначается переменной x_1) и отрубей из проса (Barnyard Millet Bran, BMB, переменная x_2) на различные характеристики хлеба. Эксперимент был построен по центральному композиционному плану, в котором x_1 изменялось от 70 до 100 г, а x_2 — в пределах 5–30 г. В ортогональной кодировке изменение переменных было от -1 до 1. В качестве отклика y были взяты 10 разных характеристик качества хлеба, из которых мы рассмотрим только «Overall acceptability» (общая приемлемость). Для аппроксимации отклика использовалась модель (15), причём коэффициент детерминации модели составлял 0.88. Уравнение модели имеет вид (в ортогональной кодировке)

$$y = 5.2 + 0.3x_1 - 0.91x_2 + 0.21x_1x_2 + 0.21x_1^2 - 0.25x_2^2.$$

Как и ранее, будем считать, что функции отклика для каждой переменной задаются равенством (1). Сделаем линейное преобразование переменных x_1, x_2, чтобы новые переменные были определены на отрезке $[0; 1]$. Получим уравнение (сохранены старые обозначения для независимых переменных)

$$y = 5.98 - 0.66x_1 - 1.24x_2 + 0.84x_1x_2 + 0.84x_1^2 - x_2^2, \tag{19}$$

в котором переменные x_1, x_2 принимают значения на $[0, 1]$. Соответствующие функции (16), (17) задаются уравнениями

$$f_1(x_1) = 5.98 - 0.66x_1 + 0.84x_1^2,$$

$$f_2(x_2) = 5.98 + 1.24x_2 - x_2^2.$$

Изоболы как линии уровня для уравнения (19) можно построить без дальнейших вычислений, однако корректно трактовать их для определения характера совместного действия можно только при выполнении аксиом (A1)–(A4), в частности при монотонности функций (16), (17). Это приводит к необходимости поиска такой области $D_1 \times D_2$ в пространстве $[0;1]^2$, в которой эти условия будут выполняться. Заметим также, что для функций (16), (17) не выполняется равенство (18), так что уравнение (10) определяет две изоболы нулевого взаимодействия.

Нетрудно проверить, что отрезках $[0; 0.3929]$ и $[0; 0.09697]$ функции $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$ соответственно имеют одинаковую монотонность (убывают) и одинаковую область значений (отрезок $[5.85; 5.98]$). При этом на произведении $[0, 0.3929] \times [0, 0.09697]$ область значений функции (19) равна $[5.75; 5.98]$. На отрезке $[5.85, 5.98]$ определены обратные функции $f_1^{-1}(y_1)$ и $f_2^{-1}(y_2)$, уравнения которых имеют вид

$$f_1^{-1}(y_1) = 0.0119048 \left(33 - 1.73205\sqrt{2800y_1 - 16381}\right),$$
$$f_2^{-1}(y_2) = 0.02 \left(-31 + \sqrt{15911 - 2500y_2}\right).$$

Возьмём в области $[5.85; 5.98]$ значения 5.86, 5.885, 5.91, 5.935, 5.96., для которых построим изоболы функции y (по уравнению (19)) и гипотетические изоболы нулевого взаимодействия, определяемые уравнением (10), предполагая, что ретракция задаётся равенством (9). Из уравнения (8) получим следующие уравнения относительно каждой из функций $f_1(x_1)$ и $f_2(x_2)$:

$$k = 1: \ x_1 + f_1^{-1}\left(f_2(x_2)\right) = const_1,$$
$$k = 2: \ f_2^{-1}\left(f_1(x_1)\right) + x_2 = const_2,$$

где $const_1$, $const_2$ принимают значения 0.286, 0.190, 0.126, 0.075, 0.032 и 0.090, 0.072, 0.054, 0.035, 0.016 соответственно.

Расположение изобол нулевого взаимодействия для $k = 1$ и $k = 2$ показано на рис. 2.

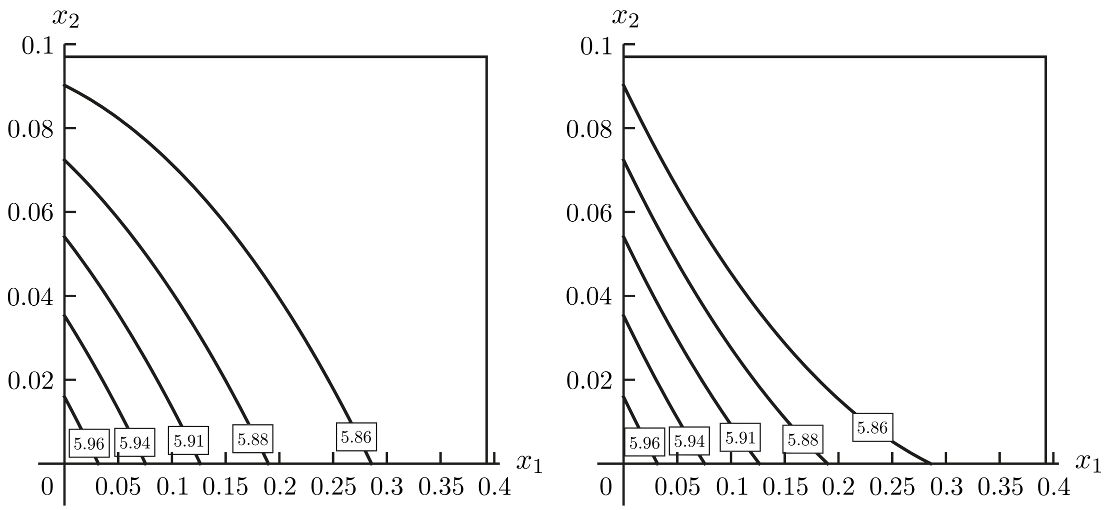


Рис. 2. Изоболы нулевого взаимодействия относительно первого (слева) и второго (справа) действующих факторов для уравнения (19). Числа у каждой изоболы равны выбранным значениям функции отклика (19)

Таким образом, в зависимости от того, относительно какой переменной выполняется определение 4, выводы о типе совместного действия будут различны. Единственный случай, при котором заключение можно сделать однозначно, возникает при расположении изоболы модели (19) выше или ниже обеих изобол на рис. 2. Однако в данном случае это не так. Например, изобола модели (19), соответствующая уровню 5.86 находится между изоболами нулевого взаимодействия, соответствующими этой же величине отклика (см. рис. 3).

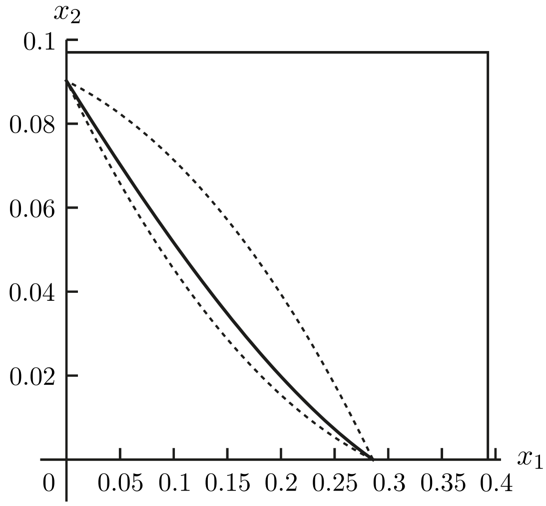


Рис. 3. Изоболы нулевого взаимодействия уровня эффекта 5.86 относительно первого и второго действующих факторов для уравнения (19) (пунктирные линии) и изобола этого же уровня для модели (19) (сплошная линия)

Следовательно, для уровня отклика 5.86 и модели (19) совместное действие факторов x_1, x_2 следует считать супераддитивным относительно первого фактора и субаддитивным относительно второго. Можно проверить, что аналогичный вывод справедлив для любого значения из отрезка $[5.85; 5.98]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определение типа комбинированного (совместного) действия факторов представляет одну из важный задач медико-биологических наук. Однако несмотря на широкое применение метода изобол для такого анализа его основания остаются недостаточно формализованными, что ограничивает возможности развития метода и может приводить к ошибкам в его применении. Изложенная в статье абстрактная схема метода изобол позволяет не только рассматривать этот метод с точки зрения математики, но и распространить его на ситуации, не охватываемые условием масштабной эквивалентности.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор хотел бы выразить благодарность анонимному рецензенту и ответственному секретарю редакции за ценные замечания и рекомендации.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено за счет субсидий Минобрнауки РФ на выполнение научной темы FUMN-2024-0002. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Greco W. R., Bravo G., Parsons J. C.* The Search for Synergy: A Critical Review from a Response Surface Perspective // Pharmacol. Rev. 1995. V. 47, N 2. P. 331–385.
2. *Tang J., Wennerberg K., Aittokallio T.* What is synergy? The Saariselkä agreement revisited // Front. Pharmacol. 2015. V. 6, N 1. Article 181; DOI: 10.3389/fphar.2015.00181
3. *Huang R.-Y., Pei L., Liu Q., Chen S., Dou H., Shu G., Yuan Z.-X., Lin J., Peng G., Zhang W., Fu H.* Isobologram Analysis: A Comprehensive Review of Methodology and Current Research // Front. Pharmacol. 2019. V. 10, N 29. Article 1222; DOI: 10.3389/fphar.2019.01222
4. *van den Berg J. P., Vereecke H. E. M., Proost J. H., Eleveld D. J., Wietasch J. K. G., Absalom A. R., Struys M. M. R. F.* Pharmacokinetic and pharmacodynamic interactions in anaesthesia. A review of current knowledge and how it can be used to optimize anaesthetic drug administration // Br. J. Anaesth. 2017. V. 118, N 1. P. 44–57; DOI: 10.1093/bja/aew312
5. *Short T. G., Hannam J. A.* Pharmacology and Physiology for Anesthesia. Philadelphia: Elsevier. 2019.
6. *Basting R. T., Spindola H. M., de Oliveira Sousa I. M., Queiroz N. C. A., Trigo J. R., de Carvalho J. J. E., Foglio M. A.* Pterodon pubescens and Cordia verbenacea association promotes a synergistic response in antinociceptive model and improves the anti-inflammatory results in animal models // Biomed. Pharmacother. 2019. V. 112. Article 108693; DOI: 10.1016/j.biopha.2019.108693
7. *Atwal N., Casey S. L., Mitchell V. A., Vaughan C. W.* THC and gabapentin interactions in a mouse neuropathic pain model // Neuropharmacology. 2019. V. 144. P. 115–121; DOI: 10.1016/j.neuropharm.2018.10.006
8. *Luszczki J. J., Wlaz A.* Isobolographic analysis of interactions — a pre-clinical perspective // J. Pre-Clin. Clin. Res. 2023. V. 17, N 4. P. 238–241; DOI: 10.26444/jpccr/177246.
9. *Foucquier J., Guedj M.* Analysis of drug combinations: current methodological landscape // Pharmacol. Res. Perspect. 2015. V. 3, N 3. Article e00149; DOI: 10.1002/prp2.149
10. *García M. A. M., Lage M. A. P.* Dose-response analysis in the joint action of two effectors: A new approach to simulation and identification and modelling of some basic interactions // PLoS One. 2013. V. 8, N 4. Article e61391; DOI: 10.1371/journal.pone.0061391
11. *Rodea-Palomares I., González-Pleiter M., Martin-Betancor K., Rosal R., Fernández-Piñas F.* Additivity and Interactions in Ecotoxicity of Pollutant Mixtures: Some Patterns, Conclusions, and Open Questions // Toxics. 2015. V. 3, N 4. P. 342–369; DOI: 10.3390/toxics3040342
12. *Berenbaum M. C.* The Expected Effect of a Combination of Agents: the General Solution // J. Theor. Biol. 1985. V. 114, N 3. P.413–431; DOI: 10.1016/s0022-5193(85)80176-4
13. *Myers R. H., Montgomery D. C., Anderson-Cook C. M.* Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments. New Jersey: Hoboken, 2016.
14. *Nazni P., Gracia J.* Application of Response Surface Methodology in the Development of Barnyard Millet Bran Incorporated Bread // Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Technol. 2014. V. 3, N 9. Article 16041; DOI: 10.15680/IJIRSET.2014.0309038

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 51-76:514.124:573.2:615.015.2

MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF THE ISOBOLOGRAPHIC METHOD

V. G. Panov

Institute of Industrial Ecology of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620137 Russia

E-mail: vpanov@ecko.uran.ru

Received 08.11.2022, revised 03.09.2024, accepted 29.10.2024

Abstract. More precise definitions of concepts and constructs used in biomedical sciences are proposed to analyze the joint action of factors using isobolograms. Formal definitions of concepts of zero interaction, scale-equivalent dose—response functions, and zero-interaction manifold are given. A general construction is proposed that formalizes the conditions of applicability and the basic methods for analyzing the combined action using isoboles. Equations of zero interaction manifolds are derived both in the case of scale-equivalent and arbitrary dose—response functions.

Keywords: combined (joint) action of factors, isobole, dose—response function, zero interaction, superadditivity, subadditivity, commutative diagram.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.406

REFERENCES

1. W. R. Greco, G. Bravo, and J. C. Parsons, "The search for synergy: A critical review from a response surface perspective," Pharmacol. Rev. **47** (2), 331–385 (1995).
2. J. Tang, K. Wennerberg, and T. Aittokallio, "What is synergy? The SaariselkBËa agreement revisited," Front. Pharmacol. **6** (1), 181 (2015). https://doi.org/10.3389/fphar.2015.00181
3. R.-Y. Huang, L. Pei, Q. Liu, S. Chen, H. Dou, G. Shu, Z.-X. Yuan, J. Lin, G. Peng, W. Zhang, and H. Fu, "Isobologram analysis: A comprehensive review of methodology and current research," Front. Pharmacol. **10** (29), 1222 (2019). https://doi.org/10.3389/fphar.2019.01222
4. J. P. van den Berg, H. E. M. Vereecke, J. H. Proost, D. J. Eleveld, J. K. G.Wietasch, A. R. Absalom, and M. M. R. F. Struys, "Pharmacokinetic and pharmacodynamic interactions in anaesthesia. A review of current knowledge and how it can be used to optimize anaesthetic drug administration," Br. J. Anaesth. **118** (1), 44–57 (2017). https://doi.org/10.1093/bja/aew312
5. T. G. Short and J. A. Hannam, *Pharmacology and Physiology for Anesthesia* (Elsevier, Philadelphia, 2019).
6. R. T. Basting, H. M. Spindola, I. M. de Oliveira Sousa, N. C. A. Queiroz, J. R. Trigo, J. J. E. de Carvalho, and M. A. Foglio, "Pterodon pubescens and Cordia verbenacea association promotes a synergistic response in antinociceptive model and improves the anti-inflammatory results in animal models," Biomed. Pharmacother. **112**, 108693 (2019). https://doi.org/10.1016/j.biopha.2019.108693
7. N. Atwal, S. L. Casey, V. A. Mitchell, and C. W. Vaughan, "THC and gabapentin interactions in a mouse neuropathic pain model," Neuropharmacology **144**, 115–121 (2019). https://doi.org/10.1016/j.neuropharm.2018.10.006
8. J. J. Luszczki and A. Wlaz, "Isobolographic analysis of interactions — a pre-clinical perspective," J. Pre-Clin. Clin. Res. **17** (4), 238–241 (2023). https://doi.org/10.26444/jpccr/177246

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 801–812.

9. J. Foucquier and M. Guedj, "Analysis of drug combinations: Current methodological landscape," Pharmacol. Res. Perspect. **3** (3), e00149 (2015). https://doi.org/10.1002/prp2.149

10. M. A. M. Garcia and M. A. P. Lage, "Dose—response analysis in the joint action of two effectors: A new approach to simulation and identification and modelling of some basic interactions," PLoS One **8** (4), e61391 (2013). https://doi.org/10.1371/journal.pone.0061391

11. I. Rodea-Palomares, M. González-Pleiter, K. Martin-Betancor, R. Rosal, and F. Fernández-Piñas, "Additivity and interactions in ecotoxicity of pollutant mixtures: Some patterns, conclusions, and open questions," Toxics **3** (4), 342–369 (2015). https://doi.org/10.3390/toxics3040342

12. M. C. Berenbaum, "The expected effect of a combination of agents: The general solution," J. Theor. Biol. **114** (3), 413–431 (1985). https://doi.org/10.1016/s0022-5193(85)80176-4

13. R. H. Myers, D. C. Montgomery, and C. M. Anderson-Cook, *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments* (Wiley, Hoboken, NJ, 2016).

14. P. Nazni and J. Gracia, "Application of response surface methodology in the development of Barnyard Millet Bran incorporated bread," Int. J. Innov. Res. Sci. Eng. Technol. **3** (9), 16041 (2014). https://doi.org/10.15680/IJIRSET.2014.0309038

УДК 517.962

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ РЕШЕНИЙ ГИБРИДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ЛОТКИ—ВОЛЬТЕРРЫ

© 2024 **А. В. Платонов**

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9, г. Санкт-Петербург 199034, Россия

E-mail: a.platonov@spbu.ru

Поступила в редакцию 28.06.2023 г.; после доработки 04.09.2024 г.;
принята к публикации 06.11.2024 г.

Рассматривается дискретная система типа Лотки—Вольтерры. Предполагается, что эта система может функционировать как в некотором плановом, так и в возмущённом режимах. Исследуются ограничения на время пребывания системы в этих режимах, обеспечивающие желаемое динамическое поведение. В частности, определяются условия предельной ограниченности решений и перманентности системы. Используется прямой метод Ляпунова, причём в разных частях фазового пространства строятся разные функции Ляпунова. Оцениваются размеры области допустимых начальных значений решений и области предельного пребывания решений, соответствующих требуемой динамике системы. Устанавливаются ограничения на величину шага дискретизации системы.

Ключевые слова: разностные системы Лотки—Вольтерры, переключения, предельная ограниченность решений, перманентность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.407

ВВЕДЕНИЕ

Системы типа Лотки—Вольтерры широко используются для моделирования различных взаимодействий между некими субъектами в биологической, химической или экономической среде [1, 2]. Наиболее часто такие системы применяют для построения популяционных моделей, описывающих динамику изменения численности нескольких популяций в биологическом сообществе. При этом в прикладных задачах задействуются как непрерывные, так и разностные модели [3, 4]. Разностные уравнения могут получаться в результате дискретизации непрерывных уравнений с помощью каких-то вычислительных схем, а могут строиться и непосредственно без привязки к непрерывным моделям. Поскольку динамика изменения численности популяций представляет собой по сути дискретный процесс, то математический аппарат разностных уравнений часто оказывается более уместным для описания данного процесса [4].

Одной из важных задач популяционной динамики является проблема предельной ограниченности решений [1]. В рамках этой задачи исследуются условия, гарантирующие существование ограниченной области в фазовом пространстве системы такой, что любое решение за конечное время войдёт в данную область и более её уже не покинет. С биологической точки зрения это будет означать, что численности популяций не будут превышать некоторые определённые значения. В дискретных моделях такую предельную ограниченность часто удаётся гарантировать лишь для решений, начинающихся в некоторой конечной окрестности начала координат. Но поскольку размер этой окрестности можно варьировать, то это не вызывает принципиальных проблем при моделировании реальных процессов.

Другой важной задачей является проблема персистентности системы [1]. Персистентность означает, что в процессе биологического взаимодействия популяции не вымирают, и их численности не опускаются ниже некоторых определённых положительных значений. Если система обладает свойствами предельной ограниченности решений и персистентности, то она называется перманентной [1, 5, 6].

Указанные выше задачи широко исследовались в последние десятилетия для систем Лотки—Вольтерры с постоянными и переменными коэффициентами [4–6], при воздействии случайных или неслучайных возмущений [7–9], при наличии запаздывания или диффузии [10, 11], и т. д. Отдельный интерес для практических приложений представляет изучение систем с гибридной структурой [12, 13], в частности, когда коэффициенты заданной системы могут переключаться с одного набора значений на другой в результате каких-то внешних воздействий, изменения схемы управления, и т. п. Разработке методов динамического анализа для систем с переключениями посвящено множество работ (см. [14, 15]). Стандартным инструментом для такого анализа является прямой метод Ляпунова. Например, системы Лотки—Вольтерры с переключениями рассматривались в работах [16–18].

В настоящей работе исследуется гибридная дискретная система типа Лотки—Вольтерры, которая может функционировать как в плановом режиме с некоторым асимптотически устойчивым положением равновесия, так и в возмущённом режиме, при котором теряются указанное положение равновесия и свойства устойчивости. Анализируется динамика такой системы, устанавливаются достаточные условия предельной ограниченности решений и перманентности, оцениваются области допустимых начальных и предельных значений решений, соответствующие изучаемой динамике. Отличительной особенностью работы является применение метода дробления фазового пространства системы на части и построение разных функций Ляпунова в разных частях этого пространства. Такой подход позволяет получить лучшие результаты как в качественном, так и в количественном смысле [19, 20].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретную систему

$$x_i(k+1) = x_i(k)\exp\Big(h\big(c_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij} f_j(x_j(k))\big)\Big), \quad i = 1,\dots,n. \tag{1}$$

Уравнения (1) являются разностным аналогом хорошо известной дифференциальной системы Лотки—Вольтерры обобщённого типа [3, 4]. Они обычно используются для моделирования взаимодействия нескольких популяций в биологическом сообществе. Так, переменная $x_i(k)$ описывает численность i-ой популяции при k-ой итерации; $k = 0, 1, \dots$; $i = 1,\dots,n$. Величина $h > 0$ определяет шаг дискретизации. Постоянные коэффициенты c_i и p_{ij} характеризуют скорость естественного прироста (убыли) популяций, внутривидовую конкуренцию и межвидовое взаимодействие; $i, j = 1,\dots,n$. Функции $f_i(z_i)$, заданные при $z_i \in [0, +\infty)$, подбираются таким образом, чтобы результаты моделирования согласовывались с наблюдаемыми экспериментальными данными; $i = 1,\dots,n$.

Отметим, что уравнения (1) также применяют для моделирования некоторых химических и экономических процессов [1, 2].

В соответствии с физическим смыслом переменных, систему (1) будем рассматривать в неотрицательном ортанте $K^+ = \{\mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n)^T : z_i \geqslant 0, i = 1,\dots,n\}$. Через $K_0^+ = \{\mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n)^T : z_i > 0, i = 1,\dots,n\}$ обозначим внутренность ортанта K^+. Заметим, что множества K^+ и K_0^+ являются инвариантными множествами системы (1).

Согласно стандартным предположениями (см. [1–3]), будем считать, что функции $f_i(z_i)$ непрерывны и строго возрастают при $z_i \in [0, +\infty)$, $f_i(0) = 0$ и $f_i(z_i) \to +\infty$ при $z_i \to +\infty$; $i = 1,\dots,n$.

Дополнительно предположим, что для любой константы H функции $\tilde{f}_i(z_i) = f_i(e^{z_i})$ удовлетворяют условию Липшица на интервале $(-\infty, H]$ с некоторой константой Липшица $L(H) > 0$, и кроме того, $\int\limits_0^1 \frac{f_i(\tau)}{\tau}\,d\tau < +\infty$; $i = 1,\dots,n$.

Замечание 1. Все сделанные предположения будут выполнены, например, для функций степенного типа: $f_i(z_i) = z_i^{\mu_i}$, где $\mu_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. В частности, случай, когда $\mu_1 = \dots = \mu_n = 1$, соответствует классической разностной системе Лотки—Вольтерры.

Обозначим $f(\mathbf{z}) = (f_1(z_1), \dots, f_n(z_n))^T$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^n$.

Будем считать, что $\det \mathbf{P} \neq 0$, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c} < 0$ (покомпонентно), и существуют положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ такие, что матрица $\Lambda\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\Lambda$ отрицательно определена (здесь $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$).

При сделанных предположениях система (1) будет иметь единственное положение равновесия $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T \in K_0^+$, причём это положение равновесия будет асимптотически устойчивым [1–4].

Динамику системы (1) назовём плановым (программным) режимом. Далее полагаем, что в некоторые моменты времени в результате каких-то внешних воздействий рассматриваемая система переходит в возмущённый режим

$$x_i(k+1) = x_i(k) \exp\Big(h\big(\hat{c}_i(k) + \sum_{j=1}^n \hat{p}_{ij}(k) f_j(x_j(k))\big)\Big), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Здесь коэффициенты $\hat{c}_i(k)$, $\hat{p}_{ij}(k)$ представляют собой некоторые ограниченные величины

$$|\hat{c}_i(k)| \leqslant \hat{c}_i, \quad |\hat{p}_{ij}(k)| \leqslant \hat{p}_{ij}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\hat{c}_i = \text{const} \geqslant 0,\ \hat{p}_{ij} = \text{const} \geqslant 0).$$

А после окончания действия возмущений система снова возвращается в плановый режим (1). В качестве другой интерпретации задачи можно полагать, что система функционирует в возмущённом режиме (2), но в некоторые моменты времени мы с помощью специального стабилизирующего управления приводим систему к плановому режиму (1). После отключения управления система возвращается к режиму (2).

Целью настоящей работы является нахождение ограничений на время пребывания (число последовательных итераций) исследуемой системы в режимах (1) и (2), гарантирующих требуемые динамические характеристики поведения решений системы. В частности, будет исследована задача о попадании решений системы в некоторую компактную окрестность $G \in K_0^+$ точки $\bar{\mathbf{x}}$ и дальнейшем их там пребывании. Таким образом, в работе будут получены условия предельной ограниченности решений и перманентности гибридной системы, состоящей из подсистем (1) и (2).

2. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА И ПОЛУЧЕНИЕ ОЦЕНОК НА НИХ

Для решения поставленной задачи будем использовать две функции Ляпунова [3, 17]

$$V_1(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{\bar{x}_i}^{z_i} \frac{f_i(\tau) - f_i(\bar{x}_i)}{\tau}\, d\tau, \quad V_2(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_{\bar{x}_i}^{z_i} \frac{f_i(\tau)}{\tau}\, d\tau,$$

где в качестве коэффициентов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ возьмём числа, указанные в предыдущем разделе статьи.

Имеем, что $V_1(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $V_1(\mathbf{z}) > 0$ при $\mathbf{z} \neq \bar{\mathbf{x}}$, и $V_1(\mathbf{z}) \to +\infty$, если $z_i \to +0$ хотя бы при одном значении индекса $i \in \{1, \dots, n\}$, а также если $\|\mathbf{z}\| \to +\infty$. В то же время, функция $V_2(\mathbf{z})$ сохраняет конечное значение, если $z_i \to +0$ при $i \in \{1, \dots, n\}$, но $V_2(\mathbf{z}) \to +\infty$ при $\|\mathbf{z}\| \to +\infty$. Таким образом, можно указать такое $\bar{H} > 0$, что

$$V_2(\mathbf{z}) > 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{z}\| \geqslant \bar{H}. \tag{3}$$

Вычислим конечные разности функций $V_1(\mathbf{z})$ и $V_2(\mathbf{z})$ на решениях подсистем (1) и (2).

Выберем произвольные значения $0 < H_1 < \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_i$ и $H_2 > \|\bar{\mathbf{x}}\|$. Зададим область (см. рис. 1)

$$T_1(H_1,H_2) = \left\{\mathbf{z} \in K_0^+ : \ \|\mathbf{z}-\bar{\mathbf{x}}\| \geqslant H_1, \ \|\mathbf{z}\| \leqslant H_2\right\}.$$

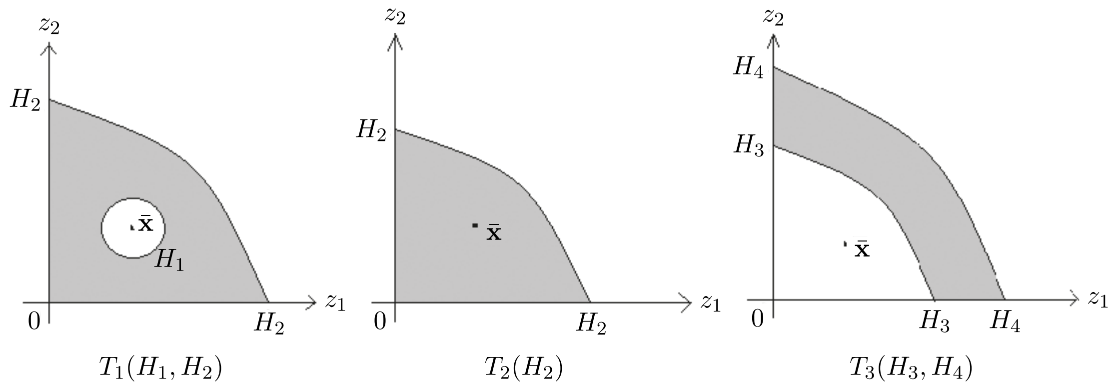


Рис. 1. Области фазового пространства

Получаем

$$\Delta V_1\big|_{(1)} = V_1(\mathbf{x}(k+1)) - V_1(\mathbf{x}(k)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{x_i(k)}^{x_i(k+1)} \frac{f_i(\tau)-f_i(\bar{x}_i)}{\tau}\, d\tau = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_{y_i(k)}^{y_i(k+1)} \Big(\tilde{f}_i(\xi) - \tilde{f}_i(\bar{y}_i)\Big)\, d\xi =$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(\tilde{f}_i(y_i(k)+\theta_{ik}\Delta y_i(k)) - \tilde{f}_i(\bar{y}_i)\Big) \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \Big(\tilde{f}_j(y_j(k)) - \tilde{f}_j(\bar{y}_j)\Big) =$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(\tilde{f}_i(y_i(k)) - \tilde{f}_i(\bar{y}_i)\Big) \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \Big(\tilde{f}_j(y_j(k)) - \tilde{f}_j(\bar{y}_j)\Big) +$$

$$+h\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(\tilde{f}_i(y_i(k)+\theta_{ik}\Delta y_i(k)) - \tilde{f}_i(y_i(k))\Big) \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \Big(\tilde{f}_j(y_j(k)) - \tilde{f}_j(\bar{y}_j)\Big).$$

Здесь $y_i(k) = \ln x_i(k)$, $\bar{y}_i = \ln \bar{x}_i$, $\Delta y_i(k) = y_i(k+1) - y_i(k)$, $\theta_{ik} \in (0,1)$, $i = 1,\ldots,n$.

Значит, если $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant H_2$ и $\|\mathbf{x}(k+1)\| \leqslant H_2$, то будет справедливо неравенство

$$\Delta V_1\big|_{(1)} \leqslant \Big(-b_1 h + b_2 L(\ln H_2) h^2\Big) \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\|^2,$$

где b_1, b_2 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от h и H_2.

Выберем $0 < h_1(H_2) < b_1/\big(b_2\, L(\ln H_2)\big)$. Тогда, если $h \in (0, h_1(H_2))$, то пока решение системы (1) остаётся в области $T_1(H_1,H_2)$, будут верны оценки

$$\Delta V_1\big|_{(1)} \leqslant -h\, b_3(H_2) \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\|^2 \leqslant -h\, \alpha_1(H_1,H_2), \tag{4}$$

где $b_3(H_2)$, $\alpha_1(H_1,H_2)$ — положительные постоянные, зависящие от H_2 и от H_1, H_2 соответственно.

Проводя аналогичные рассуждения, можно задать неотрицательную постоянную $\beta_1(H_2)$, зависящую от H_2, так, что если $h \in (0, h_1(H_2))$, то пока решение системы (2) остаётся в области (см. рис. 1)

$$T_2(H_2) = \left\{\mathbf{z} \in K_0^+ : \ \|\mathbf{z}\| \leqslant H_2\right\},$$

будет верна оценка

$$\Delta V_1\big|_{(2)} \leqslant h\,\beta_1(H_2). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь область вида (см. рис. 1)

$$T_3(H_3, H_4) = \left\{\mathbf{z} \in K_0^+ :\ H_3 \leqslant \|\mathbf{z}\| \leqslant H_4\right\},$$

где H_3, H_4 — некоторые положительные постоянные, $H_3 < H_4$.

Имеем

$$\Delta V_2\big|_{(1)} = V_2(\mathbf{x}(k+1)) - V_2(\mathbf{x}(k)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_{x_i(k)}^{x_i(k+1)} \frac{f_i(\tau)}{\tau}\, d\tau = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int\limits_{y_i(k)}^{y_i(k+1)} \tilde{f}_i(\xi)\, d\xi =$$
$$= h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{f}_i(y_i(k) + \hat{\theta}_{ik}\Delta y_i(k)) \left(c_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{f}_j(y_j(k))\right) =$$
$$= h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{f}_i(y_i(k)) \left(c_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{f}_j(y_j(k))\right) +$$
$$+h \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\tilde{f}_i(y_i(k) + \hat{\theta}_{ik}\Delta y_i(k)) - \tilde{f}_i(y_i(k))\right) \left(c_i + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\tilde{f}_j(y_j(k))\right).$$

Здесь, как и ранее, $y_i(k) = \ln x_i(k)$, $\Delta y_i(k) = y_i(k+1) - y_i(k)$, $\hat{\theta}_{ik} \in (0,1)$, $i = 1, \ldots, n$.

Значит, если $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant H_4$ и $\|\mathbf{x}(k+1)\| \leqslant H_4$, то будет справедливо неравенство

$$\Delta V_2\big|_{(1)} \leqslant -b_4 h \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))\|^2 + b_5 h \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))\| + b_6 L(\ln H_4) h^2 \left(1 + \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))\|^2\right),$$

где b_4, b_5, b_6 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от h и H_4.

Найдём величину $\widetilde{H} > 0$ такую, что

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{z})\| > b_5/b_4 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{z}\| \geqslant \widetilde{H}. \tag{6}$$

На основе величин, определяемых по формулам (3) и (6), найдём константу $\hat{H} = \max\{\bar{H};\ \widetilde{H}\}$. Будем считать, что $H_4 > H_3 > \hat{H}$. Тогда нетрудно подобрать такие положительные постоянные $h_2(H_3, H_4)$ и $b_7(H_3, H_4)$, что если $h \in (0, h_2(H_3, H_4))$, то пока решение системы (1) остаётся в области $T_3(H_3, H_4)$, будет выполнено неравенство

$$\Delta V_2\big|_{(1)} \leqslant -h\, b_7(H_3, H_4) \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))\|^2.$$

В результате, для любого $\eta \geqslant 0$ в области $T_3(H_3, H_4)$ можно построить оценку

$$\Delta V_2\big|_{(1)} \leqslant -h\,\alpha_2(\eta, H_3, H_4) V_2^{\eta}(\mathbf{x}(k)), \tag{7}$$

где $\alpha_2(\eta, H_3, H_4)$ — положительная постоянная, зависящая от выбора величин η, H_3 и H_4.

Аналогичным образом можно найти неотрицательную постоянную $\beta_2(\eta, H_3, H_4)$, зависящую от выбора величин η, H_3 и H_4, такую, что при $h \in (0, h_2(H_3, H_4))$ в области $T_3(H_3, H_4)$ будет верна оценка

$$\Delta V_2\big|_{(2)} \leqslant h\,\beta_2(\eta, H_3, H_4) V_2^{\eta}(\mathbf{x}(k)). \tag{8}$$

Замечание 2. Коэффициенты $\alpha_1(H_1, H_2)$, $\beta_1(H_2)$, $\alpha_2(\eta, H_3, H_4)$, $\beta_2(\eta, H_3, H_4)$, присутствующие в неравенствах (4)–(8), а также величины $h_1(H_2)$, $h_2(H_3, H_4)$, могут быть несложным образом оценены при выбранных значениях H_1, H_2, H_3, H_4, η для конкретно заданного семейства подсистем (1), (2) в результате численного анализа.

3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим теперь гибридную систему, образованную подсистемами (1) и (2). Пусть дискретная функция $\sigma(k) : \{0, 1, \ldots\} \to \{1, 2\}$ определяет порядок переключения между этими подсистемами. Так, если $\sigma(k) = 1$, то считаем, что во время k-ой итерации гибридная система работает в плановом режиме (1), а если $\sigma(k) = 2$, то — в возмущённом режиме (2); $k = 0, 1, \ldots$.

Соотношения (4)–(8), установленные ранее для выбранных функций Ляпунова, позволяют получить оценки для решений гибридной системы в соответствующих областях положительного ортанта K_0^+.

Лемма. *Для любых η, y, x, таких что $\eta > 0$, $y > 0$ и $x < y^{-\eta+1}$, справедливы неравенства*

$$\big(y - xy^{\eta}\big)^{-\eta+1} \geqslant y^{-\eta+1} + (\eta - 1)x, \quad \textit{если} \quad \eta > 1,$$

и

$$\big(y - xy^{\eta}\big)^{-\eta+1} \leqslant y^{-\eta+1} + (\eta - 1)x, \quad \textit{если} \quad 0 < \eta < 1.$$

Доказательство. Выберем $\eta > 0$, $y > 0$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \big(y^{-\eta+1} + (\eta - 1)x\big)\big(y - xy^{\eta}\big)^{\eta-1}.$$

Имеем

$$\varphi'(x) = -\eta(\eta - 1)xy^{\eta}\big(y - xy^{\eta}\big)^{\eta-2}.$$

Если $\eta > 1$, то $\varphi'(x) > 0$ при $x < 0$ и $\varphi'(x) < 0$ при $0 < x < y^{-\eta+1}$, а значит

$$\max_{(-\infty,\, y^{-\eta+1})} \varphi(x) = \varphi(0) = 1.$$

Аналогично если $0 < \eta < 1$, то $\varphi'(x) < 0$ при $x < 0$ и $\varphi'(x) > 0$ при $0 < x < y^{-\eta+1}$, а значит,

$$\min_{(-\infty,\, y^{-\eta+1})} \varphi(x) = \varphi(0) = 1.$$

Лемма доказана. □

Пусть некоторые значения $0 < H_1 < \min\limits_{i=1,\ldots,n} \bar{x}_i$ и $H_2 > \|\bar{\mathbf{x}}\|$ выбраны, величина $h_1(H_2)$ определена и оценки (4), (5) в области $T_1(H_1, H_2)$ построены.

Положим: $\bar{\omega}_k(H_1, H_2) = \alpha_1(H_1, H_2)$, если $\sigma(k) = 1$, и $\bar{\omega}_k(H_1, H_2) = -\beta_1(H_2)$, если $\sigma(k) = 2$; $k = 0, 1, \ldots$.

Возьмём $k_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0 \in T_1(H_1, H_2)$ и рассмотрим решение $\mathbf{x}(k)$ гибридной системы (1), (2) такое, что $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$. Предположим, что при $k = k_0, \ldots, \tilde{k}$ решение $\mathbf{x}(k)$ остаётся в области $T_1(H_1, H_2)$. Тогда если $h \in (0, h_1(H_2))$, то при $k = k_0 + 1, \ldots, \tilde{k}$ будут справедливы оценки

$$V_1(\mathbf{x}(k)) \leqslant V_1(\mathbf{x}(k-1)) - h\bar{\omega}_{k-1}(H_1, H_2) \leqslant \ldots \leqslant V_1(\mathbf{x}_0) - h\sum_{i=k_0}^{k-1} \bar{\omega}_i(H_1, H_2). \tag{9}$$

Аналогично пусть некоторые значения $\eta \geqslant 0$, $H_4 > H_3 > \hat{H}$ выбраны, величина $h_2(H_3, H_4)$ определена и оценки (7), (8) в области $T_3(H_3, H_4)$ построены. Положим

$\widetilde{\omega}_k(\eta, H_3, H_4) = \alpha_2(\eta, H_3, H_4)$, если $\sigma(k) = 1$, и $\widetilde{\omega}_k(\eta, H_3, H_4) = -\beta_2(\eta, H_3, H_4)$, если $\sigma(k) = 2$; $k = 0, 1, \ldots$.

Возьмём $k_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0 \in T_3(H_3, H_4)$ и рассмотрим решение $\mathbf{x}(k)$ гибридной системы (1), (2) такое, что $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$. Предположим, что при $k = k_0, \ldots, \tilde{k}$ решение $\mathbf{x}(k)$ остаётся в области $T_3(H_3, H_4)$. Тогда, применяя лемму, нетрудно найти положительное $\bar{h}_2(\eta, H_3, H_4) \leqslant h_2(H_3, H_4)$ такое, что если $h \in (0, \bar{h}_2(\eta, H_3, H_4))$, то при $k = k_0 + 1, \ldots, \tilde{k}$ будут справедливы оценки

$$\begin{aligned} V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}(k)) &\geqslant \Big(V_2(\mathbf{x}(k-1)) - h\widetilde{\omega}_{k-1}(\eta, H_3, H_4)V_2^{\eta}(\mathbf{x}(k-1))\Big)^{-\eta+1} \geqslant \\ &\geqslant V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}(k-1)) + (\eta-1)h\widetilde{\omega}_{k-1}(\eta, H_3, H_4) \geqslant \ldots \geqslant \\ &\geqslant V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}_0) + (\eta-1)h\sum_{i=k_0}^{k-1}\widetilde{\omega}_i(\eta, H_3, H_4), \end{aligned} \tag{10}$$

если $\eta > 1$;

$$\begin{aligned} V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}(k)) &\leqslant \Big(V_2(\mathbf{x}(k-1)) - h\widetilde{\omega}_{k-1}(\eta, H_3, H_4)V_2^{\eta}(\mathbf{x}(k-1))\Big)^{-\eta+1} \leqslant \\ &\leqslant V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}(k-1)) + (\eta-1)h\widetilde{\omega}_{k-1}(\eta, H_3, H_4) \leqslant \ldots \leqslant \\ &\leqslant V_2^{-\eta+1}(\mathbf{x}_0) + (\eta-1)h\sum_{i=k_0}^{k-1}\widetilde{\omega}_i(\eta, H_3, H_4), \end{aligned} \tag{11}$$

если $0 \leqslant \eta < 1$;

$$V_2(\mathbf{x}(k)) \leqslant \Big(1 - h\widetilde{\omega}_{k-1}(1, H_3, H_4)\Big)V_2(\mathbf{x}(k-1)) \leqslant \ldots \leqslant \prod_{i=k_0}^{k-1}\Big(1 - h\widetilde{\omega}_i(1, H_3, H_4)\Big)V_2(\mathbf{x}_0), \tag{12}$$

если $\eta = 1$.

Учитывая конкретный вид используемых функций Ляпунова $V_1(\mathbf{z})$ и $V_2(\mathbf{z})$, неравенства (9)–(12) позволяют оценить значение $\|\mathbf{x}(k)\|$ в течение времени пребывания рассматриваемого решения $\mathbf{x}(k)$ гибридной системы в соответствующих областях положительного ортанта.

4. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

Будем теперь исследовать динамику решений гибридной системы (1), (2). Получим сначала достаточные условия предельной ограниченности решений системы с помощью функции Ляпунова $V_2(\mathbf{z})$.

Теорема 1. *Пусть для некоторых выбранных значений $H_4 > H_3 > \hat{H}$, $\eta \geqslant 0$ построены оценки* (7), (8) *и при этом справедливы следующие условия:*

1) существуют числа Δ_1 и Δ_2 такие, что

$$H_3 < B(H_3) < \Delta_2 < \Delta_1 < B(\Delta_1) < H_4, \tag{13}$$

где

$$B(s) = \max_{\mathbf{z} \in K_0^+:\ V_2(\mathbf{z}) = A(s)} \|\mathbf{z}\|, \quad A(s) = \max_{\mathbf{z} \in K_0^+:\ \|\mathbf{z}\| = s} V_2(\mathbf{z});$$

2) время пребывания (число последовательных итераций) гибридной системы в режиме (1) *ограничено снизу натуральным значением L_1, а время пребывания (число последовательных итераций) системы в режиме* (2) *ограничено сверху натуральным значением L_2, и выполнено соотношение*

$$-\alpha_2(\eta, H_3, H_4)L_1 + \beta_2(\eta, H_3, H_4)L_2 < 0. \tag{14}$$

Тогда найдётся такое $h_{01} > 0$*, что если* $h \in (0, h_{01})$ *и* $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \Delta_1$*, то можно указать* $K \geqslant 0$ *так, чтобы неравенство* $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant \Delta_2$ *имело место при всех* $k \geqslant k_0 + K$*. Здесь* $\mathbf{x}(k)$ *— решение гибридной системы* (1), (2)*, удовлетворяющее начальному условию* $\mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0$*;* $k_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0 \in K_0^+$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_0 \in T_3(H_3, H_4)$. Тогда, если $h \in (0, \bar{h}_2(\eta, H_3, H_4))$, то пока решение гибридной системы остаётся в области $T_3(H_3, H_4)$, будут выполнены оценки (10)–(12) (в зависимости от выбранного значения η).

Выбор величины Δ_1 согласно неравенствам (13), а также предположение об ограниченности времени пребывания системы в режиме (2) гарантируют существование значения $0 < h_{21}(\eta, H_3, H_4, \Delta_1, L_2) \leqslant \bar{h}_2(\eta, H_3, H_4)$ такого, что при $h \in (0, h_{21}(\eta, H_3, H_4, \Delta_1, L_2))$ и $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \Delta_1$ будет сохраняться условие $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant H_4$ при всех $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$ (т. е. решение гибридной системы не покинет область $T_3(H_3, H_4)$ через верхнюю границу $\|\mathbf{z}\| = H_4$).

С другой стороны, согласно условию (14) найдётся такое $\bar{k} \geqslant k_0$, что при $k = \bar{k}$ оценки (10)–(12) станут несовместными в области $T_3(H_3, H_4)$ (значит, решение гибридной системы в момент $k = \bar{k}$ покинет область $T_3(H_3, H_4)$ через нижнюю границу $\|\mathbf{z}\| = H_3$).

Наконец, выбор величины Δ_2 согласно неравенствам (13) с учётом предположения об ограниченности времени пребывания системы в режиме (2) гарантируют существование значения $0 < h_{22}(\eta, H_3, H_4, \Delta_2, L_2) \leqslant \bar{h}_2(\eta, H_3, H_4)$ такого, что при $h \in (0, h_{22}(\eta, H_3, H_4, \Delta_2, L_2))$ будет сохраняться условие $\|\mathbf{x}(k)\| \leqslant \Delta_2$ при всех $k \geqslant \bar{k}$ (т. е. решение гибридной системы, войдя в какой-то момент в область $T_2(\Delta_2)$, в дальнейшем её уже не покинет).

Полагая $h_{01} = \min\{h_{21}(\eta, H_3, H_4, \Delta_1, L_2);\, h_{22}(\eta, H_3, H_4, \Delta_2, L_2)\}$, приходим к требуемому. Теорема доказана. □

Замечание 3. Нетрудно проверить, что величина K в формулировке теоремы 1 может быть выбрана не зависящей от k_0, т. е. условия теоремы 1 обеспечивают равномерную предельную ограниченность решений.

Замечание 4. Неравенства (13) задают ограничения на выбор величин H_3 и H_4 (см. рис. 2). Можно заметить, что для существования величин Δ_1 и Δ_2, удовлетворяющих неравенствам (13), необходимо и достаточно, чтобы значения H_3 и H_4 были выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $B(B(H_3)) < H_4$.

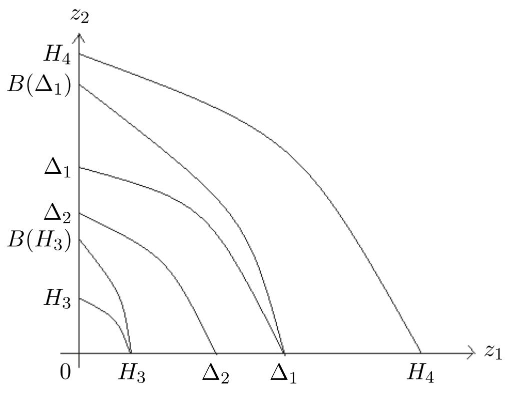


Рис. 2. Ограничения на выбор значений H_3 и H_4

Замечание 5. С помощью выбора величины η можно оптимизировать соотношение (14), найдя $\max\limits_{\eta \geqslant 0} \alpha_2(\eta, H_3, H_4)/\beta_2(\eta, H_3, H_4)$. Отметим, что условие 1) теоремы 1 не зависит от выбора η. Однако, от выбора η зависит оценка на предельное допустимое значение шага дискретизации h_{01}.

Замечание 6. Если функции $\tilde{f}_i(z_i) = f_i(e^{z_i})$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию Липшица на любом интервале $(-\infty, H]$ с константой Липшица $L > 0$, не зависящей от выбора H, то, полагая $H_4 = +\infty$, можно рассмотреть задачу о равномерной диссипативности гибридной системы (1), (2). Для этого достаточно сделать дополнительное предположение о существовании такого $\eta \geqslant 0$, для которого оценки (7), (8) будут справедливы в области $T_3(H_3, +\infty)$. В этом случае в условиях теоремы 1 можно выбрать $\Delta_1 = +\infty$.

Привлечём теперь для динамического анализа функцию Ляпунова $V_1(\mathbf{z})$, чтобы гарантировать перманентность гибридной системы (1), (2).

Теорема 2. *Пусть время пребывания (число последовательных итераций) гибридной системы в режиме* (1) *ограничено снизу натуральным значением* L_1, *а время пребывания (число последовательных итераций) системы в режиме* (2) *ограничено сверху натуральным значением* L_2, *и справедливы следующие условия:*

1) для некоторых выбранных значений $H_4 > H_3 > \hat{H}$, $\eta \geqslant 0$ *построены оценки* (7), (8), *и при этом существуют числа* Δ_1 *и* Δ_2, *удовлетворяющие неравенствам* (13), *а также верно соотношение* (14);

2) для некоторого $0 < H_1 < \min\limits_{i=1,\dots,n} \bar{x}_i$ *и* $H_2 = \Delta_2$ *построены оценки* (4), (5) *и при этом*

$$-\alpha_1(H_1, \Delta_2)L_1 + \beta_1(\Delta_2)L_2 < 0. \tag{15}$$

Тогда для любой константы $C > 0$ *можно найти* $h_{02} > 0$ *так, что если* $h \in (0, h_{02})$, *то будет существовать* $N \geqslant 0$ *такое, что любое решение гибридной системы* (1), (2), *начинающееся в области* $T_2(\Delta_1)$, *не позднее* N*-ой итерации войдёт в область*

$$G = \big\{\mathbf{z} \in K_0^+ : \ V_1(\mathbf{z}) \leqslant D(H_1) + C\big\} \cap T_2(\Delta_2),$$

где $D(H_1) = \max\limits_{\mathbf{z}\in K_0^+ :\ \|\mathbf{z}-\bar{\mathbf{x}}\|=H_1} V_1(\mathbf{z})$, *и далее её не покинет.*

Доказательство. Согласно теореме 1, при $h \in (0, h_{01})$ любое решение системы (1), (2), начинающееся в области $T_2(\Delta_1)$, в какой-то момент войдёт в область $T_2(\Delta_2)$ и более её не покинет. Условие (15), с учётом оценки (9), гарантирует, что если $h \in (0, h_1(\Delta_2))$, то в какой-то момент решение войдёт в H_1-окрестность точки $\bar{\mathbf{x}}$. Наконец, шаг дискретизации можно выбрать настолько малым, чтобы решения, начинающиеся в H_1-окрестности точки $\bar{\mathbf{x}}$, не выпрыгивали за пределы области G за L_2 итераций. Теорема доказана. □

Замечание 7. Применение функции Ляпунова $V_2(\mathbf{z})$ позволяет загнать решения гибридной системы (1), (2), начинающиеся в области $T_2(\Delta_1)$ в область $T_2(\Delta_2)$ (гарантировать их предельную ограниченность). А применение функции Ляпунова $V_1(\mathbf{z})$ позволяет в дальнейшем загнать решения в некоторую окрестность G точки $\bar{\mathbf{x}}$ (гарантировать перманентность системы). Размеры окрестности G, ограничения на величины L_1 и L_2, а также оценку допустимого шага дискретизации, можно регулировать за счёт выбора констант C, H_1, H_3, H_4, η, Δ_1, Δ_2. На рис. 3 изображена схема поведения решений системы, обеспечивающегося теоремой 2. Отметим, что с помощью только одной из функций Ляпунова $V_1(\mathbf{z})$ или $V_2(\mathbf{z})$ гарантировать перманентность системы при сделанных предположениях не удастся.

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим систему вида (1), описывающую взаимодействие двух ($n = 2$) популяций в биологическом сообществе

$$\begin{gathered} x_1(k+1) = x_1(k)\exp\Big(h\big(-1 - x_1(k) + 2x_2(k)\big)\Big), \\ x_2(k+1) = x_2(k)\exp\Big(h\big(3 - 2x_1(k) - x_2(k)\big)\Big). \end{gathered} \tag{16}$$

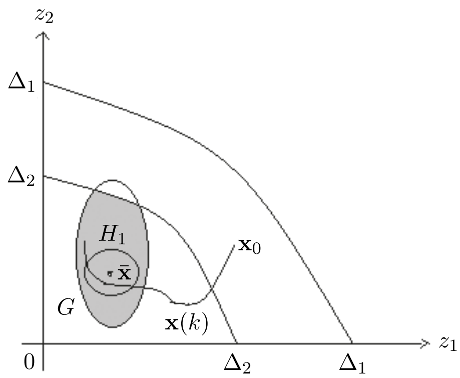


Рис. 3. Динамика решений гибридной системы

Здесь $f_i(z_i) = z_i$, $i = 1, 2$. Система (16) имеет положение равновесия $\bar{\mathbf{x}} = (1, 1)^T \in K_0^+$.

Предположим, что возмущённая система (2) представлена в форме

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) \exp\Big(h\big(-\cos(k) + \cos(k)\,x_1(k) + 2\sin(k)\,x_2(k)\big)\Big), \\ x_2(k+1) &= x_2(k) \exp\Big(h\big(3\cos(k) - 2\sin(k)\,x_1(k) + \cos(k)\,x_2(k)\big)\Big). \end{aligned} \tag{17}$$

Выберем $\Lambda = \operatorname{diag}\{1,\,1\}$ и построим функции Ляпунова

$$V_1(\mathbf{z}) = z_1 - \ln z_1 + z_2 - \ln z_2 - 2, \quad V_2(\mathbf{z}) = z_1 + z_2 - 2.$$

Зададим $H_3 = 4$. Тогда $B(H_3) = 4\sqrt{2}$, и потому можно взять, например, $\Delta_2 = 6$, $\Delta_1 = 10$. Получим $B(\Delta_1) = 10\sqrt{2}$, и следовательно, для выполнения неравенств (13) достаточно положить $H_4 = 15$.

Для $\eta = 2$ при достаточно малом шаге дискретизации h в области $T_3(4, 15)$ придём к оценкам

$$V_2(\mathbf{z}) > 0, \quad \Delta V_2\big|_{(16)} \leqslant -0.15\,h\,V_2^2(\mathbf{x}(k)), \quad \Delta V_2\big|_{(17)} \leqslant 7.1\,h\,V_2^2(\mathbf{x}(k)).$$

Согласно теореме 1, если выполнено неравенство

$$-0.15L_1 + 7.1L_2 < 0, \tag{18}$$

то решения исследуемой гибридной системы, состоящей из подсистем (16) и (17), начинающиеся в области $T_2(10)$, в какой-то момент времени попадут в область $T_2(6)$ и более из неё не выйдут. Таким образом, указанные решения системы будут предельно ограниченными.

Возьмём теперь $H_1 = 0.75$. При достаточно малом шаге дискретизации h в области $T_1(0.75, 6)$ получим оценки

$$\Delta V_1\big|_{(16)} \leqslant -0.56\,h, \quad \Delta V_1\big|_{(17)} \leqslant 53\,h.$$

Значит, если, в дополнение к неравенству (18), выполнено соотношение

$$-0.56L_1 + 53L_2 < 0, \tag{19}$$

то согласно теореме 2 изучаемая гибридная система будет перманентной для решений, начинающихся в области $T_2(10)$. Отметим, что неравенство (18) вытекает из неравенства (19). Таким образом, условие (19) будет гарантировать невымирание рассматриваемых популяций и их ограниченную численность. Более того, с помощью теоремы 2 можно оценить границы для предельных численностей этих популяций. Наилучшей точности оценок можно добиться путём численного перебора возможных значений параметров H_1, H_3, H_4, Δ_1, Δ_2, η.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были получены ограничения на закон переключения между плановым и возмущённым режимами функционирования заданной дискретной динамической системы, гарантирующие предельную ограниченность решений системы и её перманентность. Для решения поставленной задачи использовался прямой метод Ляпунова. Поскольку для неоднородных систем оценки на выбранную функцию Ляпунова, как правило, существенно зависят от рассматриваемой области фазового пространства, бывает целесообразно разбить фазовое пространство на части и в каждой из частей использовать свои оценки. Возможно даже в каждой из частей строить свою функцию Ляпунова. В настоящей работе к анализу были привлечены две функции Ляпунова. Было отмечено, что лишь совместное применение этих функций приводит к желаемому результату. Полученные в работе соотношения связывают между собой ограничения на закон переключения, размеры области начальных значений решений, размеры области предельного пребывания решений, величину шага дискретизации. Эти соотношения определяются выбором некоторых вспомогательных параметров, что позволяет формулировать задачи по оптимизации данного выбора.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Санкт-Петербургского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hofbauer J., Sigmund K.* Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
2. *Kazkurewicz E., Bhaya A.* Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation. Boston: Birkhauser, 1999.
3. *Пых Ю. А.* Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. М.: Наука, 1983.
4. *Hofbauer J., Hutson V., Jansen W.* Coexistence for systems governed by difference equations of Lotka—Volterra type // J. Math. Biol. 1987. V. 25, N 5. P. 553–570; DOI: 10.1007/BF00276199
5. *Chen F. D.* Permanence and global attractivity of a discrete multispecies Lotka—Volterra competition predator-prey systems // Appl. Math. Comput. 2006. V. 182, N 1. P. 3–12; DOI: 10.1016/j.amc.2006.03.026
6. *Lu Z., Wang W.* Permanence and global attractivity for Lotka—Volterra difference systems // J. Math. Biol. 1999. V. 39, N 3. P. 269–282; DOI: 10.1007/s002850050171
7. *Перцев Н. В., Пичугин Б. Ю., Логинов К. К.* Статистическое моделирование динамики популяций, развивающихся в условиях воздействия токсичных веществ // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 2. С. 84–94.
8. *Capone F., De Luca R., Rionero S.* On the stability of non-autonomous perturbed Lotka—Volterra models // Appl. Math. Comput. 2013. V. 219, N 12. P. 6868–6881; DOI: 10.1016/j.amc.2013.01.003
9. *Li L., Wang Zh.-J.* Global stability of periodic solutions for a discrete predator-prey system with functional response // Nonlinear Dynamics. 2013. V. 72, N 3. P. 507–516; DOI: 10.1007/s11071-012-0730-6
10. *Chakraborty K., Haldar S., Kar T. K.* Global stability and bifurcation analysis of a delay induced prey-predator system with stage structure // Nonlinear Dyn. 2013. V. 73, N 3. P. 1307–1325; DOI: 10.1007/s11071-013-0864-1

11. *Balbus J.* Permanence in nonautonomous competitive systems with nonlocal dispersal // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 447, N 1. P. 564–578; DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.10.030
12. *Bao J., Mao X., Yin G., Yuan C.* Competitive Lotka—Volterra population dynamics with jumps // Nonlinear Anal. 2011. V. 74, N 17. P. 6601–6616; DOI: 10.1016/j.na.2011.06.043
13. *Hu H., Wang K., Wu D.* Permanence and global stability for nonautonomous N-species Lotka—Volterra competitive system with impulses and infinite delays // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 377, N 1. P. 145–160; DOI: 10.1016/j.jmaa.2010.10.031
14. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhauser, 2003.
15. *Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A. N.* Disturbance attention properties of time-controlled switched systems // J. Franklin Inst. 2001. V. 338, N 7. P. 765–779; DOI: 10.1016/S0016-0032(01)00030-8
16. *Zu L., Jiang D., O'Regan D.* Conditions for persistence and ergodicity of a stochastic Lotka—Volterra predator-prey model with regime switching // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 29, N 1–3. P. 1–11; DOI: 10.1016/j.cnsns.2015.04.008
17. *Aleksandrov A. Yu., Chen Y., Platonov A. V., Zhang L.* Stability analysis and uniform ultimate boundedness control synthesis for a class of nonlinear switched difference systems // J. Differ. Equ. Appl. 2012. V. 18, N 9. P. 1545–1561; DOI: 10.1080/10236198.2011.581665
18. *Platonov A. V.* On the global asymptotic stability and ultimate boundedness for a class of nonlinear switched systems // Nonlinear Dyn. 2018. V. 92, N 4. P. 1555–1565; DOI: 10.1007/s11071-018-4146-9
19. *Wang S., Wu W., Lu J., She Zh.* Inner-approximating domains of attraction for discrete-time switched systems via multi-step multiple Lyapunov-like functions // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 2021. V. 40. Article 100993; DOI: 10.1016/j.nahs.2020.100993
20. *Platonov A. V.* Analysis of the dynamical behavior of solutions for a class of hybrid generalized Lotka—Volterra models // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2023. V. 119. Article 107068; DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.107068

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.962

ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF SOLUTIONS FOR HYBRID DIFFERENCE LOTKA—VOLTERRA SYSTEMS

© 2024 A. V. Platonov

St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia

E-mail: a.platonov@spbu.ru

Received 28.06.2023, revised 04.09.2024, accepted 06.11.2024

Abstract. A difference system of the Lotka—Volterra type is considered. It is assumed that this system can operate both in some program and perturbed modes. The restrictions on the time of the system's stay in these modes, providing the desired dynamical behavior, are investigated. In particular, the conditions of the ultimate boundedness of solutions and the permanence of the system are obtained. The direct Lyapunov method is used, and different Lyapunov functions are constructed in different parts of the phase space. The sizes of the domain of permissible initial values of solutions and the domain of the ultimate bound of solutions corresponding to the required dynamics of the system are estimated. Constraints are set on the size of the digitization step of the system.

Keywords: Lotka—Volterra systems, switching, ultimate boundedness of solutions, permanence.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.407

REFERENCES

1. J. Hofbauer and K. Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).
2. E. Kazkurewicz and A. Bhaya, *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation* (Birkhäuser, Boston, 1999).
3. Yu. A. Pykh, *Equilibrium and Stability in Population Dynamics Models* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
4. J. Hofbauer, V. Hutson, and W. Jansen, "Coexistence for systems governed by difference equations of Lotka–Volterra type," J. Math. Biol. **25** (5), 553–570 (1987). https://doi.org/10.1007/BF00276199
5. F. D. Chen, "Permanence and global attractivity of a discrete multispecies Lotka–Volterra competition predator-prey systems," Appl. Math. Comput. **182** (1), 3–12 (2006). https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.03.026
6. Z. Lu and W.Wang, "Permanence and global attractivity for Lotka—Volterra difference systems," J. Math. Biol. **39** (3), 269–282 (1999). https://doi.org/10.1007/s002850050171
7. N. V. Pertsev, B. Yu. Pichugin, and K. K. Loginov, "Statistical modeling of population dynamics developing under the influence of toxic substances," Sib. Zh. Ind. Mat. **14** (2), 84–94 (2011) [in Russian].
8. F. Capone, R. De Luca, and S. Rionero, "On the stability of non-autonomous perturbed Lotka—Volterra models," Appl. Math. Comput. **219** (12), 6868–6881 (2013). https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.01.003
9. L. Li and Zh.-J. Wang, "Global stability of periodic solutions for a discrete predator—prey system with functional response," Nonlinear Dyn. **72** (3), 507–516 (2013). https://doi.org/10.1007/s11071-012-0730-6

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 813–824.

10. K. Chakraborty, S. Haldar, and T. K. Kar, "Global stability and bifurcation analysis of a delay induced prey-predator system with stage structure," Nonlinear Dyn. **73** (3), 1307–1325 (2013). https://doi.org/10.1007/s11071-013-0864-1
11. J. Balbus, "Permanence in nonautonomous competitive systems with nonlocal dispersal," J. Math. Anal. Appl. **447** (1), 564–578 (2017). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.10.030
12. J. Bao, X. Mao, G. Yin, and C. Yuan, "Competitive Lotka—Volterra population dynamics with jumps," Nonlinear Anal. **74** (17), 6601–6616 (2011). https://doi.org/10.1016/j.na.2011.06.043
13. H. Hu, K. Wang, and D. Wu, "Permanence and global stability for nonautonomous N-species Lotka—Volterra competitive system with impulses and infinite delays," J. Math. Anal. Appl. **377** (1), 145–160 (2011). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.10.031
14. D. Liberzon, *Switching in Systems and Control* (Birkhäuser, Boston, 2003).
15. G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, and A. N. Michel, "Disturbance attention properties of time-controlled switched systems," J. Franklin Inst. **338** (7), 765–779 (2001). https://doi.org/10.1016/S0016-0032(01)00030-8
16. L. Zu, D. Jiang, and D. O'Regan, "Conditions for persistence and ergodicity of a stochastic Lotka—Volterra predator-prey model with regime switching," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **29** (1–3), 1–11 (2015). https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.04.008
17. A. Yu. Aleksandrov, Y. Chen, A. V. Platonov, and L. Zhang, "Stability analysis and uniform ultimate boundedness control synthesis for a class of nonlinear switched difference systems," J. Differ. Equ. Appl. **18** (9), 1545–1561 (2012). https://doi.org/10.1080/10236198.2011.581665
18. A. V. Platonov, "On the global asymptotic stability and ultimate boundedness for a class of nonlinear switched systems," Nonlinear Dyn. **92** (4), 1555–1565 (2018). https://doi.org/10.1007/s11071-018-4146-9
19. S. Wang, W. Wu, J. Lu, and Zh. She, "Inner-approximating domains of attraction for discrete-time switched systems via multi-step multiple Lyapunov-like functions," Nonlinear Anal. Hybrid Syst. **40**, 100993 (2021). https://doi.org/10.1016/j.nahs.2020.100993
20. A. V. Platonov, "Analysis of the dynamical behavior of solutions for a class of hybrid generalized Lotka—Volterra models," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **119**, 107068 (2023). https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.107068

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 4. С. 113–129

УДК 517.44:517.95

ЧИСЛЕННАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ДВУМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПО ЛУЧЕВЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ЕГО МОМЕНТОВ

© 2024 И. Е. Светов[1,2a], Е. Ю. Деревцов[1,2b], С. В. Мальцева[1,2c], А. П. Полякова[1,2d]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]dert@math.nsc.ru, [c]sv_maltseva@mail.ru, [d]apolyakova@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 07.05.2024 г.; после доработки 28.11.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

В работе предложены и обоснованы алгоритмы восстановления векторного поля по известным продольным или поперечным лучевым преобразованиям его моментов. Исследованы свойства нескольких алгоритмов в зависимости от степени дискретизации данных, уровня и характера внесённого в данные шума, гладкости векторного поля и степени связности его носителя. Вычислительные эксперименты показали хорошие результаты восстановления векторных полей по лучевым преобразованиям их моментов.

Ключевые слова: векторное поле, лучевое преобразование моментов, дифференциальное свойство лучевых преобразований, алгоритм реконструкции, аппроксимация, численный эксперимент.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.408

ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Преобразование Радона $\mathcal{R}$ [1] функции $\varphi(x)$, $x=(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2$, $\theta\in[0,2\pi)$, $s\in\mathbb{R}$,

$$(\mathcal{R}\varphi)(\xi,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(s\xi(\theta)+t\eta(\theta))dt, \tag{1}$$

порождает многочисленные интегральные операторы, представляющее собой математическое описание механизма сбора исходных данных в в более общих моделях эмиссионной, тензорной, рефракционной томографии и интегральной геометрии [2–6].

В определении (1) использованы обозначения $\xi=(\xi^1,\xi^2)=(\cos\theta,\sin\theta)$, $\xi^\perp=\eta=(\eta^1,\eta^2)=(-\sin\theta,\cos\theta)$ для нормального и направляющего векторов прямая $L_{\xi,s}\in\mathbb{R}^2$, вдоль которой осуществляется интегрирование, задаётся параметрическим $x=s\xi+t\eta$ и нормальным $\langle\xi,x\rangle-s=0$ уравнениями. Здесь $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Через B, ∂B обозначаем единичный (открытый) круг и единичную окружность.

В модели 2D томографии симметричных тензорных полей [5] в качестве исходных данных выступают значения лучевых преобразований $\mathcal{P}_m^{(j)}$, m целое, $m\geqslant 0$, $j=0,\dots,m$, действующих на симметричные m-тензорные поля $w(x)$, $x=s\xi+t\eta$ и переводящих их в функции $g_m^{(j)}(\xi(\theta),s)$:

$$(\mathcal{P}_m^{(j)}w)(\xi,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}w_{i_1\dots i_m}(x)\xi^{i_1}\dots\xi^{i_j}\eta^{i_{j+1}}\dots\eta^{i_m}dt=g_m^{(j)}(\xi,s). \tag{2}$$

В (2) и далее используется правило Эйнштейна, состоящее в том, что по повторяющимся сверху и снизу одноимённым индексам производится суммирование от 1 до 2.

Лучевые преобразования моментов тензорных полей отличаются от лучевых преобразований (2) наличием под интегралом множителя t^k:

$$(\mathcal{P}^{(j)}_{km}w)(\xi,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k w_{i_1\dots i_m}(x)\xi^{i_1}\dots\xi^{i_j}\eta^{i_{j+1}}\dots\eta^{i_m}dt=g^{(j)}_{km}(\xi,s), \tag{3}$$

$x=s\xi+t\eta$, η, $\xi\in\mathbb{S}^1$, $w(x)$ — заданное в B тензорное поле ранга m, $\operatorname{supp}w\subset\bar{B}$. Индекс (j) отвечает за количество компонент нормального вектора в определении (3), индекс m — ранг тензорного поля, k — порядок моментов в (3). Продольные лучевые преобразования моментов симметричных тензорных полей, заданных в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности, введены в [3]. Показано, что симметричное тензорное поле ранга m однозначно определяется по первым $(m+1)$-м продольным лучевым преобразованиям его моментов. В терминах нашего определения (3), имеем

$$(\mathcal{P}^{(0)}_{km}w)(\xi,s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k w_{i_1\dots i_m}(x)\eta^{i_1}\dots\eta^{i_m}dt=g^{(0)}_{km}(\xi,s).$$

Лучевым преобразованиям моментов тензорных полей в последние несколько лет посвящено довольно много работ, в большей части которых исследуются традиционные вопросы реконструкции тензорных полей ранга m, заданных на римановых многообразиях или евклидовых пространствах, по их известным продольным лучевым преобразованиям моментов, см., например, [7–10]. В частности, получены формулы Решетняка, оценки устойчивости в нормах весовых соболевских пространств. Описаны образы лучевых преобразований моментов, доказаны теоремы единственности по данным веерной схемы наблюдений и инъективность лучевых преобразований моментов тензорных полей, заданных в римановых многообразиях с простой метрикой. Предложено оригинальное разложение произвольного m-тензорного поля в $\mathbb{R}^n$, позволившее описать ядра и образы лучевых преобразований моментов в терминах уравнений Йона. В работе [11] техника лучевых преобразований моментов симметричных тензорных полей используется при исследовании обратной задачи для полигармонического оператора с возмущением по данным отображения Дирихле—Неймана на части границы (обратной задачи типа Кальдерона). Заметим, что практически во всех работах в качестве данных используются продольные лучевые преобразования моментов симметричных тензорных полей.

Существенно меньше работ, в которых предлагаются формулы или процедуры обращения, конструктивные методы и алгоритмы решения задач восстановления тензорных полей по лучевым преобразованиям их моментов. Так, работа [7] содержит алгоритм восстановления заданного в $\mathbb{R}^n$ симметричного тензорного поля ранга m по его известным $m+1$ продольным лучевым преобразованиям с весом t^k, $k=0,\dots,m+1$. Приведён частный случай алгоритма при $n=2$. В [12] разработан итеративный способ обращения лучевых преобразований с весами t^k, $k=0,\dots,m$, симметричных тензорных полей, заданных в $\mathbb{R}^n$. Предложена концепция частичных преобразований моментов, которая успешно использована в процедуре обращения. Работа [13] посвящена обоснованию алгоритма восстановления двумерного симметричного m-тензорного поля по лучевым преобразованиям его моментов. Существенное место при обращении занимает техника A-аналитических функций. В двух работах, также при $n=2$, предложены относительно простые алгоритмы восстановления векторного поля [9] по продольным лучевым преобразованиям моментов; векторного и симметричного 2-тензорного поля [14] по лучевым преобразованиям любого типа — продольным, поперечным или смешанным — моментов векторного или симметричного 2 тензорного поля.

Насколько известно авторам, до сих пор не имеется ни одной работы, в которой были бы приведены численные эксперименты по восстановлению тензорных полей малого ранга по известным лучевым преобразованиям их моментов. Целью данной статьи, которую можно трактовать как продолжение работы [14], является не только дальнейшее развитие численных методов и алгоритмов, направленных на восстановление векторного поля по его лучевым преобразованиям моментов, но и сравнительное исследование нескольких подходов методом вычислительных экспериментов. Более того, проводится сравнение алгоритмов восстановления векторного поля, основанных на известных ранее методах и инструментах [5] с данными в форме продольных и поперечных лучевых преобразований, и предлагаемым в настоящей работе алгоритмам к восстановлению векторного поля по его известным лучевым преобразованиям моментов.

В секции 1 рассматриваются лучевые преобразования моментов векторных полей. Установленные в [5, 14] дифференциальные свойства и связи общего характера между лучевыми преобразованиями моментов, детализируются. На основе полученного в [14] результата о том, что векторное поле однозначно восстанавливается по продольным или поперечным лучевым преобразованиям с весом t^k, $k = 0, 1$, в секции 2 разработаны алгоритмы восстановления векторных полей, основанных на дифференциальных свойствах и связях между лучевыми преобразованиями моментов векторных полей. В секции 3 приводятся результаты вычислительных экспериментов, направленные на изучение влияния степени связности носителя поля и его гладкости, дискретизации данных, уровня и характера внесённого в них шума на точность реконструкции. Проведено сравнение результатов тестов с результатами, полученными в ходе исследований ранее разработанных и хорошо себя зарекомендовавших алгоритмов решения задач векторной томографии с данными в форме значений продольных и поперечных лучевых преобразований [5].

Напомним определения некоторых множеств и функциональных пространств.

$\mathbb{S}^1$ — множество векторов единичной длины, $\mathbb{S}^1 = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| = 1\}$;

$S^1(B)$ — множество заданных в B векторных полей;

$C^l(B)$ — пространства непрерывно дифференцируемых вместе со своими производными до порядка l функций, определённых в B функций;

$L_2(B)$ — пространство интегрируемых с квадратом в B функций;

$H^l(B)$ ($H^l_0(B)$) — соболевское пространство интегрируемых с квадратом, вместе со своими производными вплоть до порядка l, l целое, $l \geqslant 0$, заданных в B функций (обращающихся в нуль на границе ∂B вместе со своими производными вплоть до порядка $l-1$), $H^0(B) \equiv L_2(B)$.

Введённые определения пространств легко переносятся на пространства векторных полей путём их применения по отношению к каждой компоненте. Это пространства $H^l(S^1(B))$, $H^l_0(S^1(B))$, где l, m целые, $l, m \geqslant 0$. В дальнейшем символ круга B в обозначениях перечисленных гильбертовых пространств будет опускаться.

Зафиксируем **ограничения и соглашения**, которые принимаются в используемой в рамках настоящей работы модели скалярной и векторной томографии.

1. Источники физического поля и его приёмники сосредоточены на единичной окружности, т.е. система наблюдения соответствует модели трансмиссионной томографии.

2. Носитель скалярного (векторного) поля отделён от системы наблюдения, $\operatorname{supp} f (\operatorname{supp} w) \subset B$. Напомним, что B — открытый круг.

3. Скалярное f (векторное w) поле допускает разрывы первого рода, в том числе на части или на всей границе носителя $\operatorname{supp} f$ $(\operatorname{supp} w)$.

4. Вне носителя, в том числе и на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus B$, функция f (векторное поле w) обращается в нуль.

Перечисленные условия представляются естественными при организации сбора данных в рамках трансмиссионной томографии и ограничений, вытекающих из физических соображений и природы изучаемых объектов.

Приведём строгое описание пространства (разрывных) функций и векторных полей, соответствующих рассматриваемой нами модели томографии. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^2$, такая что $\overline{D} \subset B$, состоит из конечного числа непересекающихся подобластей $\{D_i\}$, $i = 1,\ldots,N$. Объединение $D_0 = \cup D_i$ подобластей плотно в $\overline{D}$, а их границы кусочно-непрерывны. Отметим, что $\partial D \subset \partial D_0$, а граница ∂D_0 совпадает с объединением границ $\cup D_i$ подобластей D_i, $i = 1,\ldots,N$.

Пусть функция (скалярное поле) $\varphi(x^1, x^2)$ класса C^k, k целое, $k \geqslant -1$, определена в B, причём она обращается в 0 на множестве $B \setminus \overline{D} \neq \emptyset$, а её носитель совпадёт с замыканием D, $\operatorname{supp}\varphi = \overline{D}$. Вне круга B функция продолжена нулём. В точках $x \in D$ функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема. В точках $(x^1, x^2) \in \partial D_0$ она непрерывно дифференцируема до k-го порядка включительно, причём при $x \in \partial D$ функция φ и все её производные до k-го порядка включительно обращаются в 0. В силу своей гладкости в области D функция φ обладает частными производными любого порядка. Что касается точек, принадлежащих ∂D_0, то в них все частные производные $\frac{\partial^l \varphi}{\partial(x^1)^j \partial(x^2)^{l-j}}$, $l = 0, \ldots, k$, $j \leqslant l$, до порядка k включительно, непрерывны, а производные порядка $k+1$ терпят разрыв 1-го рода. Иными словами, если функция f терпит разрыв первого рода в точках $x \in \partial D_0$, то мы полагаем $k = -1$ и пишем $f \in C^{-1}(B)$. Будем говорить, что функция φ является *потенциалом гладкости* k, $\varphi \in \mathcal{C}^k$, или *$\mathcal{C}^k$-потенциалом*, $k \geqslant -1$, в $\mathbb{R}^2$. Легко видеть, что $\mathcal{C}^k$-потенциалы образуют функциональное пространство.

Наряду с $\mathcal{C}^k$-потенциалами введём, аналогичным образом, $\mathcal{C}^k$-векторные в $\mathbb{R}^2$ поля $u(x) = \big(u_1(x), u_2(x)\big)$. Именно, $\mathcal{C}^k$-векторные в $\mathbb{R}^2$ поля — это поля, каждая компонента которых является $\mathcal{C}^k$-потенциалом в $\mathbb{R}^2$. Пространство $\mathcal{C}^k$-векторных в $\mathbb{R}^2$ полей будем обозначать $\mathcal{C}^k(S^1(B))$. Ниже обозначение B единичного круга в обозначениях функциональных пространств опускается.

В качестве переменных образов лучевых преобразований используются пары ξ, s либо θ, s для образов $g_m^{(j)}(\xi, s)$ $(g_m^{(j)}(\theta, s))$, $j = 0, 1$, $m = 1$, операторов лучевых преобразований; образов $g_{km}^{(j)}(\xi, s)$ $(g_{km}^{(j)}(\theta, s))$ при $j = 0, 1$, $m = 1$, k целое, $k \geqslant 0$, операторов лучевых преобразований моментов.

В заключение параграфа приведём конструкции векторных полей и операторы, действующие на них. Рассматриваются векторные поля $w, u, v \in \mathcal{C}^l(S^1)$.

Операторы ∇, $\nabla^\perp : H_0^l(B) \to H^{l-1}(S^1(B))$, $l \geqslant 1$, действуют на функцию $\varphi \in H_0^l(B)$, $l \geqslant 1$, и дают векторные поля u, $v \in H^{l-1}(S^1(B))$ по следующим правилам:

$$u := \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\right), \quad v := \nabla^\perp\varphi = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right).$$

Дивергенция $\delta : H_0^l(S^1(B)) \to H^{l-1}(B)$, $l \geqslant 1$ действует на векторное поле w по формуле

$$\delta w = \frac{\partial w_1}{\partial x^1} + \frac{\partial w_2}{\partial x^2}.$$

Векторное поле $w \in H^l(S^1(B))$ называется *потенциальным*, если существует функция $\varphi \in H^{l+1}(B)$ такая, что $w = \nabla\varphi$. Векторное поле $w \in H^l(S^1(B))$ называется *соленоидальным*, если $\delta w = 0$. Нетрудно проверить, что поле $\nabla^\perp\psi$ является соленоидальным для $\psi \in H^{l+1}(B)$. Потенциальное поле ∇h называется *гармоническим*, если $\delta(\nabla h) = \triangle h = 0$.

Известно [5, 15], что любое векторное поле $w \in H^l(S^1(B))$ единственным образом представимо в виде

$$w = \nabla\varphi + \nabla h + \nabla^\perp\psi, \quad \varphi, \psi \in H_0^1(B), \quad \triangle h = 0.$$

В силу ограничений и соглашений, в настоящей работе рассматриваются векторные поля без гармонической части.

1. ЛУЧЕВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОМЕНТОВ

Рассматривая (3) при $j = m = 0$, получаем преобразование Радона с весом t^k, $k \geqslant 0$:

$$(\mathcal{R}_k\varphi)(\xi, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k \varphi(s\xi + t\eta)dt = g^{(0)}_{k0}(\xi, s),$$

которое при $k = 0$ совпадает с преобразованием Радона (1).

При $m = 1$, $j = 0, 1$, $k \geqslant 0$ приходим к лучевым преобразованиям с весом $\mathcal{P}^{(j)}_{k1}$ векторного поля $w = (w_1, w_2)$: продольному (при $j = 0$) и поперечному (при $j = 1$)

$$(\mathcal{P}^{(0)}_{k1}w)(\xi, s)= \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k w_i \eta^i dt = g^{(0)}_{k1}(\xi, s), \quad (\mathcal{P}^{(1)}_{k1}w)(\xi, s)= \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k w_i \xi^i dt = g^{(1)}_{k1}(\xi, s). \tag{4}$$

При $k = 0$ получаем продольные и поперечные лучевые преобразования векторных полей [5]. Непосредственная проверка показывает, что эти лучевые преобразования нечётны по совокупности своих переменных, то есть $g^{(j)}_1(-\xi, -s) = -g^{(j)}_1(\xi, s)$, $j = 0, 1$, или $g^{(j)}_1(\theta + \pi, -s) = -g^{(j)}_1(\theta, s)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\int\limits_0^{2\pi} g^{(j)}_{k1}(\xi(\theta), s)\, d\theta = 0, \quad j = 0, 1.$$

Значения лучевых преобразований представляют собой исходные данные для задач векторной томографии, состоящих в реконструкции векторного поля w по продольному и поперечному лучевым преобразованиям; его соленоидальной (по продольному преобразованию) или потенциальной (по поперечному преобразованию) части.

Напомним, что прямая $L_{\xi,s}$ задаётся нормальным $x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta - s = 0$ или параметрическими уравнениями $x^1 = s\cos\theta - t\sin\theta$, $x^2 = s\sin\theta + t\cos\theta$. Здесь $\xi(\xi^1, \xi^2) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\eta(\eta^1, \eta^2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Отсюда следует, что

$$\begin{gathered}\cos\theta = \xi^1 = \eta^2 = \frac{\partial x^1}{\partial s} = \frac{dx^2}{dt}, \quad \sin\theta = \xi^2 = -\eta^1 = \frac{\partial x^2}{\partial s} = -\frac{dx^1}{dt}, \\ \frac{\partial x^1}{\partial\theta} = s(-\sin\theta) - t\cos\theta = s\eta^1 - t\xi^1, \quad \frac{\partial x^2}{\partial\theta} = s\cos\theta - t\sin\theta = s\eta^2 - t\xi^2.\end{gathered} \tag{5}$$

Предположим, что зависящая от t функция $\varphi(x(t;\theta, s)) \in \mathcal{C}^1$ с параметрами θ, s такова, что $x = s\xi + t\eta$ и $\varphi\big|_{\partial B} = 0$. Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \Big\langle\nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\Big\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\xi^2 = \langle\nabla\varphi, \xi\rangle = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\eta^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\eta^2 = \langle\nabla^\perp\varphi, \eta\rangle.$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Big\langle\nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial t}\Big\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\eta^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\eta^2 = \langle\nabla\varphi, \eta\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\xi^1 - \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\xi^2 = -\langle\nabla^\perp\varphi, \xi\rangle.$$

Результаты дифференцирования функции φ по параметрам s, θ сформулируем в виде следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x) \in C^1$, и $x = s\xi + t\eta$, $s, t \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in \mathbb{S}^1$. Тогда*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \langle\nabla\varphi, \xi\rangle = \langle\nabla^\perp\varphi, \eta\rangle, \tag{6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = s\Big\langle\nabla\varphi, \frac{dx}{dt}\Big\rangle - t\Big\langle\nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\Big\rangle = s\Big\langle\nabla^\perp\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\Big\rangle - t\Big\langle\nabla^\perp\varphi, \frac{dx}{dt}\Big\rangle. \tag{7}$$

Доказательство. Дифференцирование функции φ по параметру s приводит к соотношению (6):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \big\langle \nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\big\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\xi^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\xi^2 = \langle\nabla\varphi,\xi\rangle = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\eta^1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\eta^2 = \langle\nabla^\perp\varphi,\eta\rangle.$$

Вычисление производной по θ с использованием (5), (6) приводит к формуле (7):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= \big\langle \nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial\theta}\big\rangle = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(-s\sin\theta - t\cos\theta) + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}(s\cos\theta - t\sin\theta)\\ &= s\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(-\sin\theta) + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\cos\theta\Big) - t\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\cos\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\sin\theta\Big)\\ &= s\big\langle\nabla\varphi, \frac{dx}{dt}\big\rangle - t\big\langle\nabla\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\big\rangle = s\big\langle\nabla^\perp\varphi, \frac{\partial x}{\partial s}\big\rangle - t\big\langle\nabla^\perp\varphi, \frac{dx}{dt}\big\rangle.\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. □

Полученные соотношения приводят к непосредственно проверяемому следствию.

Следствие 1. *Пусть* $(\mathcal{R}\varphi)(\xi,s)$ *— преобразование Радона* (1) *заданной в* B *функции* $\varphi\in\mathcal{C}^1$. *Тогда*

$$\frac{\partial(\mathcal{R}\varphi)}{\partial\theta}(\xi,s) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} t\,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\xi^i\,dt = -(\mathcal{P}^{(1)}_{11}\nabla\varphi)(\xi,s) = -(\mathcal{P}^{(0)}_{11}\nabla^\perp\varphi)(\xi,s).$$

2. ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Приведём полученную в [14] лемму и следствие из неё.

Лемма 2. *Пусть в* B *заданы потенциалы* $\varphi,\psi\in H^l_0(B)$, $l\geqslant 1$ *целое, и векторные поля* $u=\nabla\varphi$, $v=\nabla^\perp\psi$, $u,v\in H^{l-1}(S^1(B))$. *Тогда*

$$\mathcal{P}^{(0)}_{k1}u = -k\mathcal{P}^{(0)}_{(k-1)0}\varphi,\quad \mathcal{P}^{(1)}_{k1}v = k\mathcal{P}^{(0)}_{(k-1)0}\psi.$$

Следствие 2. *Пусть известны поперечные* $\mathcal{P}^{(1)}_{k1}w$ *или продольные* $\mathcal{P}^{(0)}_{k1}w$ *лучевые преобразования с весом* t^k, $k=0,1$ *векторного поля* $w\in\mathcal{C}^l$, $l\geqslant 1$, $w=u+v$, $u=\nabla\varphi$, $v=\nabla^\perp\psi$ *для* $\varphi,\psi\in\mathcal{C}^{l+1}$. *Тогда поле* w *однозначно восстанавливается по поперечным или продольным лучевым преобразованиям моментов.*

Соотношения, полученные в [5,14] и в настоящей работе, необходимые для построения алгоритмов, собраны в следующем утверждении, в котором (как и в тексте ниже) используются более компактные обозначения для производных.

Предложение. *Пусть в* B *заданы потенциалы* $\varphi,\psi\in\mathcal{C}^l$, $l\geqslant 2$ *— целое, и векторное поле* $w=u+v$, *где* $u=\nabla\varphi$, $v=\nabla^\perp\psi\in\mathcal{C}^{l-1}$. *Тогда:*

1. Имеют место следующие связи лучевых преобразований векторного поля w *и преобразования Радона его компонент:*

$$\mathcal{P}^{(0)}_{01}w = \eta^i\mathcal{R}w_i,\quad \mathcal{P}^{(1)}_{01}w = \xi^i\mathcal{R}w_i,\quad \mathcal{R}w_j = \eta^j\mathcal{P}^{(0)}_{01}w + \xi^j\mathcal{P}^{(1)}_{01}w,\quad j=1,2.$$

2. Справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\mathcal{P}^{(0)}_{01}\nabla\varphi = 0,\quad \mathcal{P}^{(0)}_{01}\nabla^\perp\psi = (\mathcal{R}\psi)'_s,\quad \mathcal{P}^{(1)}_{01}\nabla\varphi = (\mathcal{R}\varphi)'_s,\quad \mathcal{P}^{(1)}_{01}\nabla^\perp\psi = 0,\\ \mathcal{P}^{(0)}_{11}\nabla\varphi = -\mathcal{R}\varphi,\quad \mathcal{P}^{(0)}_{11}\nabla^\perp\psi = -(\mathcal{R}\psi)'_\theta,\quad \mathcal{P}^{(1)}_{11}\nabla\varphi = -(\mathcal{R}\varphi)'_\theta,\quad \mathcal{P}^{(1)}_{11}\nabla^\perp\psi = \mathcal{R}\psi.\end{gathered}$$

3. Лучевые преобразования поля $w = \nabla\varphi + \nabla^{\perp}\psi$ связано с преобразованиями Радона его потенциалов соотношениями

$$\mathcal{P}_{01}^{(0)}w = (\mathcal{R}\psi)'_s, \quad \mathcal{P}_{01}^{(1)}w = (\mathcal{R}\varphi)'_s, \quad \mathcal{P}_{11}^{(0)}w = -(\mathcal{R}\psi)'_\theta - \mathcal{R}\varphi, \quad \mathcal{P}_{11}^{(1)}w = \mathcal{R}\psi - (\mathcal{R}\varphi)'_\theta.$$

Связи лучевых преобразований векторных полей, полученные в [5], и собранные в предложении связи с лучевыми преобразованиями моментов $\mathcal{P}_{k1}^{(j)}$, $j, k = 0, 1$ векторных полей и с преобразованиями Радона $\mathcal{R}$, позволяют воспользоваться различными путями для восстановления векторного поля, исходя только из лучевых преобразований моментов.

Задача 0. *Даны значения продольного $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$ и поперечного $\mathcal{P}_{01}^{(1)}w$ лучевых преобразований векторного поля w. Требуется найти поле w.* Эта задача хорошо изучена (см., например, [15]). В частности известно, что по значениям $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$ и $\mathcal{P}_{01}^{(1)}w$ восстанавливаются соленоидальная $\nabla^{\perp}\psi$ и потенциальная $\nabla\varphi$ части поля w, соответственно.

Предлагаемые в настоящей работе алгоритмы, направленные на решение сформулированных ниже задач 1 и 2, используют исходные данные в форме значений однотипных (либо продольных, либо поперечных) лучевых преобразований нулевого и первого моментов искомого векторного поля, что существенно отличает задачу 0 от задач 1 и 2.

Задача 1. *Даны значения $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$, $\mathcal{P}_{11}^{(0)}w$ продольных лучевых преобразований моментов порядков* $0, 1$ *векторного поля w. Требуется найти поле w.*

Следующие формулы дают решение задачи 1:

$$1. \quad \mathcal{P}_{01}^{(0)}(\nabla^{\perp}\psi) = (\mathcal{R}\psi)'_s = \mathcal{P}_{01}^{(0)}w,$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \mathcal{P}_{01}^{(1)}(\nabla\varphi) &= (\mathcal{R}\varphi)'_s = -(\mathcal{P}_{11}^{(0)}(\nabla\varphi))'_s = -\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}(w - \nabla^{\perp}\psi)\big)'_s = -\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - \mathcal{P}_{11}^{(0)}(\nabla^{\perp}\psi)\big)'_s \\ &= -(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w)'_s - (\mathcal{R}\psi)''_{s\theta} = -(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w)'_s - (\mathcal{P}_{01}^{(0)}w)'_\theta. \end{aligned}$$

Задача 2. *Даны значения $\mathcal{P}_{01}^{(1)}w$, $\mathcal{P}_{11}^{(1)}w$ поперечных лучевых преобразований моментов порядков* $0, 1$ *векторного поля w. Требуется найти поле w.*

Следующие формулы дают решение задачи 2:

$$1. \quad \mathcal{P}_{01}^{(1)}(\nabla\varphi) = (\mathcal{R}\varphi)'_s = \mathcal{P}_{01}^{(1)}w,$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \mathcal{P}_{01}^{(0)}(\nabla^{\perp}\psi) &= (\mathcal{R}\psi)'_s = \big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}(\nabla^{\perp}\psi)\big)'_s = \big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}(w - \nabla\varphi)\big)'_s = \big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}w - \mathcal{P}_{11}^{(1)}(\nabla\varphi)\big)'_s \\ &= (\mathcal{P}_{11}^{(1)}w)'_s + (\mathcal{R}\varphi)''_{s\theta} = (\mathcal{P}_{11}^{(1)}w)'_s + (\mathcal{P}_{01}^{(1)}w)'_\theta. \end{aligned}$$

Схемы алгоритмов, направленных как на решение задачи 1, так и на решение задачи 2, полностью аналогичны и отличаются лишь набором используемых формул. Для алгоритма 1 приводим решения как задачи 1, так и задачи 2, для каждой из которых пригоден свой набор исходных данных.

Выбор метода сингулярного разложения для решения поставленных задач обусловлен хорошей точностью приближенно восстановленных векторных полей, полученной ранее при проведении вычислительных экспериментов [15, 16], в том числе в динамическом случае [17]. Кроме того, SVD-метод позволяет вычислять значения лучевых преобразований аппроксимаций как потенциалов, так и векторных полей аналитически.

Остановимся на этом подробнее. В ряде формул, лежащих в основе алгоритмов, присутствуют частные производные по s и θ от исходных данных. Для этого достаточно в рамках SVD-метода найти производные принадлежащих базису потенциалов и их образов. Поясним этот подход на примере задачи 1.

Этап 1. По значениям $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$ с использованием SVD-подхода строим приближение $\sum a_i\nabla^\perp\psi_i$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w. При этом известны приближения $\sum a_i\psi_i$ и для потенциала ψ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля, и $\sum a_i(\mathcal{R}\psi_i)$ для образа ψ. Формируем данные $\mathcal{R}\varphi$ для определения потенциала φ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w. Именно, $\mathcal{R}\varphi = -\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - (\mathcal{R}\psi)'_\theta \approx -\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - \sum a_i(\mathcal{R}\psi_i)'_\theta$, где $(\mathcal{R}\psi_i)'_\theta$ могут быть найдены аналитически.

Этап 2. По значениям $\mathcal{R}\varphi \approx -\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - \sum a_i(\mathcal{R}\psi_i)'_\theta$, с использованием имеющегося сингулярного разложения, строим приближение $\sum b_i\varphi_i$ потенциала φ. Одновременно построено приближение $\sum b_i\nabla\varphi_i$ для потенциальной части $\nabla\varphi$.

Этот приём, в частности, применим при реализации алгоритма 2.

Алгоритм 1. Восстановление соленоидальной $\nabla^\perp\psi$ и потенциальной $\nabla\varphi$ частей векторного поля w по-отдельности с использованием сингулярных разложений безвесовых лучевых преобразований векторных полей.

При решении задачи 1 для восстановления поля w реализуем следующую последовательность действий:

1. построение аппроксимации $\widetilde{\nabla^\perp\psi}$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w по значениям $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$;

2. построение аппроксимации $\widetilde{\nabla\varphi}$ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w по значениям выражения $-\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w\big)'_s - (\mathcal{P}_{01}^{(0)}\widetilde{\nabla^\perp\psi})'_\theta$, где $\big(\mathcal{P}_{11}^{(0)}w\big)'_s$ вычисляется с помощью разностной схемы, а значение $(\mathcal{P}_{01}^{(0)}\widetilde{\nabla^\perp\psi})'_\theta$ вычисляется аналитически, с использованием формул (10) из приложения;

3. суммируя результаты, полученные после реализации шагов $1, 2$, получаем аппроксимацию $\widetilde{w}$ поля w.

При рассмотрении задачи 2 для восстановления векторного поля w нужно осуществить следующие действия:

1. построение аппроксимации $\widetilde{\nabla\varphi}$ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w по значениям $\mathcal{P}_{01}^{(1)}w$;

2. построение аппроксимации $\widetilde{\nabla^\perp\psi}$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w по значениям выражения $\big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}w\big)'_s + (\mathcal{P}_{01}^{(1)}\widetilde{\nabla\varphi})'_\theta$, где $\big(\mathcal{P}_{11}^{(1)}w\big)'_s$ вычисляется разностными методами, а значение $(\mathcal{P}_{01}^{(1)}\widetilde{\nabla\varphi})'_\theta$ находится аналитически;

3. суммируя результаты, полученные действиями $1, 2$, получить приближение $\widetilde{w}$ поля w.

Алгоритм 2. Восстановление соленоидальной $\nabla^\perp\psi$ и потенциальной $\nabla\varphi$ частей векторного поля w по-отдельности с применением ранее построенных SVD-разложений безвесовых лучевых преобразований векторных полей и потенциалов. Отличие от алгоритма 1 состоит в различных реализациях шагов 2 при решении задач 1 или 2.

Решая задачу 1, восстановление векторного поля w реализуется следующим путём:

1. строится аппроксимация $\widetilde{\nabla^\perp\psi}$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w по значениям лучевого преобразования $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$;

2. строится аппроксимация $\widetilde{\varphi}$ потенциала φ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w по значениям выражения $-\mathcal{P}_{11}^{(0)}w - (\mathcal{R}\widetilde{\psi})'_\theta$, в котором производная преобразования Радона $(\mathcal{R}\widetilde{\psi})'_\theta$ аппроксимации $\widetilde{\psi}$ вычисляется аналитически, с использованием формул (11) из приложения; коэффициенты, полученные при построении аппроксимации $\widetilde{\varphi}$, используются для построения аппроксимации $\widetilde{\nabla\varphi}$ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w;

3. суммируя результаты, полученные на этапах $1, 2$, получаем приближение $\widetilde{w}$ поля w.

Алгоритм 3. Восстановление соленоидальной $\nabla^\perp\psi$ и потенциальной $\nabla\varphi$ частей векторного поля w по-отдельности, с применением ранее построенных сингулярных разложений безвесовых лучевых преобразований векторных полей.

Рассматривая задачу 1, для восстановления векторного поля w делаем следующие шаги:

1. строим аппроксимацию $\widetilde{\nabla^\perp\psi}$ соленоидальной части $\nabla^\perp\psi$ поля w по значениям $\mathcal{P}_{01}^{(0)}w$;

2. строим аппроксимацию $\widetilde{\nabla\varphi}$ потенциальной части $\nabla\varphi$ поля w по значениям выражения $-\big(\mathcal{P}^{(0)}_{11}w\big)'_s-(\mathcal{P}^{(0)}_{01}w)'_\theta$ (производные вычисляются с использованием разностных схем), которое равно $\mathcal{P}^{(1)}_{01}(\nabla\varphi)$;

3. суммируя полученные результаты, приходим к реконструкции $\widetilde{w}$ поля w.

Алгоритм 4. Цель — восстановление компонент w_i, $i=1,2$ векторного поля w, на основе сингулярного разложение преобразования Радона потенциалов.

Для решения задачи 1 необходимы следующие действия:

1. составляем выражения $\eta^i(\mathcal{P}^{(0)}_{01}w)-\xi^i\big(\mathcal{P}^{(0)}_{11}w\big)'_s-\xi^i(\mathcal{P}^{(0)}_{01}w)'_\theta$, $i=1,2$, которые равны $\mathcal{R}w_i$, $i=1,2$ (производные вычисляются с использованием разностных схем);

2. восстанавливаем компоненты w_i, $i=1,2$ векторного поля w.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Детально численная реализация алгоритмов восстановления векторных полей, основанных на методе сингулярного разложения, описана в работе [16]. Основные формулы, необходимые для обоснования алгоритмов обращения лучевых преобразований векторных полей и потенциалов, приведены в приложении.

При проведении вычислительных экспериментов исходными данными являются значения лучевых преобразований $\mathcal{P}^{(0)}_{01}(w)$, $\mathcal{P}^{(0)}_{11}(w)$ (задача 1), $\mathcal{P}^{(1)}_{01}(w)$, $\mathcal{P}^{(1)}_{11}(w)$ (задача 2), или $\mathcal{P}^{(0)}_{01}(w)$, $\mathcal{P}^{(1)}_{01}(w)$ (задача 0), известных в точках равномерной сетки. Решение задачи 0, при одновременном решении задачи 1 или 2, преследует цель сравнения результатов расчётов по ранее апробированному алгоритму и предлагаемых в работе алгоритмов восстановления векторных полей по их лучевым преобразованиям моментов.

Фиксируя натуральное L, получаем последовательности

$$s_p=p\cdot\Delta s,\quad p=-L+1,\dots,L-1,\quad \Delta s=1/L,$$

$$\theta_q=q\cdot\Delta\theta,\quad q=0,1,\dots,2L-1,\quad \Delta\theta=\pi/L$$

дискретных значений переменных s,θ. Выбор пары s_p,θ_q означает задание векторов $\xi_q=(\cos\theta_q,\sin\theta_q)$, $\eta_q=(-\sin\theta_q,\cos\theta_q)$ и точки

$$x_{pq}=\Big(\cos\theta_q s_p+\sin\theta_q\sqrt{1-s_p^2}\,,\,\sin\theta_q s_p-\cos\theta_q\sqrt{1-s_p^2}\Big)\in\partial B,$$

из которой выпускается луч в направлении η_q. Использовались дискретизации 200×200, 400×400 и 600×600 по (s,θ).

При вычислении значений лучевых преобразований тестовых полей, состоящее в интегрировании вдоль прямой по формулам (4), использовалась формула трапеции. SVD-метод приводит к полиномиальной аппроксимации (псевдо)обратных операторов ((8) из приложения). Вычисление скалярных произведений $\big\langle g,G^{im}_{kn}\big\rangle_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})}$, состоящее в интегрировании по переменным s,θ, использовалась формула Симпсона. Для конструирования базисных полей мы использовали потенциалы ((9) из приложения) максимальной степени $N=101$. При реализации алгоритмов 1, 3, 4 необходимо использование первых производных от функций, заданных на равномерной сетке. В вычислениях применялась пятиточечная разностная схема

$$f'(t_0)\approx\frac{f(t_0-2h)-8f(t_0-h)+8f(t_0+h)-f(t_0+2h)}{12h}$$

высокой степени точности $O(h^4)$.

В первой серии тестов рассматривается векторное поле $w^{(1)} = \nabla^{\perp}\psi^{(1)} + \nabla\varphi^{(1)}$, порождаемое потенциалами класса гладкости C^3, задаваемыми формулой

$$\psi^{(1)}(x) = \varphi^{(1)}(x) = \begin{cases} x^1x^2(0.64 - (x^1+0.1)^2 - (x^2)^2)^3, & \text{если } (x^1+0.1)^2 + (x^2)^2 < 0.64, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Исследовалась зависимость относительной погрешности (в процентах) восстановления в зависимости от дискретизации исходных данных — значений операторов $\mathcal{P}_{01}^{(0)}$, $\mathcal{P}_{11}^{(0)}$ (задача 1). Результаты тестов приведены в таблице 1. Жирным шрифтом выделена наименьшая погрешность для каждой из дискретизаций. В случае, если оптимальное значение степени N базисных многочленов в SVD-разложении меньшее 101,приводится его значение в скобках. Например, запись 0.13 (56) означает, что при данной дискретизации наименьшая погрешность равна 0.13%, и достигается она при $N = 56$. Результаты восстановления при использовании алгоритмов 3 и 4 оказались практически идентичными. Поэтому результаты для алгоритма 4 не приводятся. Для сравнения приведены результаты восстановления по значениям продольного $\mathcal{P}_{01}^{(0)}$ и поперечного $\mathcal{P}_{01}^{(1)}$ лучевых преобразований (задача 0). Из таблицы видно, что при достаточной степени дискретизации алгоритмы 2 и 3 демонстрируют хорошую точность восстановления, близкую к погрешности, возникающую при решении задачи 0.

Таблица 1

Зависимость точности восстановления поля $w^{(1)}$ от дискретизации

Дискретизация	200 × 200	400 × 400	600 × 600
Алгоритм 1, задача 1	0.76 (79)	0.27	0.15
Алгоритм 2, задача 1	0.16 (63)	0.04 (97)	0.03
Алгоритм 3, задача 1	**0.06** (85)	**0.03**	**0.02**
Задача 0	0.03 (98)	0.02	0.02

На рис. 1 приведены результаты исследования зависимости точности восстановления поля $w^{(1)}$ (вертикальная ось, %) от уровня вносимого шума (горизонтальная ось, %) с равномерным (слева) и нормальным распределением (справа). Дискретизация исходных данных — 400×400. Отметим, что практически для всех уровней шума наименьшую погрешность восстановления демонстрирует алгоритм 2.

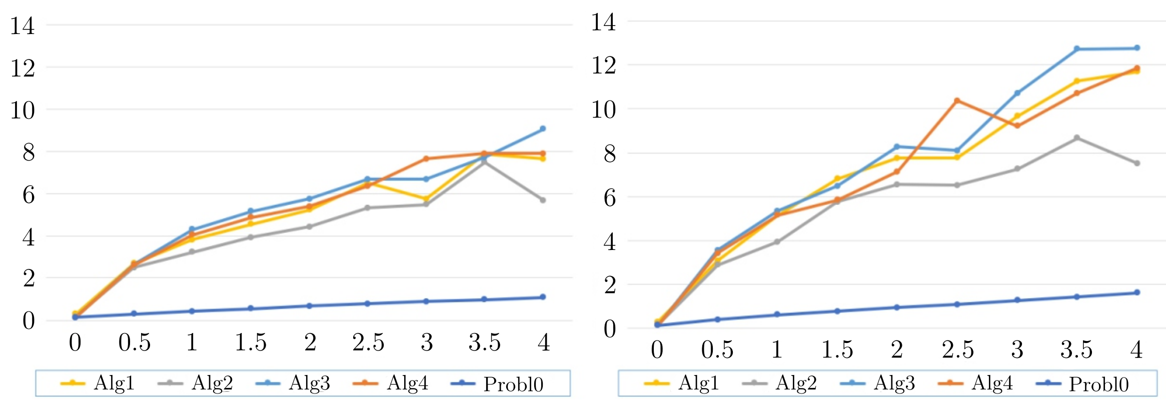


Рис. 1. Зависимость точности восстановления поля $w^{(1)}$ от уровня вносимого шума с равномерным (слева) и нормальным (справа) распределениями

На рис. 2 приведены компоненты поля $w^{(1)}$ (столбец (a)) и его лучших аппроксимаций при использовании алгоритма 2 (b) и алгоритма 3 (c) для восстановления по значениям операторов $\mathcal{P}_{01}^{(0)}$, $\mathcal{P}_{11}^{(0)}$ с внесённым нормально распределённым шумом уровня 4%. Результаты восстановления хорошо передают поведение векторного поля в пределах его носителя; вне же носителя

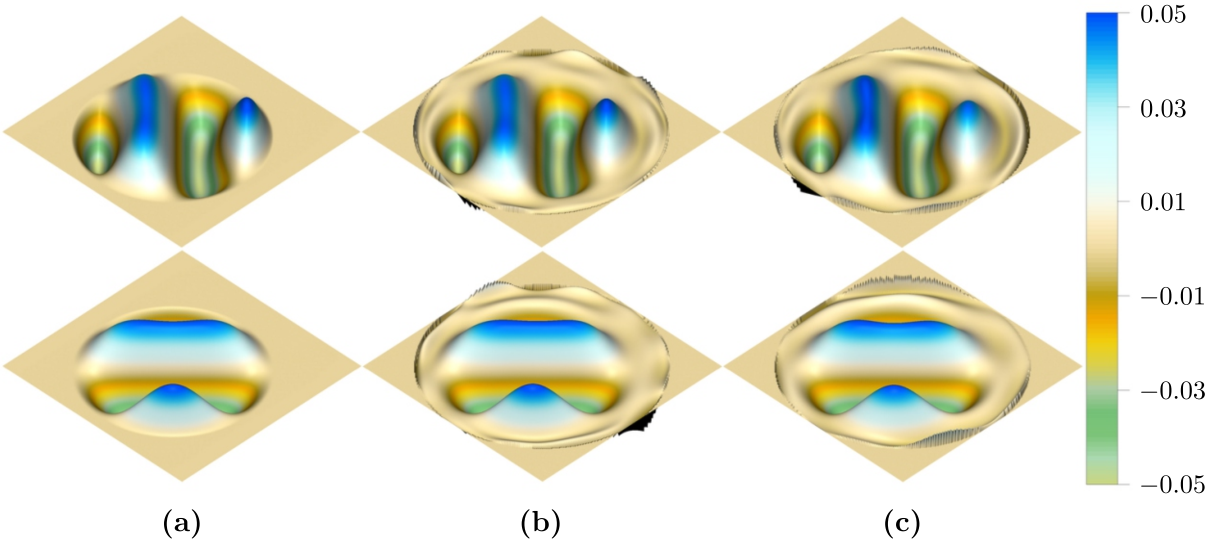


Рис. 2. Компоненты поля $w^{(1)}$ (столбец (a)) и его лучших аппроксимаций при решении задачи 1 с внесённым нормально распределённым шумом уровня 4% с использованием алгоритма 2 (b) и алгоритма 3 (c)

возникают незначительные артефакты, и, таким образом, отдать предпочтение какому-либо алгоритму затруднительно.

В следующей серии тестов рассматривается разрывное векторное поле $w^{(2)} = \nabla^{\perp}\psi^{(2)} + \nabla\varphi^{(2)}$, порождаемое потенциалами, которые задаются формулами

$$\psi^{(2)}(x) = \begin{cases} 0.5 - \sqrt{((x^1)^2 - 0.2)^2 + (x^2)^2}, & \text{если } ((x^1)^2 - 0.2)^2 + (x^2)^2 < 0.25, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$
$$\varphi^{(2)}(x) = \begin{cases} 0.5 - \sqrt{((x^1)^2 + 0.2)^2 + (x^2)^2}, & \text{если } ((x^1)^2 + 0.2)^2 + (x^2)^2 < 0.25, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Результаты восстановления приведены в таблице 2.

Таблица 2

Зависимость точности восстановления поля $w^{(2)}$ от дискретизации

Дискретизация	200×200	400×400	600×600
Алгоритм 1, задача 1	16.96 (49)	14.62 (68)	13.85 (73)
Алгоритм 2, задача 1	19.42 (47)	15.8 (58)	15.13 (69)
Алгоритм 3, задача 1	**16.67** (49)	**13.95** (73)	**12.9** (80)
Алгоритм 4, задача 1	16.75 (50)	14.02 (74)	12.92 (80)
Задача 0	10.59	10.4	10.39

Из таблицы 2 и рис. 3 можно сделать вывод, что при восстановлении разрывного поля при решении задачи 1 все алгоритмы дают точность хуже, чем при решении задачи 0, и связано это, по-видимому, с возникновением значительных артефактов, которых не наблюдается при решении задачи 0.

В последней серии тестов рассматривалось непрерывное векторное поле

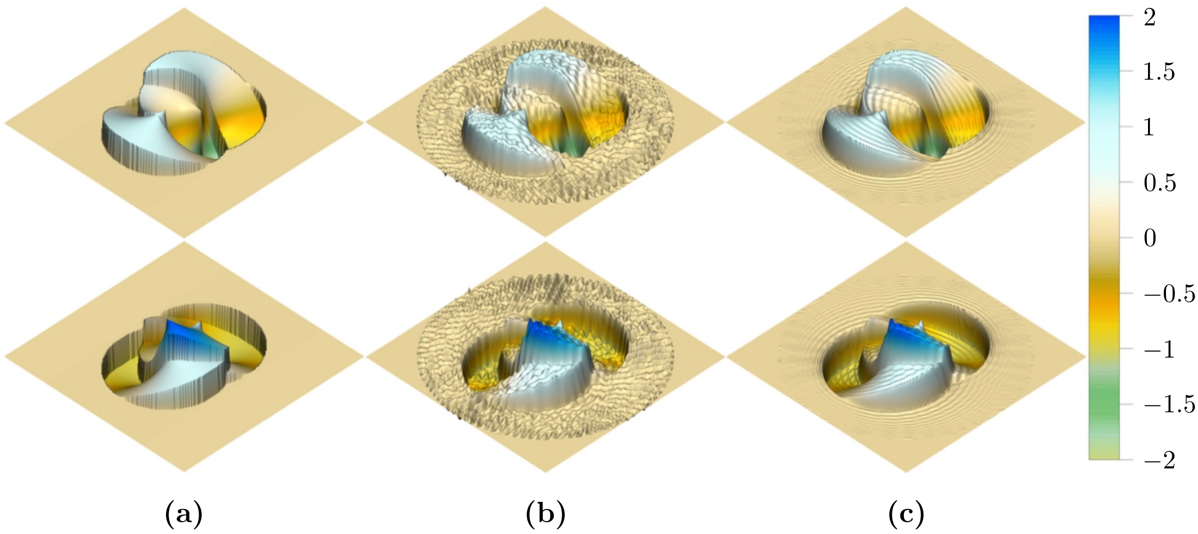


Рис. 3. Компоненты поля $w^{(2)}$ (столбец (a)) и его лучших аппроксимаций при решении задачи 1 с использованием алгоритма 3 (b) и при решении задачи 0 (c)

$w^{(3)} = \nabla^{\perp}\psi^{(3)} + \nabla\varphi^{(3)}$ с двусвязным носителем, задаваемое потенциалами

$$\psi^{(3)}(x) = \begin{cases} (0.3^2 - (x^1 - x^2 + 0.4)^2 - (x^2 - 0.1)^2)^2, & \text{если } (x^1 - x^2 + 0.4)^2 + (x^2 - 0.1)^2 < 0.3^2, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi^{(3)}(x) = \begin{cases} \big(\cos(3x^1 - 0.5)\pi + \cos(2x^2 + 0.7)\pi\big)^2/200, & \text{если } |3x^1 - 0.5| + |2x^2 + 0.7| < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Результаты восстановления приведены в таблице 3 (без внесения шума) и на рис. 4 (с внесённым шумом).

Таблица 3

Зависимость точности восстановления поля $w^{(3)}$ от дискретизации

Дискретизация	200×200	400×400	600×600
Алгоритм 1, задача 1	13.06 (49)	10.06 (66)	9.34 (83)
Алгоритм 2, задача 1	18.81 (37)	16.46 (48)	16.03 (66)
Алгоритм 3, задача 1	**3.47** (75)	**1.78**	**1.72**
Алгоритм 4, задача 1	3.48 (75)	1.79	1.73
Задача 0	1.83	1.71	1.71

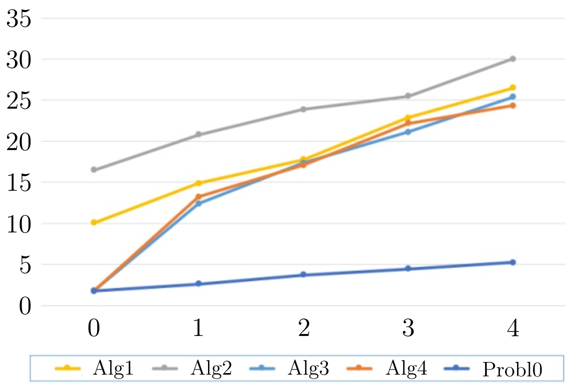
Проведённые вычислительные эксперименты позволяют сделать следующие выводы.

Серия тестов без внесения шума.

При восстановлении разрывного поля при решении задачи 1 алгоритмы 1–4 дают точность хуже, чем при решении задачи 0. При восстановлении непрерывного поля алгоритмы 3 и 4 при решении задачи 1 демонстрируют точность близкую к точности при решении задачи 0. При восстановлении C^2-гладкого поля при большой дискретизации алгоритмы 2 и 3 демонстрируют хорошую точность восстановления, близкую к точности при решении задачи 0.

Серия тестов с внесённым шумом.

При решении задачи 1 результаты восстановления значительно хуже, чем при решении задачи 0. Однако, необходимо отметить, что по сравнению с единственным известным авторам результатом численной реконструкции по значениям весовых операторов в [18], результаты проведённых в нашей работе вычислительных экспериментов демонстрируют лучшую



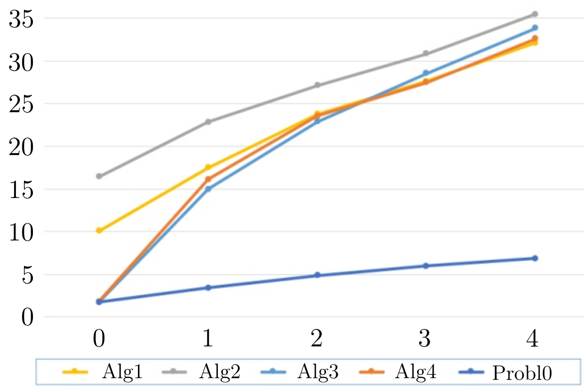


Рис. 4. Зависимость точности восстановления поля $w^{(3)}$ от уровня вносимого шума с равномерным (слева) и нормальным (справа) распределениями

точность. Так, в [18] приведены следующие результаты: внесение шума 0.1% даёт ошибку реконструкции 36%. В настоящей статье ошибка такого уровня получена при внесении шума 4%. Справедливости ради следует отметить, что в [18] задача изучается в трёхмерном пространстве.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа посвящена обоснованию, разработке и реализации алгоритмов восстановления векторного поля по лучевым преобразованиям его моментов нулевого и первого порядков. Опираясь на установленные связи между лучевыми преобразованиями моментов векторного поля с разными степенями k весов t^k, и связи с преобразованиями Радона его потенциалов, показано, что векторное поле однозначно восстанавливается по продольным или поперечным лучевым преобразованиям с весом t^k, $k = 0, 1$. Предложены и численно реализованы четыре варианта алгоритма восстановления векторного поля, основанных на установленных в работе свойствах лучевых преобразований. Основной численный метод — сингулярные разложения преобразования Радона и лучевых преобразований векторных полей. Проведены детальные численные эксперименты, направленные на исследование влияния на точность реконструкции векторного поля таких факторов, как дискретизация и зашумлённость данных, гладкость и связность носителя исследуемого поля. Большинство тестов показали заметное преимущество алгоритма, использующего в качестве данных совместно заданные продольные и поперечные лучевые преобразования векторного поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ. СИНГУЛЯРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Для обращения операторов часто используется метод разложения по сингулярным числам (метод SVD, singular value decomposition). Суть метода заключается в том, что оператор A представляется в виде ряда по сингулярным числам и базисным элементам в пространстве образов, тогда (псевдо)обратный оператор будет представлять собой ряд со схожей структурой, где задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа. При построении базисов используются полиномы Якоби $P_n^{(p,q)}(t)$, полиномы Гегенбауэра $C_n^{(\mu)}(t)$ и тригонометрические функции $Y_k^1(\theta) = \cos k\theta$, $Y_k^2(\theta) = \sin k\theta$.

Сингулярные разложения операторов лучевых преобразований $\mathcal{P}_{0m}^{(j)}$, $0 \leqslant j \leqslant m$ скалярных ($m = 0$, $\mathcal{R} := \mathcal{P}_{00}^{(0)}$) и векторных полей ($m = 1$, $\mathcal{P}_{01}^{(0)}, \mathcal{P}_{01}^{(1)}$) имеют вид

$$g(s,\theta) := [\mathcal{P}_{0m}^{(j)}\mathbf{u}](s,\theta) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=i-1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{kn}^m\langle \mathbf{u}, \mathbf{F}_{kn}^{ijm}\rangle_{L_2(S^m(B))}G_{kn}^{im}(s,\theta).$$

Значения (псевдо)обратных операторов $(\mathcal{P}^{(j)}_{0m})^\dagger$, $0 \leqslant j \leqslant m$, $m = 0, 1$, действующих на g, могут быть вычислены по формулам

$$[(\mathcal{P}^{(j)}_{0m})^\dagger g](x) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=i-1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma^m_{kn})^{-1} \left\langle g, G^{im}_{kn} \right\rangle_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1/2})} \mathbf{F}^{ijm}_{kn}(x). \tag{8}$$

Поля $\mathbf{F}^{ijm}_{kn}$, $i = 1, 2$ определяются

$$\mathbf{F}^{ijm}_{kn}(x) \quad = \nabla^j \big(\nabla^\perp\big)^{m-j} \Phi^{im}_{kn}(x), \quad k \geqslant i-1,\ n \geqslant 0,\ 0 \leqslant j \leqslant m,$$

где потенциалы в полярной системе координат

$$\Phi^{im}_{kn}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \lambda^m_{kn} \left(1 - r^2\right)^m r^k Y^i_k(\varphi) P^{(k+1+m,k+1)}_n(r^2), \quad k \geqslant i-1,\ n \geqslant 0 \tag{9}$$

и нормирующий коэффициент

$$\lambda^m_{kn} = b_k \frac{(n+k)!}{2^m k!(n+m)!} \left(\frac{2n+k+1+m}{\pi}\right)^{1/2}, \quad \text{здесь } b_k = \begin{cases} \sqrt{2}, & k \geqslant 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Функции G^{im}_{kn}, $i = 1, 2$ определяются формулами

$$G^{im}_{kn}(s,\theta) = \frac{b_k(-1)^{n+m}}{\pi} (1-s^2)^{1/2} C^{(1)}_{2n+k+m}(s) Y^i_k(\theta), \quad k \geqslant i-1,\ n \geqslant 0.$$

Сингулярные числа σ^m_{kn} вычисляются по формулам

$$\sigma^m_{kn} = \left(\frac{4\pi}{2n+k+m+1}\right)^{1/2}.$$

Для реализации алгоритмов 1 и 2 необходимы формулы

$$[\mathcal{P}^{(0)}_{01} \nabla^\perp \Phi^{i1}_{kn}]'_\theta(s,\theta) = (-1)^{n+1+i} \frac{k\,\sigma^1_{kn} b_k}{\pi} (1-s^2)^{1/2} C^{(1)}_{2n+k+1}(s) Y^{3-i}_k(\theta), \tag{10}$$

$$[\mathcal{R}\Phi^{i1}_{kn}]'_\theta(s,\theta) = (-1)^{n+i} \frac{2\,k\,\sigma^1_{kn} b_k}{\pi(2n+k+1)(2n+k+3)} (1-s^2)^{3/2} C^{(2)}_{2n+k}(s) Y^{3-i}_k(\theta), \tag{11}$$

где $k \geqslant i-1$, $n \geqslant 0$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00200). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrabwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Säch. Akad. Wiss. 1917. V. 69. P. 262–277.
2. *Deans S.* The Radon Transform and Some of its Applications. N. Y.: Wiley, 1983.

3. *Sharafutdinov V. A.* Integral Geometry of Tensor Fields. Urtecht: VSP, 1994.
4. *Wernick M. N., Aarsvold J. N.* Emission tomography: The fundamentals of PET and SPECT. London: Elsevier, 2004.
5. *Derevtsov E. Yu., Svetov I. E.* Tomography of tensor fields in the plane // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2015. V. 3, N 2. P. 24–68.
6. *Derevtsov E. Y., Volkov Y. S., Schuster T.* Generalized attenuated ray transforms and their integral angular moments // Appl. Math. Comput. 2021. V. 409, N 15. Article 125494; DOI: 10.1016/j.amc.2020.125494
7. *Krishnan V. P., Manna R., Sahoo S. K., Sharafutdinov V. A.* Momentum ray transforms // Inverse Probl. Imaging. 2019. V. 13, N 3. P. 679–701; DOI: 10.3934/ipi.2019031
8. *Abhishek A., Mishra R. K.* Support theorems and an injectivity result for integral moments of a symmetric m-tensor field // J. Fourier Anal. Appl. 2019. V. 25, N 4. P. 1487–1512; DOI: 10.1007/s00041-018-09649-7
9. *Mishra R. K.* Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in $\mathbb{R}^n$ // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2020. V. 28, N 2. P. 173–184; DOI: 10.1515/jiip-2018-0028
10. *Mishra R. K., Sahoo S. K.* Injectivity and range description of first $(k+1)$ integral moment transforms over m-tensor fields in $\mathbb{R}^n$ // SIAM J. Math. Anal. 2021. V. 53, N 1. P. 253-–278; DOI: 10.1137/20M1347589
11. *Bhattacharyya S., Krishnan V. P., Sahoo S. K.* Momentum Ray Transforms and a Partial Data Inverse Problem for a Polyharmonic Operator // SIAM J. Math. Anal. 2023. V. 55, N 4. P. 4000–4038; DOI: 10.1137/22M1500617
12. *Denisiuk A.* Iterative inversion of the tensor momentum x-ray transform // Inverse Probl. 2023. V. 39, N 10. Article 105002; DOI: 10.1088/1361-6420/acef52
13. *Omogbhe D., Sadiq S. K.* On the X-ray transform of planar symmetric tensors // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2023. V.32, N 3. P. 431–452; DOI: 10.1515/jiip-2022-0055
14. *Деревцов Е. Ю.* Лучевые преобразования моментов планарных тензорных полей // Сиб. журн. индустр. матем. 2023. Т. 26, № 3. С. 26–41; DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.303
15. *Derevtsov E. Y., Efimov A. V., Louis A. K., Schuster T.* Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2011. V. 19, N 4–5. P. 689–715; DOI: 10.1515/jiip.2011.047.
16. *Светов И. Е., Полякова А. П.* Сравнение двух алгоритмов численного решения задачи двумерной векторной томографии // Сиб. электрон. матем. изв. 2013. Т. 10, № 1. С. 90–108.
17. *Polyakova A. P., Svetov I. E.* A numerical solution of the dynamic vector tomography problem using the truncated singular value decomposition method // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2024. V. 32, N 1. P. 145–160; DOI:10.1515/jiip-2022-0019
18. *Kunyansky L., McDugald E., Shearer B.* Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography // Inverse Probl. 2023. V. 39, N 6. Article 065014; DOI:10.1088/1361-6420/acd07a

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.44:517.95

NUMERICAL RECONSTRUCTION OF A TWO-DIMENSIONAL VECTOR FIELD FROM MOMENTUM RAY TRANSFORMS

© 2024 **I. E. Svetov**[1,2a], **E. Yu. Derevtsov**[1,2b], **S. V. Maltseva**[1,2c], **A. P. Polyakova**[1,2d]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]svetovie@math.nsc.ru, [b]dert@math.nsc.ru, [c]sv_maltseva@mail.ru, [d]apolyakova@math.nsc.ru

Received 07.05.2024, revised 28.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. The algorithms for reconstructing a vector field from known longitudinal or transverse ray transforms of its moment are proposed and justified. The properties of several algorithms are studied depending on the degree of data discretization, the level and type of noise introduced into the data, the smoothness of the vector field, and the degree of connectivity of its support. Numerical simulations show good results of reconstructing vector fields from their momentum ray transforms.

Keywords: vector field, momentum ray transform, differential property of ray transforms, reconstruction algorithm, approximation, numerical simulation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.408

REFERENCES

1. J. Radon, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrabwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten," Ber. Säch. Akad. Wiss. **69**, 262–277 (1917).
2. S. Deans, *The Radon Transform and Some of Its Applications* (Wiley, New York, 1983).
3. V. A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields* (VSP, Urtecht, 1994).
4. M. N. Wernick and J. N. Aarsvold, *Emission Tomography: the Fundamentals of PET and SPECT* (Elsevier, London, 2004).
5. E. Yu. Derevtsov and I. E. Svetov, "Tomography of tensor fields in the plane," Eurasian J. Math. Comput. Appl. **3** (2), 24–68 (2015).
6. E. Y. Derevtsov, Y. S. Volkov, and T. Schuster, "Generalized attenuated ray transforms and their integral angular moments," Appl. Math. Comput. **409** (15), 125494 (2021). https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125494
7. V. P. Krishnan, R. Manna, S. K. Sahoo, and V. A. Sharafutdinov, "Momentum ray transforms," Inverse Probl. Imaging **13** (3), 679–701 (2019). https://doi.org/10.3934/ipi.2019031
8. A. Abhishek and R. K. Mishra, "Support theorems and an injectivity result for integral moments of a symmetric m-tensor field," J. Fourier Anal. Appl. **25** (4), 1487–1512 (2019). https://doi.org/10.1007/s00041-018-09649-7
9. R. K. Mishra, "Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in $\mathbb{R}^n$," J. Inverse Ill-Posed Probl. **28** (2), 173–184 (2020). https://doi.org/10.1515/jiip-2018-0028

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 861–875.

10. R. K. Mishra and S. K. Sahoo, “Injectivity and range description of first $(k + 1)$ integral moment transforms over m-tensor fields in $\mathbb{R}^n$,” SIAM J. Math. Anal. **53** (1), 253–278 (2021). https://doi.org/10.1137/20M1347589

11. S. Bhattacharyya, V. P. Krishnan, and S. K. Sahoo, “Momentum ray transforms and a partial data inverse problem for a polyharmonic operator,” SIAM J. Math. Anal. **55** (4), 4000–4038 (2023). https://doi.org/10.1137/22M1500617

12. A. Denisiuk, “Iterative inversion of the tensor momentum x-ray transform,” Inverse Probl. **39** (10), 105002 (2023). https://doi.org/10.1088/1361-6420/acef52

13. D. Omogbhe and S. K. Sadiq, “On the X-ray transform of planar symmetric tensors,” J. Inverse Ill-Posed Probl. **32** (3), 431–452 (2023). https://doi.org/10.1515/jiip-2022-0055

14. E. Yu. Derevtsov, “Momentum ray transforms of planar tensor fields,” Sib. Zh. Ind. Mat. **26** (3), 26–41 (2023) [J. Appl. Ind. Math. **17** (3), 521–534 (2023)]. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2023.26.303

15. E. Y. Derevtsov, A. V. Efimov, A. K. Louis, and T. Schuster, “Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography,” J. Inverse Ill-Posed Probl. **19** (4–5), 689–715 (2011). https://doi.org/10.1515/jiip.2011.047

16. I. E. Svetov and A. P. Polyakova, “Comparison of two algorithms for numerical solution of the problem of two-dimensional vector tomography,” Sib. Elektron. Mat. Izv. **10** (1), 90–108 (2013) [in Russian].

17. A. P. Polyakova and I. E. Svetov, “A numerical solution of the dynamic vector tomography problem using the truncated singular value decomposition method,” J. Inverse Ill-Posed Probl. **32** (1), 145–160 (2024). https://doi.org/10.1515/jiip-2022-0019

18. L. Kunyansky, E. McDugald, and B. Shearer, “Weighted Radon transforms of vector fields, with applications to magnetoacoustoelectric tomography,” Inverse Probl. **39** (6), 065014 (2023). https://doi.org/10.1088/1361-6420/acd07a

УДК 517.95

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЯЗКИХ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С $p(x)$-ЛАПЛАСИАНОМ С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

 А. С. Терсенов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 06.11.2023 г.; после доработки 17.09.2024 г.;
принята к публикации 06.11.2024 г.

В настоящей статье изучается первая краевая задача для уравнения с $p(x)$-лапласианом с одной пространственной переменной при наличии градиентных членов, не удовлетворяющих условию Бернштейна—Нагумо. Определён класс градиентных нелинейностей, для которого доказано существование вязкого по Лионсу решения непрерывного по Липшицу по x и по Гёльдеру по t.

Ключевые слова: уравнение с $p(x)$-лапласианом, условие Бернштейна—Нагумо, вязкие по Лионсу решения, априорные оценки.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.409

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим первую краевую задачу для эволюционного уравнения с $p(x)$-лапласианом

$$u_t - (|u_x|^{p(x)-2}u_x)_x = F(t,x,u,u_x) \quad \text{в} \quad \Omega_T = (0,T)\times(-l,l), \tag{1}$$

$$u(t,\pm l) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in [-l,l]. \tag{3}$$

Предполагаем, что $p(x) > 2$, функция $u_0(x)$ удовлетворяет

$$u_0(\pm l) = 0, \quad |u_0'(x)| \leqslant K, \quad x \in [-l,l]. \tag{4}$$

Интерес к исследованию начально-краевых задач как для (1), так и в многомерном случае, связан с большим количеством приложений в различных областях механики. Они возникают при моделировании течений неньютоновских жидкостей, как дилатантных ($p > 2$), так и псевдопластичных ($p < 2$), в моделях нелинейной упругости, теории капиллярных поверхностей и гляциологии, при описании течений жидкости в пористых средах. Отметим также использование многомерного аналога уравнений вида (1) при моделировании течений электрореологических и термореологических жидкостей [1–4], а также в обработке сигналов и изображений [5, 6].

Уравнения с главной частью, такой же как в (1), принадлежат к так называемому классу уравнений с нестандартными условиями роста, которые заключаются в следующем: если положить $a(x,u_x) = |u_x|^{p(x)-2}u_x$, тогда $a(x,q)$ удовлетворяет условиям

$$b_1|q|^{p_*-1} - b_2 \leqslant |a(x,q)| \leqslant b_3|q|^{p^*-1} + b_4,$$

где $p_* = \min_{x\in[-l,l]} p(x)$, $p^* = \max_{x\in[-l,l]} p(x)$, а b_k — некоторые неотрицательные постоянные. К настоящему моменту существует обширная литература, посвящённая вопросам глобального существования соболевских решений задачи (1)–(3) (см. [7] и ссылки в ней). Отметим также работы [8, 9], в которых были доказаны теоремы существования соболевских решений высокой гладкости для анизотропных уравнений с нестандартными условиями роста. Наряду с соболевскими решениями, исследование разрешимости задач вида (1)–(3), а также их изотропных аналогов, проводится в классе вязких по Лионсу решений [10–14]. В работах [15–17] исследуется эквивалентность соболевских и вязких решений .

Как известно, использование методов вариационного исчисления при решении указанных задач, связано с вариационностью главной части указанных уравнений. Однако наличие в уравнении градиентных членов существенно осложняет применение этих методов. В этом случае для доказательства разрешимости краевых задач широко используются топологические методы, основанные на получении априорных оценок, а также различные аппроксимационные методы.

В связи с этим отметим следующие работы, в которых исследование краевых задач проводилось при наличии градиентных членов. В работах [18–20] с помощью аппроксимационных методов доказывается существование слабых решений краевых задач для (1). В работах [21–25] с помощью различных топологических методов, основанных на теоремах лиувиллевского типа, на методе суб-/суперрешений с последующим применением теоремы Красносельского, доказаны аналогичные результаты. В [26] результаты о существовании решений были получены с помощью итерационного метода, основанного на методе горного перевала. В [27] авторы для получения существования решений использовали принцип неподвижной точки Лерэ-Шаудера, используя методы линеаризации, априорные оценки с весами и теоремы сравнения. Отметим также работы [28–31] в которых исследуются уравнения, содержащие градиентные члены.

Во всех вышеперечисленных работах младшие члены в уравнении удовлетворяют условию Бернштейна—Нагумо, которое в случае уравнения (1) принимает вид

$$|F(t,x,u,q)| \leqslant c\left(1+|q|^{p(x)}\right) \quad \text{для} \quad (t,x,u,q) \in \overline{\Omega}_T \times [-M,M] \times \mathbb{R} \tag{5}$$

с некоторой постоянной c при условии, что решение удовлетворяет условию $\max|u| \leqslant M$ с некоторой постоянной M. В работах [32–34] были доказаны теоремы существования обобщённых решений различного типа с нарушением условия Бернштейна—Нагумо. Эти результаты были получены при условии, что показатели анизотропности являются либо постоянными, либо функциями от времени. В настоящей статье мы рассмотрим случай, когда показатель p зависит от пространственной переменной.

Нас интересуют условия, при которых можно доказать существование решений непрерывных по Гёльдеру по времени и непрерывных по Липшицу по x при отсутствии ограничения вида (5). Насколько нам известно, на сегодняшний день нет результатов о существовании решений указанной гладкости для задачи (1)–(3) с произвольным ростом по градиенту.

Уравнение (1) с нелинейным источником, без градиентных членов и постоянным показателем p было рассмотрено в [35]. В статье [36] была рассмотрена задача (1)–(3) в предположении, что F имеет вид $F(x,u,u_x) = f_1(x,u)u_x + f_2(x,u)$ и выполнены следующие условия:

$$uF(x,u,0) \leqslant c_1u^2 + c_2,$$

где c_1 и c_2 — неотрицательные постоянные,

$$F(x,u_2,q) - F(x,u_1,q) \leqslant 0, \quad u_2 > u_1,$$

$$p(x) \in \mathbb{C}^1[-l,l], \quad F(x,u,q) \in \mathbb{C}^\sigma([-l,l]\times\mathbb{R}^2), \quad \sigma \in (0,1).$$

Было доказано существование слабого решения, в соболевском смысле, являющегося непрерывной по Липшицу функцией. Нам удалось показать, что при некоторых дополнительных предположениях о поведении функции F существует непрерывное по Липшицу вязкое по Лионсу решение в случае, когда F не удовлетворяет (5).

Доказательство теорем существования основано на регуляризации исходной задачи и предельном переходе по классическим решениям последней. При попытке доказать существование соболевского решения указанной гладкости, возникает проблема в предельном переходе в нелинейных градиентных членах. Это связано с отсутствием необходимых априорных оценок для осуществления указанного предельного перехода. Мотивация для поиска решения в классе вязких по Лионсу решений заключается в том, что для осуществления предельного перехода в этом случае требуется лишь априорная оценка семейства классических (являющихся одновременно и вязкими) решений регуляризованных задач в классе Гёльдера.

В [32–34] такой подход был реализован, когда показатели анизотропности не зависят от пространственной переменной. Здесь, хоть и ограничиваемся пока одномерным случаем, мы рассматриваем ситуацию, когда показатель анизотропности зависит от x. Более того, условия на градиентный член, приведённые в настоящей статье, позволяют расширить класс градиентных нелинейностей, для которых можно получить теорему существования.

Дадим определение вязкого решения для параболических уравнений следуя [37] (см. также [13, 38]). Заметим, что для произвольной функции $\phi(t,x) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\Omega_T)$ имеем

$$\phi_t - (|\phi_x|^{p(x)-2}\phi_x)_x = \phi_t - (p(x)-1)|\phi_x|^{p(x)-2}\phi_{xx} - p'(x)\phi_x|\phi_x|^{p(x)-2}\ln|\phi_x|$$

при условии, что $p(x) \in \mathbb{C}^1[-l,l]$. Для того, чтобы определить понятие вязкого решения, введём функцию

$$\Phi(t,x,u,q,X) = (p(x)-1)|q|^{p(x)-2}X + p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| + F(t,x,u,q), \tag{6}$$

где $(q,X) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Будем полагать, что по непрерывности для функции

$$b_0(x,q) = p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q|$$

имеем $b_0(x,0)=0$.

Определение. Будем говорить, что непрерывная функция $u(t,x)$ является вязким субрешением (суперрешением) задачи (1)–(3), если

$$u \leqslant 0 \ (\geqslant 0) \quad \text{на} \quad (0,T)\times\{-l,\,l\}, \quad u(0,x) \leqslant u_0(x) \ (\geqslant u_0(x)) \quad \text{для} \quad |x|<l$$

и для произвольной функции $\phi(t,x) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\Omega_T)$ и любой точки $(t_0,x_0)\in\Omega_T$ имеет место

$$\phi_t(t_0,x_0) - \Phi(t_0,x_0,\phi(t_0,x_0),\phi_x(t_0,x_0),\phi_{xx}(t_0,x_0)) \leqslant 0 \,\big(\geqslant 0\big),$$

где $\phi(t,x)$ для всех $(t,x)\in\Omega_T$ удовлетворяет

$$u(t,x) \leqslant \phi(t,x) \,\big(\geqslant \phi(t,x)\big), \quad u(t_0,x_0) = \phi(t_0,x_0).$$

Непрерывная функция $u(t,x)$ является вязким решением задачи (1)–(3), если она одновременно является суб- и суперрешением.

Для более ясного представления результатов будем предполагать, что

$$F(t,x,u,q) = f(t,x,u,q) - u, \quad f(t,x,u,0) = 0.$$

Положим

$$M_1 = \inf_{|x|\leqslant l} u_0, \quad M_2 = \sup_{|x|\leqslant l} u_0, \quad M = \max\{M_2, M_2-M_1, -M_1\}.$$

Далее, будем предполагать, что функция f удовлетворяет следующим ограничениям:

$$f(t,x,u,-q) \leqslant 0, \quad u>0, \quad f(t,x,u,q) \geqslant 0, \quad u<0, \tag{7}$$

где $q \in [q_0, q_1]$, $|x| \leqslant l$, $|u| \leqslant M$,

$$|f(t,x,u,q) - f(t,y,u,q)| \leqslant K_1(t,x,y,u,q)|x-y| \tag{8}$$

при $t \in [0,T]$, $x,y \in [-l,l]$, $0 < x-y < \tau_0$, $|u| \leqslant M$, $q_0 \leqslant |q| \leqslant q_1$, где $K_1 \geqslant 0$ — ограниченная функция по своим переменным на этом множестве,

$$f(t,x,u_1,q) - f(t,x,u_2,q) \geqslant \gamma(t,x,u_1,u_2,q)(u_2-u_1) \tag{9}$$

при $t \in [0,T]$, $|x| \leqslant l$, $|u_1|,|u_2| \leqslant M$, $u_2 \geqslant u_1$, $q_0 \leqslant |q| \leqslant q_1$, где $\gamma(t,x,u_1,u_2,q) \geqslant \gamma_0 > 0$ — ограниченная функция по своим переменным на этом множестве. Положительные постоянные q_0, q_1, τ_0 будут определены в (27), (28). Обозначим через $\mathbf{V}$ множество

$$\mathbf{V} = \{(t,x),(t,y) \in \overline{\Omega}_T, 0 < x-y < \tau_0, |u_1|,|u_2| \leqslant M, u_2 \geqslant u_1, q_0 \leqslant |q| \leqslant q_1\}.$$

Предположим, что

$$\sup_{\mathbf{V}} \frac{K_1(t,x,y,u_1,q)}{\gamma(t,x,u_1,u_2,q)} \leqslant C|q|^{\nu}, \quad \nu < 1, \tag{10}$$

где C — положительная постоянная.

Теорема 1. *Пусть $f(t,x,u,u_x) \in \mathbb{C}^{\sigma}([0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $\sigma \in (0,1)$, $p(x) \in \mathbb{C}^1([-l,l])$. Пусть выполнены условия (7)–(10). Тогда для произвольного $T>0$, существует вязкое решение задачи (1)–(3) такое, что $u(t,x)$ является непрерывной по Гёльдеру по переменной t с показателем 1/2, непрерывной по Липшицу по x и*

$$M_1 \leqslant u \leqslant M_2, \quad ||u_x||_{\mathbb{L}^{\infty}(\Omega_T)} \leqslant q_1.$$

Прежде чем сформулировать теорему существования и единственности задачи (1)–(3), сделаем несколько замечаний об условиях, гарантирующих единственность вязкого решения. Как известно, доказательство теоремы сравнения для суб- и суперрешений класса $\mathbb{C}^{1,2}$, следствием которой является единственность, доказывается с помощью применения классического принципа максимума. В теории вязких решений аналогичная теорема сравнения формулируется для суб- и суперррешений, которые являются всего лишь полунепрерывными сверху и снизу функциями соответственно. Доказательство теоремы сравнения основано на адаптации классического принципа максимума для функций, не имеющих необходимую гладкость. Мы приведём без доказательства одно утверждение, на котором базируется данная адаптация. Делаем мы это для того, чтобы прояснить некоторые условия, которые мы накладываем на уравнение, для получения единственности.

Лемма 1 ([11], глава 3, лемма 3.1). *Пусть $O \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество и*

$$M_\beta = \sup_{O\times O}\left(u(x) - v(y) - \frac{\beta}{2}|x-y|^2\right)$$

для $\beta > 0$, где $u(x)$ и $v(y)$ — непрерывные функции. Пусть $M_\beta < \infty$ при больших β и последовательность (x_β, y_β) такова, что

$$\lim_{\beta\to\infty}\left(M_\beta - \left[u(x_\beta) - v(y_\beta) - \frac{\beta}{2}|x_\beta - y_\beta|^2\right]\right) = 0.$$

Тогда верны следующие соотношения

(i) $\lim\limits_{\beta\to\infty} \beta|x_\beta - y_\beta|^2 = 0$;

(ii) $\lim_{\beta\to\infty} M_\beta = u(\hat{x}) - v(\hat{x}) = \sup_O(u(x) - v(x))$, *где* $\hat{x} = \lim_{\beta\to\infty} x_\beta$.

Для единственности вязкого решения (см. [38], глава 3, условия 3.13, 3.14), необходимо наложить структурные ограничения на $\Phi(t, x, r, q, X)$. Предположим, что существует функция $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющая $\omega(0+) = 0$, такая, что

$$\Phi(t, x, r, \beta(x-y), X) - \Phi(t, y, r, \beta(x-y), Y) \leqslant \omega(\beta|x-y|^2 + |x-y|) \tag{11}$$

при достаточно большом β и каждом фиксированном $t \in (0, T)$, $x, y \in [-l, l]$, $r \in \mathbb{R}$, $X, Y \in \mathbb{R}$, $X \leqslant Y$ и

$$-3\beta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leqslant 3\beta \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тогда теорема сравнения имеет место. Здесь $\beta > 0$ — параметр, удовлетворяющий

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta|x-y|^2 = 0,$$

где предел понимается в смысле условия (i) сформулированного выше утверждения. Заметим, что неравенство (12) мы понимаем в следующем смысле: говорим, что для матриц A и B выполняется $A \leqslant B$, если $(A\xi, \xi) \leqslant (B\xi, \xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. В случае, когда имеются более гладкие суб- и суперрешения для сравнения, условие (11) может быть ослаблено. Так в случае, когда хотя бы одно из этих решений липшицево по пространственным переменным равномерно по переменной t, это условие принимает следующий вид:

$$\Phi(t, x, r, \beta(x-y), X) - \Phi(t, y, r, \beta(x-y), Y) \leqslant \omega(\beta|x-y|^\theta + |x-y|) \tag{13}$$

с некоторым $\theta > 1$, где $\beta > 0$ является параметром, удовлетворяющим соотношению

$$\lim_{\beta\to\infty} \beta|x-y|^\theta = 0 \tag{14}$$

при каждом фиксированном t. Таким образом, если вязкое решение липшицево по пространственным переменным равномерно по t, то для единственности достаточно потребовать выполнение условий (12)–(14).

Теорема 2. *Пусть* $f(t, x, u, u_x) \in \mathbb{C}^\sigma([0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $\sigma \in (0, 1)$, $p(x) \in \mathbb{C}^1([-l, l])$. *Пусть выполнены условия* (7)–(10), (12)–(14). *Тогда для произвольного* $T > 0$, *существует единственное вязкое решение задачи* (1)–(3) *такое, что* $u(t, x)$ *является непрерывной по Гёльдеру по переменной* t *с показателем 1/2, непрерывной по Липшицу по* x *и*

$$M_1 \leqslant u \leqslant M_2, \quad ||u_x||_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_T)} \leqslant q_1.$$

Ниже мы приводим пример уравнения, когда условия (12)–(14), *гарантирующие единственность решения, выполнены.*

Пример. Рассмотрим (6), предполагая, что $p(x) \in \mathbb{C}^{1,1}([-l, l])$. Получим оценки вида (13) для каждого из трёх членов в (6) отдельно. Для первого члена нам надо надлежащим образом оценить разность

$$-(p(y)-1)|q|^{p(y)-2}Y + (p(x)-1)|q|^{p(x)-2}X = a^2(x, q)X - a^2(y, q)Y,$$

где $a^2(z, q) = (p(z)-1)|q|^{p(z)-2}$. Домножим правую часть неравенства (12) на неотрицательную матрицу

$$\begin{pmatrix} a^2(x, q) & a(x, q)a(y, q) \\ a(x, q)a(y, q) & a^2(y, q) \end{pmatrix}$$

и возьмём след от обеих полученных матриц. Учитывая, что указанные преобразования сохранят знак неравенства в (12), получим

$$a^2(x,q)X - a^2(y,q)Y \leqslant 3\beta(a(x,q) - a(y,q))^2. \tag{15}$$

Оценим сначала разность $a(x,q) - a(y,q)$. Представим её в виде

$$a(x,q) - a(y,q) = a'_z(c,q)(x-y),$$

где c — некоторая промежуточная точка между x и y. Положим $a(z,q) = b(z)|q|^{r(z)}$, где $b(z) = \sqrt{p(z)-1}$, $r(z) = \frac{p(z)-2}{2}$. Тогда

$$a'_z(c,q) = b'(c)|q|^{r(c)} + b(c)r'(c)|q|^{r(c)}\ln|q|.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} a(x,q) - a(y,q) = b(x)|q|^{r(x)} - b(y)|q|^{r(y)} \leqslant \\ |b'(c)|\,|q|^{r(c)}|x-y| + |b(c)|\,|r'(c)|\,|q|^{r(c)}|\ln|q||\,|x-y|. \end{gathered} \tag{16}$$

Положим

$$b_1 = \max|b(z)|, \quad b'_1 = \max|b'(z)|, \quad r'_1 = \max|r'(z)|, \quad B = \max\{b_1, b'_1, r'_1\}.$$

Тогда неравенство (16) можно записать в виде

$$a(x,q) - a(y,q) \leqslant B|q|^{r(c)}|x-y|(1 + |\ln|q||). \tag{17}$$

Заметим, что в (13) надо теперь вместо q подставить $\beta(x-y)$. Таким образом, для разности $a(x,q) - a(y,q)$ окончательно имеем

$$a(x,q) - a(y,q)\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant B\left[\beta|x-y|^{\frac{1+r(c)}{r(c)}}\right]^{r(c)}(1 + |\ln\beta|x-y||). \tag{18}$$

Из (15), (17), (18) получаем

$$\begin{gathered} a^2(x,q)X - a^2(y,q)Y\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant 3\beta(a(x,q) - a(y,q))^2 \leqslant \\ 3\beta B^2\left[\beta|x-y|^{\frac{1+r(c)}{r(c)}}\right]^{2r(c)}(1 + |\ln\beta|x-y||)^2. \end{gathered}$$

Внесём β внутрь квадратных скобок и окончательно получим

$$\begin{gathered} a^2(x,q)X - a^2(y,q)Y\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant \\ 3B^2\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}(1 + 2|\ln\beta|x-y|| + \ln^2\beta|x-y|). \end{gathered} \tag{19}$$

Отбросив на время в правой части неравенства (19) множитель $3B^2$, последовательно оценим каждое из трёх слагаемых его составляющих.

Введём постоянную θ из (14) следующим образом:

$$1 < \theta < \min_{c\in[-l,l]}\left(1 + \frac{1}{p(c)-1}\right). \tag{20}$$

Таким образом, мы полагаем, что (14) выполнено с указанным θ. Откуда, в частности, следует, что при достаточно больших β имеют место соотношения

$$\beta|x-y|^{\theta}<1, \quad |x-y|<1. \tag{21}$$

Из доказательства упомянутой леммы 1 (см. также [38], теорема 3.2) следует, что достаточно, чтобы условия (12), (13) выполнялись бы при достаточно большом β. Учитывая этот факт и (21), первое из слагаемых в (19) можно оценить следующим образом:

$$\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}=\left[\beta|x-y|^{\theta+1+\frac{1}{p(c)-1}-\theta}\right]^{p(c)-1}=$$
$$\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{p(c)-1}\left[|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}-\theta}\right]^{p(c)-1}\leqslant$$
$$\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{p(c)-1}\leqslant\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1}.$$

Переходим ко второму слагаемому

$$2\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}|\ln\beta|x-y||.$$

В силу (14), и, как следствие $|x-y|\to 0$ при $\beta\to\infty$, $|\ln\beta|x-y||$ можно оценить следующим образом:

$$|\ln\beta|x-y||=|\ln\beta|x-y|^{\theta}|x-y|^{1-\theta}|\leqslant$$
$$\frac{C_1}{(\beta|x-y|^{\theta})^{\mu_1}}+\frac{C_2}{|x-y|^{\mu_2}}$$

при некоторых достаточно малых $\mu_1>0$ и $\mu_2>0$, где C_1, C_2 — некоторые постоянные. Из последнего неравенства и (21) вытекает, что

$$2\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}|\ln\beta|x-y||\leqslant 2\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}\left(\frac{C_1}{(\beta|x-y|^{\theta})^{\mu_1}}+\frac{C_2}{|x-y|^{\mu_2}}\right)=$$
$$2C_1\left[\beta|x-y|^{\theta+\frac{p(c)-\theta\mu_1}{p(c)-1-\mu_1}-\theta}\right]^{p(c)-1-\mu_1}+2C_2\left[\beta|x-y|^{\theta+\frac{p(c)-\mu_2}{p(c)-1}-\theta}\right]^{p(c)-1}\leqslant$$
$$2C_1\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{p(c)-1-\mu_1}+2C_2\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{p(c)-1}\leqslant$$
$$\max\{2C_1,2C_2\}\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-\mu_1},$$

где мы учитываем, что

$$\frac{p(c)-\theta\mu_1}{p(c)-1-\mu_1}\geqslant\theta,\quad \frac{p(c)-\mu_2}{p(c)-1}\geqslant\theta,$$

когда θ удовлетворяет (20) и μ_2 достаточно мало.

Переходим к оценке третьего члена. Легко видеть, что $\ln^2\beta|x-y|$ может быть оценён следующим образом:

$$\ln^2\beta|x-y|\leqslant\frac{C_1^2}{(\beta|x-y|^{\theta})^{2\mu_1}}+\frac{C_1C_2}{(\beta|x-y|^{\theta})^{\mu_1}|x-y|^{\mu_2}}+\frac{C_2^2}{|x-y|^{2\mu_2}}.$$

Откуда, аналогично предыдущим рассуждениям, связанным с оценкой логарифма, получаем, учитывая малость μ_2 и (20), что

$$\left[\beta|x-y|^{1+\frac{1}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}\ln^2\beta|x-y|\leqslant\max\{C_1^2,C_2^2,2C_1C_2\}\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{\min_{c\in[-l,l]}p(c)-1-2\mu_1}.$$

Суммируя полученные результаты, мы получаем итоговую оценку

$$\begin{gathered} a^2(x,q)X - a^2(y,q)Y\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant C^* \left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{\min_{c\in[-l,l]} p(c)-1-2\mu_1}, \\ C^* = 3B^2 \max\{2C_1, 2C_2, C_1^2, C_2^2, 2C_1C_2\}. \end{gathered} \tag{22}$$

Таким образом, в качестве функции ω в (13) можно взять $\omega(z) = C^* z^{\min_{c\in[-l,l]} p(c)-1-2\mu_1}$.

Переходим теперь ко второму члену в (6). Согласно (13) нам нужно оценить следующую разность:

$$p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| - p'(y)q|q|^{p(y)-2}\ln|q|.$$

Добавив и отняв $p'(y)q|q|^{p(x)-2}\ln|q|$, получим

$$p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| - p'(y)q|q|^{p(y)-2}\ln|q| \leqslant$$

$$|p'(x)-p'(y)|\,|q|^{p(x)-1}|\ln|q|\,| + |p'(y)|\,|\ln|q|\,|\,\Big||q|^{p(x)-1} - |q|^{p(y)-1}\Big| \leqslant$$

$$K_p|x-y||q|^{p(x)-1}|\ln|q|\,| + \tilde{K}_p^2|x-y|\,|q|^{p(c)-1}\ln^2|q|,$$

где

$$|q|^{p(x)-1} - |q|^{p(y)-1} = |q|^{p(c)-1}\ln|q|p'(c)(x-y) \leqslant \tilde{K}_p|q|^{p(c)-1}|\ln|q|\,|\,|x-y|,$$

c лежит между x и y, K_p — постоянная Липшица функции $p'(z)$, $|p'(z)| \leqslant \tilde{K}_p$. Таким образом, имеем

$$\begin{gathered} p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| - p'(y)q|q|^{p(y)-2}\ln|q|\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant \\ \hat{K}\left(\left[\beta|x-y|^{\frac{p(x)}{p(x)-1}}\right]^{p(x)-1}|\ln\beta|x-y|\,| + \left[\beta|x-y|^{\frac{p(c)}{p(c)-1}}\right]^{p(c)-1}\ln^2\beta|x-y|\right), \end{gathered} \tag{23}$$

где $\hat{K} = \max\{K_p, K_p'^2\}$. Легко заметить, что (23) имеет такую же структуру как и (19). Используя рассуждения, приведённые для получения неравенства (22) из (19), получаем аналогично

$$p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| - p'(y)q|q|^{p(y)-2}\ln|q|\Big|_{q=\beta(x-y)} \leqslant C_*\left[\beta|x-y|^{\theta}\right]^{\min_{c\in[-l,l]} p(c)-1-2\mu_1} \tag{24}$$

с некоторой постоянной C_*, порождаемой C^* и $\hat{K}$. Таким образом, в качестве функции ω в (13) можно взять $\omega(z) = C_* z^{\min_{c\in[-l,l]} p(c)-1-2\mu_1}$.

Рассмотрим теперь третий член в (6). Положим $F(t,x,u,q) = g(x)u|q|^s - u$. Предположим, что $g(x)$ непрерывна по Липшицу с постоянной K_{lip}, $s > \max_{z\in[-l,l]} p(z) - 1$. Покажем, что F удовлетворяет соотношению типа (22), (24) с теми же самыми θ и ω. Действительно,

$$F(t,y,u,\beta(x-y)) - F(t,x,u,\beta(x-y)) \leqslant K_{lip}|u|\beta^s|x-y|^s|x-y| \leqslant K_{lip}M\left(\beta|x-y|^{\frac{s+1}{s}}\right)^s,$$

где $\max|u| \leqslant M$, в предположении существования ограниченного решения. Положим $\theta = 1 + \frac{1}{s}$. Легко заметить, что при $s > \max_{c\in[-l,l]} p(c) - 1$ имеем, что θ удовлетворяет (20). Более того, так как $s > \max_{c\in[-l,l]} p(c) - 1 > \min_{c\in[-l,l]} p(c) - 1$, то

$$F(t,y,r,\beta(x-y)) - F(t,x,r,\beta(x-y)) \leqslant K_{lip}M\left(\beta|x-y|^{\frac{s+1}{s}}\right)^s \leqslant$$

$$K_{lip}M\left(\beta|x-y|^{\theta}\right)^{\min_{c\in[-l,l]} p(c)-1-2\mu_1}.$$

Таким образом, мы показали, что построенная нами Φ удовлетворяет условию (13) с $\theta = 1 + 1/s$ и $\omega(z) = \hat{C} z^{\min_{c\in[-l,l]} p(c)-1-2\mu_1}$, $\hat{C} = \max\{C^*, C_*, K_{lip}M\}$.

2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

В этом параграфе мы получим априорные оценки классического решения регуляризованной задачи. Рассмотрим следующую регуляризацию исходного уравнения в области Ω_T:

$$u_t - \left((u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u_x\right)_x = f(t, x, u, u_x) - u, \tag{25}$$

где α — постоянная, $\alpha = r/m$ с положительными целыми r и m, $r < m$ и r — чётное число. Для такого α имеем $(z^\alpha)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} = |z|^{p(x)-2}$ Перепишем (25) в недивергентном виде

$$u_t - a_\varepsilon(x, u_x)u_{xx} = b_\varepsilon(x, u_x) + f(t, x, u, u_x) - u, \tag{26}$$

где

$$a_\varepsilon(x, z) = (z^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}-1}((p(x) - 1)\, z^\alpha + \varepsilon),$$
$$b_\varepsilon(x, z) = \frac{1}{\alpha} p'(x) z (z^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} \ln(z^\alpha + \varepsilon).$$

Легко показать, что функция $a_\varepsilon(x, z)$ возрастает по ε. Также можно отметить, что из определения $a_\varepsilon(x, z)$ следует, что $a_\varepsilon(x, z) = a_\varepsilon(x, -z)$.

Наша цель — получить равномерные по ε априорные оценки классических решений регуляризованной задачи. Это даст возможность предельным переходом получить вязкое решение, гладкость которого указана в теоремах 1, 2.

Следующая лемма является простым следствием принципа максимума, применённого к задаче (26), (2), (3).

Лемма 2. *Для любого классического решения задачи* (26), (2), (3) *верна следующая оценка:*

$$M_1 \leqslant u(t, x) \leqslant M_2.$$

Перейдём к получению априорных оценок производной классического решения регуляризованной задачи.

Введём неубывающую, неотрицательную функцию $\psi(\rho) \in \mathbb{C}^1(0, +\infty)$ такую, что существуют постоянные q_0, q_1, которые удовлетворяют $\max\{1, K\} \leqslant q_0 < q_1 < +\infty$, и выполнено

$$\int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)} = M = \max\{M_2, M_2 - M_1, -M_1\}. \tag{27}$$

Положим

$$\tau(\kappa) = \int\limits_{\kappa}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)},$$

где параметр κ меняется в пределах $[q_0, q_1]$, а функция ψ определена в (27). Пусть

$$\tau_0 \equiv \tau(q_0) = \int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)}. \tag{28}$$

Введём функцию $\mathrm{h}(\tau)$ как решение следующей задачи:

$$\mathrm{h}'' + \psi(|\mathrm{h}'|) = 0, \quad \mathrm{h}(0) = 0, \quad \mathrm{h}(\tau_0) = M.$$

Легко видеть, что

$$\mathrm{h}(\tau(\kappa)) = \int\limits_{\kappa}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}.$$

Более того, $\mathrm{h}(\tau(q_0)) = M$ (в силу (27)). Заметим, что $\mathrm{h}'(\tau) \geqslant K$ для $\tau \in [0, \tau_0]$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (4), (7), (27). *Тогда для любого классического решения задачи* (26), (2), (3) *справедливы следующие оценки:*

$$|u(t,x)| \leqslant h(l-x) \quad \text{в} \quad [0,T] \times \{[l-\tau_0, l] \cap [-l,l]\},$$

$$|u(t,x)| \leqslant h(x+l) \quad \text{в} \quad [0,T] \times \{[-l, -l+\tau_0] \cap [-l,l]\}.$$

Доказательство. Начнём с первого неравенства. Введём следующий линейный оператор

$$\mathrm{L} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a_\varepsilon(x,u_x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1.$$

Тогда

$$\mathrm{L}u \equiv u_t - a_\varepsilon(x,u_x)u_{xx} + u = b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x)$$

и для $\zeta = l - x$

$$\mathrm{Lh}(\zeta) = -a_\varepsilon(x,u_x)\mathrm{h}_{xx}(\zeta) + \mathrm{h}(\zeta) = -a_\varepsilon(x,u_x)\mathrm{h}''(\zeta) + \mathrm{h}(\zeta).$$

Принимая во внимание, что $\mathrm{h}(\zeta) \geqslant 0$, получаем

$$\mathrm{Lh}(\zeta) \geqslant a_\varepsilon(x,u_x)\psi(\mathrm{h}'(\zeta)). \tag{29}$$

Таким образом, для функции

$$v(t,x) \equiv u(t,x) - \mathrm{h}(\zeta)$$

получаем

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u - \mathrm{Lh} \leqslant b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x) - a_\varepsilon(x,u_x)\psi(\mathrm{h}'(\zeta)). \tag{30}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u - \mathrm{Lh} = v_t - a_\varepsilon(x,u_x)v_{xx} + v. \tag{31}$$

Следовательно, из (30), (31) мы получаем

$$v_t - a_\varepsilon(x,u_x)v_{xx} + v \leqslant b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x) - a_\varepsilon(x,u_x)\psi(\mathrm{h}'(\zeta)). \tag{32}$$

Обозначим через

$$\Omega_T^{\tau_0} = \{t \in (0,T), x \in (l-\tau_0, l) \cap (-l,l)\}, \quad \Gamma_T^{\tau_0} = \partial\Omega_T^{\tau_0} \setminus \{t = T, x \in (l-\tau_0, l) \cap (-l,l)\},$$

где $\Gamma_T^{\tau_0}$ — параболическая граница области $\Omega_T^{\tau_0}$. Предположим, что в некоторой точке $N \in \overline{\Omega_T^{\tau_0}} \setminus \Gamma_T^{\tau_0}$, функция $v(t,x)$ достигает положительного максимума. В этой точке имеем $u > 0$, $v_t \geqslant 0$, $v_x = 0$, откуда следует $u_x = -\mathrm{h}'$ и $\mathrm{L}v\Big|_N > 0$. В то же время, в точке N мы имеем

$$v_t - a_\varepsilon(x,u_x)v_{xx} + v\Big|_N \leqslant b_\varepsilon(x,-\mathrm{h}') + f(t,x,u,-\mathrm{h}') - a_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\psi(\mathrm{h}'(\zeta))\Big|_N. \tag{33}$$

Так как $p(x) \in \mathbb{C}^1([-l,l])$ и $\mathrm{h}' \geqslant 1$, то

$$\begin{gathered}\Big|b_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\Big|\Big|_N = \\ \frac{1}{\alpha}|p'(x)|\,\mathrm{h}'((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)\Big|_N \leqslant \frac{1}{\alpha}|p'(x)|\,\mathrm{h}'((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}+1}\Big|_N.\end{gathered} \tag{34}$$

Можно заметить, что для любого $\mu > 0$ функция $\psi(\mathrm{h}'(\zeta)) = \mu\mathrm{h}'^2(\zeta)$ удовлетворяет (27) с определёнными q_0, q_1. Из представления функции $a_\varepsilon(x,z)$, взяв указанное ψ, легко получить, что для выполнения неравенства

$$\Big|b_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\Big|\Big|_N \leqslant a_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\psi(\mathrm{h}'(\zeta))\Big|_N \tag{35}$$

достаточно чтобы имело место неравенство (напомним, что $(-\mathrm{h}')^\alpha = (\mathrm{h}')^\alpha$)

$$\frac{1}{\alpha}|p'(x)|((\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)\Big|_N \leqslant \mu \mathrm{h}'\Big|_N.$$

Что очевидно имеет место при $\frac{1}{\alpha}\max_{|x|\leqslant l}|p'(x)| < \mu$ и достаточно малых ε. Таким образом, из (7), (34) и (35) вытекает

$$v_t - a_\varepsilon(x,u_x)v_{xx} + v\Big|_N \leqslant b_\varepsilon(x,-\mathrm{h}') + f(t,x,u,-\mathrm{h}') - a_\varepsilon(x,-\mathrm{h}')\psi(\mathrm{h}'(\zeta))\Big|_N \leqslant 0, \qquad (36)$$

что противоречит тому, что v достигает положительного максимума внутри области.

Рассмотрим v на параболической границе $\Gamma_T^{\tau_0}$. Если $\tau_0 \geqslant 2l$, тогда $\Gamma_T^{\tau_0} = \Gamma_T$ — параболическая граница области $(0,T)\times(-l,l)$, и получаем

1. при $x = l$, $t \in [0,T]$: $v = 0$;
2. при $x = -l$, $t \in [0,T]$: $v = -\mathrm{h}(2l) \leqslant 0$;
3. при $t = 0$, $x \in [-l,l]$:

$$v = u_0(x) - \mathrm{h}(l-x) = u_0(x) - u_0(l) - (\mathrm{h}(l-x) - \mathrm{h}(0)) \leqslant (K - \mathrm{h}'(\xi))(l-x) \leqslant 0.$$

Если же $\tau_0 < 2l$, тогда $\Gamma_T^{\tau_0}$ состоит из двух частей: $\Gamma_{1T}^{\tau_0}$ и $\Gamma_{2T}^{\tau_0}$, где $\Gamma_{1T}^{\tau_0} \subset \Gamma_T$ и $\Gamma_{2T}^{\tau_0} = [0,T]\times\{x = l-\tau_0\} \in \Omega_T$. Учитывая, что $\mathrm{h}(\tau_0) = M$, получаем на новой части границы

4. $x = l-\tau_0$, $t\in[0,T]$: $v = u(t,x) - \mathrm{h}(\tau_0) = u(t,x) - M \leqslant 0$.

В итоге,

$$v(t,x) \leqslant 0 \quad \text{или} \quad u(t,x) \leqslant \mathrm{h}(l-x) \quad \text{в} \quad [0,T]\times[l-\tau_0,l]\cap[-l,l].$$

Перейдём к получению оценки снизу. Введём функцию $w(t,x) \equiv u(t,x) + \mathrm{h}(\zeta)$. Подобно (29)–(36) можно получить

$$w_t - a_\varepsilon(x,u_x)w_{xx} + w \geqslant b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x) + a_\varepsilon(x,u_x)\psi(\mathrm{h}'(\zeta)). \qquad (37)$$

Предположим, что в некоторой точке $N_1 \in \overline{\Omega_T^{\tau_0}} \setminus \Gamma_T^{\tau_0}$ функция w достигает отрицательного минимума. Тогда в N_1 имеем $u < 0$, $w_t \leqslant 0$, $w_x = 0$, откуда следует $u_x = \mathrm{h}'$ и $\mathrm{L}w\Big|_{N_1} < 0$. С другой стороны, используя (7), (34), (35), которые также имеют место при замене $-\mathrm{h}'$ на h', из (37) получаем

$$w_t - a_\varepsilon(x,u_x)w_{xx} + w\Big|_{N_1} \geqslant 0.$$

Это противоречит предположению о том, что $w(t,x)$ достигает отрицательного минимума в точке N_1. Как и при получении оценки сверху, если $\tau_0 \geqslant 2l$, мы получаем

5. при $x = l$, $t\in[0,T]$: $w = 0$;
6. при $x = -l$, $t \in [0,T]$: $w = \mathrm{h}(2l) \geqslant 0$;
7. при $t = 0$, $x \in [-l,l]$:

$$w = u_0(x) + \mathrm{h}(l-x) = u_0(x) - u_0(l) + (\mathrm{h}(l-x) - \mathrm{h}(0)) \geqslant (-K + \mathrm{h}'(\xi))(l-x) \geqslant 0.$$

Если же $\tau_0 < 2l$, то на новой части границы

8. $x = l-\tau_0$, $t\in[0,T]$: $w = u(t,x) + \mathrm{h}(\tau_0) = u(t,x) + M \geqslant 0$.

Значит

$$w(t,x) \geqslant 0 \quad \text{или} \quad u(t,x) \geqslant -\mathrm{h}(l-x) \quad \text{в} \quad [0,T]\times[l-\tau_0,l]\cap[-l,l].$$

Отсюда мы заключаем, что

$$|u(t,x)| \leqslant \mathrm{h}(l-x) \quad \text{в} \quad [0,T]\times[l-\tau_0,l]\cap[-l,l].$$

Введём теперь функции $v_1(t,x) = u(t,x) - \mathrm{h}(\eta)$, $w_1(t,x) = u(t,x) + \mathrm{h}(\eta)$, где $\eta = l + x$. Действуя аналогично, получаем

$$|u(t,x)| \leqslant \mathrm{h}(l+x) \quad \text{в} \quad [0,T]\times[-l,-l+\tau_0]\cap[-l,l].$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. *Предположим, что все условия леммы* 3 *выполнены. Потребуем дополнительно выполнение* (8)–(10). *Тогда для любого классического решения задачи* (26), (2), (3) *имеет место следующая оценка:*

$$|u_x(t,x)| \leqslant h'(0) = q_1.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$u_t(t,x) - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))u_{xx}(t,x) = b_\varepsilon(x,u_x(t,x)) + f(t,x,u(t,x),u_x(t,x)) - u(t,x), \tag{38}$$

$$u_t(t,y) - a_\varepsilon(y,u_y(t,y))u_{yy}(t,y) = b_\varepsilon(y,u_y(t,y)) + f(t,y,u(t,y),u_y(t,y)) - u(t,y), \tag{39}$$

где $x, y \in (-l,l)$. Вычитая уравнение (39) из (38), для

$$\mathrm{v}(t,x,y) \equiv u(t,x) - u(t,y)$$

получаем следующее соотношение:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}\mathrm{v} \equiv \mathrm{v}_t - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{v}_{xx} - a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{v}_{yy} + \mathrm{v} = \\ b_\varepsilon(x,u_x(t,x)) - b_\varepsilon(y,u_y(t,y)) + f(t,x,u(t,x),u_x(t,x)) - f(t,y,u(t,y),u_y(t,y)).\end{gathered} \tag{40}$$

Рассмотрим (40) в области

$$P_T(\tau_0) = \{(t,x,y) : t\in(0,T);\ x,y\in(-l,l), 0 < x-y < \tau_0\}.$$

Обозначим через $\Gamma_T(\tau_0)$ параболическую границу области $P_T(\tau_0)$:

$$\Gamma_T(\tau_0) = \partial P_T(\tau_0) \setminus \{(T,x,y) : x,y\in(-l,l), 0 < x-y < \tau_0\}.$$

Пусть $\tau_0 < 2l$. Положим

$$\mathrm{w}(t,x,y) = \mathrm{v}(t,x,y) - \mathrm{h}(x-y).$$

Для w из равенства (40) мы получаем следующее уравнение

$$\begin{gathered}\mathrm{w}_t - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{xx} - a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{w}_{yy} + \mathrm{w} = \\ b_\varepsilon(x,u_x(t,x)) - b_\varepsilon(y,u_y(t,y)) + f(t,x,u(t,x),u_x(t,x)) - f(t,y,u(t,y),u_y(t,y)) + \\ (a_\varepsilon(x,u_x(t,x)) + a_\varepsilon(y,u_y(t,y)))\mathrm{h}'' - \mathrm{h},\end{gathered} \tag{41}$$

так как

$$\mathcal{L}\mathrm{h} = -(a_\varepsilon(x,u_x(t,x)) + a_\varepsilon(y,u_y(t,y)))\mathrm{h}'' + \mathrm{h}.$$

Предположим, что в некоторой точке $S \in \overline{P}_T(\tau_0)\backslash\Gamma_T(\tau_0)$ функция w достигает положительного максимума. С одной стороны, мы имеем

$$\mathrm{w}_t - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{xx} - a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{w}_{yy} + \mathrm{w}\Big|_S > 0, \tag{42}$$

с другой же стороны в этой точке имеют место следующие соотношения:

$$u_x(t,x) = u_y(t,y) = \mathrm{h}', \quad u(t,x) - u(t,y) \geqslant \mathrm{h}(x-y).$$

Из (41), используя (34), (35), равенство $\mathrm{h}'' + \psi(|\mathrm{h}'|) = 0$ и выбор функции ψ, мы получаем

$$\begin{gathered} \mathrm{w}_t - a_\varepsilon(x, u_x(t,x))\mathrm{w}_{xx} - a_\varepsilon(y, u_y(t,y))\mathrm{w}_{yy} + \mathrm{w}\Big|_S \leqslant \\ f(t,x,u(t,x),\mathrm{h}') - f(t,y,u(t,y),\mathrm{h}')\Big|_S. \end{gathered} \tag{43}$$

Чтобы получить противоречие с неравенством (42), необходимо показать, что

$$f(t,x,u(t,x),\mathrm{h}') - f(t,y,u(t,y),\mathrm{h}')\Big|_S \leqslant 0. \tag{44}$$

Положим $S = (t_0, x_0, y_0)$. Представим (44) в следующем виде:

$$\begin{gathered} f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)) - f(t_0,y_0,u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)) = \\ \left[f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)) - f(t_0,y_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))\right] + \\ \left[f(t_0,y_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)) - f(t_0,y_0,u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0))\right]. \end{gathered} \tag{45}$$

Используя (8), (9), из (45) получим

$$\begin{gathered} f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)) - f(t_0,y_0,u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)) \leqslant \\ \Big[K_1\big(t_0,x_0,y_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)\big)(x_0-y_0) - \\ \gamma\big(t_0,x_0,u(t_0,x_0),u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)\big)(u(x_0)-u(y_0))\Big]. \end{gathered} \tag{46}$$

В точке максимума

$$u(t_0,x_0) - u(t_0,y_0) > \mathrm{h}(x_0-y_0) = \mathrm{h}(x_0-y_0) - \mathrm{h}(0) = \mathrm{h}'(\xi)(x_0-y_0), \tag{47}$$

где $\xi \in (0, x_0-y_0)$. Функция h' удовлетворяет неравенству $q_0 \leqslant \mathrm{h}' \leqslant q_1$. Используя (9), (10), (47), неравенство (46) можно переписать в виде (ниже, для удобства, мы опустим аргументы у K_1 и γ)

$$\begin{gathered} f(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)) - f(t_0,y_0,u(t_0,y_0),\mathrm{h}'(x_0-y_0)) \leqslant \left[K_1 - \gamma\mathrm{h}'(\xi)\right](x_0-y_0) \leqslant \\ \left[\gamma C \mathrm{h}'^{\nu}(x_0-y_0) - \gamma\mathrm{h}'(\xi)\right](x_0-y_0) \leqslant \gamma\left[C\,q_1^\nu - q_0\right](x_0-y_0) \leqslant 0 \end{gathered} \tag{48}$$

при условии, что

$$C\,q_1^\nu - q_0 \leqslant 0. \tag{49}$$

Заметим, что из (27) и выбора функции ψ вытекает, что при $\nu < 1$ и любом C можно подобрать достаточно большое q_0 так, чтобы (49) имело место. Действительно, из (27) вытекает $q_1 = e^{\mu M} q_0$. Откуда получаем, что (49) имеет место при $q_0 \geqslant \left(Ce^{\mu M\nu}\right)^{\frac{1}{1-\nu}}$. Таким образом, $\tilde{L}W\Big|_{Q_0} < 0$, что противоречит (42). Следовательно, w не может достигать положительного максимума внутри $P_T(\tau_0)$.

Рассмотрим $\Gamma_T(\tau_0)$. Из леммы 3 следует, что

1. при $y = -l$, $x \in [-l, -l+\tau_0]$, $t \in [0,T]$

$$\mathrm{w} = u(t,x) - \mathrm{h}(x+l) \leqslant 0;$$

2. при $x = l$, $y \in [l-\tau_0, l]$, $t \in [0,T]$

$$\mathrm{w} = -u(t,y) - \mathrm{h}(l-y) \leqslant 0;$$

3. при $x = y \in [-l,l]$, $t \in [0,T]$ имеем $\mathrm{w} = 0$, и при $x - y = \tau_0$ таких, что x, $y \in [-l,l]$

$$\mathrm{w} = u(t,x) - u(t,y) - \mathrm{h}(\tau_0) \leqslant 0,$$

используя (27) и параметрическое представление функции h;

4. при $t = 0$, x, $y \in [-l,l]$, получаем

$$\mathrm{w} = u_0(x) - u_0(y) - \mathrm{h}(x-y) \leqslant 0,$$

где последнее неравенство является следствием (4) и того, что $\mathrm{h}' \geqslant q_0 \geqslant K$.

Таким образом, мы заключаем, что $\mathrm{w} \leqslant 0$ в $\overline{P}_T(\tau_0)$ и, как следствие,

$$u(t,x) - u(t,y) \leqslant \mathrm{h}(x-y) \quad \text{в} \quad \overline{P}_T(\tau_0).$$

Аналогичный результат легко получить подобным же образом и в случае $\tau_0 \geqslant 2l$. В этом случае $\overline{P}_T(\tau_0)$ и $\Gamma_T(\tau_0)$ примут вид

$$P_T(\tau_0) = \{(t,x,y) : t \in (0,T);\ x,y \in (-l,l), 0 < x-y\},$$

$$\Gamma_T(\tau_0) = \partial P_T(\tau_0) \setminus \{(T,x,y) : x,y \in (-l,l), 0 < x-y\}.$$

Определим теперь функцию

$$\mathrm{v}_1 = u(t,y) - u(t,x).$$

Вычитая теперь (38) из (39), аналогично (40), получаем

$$\begin{gathered}\mathrm{v}_{1t} - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{v}_{1xx} - a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{v}_{1yy} + \mathrm{v}_1 = \\ b_\varepsilon(y,u_y(t,y)) - b_\varepsilon(x,u_x(t,x)) + f(t,y,u(t,y),u_y(t,y)) - f(t,x,u(t,x),u_x(t,x)).\end{gathered} \tag{50}$$

Пусть $\tau_0 < 2l$. Рассмотрим (50) в области $P_T(\tau_0)$ и введём функцию

$$\mathrm{w}_1 = u(t,y) - u(t,x) - \mathrm{h}(x-y).$$

Подобно (41), используя неотрицательность функции h, получим

$$\mathrm{w}_{1t} - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{1xx} - a_\varepsilon(y,u_yt,y))\mathrm{w}_{1yy} + \mathrm{w}_1 \leqslant$$

$$b_\varepsilon(y,u_y(t,y)) - b_\varepsilon(x,u_x(t,x)) + f(t,y,u(t,y),u_y(t,y)) - f(t,x,u(t,x),u_x(t,x)) +$$
$$(a_\varepsilon(x,u_x(t,x)) + a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{h}''.$$

Предположим, что в некоторой точке $S_1 \in \overline{P}_T(\tau_0) \setminus \Gamma_T(\tau_0)$ функция w_1 достигает положительного максимума. В этой точке $\mathrm{w}_{1y} = \mathrm{w}_{1x} = 0$ или

$$\begin{gathered}u_x(t,x) = u_y(t,y) = -\mathrm{h}', \quad u(t,y) - u(t,x) \geqslant \mathrm{h}(x-y), \\ \mathrm{w}_{1t} - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{1xx} - a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{w}_{1yy} + \mathrm{w}_1 > 0.\end{gathered} \tag{51}$$

Используя (34), (35), равенство $\mathrm{h}'' + \psi(|\mathrm{h}'|) = 0$ и выбор функции ψ, аналогично (43), получаем

$$\mathrm{w}_{1t} - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{1xx} - a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{w}_{1yy} + \mathrm{w}_1\Big|_{S_1} \leqslant$$

$$-f(t,x,u(t,x),\mathrm{h}') + f(t,y,u(t,y),\mathrm{h}')\Big|_S.$$

Действуя так же, как в (44)–(49), получаем, что

$$\mathrm{w}_{1t} - a_\varepsilon(x,u_x(t,x))\mathrm{w}_{1xx} - a_\varepsilon(y,u_y(t,y))\mathrm{w}_{1yy} + \mathrm{w}_1\Big|_{S_1} \leqslant 0,$$

что противоречит (51). Следовательно, w_1 не может достигать положительного максимума внутри $P_T(\tau_0)$. Подобно предыдущим рассмотрениям можно показать, что $\mathrm{w}_1(t,x,y) \leqslant 0$ на $\Gamma_T(\tau_0)$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что $\mathrm{w}_1 \leqslant 0$ в $\overline{P}_T(\tau_0)$ и, следовательно,

$$|u(t,x) - u(t,y)| \leqslant \mathrm{h}(x-y) \quad \text{в} \quad \overline{P}_T(\tau_0).$$

Аналогично рассматривается случай $\tau_0 \geqslant 2l$.

Для случая $x < y$, в силу симметрии переменных x и y, можно в точности применить все предыдущие рассуждения. В итоге получаем, что при

$$x, y \in [-l,l], \quad |x-y| \leqslant \tau_0, \quad t \in [0,T]$$

имеет место неравенство

$$|u(t,x) - u(t,y)| \leqslant \mathrm{h}(|x-y|),$$

из которого вытекает требуемая оценка. Лемма доказана. □

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Существование глобального классического решения задачи (26), (2), (3) вытекает из полученных в предыдущем параграфе априорных оценок [39]. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ монотонная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю при $k \to \infty$. Получим вязкое решение задачи (1)–(3) как предел классических решений u_{ε_k} задачи (26), (2), (3) при $k \to \infty$. Но прежде сформулируем лемму, которая является классическим результатом теории параболических уравнений [40] (см. также [41]).

Лемма 5. *Для любого классического решения задачи* (26), (2), (3) *выполняется следующее неравенство:*

$$|u_{\varepsilon_k}(t+h,x) - u_{\varepsilon_k}(t,x)| \leqslant Ch^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < h < 1, \quad t,\, t+h \in [0,T],$$

где постоянная C зависит от M_1, M_2, K, K_1, γ, $\max|b_\varepsilon(x,u_x) + f(t,x,u,u_x) - u|$, где максимум берётся по множеству $\bar{\Omega}_T \times [M_1,M_2] \times q$, где $q_0 \leqslant |q| \leqslant q_1$.

Заметим, что равномерная непрерывность по Гёльдеру классических решений задачи (26), (2), (3) нам необходима для доказательства их равномерной сходимости при доказательстве существования вязкого решения исходной задачи.

Доказательство теоремы 1. Для упрощения обозначений мы опустим индекс k и будем писать ε и $\varepsilon \to 0$. Как известно [18], гладкая функция является вязким решением уравнения тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ему в классическом смысле. Таким образом, классическое решение u_ε регуляризованной задачи (26), (2), (3) является также и вязким решением той же самой задачи. Напомним, что функция Φ определена в (6):

$$\Phi(t,x,u,q,X) = (p(x)-1)|q|^{p(x)-2}X + p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q| + f(t,x,u,q) - u.$$

Обозначим через

$$\Phi_\varepsilon(t,x,u,q,X) = (|q|^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}-1}((p(x)-1)q^\alpha+\varepsilon)X+$$

$$\frac{1}{\alpha}p'(x)q(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon)+f(t,x,u,q)-u,$$

где $(q,X)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Одним из стандартных свойств вязких решений является следующее утверждение [18] (в нашем случае $n=1$).

Лемма 6 (Свойство устойчивости). *Пусть*

$$\Phi_\varepsilon(t,x,u,p,X):\mathcal{G}=\Omega_T\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n\mapsto\mathbb{R}$$

непрерывна на $\mathcal{G}$, где $\mathbb{S}^n$ — пространство симметричных $n\times n$ матриц, и u_ε непрерывна на $\overline{\Omega}_T$. Пусть u_ε — вязкое решение уравнения

$$u_t-\Phi_\varepsilon(t,x,u,\nabla u,\nabla^2u)=0 \quad \textit{в} \quad \Omega_T \quad \textit{при} \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,$$

$\Phi_\varepsilon(t,x,r,p,X)\to\Phi(t,x,r,p,X)$ равномерно на компактных подмножествах $\mathcal{G}$, а $u_\varepsilon\to u$ равномерно на компактных подмножествах Ω_T при $\varepsilon\to0$. Тогда u является вязким решением уравнения

$$u_t-\Phi(t,x,u,\nabla u,\nabla^2u)=0 \quad \textit{в} \quad \Omega_T.$$

Из лемм 3, 5 мы получаем существование непрерывной функции $u(t,x)$ такой, что $u_\varepsilon\to u$ равномерно на компактных подмножествах Ω_T. Покажем, что на каждом компактном подмножестве $\mathcal{G}$ функция Φ_ε сходится равномерно к Φ. Действительно, положим

$$\Phi_{1\varepsilon}(t,x,r,q,X) = (|q|^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}-1}((p(x)-1)q^\alpha+\varepsilon)X+\frac{1}{\alpha}p'(x)q(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon),$$

$$\Phi_1(t,x,r,q,X)=(p(x)-1)|q|^{p(x)-2}X+p'(x)q|q|^{p(x)-2}\ln|q|.$$

Сходимость $\Phi_\varepsilon\to\Phi$ очевидно эквивалентна сходимости $\Phi_{1\varepsilon}\to\Phi_1$. Легко видеть, что $\Phi_{1\varepsilon}\to\Phi_1$ на каждом компактном подмножестве $\mathcal{G}$ при $\varepsilon\to0$. Для того, чтобы доказать равномерную сходимость $\Phi_{1\varepsilon}\to\Phi_1$, покажем, что имеют место следующие равномерные сходимости:

$$(|q|^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}-1}((p(x)-1)q^\alpha+\varepsilon)X\rightrightarrows(p(x)-1)|q|^{p(x)-2}X, \tag{52}$$

$$(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}\rightrightarrows|q|^{p(x)-2}\ln|q| \tag{53}$$

на произвольных компактах по переменным (x,q,X).

Заметим, что $\Phi_{1\varepsilon}$ и Φ_1 — непрерывные функции. Равномерная сходимость в (52) вытекает из того, что $a_\varepsilon(x,q)$ является монотонной по ε. Для того, чтобы показать (53), рассмотрим разность

$$(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-|q|^{p(x)-2}\ln|q|$$

и покажем, что она равномерно стремится к нулю. Для этого запишем её в виде

$$(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-|q|^{p(x)-2}\ln|q|=$$

$$(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\left[\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-\ln|q|\right]+\left[(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}-|q|^{p(x)-2}\right]\ln|q|.$$

Положим для удобства

$$A_\varepsilon=(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}\left[\ln(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}-\ln|q|\right],\quad B_\varepsilon=\left[(q^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}-|q|^{p(x)-2}\right]\ln|q|.$$

Легко заметить, что функция A_ε является монотонной функцией по ε при любых фиксированных (x, q), следовательно, $A_\varepsilon \rightrightarrows 0$. Что касается B_ε, то она является монотонной при любых фиксированных (x, q), $|q| < 1$ и (x, q), $|q| \geqslant 1$. Следовательно, и $B_\varepsilon \rightrightarrows 0$.

Принимая во внимание свойство устойчивости вязких решений, начально-краевые условия (2), (3), заключаем, что $u = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon$ является вязким решением задачи (1)–(3). Из равномерных по ε оценок, полученных в леммах 3 и 5, вытекает, что построенное решение является непрерывным по Гёльдеру по времени с показателем $\frac{1}{2}$ и непрерывным по Липшицу по пространственной переменной в Ω_T. Теорема 1 доказана. □

Условия (12)–(14) гарантируют выполнение теоремы сравнения для вязких суб- и суперрешений задачи (1)–(3), указанной в теореме 2 гладкости (см. [18], гл.8, теорема 8.2). Следовательно, при выполнении указанных условий полученное решение является единственным. Теорема 2 доказана.

Замечание (о полной липшицевости вязких решений). Рассмотрим уравнение (1) в случае, когда f не зависит от t:

$$u_t - (|u_x|^{p(x)-2}u_x)_x = f(x, u, u_x) - u \quad \text{в} \quad \Omega_T = (0, T) \times (-l, l). \tag{54}$$

Для того, чтобы доказать липшицевость по переменной t необходимо доказать соответствующие априорные оценки классического решения регуляризованной задачи [36]. Для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось

$$\max_{|x|<l} \left(|u_{0x}|^{p(x)-2} u_{0x})_x \right| < \infty, \tag{55}$$

а также условие

$$f(x, u_2, q) - f(x, u_1, q) - u_2 + u_1 \leqslant 0, \quad u_2 > u_1,$$

которое в нашем случае имеет место при выполнении (9). Следующие теоремы является прямым следствием результата статьи [36].

Теорема 3. *Пусть в дополнении к условиям теоремы 1 выполнено условие* (55). *Тогда для произвольного* $T > 0$, *существует вязкое непрерывное по Липшицу решение* $u(t, x)$ *задачи* (54), (2), (3) *и*

$$M_1 \leqslant u \leqslant M_2, \quad ||u_x||_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_T)} \leqslant q_1.$$

Теорема 4. *Пусть в дополнении к условиям теоремы 2 выполнено условие* (55). *Тогда для произвольного* $T > 0$, *существует единственное вязкое непрерывное по Липшицу решение* $u(t, x)$ *задачи* (54), (2), (3) *и*

$$M_1 \leqslant u \leqslant M_2, \quad ||u_x||_{\mathbb{L}^\infty(\Omega_T)} \leqslant q_1.$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0008). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Acerbi E., Mingione G.* Regularity results for stationary electro-rheological fluids // Arch. Ration. Mech. Anal. 2002. V. 164. P. 213–259.
2. *Antontsev S. N., Rodrigues J. F.* On stationary thermo-rheological viscous flows // Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII Sci. Mat. 2006. V. 52, N 1. P. 19–36.
3. *Rajagopal K., Ružička M.* Mathematical modelling of electro-rheological fluids // Contin. Mech. Thermodyn. 2001. V. 13. P. 59–78.
4. *Ružička M.* Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Berlin: Springer, 2000.
5. *Aboulaicha R., Meskinea D., Souissia A.* Regularity results for stationary electro-rheological fluids // Arch. Ration. Mech. Anal. 2002. V. 164. P. 213–259.
6. *Chen Y., Levine S., Rao M.* Variable exponent, linear growth functionals in image restoration // SIAM J. Appl. Math. 2006. V. 66, N 4. P. 1383–1406.
7. *Antontsev S., Shmarev S.* Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up. Paris: Atlantis Press. 2015.
8. *Arora R., Shmarev S.* Strong solutions of evolution equations with $p(x,t)$-Laplacian: Existence, global higher integrability of the gradients and second-order regularity // J. Math. Anal. Appl. 2020. V. 493, N 1. P. 1–31.
9. *Arora R., Shmarev S.* Existence and regularity results for a class of parabolic problems with double phase flux of variable growth // Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. AMat. 2023. V. 117, N 34. P. 1–48.
10. *Belloni M., Kawohl B.* The pseudo-p-Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as $p \to \infty$ // ESAIM: Control Optim. Calc. Variations. 2004. V. 10, N 1. P. 28–52.
11. *Birindelli I., Demengel F.* Existence and regularity results for fully nonlinear operators on the model of the pseudo Pucci's operators // J. Elliptic Parabol. Equ. 2016. V. 2. P. 171–187.
12. *Demengel F.* Lipschitz interior regularity for the viscosity and weak solutions of the pseudo p-Laplacian equation // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 21, N 3. P 373–400.
13. *Juutinen P.* On the definition of viscosity solutions for parabolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129, N 10. P. 2907-–2911.
14. *Tersenov Ar. S.* Viscosity subsolutions and supersolutions for non-uniformly and degenerate elliptic equations // Arch. Math. 2009. V. 45, N 1. P. 19-–35.
15. *Juutinen P., Lindqvist P., Manfredi J. J.* On the equivalence of the viscosity solutions and weak solutions for a quasilinear equation // SIAM J. Math. Anal. 2001. V. 33, N 3. P. 699–717.
16. *Medina M., Ochoa P.* On viscosity and weak solutions for non-homogeneous p-Laplace equations // Adv. Nonlinear Anal. 2019. V. 8, N 1. P. 468–481.
17. *Siltakoski J.* Equivalence of viscosity and weak solutions for a p-parabolic equation // J. Evol. Equ. 2021. V. 21, N 4. P. 2047–2080.
18. *Dall'Aglio A., Giachetti D., Segura de Leon S.* Global existence for parabolic problems involving the p-Laplacian and a critical gradient term // Indiana Univ. Math. J. 2009, V. 58, N 1. P. 1–48.
19. *Dall'Aglio A., De Cicco V., Giachetti D., Puel J.-P.* Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains // NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2004. V. 11, N 4. P. 431–450.
20. *Nakao M., Chen C.* Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m-Laplacian type with a nonlinear convection term // J. Differ. Equ. 2000. V. 162, N 1. P. 224–250.
21. *Figueiredo D. G., Sanchez J., Ubilla P.* Quasilinear equations with dependence on the gradient // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. 2009. V. 71, N 10. P. 4862–4868.
22. *Iturriaga L., Lorca S., Sanchez J.* Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a p-gradient term // NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2008. V. 15, N 6. P. 729–743.
23. *Li J., Yin J, Ke Y.* Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 383, N 1. P. 147–158.
24. *Ruiz D.* A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems // J. Differ. Equ. 2004. V. 199, N 1. P. 96–114.

25. *Zou H. H.* A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2008. V. 33, N 4. P. 417–437.
26. *Dwivedi G., Gupta S.* An existence result for p-Laplace equation with gradient nonlinearity in $\mathbb{R}^N$ // Commun. Math. 2022. V. 30, N 1. P. 149–159.
27. *Leonori T., Porretta A., Riey G.* Comparison principles for p-Laplace equations with lower order terms // Ann. di Mat. Pura ed Appl. V. 196, N 3. P. 877–903.
28. *Bendahmane M., Karlsen K. H.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data // Potential Anal. 2005. V. 22, N 3. P. 207–227.
29. *Fu Y., Pan N.* Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 362, N 2. P. 313–326.
30. *Zhan H.* On anisotropic parabolic equations with a nonlinear convection term depending on the spatial variable // Adv. Differ. Equ. 2019. V. 2019, N 27. P. 1–26.
31. *Zhao J.* Existence and nonexistence of solutions for $u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$ // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 172, N 1. P. 130–146.
32. *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* Existence results for anisotropic quasilinear parabolic equations with time-dependent exponents and gradient term // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 480, N 1. P. 1–18.
33. *Терсенов Ар. С.* Разрешимость задачи Дирихле для анизотропных параболических уравнений в невыпуклых областях // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 1. С. 131–146.
34. *Терсенов Ар. С.* О существовании вязких решений анизотропных параболических уравнений с переменным показателем анизотропности // Сиб. журн. индустр. матем. 2022. Т. 25, № 4. С. 206–220.
35. *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* The problem of Dirichlet for evolution one-dimensional p-Laplacian with nonlinear source // J. Math. An. Appl. 2008. V. 340, N 2. P. 1109–1119.
36. *Tersenov Al. S.* The one-dimensional parabolic $p(x)$-Laplace equation // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2016. V. 23, N 27. P. 1–11.
37. *Wang L.* On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equation I // Comm. Pure. Appl. Math. 1992. V. 45. P. 27–76.
38. *Crandall M., Ishii H., Lions P.-L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 27, N 1. P. 1–67.
39. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
40. *Gilding B. H.* Hølder continuity of solutions of parabolic equations // J. London Math. Soc. 1976. V. 13, N 1. P. 103–106.
41. *Kruzhkov S. N.* Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables // Trudy Sem. Petrovsk. 1979. V. 5. P. 217–272.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.95

ON EXISTENCE OF VISCOSITY SOLUTIONS FOR EVOLUTION $p(x)$-LAPLACE EQUATION WITH ONE SPATIAL VARIABLE

© 2024 **Ar. S. Tersenov**

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

Received 06.11.2023, revised 17.09.2024, accepted 06.11.2024

Abstract. In this paper, we study the first boundary value problem for $p(x)$-Laplacian with one spatial variable in the presence of gradient terms that do not satisfy the Bernstein—Nagumo condition. A class of gradient nonlinearities is defined, for which the existence of a viscosity solution that is Lipschitz continuous in x and Hölder continuous in t is proven.

Keywords: $p(x)$-Laplace equation, Bernstein—Nagumo type condition, viscosity solutions, a priori estimates.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.409

REFERENCES

1. E. Acerbi and G. Mingione, "Regularity results for stationary electro-rheological fluids," Arch. Ration. Mech. Anal. **164**, 213–259 (2002).
2. S. N. Antontsev and J. F. Rodrigues, "On stationary thermo-rheological viscous flows," Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII Sci. Mat. **52** (1), 19–36 (2006).
3. K. Rajagopal and M. Ružička, "Mathematical modelling of electro-rheological fluids," Contin. Mech. Thermodyn. **13**, 59–78 (2001).
4. M. Ružička, *Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory* (Springer, Berlin, 2000).
5. R. Aboulaicha, D. Meskinea, and A. Souissia, "Regularity results for stationary electro-rheological fluids," Arch. Ration. Mech. Anal. **164**, 213–259 (2002).
6. Y. Chen, S. Levine, and M. Rao, "Variable exponent, linear growth functionals in image restoration," SIAM J. Appl. Math. **66** (4), 1383–1406 (2006).
7. S. Antontsev and S. Shmarev, *Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up* (Atlantis Press, Paris, 2015).
8. R. Arora and S. Shmarev, "Strong solutions of evolution equations with $p(x,t)$-Laplacian: Existence, global higher integrability of the gradients and second-order regularity," J. Math. Anal. Appl. **493** (1), 1–31 (2020).
9. R. Arora and S. Shmarev, "Existence and regularity results for a class of parabolic problems with double phase flux of variable growth," Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. AMat. **117** (34), 1–48 (2023).
10. M. Belloni and B. Kawohl, "The pseudo-p-Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as $p \to \infty$," ESAIM: Control Optim. Calc. Var. **10** (1), 28–52 (2004).
11. I. Birindelli and F. Demengel, "Existence and regularity results for fully nonlinear operators on the model of the pseudo Pucci's operators," J. Elliptic Parabol. Equat. **2**, 171–187 (2016).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 887–905.

12. F. Demengel, “Lipschitz interior regularity for the viscosity and weak solutions of the pseudo p-Laplacian equation,” Adv. Differ. Equat. **21** (3), 373–400 (2016).
13. P. Juutinen, “On the definition of viscosity solutions for parabolic equations,” Proc. Am. Math. Soc. **129** (10), 2907–2911 (2001).
14. Ar. S. Tersenov, “Viscosity subsolutions and supersolutions for non-uniformly and degenerate elliptic equations,” Arch. Math. **45** (1), 19–35 (2009).
15. P. Juutinen, P. Lindqvist, and J. J. Manfredi, “On the equivalence of the viscosity solutions and weak solutions for a quasilinear equation,” SIAM J. Math. Anal. **33** (3), 699–717 (2001).
16. M. Medina and P. Ochoa, “On viscosity and weak solutions for non-homogeneous p-Laplace equations,” Adv. Nonlinear Anal. **8** (1), 468–481 (2019).
17. J. Siltakoski, “Equivalence of viscosity and weak solutions for a p-parabolic equation,” J. Evol. Equat. **21** (4), 2047–2080 (2021).
18. A. Dall’Aglio, D. Giachetti, and S. Segura de Leon, “Global existence for parabolic problems involving the p-Laplacian and a critical gradient term,” Indiana Univ. Math. J. **58** (1), 1–48 (2009).
19. A. Dall’Aglio, V. De Cicco, D. Giachetti, and J.-P. Puel, “Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains,” NoDEA Nonlinear Differ. Equat. Appl. **11** (4), 431–450 (2004).
20. M. Nakao and C. Chen, “Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m-Laplacian type with a nonlinear convection term,” J. Differ. Equat. **162** (1), 224–250 (2000).
21. D. G. Figueiredo, J. Sanchez, and P. Ubilla, “Quasilinear equations with dependence on the gradient,” Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. **71** (10), 4862–4868 (2009).
22. L. Iturriaga, S. Lorca, and J. Sanchez, “Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a pgradient term,” NoDEA Nonlinear Differ. Equat. Appl. **15** (6), 729–743 (2008).
23. J. Li, J. Yin, and Y. Ke, “Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term,” J. Math. Anal. Appl. **383** (1), 147–158 (2011).
24. D. Ruiz, “A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems,” J. Differ. Equat. **199** (1), 96–114 (2004).
25. H. H. Zou, “A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations,” Calc. Var. Partial Differ. Equat. **33** (4), 417–437 (2008).
26. G. Dwivedi and S. Gupta, “An existence result for p-Laplace equation with gradient nonlinearity in $\mathbb{R}^N$,” Commun. Math. **30** (1), 149–159 (2022).
27. T. Leonori, A. Porretta, and G. Riey, “Comparison principles for p-Laplace equations with lower order terms,” Ann. Mat. Pura Appl. **196** (3), 877–903 (2017).
28. M. Bendahmane and K. H. Karlsen, “Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data,” Potential Anal. **22** (3), 207–227 (2005).
29. Y. Fu and N. Pan, “Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth,” J. Math. Anal. Appl. **362** (2), 313–326 (2010).
30. H. Zhan, “On anisotropic parabolic equations with a nonlinear convection term depending on the spatial variable,” Adv. Differ. Equat. **2019** (27), 1–26 (2019).
31. J. Zhao, “Existence and nonexistence of solutions for $u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$,” J. Math. Anal. Appl. **172** (1), 130–146 (1993).
32. Al. S. Tersenov and Ar. S. Tersenov, “Existence results for anisotropic quasilinear parabolic equations with time-dependent exponents and gradient term,” J. Math. Anal. Appl. **480** (1), 1–18 (2019).
33. Ar. S. Tersenov, “Solvability of the Dirichlet problem for anisotropic parabolic equations in non-convex domains,” Sib. Zh. Ind. Mat. **25** (1), 131–146 (2022) [in Russian].
34. Ar. S. Tersenov, “On the existence of viscous solutions of anisotropic parabolic equations with a variable anisotropy exponent,” Sib. Zh. Ind. Mat. **25** (4), 206–220 (2022) [in Russian].
35. Al. S. Tersenov and Ar. S. Tersenov, “The problem of Dirichlet for evolution one-dimensional p-Laplacian with nonlinear source,” J. Math. An. Appl. **340** (2), 1109–1119 (2008).
36. Al. S. Tersenov, “The one-dimensional parabolic $p(x)$-Laplace equation,” Nonlinear Differ. Equat. Appl. **23** (27), 1–11 (2016).

37. L. Wang, “On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equation I,” Commun. Pure. Appl. Math. **45**, 27–76 (1992).

38. M. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions, “User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations,” Bull. Am. Math. Soc. **27** (1), 1–67 (1992).

39. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].

40. B. H. Gilding, “Hölder continuity of solutions of parabolic equations,” J. London Math. Soc. **13** (1), 103–106 (1976).

41. S. N. Kruzhkov, “Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables,” Tr. Semin. Petrovskogo **5**, 217–272 (1979) [in Russian].

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 4. С. 152–165

УДК 517.958

РАВНОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА—ФОЙГТА С УЧЁТОМ ПАМЯТИ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

© 2024 М. В. Турбин[a], А. С. Устюжанинова[b]

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, г. Воронеж 394018, Россия

E-mails: [a]mrmike@mail.ru, [b]nastyzhka@gmail.com

Поступила в редакцию 30.01.2024 г.; после доработки 20.11.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

Работа посвящена исследованию качественного поведения решений модели Кельвина—Фойгта с учётом памяти вдоль траекторий движения жидкости. А именно, для рассматриваемой модели в неавтомном случае на основе теории аттракторов неинвариантных пространств траекторий доказывается существование равномерного траекторного и равномерного глобального аттракторов при выполнении некоторых условий на коэффициенты.

Ключевые слова: равномерный аттрактор, пространство траекторий, модель Кельвина—Фойгта, память вдоль траекторий движения жидкости, экспоненциальная оценка.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.410

Известно, что основные свойства динамики системы содержатся в её аттракторе — множестве в фазовом пространстве системы в определённом смысле притягивающем её траектории. Зачастую аттракторы исследуются для автономных систем уравнений, описывающих процессы, закон эволюции которых не меняется со временем. При этом в приложениях встречаются ситуации, когда закон эволюции меняется. Соответствующие математические модели включают коэффициенты или операторы, зависящие от времени, т. е. эволюция описывается неавтономными уравнениями. В неавтономном случае рассматривают так называемые равномерные аттракторы системы траекторных пространств.

В данной работе на основе теории аттракторов неинвариантных пространств траекторий [1–4] исследуются вопросы существования равномерных аттракторов для модели Кельвина—Фойгта с учётом памяти вдоль траекторий движения жидкости при выполнении некоторых условий на коэффициенты задачи. О других подходах к теории равномерных аттракторов см. обзорную статью [5].

Разрешимость начально-краевой задачи на конечном отрезке для рассматриваемой модели установлена в [6]. Существование траекторных и глобальных аттракторов для автономного случая рассматриваемой модели (правая часть не зависит от времени) доказано в работе [7]. В данной же работе мы рассматриваем неавтономный случай, то есть правая часть рассматриваемой задачи зависит от времени. Это меняет тип рассматриваемых аттракторов, поэтому результаты работ [6, 7] напрямую не могут быть перенесены на рассматриваемый случай. Основным результатом работы являются теорема существования минимального равномерного траекторного аттрактора и теорема существования равномерного глобального аттрактора.

Система уравнений, соответствующая рассматриваемой модели в выпуклой области Ω с гладкой границей на промежутке времени $[0, T]$, имеет вид (см. [6])

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right) - \\ -2\mathrm{Div}\int_0^t \sum_{i=1}^{L} \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)}\mathcal{E}(v)(s, z(s,t,x))\, ds + \nabla p = f; \\ \mathrm{div}\, v = 0, \quad (t,x) \in Q_T = [0,T] \times \Omega;\end{gathered} \tag{1}$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int\limits_t^{\tau} v(s, z(s;t,x))ds, \quad 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Здесь v — вектор скорости жидкости, p — давление, f — вектор плотности внешних сил, $\mathcal{E}(v)$ — тензор скоростей деформаций:

$$\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right).$$

Константы $\nu > 0, \varkappa > 0$ — вязкость и время ретардации, соответственно, $\beta_i, \alpha_i, i = \overline{1, L}$ — некоторые константы. Исходя из физического смысла предполагается, что $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, L}$. Функция $z(\tau; t, x)$ — траектория движения жидкости, соответствующая полю скоростей v.

Система (1)–(2) дополняется начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0} = a(x), \quad x \in \Omega, \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Приведём необходимые сведения из теории аттракторов [2–4]. Пусть E, E_0 — банаховы пространства, E рефлексивно и вложение $E \subset E_0$ непрерывно. Пусть $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ функций со значениями в E_0.

Лемма 1. *Последовательность $\{u_m\} \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ сходится к $u \in C(\mathbb{R}_+; E_0)$ тогда и только тогда, когда $\{u_m\}$ сходится к u равномерно на любом отрезке $[0, T], [0, T] \subset \mathbb{R}_+$.*

Пусть $\Pi_M, M \geqslant 0$ — оператор сужения функций, заданных на $\mathbb{R}_+$, на отрезок $[0, M]$. В силу леммы 1 оператор $\Pi_M : C(\mathbb{R}_+; E_0) \to C([0, M], E_0)$ непрерывен.

Лемма 2. *Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ тогда и только тогда, когда для любого $M > 0$ множество $\Pi_M P$ относительно компактно в $C([0, M], E_0)$.*

Через $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ обозначим пространство существенно ограниченных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в E.

Определение 1. Пусть $J \subset \mathbb{R}$ — конечный или бесконечный интервал и $\overline{J}$ — его замыкание. Пусть Y — банахово пространство. Функция $u : \overline{J} \to Y$ называется слабо непрерывной если из $t_n \to t, t_n \in \overline{J}$ следует, что $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ слабо в Y. Множество слабо непрерывных функций $u : \overline{J} \to Y$ будем обозначать $C_w(\overline{J}, Y)$.

Теорема 1. *Пусть E и E_0 — банаховы пространства, такие что $E \subset E_0$, причём вложение непрерывно. Если функция v принадлежит $L_\infty(0, T; E)$ и непрерывна как функция со значениями в E_0, то $v \in C_w([0, T], E)$.*

Следовательно, функция $v \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ принадлежит $C(\mathbb{R}_+; E)$ и поэтому $v(t) \in E$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Через $T(h), h \geqslant 0$, обозначим оператор сдвига.

Рассмотрим абстрактное неавтономное эволюционное дифференциальное уравнение

$$u'(t) = A_{\psi(t)}(u(t)), \quad u(t) \in E, \tag{4}$$

где ψ — некоторый функциональный параметр, который назовём символом уравнения (4). Будем предполагать, что ψ принадлежит некоторому множеству Σ, которое назовём пространством символов. Обычно ψ состоит из всех зависящих от времени коэффициентов и правых частей рассматриваемого уравнения. Предположим, что для каждого $\psi \in \Sigma$ определено непустое множество $\mathcal{H}_\psi^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ решений уравнения (4), определённых на $\mathbb{R}_+$. Множества $\mathcal{H}_\psi^+$ называются пространствами траекторий, а их элементы траекториями. Решения уравнения (4) могут пониматься в различном смысле. Поэтому, различным решениям соответствуют различные $\mathcal{H}_\psi^+$. Естественным требованием на $\mathcal{H}_\psi^+$ является его непустота. Также рассмотрим объединённое траекторное пространство $\mathcal{H}_\Sigma^+ = \bigcup_{\psi \in \Sigma} \mathcal{H}_\psi^+$.

Определение 2. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерно (относительно $\psi \in \Sigma$) притягивающим (для уравнения (4)), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, при $h \to \infty$ выполняется $\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \to 0$.

Определение 3. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерно поглощающим (для уравнения (4)), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, существует $h \geqslant 0$, такое что при всех $t \geqslant h$ имеет место включение $T(t)B \subset P$.

Любое равномерно поглощающее множество является равномерно притягивающим.

Определение 4. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерным траекторным полуаттрактором (для (4)), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;

(ii) имеет место включение $T(t)P \subset P$ для всех $t \geqslant 0$;

(iii) множество P является равномерно притягивающим.

Определение 5. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерным (относительно $\psi \in \Sigma$) траекторным аттрактором (для уравнения (4)), если оно удовлетворяет условиям (i) и (iii) определения 4, а также условию

(ii') имеет место равенство $T(t)P = P$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 6. Минимальным равномерным траекторным аттрактором пространства траекторий $\mathcal{H}_\Sigma^+$ называется наименьший по включению равномерный траекторный аттрактор.

Определение 7. Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется равномерным (относительно $\psi \in \Sigma$) глобальным аттрактором (в E_0) для уравнения (4), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(i) множество $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E;

(ii) для всякого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ множества $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$ выполняется условие притягивания $\sup_{u \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|u(t) - y\|_{E_0} \to 0$ при $t \to \infty$;

(iii) множество $\mathcal{A}$ является наименьшим по включению множеством, удовлетворяющим условиям (i) и (ii).

Отметим, что минимальный равномерный траекторный аттрактор и равномерный глобальный аттрактор единственны.

Замечание 1. Минимальный равномерный траекторный аттрактор и равномерный глобальный аттрактор зависят от выбора Σ. Для двух пространств символов $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ имеем соответствующие минимальные равномерные траекторные аттракторы $\mathcal{U}_{\Sigma_1} \subset \mathcal{U}_{\Sigma_2}$ и равномерные глобальные аттракторы $\mathcal{A}_{\Sigma_1} \subset \mathcal{A}_{\Sigma_2}$. Отметим, что при расширении пространства символов известны случаи, когда равномерных аттракторов не существует (см. [2], замечание 4.3.3).

Приведём теорему существования минимального равномерного траекторного аттрактора (см. [4], теорема 2.1).

Теорема 2. *Если существует равномерный траекторный полуаттрактор P для уравнения* (4), *то существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ для* (4).

Имеет место следующая теорема существования равномерного глобального аттрактора (см. [4], теорема 2.2).

Теорема 3. *Если существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ для уравнения* (4), *то существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ для* (4).

Приведём ещё одно необходимое утверждение (см. [2], лемма 4.3.1).

Лемма 3. *Пусть P — относительно компактное в $C(\mathbb{R}_+;E_0)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ равномерно поглощающее множество для уравнения* (4). *Тогда его замыкание $\overline{P}$ в пространстве $C(\mathbb{R}_+;E_0)$ является компактным в $C(\mathbb{R}_+;E_0)$ и ограниченным в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ равномерно поглощающим множеством для* (4). *Если при этом $T(t)P\subset P$ при всех $t\geqslant 0$, то $\overline{P}$ — равномерный полуаттрактор для уравнения* (4).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $\mathcal{V}$ — пространство бесконечно дифференцируемых соленоидальных финитных функций. Определим V^0 и V^1 как пополнение $\mathcal{V}$ по нормам $L_2(\Omega)^n$ и $H^1(\Omega)^n$ соответственно. Пусть $V^2=H^2(\Omega)^n\cap V^1$.

Рассмотрим в $\mathcal{V}$ оператор $A=-\pi\Delta$, где $\pi: L_2(\Omega)^n\to V^0$ — проектор Лере. Обозначим через E_∞ множество конечных линейных комбинаций, составленных из собственных функций оператора A, и определим пространство $V^\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$ как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\alpha}=(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^\alpha|v_k|^2)^{1/2}$, где $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots\leqslant\lambda_k\leqslant\ldots$ — собственные значения оператора A. В [8] показано, что эта норма в пространствах $V^\alpha,\alpha\in\mathbb{N}$ эквивалентна норме $\|v\|_{V^\alpha}=\|A^{\alpha/2}v\|_{V^0}$.

Для определения слабого решения на конечном отрезке введём пространства

$$W_1[0,T]=\{v: v\in L_\infty(0,T;V^1), v'\in L_2(0,T;V^{-1})\},$$
$$W_2[0,T]=\{v: v\in C([0,T],V^5), v'\in L_\infty(0,T;V^5)\}$$

с нормами $\|v\|_{W_1[0,T]}=\|v\|_{L_\infty(0,T;V^1)}+\|v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$, $\|v\|_{W_2[0,T]}=\|v\|_{C([0,T],V^5)}+\|v'\|_{L_\infty(0,T;V^5)}$.

Для определения слабого решения на полуоси $\mathbb{R}_+$ определим пространство $W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v, определённых п.в. на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в V^1, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_1[0,T]$. Также введём пространство $W_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$, состоящее из функций v класса $C(\mathbb{R}_+,V^5)$, таких что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ принадлежит $W_2[0,T]$.

Определим пространство $\mathcal{X}$, которое состоит из всех элементов $L_2^{loc}(\mathbb{R}_+;V^{-1})$, для которых конечна норма $\|\varphi\|_{\mathcal{X}}=\sup\limits_{t\geqslant 0}\|\varphi\|_{L_2(t,t+1;V^{-1})}$.

3. СЛАБАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АППРОКСИМАЦИЯ

Пусть $a\in V^1, f\in\mathcal{X}$.

Определение 8. Слабым решением задачи (1)–(3) на отрезке $[0,T]$ будем называть функцию $v\in W_1[0,T]$, удовлетворяющую при п. в. $t\in(0,T)$ и для любого $\varphi\in V^3$ тождеству

$$\big\langle (J+\varkappa A)v',\varphi\big\rangle-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx+\nu\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi dx-\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx-$$
$$-\varkappa\int\limits_\Omega\sum_{i,j,k=1}^n v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx+2\int_0^t\sum_{i=1}^L\beta_ie^{-\alpha_i(t-s)}\int_\Omega\mathcal{E}(v)(s,z(s,t,x)):\mathcal{E}(\varphi)dxds=\langle f,\varphi\rangle$$

и начальному условию
$$v(0) = a. \tag{5}$$

Здесь z — это решение задачи (2), которое существует в силу [9]. Символ «:» обозначает покомпонентное произведение матриц.

Определение 9. Слабым решением задачи (1)–(3) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$, такую что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0, T]$ является слабым решением задачи (1)–(3) на отрезке $[0, T]$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим аппроксимационную задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \varepsilon e^{-\gamma t}\frac{\partial \Delta^4 v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(v_k \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_k}\right) -$$
$$-2\mathrm{Div}\int_0^t \sum_{i=1}^{L} \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)}\mathcal{E}(v)(s, z(s,t,x))\,ds + \nabla p = f; \tag{6}$$
$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad (t,x) \in Q_T = [0,T]\times\Omega;$$
$$z(\tau;t,x) = x + \int\limits_t^\tau v(s, z(s;t,x))ds, \quad 0 \leqslant t, \tau \leqslant T, \quad x \in \Omega; \tag{7}$$
$$v|_{t=0} = b(x), \quad x\in\Omega; \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = \Delta v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = \Delta^2 v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = \Delta^3 v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{8}$$

Здесь γ — константа, удовлетворяющая неравенству
$$0 < \gamma \leqslant \min\left(\frac{\nu}{K_0+\varkappa}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_L\right), \tag{9}$$
где K_0 — константа из неравенства Пуанкаре: $\|u\|^2_{V^0} \leqslant K_0\|u\|^2_{V^1}$. Точный выбор γ описан в доказательстве теоремы 4.

Пусть $b \in V^5, f \in \mathcal{X}$.

Определение 10. Функция $v \in W_2[0,T]$ называется решением аппроксимационной задачи (6)–(8) если она удовлетворяет для любой функции $\varphi \in V^3$ при п. в. $t \in (0,T)$ тождеству

$$\int\limits_\Omega v'\varphi dx + \varkappa\int\limits_\Omega \nabla(v') : \nabla\varphi dx - \varepsilon e^{-\gamma t}\int\limits_\Omega \nabla\left(\Delta^2 v'\right) : \nabla(\Delta\varphi)dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx +$$
$$+\nu\int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^{n} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}dx +$$
$$+2\int_0^t \sum_{i=1}^{L}\beta_i e^{-\alpha_i(t-s)}\int_\Omega \mathcal{E}(v)(s,z(s,t,x)) : \mathcal{E}(\varphi)dxds = \langle f, \varphi\rangle$$

и начальному условию
$$v(0) = b. \tag{10}$$

Здесь z — решение задачи (7), которое существует в классическом смысле, поскольку $W_2[0,T] \subset C([0,T], C^3(\Omega)^n)$.

Определение 11. Решением аппроксимационной задачи (6)–(8) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in W_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$, такую что при каждом $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0,T]$ является решением аппроксимационной задачи (6)–(8) на этом отрезке.

Введём необходимые нам операторы и приведём их свойства (подробнее см. [6]).

Лемма 4. *Имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор* $J : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$, *действующий по правилу*

$$\langle Jv, \varphi \rangle = \int_\Omega v\varphi dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен.

2. *Оператор* $A : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$, *действующий по правилу*

$$\langle Av, \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и на любом $[t;t+1] \subset [0,T]$ *имеет место оценка*

$$\|Av\|_{L_2(t,t+1;V^{-1})} \leqslant \|v\|_{L_2(t,t+1;V^1)}. \tag{11}$$

3. *Оператор* $A^4 : L_2(0,T;V^5) \to L_2(0,T;V^{-3})$, *действующий по правилу*

$$\langle A^4 v, \varphi \rangle = -\int_\Omega \nabla(\Delta^2 v) : \nabla(\Delta\varphi) dx, \forall \varphi \in V^3,$$

непрерывен, и на любом $[t;t+1] \subset [0,T]$ *имеет место оценка*

$$\|A^4 v\|_{L_2(t,t+1;V^{-3})} \leqslant \|v\|_{L_2(t,t+1;V^5)}. \tag{12}$$

4. *Оператор* $B_1(v) : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$, *действующий по правилу*

$$\langle B_1(v), \varphi \rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и на любом $[t;t+1] \subset [0,T]$ *имеет место оценка*

$$\|B_1(v)\|_{L_2(t,t+1;V^{-3})} \leqslant C_1 \|v\|_{L_2(t,t+1;V^1)}. \tag{13}$$

5. *Оператор* $B_2(v) : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$, *действующий по правилу*

$$\langle B_2(v), \varphi \rangle = \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t) \frac{\partial v_i(t)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и на любом $[t;t+1] \subset [0,T]$ *имеет место оценка*

$$\|B_2(v)\|_{L_2(t,t+1;V^{-3})} \leqslant C_2 \|v\|_{L_2(t,t+1;V^1)}. \tag{14}$$

6. *Оператор* $B_3(v) : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-3})$, *действующий по правилу*

$$\langle B_3(v), \varphi \rangle = \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} dx, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и на любом отрезке $[t;t+1] \subset [0,T]$ *имеет место оценка*

$$\|B_3(v)\|_{L_2(t,t+1;V^{-3})} \leqslant C_2 \|v\|_{L_2(t,t+1;V^1)}. \tag{15}$$

7. *Оператор* $N : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$, *действующий по правилу*

$$\langle N(v)(t), \varphi\rangle = 2\int_0^t \sum_{i=1}^{L} \beta_i e^{-\alpha_i(t-s)} \int_\Omega \mathcal{E}(v)(s, z(s,t,x)) : \mathcal{E}(\varphi)dxds, \forall \varphi \in V^1,$$

непрерывен, и при почти всех $t \in (0,T)$ *имеет место оценка*

$$\|N(v)(\tau)\|_{V^{-3}} \leqslant C_3 \left(\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}\|v(t)\|^2_{V^1}dt\right)^{1/2}. \tag{16}$$

8. *Оператор* $(J+\varkappa A) : L_2(0,T;V^{-1}) \to L_2(0,T;V^{-3})$ *непрерывен, и на любом* $[t;t+1] \subset [0,T]$ *имеет место оценка*

$$C_4\|v\|_{L_2(t,t+1;V^{-1})} \leqslant \|(J+\varkappa A)v\|_{L_2(t,t+1;V^{-3})}. \tag{17}$$

9. *Оператор* $(J + \varepsilon e^{-\gamma t}A^4 + \varkappa A) : L_2(0,T;V^5) \to L_2(0,T;V^{-3})$ *непрерывен, и на любом* $[t;t+1] \subset [0,T]$ *имеет место оценка*

$$\varepsilon e^{-\gamma t}\|v\|_{L_2(t,t+1;V^5)} \leqslant \|(J + \varepsilon e^{-\gamma t}A^4 + \varkappa A)v\|_{L_2(t,t+1;V^{-3})}. \tag{18}$$

Тогда разрешимость задачи (1)–(3) на $[0,T]$ эквивалентна существованию решения $v \in W_1[0,T]$ операторного уравнения

$$(J+\varkappa A)v' + \nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + N(v) = f, \tag{19}$$

удовлетворяющего начальному условию (5).

Аналогично задача о разрешимости (6)–(8) эквивалентна задаче о поиске решений $v \in W_2[0,T]$ операторного уравнения

$$(J + \varepsilon e^{-\gamma t}A^4 + \varkappa A)v' + \nu Av - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) + N(v) = f. \tag{20}$$

4. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ

Установим условия на коэффициенты задачи, при которых имеют место необходимые экспоненциальные оценки.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты* ν, α_i, β_i, $i = \overline{1,L}$ *удовлетворяют условиям*

$$\nu\alpha_i > 4L|\beta_i|, \quad i = \overline{1,L}. \tag{21}$$

Тогда на любом $[\tau,\tau+1] \subset [0,T]$ *решение* v *уравнения* (20) *удовлетворяет оценке*

$$\|v\|_{L_\infty(\tau,\tau+1;V^1)} \leqslant C_5 + e^{-\gamma\tau}\left(C_6\|v(0)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right). \tag{22}$$

Доказательство. Пусть v — решение уравнения (20). Применяя (20) к v и преобразуя слагаемые в полученном тождестве при помощи формулы Грина, получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^0} + \frac{\varepsilon e^{-\gamma t}}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^4} + \frac{\varkappa}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{V^1} + \nu\|v\|^2_{V^1} - \\ -\langle B_1(v), v\rangle - \varkappa\langle B_2(v) + B_3(v), v\rangle + \langle N(v), v\rangle = \langle f, v\rangle.\end{gathered} \tag{23}$$

Заметим (см., например, [6]), что $\langle B_1(v), v\rangle = 0$ и $\langle B_2(v) + B_3(v), v\rangle = 0$.

Для последнего слагаемого в левой части (23) имеет место оценка (см., например, [6])

$$|\langle Nv, v\rangle| \leqslant 2\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}\|v(s)\|_{V^1}ds\|v(t)\|_{V^1}.$$

Пусть λ_1, λ_2 такие числа, что $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, $0 < \lambda_1 + \lambda_2 < 1$, точное значение λ_1 и λ_2 будет указано ниже. В силу элементарного неравенства $ab \leqslant \frac{\delta a^2}{2} + \frac{b^2}{2\delta}$, которое имеет место для любых неотрицательных a, b и положительного δ, оценим правую часть (23), положив $\delta = \nu(1-\lambda_1-\lambda_2)$:

$$\langle f, v\rangle \leqslant \|f(t)\|_{V^{-1}}\|v(t)\|_{V^1} \leqslant \frac{\nu(1-\lambda_1-\lambda_2)\|v(t)\|^2_{V^1}}{2} + \frac{\|f(t)\|^2_{V^{-1}}}{2\nu(1-\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Тогда из (23) получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \nu\|v(t)\|^2_{V^1} + \varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2} + \varepsilon e^{-\gamma t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^4} + \lambda_1\nu\|v(t)\|^2_{V^1} +$$
$$+\lambda_2\nu\|v(t)\|^2_{V^1} - 4\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}\|v(s)\|_{V^1}ds\|v(t)\|_{V^1} \leqslant \frac{\|f(t)\|^2_{V^{-1}}}{\nu(1-\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Для краткости обозначим

$$F(t) = \frac{\|f(t)\|^2_{V^{-1}}}{\nu(1-\lambda_1-\lambda_2)}; \quad G(t) = \lambda_2\nu\|v(t)\|^2_{V^1} - 4\sum_{i=1}^{L}|\beta_i|\int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}\|v(s)\|_{V^1}ds\|v(t)\|_{V^1}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^0} + \nu\|v(t)\|^2_{V^1} + \varkappa\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^2} + \varepsilon e^{-\gamma t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^4} + \lambda_1\nu\|v(t)\|^2_{V^1} + G(t) \leqslant F(t). \quad (24)$$

Введём на V^1 вспомогательную норму $\|u\|^2 = \|u\|^2_{V^0} + \varkappa\|u\|^2_{V^1}$. Её эквивалентность норме V^1 следует из неравенства Пуанкаре, поскольку $\varkappa\|u\|^2_{V^1} \leqslant \|u\|^2 \leqslant (K_0+\varkappa)\|u\|^2_{V^1}$. Тогда в силу условия (9) на γ получаем

$$\nu\|u\|^2_{V^1} \geqslant \frac{\nu}{(K_0+\varkappa)}\|u\|^2 \geqslant \gamma\|u\|^2. \quad (25)$$

Из (24) при помощи (25) получим

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2 + \gamma\|v(t)\|^2 + \varepsilon e^{-\gamma t}\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^4} + \lambda_1\nu\|v(t)\|^2_{V^1} + G(t) \leqslant F(t).$$

В первых двух слагаемых левой части сделаем замену $v(t) = e^{-\gamma t/2}\overline{v}(t)$ и умножим обе части неравенства на $e^{\gamma t}$:

$$\frac{d}{dt}\|\overline{v}(t)\|^2 + \varepsilon\frac{d}{dt}\|v(t)\|^2_{V^4} + \lambda_1\nu e^{\gamma t}\|v(t)\|^2_{V^1} + e^{\gamma t}G(t) \leqslant e^{\gamma t}F(t).$$

Проинтегрируем полученное неравенство по t от 0 до $\tau \in [0, T]$ и умножим на $e^{-\gamma\tau}$:

$$e^{-\gamma\tau}\|\overline{v}(\tau)\|^2 + \varepsilon e^{-\gamma\tau}\|v(\tau)\|^2_{V^4} + \lambda_1\nu\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}\|v(t)\|^2_{V^1}dt + \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}G(t)dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}F(t)dt + e^{-\gamma\tau}\left(\|\overline{v}(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right). \quad (26)$$

В силу неравенства

$$\int_0^t a^s \phi(s)ds \leqslant \frac{a^{t+2}}{a-1} \sup_{s\in[0,t-1]} \int_s^{s+1} |\phi(\xi)|d\xi,$$

где $a > 1$ и ϕ — скалярная функция (см. [2]), для правой части (26) получаем

$$\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}F(t)dt + e^{-\gamma\tau}\left(\|\overline{v}(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right) \leqslant e^{-\gamma\tau}\frac{e^{\gamma(\tau+2)}}{e^\gamma - 1}\sup_{s\in[0,\tau-1]}\int_s^{s+1} F(s)ds+$$
$$+e^{-\gamma\tau}\left(\|\overline{v}(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right) \leqslant C_7\|f\|_{\mathcal{X}} + e^{-\gamma\tau}\left(\|\overline{v}(0)\|^2 + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right).$$

Делая обратную замену $\overline{v}(t) = e^{\gamma t/2}v(t)$, из (26) получаем

$$\|v(\tau)\|^2_{V^0} + \varkappa\|v(\tau)\|^2_{V^1} + \varepsilon e^{-\gamma\tau}\|v(\tau)\|^2_{V^4} + \lambda_1\nu\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}\|v(t)\|^2_{V^1}dt + \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}G(t)dt$$
$$\leqslant C_7\|f\|_{\mathcal{X}} + e^{-\gamma\tau}\left((K_0+\varkappa)\|v(0)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right). \qquad (27)$$

Установим неотрицательность последнего слагаемого в левой части (27). Вспоминая введённые ранее обозначения, имеем

$$\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}G(t)dt = \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}\Big(\lambda_2\nu\|v(t)\|^2_{V^1} - 4\sum_{i=1}^L|\beta_i|\int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}\|v(s)\|_{V^1}ds\|v(t)\|_{V^1}\Big)dt.$$

Введём вспомогательные функции

$$h(t) = \|v(t)\|_{V^1}; \quad g_i(t) = \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}\|v(s)\|_{V^1}ds = \int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}h(s)ds, \quad i = \overline{1,L}.$$

Функция h непрерывна на отрезке $[0,T]$, а функции $g_i, i = \overline{1,L}$, непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$. Заметим, что $g_i'(t) = h(t) - \alpha_i\int_0^t e^{-\alpha_i(t-s)}h(s)ds = h(t) - \alpha_i g_i(t)$, $i = \overline{1,L}$. Следовательно, для любого $i = \overline{1,L}$ имеем $g_i'(t) + \alpha_i g_i(t) = h(t)$, $g_i(0) = 0$.

Поскольку для любого $i = \overline{1,L}$ в силу формулы интегрирования по частям

$$2\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}g_i'(t)g_i(t)dt = g_i^2(\tau) - \gamma\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}g_i^2(t)dt,$$

то

$$\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}G(t)dt = \int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}\sum_{i=1}^L\left(\frac{\lambda_2\nu}{L}(g_i'(t)+\alpha_i g_i(t))^2 - 4|\beta_i|g_i(t)(g_i'(t)+\alpha_i g_i(t))\right)dt =$$
$$= \sum_{i=1}^L\left(\frac{\lambda_2\nu}{L}\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}(g_i'(t))^2dt + \left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 2|\beta_i|\right)g_i^2(t)+\right.$$
$$\left.+\left(\alpha_i\left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 4|\beta_i|\right) - \gamma\left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 2|\beta_i|\right)\right)\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}g_i^2(t)dt\right).$$

Покажем, что при каждом $i = \overline{1,L}$ при выполнении условий (21) и подходящем выборе положительного числа μ_i выражение

$$\left(\frac{\lambda_2\nu}{L}\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}(g_i'(t))^2dt + \left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 2|\beta_i|\right)g_i^2(t)+\right.$$
$$\left.+\left(\left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i^2}{L} - 4|\beta_i|\alpha_i\right) - \mu_i\left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 2|\beta_i|\right)\right)\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}(g_i(t))^2dt\right) \qquad (28)$$

неотрицательно.

Так как $\lambda_2 > 0, \nu > 0$, а $L \geqslant 1$, то $\frac{\lambda_2\nu}{L}\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}(g_i'(t))^2dt \geqslant 0$ при каждом $i=\overline{1,L}$.

Далее, в силу (21) имеем, что $\frac{\nu\alpha_i}{L} > 4|\beta_i|$, $i=\overline{1,L}$. Поэтому можно выбрать λ_2, возможно достаточно близкое к 1, что

$$\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 4|\beta_i| > 0 \quad \text{при всех} \quad i=\overline{1,L}. \tag{29}$$

Следовательно, второе слагаемое в (28) неотрицательно.

Далее, в силу (29) имеем $\left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 4|\beta_i|\right) > 0$ и $\left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 2|\beta_i|\right) > 0$. Поэтому всегда можно выбрать μ_i такое что $0<\mu_i\leqslant\gamma$, что $\alpha_i\left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 4|\beta_i|\right) - \mu_i\left(\frac{\lambda_2\nu\alpha_i}{L} - 2|\beta_i|\right) > 0$. Тогда, полагая $\gamma=\min_{i=\overline{1,L}}\mu_i$, получаем $\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}G(t)dt \geqslant 0$.

Так как каждое слагаемое в левой части (27) неотрицательно, получаем

$$\varkappa\|v(\tau)\|^2_{V^1} + \lambda_1\nu\int_0^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}\|v(t)\|^2_{V^1}dt \leqslant C_7\|f\|^2_{\mathcal{X}} + e^{-\gamma\tau}\left(C_6\|v(0)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right). \tag{30}$$

Отсюда, используя неравенство $b\leqslant 1+b^2$ для всех $b\in\mathbb{R}$, получим требуемую оценку (22). □

Теорема 5. *Пусть v — решение* (20) *на отрезке* $[0,T]$ *и коэффициенты* ν, α_i, β_i, $i=\overline{1,L}$ *удовлетворяют условиям* (21). *Тогда для любого* $[\tau,\tau+1]\subset[0,T]$ *имеет место оценка*

$$\|v'\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-1})} \leqslant C_8\left(1+e^{-\gamma\tau}\left(C_6\|v(0)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\right). \tag{31}$$

Доказательство. В силу (16) и (30) имеем

$$\begin{aligned}\|N(v)\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-3})} \leqslant 1 + \|N(v)\|^2_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-3})} \leqslant 1 + C_3^2\int_\tau^{\tau+1}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|v(s)\|^2_{V^1}dsdt \leqslant\\ \leqslant C_9\left(1+e^{-\gamma\tau}\left(C_6\|v(0)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\right).\end{aligned} \tag{32}$$

Так как v — решение (20), то для любого $[\tau,\tau+1]\subset[0,T]$ в силу (11), (13), (14), (15) и (32) получим

$$\begin{gathered}\left\|(J+\varepsilon e^{-\gamma t}A^4+\varkappa A)v'\right\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-3})} =\\ = \|-\nu Av + B_1(v) + \varkappa B_2(v) + \varkappa B_3(v) + N(v) + f\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-3})} \leqslant\\ \leqslant \nu C_{10}\|v\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^1)} + C_1\|v\|^2_{L_2(\tau,\tau+1;V^1)} + 2\varkappa C_2\|v\|^2_{L_2(\tau,\tau+1;V^1)} +\\ + C_9\left(1+e^{-\gamma\tau}\left(C_6\|v(0)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\right) + C_{10}\|f\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-1})}.\end{gathered}$$

Отсюда, в силу (18), (22) и неравенства $\|u\|_{L_2(\tau;\tau+1,V^1)} \leqslant \|u\|_{L_\infty(\tau;\tau+1,V^1)}$ получаем, что

$$\varepsilon e^{-\gamma t}\|v'\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^5)} \leqslant C_{11}\left(1+e^{-\gamma\tau}\left(C_6\|v(0)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\right). \tag{33}$$

Далее, если v — решение (20), то в силу (12) и (33) получаем

$$\begin{gathered}\left\|(J+\varkappa A)v'\right\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-3})} =\\ = \left\|-\varepsilon e^{-\gamma t}A^4v' - \nu Av + B_1(v) + \varkappa B_2(v) + \varkappa B_3(v) + N(v) + f\right\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-3})} \leqslant\\ \leqslant \varepsilon e^{-\gamma t}\left\|v'\right\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^5)} + \|-\nu Av + B_1(v) + \varkappa B_2(v) + \varkappa B_3(v) + N(v) + f\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-3})} \leqslant\\ \leqslant 2C_{11}\left(1+e^{-\gamma\tau}\left(C_6\|v(0)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\right).\end{gathered}$$

Откуда в силу (17) получаем требуемое неравенство (31). □

Замечание 2. Всюду в дальнейшем до конца статьи будем предполагать, что коэффициенты ν, α_i, β_i, $i = \overline{1, L}$ удовлетворяют условиям (21).

5. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

Имеют место следующие теоремы существования решений на конечном отрезке и полуоси.

Теорема 6. *Пусть $f \in \mathcal{X}, b \in V^5$. Тогда на любом отрезке $[0,T]$ существует решение уравнения (20), удовлетворяющее начальному условию (10), и для любого отрезка $[\tau,\tau+1] \subset [0,T]$ имеет место оценка*

$$\|v\|_{L_\infty(\tau,\tau+1,V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau,\tau+1,V^{-1})} \leqslant C_{12}\left(1 + e^{-\gamma\tau}\left(C_6\|v(0)\|^2_{V^1} + \varepsilon\|v(0)\|^2_{V^4}\right)\right). \tag{34}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6 в [6]. Наличие ограничений на коэффициенты аппроксимационной задачи не оказывает никакого влияния на ход доказательства. Оценка (34) непосредственно следует из оценок (22) и (31).

Теорема 7. *При любых $f \in \mathcal{X}, b \in V^5$ задача (20),(10) имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$.*

Теорема 8. *При любых $f \in \mathcal{X}, a \in V^1$ задача (19),(5) имеет слабое решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющее при всех $\tau \geqslant 0$ неравенству*

$$\|v\|_{L_\infty(\tau,\tau+1,V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau,\tau+1,V^{-1})} \leqslant C_{13}\left(1 + e^{-\gamma\tau}C_6\|v(0)\|^2_{V^1}\right). \tag{35}$$

Здесь C_{13} — постоянная, зависящая от ν, $\varkappa$, f и не зависящая от v и ε.

Доказательство разрешимости задач (20),(10) и (19),(5) на полуоси $\mathbb{R}_+$ может быть найдено в работе [7]. Оценка (35) получается из неравенства (34) при предельном переходе при $\varepsilon \to 0$ в силу полунепрерывности снизу нормы относительно слабой и *-слабой топологии.

6. РАВНОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ

Положим $E_0 = V^\xi$, $0 < \xi < 1$, $E = V^1$. В качестве Σ системы (1)–(2) для фиксированного $f \in \mathcal{X}$ выберем произвольное множество Σ, содержащее функцию f, для которого выполнено $\|\psi\|_{\mathcal{X}} \leqslant \|f\|_{\mathcal{X}}, (\psi \in \Sigma)$. Определим семейство траекторных пространств $\{\mathcal{H}^+_\psi : \psi \in \Sigma\}$.

Определение 12. Пространство траекторий $\mathcal{H}^+_\psi$ системы (1)–(2), соответствующее символу $\psi \in \Sigma$, — это множество функций $v \in L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1), v' \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; V^{-1})$ таких, что ограничение v на любой отрезок $[0,T]$ является слабым решением задачи (1)–(2) на этом отрезке, причём при всех $\tau \geqslant 0$ функция v удовлетворяет неравенству

$$\|v\|_{L_\infty(\tau;\tau+1,V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau;\tau+1,V^{-1})} \leqslant C_{13}\left(1 + e^{-\gamma\tau}C_6\|v(0)\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)}\right). \tag{36}$$

Покажем, что $\mathcal{H}^+_\psi \subset C(\mathbb{R}_+; V^\xi) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$. По определению $\mathcal{H}^+_\psi$ каждая функция $v \in \mathcal{H}^+_\psi$ принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$. В силу (36), если v — траектория, тогда для любого отрезка $[0,T]$ имеем $\Pi_T v \in L_\infty(0,T;V^1), \Pi_T v' \in L_2(0,T;V^{-1})$. Тогда по теореме Обена—Дубинского—Симона [10] для тройки пространств $V^1 \subset V^\xi \subset V^{-1}$ получаем, что $\Pi_T v \in C([0,T], V^\xi)$. Так как это имеет место для любого $T \geqslant 0$, то $v \in C(\mathbb{R}_+, V^\xi)$.

Покажем, что $\mathcal{H}^+_\psi$ непусто. Имеет место теорема.

Теорема 9. *Пусть $\psi \in \Sigma$ — некоторый символ. Тогда для любого $a \in V^1$ существует траектория $v \in \mathcal{H}^+_\psi$, для которой $v(0) = a$.*

Доказательство. По теореме 8 для любых $a \in V^1, f \in \mathcal{X}$ существует слабое решение $v \in W_1^{loc}(\mathbb{R}_+)$ задачи (1)–(2) на $\mathbb{R}_+$. Покажем, что v удовлетворяет (36), то есть является траекторией. Так как v удовлетворяет (35), то достаточно установить неравенство

$$\|v(0)\|_{V^1} \leqslant \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+,V^1)}. \tag{37}$$

Из (35) следует, что $v \in L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)$, а $v' \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+, V^{-1})$. Повторяя рассуждения, используемые выше, получаем, что $v \in C(\mathbb{R}_+, V^\xi)$. Таким образом, $v \in C(\mathbb{R}_+, V^\xi) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)$, и, используя теорему 1, получаем, что $v \in C_w(\mathbb{R}_+, V^1)$. Откуда, для любого $t \in \mathbb{R}_+$ определено значение $v(t) \in V^1$. Отсюда в силу определения нормы в $L_\infty(\mathbb{R}_+, V^1)$ получаем (37). □

Из теоремы 9 следует, что пространство $\mathcal{H}_\psi^+$ содержит «достаточно» большое число траекторий. А именно, для любого $a \in V^1$ существует выходящая из него траектория $v \in \mathcal{H}_\psi^+$.

Основным результатом работы являются нижеследующие теоремы.

Теорема 10. *Существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2).*

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно построить равномерный траекторный полуаттрактор семейства $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$. Из свойства (iii) определения 12 следует, что каждая траектория v каждого из пространств $\mathcal{H}_\psi^+$ удовлетворяет при любом $\tau \geqslant 0$ неравенству

$$\|v\|_{L_\infty(\tau;\tau+1,V^1)} + \|v'\|_{L_\infty(\tau;\tau+1,V^{-1})} \leqslant C_{13}\left(1 + e^{-\gamma\tau} C_6 \|v(0)\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)}\right). \tag{38}$$

Рассмотрим множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; V^\xi) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, состоящее из функций, удовлетворяющих при всех $\tau \geqslant 0$ неравенству

$$\|v\|_{L_\infty(\tau;\tau+1,V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau;\tau+1,V^{-1})} \leqslant C_{14} = C_{13}(1 + C_6). \tag{39}$$

Так как при каждом $h \geqslant 0$ оператор $T(h) : C(\mathbb{R}_+; V^\xi) \to C(\mathbb{R}_+; V^\xi)$ непрерывен, то $T(t)P \subset P$ при $t \geqslant 0$. Следовательно, P трансляционно инвариантно.

Покажем, что P относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^\xi)$. Из (39) следует, что множество $\Pi_T P$ ограничено в $L_\infty(0, T; V^1)$ при любом $T > 0$, а множество $\{v' : v \in \Pi_T P\}$ ограничено в $L_\infty(0, T; V^{-1})$. По теореме Обена—Дубинского—Симона [10] множество $\Pi_T P$ относительно компактно в $C([0, T], V^\xi)$. В силу произвольности T по лемме 2 получаем относительную компактность P в $C(\mathbb{R}_+; V^\xi)$.

Покажем, что P является равномерно поглощающим множеством. Пусть множество $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^1)$, то есть $\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)} \leqslant R$ для $v \in B$.

Пусть число $t_B \geqslant 0$ такое, что $R^2 e^{-\gamma t_B} \leqslant 1$. В силу (38) для $h \geqslant t_B$ и $\tau \geqslant 0$ имеем

$$\|T(h)v\|_{L_\infty(\tau;\tau+1;V^1)} + \|T(h)v'\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-1})} = \|v\|_{L_\infty(\tau+h;\tau+1+h;V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau+h;\tau+1+h;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant C_{13}\left(1 + e^{-\gamma(\tau+h)} C_6 \|v(0)\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;V^1)}\right) \leqslant C_{13}\left(1 + R^2 e^{-\gamma\tau} e^{-\gamma h} C_6\right) \leqslant C_{14}.$$

Таким образом, неравенство (39) выполняется для функции $T(h)$ при всех $\tau \geqslant 0$. Следовательно, $T(h)B \subset P$ при $h \geqslant t_B$, и P — поглощающее множество.

По лемме 3 замыкание $\overline{P}$ множества P в пространстве $C(\mathbb{R}_+; V^\xi)$ является траекторным полуаттрактором семейства пространств траекторий $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$. По теореме 2 отсюда следует существование минимального равномерного траекторного аттрактора $\mathcal{U}$. □

Теорема 11. *Существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2).*

Доказательство. По теореме 10 существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2). Тогда по теореме 3 существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2). □

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00091). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Устюжанинова А. С., Турбин М. В.* Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина—Фойгта // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 1. С. 126–137; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.110
2. *Zvyagin V., Vorotnikov D.* Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodinamics. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.
3. *Звягин В. Г., Кондратьев С. К.* Аттракторы уравнений неньютоновской гидродинамики // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 5. С. 81–156; DOI: 10.4213/rm9615
4. *Vorotnikov D. A., Zvyagin V. G.* Uniform attractors for non-autonomous motion equations of viscoelastic medium // J. Math. Anal. Appl. 2007. V. 325, N 1. P. 438–458; DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.01.078
5. *Чепыжов В. В.* О равномерных аттракторах динамических процессов и неавтономных уравнений математической физики // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, № 2. С. 159–196.
6. *Turbin M., Ustiuzhaninova A.* Existence of weak solution to initial-boundary value problem for finite order Kelvin—Voigt fluid motion model // Bol. Soc. Mat. Mex. 2023. V. 29, N 2. Article 54; DOI: 10.1007/s40590-023-00526-y
7. *Turbin M., Ustiuzhaninova A.* Trajectory and global attractors for the Kelvin—Voigt model taking into account memory along fluid trajectories // Mathematics. 2024. V. 12, N 2. Article 266; DOI: 10.3390/math12020266
8. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
9. *DiPerna R. J., Lions P.-L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. V. 98. P. 511–547.
10. *Simon J.* Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ // Ann. di Mat. Pura ed Appl. 1986. V. 146, N 1. P. 65–96; DOI: 10.1007/BF01762360

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 517.958

UNIFORM ATTRACTORS FOR THE KELVIN—VOIGT MODEL TAKING INTO ACCOUNT MEMORY ALONG FLUID MOTION TRAJECTORIES

© 2024 M. V. Turbin[a], A. S. Ustiuzhaninova[b]

Voronezh State University, Voronezh, 394018 Russia

E-mails: [a]mrmike@mail.ru, [b]nastyzhka@gmail.com

Received 30.01.2024, revised 20.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. The paper is devoted to the study of the qualitative behavior of solutions for the Kelvin—Voigt model taking into account memory along fluid motion trajectories. Namely, based on the theory of attractors of noninvariant trajectory spaces, for the model under consideration in the nonautonomous case the existence of a uniform trajectory and a uniform global attractor is proved under certain conditions on the coefficients.

Keywords: uniform attractor, trajectory space, Kelvin—Voigt model, memory along fluid trajectories, exponential estimate.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.410

REFERENCES

1. A. S. Ustiuzhaninova and M. V. Turbin, "Trajectory and global attractors for a modified Kelvin—Voigt model," Sib. Zh. Ind. Mat. **24** (1), 126–137 (2021) [J. Appl. Ind. Math. **15** (1), 158–168 (2021)]. https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.110
2. V. Zvyagin and D. Vorotnikov, *Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodinamics* (Walter de Gruyter, Berlin, 2008). https://doi.org/10.1515/9783110208283
3. V. G. Zvyagin and S. K. Kondrat'ev, "Attractors of equations of non-Newtonian fluid dynamics," Usp. Mat. Nauk **69** (5), 81–156 (2014) [Russ. Math. Surv. **69** (5), 845– 913 (2014)]. https://doi.org/10.4213/rm9615
4. D. A. Vorotnikov and V. G. Zvyagin, "Uniform attractors for non-autonomous motion equations of viscoelastic medium," J. Math. Anal. Appl. **325** (1), 438–458 (2007). https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.01.078
5. V. V. Chepyzhov, "Uniform attractors of dynamical processes and non-autonomous equations of mathematical physics," Usp. Mat. Nauk **68** (2), 159–196 (2013) [Russ. Mathe. Surv. **68** (2), 349–382 (2013)].
6. M. Turbin and A. Ustiuzhaninova, "Existence of weak solution to initial-boundary value problem for finite order Kelvin—Voigt fluid motion model," Bol. Soc. Mat. Mex. **29** (2), 54 (2023). https://doi.org/10.1007/s40590-023-00526-y
7. M. Turbin and A. Ustiuzhaninova, "Trajectory and global attractors for the Kelvin—Voigt model taking into account memory along fluid trajectories," Mathematics **12** (2), 266 (2024). https://doi.org/10.3390/math12020266
8. A. V. Fursikov, *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications, translation of vol. 187 of Mathematical Monographs* (Am. Math. Soc., Providence, RI, 2000).
9. R. J. DiPerna and P.-L. Lions, "Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces," Invent. Math. **98**, 511–547 (1989).
10. J. Simon, "Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$," Ann. Mat. Pura Appl. **146** (1), 65–96 (1986). https://doi.org/10.1007/BF01762360

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 906–918.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2024. Т. 27, № 4. С. 166–180

УДК 519.65

КОМБИНИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАССТОЯНИЯ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЁТАХ С МЕТОДОМ ВМОРОЖЕННЫХ ГРАНИЦ

© 2024 М. Ю. Хребтов[1,2a], Р. И. Мулляджанов[1,2b]

[1]*Институт теплофизики СО РАН,*
просп. Лаврентьева, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,
[2]*Новосибирский государственный университет,*
ул. Пирогова 1, г. Новосибирск 630090, Россия

E-mails: [a]weexov@yandex.ru, [b]rustammul@gmail.com

Поступила в редакцию 27.11.2024 г.; после доработки 27.11.2024 г.;
принята к публикации 11.12.2024 г.

Предложен метод вычисления расстояния до трёхмерных геометрических моделей, путём представления их в виде результата булевых операций между элементарными объектами, для каждого из которых известно знаковое расстояние. Предложено две версии алгоритма, упрощённый, позволяющий быстрее рассчитать аппроксимацию расстояния (с точной нулевой изоповерхностью расстояния и разделением областей внутри и снаружи модели), и с дополнительным расчётом расстояния до контуров пересечения между элементами, позволяющий восстановить расстояние с большей точностью без существенных дополнительных затрат. Оба метода позволяют существенно сократить время вычисления по сравнению с расчётом расстояния до поверхностей путём представления их в виде связного набора треугольников. Также подход позволяет интерактивно изменять параметры и относительное положение частей геометрии, что даёт возможность проводить расчёты с подвижными границами. Подход протестирован в гидродинамических расчётах с межфазной границей и адаптивным многоуровневым сгущением сетки в открытом коде для моделирования сплошных сред — `Basilisk`.

Ключевые слова: расстояние до объекта, вычислительная геометрия, численное моделирование, сплошные среды, динамические сетки.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.411

ВВЕДЕНИЕ

В численном моделировании многофазных сред набирает популярность подход, связанный с адаптивным сгущением расчётной сетки [1–3]. Данный подход позволяет отслеживать положение межфазной поверхности и поддерживать необходимую степень разрешения при её эволюции. При этом, чтобы обеспечить возможность динамического сгущения, структура сетки должна быть достаточно простой. Наиболее удобным здесь представляется использование структурированной декартовой сетки с многоуровневым её представлением в виде дерева. Одна ячейка сетки может быть разбита на целое число равных ячеек (как правило, с соотношением размеров новых ячеек к исходным, равным $1/2$) [2, 4, 5]. Таким образом, можно построить иерархическое представление сетки, при этом глубина разбиения может варьироваться динамически в широких пределах в зависимости от выполнения заданного локального критерия (погрешности аппроксимации градиентов, расстояния до некой поверхности, величины скалярного поля и т. д. [3, 6]).

В данном подходе сложностью является учёт произвольной геометрии твёрдых тел, ограничивающих данное течение. Как правило, используется метод вмороженных или встроенных границ, когда поверхность границы может проходить внутри расчётной ячейки. Если известно положение этой границы, то далее можно построить локальные численные схемы для задания граничных условий с необходимым порядком аппроксимации с помощью построения шаблона с использованием координат центров и узлов ячеек, расположенных вблизи данной границы [7].

При использовании динамического сгущения эти схемы необходимо перестраивать и увеличивать либо уменьшать точность разрешения твёрдых границ в зависимости от локальных условий расчёта (наличия межфазных границ, зон отрыва и т. д.). Также перестройка сетки в процессе расчёта необходима при использовании подвижных границ от движущихся элементов геометрии.

Помимо задачи перестроения сетки, знать расстояние до поверхности необходимо для замыкания различных моделей турбулентности, которые явно учитывают пристенную область течения для переключения параметризации турбулентной диффузии или используют различные пристенные демпфирующие факторы. Такое разделение используется в наиболее распространённой RANS-модели $k-\omega$ SST [8], применяющейся для инженерных расчётов.

Таким образом, существует необходимость разработки алгоритма для быстрого расчёта расстояния до твёрдых границ, который бы можно было интерактивно использовать для проведения моделирования потоков с использованием динамического сгущения сетки.

Знание расстояния до границы позволяет находить нормаль к поверхности вблизи границы по градиенту расстояния и восстанавливать форму поверхности с учётом этих нормалей (и знака расстояния, определяющего с какой стороны от поверхности находится точка) в ближайших узлах сетки [6, 9, 10].

Вычисление расстояния во всех точках расчётной сетки для нетривиальной геометрии требует значительных вычислительных затрат. В случае, если перестройка сетки происходит часто (раз в несколько итераций), это требует перерасчёта расстояний каждый раз при сгущении или огрублении сетки.

Существует ряд подходов [6, 11] к быстрому восстановлению значений расстояния во время расчёта, однако они либо используют алгоритмы представления геометрии на фиксированной сетке (с высоким разрешением), что требует дополнительных затрат памяти, либо имеют низкую точность восстановления, отражающуюся в ошибках положения границы твёрдого тела при динамическом сгущении сетки. Кроме того, эти подходы не будут работать при перемещении или деформировании твёрдых границ, если части геометрии будут смещаться относительно друг друга.

С другой стороны, есть подходы [12], которые связаны с геометрическими методами расчёта расстояний на основе исходной 3D-модели, когда модель представляется в виде аппроксимации поверхности (например, связанным набором треугольников, многогранником), а расстояние до поверхности вычисляется как расстояние до ближайшего элемента, аппроксимирующего поверхность многогранника (вершины, рёбра или грани). Такое вычисление требует прохождения по всем треугольникам поверхности (в общем случае) с количеством операций $O(n \cdot m)$, где n — это число элементов многогранника (вершина, ребро, грань), и m — это число ячеек, в которых рассчитываются значения расстояния. При детальном представлении модели и n, и m могут быть большими, что создаёт большую вычислительную нагрузку на перерасчёт расстояний и делает его непрактичным. С этой точки зрения, требуется разработать методы расчёта расстояний, которые позволяют проводить его с большей скоростью.

В данной статье предлагается представлять целевую 3D-модель в виде булевой суперпозиции элементарных объектов, расстояния до которых могут быть рассчитаны с небольшими вычислительными затратами. В качестве примеров таких элементарных объектов рассматриваются поверхности вращения и цилиндрические "капсулы". Многие 3D-модели в инженерных приложениях можно аппроксимировать комбинацией таких объектов. При этом, предлагается рассчитывать итоговое расстояние до объекта, представленного в виде набора булевых операций над такими элементарными объектами, через известные значения расстояний от каждого из элементов данных операций. В качестве практического примера приводится расчёт истечения жидкой струи из центробежной форсунки, сделанный с помощью открытого программного пакета *Basilisk* [1].

1. АЛГОРИТМ ЗАДАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАКОВОГО РАССТОЯНИЯ

Определим знаковое расстояние $D(S,\vec{r})$ в точке $\vec{r} = \{x,y,z\}$ до замкнутой несамопересекающейся поверхности S как расстояние (заданное для двух точек $\vec{p_1}$ и $\vec{p_2}$ через $\sqrt{(\vec{p_1}-\vec{p_2})\cdot(\vec{p_1}-\vec{p_2})}$) от $\vec{r}$ до ближайшей точки поверхности S, умноженное на -1, если точка находится внутри объёма, ограниченного S.

Предлагается рассмотреть в качестве примера базовых геометрических элементов два типа объектов. Первый тип объектов представляет собой круглый цилиндр с высотой L и радиусом R, заканчивающийся полусферическими закруглениями такого же радиуса, гладко сопряжёнными с поверхностью цилиндра (капсула) (рис. 1(a)).

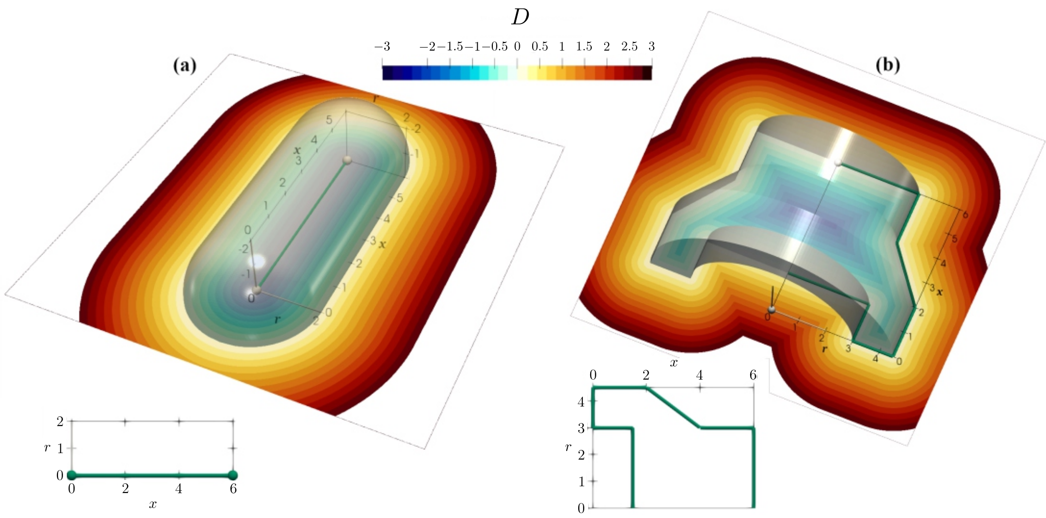


Рис. 1. Базовые геометрические элементы и расстояния до них; (a) — капсула; (b) — тело вращения

Для каждой капсулы, в памяти хранится её локальный базис из трёх ортонормальных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, где вектор $\vec{a}$ направлен вдоль оси цилиндра, а два других произвольно перпендикулярны этой оси и друг другу. Также в памяти хранятся координаты основания цилиндра $\vec{a_0}$ (центр основания цилиндрической части капсулы), его радиус R и высота L цилиндрического участка. Такое представление позволяет быстро находить знаковое расстояние $D(S,\vec{r_0})$ до поверхности капсулы S от произвольной точки $\vec{r_0}$ по следующему алгоритму.

Алгоритм 1. Вычисление расстояния до капсулы.

if $(0 \geqslant (\vec{r_0}-\vec{a_0})\cdot\vec{a} \geqslant L)$ **then**
  $D(S,\vec{r_0}) = \sqrt{((\vec{r_0}-\vec{a_0})\cdot\vec{b})^2 + ((\vec{r_0}-\vec{a_0})\cdot\vec{c})^2} - R;$
else if $((\vec{r_0}-\vec{a_0})\cdot\vec{a} < 0)$ **then**
  $D(S,\vec{r_0}) = \sqrt{(\vec{r_0}-\vec{a_0})^2} - R;$
else
  $D(S,\vec{r_0}) = \sqrt{(\vec{r_0}-(\vec{a_0}+L\cdot\vec{a}))\cdot(\vec{r_0}-(\vec{a_0}+L\cdot\vec{a}))} - R;$
endif

где оператор «·» для векторов означает скалярное произведение. Данный геометрический элемент (капсулу) можно использовать для создания связанных наборов труб и отверстий путём сопряжения капсул через сферические участки, что является распространённым элементом в инженерном проектировании.

Второй геометрический элемент — это тело вращения с образующей в виде односвязного набора отрезков прямых без самопересечений (рис. 1(b)). Для данного элемента также хранится локальный ортонормированный базис из векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и координаты точки $\vec{a}_0$, находящейся на оси симметрии, относительно которой записываются координаты отрезков. Точки контура хранятся в виде локальных $2D$-координат $\{x_i, r_i\}$ относительно локального базиса. Для вычисления расстояния от поверхности вращения до произвольной точки $\vec{r_0}$, сначала её координаты переводятся в систему координат контура (с учётом осевой симметрии). Затем, в двумерном пространстве ищется расстояние до ближайшего элемента контура (рёбра либо вершины многоугольника). Данный процесс может быть ускорен, если для каждой стороны многоугольника (отрезка $\{x_i - x_{i-1}, r_i - r_{i-1}\}$) хранить единичную нормаль (в 2D-пространстве) $\vec{n_i}$, направленную наружу контура. Тогда алгоритм нахождения расстояния сводится к следующему (для ускорения будем минимизировать квадрат расстояния, обозначенный как $D2$).

Алгоритм 2. Вычисление расстояния до осесимметричного контура.

$x = (\vec{r_0} - \vec{a_0}) \cdot \vec{a};$
$r = \sqrt{((\vec{r_0} - \vec{a_0}) \cdot \vec{b})^2 + ((\vec{r_0} - \vec{a_0}) \cdot \vec{c})^2}$
$D2 = (x - x_0)^2 + (r - r_0)^2\,;$
for (i=1 **to** n)
  if $(0 < (x - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) + (r - r_{i-1}) \cdot (r_i - r_{i-1}) < 1)$ **then**
    $D2 = \min(D2, ((x - x_{i-1}) \cdot (n_i)_x + (r - r_{i-1}) \cdot (n_i)_r)^2)\,;$
  else
  $D2 = \min(D2, (x - x_i)^2 + (r - r_i)^2)\,;$
  endif
endfor
$D(S, \vec{r_0}) = \sqrt{D2}\,;$

Для вычисления знака расстояния (определения, внутри или снаружи многоугольника находится точка) можно использовать различные подходы [13]. В нашем случае используется метод вычисления знака расстояния через обобщённую нормаль [14]. Знак сводится к вычислению знака скалярного произведения до нормали к ближайшему элементу контура, направленной наружу. В случае, если ближайшим элементом является отрезок, то нормаль будет определяться однозначно (можно использовать ориентацию контура по часовой стрелке, умножая векторно каждый отрезок на вектор $\vec{c}$ из локального базиса). Если ближайшим элементом является вершина, то нормалью, определяющей знак расстояния, будет являться сумма нормалей от прилежащих к вершине отрезков.

1.1. Булевы операции над введёнными геометрическими элементами

Использование двух описанных типов объектов позволяет с помощью их булевых комбинаций описать достаточно обширный набор геометрий (форсунки, элементы фронтовых устройств и камер сгорания), используемых в практических приложениях CFD-моделирования. Рассмотрим реализацию вычисления расстояния от булевых комбинаций (объединения и вычитания) рассмотренных геометрических элементов. Известны аппроксимации расстояния до булевой комбинации объектов с известными знаковыми расстояниями [12]. Так, расстояния до булева объединения объектов можно аппроксимировать через минимум от расстояний до двух объектов A и B:

$$D(A \cup B, \vec{r}) \approx \min(D(A, \vec{r}), D(B, \vec{r})), \tag{1}$$

где $D(f, \vec{r})$ — знаковое расстояние от объекта f в точке $\vec{r}$.

Снаружи обоих объектов, входящих в объединение, эта аппроксимация точно соответствует расстоянию до их объединения. Действительно, снаружи обоих объектов знаки расстояний до обоих объектов положительны, при этом элементы поверхности, находящиеся внутри объединения двух объектов (там, где знак расстояния до хотя бы одного из объектов отрицателен) находятся на ненулевом расстоянии от поверхности объединения, и в итоге расстояние до них будет большим, чем расстояние до ближайшей поверхности булева объединения объектов.

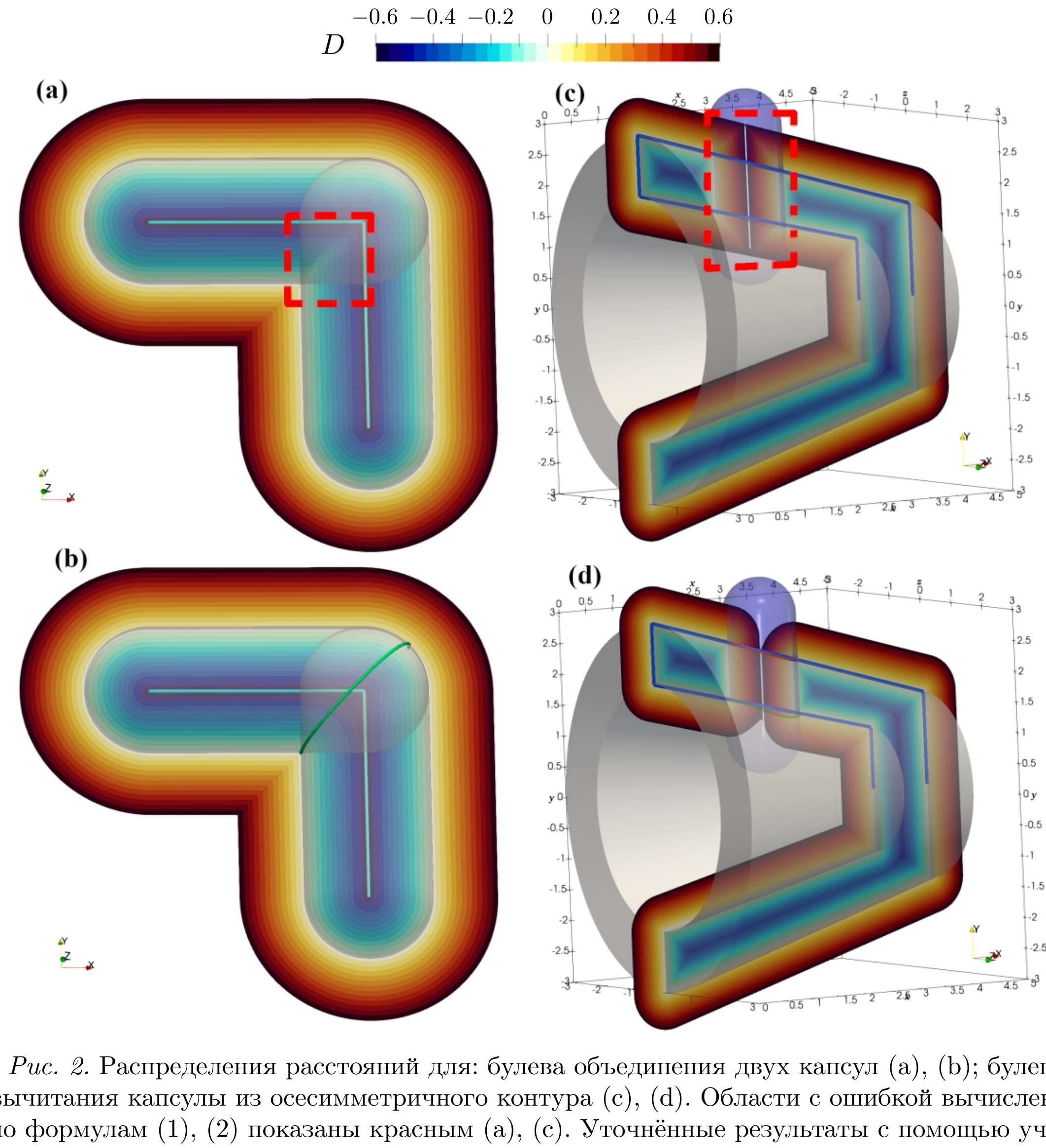


Рис. 2. Распределения расстояний для: булева объединения двух капсул (a), (b); булева вычитания капсулы из осесимметричного контура (c), (d). Области с ошибкой вычисления по формулам (1), (2) показаны красным (a), (c). Уточнённые результаты с помощью учёта расстояний до контуров пересечения поверхностей (b), (d)

Во внутренней области булева объединения (там, где знак хотя бы одного из расстояний до элементов отрицателен) выражение (1) не будет точно представлять расстояние. Вблизи пересечения поверхностей A и B могут быть области, где минимальным будет расстояние до контура пересечения поверхностей A и B, не совпадающее с расстояниями ни до первого, ни до второго объектов. Ошибка в вычислении расстояния с помощью (1) продемонстрирована на рис. 2(a), 2(c) в сравнении с правильными расстояниями, приведёнными на рис. 2(b), 2(d).

Прежде, чем перейти к уточнённому алгоритму определения расстояния, заметим, что выражение (1) правильно восстанавливает форму изоповерхности нулевого расстояния до объединения объектов, а также позволяет верно определить знак расстояния (внутри или снаружи находится точка). Функция ведёт себя монотонно при переходе через поверхность нулевого расстояния и поэтому может быть использована для задания твёрдых границ в гидродинамических расчётах, но не подходит для случаев, когда нужно восстановить значение величины расстояния до поверхности точно.

Для того, чтобы уточнить значение расстояния от произвольной точки $\vec{r}$ до поверхности булева объединения объектов A и B, необходимо в явном виде учесть расстояние до контуров пересечения поверхностей этих объектов и исключить влияние участков поверхностей этих объектов, которые находятся внутри контуров пересечения. Запишем алгоритм расчёта расстояния до булева объединения объектов с учётом контура пересечения их поверхностей. Для простоты рассмотрим случай объединения двух элементарных объектов, имеющих один односвязный контур пересечения геометрий.

Алгоритм 3. Схема определения расстояния до объединения элементарных объектов $D(A \cup B, \vec{r})$:

1. Определить контур пересечения поверхностей.
2. Для каждого из объектов определить область, где минимальным будет расстояние до контура.
3. Вне этой области расстояние вычисляется по формуле (1).
4. Внутри этой области расстояние вычисляется как расстояние до ближайшей точки контура пересечений поверхностей A и B.
5. Для определения знака расстояния использовать знак выражения (1).

То есть, необходимо исключить из рассмотрения части поверхностей объектов, находящиеся внутри контуров пересечения поверхностей объектов.

Рассмотрим, как это сделать для объекта типа «капсула». При наличии контура пересечения, опоясывающего капсулу, необходимо определить, с какой стороны от контура находится точка на капсуле, ближайшая к точке, в которой вычисляется расстояние. Определим точку $\vec{r}_{nearest}$, как лежащую на поверхности капсулы A и ближайшую к точке $\vec{r}$. Точка $\vec{r}_{nearest}$ может быть легко найдена следующим образом. Если ближайшей является цилиндрическая часть капсулы, то нужно провести прямую перпендикулярно оси капсулы до пересечения с поверхностью цилиндра. Если ближайшей является одна из полусфер, то нужно провести прямую к центру основания полусферы, до пересечения с её поверхностью. Данную процедуру можно описать с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 4. Определение ближайшей точки на поверхности капсулы.

$r_a = (\vec{r} - \vec{a_0}) \cdot \vec{a}$
$r_b = (\vec{r} - \vec{a_0}) \cdot \vec{b}$
$r_c = (\vec{r} - \vec{a_0}) \cdot \vec{c}$
if $(0 > r_a > L)$ **then**

$\quad k = \sqrt{R^2/(r_b^2 + r_c^2))}$;
$\quad \vec{r}_{nearest} = \vec{r} - (1-k) \cdot (\vec{b} \cdot r_b + \vec{c} \cdot r_c)$;
else if $(r_a < 0)$ **then**
$\quad k = \sqrt{R^2/((r_a)^2 + (r_b)^2 + (r_c)^2)}$;
$\quad \vec{r}_{nearest} = \vec{r} - (1-k) \cdot (\vec{a} \cdot r_a + \vec{b} \cdot r_b + \vec{c} \cdot r_c)$;
else
$\quad k = \sqrt{R^2/((r_a - L)^2 + (r_b)^2 + (r_c)^2)}$;
$\quad \vec{r}_{nearest} = \vec{r} - (1-k) \cdot (\vec{a} \cdot (r_a - L) + \vec{b} \cdot r_b + \vec{c} \cdot r_c)$;
endif

Аналогичную операцию можно провести и для второго типа рассматриваемых базовых объектов — тел вращения, с образующей, состоящей из связанных отрезков прямых. Для данного типа объектов также легко можно найти точку $\vec{r}_{nearest}$, ближайшую к произвольной точке $\vec{r}$. Для этого нужно найти, какой из отрезков контура является ближайшим к данной точке в 2D-пространстве локального базиса объекта (в силу осевой симметрии поверхности объекта). Нахождение ближайшего отрезка происходит при вычислении расстояния $D(A, \vec{r})$) и известно заранее при вычислении значения выражения (1).

После нахождения ближайшего отрезка нужно спроектировать исходную точку $\vec{r}$ в направлении, перпендикулярном к данному отрезку в цилиндрических координатах, до пересечения с изоповерхностью $D(A, \vec{r}_{nearest}) = 0$. Если ближайшим является не отрезок, а вершина многоугольника, то её координаты и будут координатой ближайшей точки в 2D-пространстве.

После того, как определены координаты ближайшей точки в локальном 2D-пространстве, её нужно спроектировать обратно в исходное 3D-пространство, что легко сделать, используя представление о цилиндрической симметрии распределения расстояния $D(A, \vec{r})$ для тела вращения. Алгоритм вычисления $\vec{r}_{nearest}$ можно формально записать следующим образом (считаем, что индекс $imin$ — это индекс отрезка $\{x_{imin} - x_{imin-1}, r_{imin} - r_{imin-1}\}$, ближайшего к точке $\vec{r}$, при этом $\vec{n}_{imin}$ — это вектор нормали к данному отрезку в 2D-пространстве):

Алгоритм 5. Определение ближайшей точки на поверхности тела вращения.

$\quad p_r = (r - r_{imin-1}) \cdot (n_{imin})_r$;
$\quad p_x = (x - x_{imin-1}) \cdot (n_{imin})_x$;
$\quad \vec{r}_{loc} = (\vec{r} - \vec{a}_0)$;
$\quad p_a = \vec{r}_{loc} \cdot \vec{a}$;
$\quad \vec{r}_{nearest} = \vec{a}_0 - p_r \cdot (\vec{r}_{loc} - \vec{a} \cdot p_a) - p_x \cdot (\vec{a} \cdot p_a)$;

Разделение областей пространства, ближайшими к которым являются части поверхности по одну и другую сторону контура пересечения для капсулы, приведены на рис. 3(a). Как видно, пространство разделяется на две части, разделённые поверхностью, образованной прямыми, проведёнными в сторону нормали к поверхности капсулы из всех точек контура пересечения капсулы с другим объектом. Аналогичное разделение пространства для тела вращения с вырезанным на его поверхности контуром пересечения с другим объектом показано на рис. 3(b). Видно, что в этом случае поверхность разделения напоминает конус, сходящийся к оси симметрии тела вращения. Точки, находящиеся внутри конуса, будут ближайшими к области поверхности вращения, ограниченной контуром пересечения.

После нахождения ближайшей к $\vec{r}$ точки на поверхности A, необходимо определить, находится ли эта точка $\vec{r}_{nearest}$ внутри или снаружи другого тела B из булевой операции. Это можно сделать, используя известные значения расстояния до поверхности второго тела $D(B, \vec{r}_{nearest})$. Если $D(B, \vec{r}_{nearest}) < 0$, то надо исключить вклад тела A в величину расстояния до точки $\vec{r}$ и заменить его вкладом контура пересечения поверхностей A и B. Таким образом, удаётся исключить из рассмотрения участок поверхности тела A находящийся внутри объединения $A \cup B$. Аналогичным образом необходимо исключить и участок поверхности тела B, находящийся внутри $A \cup B$.

Пример распределения расстояний от капсулы, пересечённой поверхностью тела вращения, приведён на рис. 3(c). Показано, как выглядит распределение расстояния, с исключением части поверхности, ограниченной контуром пересечения с другим объектом. Аналогичное распределение для тела вращения, с вырезанным участком поверхности внутри контура пересечения, показано на рис. 3(d).

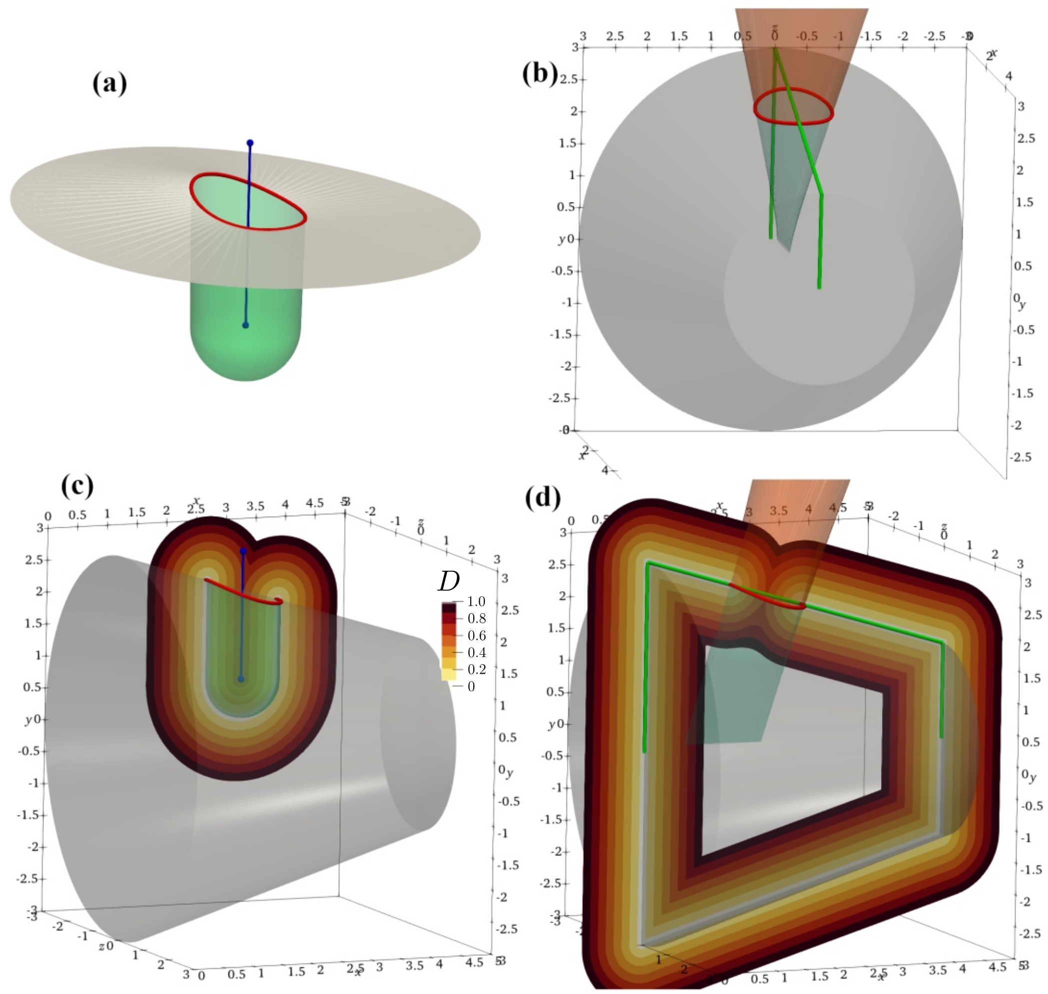


Рис. 3. Разделение областей пространства, ближайшими к которым являются части поверхности по одну и другую сторону контура пересечения: (a) — для объекта типа капсула, (b) — для объекта типа тело вращения. Распределения расстояний от объектов с исключением части поверхности внутри контура пересечения: (c) — для капсулы, (d) — для тела вращения

Для булева вычитания объектов в качестве аппроксимации расстояния можно брать следующее выражение:

$$D(A - B, \vec{r}) \approx \max(D(A, \vec{r}), -D(B, \vec{r})). \qquad (2)$$

В данном случае расстояние определяется точно в области разницы A и B (внутри объекта A и снаружи объекта B). Расстояние, от булевой разности $A - B$, рассчитанное по формуле (2), будет иметь погрешность в области снаружи от A и внутри B. Но, как и формула (1), формула (2) позволяет правильно определять нулевую изоповерхность расстояния, а также отделять внутреннюю часть булевой комбинации объектов от внешней.

Для уточнения значений расстояния до булевой разности $D(A - B, \vec{r})$, полученных по формуле (2) необходимо, как и ранее, вычислить контуры пересечения поверхностей A и B, после чего, исключить из рассмотрения области поверхностей, находящиеся внутри контуров пересечения. Это можно сделать путём нахождения ближайших точек к $\vec{r}$ на поверхностях A и B, аналогично тому, как это было описано для случая булева объединения выше. После нахождения ближайших точек $\vec{r}_{nearest}$ нужно определить, лежат ли они вне или внутри второго объекта из булевой разности, и в случае, если они лежат внутри второго объекта, то расстояние, найденное по формуле (2) нужно заменить на расстояние до ближайшей точки контура пересечения поверхностей.

Таким образом, был описан алгоритм вычисления расстояния до двух базовых булевых операций (объединение и разность) от базовых типов геометрических объектов. Набор базовых типов геометрических объектов может быть расширен при необходимости, при этом принцип вычисления расстояния останется тем же.

Остаётся сказать о вычислении расстояния до контура пересечения поверхностей элементарных объектов. Можно описывать контур пересечения различными способами с применением аналитических или численных методов. Поскольку не существует прямого аналитического способа вычисления минимума расстояния до контура пересечения в общем виде, то в данной работе предложено использовать простую аппроксимацию контура через набор связанных отрезков. Отрезки предполагаются имеющими равную длину, при уменьшении которой аппроксимация контура стремится к истинной форме контура. При этом, определение расстояния до контура сводится к определению расстояния до ближайшего элемента контура (отрезка или вершины) путём перебора по всем элементам контура.

Ошибка в определении расстояния до булевой комбинации объектов по предложенному алгоритму будет зависеть от дискретизации контуров пересечения поверхностей. Чем точнее будет дискретизация (больше элементов контура), тем точнее будет восстанавливаться расстояние. При этом, относительная погрешность вычисления расстояния будет уменьшаться с удалением от контура. Однако увеличение количества отрезков в дискретизации контура будет приводить к замедлению вычисления расстояний, поэтому в данном вопросе необходим компромисс. Рациональным является использование отрезков для дискретизации контура пересечения близких к размеру расчётных ячеек гидродинамического расчёта, находящихся вблизи контура пересечения.

2. ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА В РАСЧЁТЕ ИСТЕЧЕНИЯ СТРУИ ЖИДКОСТИ ИЗ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ ФОРСУНКИ

Для тестирования алгоритма вычисления расстояния до геометрии был проведён расчёт течения внутри центробежной форсунки для керосина с расходом 0.9 л/мин (рис. 4).

Форсунка представляет собой цилиндр диаметром 7 мм и высотой 6.2 мм с вырезанной внутренней полостью диаметром 3.2 мм, в которую ведут два тангенциальных входных канала диаметрами по 1.2 мм. Внутренняя полость заканчивается коническим сужением и одним выходным каналом с диаметром 0.8 мм (рис. 4(a)–4(c)). Расход керосина 0.9 л/мин соответствует выходной скорости струи ≈ 30 м/с. Струя керосина с плотностью 810 кг/м^3, кинематической вязкостью $2.71 \cdot 10^{-6}$ м^2/с и коэффициентом поверхностного натяжения 0.023 Н/м истекала в воздушную среду с плотностью 1.2 кг/м^3 и кинематической вязкостью $1.6 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Задача распыла струи керосина из форсунки рассчитывалась в приближении несжимаемой жидкости с помощью открытого расчётного кода *Basilisk* [1]. Расчёт проводился методом конечных объёмов, детали расчётной схемы и решаемые уравнения описаны в [15].

Расчётная область представляла собой куб со стороной 15 мм. Расчёт проводился с динамическим сгущением ячеек сетки (каждая ячейка могла быть разбита на 8 равных ячеек

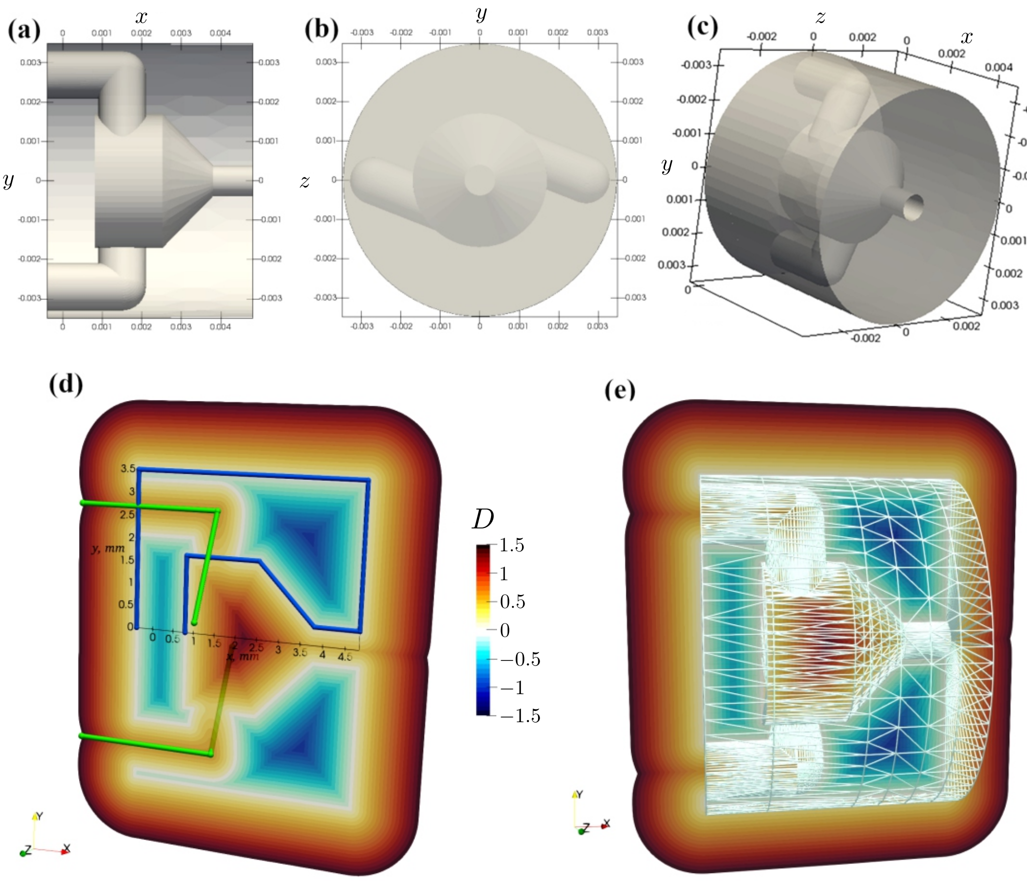


Рис. 4. (a)–(c) — геометрия форсунки; (d) — представление форсунки в виде комбинации базовых элементов между которыми произведено булево вычитание (зелёным показаны центральные оси капсул, синим — осесимметричный контур), а также распределение расстояния в продольном сечении; (e) — представление поверхности форсунки в виде треугольников и расстояние, полученное путём перебора по треугольникам. D — расстояние, мм; x, y, z измеряются в м

с вдвое меньшим линейным масштабом). Разбиение могло проходить вплоть до минимального размера ячейки в 7 мкм. Максимальное число узлов во время расчёта составляло 30 млн. ячеек. В качестве критериев для сгущения использовались помимо значений расстояния до поверхности форсунки также модуль градиента поля объёмной доли жидкой фазы и модуль градиента скорости. Расчёт проводился на 128 процессорных ядрах кластера «Каскад» ИТ СО РАН. На каждое ядро приходилось ≈ 234 тыс. ячеек.

Геометрия форсунки была представлена тремя способами: (i) с помощью булевой комбинации, т. е. вычитания четырёх «капсул» из одного осесимметричного контура (рис. 4(d)) со значениями расстояния, вычисленными по формуле (1) без уточнений; (ii) с уточнением по описанному выше алгоритму, т. е. с явным учётом контуров пересечения поверхностей элементарных объектов (для аппроксимации контуров использовалось кусочно-линейное представление контуров с разрешением в 20 отрезков на контур); (iii) и с помощью связанного набора треугольников, описывающих форму поверхности с минимальным достаточным для расчёта разрешением (рис. 4(e)).

Модель поверхности форсунки в виде треугольников с минимально необходимым для расчёта разрешением содержит около 5000 треугольников (рис. 4(e)). Вычисление расстояния до триангулированной поверхности форсунки сводилось к нахождению расстояния до ближайшего элемента треугольника (вершины, рёбра, грани) из всего набора треугольников. Для вычисления расстояния до треугольника использовался алгоритм, описанный в [16].

Каждая итерация по времени содержала в себе проход по всем ячейкам с вычислением расстояний до поверхности форсунки, используемых для переразбиения сетки. Временные затраты на вычисление расстояний по трём описанным алгоритмам в сравнении с затратами на расчёт гидродинамики потока приведены в таблице.

Затраты на вычисления для одного шага по времени (30 млн ячеек, 128 вычислительных ядер)

Название функции	Время, с
Расчёт расстояния по треугольникам	35.1
Расчёт расстояния по формулам 1,2	0.151
Расчёт расстояния с уточнением	0.230
Расчёт гидродинамики потока	20.6

Как видно, расчёт расстояния по треугольникам поверхности занимает время, сравнимое со временем, затраченным на расчёт гидродинамики потока, что является крайне неэффективным. Тогда как, время расчёта расстояния с использованием комбинированного представления геометрии (по формуле (1)) занимает лишь 0,7 % от времени расчёта гидродинамики, что слабо влияет на общую длительность расчёта. Использование уточнённого значения расстояния путём явного учёта контуров пересечения поверхностей элементарных объектов (с контурами, состоящими из 20 отрезков) несущественно увеличивает время расчёта расстояния до 1,1 % от времени расчёта гидродинамики, что всё ещё является приемлемым. Разрешение контуров пересечения можно менять в процессе расчёта, что позволит найти баланс между точностью вычисления расстояния и производительностью.

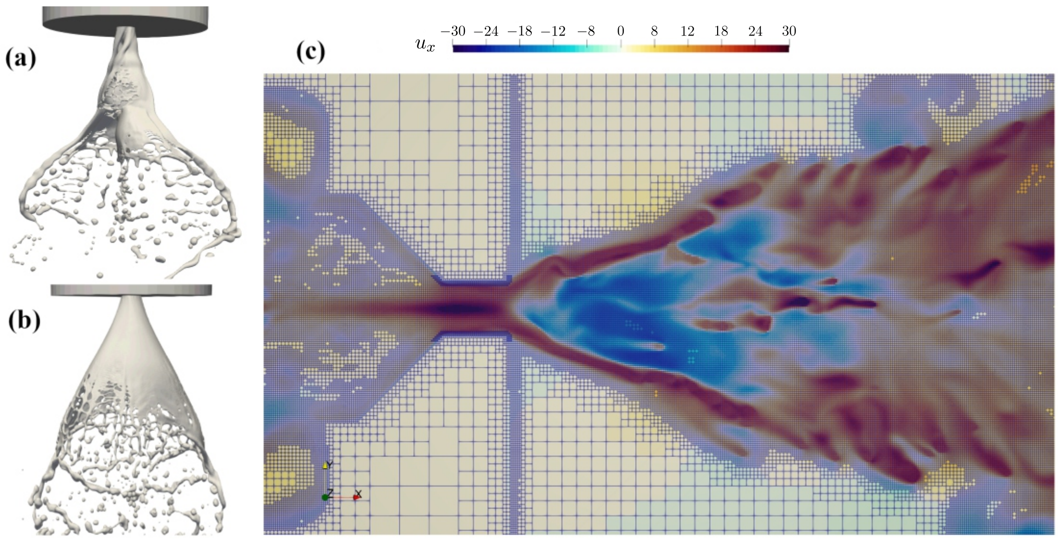


Рис. 5. (a)–(b) — вид струи жидкости в два последовательных момента времени (3 мс и 9 мс от старта расчёта); (c) — мгновенное поле скорости и ячейки динамической сетки в продольном сечении струи (момент времени $t = 4$ мс). u_x измеряется в м/с

Все три способа расчёта расстояния приводят к практически неотличимым гидродинамическим полям и форме струи. Формы струи в переходном режиме (когда из сопла вылетают несколько струй) и в установившемуся режиме (когда струя принимает форму конической плёнки) приведены на рис. 5(a)–(b). Поле скорости в продольном сечении и вид динамической сетки приведены на рис. 5(c).

После переходного процесса струя преобразуется в конусное течение жидкости в виде тонкой плёнки, которая затем распадается на капли из-за утончения под действием центробежной силы. Сравнение установившегося течения из данной форсунки, полученного в расчёте, с наблюдениями показывает качественное согласие.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен алгоритм вычисления расстояния до поверхностей, образованных булевыми комбинациями элементарных объектов двух типов (осесимметричного контура и капсулы). Новизна алгоритма заключается в явном учёте контуров пересечения поверхностей элементарных объектов в процедуре вычисления расстояния. Работа алгоритма протестирована на примере гидродинамического расчёта истечения струи керосина в воздушную среду из центробежной форсунки. Вычисленные значения расстояния используются в расчёте для задания положения границы твёрдого тела (метод вмороженных границ), динамически пересчитываемого во время переразбиения сетки. Расчёт расстояния по предложенному алгоритму показал значительно большую скорость вычисления по сравнению с использованием описания 3D модели треугольниками. Точность восстановления расстояния может быть контролируема во время расчёта, путём выбора разрешения для дискретизации контура пересечений поверхностей элементарных объектов. Вычисление расстояния по предложенному алгоритму требует незначительных вычислительных затрат (по сравнению с затратами на расчёт гидродинамики) и позволяет в перспективе использовать динамически изменяемую форму геометрии путём перемещения или изменения параметров элементарных объектов, входящих в булеву комбинацию, образующую обтекаемое тело.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-10246). Вычислительные ресурсы предоставлены в рамках госзадания Института теплофизики СО РАН (проект FWNS-2025-0002). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Popinet S.* A quadtree-adaptive multigrid solver for the Serre—Green—Naghdi equations // J. Comput. Phys. 2015. V. 302, N 2. P. 336–358.
2. *Popinet S.* An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows // J. Comput. Phys. 2009. V. 228, N 16. P. 5838–5866.
3. *Van Hooft J. A., Popinet S., Van Heerwaarden C. C., Van der Linden S. J., De Roode S. R., Van de Wiel B. J.* Towards adaptive grids for atmospheric boundary-layer simulations // Boundary Layer Meteorol. 2018. V. 167, N 3. P. 421–443.
4. *Almgren A. S., Bell J. B., Colella P., Howell L. H., Welcome M. L.* A conservative adaptive projection method for the variable density incompressible Navier—Stokes equations // J. Comput. Phys. 1998. V. 142, N 1. P. 1–46.
5. *Greaves D.* A quadtree adaptive method for simulating fluid flows with moving interfaces // J. Comput. Phys. 2004. V. 194, N 1. P. 35–56.
6. *Huet D. P., Wachs A.* A Cartesian-octree adaptive front-tracking solver for immersed biological capsules in large complex domains // J. Comput. Phys. 2023. V. 492, N 1. Article 112424.

7. *Johansen H., Colella P.* A Cartesian grid embedded boundary method for Poisson's equation on irregular domains // J. Comput. Phys. 1998. V. 147, N 1. P. 60–85.
8. *Menter F. R.* Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering application // AIAA J. 1994. V. 32, N 8. P. 1598–1605.
9. *Günther C., Meinke M., Schröder W.* A flexible level-set approach for tracking multiple interacting interfaces in embedded boundary methods // Comput. Fluids. 2014. V. 102, N 1. P. 182–202.
10. *Limare A., Popinet S., Josserand C., Xue Z., Ghigo A.* A hybrid level-set/embedded boundary method applied to solidification-melt problems // J. Comput. Phys. 2023. V. 474, N 10. Article 111829.
11. *Cheny Y., Botella O.* The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties // J. Comput. Phys. 2010. V. 229, N 4. P. 1043–1076.
12. *Jones M. W., Baerentzen J. A., Sramek M.* 3D distance fields: A survey of techniques and applications // IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. 2006. V. 12, N 4. P. 581–599.
13. *Hormann K., Agathos A.* The point in polygon problem for arbitrary polygons // Comput. Geom. 2001. V. 20, N 3. P. 1043–1076.
14. *Baerentzen J. A., Aanaes H* Signed distance computation using the angle weighted pseudonormal // IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. 2005. V. 11, N 3. P. 243–253.
15. *Vozhakov I. S., Hrebtov M. Y., Yavorsky N. I., Mullyadzhanov R. I.* Numerical Simulations of Swirling Water Jet Atomization: A Mesh Convergence Study // Water. 2023. V. 15, N 14. Article 2552.
16. *Jones M. W.* 3D distance from a point to a triangle // Department of Computer Science, University of Wales Swansea Technical Report CSR-5. 1995.

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 519.65

COMPUTATION OF A DISTANCE FIELD BY MEANS OF COMBINED GEOMETRY REPRESENTATION IN FLUID DYNAMICS SIMULATIONS WITH EMBEDDED BOUNDARIES

© 2024 **M. Y. Hrebtov**[1,2a], **R. I. Mullyadzhanov**[1,2b]

[1]*Kutateladze Institute of Thermophysics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]weexov@yandex.ru, [b]rustammul@gmail.com

Received 27.11.2024, revised 27.11.2024, accepted 11.12.2024

Abstract. We present a method for calculating the signed distance field to three-dimensional geometric models by representing them as a result of Boolean operations on elementary objects for each of which the signed distance is known. Two versions of the algorithm are proposed. The first is a simplified version for quick calculation of the rough distance approximation (with an exact zero isosurface and correct separation of domains inside and outside the model). The second version includes calculation of the distance to the intersection contours between elements, allowing the distance to be reconstructed with a greater accuracy without considerable additional computational costs. Both methods are much faster than the computation of distance based on the triangulation of the surfaces. The proposed approach also allows for interactively changing relative positions and orientation of the geometry parts; this makes it possible to perform calculations with moving boundaries. The approach has been tested in fluid dynamics simulation with an interphase boundary and adaptive multilevel grid refinement in `Basilisk` open source code for simulation of multiphase flows.

Keywords: distance to object, computational geometry, numerical modeling, continuous medium, dynamic grid.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.411

REFERENCES

1. S. Popinet, "A quadtree-adaptive multigrid solver for the Serre—Green—Naghdi equations," J. Comput. Phys. **302** (2), 336–358 (2015).
2. S. Popinet, "An accurate adaptive solver for surface—tension—driven interfacial flows," J. Comput. Phys. **228** (16), 5838–5866 (2009).
3. J. A. Van Hooft, S. Popinet, C. C. Van Heerwaarden, S. J. Van der Linden, S. R. De Roode, and B. J. Van de Wiel, "Towards adaptive grids for atmospheric boundary-layer simulations," Boundary Layer Meteorol. **167** (3), 421–443 (2018).
4. A. S. Almgren, J. B. Bell, P. Colella, L. H. Howell, and M. L. Welcome, "A conservative adaptive projection method for the variable density incompressible Navier—Stokes equations," J. Comput. Phys. **142** (1), 1–46 (1998).
5. D. Greaves, "A quadtree adaptive method for simulating fluid flows with moving interfaces," J. Comput. Phys. **194** (1), 35–56 (2004).
6. D. P. Huet and A. Wachs, "A Cartesian-octree adaptive front-tracking solver for immersed biological capsules in large complex domains," J. Comput. Phys. **492** (1), 112424 (2023).

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 697–708.

7. H. Johansen and P. Colella, "A Cartesian grid embedded boundary method for Poisson's equation on irregular domains," J. Comput. Phys. **147** (1), 60–85 (1998).
8. F. R. Menter, "Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering application," AIAA J. **32** (8), 1598–1605 (1994).
9. C. Günther, M. Meinke, and W. Schröder, "A flexible level-set approach for tracking multiple interacting interfaces in embedded boundary methods," Comput. Fluids **102** (1), 182–202 (2014).
10. A. Limare, S. Popinet, C. Josserand, Z. Xue, and A. Ghigo, "A hybrid level-set/embedded boundary method applied to solidification-melt problems," J. Comput. Phys. **474** (10), 111829 (2023).
11. Y. Cheny and O. Botella, "The LS-STAG method: A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties," J. Comput. Phys. **229** (4), 1043–1076 (2010).
12. M. W. Jones, J. A. Baerentzen, and M. Sramek, "3D distance fields: A survey of techniques and applications," IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. **12** (4), 581–599 (2006).
13. K. Hormann and A. Agathos, "The point in polygon problem for arbitrary polygons," Comput. Geom. **20** (3), 1043–1076 (2001).
14. J. A. Baerentzen and H. Aanaes, "Signed distance computation using the angle weighted pseudonormal," IEEE Trans. Vis. Comput. Graph. **11** (3), 243–253 (2005).
15. I. S. Vozhakov, M. Y. Hrebtov, N. I. Yavorsky, and R. I. Mullyadzhanov, "Numerical Simulations of Swirling Water Jet Atomization: A Mesh Convergence Study," Water **15** (14), 2552 (2023).
16. M. W. Jones, "3D distance from a point to a triangle," Technical Report CSR-5 (Dep. Comput. Sci., Univ. Wales, Swansea, 1995).

УДК 550.832

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ ИНДУКЦИОННОГО КАРОТАЖА В СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ НЕФТЕГАЗОВЫХ КОЛЛЕКТОРАХ

© 2024 М. И. Эпов[1a], Э. П. Шурина[2b], Д. А. Архипов[1c], Д. В. Добролюбова[1d], Н. В. Штабель[1e], Е. И. Штанько[1f]

[1] *Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, просп. Акад. Коптюга, 3, г. Новосибирск 630090, Россия,*
[2] *Новосибирский государственный технический университет, просп. Карла Маркса, 20, г. Новосибирск 630073, Россия*

E-mails: [a]epovmi@mail.ru, [b]shurina@online.sinor.ru, [c]arhipovda@ipgg.sbras.ru, [d]dobrolubovadv@ipgg.sbras.ru, [e]orlovskayanv@ipgg.sbras.ru, [f]mihaylovaei@ipgg.sbras.ru

Поступила в редакцию 26.04.2024 г.; после доработки 26.04.2024 г.;
принята к публикации 06.11.2024 г.

В работе выполнено численное моделирование сигналов индукционного каротажа в необсаженной скважине векторным методом конечных элементов. Электромагнитное поле в проводящей среде возбуждается катушкой с переменным током при перемещении всего зонда вдоль ствола скважины. Измеряется наведённая в двух приёмных катушках ЭДС. Исследуется зависимость наведённых ЭДС от электропроводности продуктивных пластов. Удельная электропроводность пород-коллекторов нефти описывается либо диагональным тензором с преобладанием диагональных элементов σ_{xx} и σ_{yy}, либо как плотный тензор, полученный из диагонального путём его поворота на заданный зенитный угол. Численное моделирование выполняется векторным методом конечных элементов на тетраэдральном согласованном адаптивном разбиении, учитывающем конструкцию трёхкатушечного зонда, вертикальную скважину и слоисто-анизотропную внешнюю среду. Удельная электропроводность пластов вводится в вариационную постановку как тензор второго ранга, который описывает их анизотропию. По измеренной в приёмных-катушках ЭДС для различных положений зонда построены зависимости кажущейся электропроводности от глубины. Проанализирована чувствительность сигналов индукционного каротажа к параметрам анизотропии удельной электропроводности в нефтегазоносном коллекторе.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, анизотропия, векторный метод конечных элементов, кажущаяся удельная электропроводность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.412

ВВЕДЕНИЕ

Трёхмерное численное моделирование на основе векторного метода конечных элементов является широко известным инструментом для решения прямых задач электромагнетизма в расчётных областях со сложной внутренней геометрией и контрастными электрофизическими свойствами. Система уравнений Максвелла лежит в основе математических моделей для индукционного каротажа (ИК) [1–4] (уравнение Гельмгольца с комплексозначным квадратом волнового числа). ИК в скважинах обычно применяют для выделения нефтегазоносных и водонасыщенных пластов [4].

Методы прямого численного моделирования широко применяются в геоэлектромагнетизме для теоретической верификации данных измерений и проверки гипотез, а также как один из этапов инверсии при интерпретации измеренных сигналов, полученных электромагнитными методами. При инверсии наиболее важным является точность и скорость решения прямой задачи. В геофизических приложениях для решения задач геоэлектромагнетизма обычно применяются конечно-разностные [5,6] или конечно-элементные реализации [7,8], с присущими им преимуществами и недостатками. Для инверсии обычно используются решения прямых задач в одномерных или двумерных моделях в классе слоистых сред [9–12]. Моделирование с помощью интегральных уравнений и разностных схем в трёхмерном пространстве с наклонной скважиной и сложным распределением электрофизических свойств в толще пласта показано в [13, 14]. Аналитический подход к инверсии данных индукционного каротажа приведён в [15,16].

В ряде случаев исследователи сталкиваются с задачей описания и учёта анизотропно-комплексной удельной электропроводности (УЭП) горных пород [8,13–15,17]. К ним относятся трещиноватые карбонатные коллекторы [8] и песчано-глинистые отложения [17]. В работе [8] приведены результаты инверсии данных каротажа и восстанавливаются значения диагональных элементов тензора УЭП, а также зенитный угол наклона его главных осей. В [18] показано влияние анизотропного наклонного пласта на наведённые в измерительной системе сигналы при выполнении расчётов скалярным методом конечных элементов относительно неизвестных компонент магнитного поля при возбуждении его магнитным дипольным источником.

В работе моделируются диаграммы ИК для трёхкатушечного зонда в необсаженной вертикальной скважине, вскрывшей контрастный по УЭП пласт-коллектор с выраженной анизотропией. Изучено влияние УЭП продуктивного пласта на наведённые в приёмных катушках зонда ЭДС. Реализовано решение прямой задачи ИК векторным методом конечных элементов на тетраэдральном согласованном разбиении на характерной частоте (70 кГц) в естественных переменных электромагнитного поля. Предлагаемый в работе алгоритм моделирования напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ позволяет учесть конечные размеры трёхкатушечного зонда и анизотропию УЭП отдельных пластов в области моделирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Электрическое поле, возбуждаемое в ИК, подчиняется уравнению Гельмгольца

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}, \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ — комплексная векторная величина напряжённости электрического поля [В/м], $\mu = \mu_r \mu_0$ — магнитная проницаемость среды [Гн/м], $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [Гн/м], μ_r — относительная магнитная проницаемость, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость среды [Ф/м], $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ [Ф/м], ε_r — относительная диэлектрическая проницаемость, $\widehat{\sigma}$ — тензор удельной электропроводности среды [См/м], $k^2 = i\omega\widehat{\sigma} - \omega^2 \varepsilon$, f — частота источника [Гц], $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота [Гц], $\mathbf{J}$ — плотность тока в источнике [А/м^2], Ω — трёхмерная расчётная область [м^3] с внешней границей $\partial\Omega$ [м^2] (рис. 1).

На границах расчётной области заданы однородные электрические краевые условия, соответствующие условиям «большого бака»

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \mid_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$.

2. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА

В работе приведены результаты вычисления наведённых в приёмных катушках ЭДС при перемещении трёхкатушечного зонда вдоль ствола скважины. Для этого последовательно решается серия прямых задач (1)–(2) с вариацией внутренних размеров области Ω в соответствии с изменением положения зонда. Численное решение реализуется векторным методом конечных элементов [19]. Для построения вариационной формулировки необходимо ввести гильбертово пространство векторных комплекснозначных функций

$$H_0(rot,\Omega) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \times \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{n} \times \mathbf{u} \mid_{\partial\Omega} = 0\}, \tag{3}$$

где $\mathbf{L}^2(\Omega)$ — гильбертово пространство векторных функций, интегрируемых с квадратом.

В пространстве (3) вводятся норма и скалярное произведение, имеющие соответственно вид

$$||\mathbf{u}||^2 = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_\Omega \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{u}^* d\Omega,$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega + \int_\Omega \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}^* d\Omega.$$

Тогда вариационная формулировка записывается следующим образом [19]: для $\mathbf{J} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in H_0(rot,\Omega)$ такое, что $\forall\ \mathbf{v} \in H_0(rot,\Omega)$ выполняется

$$\int_\Omega \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v} d\Omega + \int_\Omega k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega = -i\omega \int_\Omega \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} d\Omega. \tag{4}$$

Плотность тока $\mathbf{J}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{J} = \frac{I}{S} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где I — сила тока в источнике [А], S — площадь сечения контура петли [м^2], $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор направления течения тока в источнике. Вычисляя интеграл в правой части (4) по объёму источника получим

$$\int_\Omega \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{v} d\Omega + \int_\Omega k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega = -i\omega \int_L I \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} dL,$$

где L — контур генераторной петли.

3. ДИСКРЕТНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Для расчётной области Ω строится согласованное сеточное тетраэдральное разбиение T_h, учитывающее зонд с генераторной и приёмными катушками, скважину и слоистую структуру геологической среды. Вводится конечномерное подпространство $H_0^h(rot,\Omega) \subset H_0(rot,\Omega)$. Дискретная вариационная формулировка принимает следующий вид: для $\mathbf{J} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E}^h \in H_0^h(rot,\Omega)$ такое, что $\forall\ \mathbf{v}^h \in H_0^h(rot,\Omega)$ выполняется

$$\int_\Omega \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^h \cdot \nabla \times \mathbf{v}^h d\Omega + \int_\Omega k^2 \mathbf{E}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega = -i\omega \int_L I \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}^h dL. \tag{5}$$

В качестве базисных функций вводится полный векторный базис Вебба первого порядка [20]. Для обеспечения выполнения условия непрерывности при аппроксимации тока в катушке зонда используются базисные функции Вебба первого неполного порядка. Анизотропия среды описывается тензором удельной электропроводности $\widehat{\sigma}$ и учитывается на уровне дискретной вариационной постановки (5) в соответствии с предложенным и реализованным в [7] алгоритмом.

В общем случае тензор удельной электропроводности имеет вид

$$\widehat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

и является симметричным положительно-определённым тензором, все элементы которого больше либо равны 0.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Расчётная область $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 =$[6 м × 6 м × 6 м]. Здесь Ω_1 — вмещающая среда; Ω_2 — необсаженная скважина диаметром 0.216 м, заполненная буровым раствором; Ω_3 — продуктивный пласт-коллектор, глубина залегания которого от 1.3 до 1.8 м (рис. 1(a)); Ω_4 — корпус зонда. Генераторная катушка обозначена S, её диаметр — 0.1 м; приёмные катушки — R_1 и R_2, диаметр приёмных катушек — 0.1 м. Генераторная и приёмные катушки соосные, их центры находятся на оси скважины. Приёмник R_1 расположен в 1 м от генераторной катушки S и состоит из n_1=20 витков, R_2 — в 0.8 м от генераторной катушки S и состоит из $n_2 = 10$ витков (рис. 1(b)). Основные электрофизические характеристики отдельных подобластей расчётной области приведены в таблице 1. Частота возбуждения поля $f = 70$ кГц. Сила тока 1 А.

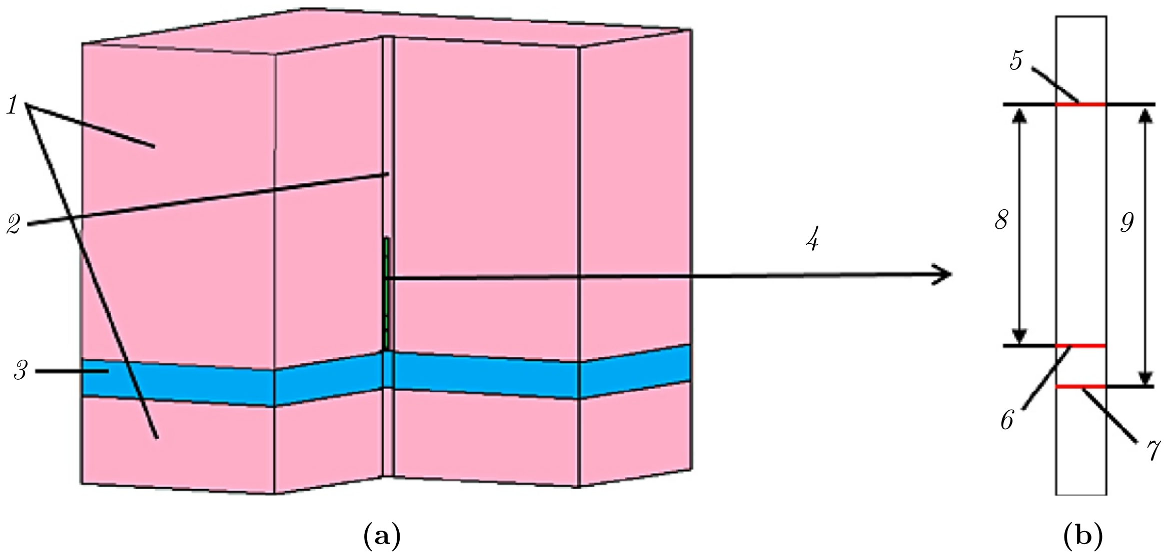


Рис. 1. (a) расчётная область: *1* — вмещающая среда Ω_1, *2* — необсаженная скважина Ω_2, *3* - пласт Ω_3, *4* — зонд; (b) трёхкатушечный зонд: *5* — генераторная катушка S, *6* — вторая приёмная катушка R_2, *7* — первая приёмная катушка R_1, *8* — 0.8 м, *9* — 1.0 м

Таблица 1

Электрофизические характеристики среды

Область	ε_r	μ_r	σ[См/м]
Буровой раствор	1	1	0.5
Вмещающая среда	1	1	0.1
Корпус зонда	1	1	10^{-6}
Продуктивный пласт	1	1	См. таблицу 2

Вариации тензорной удельной электропроводности $\widehat{\sigma}$ продуктивного пласта Ω_3 приведены в таблице 2.

Рассмотрены три различных исходных диагональных тензора: 1) диагональные элементы $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ в 10 раз превосходят σ_{zz}; 2)$\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ в 20 раз превосходят σ_{zz}; 3) $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ в 5 раз превосходят σ_{zz}. Приведённые диагональные тензоры поворачиваются на зенитный угол Θ в 30°, 45° и 60° относительно оси OX.

ЭДС в приёмниках R_1 и R_2 вычисляется в соответствии со следующей формулой:

$$\xi^{(j)} = n_j \cdot \oint_{R_j} \mathbf{E} \cdot dl, \quad j = 1, 2. \tag{6}$$

Таблица 2

Удельная электропроводность $\widehat{\sigma}$ в зависимости от зенитного угла Θ

№	$\widehat{\sigma}$[См/м]	Зенитный угол Θ, $^\circ$	$\widehat{\sigma}$[См/м]
1	$\begin{pmatrix} 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$	30°	$\begin{pmatrix} 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.082 \\ 0 & 0.082 & 0.057 \end{pmatrix}$
		45°	$\begin{pmatrix} 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.105 & 0.095 \\ 0 & 0.095 & 0.105 \end{pmatrix}$
		60°	$\begin{pmatrix} 0.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0.57 & 0.082 \\ 0 & 0.082 & 0.152 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$	30°	$\begin{pmatrix} 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.077 & 0.039 \\ 0 & 0.039 & 0.032 \end{pmatrix}$
		45°	$\begin{pmatrix} 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.055 & 0.045 \\ 0 & 0.045 & 0.055 \end{pmatrix}$
		60°	$\begin{pmatrix} 0.10 & 0 & 0 \\ 0 & 0.032 & 0.039 \\ 0 & 0.039 & 0.077 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$	30°	$\begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0.017 \\ 0 & 0.017 & 0.02 \end{pmatrix}$
		45°	$\begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0.03 \end{pmatrix}$
		60°	$\begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0.017 \\ 0 & 0.017 & 0.04 \end{pmatrix}$

Кажущаяся удельная электропроводность $\tilde{\sigma}$ определяется двумя методами: приближенно — по отношению разностей ЭДС в приёмных катушках (7), и более точно — через решение обратной задачи (8) относительно кажущейся электропроводности $\tilde{\sigma}$.

$$\tilde{\sigma} = \frac{\xi^{(1)} - \xi^{(2)}}{\xi_0^{(1)} - \xi_0^{(2)}}, \tag{7}$$

где $\xi_0^{(1)}$ и $\xi_0^{(2)}$ — наведённые в приёмных катушках ЭДС, вычисленные по формуле (6) в однородной среде с удельной электропроводностью 1 См/м.

$$\xi^{(1)}(\tilde{\sigma}) - \xi^{(2)}(\tilde{\sigma}) = \xi^{(1)} - \xi^{(2)}, \tag{8}$$

где $\xi^{(1)}(\tilde{\sigma})$ и $\xi^{(2)}(\tilde{\sigma})$ — наведённые в приёмных катушках ЭДС, вычисленные по формуле (6) в однородной среде с удельной электропроводностью $(\tilde{\sigma})$.

На рис. 2–5 приведены диаграммы кажущейся электропроводности для различных тензоров УЭП (таблица 2) относительно координаты точки $z = (z_1 + z_2)/2$, средней между приёмными катушками, где z_1 — z-координата первой приёмной катушки, z_2 — z-координата второй приёмной катушки.

Реальная составляющая кажущейся электропроводности (рис. 2), вычисленной по формуле (7) для пласта с $\sigma = 0.1$ См/м, остаётся постоянной при всех положениях зонда и отличается от электропроводности пласта примерно на 10% за счёт влияния более проводящей буровой жидкости. При этом абсолютная и относительная среднеквадратические погрешности составляют 0.011 См/м и 11% соответственно. Реальная составляющая кажущейся УЭП,

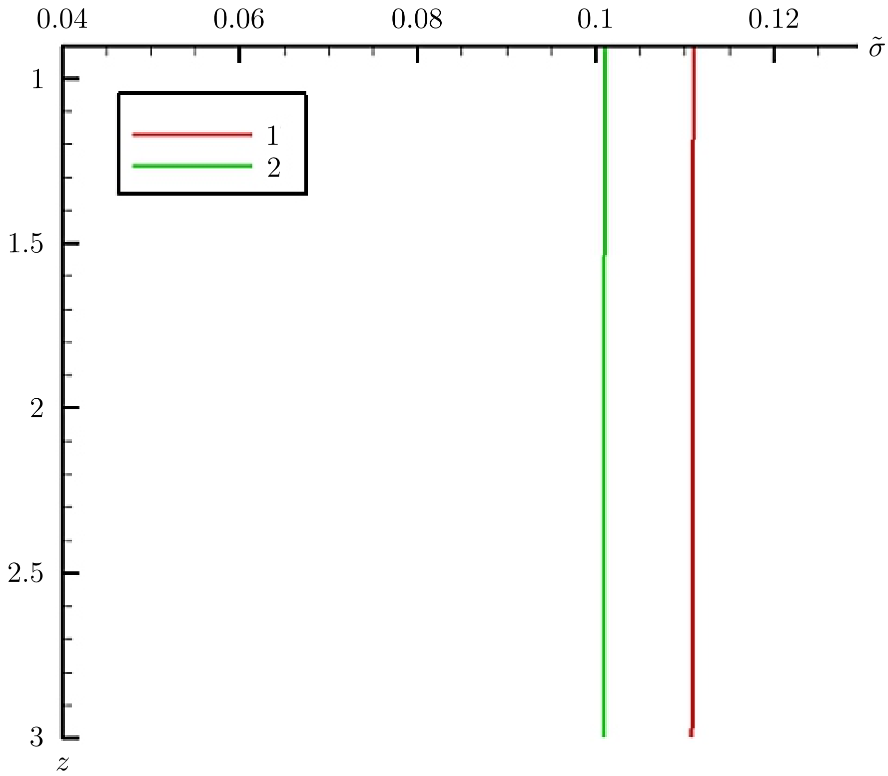


Рис. 2. Кажущаяся электропроводность для изотропной среды (УЭП пласта 0.1 См/м). 1 — вычисленная по приближенной формуле (7); 2 — вычисленная по точной формуле (8)

вычисленная как решение обратной задачи (8), совпадает с определённой по (7) (рис. 2), но абсолютная и относительная среднеквадратические погрешности при решении обратной задачи составляют 0.001 См/м и 1% соответственно. Следовательно, оба метода можно использовать для определения значения кажущейся УЭП, но вычисление кажущейся электропроводности решением обратной задачи (8) даёт более точный результат. Далее будем приводить только кажущуюся электропроводность, вычисленную решением обратной задачи (8).

Реальная составляющая кажущейся УЭП для анизотропного пласта (тензор № 1) практически постоянна при всех положениях зонда и достигает своего максимума 0.145 См/м в его середине (рис. 3). Максимальное отклонение кажущейся УЭП от трансверсально-изотропной среды наблюдается при повороте главных осей тензора на 60°. Для всех поворотов поведение близко. Первый локальный минимум ($z = 1.35$ м) находится ниже кровли пласта ($z = 1.3$ м). Подошва пласта выделяется минимумом кажущейся УЭП при повороте на 30° и точкой изгиба для поворотов на 45° и 60°. Внутри пласта наблюдаются дополнительные локальные экстремумы, связанные с положениями приёмных катушек. За пределами пласта также наблюдается отличие кажущейся УЭП для различных углов поворота. Следует отметить, что если в трансверсально-изотропной среде кажущееся УЭП завышено в диапазоне под пластом, то в анизотропных средах все кажущиеся УЭП занижены. В первом случае диаграмма асимптотически выходит на истинное УЭП сверху, а остальные — снизу.

Максимальное отклонение кажущейся электропроводности (рис. 4) от трансверсально-изотропной среды (тензор № 2) наблюдается при повороте осей тензора на 60°. Первый локальный минимум ($z = 1.35$ м) близок по положению к кровле пласта ($z = 1.3$ м). Кровля пласта выделяется уменьшением кажущейся электропроводности, внутри пласта наблюдается минимальное её значение, а при приближении к подошве кажущаяся электропроводность увеличивается, причём самой подошве соответствуют локальные экстремумы. За пределами пласта также наблюдается отличие в значении кажущейся электропроводности для различных

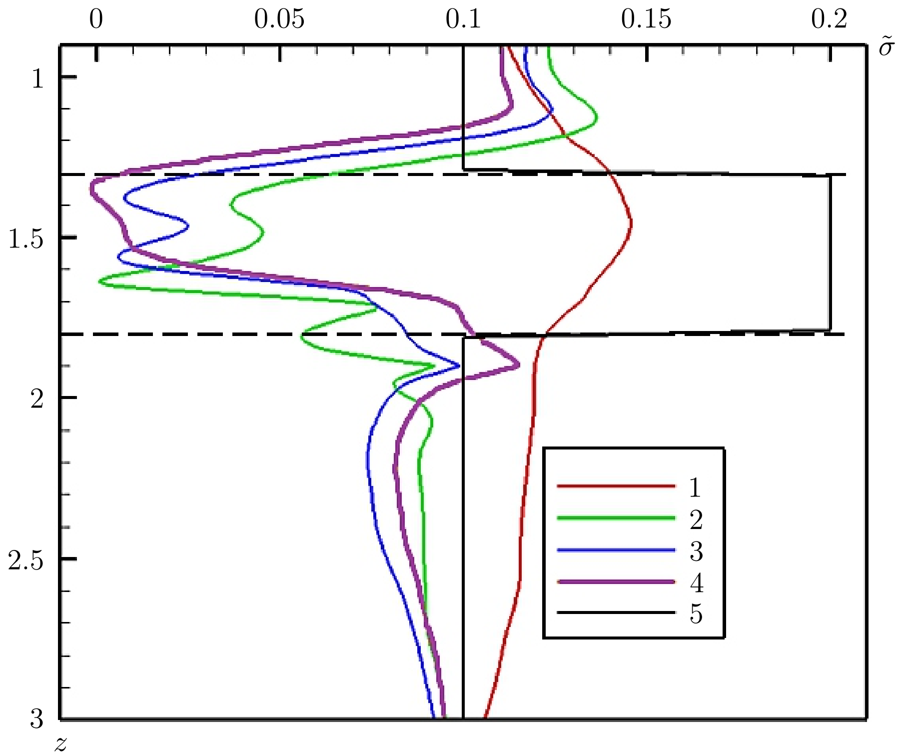


Рис. 3. Кажущаяся УЭП для тензора № 1: 1 — трансверсально-изотропная среда (угол 0°) и анизотропные среды, полученных поворотом главных осей тензора на зенитные углы 2 — 30°, 3 — 45°, 4 — 60°, вычисленная по формуле (8), 5 — истинная УЭП

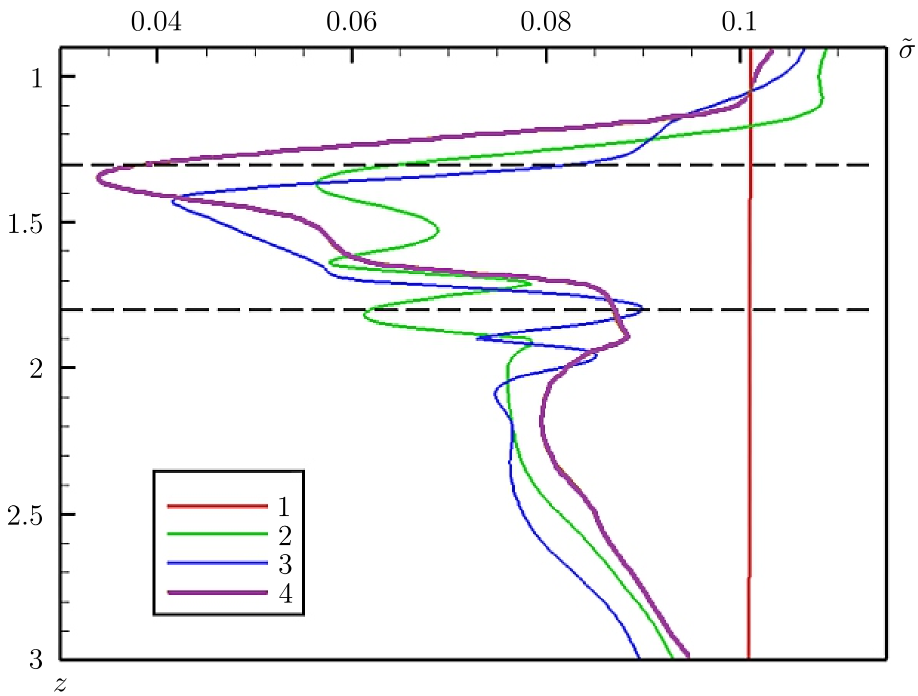


Рис. 4. Кажущаяся УЭП для тензора № 2: 1 — трансверсально-изотропная среда (угол 0°) и анизотропные среды, полученных поворотом главных осей тензора на зенитные углы 2 — 30°, 3 — 45°, 4 — 60°, вычисленная по формуле (8)

углов поворота главных осей тензора.

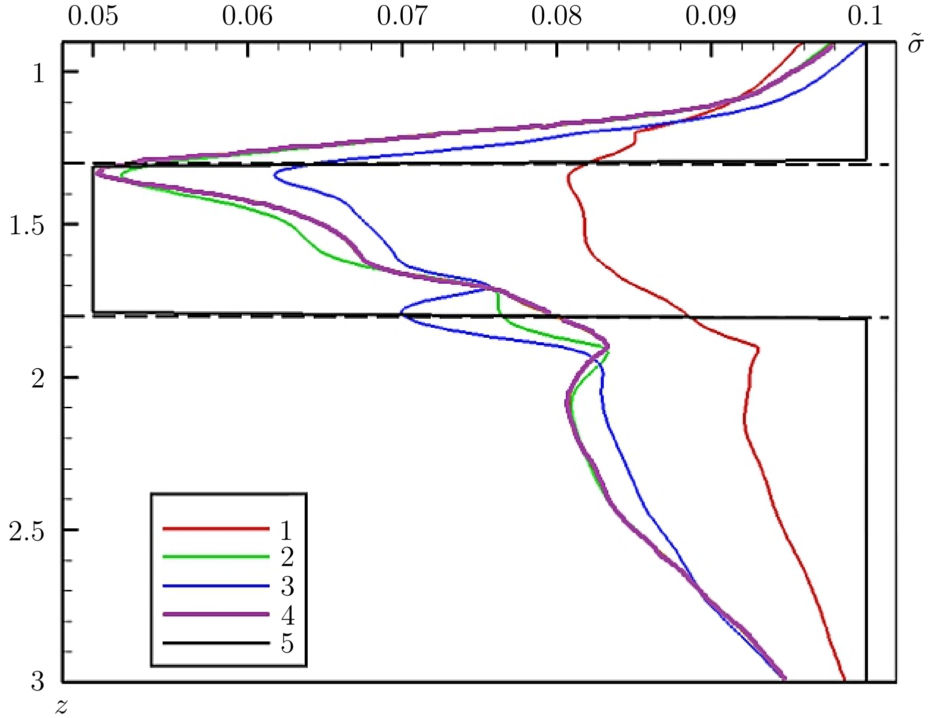


Рис. 5. Кажущаяся УЭП для тензора № 3: 1 — трансверсально-изотропная среда (угол 0°) и анизотропные среды, полученных поворотом главных осей тензора на зенитные углы 2 — 30°, 3 — 45°, 4 — 60°, вычисленная по формуле (8), 5 — истинная УЭП

Реальная составляющая кажущейся УЭП для анизотропного пласта № 3 (рис. 5) достигает своего минимального значения в кровле пласта. Максимальное отклонение кажущейся электропроводности от трансверсально-изотропной среды наблюдается при повороте на углы 30° и 60°, причём их значения практически одинаковы. Внутри пласта наблюдаются дополнительные локальные экстремумы кажущейся УЭП, а подошва пласта выделяется её локальным максимумом при повороте на 60° и локальным минимумом при повороте на 30° и 45°. За пределами пласта наблюдается незначительное отличие в значении кажущейся УЭП для различных углов поворота.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены два варианта трансформации ЭДС, наведённых в приёмниках трёхкатушечного зонда, в кажущуюся УЭП для трансверсально-изотропных сред и анизотропных сред. Последние получены поворотом главных осей тензора на зенитные углы 30°, 60°, 90°. Расчёт с помощью решения обратной задачи даёт более точный результат, по сравнению с отношением ЭДС, наведённых в приёмных катушках.

Диаграммы для изотропного и анизотропного пластов имеют принципиально разный вид. Максимальное отклонение кажущейся УЭП от диаграммы в трансверсально-изотропной среде наблюдается при повороте главных осей тензора на 60°. Для всех, рассмотренных поворотов главных осей тензора, диаграммы различаются количественно, но формы их близки между собой.

В трансверсально-изотропной среде (тензор № 1 и № 2) кажущиеся УЭП завышены в диапазоне под пластом, а в анизотропных средах все кажущиеся УЭП занижены. В случае тензора № 3 и в трансверсально-изотропной среде, и в анизотропных средах все кажущиеся УЭП занижены.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН (проект FWZZ-2022-0030). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эпов М. И., Глинских В. Н.* Электромагнитный каротаж: моделирование и инверсия. Новосибирск: Гео, 2005.
2. *Кауфман А. А.* Теория индукционного каротажа. Новосибирск: Наука, 1965.
3. *Суродина И. В., Эпов М. И.* Моделирование диаграмм высокочастотного электромагнитного каротажного зондирования в скважинах с высокопроводящим раствором // Каротажник. 2013. Т. 5,№ 5. С. 60–75.
4. *Epov M. I., Glinskikh V. N., Nikitenko M. N., Lapkovskaya A. A., Leonenko A. R., Petrov A. M., Sukhorukova K. V., Gornostalev D. I.* Modern algorithms and software for interpretation of resistivity logging data // Geodyn. Tectonophys. 2021. V. 12, N 3S. P. 669–682; DOI: 10.5800/GT-2021-12-3s-0546
5. *Yavich N., Zhdanov M. S.* Contraction preconditioner in finite-difference electromagnetic modeling // Geophys. J. Int. 2016. V. 206, N 3. P. 1718–1729; DOI: 10.1093/gji/ggw237
6. *Weiss C. J., Newman G. A.* Electromagnetic induction in a fully 3D anisotropic earth // Geophysics. 2002. V. 67, N. 4. P. 1104–1114; DOI: 10.1190/1.1500371
7. *Epov M. I., Shurina E. P., Shtabel N. V.* The mathematical modeling of the electric field in the media with anisotropic objects // Appl. Numer. Math. 2015. V. 93. P. 164–175; DOI: 10.1016/j.apnum.2014.06.011
8. *Nechaev O. V., Glinskikh V. N.* Three-Dimensional Simulation and Inversion of Lateral Logging Sounding and Lateral Logging Data in Media with Tilt of the Main Axes of the Dielectric Anisotropy Tensor // Vestn. Novosib. Gos. Univ. Ser. Inform. Technol. 2018. V. 16, N 4. P. 127–139; DOI: 10.25205/1818-7900-2018-16-4-127-139
9. *Плюснин М. И.* Индукционный каротаж. М.: Недра, 1973.
10. *Tabarovsky L. A., Rabinovich M. B.* Real time 2D inversion of induction logging data // J. Appl. Geophys. 1998. V. 38, N 4. P. 251–275; DOI: 10.1016/S0926-9851(97)00034-7
11. *Nikitenko M. N., Surodina I. V., Mikhaylov I. V., Glinskikh V. N., Suhorukova C. V.* Formation evaluation via 2D Processing of induction and galvanic logging data using highperformance computing // Proc. 77th EAGE Conf. Exhibit. 2015. V. 2015. P. 1–5; DOI: 10.3997/2214-4609.201412646
12. *Lu X., Alumbaugh D. L.* One-dimensional inversion of three-component induction logging in anisotropic media // Proc. SEG Int. Exp. Ann. Meet. 2001. P. 2001–0376; DOI: 10.1190/1.1816621
13. *Avdeev D. B., Kuvshinov A. V., Pankratov O. V., Newman G. A.* Three-dimensional induction logging problems, Part I: An integral equation solution and model comparisons // Geophysics. 2002. V. 67, N 2. P. 413–426; DOI: 10.1190/1.1468601
14. *Newman G. A., Alumbaugh D. L.* Three-dimensional induction logging problems, Part 2: A finite-difference solution // Geophysics. 2002. V. 67, N 2. P. 484–491; DOI: 10.1190/1.1468608
15. *Zhong L., Li J., Bhardwaj A., Shen L. C., Liu R. C.* Computation of triaxial induction logging tools in layered anisotropic dipping formations // IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. 2008. V. 46, N 4. P. 1148–1163; DOI: 10.1109/TGRS.2008.915749
16. *Hu Y., Sun Q.* Modeling of triaxial induction logging responses in multilayered anisotropic formations // Geophysics. 2021. V. 86, N 4. P. 305–314; DOI: 10.1190/geo2020-0475.1
17. *Golikov N. A.* Measurement of the anisotropy of the complex permittivity on samples of sandstone reservoirs of Western Siberia // Interexpo GEO-Siberia. 2018. V. 3. P. 59–65.

18. *Zhang M., Wu J., Liu Y.* Research on triaxial array induction logging response in inclined anisotropic formation // J. Phys. Conf. Ser. 2020. V. 1617, N 1. Article 012086; DOI: 10.1088/1742-6596/1617/1/012086

19. *Monk P.* Finite element methods for Maxwell's equations. Oxford: Oxford University Press. 2003.

20. *Webb J. P.* Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements // IEEE Trans. Antennas Propag. 1999. V. 47, N 8. P. 1244–1253; DOI: 10.1109/8.791939

SIBERIAN JOURNAL OF INDUSTRIAL MATHEMATICS

UDC 550.832

NUMERICAL MODELING OF THE INDUCTION LOGGING SIGNAL IN ANISOTROPIC OIL AND GAS RESERVOIRS WITH A LAYERED STRUCTURE

© 2024 **M. I. Epov**[1a], **E. P. Shurina**[2b], **D. A. Arkhipov**[1c], **D. V. Dobrolyubova**[1d], **N. V. Shtabel'**[1e], **E. I. Shtan'ko**[1f]

[1] *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,*
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: [a]epovmi@mail.ru, [b]shurina@online.sinor.ru, [c]arhipovda@ipgg.sbras.ru, [d]dobrolubovadv@ipgg.sbras.ru, [e]orlovskayanv@ipgg.sbras.ru, [f]mihaylovaei@ipgg.sbras.ru

Received 26.04.2024, revised 26.04.2024, accepted 06.11.2024

Abstract. The aim of this work is to analyze the effect of the anisotropic nature of the electric conductivity in an oil-bearing formation on the induction logging signal. The numerical modelling of the logging signal from a device consisting of an alternating current excitation coil and two receiving coils moved along the wellbore is carried out. The electromotive force induced in the receiving coils is investigated. The electric conductivity of the oil-bearing formation is characterized by either a diagonal tensor with dominant σ_{xx}, σ_{yy} components or a dense tensor obtained by rotation to a specified zenith angle. Numerical modeling is performed with the vector finite element method on an adaptive unstructured tetrahedral grid taking into account the geometry of the logging device, vertical well, and layered host medium. The tensor electric conductivity is plugged into the variational formulation. Dependences of the apparent electric conductivity of the depth are obtained based on the electromotive force induced in the receiving coils.

Keywords: Maxwell's system of equations, anisotropy, vector finite element method, apparent electric conductivity, induction logging.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.412

REFERENCES

1. M. I. Epov and V. N. Glinskikh, *Electromagnetic Logging: Modeling and Inversion* (Geo, Novosibirsk, 2005) [in Russian].
2. A. A. Kaufman, *Theory of Induction Logging* (Nauka, Novosibirsk, 1965) [in Russian].
3. I. V. Surodina and M. I. Epov, "Modeling of high-frequency electromagnetic logging diagrams in wells with highly conductive solution," Karotazhnik **5** (5), 60–75 (2013) [in Russian].
4. M. I. Epov, V. N. Glinskikh, M. N. Nikitenko, A. A. Lapkovskaya, A. R. Leonenko, A. M. Petrov, K. V. Sukhorukova, and D. I. Gornostalev, "Modern algorithms and software for interpretation of resistivity logging data," Geodyn. Tectonophys. **12** (3S), 669–682 (2021). https://doi.org/10.5800/GT-2021-12-3s-0546
5. N. Yavich and M. S. Zhdanov, "Contraction preconditioner in finite-difference electromagnetic modeling," Geophys. J. Int. **206** (3), 1718–1729 (2016). https://doi.org/10.1093/gji/ggw237
6. C. J. Weiss and G. A. Newman, "Electromagnetic induction in a fully 3D anisotropic earth," Geophysics **67** (4), 1104–1114 (2002). https://doi.org/10.1190/1.1500371

English translation is published in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2024, Vol. 18, No. 4, pp. 669–678.

7. M. I. Epov, E. P. Shurina, and N. V. Shtabel, "The mathematical modeling of the electric field in the media with anisotropic objects," Appl. Numer. Math. **93**, 164–175 (2015). https://doi.org/10.1016/j.apnum.2014.06.011
8. O. V. Nechaev and V. N. Glinskikh, "Three-dimensional simulation and inversion of lateral logging sounding and lateral logging data in media with tilt of the main axes of the dielectric anisotropy tensor," Vestn. Novosib. Gos. Univ. Ser. Inf. Technol. **16** (4), 127–139 (2018). https://doi.org/10.25205/1818-7900-2018-16-4-127-139
9. M. I. Plyusnin, *Induction Logging* (Nedra, Moscow, 1973) [in Russian].
10. L. A. Tabarovsky and M. B. Rabinovich, "Real time 2D inversion of induction logging data," J. Appl. Geophys. **38** (4), 251–275 (1998). https://doi.org/10.1016/S0926-9851(97)00034-7
11. M. N. Nikitenko, I. V. Surodina, I. V. Mikhaylov, V. N. Glinskikh, and C. V. Suhorukova, "Formation evaluation via 2D Processing of induction and galvanic logging data using high-performance computing," Proc. 77th EAGE Conf. Exhibit. **2015**, 1–5 (2015). https://doi.org/10.3997/2214-4609.201412646
12. X. Lu and D. L. Alumbaugh, "One-dimensional inversion of three-component induction logging in anisotropic media," Proc. SEG Int. Exp. Annu. Meet. **2001**, 0376 (2001). https://doi.org/10.1190/1.1816621
13. D. B. Avdeev, A. V. Kuvshinov, O. V. Pankratov, and G. A. Newman, "Three-dimensional induction logging problems, Part I: An integral equation solution and model comparisons," Geophysics **67** (2), 413–426 (2002). https://doi.org/10.1190/1.1468601
14. G. A. Newman and D. L. Alumbaugh, "Three-dimensional induction logging problems, Part 2: A finite-difference solution," Geophysics **67** (2), 484–491 (2002). https://doi.org/10.1190/1.1468608
15. L. Zhong, J. Li, A. Bhardwaj, L. C. Shen, and R. C. Liu, "Computation of triaxial induction logging tools in layered anisotropic dipping formations," IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. **46** (4), 1148–1163 (2008). https://doi.org/10.1109/TGRS.2008.915749
16. Y. Hu and Q. Sun, "Modeling of triaxial induction logging responses in multilayered anisotropic formations," Geophysics **86** (4), 305–314 (2021). https://doi.org/10.1190/geo2020-0475.1
17. N. A. Golikov, "Measurement of the anisotropy of the complex permittivity on samples of sandstone reservoirs of Western Siberia," Interexpo GEO-Siberia **3**, 59–65 (2018).
18. M. Zhang, J. Wu, and Y. Liu, "Research on triaxial array induction logging response in inclined anisotropic formation," J. Phys. Conf. Ser. **1617** (1), 012086 (2020). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1617/1/012086
19. P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2003).
20. J. P. Webb, "Hierarchal vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements," IEEE Trans. Antennas Propag. **47** (8), 1244–1253 (1999). https://doi.org/10.1109/8.791939

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2024. Том 27, № 4

Зав. редакцией Т. А. Звонарева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 19.06.2025 г.
Формат $60 \times 84\,{}^1\!/\!_8$. Усл. печ. л. 22,3.
Объём 14 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия