

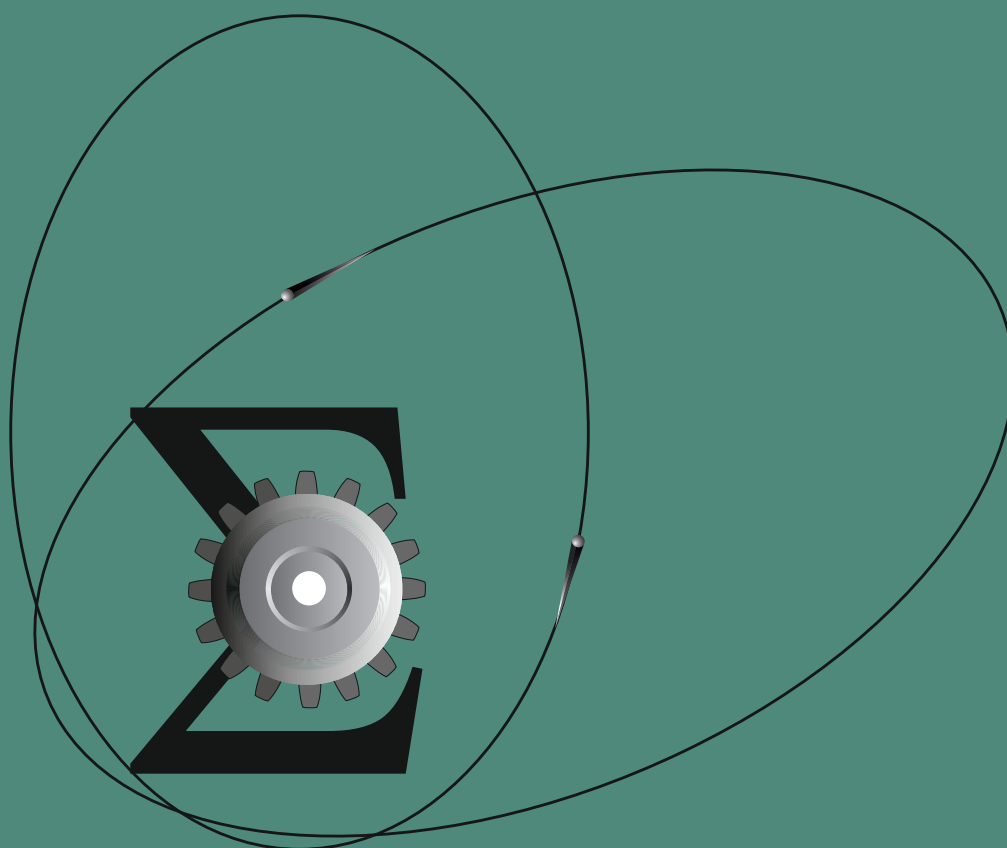
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 28

№ 1

2025



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	М. А. Шишленин
Отв. секретарь	В. А. Дедок

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	И. Б. Петров
Ю. С. Волков	П. И. Плотников
К. В. Воронцов	М. И. Протасов
А. В. Гасников	В. Г. Романов
М. А. Гузеев	Е. М. Рудой
В. П. Ильин	К. К. Сабельфельд
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. Н. Сидоров
А. Л. Карчевский	А. С. Терсенов
М. В. Клибанов	В. С. Тимофеев
С. С. Кутателадзе	В. В. Шайдуров
В. А. Левин	А. А. Шананин
Н. И. Макаренко	

Учредители журнала:

Сибирское отделение РАН

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году

Выходит 4 раза в год

Том 28, № 1(101)

Научный журнал

Январь–март, 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Ильин В. П., Бабенко В. Н. О влиянии возмущений на точность вычисления поправки в подпространстве Крылова	5
Коновалова Д. С. Неклассическая задача для процесса поперечных колебаний системы струн	15
Мишин А. В. Гомогенизация нестационарной модели линейной теории упругости с учётом временной корреляции фаз в гетерогенной структуре	26
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Обратная задача для квазилинейного волнового уравнения с памятью	38
Садовский В. М., Садовская О. В. Задача о краевой дислокации, бегущей со сверхсейсмической скоростью	67
Тотиева Ж. Д. Двумерная задача определения ядра для уравнения вязкоупругости в вертикально-неоднородной среде	80

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ

в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

СибЖИМ

Институт математики

им. С. Л. Соболева СО РАН

просп. Акад. Коптюга, 4

Новосибирск 630090, Россия

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998

4 issues per year

Vol. 28, No. 1(101)

Scientific journal

January–March, 2025

CONTENTS

Ilyin V. P., Babenko V. N. On the influence of disturbances on the accuracy of computing corrections in the Krylov subspace	5
Konovalova D. S. Nonclassical problem for transverse vibrations of a string system	15
Mishin A. V. Homogenization of a nonstationary model of linear theory of elasticity with account for temporal correlation of phases in a heterogeneous structure.....	26
Romanov V. G., Bugueva T. V. The inverse problem for a quasilinear wave equation with memory.....	38
Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. The problem on an edge dislocation running at superseismic velocity	67
Totieva Zh. D. Two-dimensional inverse problem for a viscoelasticity equation in a vertically inhomogeneous medium.....	80

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis

in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:

SibJIM

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

pr. Akad. Koptiyuga 4

Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

УДК 519.61

О ВЛИЯНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ПОПРАВКИ В ПОДПРОСТРАНСТВЕ КРЫЛОВА© 2025 В. П. Ильин^{1a}, В. Н. Бабенко^{2b}¹Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,²Кубанский государственный технологический университет,
ул. Московская, 2, г. Краснодар 350072, РоссияE-mails: ^ailin@sscc.ru, ^brnibvd@mail.ruПоступила в редакцию 26.10.2024 г.; после доработки 12.04.2025 г.;
принята к публикации 21.04.2025 г.

При осуществлении вычислений на ЭВМ неизбежно возникают погрешности округления. В настоящей работе исследуется вопрос о влиянии указанных погрешностей на точность вычисления поправки в подпространстве Крылова. Получена оценка точности вычисленной поправки, выраженная через возмущения исходных данных.

Ключевые слова: ортопроектор, подпространство Крылова, проекционный метод, ортогонализация Арнольди, СЛАУ большой размерности, погрешности округлений.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.101

ВВЕДЕНИЕ

Пусть задана СЛАУ

$$Ax = f, \quad (1)$$

где A — невырожденная эрмитова или же неэрмитова матрица порядка N .Если N велико, то обычно при осуществлении решения (1) прибегают к итерационным методам: для произвольного x^0 по формуле

$$x^n = x^{n-1} + y^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

вычисляется последовательность $\{x^n\}$, сходящаяся к точному решению $\bar{x}$ системы (1) (см. [1, 2], а также более современные источники [3, 4]). Поправка y^n определяется решением системы уравнений

$$B_n y^n = r^{n-1}, \quad (2)$$

где $r^{n-1} = f - Ax^{n-1}$ — невязка, порождаемая приближением x^{n-1} , B_n — некоторая невырожденная матрица.

При осуществлении машинных вычислений вследствие погрешностей округлений вместо решений y^n систем (2) мы будем иметь решения $\tilde{y}^n$ возмущённых систем

$$\tilde{B}_n \tilde{y}^n = \tilde{r}^{n-1}.$$

Вследствие этих причин мы получим иную последовательность

$$\tilde{x}^0 = x^0, \quad \tilde{x}^n = \tilde{x}^{n-1} + \tilde{y}^n = \tilde{x}^{n-1} + (y^n + \delta y^n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где δy^n — возмущение поправки y^n . Из последней формулы видно, что если $\tilde{x}^{n-1}$ уже близко к точному решению $\bar{x}$, то актуальным является вопрос о величине оценки возмущения δy^n . Именно по этой причине мы сосредоточили наши усилия на исследовании точности вычисления поправки, не выходя за рамки одной итерации, и поэтому в дальнейшем изложении мы опустим индекс, характеризующий номер итерации.

Переходя от эрмитова пространства к вещественному R^N , мы можем сказать, что если матрица A разреженная, то матрицу B определяют как результат воздействия на матрицу исходной системы ортопроекторами P_K и P_L :

$$B = P_K A P_L, \quad (3)$$

где K и L — выбранные каким-либо образом подпространства в R^N [5–7].

В настоящее время в качестве подпространства K широко применяется так называемое подпространство Крылова, определённое следующим образом. Пусть v — произвольный вектор. Векторы $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ называют последовательностью Крылова, соответственно, $K_m(A, v) = \text{span}(v | Av | \dots | A^{m-1}v)$ — подпространством Крылова, порождаемым матрицей A и вектором v .

Для построения ортонормированного базиса в $K_m(A, v)$ получили широкое применение методы Арнольди (если матрица A несимметрична) и Ланцоша (в противном случае). Пусть x — некоторое приближение точного решения $\bar{x}$ системы (1) и $r = f - Ax$ — соответствующая ему невязка. В выстраиваемой указанными методами ортонормированной системе векторов

$$\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \quad (4)$$

в качестве вектора v_1 принимают нормированный вектор r : $v_1 = \frac{1}{\|r\|}r$, $\|r\| = (r, r)^{1/2}$.

В точной арифметике процедуры этих методов генерируют ортонормированную систему (4) и Хессенбергову матрицу H (или трехдиагональную матрицу T в симметричном случае). Введя обозначение $V = [v_1 | v_2 | \dots | v_m]$, а также приняв $L = K_m(A, v_1)$ и $P_K = VV^+$, согласно (2) и (3) получим

$$VV^+AVV^+y \cong r, \quad (5)$$

где V^+ — псевдообратная матрица, V^+AV равна указанной выше матрице H (или T). Следует отметить, что в связи с тем, представленное в (5) произведение VV^+ представляет собой ортопроектор, рассматриваемый нами итерационный процесс относят к проекционным методам, интерес к которым не ослабевает уже долгие годы, что подтверждается неуклонно растущим потоком публикаций. Среди них, отметим недавние [8, 9].

Поскольку столбцы матрицы V суть ортонормированные векторы, выполняется равенство $V^+ = V^*$, где V^* — сопряжённая матрица (если элементы матрицы V берутся над полем вещественных чисел, то $V^* = V^T$, где V^T — транспонированная матрица).

Замечание. Далее для обозначения матрицы V^*AV мы будем использовать символ H , имея в виду, что если матрица A симметрична, то $H = T = T^*$. Согласно сказанному вместо (5) мы можем записать

$$VHV^*y \cong r. \quad (6)$$

Отсюда следует

$$\widehat{y} = VH^{-1}V^*r,$$

где $\widehat{y}$ — псевдорешение системы (6). Отметим, что по условию решаемой задачи матрица A системы (1) не вырождена, поэтому не вырождена и матрица $H = V^*AV$. Система уравнений (6) эквивалентна трём системам линейных уравнений

$$Vw \cong r, \quad Hz \cong w, \quad V^*y \cong z, \quad (7)$$

решения которых осуществляются последовательно друг за другом. Из этих трёх систем уравнений вытекают следующие формулы:

$$\widehat{w} = V^* r, \quad z = H^{-1} \widehat{w}, \quad \widehat{y} = Vz, \quad (8)$$

где $\widehat{w}$ — псевдорешение первой системы в (7). Таким образом, обращаясь к последним трём соотношениям, мы видим, что решение системы (6) можно свести к выполнению следующих трёх этапов: вычислению векторов $\widehat{w}$ и z , а также определению поправки $\widehat{y}$ по формулам, приведённым в (8).

При осуществлении вычислений на ЭВМ в результаты выполнения арифметических операций неизбежно вносятся погрешности округления. Вследствие этого вместо псевдорешения $\widehat{y}$ (см. (3)) системы (2) мы получим возмущённое псевдорешение $\widetilde{y}$. Цель нашей работы состоит в исследовании влияния указанных погрешностей на точность возмущённой поправки $\widetilde{y}$. Оно направлено на получение гарантированной оценки точности вычисленной поправки $\widetilde{y}$. Нашей работе ранее предшествовали подобные исследования в [10–12]. Следует также сказать, что исследования, посвящённые определению оценки возмущений матриц V и H , проводились ранее в работах [13–15].

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПОЛУЧАЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПОПРАВКИ

Согласно вышесказанному можно считать, что вместо систем (7) мы решаем системы

$$(V + X_{Vw}) \widetilde{w} \cong (r + \delta r), \quad (9)$$

$$(H + X_{Hz}) \widetilde{z} \cong (\widehat{w} + \delta \widehat{w}), \quad (10)$$

$$(V + X_{Vy})^* \widetilde{y} \cong (z + \delta z). \quad (11)$$

Установим оценки близости псевдорешений рассматриваемых трёх пар исходных и возмущённых систем уравнений, взятых из (7) и (9)–(11). Для достижения этой цели мы будем пользоваться ниже следующей теоремой [16, 17], в которой усилены результаты, полученные ранее в [18, 19].

Рассмотрим исходную СЛАУ общего вида $Ax \cong y$ с матрицей размерности $m \times n$, а также систему $(A + B)u \cong y + v$, полученную из исходной системы возмущением её матрицы и правой части. При этом мы будем придерживаться следующих обозначений: $rk(A) = r$ — ранг матрицы A , $x = \bar{x} + \tilde{x}$, $y = \bar{y} + \tilde{y}$, где $\bar{x} \in R(A^*)$, $\tilde{x} \in N(A)$, $\bar{y} \in R(A)$, $\tilde{y} \in N(A^*)$, $R(A^*)$, $N(A)$, $R(A)$, $N(A^*)$ — образы и ядра соответствующих матриц.

Теорема 1. Пусть для систем линейных уравнений

$$Ax \cong y, \quad (A + B)u \cong y + v$$

выполнены соотношения

$$\|B\| \leq \alpha \|A\|, \quad \|v\| \leq \beta \|y\|, \quad 1 - c_r \alpha > 0.$$

Тогда для псевдорешений $\bar{x}$ и $\bar{u}$ исходной и возмущённой систем справедливы следующие утверждения.

1. Если

$$r < \min \{m, n\}, \quad rk(A + B) = r, \quad \|\tilde{y}\| \leq \gamma \|\bar{y}\|, \quad (12)$$

то справедлива оценка

$$\delta = \frac{\|\bar{u} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \max \{M_1, M_2\},$$

где

$$M_1 = \left(\left(\max_{0 \leq \xi \leq 1 - c_r \alpha} \left(\frac{c_r \zeta_r \gamma \sqrt{1 - (\zeta_r + \xi)^2}}{\sqrt{(1 - \zeta_r^2 - 2\zeta_r \xi)^3}} + \frac{\mu_r}{1 - \zeta_r^2 - 2\zeta_r \xi} \right) \right)^2 + (c_{r-1} \alpha)^2 \right)^{1/2},$$

$$\zeta_r = c_r \alpha, \quad M_2 = \left((M_3 \kappa_r)^2 + (c_{r-2} \alpha)^2 \right)^{1/2},$$

$$\mu_r = c_r (\alpha + \beta \sqrt{1 + \gamma^2}), \quad M_3 = c_r c_{r-1} \alpha \gamma + \mu_r, \quad \kappa_r = (1 - c_r \alpha)^{-1}.$$

2. Если $r = m = n$, то

$$\delta \leq c_r (\alpha + \beta) \kappa_r.$$

3. Если выполнено неравенство (12) и $m > n = r$, то

$$\delta \leq \max \{M_4, M_5\}, \quad (13)$$

где

$$M_4 = \frac{c_r^2 \alpha \gamma + \mu_r}{\sqrt{1 - (c_r \alpha)^2}}, \quad (14)$$

$$M_5 = M_3 \kappa_r. \quad (15)$$

4. Если $\text{rk}(A + B) = r = m < n$, то

$$\delta \leq \left((c_r (\alpha + \beta) \kappa_r)^2 + (c_{r-1} \alpha)^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь $c_r = \sigma_1 / \sigma_r$, $c_{r-1} = \sigma_1 / \sigma_{r-1}$, $c_{r-2} = \sigma_1 / \sigma_{r-2}$, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ — сингулярный спектр матрицы A , причём $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{r-1} \geq \sigma_r > 0$.

С помощью обратного анализа погрешностей округлений, погрешности сводятся к эквивалентным возмущениям исходных данных. В нашем случае — это матрицы V и H , а также векторы r , $\hat{w}$ и z .

Приступая к исследованию процессов накопления погрешностей машинного решения систем уравнений (7), мы должны сделать ряд оговорок. Возмущения X_{Vw} , X_{Hz} , X_{Vy} (см. (9)–(11)) удовлетворяют равенствам

$$X_{Vw} = X_V + X_w, \quad (16)$$

$$X_{Hz} = X_H + X_z, \quad (17)$$

$$X_{Vy} = X_V + X_y, \quad (18)$$

где возмущения X_V и X_H моделируют погрешности, обусловленные неточностью предварительно вычисленных матриц V и H . Соответственно возмущения X_w , X_z и X_y моделируют погрешности, возникающие при непосредственном машинном решении систем уравнений (9)–(11).

Начнём с установления оценки близости псевдорешений первой системы уравнений из списка (7) и системы уравнений (9).

Лемма 1. Пусть в соотношениях (9) и (16) возмущения X_{Vw} , X_V , X_w и δr удовлетворяют неравенствам

$$\|X_{Vw}\| \leq \alpha_{V\widehat{w}}, \quad \|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_{\widehat{w}}\| \leq \alpha_{\widehat{w}}, \quad \|\delta r\| \leq \beta_{r+r\widehat{w}} \|r\|, \quad (19)$$

причём

$$\bar{\alpha}_{V\widehat{w}} = \alpha_V + \alpha_w, \quad 1 - \alpha_{Vw} > 0, \quad 1 - \bar{\alpha}_{V\widehat{w}} > 0, \quad \|\widetilde{r}\| \leq \gamma \|\widehat{r}\|, \quad (20)$$

где

$$\widehat{r} + \widetilde{r} = r, \quad \widehat{r} = VV^+r, \quad \widetilde{r} = (I - VV^+)r. \quad (21)$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\widetilde{w} - \widehat{w}\| / \|\widehat{w}\| \leq \gamma_{\widehat{w}}, \quad (22)$$

где

$$\gamma_{\widehat{w}} = \frac{\bar{\alpha}_{V\widehat{w}}\gamma + (\bar{\alpha}_{V\widehat{w}} + \beta_{r+r\widehat{w}}\sqrt{1+\gamma^2})}{1 - \bar{\alpha}_{V\widehat{w}}}.$$

Доказательство. Обращаясь к теореме 1, мы видим, что рассматриваемые в лемме системы уравнений первые в (7) и (9) отвечают условиям пункта 3 указанной теоремы. Следуя резольвтивной части пункта 3 (см. (13)–(15)) и учитывая при этом, что $\sigma_1(V) = \dots = \sigma_m(V) = 1$ и $\sqrt{1 - (c_r\alpha)^2} > 1 - c_r\alpha$, благодаря соотношениям: первому и четвёртому в (19), первому и третьему в (20), а также (21) — мы можем записать

$$\|\widetilde{w} - \widehat{w}\| / \|\widehat{w}\| \leq \gamma_{\widehat{w}}. \quad (23)$$

Используя второе и третье неравенства из списка (19) в равенстве (16), будем иметь

$$\|X_{Vw}\| = \|X_V + X_w\| \leq \|X_V\| + \|X_w\| \leq \alpha_V + \alpha_w.$$

Сопоставляя последнюю цепочку отношений с первым неравенством в (19), приходим к выводу

$$\alpha_{Vw} \leq \alpha_V + \alpha_w.$$

Учитывая первое и третье соотношения в (20), применим последнее неравенство в (23). В результате получим оценку (22). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. Пусть в соотношениях (10) и (17) возмущения X_{Hz} , X_H , X_z и $\delta\widetilde{w}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_{Hz}\| \leq \alpha_{Hz} \|H\|, \quad \|X_H\| \leq \alpha_H \|H\|, \quad \|X_z\| \leq \alpha_z \|H\|, \quad \|\delta\widetilde{w}\| \leq \beta_{\widehat{w}+\widehat{w}z} \|\widehat{w}\|,$$

причём

$$\bar{\alpha}_{Hz} = \alpha_H + \alpha_z, \quad 1 - c(H)\alpha_{Hz} > 0, \quad 1 - c(H)\bar{\alpha}_{Hz} > 0,$$

где $c(H)$ — число обусловленности матрицы H . Тогда справедлива оценка

$$\|\widetilde{z} - z\| / \|z\| \leq \frac{c(H) (\bar{\alpha}_{Hz} + \beta_{\widehat{w}+\widehat{w}z})}{1 - c(H)\bar{\alpha}_{Hz}}. \quad (24)$$

Лемма 3. Пусть в соотношениях (11) и (18) возмущения X_{Vy} , X_V , X_y и $\delta\tilde{z}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_{Vy}\| \leq \alpha_{Vy}, \quad \|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_y\| \leq \alpha_y, \quad \|\delta\tilde{z}\| \leq \beta_{zy} \|z\|,$$

причём $\bar{\alpha}_{Vy} = \alpha_V + \alpha_y$, $1 - \alpha_{Vy} > 0$ и $1 - \bar{\alpha}_{Vy} > 0$. Тогда

$$\frac{\|\tilde{y} - \hat{y}\|}{\|\hat{y}\|} \leq \left(\left(\frac{(\bar{\alpha}_{Vy} + \beta_{z+zy})}{1 - \bar{\alpha}_{Vy}} \right)^2 + \bar{\alpha}_{Vy}^2 \right)^{1/2}. \quad (25)$$

Доказательства лемм 2 и 3 мы опустили по той причине, что они почти дословно повторяют доказательство леммы 1.

В системах уравнений (9)–(11) возмущения правых частей δr , $\delta\tilde{w}$ и $\delta\tilde{z}$ мы представим в виде суммы двух слагаемых: наследственного возмущения и возмущения, моделирующего погрешности округлений, возникающих непосредственно при выполнении машинного решения обозначенных систем линейных уравнений.

Согласно сказанному запишем

$$\delta r = \delta r_r + \delta r_{r\hat{w}}, \quad \delta\tilde{w} = \delta\tilde{w}_{\hat{w}} + \delta\tilde{w}_{\hat{w}z}, \quad \delta\tilde{z} = \delta\tilde{z}_z + \delta\tilde{z}_{zy}. \quad (26)$$

Предположим, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \|\delta r_r\| &\leq \beta_r \|r\|, \quad \|\delta r_{r\hat{w}}\| \leq \beta_{r\hat{w}} \|r\|, \\ \|\delta\tilde{w}_{\hat{w}}\| &\leq \beta_{\hat{w}} \|\hat{w}\|, \quad \|\delta\tilde{w}_{\hat{w}z}\| \leq \beta_{\hat{w}z} \|\hat{w}\|, \\ \|\delta\tilde{z}_z\| &\leq \beta_z \|z\|, \quad \|\delta\tilde{z}_{zy}\| \leq \beta_{zy} \|z\|. \end{aligned} \quad (27)$$

Обращаясь к первому равенству в (26), благодаря первой паре неравенств в (27) запишем

$$\|\delta r\| \leq \|\delta r_r\| + \|\delta r_{r\hat{w}}\| \leq (\beta_r + \beta_{r\hat{w}}) \|r\|.$$

Сопоставляя последнюю цепочку неравенств с четвёртым неравенством в (19), мы приходим к неравенству

$$\beta_{r+r\hat{w}} \leq \beta_r + \beta_{r\hat{w}}. \quad (28)$$

Совершенно аналогично рассуждая, получаем неравенства

$$\beta_{\hat{w}+\hat{w}z} \leq \beta_{\hat{w}} + \beta_{\hat{w}z}, \quad (29)$$

$$\beta_{z+zy} \leq \beta_z + \beta_{zy}. \quad (30)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия лемм 1–3, тогда справедлива оценка точности вычисления поправки $\hat{y}$

$$\frac{\|\tilde{y} - \hat{y}\|}{\|\hat{y}\|} \leq \left(\left(\frac{(\bar{\alpha}_{Vy} + \beta_z + \beta_{zy})}{1 - \bar{\alpha}_{Vy}} \right)^2 + \bar{\alpha}_{Vy}^2 \right)^{1/2}, \quad (31)$$

где

$$\beta_z = \frac{c(H)(\bar{\alpha}_{Hz} + \beta_{\hat{w}} + \beta_{\hat{w}z})}{1 - c(H)\bar{\alpha}_{Hz}}, \quad \beta_{\hat{w}} = \frac{\bar{\alpha}_{V\hat{w}}\gamma + (\bar{\alpha}_{V\hat{w}} + (\beta_r + \beta_{r\hat{w}})\sqrt{1+\gamma^2})}{1 - \bar{\alpha}_{V\hat{w}}}.$$

Доказательство. Обращаясь к лемме 1, мы видим, что из оценки (22) в силу неравенства (28) вытекает неравенство

$$\left\| \tilde{w} - \widehat{w} \right\| / \left\| \widehat{w} \right\| \leq \beta_{\widehat{w}}.$$

В соответствии с введёнными в (26) обозначениями (см. второе равенство) последнее неравенство мы можем записать в виде

$$\left\| \delta \tilde{w}_{\widehat{w}} \right\| = \left\| \tilde{w} - \widehat{w} \right\| \leq \beta_{\widehat{w}} \left\| \widehat{w} \right\|.$$

Обращаясь к оценке (24) леммы 2, благодаря неравенству (29) мы можем записать соотношение

$$\left\| \tilde{z} - z \right\| / \left\| z \right\| \leq \beta_z.$$

Аналогично в соответствии с введёнными в (26) обозначениями (см. третье равенство) последнее неравенство мы перепишем в виде

$$\left\| \delta \tilde{z}_z \right\| = \left\| \tilde{z} - z \right\| \leq \beta_z \left\| z \right\|.$$

Наконец, обращаясь к оценке (25) леммы 3, благодаря неравенству (30) приходим к неравенству (31). Теорема доказана. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Новизна и значение теоремы 2 состоят в следующем.

Доказанная в ней оценка (31) показывает, что более значимое влияние на погрешность машинного вычисления поправки $\widehat{y}$ оказывают неточности, допущенные при выполнении 1-го и 2-го этапов: при вычислении матриц V и H , векторов r , $\widehat{w}$ и z , а также погрешности, возникающие при осуществлении вычислений, непосредственно использующих указанные матрицы и векторы (они подвергаются усилению числом обусловленности $c(H)$ матрицы Хессенберга H). С погрешностями, допущенными на 3-ем этапе, такого усиления не происходит.

Используемые в нашей работе оценки (теорема 1) не являются завышенными. Они получены на основе исследования оценок, представленных в [18, 19]. В результате этих исследований и появились новые, указанные выше, уточнённые оценки, опубликованные в [16, 17]. Сказанным частично снимается вопрос о практической значимости оценки (31).

Практическая значимость оценки (31) состоит ещё и в том, что далее она будет применена для установления условий гарантированного уточнения приближения $\tilde{x}^{n-1}$ поправкой $\tilde{y}$. В свою очередь, эти условия затем предполагается использовать для прогноза количества требующихся итераций.

Благодаря полученным в теореме 2 результатам мы можем сформулировать вытекающие из них три важные задачи:

- 1) исследование названных источников погрешностей и поиски возможностей снижения их уровня;
- 2) установление условий гарантированного приближения результата очередной итерации к точному решению;
- 3) получение оценки точности вычисленного в результате выполненного итерационного процесса приближенного решения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00402). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
2. Saad J. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Boston: PWS Publishing Co., 1996.
3. Olshanskii M.A., Tyrtyshnikov E.E. Iterative methods for linear systems: theory and applications. Philadelphia: SIAM, 2014.
4. Ильин В.П. Итерационные предобусловленные методы в подпространствах Крылова: тенденции XXI века // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61, № 11. С. 1786–1813; DOI: 10.31857/S0044466921110090
5. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.
6. Greenbaum A. Iterative Metuloids of Solving Linear Systems. Philadelphia: SIAM, 1997.
7. Greenbaum A., Trefethen L.N. GMRES/CR and Arnoldi/Lanczos as Matrix Approximation Problems // SIAM J. Sci. Comput. 2018. V. 15, N 2. P 359–368.
8. Ильин В.П. О проекционных методах в подпространствах Крылова // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т 472. С. 103–119.
9. Киреев И.В. Ортогональные проекторы и системы линейных алгебраических уравнений // Сиб. журн. вычисл. матем. 2020. Т. 23, № 3. С. 315–324.
10. Arioli M., Fassino C. Roundoff error analysis of algorithms based on Krylov subspace methods // BIT Numer. Math. 1996. V. 36, N 2. P. 189–206.
11. Arioli M. Generalized Golub—Kahan Bidiagonalization and Stopping Criteria // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2013. V. 34, N 2. P. 57–592.
12. Greenbaum A. Estimating the Attainable Accuracy of Recursively Computed Residual Methods // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1997. V. 18, N 3. P.535–551.
13. Capraux J.-F., Godunov S.K., Kuznetsov S.V. Condition number of the Krylov bases and subspaces // Linear Algebra Appl. 1996. V. 248, N 1–3. P. 136–160.
14. Kuznetsov S.V. Perturbation of the Krylov bases and associated Hessenberg Forms // Linear Algebra Appl. 1997. V. 265, N 1–3. P. 1–28.
15. Мальшев А.Н., Садкане М. Теория возмущений по первому приближению для симметричного алгоритма Ланцоша // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, № 3. С. 391–399.
16. Babenko V.N. On the Structure of Closeness Estimates for Pseudosolutions of Initial and Perturbed Systems of Linear Algebraic Equations // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59, N 9. P. 1399–1421; DOI: 10.1134/S0965542519090069
17. Бабенко В.Н. Аспекты машинного решения систем линейных уравнений: монография. Краснодар: Экоинвест, 2020.
18. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
19. Годунов С.К. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах: монография. Новосибирск: Наука, 1988.

UDC 519.61

**ON THE INFLUENCE OF DISTURBANCES ON THE ACCURACY
OF COMPUTING CORRECTIONS IN THE KRYLOV SUBSPACE**© 2025 V. P. Ilyin^{1a}, V. N. Babenko^{2b}¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*²*Kuban State Technological University, Krasnodar, 350072 Russia*E-mails: ^ailin@sscc.ru, ^brnibvd@mail.ru

Received 26.10.2024, revised 12.04.2025, accepted 21.04.2025

Abstract. Rounding errors inevitably occur when performing calculations on a computer. In this paper, we study the impact of these errors on the accuracy of calculating the correction in the Krylov subspace. An estimate of the accuracy of the calculated correction, expressed via perturbations of the original data, is obtained.

Keywords: orthoprojector, Krylov subspace, projection method, Arnoldi orthogonalization, highdimensional SLAE, rounding error.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.101

REFERENCES

1. G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations* (Johns Hopkins Univ., Baltimore, 1996; Moscow, Mir, 1999).
2. J. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems* (PWS, Boston, 1996).
3. M. A. Olshanskii and E. E. Tyrtshnikov, *Iterative Methods for Linear Systems: Theory and Applications* (SIAM, Philadelphia, 2014).
4. V. P. Il'in, "Iterative preconditioned methods in Krylov spaces: Trends of the 21st century," *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **61** (11), pp. 1786–1813 (2021) [*Comput. Math. Math. Phys.* **61** (11), pp. 1750–1775 (2021)] <https://doi.org/10.1134/S0965542521110099>.
5. S. Pissanetsky, *Sparse Matrix Technology* (Academic Press, New York, 1984; Mir, Moscow, 1988).
6. A. Greenbaum, *Iterative Methods for Solving Linear Systems* (SIAM, Philadelphia, 1997).
7. A. Greenbaum and L. N. Trefethen, "GMRES/CR and Arnoldi/Lanczos as matrix approximation problems," *SIAM J. Sci. Comput.* **15** (2), pp. 359–368 (2018).
8. V. P. Ilyin, "On projection methods in Krylov subspaces," *Zap. Nauchn. Semin. POMI.* **472**, pp. 103–119 (2018) [in Russian].
9. I. V. Kireev, "Orthogonal projectors and systems of linear algebraic equations," *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* **23** (3), pp. 315–324 (2020) [*Numer. Anal. Appl.* **13** (3), pp. 262–270 (2020)].
10. M. Arioli and C. Fassino, "Roundoff error analysis of algorithms based on Krylov subspace methods," *BIT Numer. Math.* **36** (2), pp. 189–206 (1996).
11. M. Arioli, "Generalized Golub–Kahan bidiagonalization and stopping criteria," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **34** (2), pp. 57–592 (2013).
12. A. Greenbaum, "Estimating the attainable accuracy of recursively computed residual methods," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **18** (3), pp. 535–551 (1997).

13. J.-F. Capraux, S. K. Godunov, and S. V. Kuznetsov, “Condition number of the Krylov bases and subspaces,” *Linear Algebra Appl.* **248** (1–3), pp. 136–160 (1996).
14. S. V. Kuznetsov, “Perturbation of the Krylov bases and associated Hessenberg Forms,” *Linear Algebra Appl.* **265** (1–3), pp. 1–28 (1997).
15. A. N. Malyshev and M. Sadkane, “Perturbation theory to the first approximation for the symmetric Lanczos algorithm,” *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **45** (3), pp. 391–399 (2005) [*Comput. Math. Math. Phys.* **45** (3), pp. 374–382 ((2005))].
16. V. N. Babenko, “On the structure of closeness estimates for pseudosolutions of initial and perturbed systems of linear algebraic equations,” *Comput. Math. Math. Phys.* **59** (9), pp. 1399–1421 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0965542519090069>
17. V. N. Babenko, *Aspects of Machine Solution of Systems of Linear Equations: A Monograph* (Ekoinvest, Krasnodar, 2020) [in Russian].
18. C. L. Lawson and R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974; Nauka, Moscow, 1988).
19. S. K. Godunov, *Guaranteed Accuracy of Solutions of Systems of Linear Equations in Euclidean Spaces: A Monograph* (Nauka, Novosibirsk, 1988) [in Russian].

УДК 517.958

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОЦЕССА ПОПЕРЕЧНЫХ
КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ СТРУН

© 2025 Д. С. Коновалова

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: dsk@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 02.08.2024 г.; после доработки 27.02.2025 г.;
принята к публикации 10.03.2025 г.

В работе рассматривается процесс поперечных колебаний двух струн, соединённых между собой в некоторой точке. Построена математическая модель этого процесса, в основе которой лежит закон сохранения количества движения, выраженный в форме интегро-дифференциального уравнения. Это уравнение связывает отклонения струн в процессе колебаний с их характеристиками, такими как плотность, натяжение, источники внешних сил. Этот подход можно рассматривать как развитие метода, предложенного А. Н. Тихоновым для уравнения колебаний струны с негладкими данными. Для случая когда плотности струн постоянны и, вообще говоря, не совпадают, сформулирована неклассическая задача, содержащая, помимо данных Коши, необходимые условия согласования. Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи, получены явные формулы её решения.

Ключевые слова: волновое уравнение, интегральные законы сохранения, задача Коши, решётки, разрывные функции.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.102

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена исследованию вопросов, связанных с процессом колебаний струнных решёток (сетей). Под струнной решёткой подразумевается конструкция, состоящая из нескольких струн, имеющих общие точки, т. е. соединённых друг с другом в этих точках. Такая конструкция может быть как двух-, так и трёхмерной. Предполагается, что происходит процесс поперечных колебаний этой системы струн. В данной работе рассматривается система, состоящая всего из двух струн, имеющих общую точку. Предполагается, что эти струны расположены под прямым углом друг к другу и колеблются в плоскости, перпендикулярной плоскости, в которой лежат обе струны.

Отметим некоторые характерные черты настоящего исследования. Так, при построении математической модели используются функции, имеющие разрывы первого рода. К числу работ с такой же особенностью можно отнести, например, работы [1–8]. Приведём краткий обзор этих публикаций.

В работах [1–3] численными методами исследуются практически важные задачи визуализации, обратные задачи сейсморазведки в слоистых средах различной размерности и другие. Решение подобных задач естественно искать в классе кусочно-непрерывных функций, что и делают авторы. Также в данных исследованиях используется дискретизированное преобразование Радона и его обращение. Изучается вопрос о точности такой дискретизации.

Новые формулы обращения преобразования Радона, а также алгоритм реконструкции подынтегральной функции для кусочно-непрерывных функций получены в [4–5].

Методы, используемые в настоящей работе, во многом аналогичны методам, на которых основано решение задач работ [6–8]. Эти исследования посвящены задачам, связанным с процессом поперечных колебаний неоднородной струны и продольных колебаний упругого неоднородного стержня. В указанных статьях предполагается, что характеристики струны/стержня являются кусочно-постоянными функциями.

Ещё одной специфической чертой настоящей работы является использование нетрадиционных дополнительных условий. В качестве иллюстрации подобного подхода можно привести работы [9–12]. Задачи, рассмотренные в этих работах, наряду с дифференциальными уравнениями разного порядка и различных типов, содержат нелокальные начально-краевые условия. К ним можно отнести интегральные и интегро-дифференциальные граничные условия, краевые условия, нелокальные по части переменных и т. д. Авторами доказана разрешимость и единственность решения соответствующих начально-краевых задач, получены оценки производных решения.

В заключение отметим также работы [13–15]. В этих исследованиях, имеющих прикладной характер, для дискретизации неоднородных сплошных сред используются решётки, по которым распространяется определённый волновой процесс. В качестве решёток авторы используют набор узлов внутри сред. Поскольку неоднородности исследуемых сред описываются кусочно-непрерывными функциями, особое внимание в данных работах уделено волновому процессу на решётках вблизи границ этих неоднородностей. Также исследуется вопрос о возможности аппроксимации сплошных сред решётками и приводятся условия, при которых данная дискретизация обеспечивает приемлемое приближение исходного процесса.

1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим процесс поперечных колебаний двух бесконечных струн, соединённых между собой в некоторой точке. Будем предполагать, что смещение каждой из струн в любой момент времени лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости, образованной рассматриваемыми струнами. Будем также считать, что струны не сопротивляются изгибу.

При построении математической модели данного процесса будем основываться на хорошо известных рассуждениях, используемых для математического описания процесса малых поперечных колебаний струны (см., например, [16]). Для определённости условимся обозначать струны X и Y и считать, что они расположены вдоль осей Ox и Oy соответственно, и пересекаются в начале координат. Для вывода уравнения колебаний системы струн воспользуемся вторым законом Ньютона. Рассмотрим, в первую очередь, что происходит в окрестности пересечения струн X и Y , т. е. на участках (x_1, x_2) и (y_1, y_2) , где числа x_1, y_1 отрицательны, а x_2, y_2 — положительны. В дальнейшем такие общие участки системы будем обозначать l_{xy} , а участки струн, не содержащие точки O , обозначим l_x (на струне X) и l_y (на струне Y).

Пусть функция $u(x, t)$ описывает смещение струны X в точке x в момент времени t , а функция $v(y, t)$ — аналогичное смещение струны Y . Тогда составляющая количества движения на участке l_{xy} равна

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \rho_1(\xi) d\xi + \int_{y_1}^{y_2} v_t(\xi, t) \rho_2(\xi) d\xi,$$

где ρ_1, ρ_2 — линейные плотности струн X и Y . Соответственно, изменение количества движения на этом участке системы за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ представляется суммой

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho_1(\xi) (u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)) d\xi + \int_{y_1}^{y_2} \rho_2(\xi) (v_t(\xi, t_2) - v_t(\xi, t_1)) d\xi.$$

Данное выражение, согласно второму закону Ньютона, равно импульсу действующих сил, которые, в свою очередь, складываются из натяжений T_1 , T_2 рассматриваемой системы струн и внешней силы, плотность (нагрузка) которой описывается непрерывными функциями $F_1(x, t)$, $F_2(y, t)$. Поскольку струны соединены в точке $(0, 0)$, нам необходимо дополнительно предположить, что заданные функции $F_1(x, t)$, $F_2(y, t)$, $\rho_1(x)$, $\rho_2(y)$, а также неизвестные функции $u(x, t)$ и $v(y, t)$, удовлетворяют условиям согласования

$$F_1(0, t) = F_2(0, t), \quad u(0, t) = v(0, t), \quad T_1 u_x(0, t) = T_2 v_y(0, t). \quad (1)$$

Итак, в результате получаем уравнение поперечных колебаний участка l_{xy} нашей системы струн в интегральной форме:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \rho_1(\xi) (u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)) d\xi + \int_{y_1}^{y_2} \rho_2(\xi) (v_t(\xi, t_2) - v_t(\xi, t_1)) d\xi = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} (T_1 (u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)) + T_2 (v_y(y_2, \tau) - v_y(y_1, \tau))) d\tau \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{x_1}^{x_2} F_1(\xi, \tau) d\xi + \int_{y_1}^{y_2} F_2(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Что же касается участков l_x и l_y , то для них уравнение колебаний в интегральной форме ничем не отличается от уравнения колебаний одной бесконечной струны, поскольку в этом случае участки разных струн изолированы друг от друга и не взаимодействуют между собой [16], стр. 75.

Следующий шаг в классическом выводе уравнения колебаний струны — это предположение о двукратной непрерывной дифференцируемости функций, содержащихся в интегральном уравнении. Однако в [16], стр. 72–79, авторы подчёркивают, что данное предположение сужает круг изучаемых физических явлений, что нежелательно с практической точки зрения. В нашем случае природа рассматриваемого колебательного процесса такова, что искомые функции $u(x, t)$ и $v(y, t)$, вообще говоря, не обладают непрерывными частными производными второго порядка. Действительно, в точке соединения струн (и только в ней) каждая из струн получает импульс от другой струны, поэтому естественно было бы ожидать появления разрывов по крайней мере вторых производных функций $u(x, t)$ и $v(y, t)$. Принимая во внимание эти предварительные соображения, в дальнейшем именно интегральное уравнение (2) будет использоваться нами в качестве основного соотношения, описывающего колебания системы струн.

Представим теперь уравнение (2) в иной форме. Для этого обозначим T_{xy} множество, являющееся объединением координатных плоскостей (x, t) и (y, t) в трёхмерном пространстве. В T_{xy} выделим множество G_{xy} , удовлетворяющее следующим условиям:

1. $G_{xy} = G_x \cup G_y$, G_x — область в плоскости (x, t) , G_y — в плоскости (y, t) .
2. Пересечение области G_x с осью Ot совпадает с пересечением области G_y с этой осью: $G_x \cap Ot = G_y \cap Ot$.
3. Границы ∂G_x и ∂G_y являются кусочно-гладкими кривыми, которые мы обозначим C_x и C_y соответственно.

Убедимся теперь, что равенство (2) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{C_x} \left(\rho_1(x) \frac{\partial u}{\partial t} dx + T_1 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{C_y} \left(\rho_2(y) \frac{\partial v}{\partial t} dy + T_2 \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) + \\ + \iint_{G_x} F_1(x, t) dx dt + \iint_{G_y} F_2(y, t) dy dt = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим сначала, что в случае, когда кривые C_x, C_y являются контурами прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, равенство (3) превращается в равенство (2). Если же данные кривые состоят из нескольких прямоугольников, то формула (3) является просто суммой соотношений (2), записанных для каждого из этих прямоугольников. Учитывая, что при суммировании интегрирование по внутренним границам происходит в обоих направлениях, в результате также получим формулу (3).

Пусть теперь кривые C_x и C_y состоят из произвольных дуг, не являющихся при этом линиями разрыва подынтегральных функций. Для того чтобы убедиться в справедливости формулы (3) и в этом случае, достаточно заменить кривые C_x, C_y ломаными, звенья которых параллельны осям координат. Для областей, ограниченных ломаными, равенство (3) уже доказано. Устремляя к нулю длины всех звеньев, несложно убедиться, что в пределе мы получим формулу (3) для исходных кривых C_x и C_y .

Если же граница множества G_{xy} содержит дуги, являющиеся линиями разрыва подынтегральных функций, равенство (3) остаётся справедливым, если в качестве значений на границе использовать предельные значения с внутренней стороны множества G_{xy} .

В дальнейшем мы будем использовать интегральное уравнение именно в виде (3), учитывая при этом, что содержащиеся в (3) функции должны также удовлетворять условиям согласования (1).

Отметим, что если рассматривать систему двух струн как единое целое, то при построении математической модели естественно использовать функции, допускающие разрывы первого рода.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В данном параграфе более подробно будет исследован случай, когда струны X и Y нашей системы являются однородными, т. е. $\rho_1(x) = \rho_1 = \text{const}$, $\rho_2(x) = \rho_2 = \text{const}$. Именно в рамках этого предположения мы дадим строгую формулировку исследуемой задачи, докажем её разрешимость и единственность полученного решения. Обозначим верхнюю полуплоскость плоскости (x, t) через $R_x^+ = \{(x, t) | t \geq 0\}$, а верхнюю полуплоскость плоскости (y, t) — через $R_y^+ = \{(y, t) | t \geq 0\}$.

Задача. Найти пару функций, определённых в классах $C^1(R_x^+)$, $C^1(R_y^+)$ соответственно, удовлетворяющих уравнению

$$\begin{aligned} \int_{C_x} \left(\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} dx + T_1 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{C_y} \left(\rho_2 \frac{\partial v}{\partial t} dy + T_2 \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) + \\ + \iint_{G_x} F_1(x, t) dx dt + \iint_{G_y} F_2(y, t) dy dt = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_1(x), \quad v(y, 0) = \varphi_2(y), \quad v_t(y, 0) = \psi_2(y), \quad (5)$$

а также условиям согласования

$$u(0, t) = v(0, t), \quad T_1 u_x(0, t) = T_2 v_y(0, t). \quad (6)$$

Подобно ограничениям в [16], стр. 72–79, будем считать функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(y)$ кусочно-гладкими, а функции $F_1(x, t)$, $F_2(y, t)$ — кусочно-непрерывными, удовлетворяющими условиям согласования

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad \psi_1(0) = \psi_2(0), \quad F_1(0, t) = F_2(0, t). \quad (7)$$

Теорема. *Существует единственное решение задачи (4)–(7).*

Доказательство. Для того чтобы убедиться в справедливости сформулированной теоремы, выведем явную формулу решения исследуемой задачи. Сначала, в предположении, что решение данной задачи существует, мы построим его явную формулу, из которой и будет следовать единственность. После этого будет доказано существование искомого решения.

Итак, пусть пара функций $u(x, t)$, $v(y, t)$ является решением нашей задачи. Обратимся к равенству (4). Рассмотрим в качестве кривой C_x треугольник AHB , а в качестве C_y — треугольник CHD . Вершина H данных треугольников лежит на положительной части оси Ot , основания AB и CD расположены вдоль осей Ox и Oy соответственно, а боковые стороны AH , HB и CH , HD являются отрезками характеристик $\sqrt{\rho_1}x \mp \sqrt{T_1}t = \text{const}$ — для сторон AH , HB , и $\sqrt{\rho_2}y \pm \sqrt{T_2}t = \text{const}$ — для сторон CH , HD . Учитывая условия согласования (6), обозначим $u(H) = v(H) = T_H$. В силу того, что вдоль отрезка AH выполнено равенство $dx/dt = \sqrt{T_1/\rho_1} = a_1$, имеет место соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = a_1 du.$$

Аналогично вдоль отрезков HB , CH , HD выполнены соответственно равенства

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = -a_1 du,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} dy + a_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} dt = -a_2 du,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} dy + a_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} dt = a_2 du.$$

Отсюда, с учётом введённых обозначений, приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \int_B^H \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) &= -a_1 (T_H - u(B)), \\ \int_H^A \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) &= a_1 (u(A) - T_H), \\ \int_C^H \left(\frac{\partial v}{\partial t} dx + a_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) &= -a_2 (T_H - v(C)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\int_H^D \left(\frac{\partial v}{\partial t} dx + a_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} dt \right) = a_2 (v(D) - T_H), \quad (9)$$

здесь $a_2 = \sqrt{T_2/\rho_2}$. Подставим теперь полученные равенства в уравнение (3):

$$\begin{aligned} & -\rho_1 a_1 (T_H - u(B)) + \rho_1 a_1 (u(A) - T_H) - \rho_2 a_2 (T_H - u(C)) + \rho_2 a_2 (u(D) - T_H) + \\ & + \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{DHC} F_2(y, t) dy dt = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из полученного равенства можно выразить функцию T_H , описывающую поведение нашей системы в точке пересечения струн X и Y . Заменив в равенстве (10) произведения $\rho_i a_i$, $i = 1, 2$ выражениями $\rho_i a_i = \sqrt{T_i \rho_i}$ и выполнив несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} T_H = & \frac{\sqrt{T_1 \rho_1}}{2(\sqrt{T_1 \rho_1} + \sqrt{T_2 \rho_2})} (u(A) + u(B)) + \frac{\sqrt{T_2 \rho_2}}{2(\sqrt{T_1 \rho_1} + \sqrt{T_2 \rho_2})} (v(C) + v(D)) + \\ & + (2(\sqrt{T_1 \rho_1} + \sqrt{T_2 \rho_2}))^{-1} \left(\int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{DHC} F_2(y, t) dy dt \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, функция T_H , определяемая равенством (11), описывает колебания нашей системы в каждый момент времени в точке соединения струн. Для построения решения введём в рассмотрение множество I_{xy} , которое является объединением множеств $I_x = \{(x, t) \in R_x^+ \mid a_1 t \geq |x|\}$ и $I_y = \{(y, t) \in R_y^+ \mid a_2 t \geq |y|\}$, $I_{xy} = I_x \cup I_y$, а также множества $S_x = R_x^+ \setminus I_x$, $S_y = R_y^+ \setminus I_y$. Очевидно, что на множествах S_x и S_y струны колеблются обособленно и не влияют друг на друга. Наоборот, I_{xy} является множеством, где происходит взаимодействие струн X и Y , поэтому интерес представляет построение решения именно в этом множестве. Используя соотношение (11), выведем теперь формулу для решения нашей задачи в каждой точке множества I_{xy} .

Пусть $M(x_0, t_0)$ — произвольная точка пересечения множества I_{xy} с плоскостью (x, t) . В качестве множества G_{xy} рассмотрим объединение треугольников $EMB \subset (x, t)$ и $DHC \subset (y, t)$. Для определённости будем считать, что $x_0 < 0$. Тогда E — это точка пересечения характеристики $x - x_0 - a_1(t - t_0) = 0$ с осью Ox . Повторяя для данных треугольников рассуждения, аналогичные приведённым выше, получим следующие равенства:

$$\int_B^M \frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = -a_1 (u(M) - u(B)), \quad (12)$$

$$\int_M^E \frac{\partial u}{\partial t} dx + a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = a_1 (u(E) - u(M)). \quad (13)$$

Складывая равенства (12) и (13), а также равенства (8) и (9), и подставляя полученные соотношения в интегральное уравнение (4), получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \rho_1 a_1 (u(E) + u(B) - 2u(M)) + \rho_2 a_2 (v(C) + v(D) - 2T_H) + \\ & \rho_1 \int_E^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \rho_2 \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{EMB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{CHD} F_2(y, t) dy dt = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в данное равенство вместо T_H его выражение (11), получим формулу решения нашей задачи:

$$\begin{aligned}
 u(M) = & u(E)/2 + (2(\sqrt{\rho_1 T_1} + \sqrt{\rho_2 T_2}))^{-1} \left(\sqrt{\rho_1 T_1} u(B) + \sqrt{\rho_2 T_2} (v(C) + v(D) - u(A)) + \right. \\
 & \left. \rho_2 \sqrt{\rho_1 T_1} \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \rho_1 \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{DHC} F_2(y, t) dy dt \right) + \\
 & (2\sqrt{\rho_1 T_1})^{-1} \left(\rho_1 \int_E^A \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{EMHA} F_1(x, t) dx dt \right). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Как было отмечено выше, полученная формула верна для всех точек $M(x, t)$ из множества I_{xy} , когда $x < 0$. Если же $x \geq 0$, то равенство (14) несколько видоизменяется. Также эта формула, конечно, принимает другой вид для точек, принадлежащих пересечению I_{xy} с плоскостью (y, t) . Поскольку в каждом из перечисленных вариантов рассуждения при выводе соответствующих равенств полностью аналогичны вышеизложенным, приведём лишь готовые формулы, опуская выкладки:

$$\begin{aligned}
 u(M) = & u(F)/2 + (2(\sqrt{\rho_1 T_1} + \sqrt{\rho_2 T_2}))^{-1} \left(\sqrt{\rho_1 T_1} u(B) + \sqrt{\rho_2 T_2} (v(C) + v(D) - u(B)) + \right. \\
 & \left. \rho_2 \sqrt{\rho_1 T_1} \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \rho_1 \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt + \iint_{DHC} F_2(y, t) dy dt \right) + \\
 & (2\sqrt{\rho_1 T_1})^{-1} \left(\rho_1 \int_B^F \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{FMHB} F_1(x, t) dx dt \right). \tag{15}
 \end{aligned}$$

В формуле (15) предполагается, что $x_0 > 0$, а F — точка пересечения характеристики $x - x_0 + a_1(t - t_0) = 0$ с осью Ox . Формулы для функции $v(y, t)$ аналогичны соотношениям (14), (15):

$$\begin{aligned}
 v(N) = & v(G)/2 + (2(\sqrt{\rho_2 T_2} + \sqrt{\rho_1 T_1}))^{-1} \left(\sqrt{\rho_2 T_2} v(C) + \sqrt{\rho_1 T_1} (u(B) + u(A) - v(D)) + \right. \\
 & \left. \rho_1 \sqrt{\rho_2 T_2} \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \rho_2 \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{CHD} F_2(y, t) dy dt + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt \right) + \\
 & (2\sqrt{\rho_2 T_2})^{-1} \left(\rho_2 \int_G^D \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{GNHD} F_2(y, t) dy dt \right). \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(N) = & v(J)/2 + (2(\sqrt{\rho_2 T_2} + \sqrt{\rho_1 T_1}))^{-1} \left(\sqrt{\rho_2 T_2} v(C) + \sqrt{\rho_1 T_1} (u(B) + u(A) - v(C)) + \right. \\
 & \left. \rho_1 \sqrt{\rho_2 T_2} \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \rho_2 \int_D^C \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{CHD} F_2(y, t) dy dt + \iint_{AHB} F_1(x, t) dx dt \right) + \\
 & (2\sqrt{\rho_2 T_2})^{-1} \left(\rho_2 \int_C^J \frac{\partial v}{\partial t} dy + \iint_{JNHC} F_2(y, t) dy dt \right). \tag{17}
 \end{aligned}$$

В формулах (16), (17) точка $N(y_0, t_0)$ принадлежит пересечению множества I_{xy} с плоскостью (y, t) , а G и J являются, по аналогии с E и F , точками пересечения соответствующих характеристик с осью Oy .

Что же касается множеств S_x, S_y , то в этих множествах взаимодействие струн отсутствует и решение описывается классическими формулами Даламбера для бесконечной струны.

Таким образом, единственность решения задачи (4)–(7) доказана. $\square$

Для доказательства разрешимости отметим, что функции, содержащиеся в правой части выражений (14)–(17), определяются начальными условиями задачи (4)–(7), т. е. являются произвольными кусочно-гладкими функциями. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции, определяемые равенствами (14)–(17), удовлетворяют уравнению (2), а значит, и уравнению (4), что и доказывает существование решения задачи (4)–(7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа является начальной в исследованиях подобного рода — в ней рассмотрена система, состоящая из двух струн, соединённых в некоторой точке. Построена математическая модель соответствующего волнового процесса, а также поставлена и исследована задача, содержащая, кроме традиционных данных Коши, дополнительные условия и ограничения. Что касается дальнейшего развития данного направления, используемые в работе методы могут быть применены для более сложных постановок. Кроме того, результаты, касающиеся разрешимости и единственности прямых задач, могут стать основой для решения обратных задач, имеющих прикладное значение.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vinogradov M., Ponomarenko O., Moshensky A., Savchenko A. Conformal Mapping of Discontinuous Functions for Inverse Radon Transform // Systems, Decision and Control in Energy V. Studies in Systems, Decision and Control. 2023. V. 481. P. 115–126; DOI: 10.1007/978-3-031-35088-7_8
2. Katsevich A. Analysis of Reconstruction from Discrete Radon Transform Data in R^3 When the Function Has Jump Discontinuities // SIAM J. Math. Anal. 2020. V. 52, N 4. P. 3990–4021; DOI: 10.1137/191295039
3. Баев А.В. Использование преобразования Радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 4. С. 550–560.
4. Anikonov D.S., Kazantsev S.G., Konovalova D.S. A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2023. V. 31, N 6. P. 959–965; DOI: 10.1515/jiip-2023-0038
5. Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Формула обращения преобразования Радона в классе разрывных функций // Сиб. журн. индустр. матем. 2024. Т. 27, № 3. С. 5–11; DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.301
6. Ильин В.А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 6. С. 732–735.
7. Ильин В.А., Луфференко П.В. Смешанные задачи описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющих разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы // Докл. РАН. 2009. Т. 428, № 1. С. 12–15.

8. Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Обобщённая формула Даламбера для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 2. С. 265–268; DOI: 10.1134/S0374064119020134
9. Кожанов А.И., Кенжебай Х. Краевые задачи с интегро-дифференциальным нелокальным условием для дифференциальных уравнений составного типа четвёртого порядка // Челяб. физ.-матем. журн. 2023. Т. 8, № 4. С. 516–527.
10. Кожанов А.И. Нелокальные задачи с обобщённым условием Самарского—Ионкина для некоторых классов нестационарных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2023. Т. 509. С. 50–53.
11. Кожанов А.И., Дюжева А.В. Интегральный аналог первой начально-краевой задачи для гиперболических и параболических уравнений второго порядка // Матем. заметки. 2022. Т. 111, № 4. С. 540–550.
12. Данилюк И.М., Данилюк А.О. Задача Неймана с интегро-дифференциальным оператором в краевом условии // Матем. заметки. 2016. Т. 100, № 5. С. 701–709.
13. Sharma B.L., Eremeyev V.A. Wave transmission across surface interfaces in lattice structures // Int. J. Eng. Sci. 2019. V. 145. P. 1–16; DOI: 10.1016/j.ijengsci.2019.103173
14. Berinskii I.E., Slepyan L.I. How a dissimilar-chain system is splitting: Quasi-static, subsonic and supersonic regimes // J. Mech. Phys. Solids. 2017. V. 107. P. 509–524; DOI: 10.1016/j.jmps.2017.07.014
15. Sharma B. Near-tip field for diffraction on square lattice by rigid constraint // Z. Angew. Math. Phys. 2015. V. 66. P. 2719–2740; DOI: 10.1007/s00033-015-0508-z
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М: Наука, 1977.

UDC 517.958

NONCLASSICAL PROBLEM FOR TRANSVERSE VIBRATIONS OF A STRING SYSTEM

© 2025 D. S. Konovalova^a

*Sobolev Institute of Mathematics,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mail: dsk@math.nsc.ru

Received 02.08.2024, revised 27.02.2025, accepted 10.03.2025

Abstract. The paper considers the transverse vibrations of two strings connected to each other at a certain point. A mathematical model of this process, based on the law of conservation of momentum, expressed in the form of an integro-differential equation is constructed. This equation connects the deviations of the strings during vibrations with their characteristics such as density, tension, and sources of external forces. This approach can be considered as a development of the method proposed by A.N. Tikhonov for the equation of string vibrations with nonsmooth data. For the case where the densities of the strings are constants, we set a nonclassical problem for the integro-differential equation. In addition to the Cauchy data, the problem includes necessary matching conditions. A theorem on the existence and uniqueness of a solution to the problem is proved, and explicit formulas are obtained for its solution.

Keywords: wave equation, integral conservation law, Cauchy problem, lattice, discontinuous function.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.102

REFERENCES

1. M. Vinogradov, O. Ponomarenko, A. Moshensky, and A. Savchenko, “Conformal mapping of discontinuous functions for inverse radon transform,” *Syst. Decis. Control Energy V. Stud. Syst. Decis. Control* **481**, pp. 115–126 (2023). https://doi.org/10.1007/978-3-031-35088-7_8
2. A. Katsevich, “Analysis of reconstruction from discrete radon transform data in R^3 when the function has jump discontinuities,” *SIAM J. Math. Anal.* **52** (4), pp. 3990–4021 (2020). <https://doi.org/10.1137/191295039>
3. A. V. Baev, “Using the Radon transform to solve the inverse scattering problem in a plane layered acoustic medium,” *Comput. Math. Math. Phys.* **58** (4), pp. 537–547 (2018).
4. D. S. Anikonov, S. G. Kazantsev, and D. S. Konovalova, “A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighted Radon transform,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **31** (6), pp. 959–965 (2023). <https://doi.org/10.1515/jiip-2023-0038>
5. D. S. Anikonov and D. S. Konovalova, “Radon transform inversion formula in the class of discontinuous functions,” *J. Appl. Ind. Math.* **18** (3), pp. 379–383 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1990478924030013>
6. V. A. Il'in, “Reduction of the vibrations of an initially stationary rod consisting of two different segments to an arbitrary state,” *Dokl. Math.* **82** (3), pp. 955–958 (2010).
7. V. A. Il'in and P. V. Luferenko, “Mixed problems describing longitudinal oscillations of a rod consisting of two segments with different densities and different elasticities but equal impedances,” *Dokl. Math.* **80** (2), pp. 642–645 (2009).
8. D. S. Anikonov, D. S. Konovalova, “Generalized d'Alembert formula for the wave equation with discontinuous coefficients,” *Differ. Equations* **55** (2), pp. 270–273 (2019).

9. A. I. Kozhanov and Kh. Kenzhebai, "Boundary value problems with an integro-differential non-local condition for composite-type differential equations of the fourth order," *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.* **8** (4), pp. 516–527 (2023) [in Russian].
10. A. I. Kozhanov, "Nonlocal problems with generalized Samarskii–Ionkin condition for some classes of nonstationary differential equations," *Dokl. Math.* **107** (1), pp. 40–43 (2023).
<https://doi.org/10.1134/S106456242370045X>
11. A. I. Kozhanov and A. V. Dyuzheva, "Integral analogue of the first initial–boundary value problem for second-order hyperbolic and parabolic equations," *Math. Notes* **111** (4), pp. 562–570 (2022).
<https://doi.org/10.1134/S0001434622030245>
12. I. M. Danyliuk and A. O. Danyliuk, "Neumann problem with the integro-differential operator in the boundary condition," *Math. Notes* **100** (5), pp. 687–694 (2016).
<https://doi.org/10.1134/S0001434616110055>
13. B. L. Sharma and V. A. Eremeyev, "Wave transmission across surface interfaces in lattice structures," *Int. J. Eng. Sci.* **145**, pp. 1–16 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103173>
14. I. E. Berinskii and L. I. Slepyan, "How a dissimilar-chain system is splitting: Quasi-static, subsonic and supersonic regimes," *J. Mech. Phys. Solids*. **107**, pp. 509–524 (2017).
<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.07.014>
15. B. Sharma, "Near-tip field for diffraction on square lattice by rigid constraint," *Z. Angew. Math. Phys.* **66**, pp. 2719–2740 (2015). <https://doi.org/10.1007/s00033-015-0508-z>
16. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].

УДК 539.3

ГОМОГЕНИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЁТОМ ВРЕМЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ ФАЗ В ГЕТЕРОГЕННОЙ СТРУКТУРЕ

© 2025 А. В. Мишин

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Поступила в редакцию 27.10.2024 г.; после доработки 15.04.2025 г.;
принята к публикации 22.04.2025 г.

В работе представлена гомогенизация нестационарной модели линейной теории упругости методом условных моментов, в результате которой получены эффективные коэффициенты линейной теории упругости и эффективная плотность. В результате выполнения операций полученные эффективные коэффициенты зависят от масштабов корреляции фаз по времени и пространству и являются взаимозависимыми. Возникновение масштабов корреляции является следствием вычисления интегралов, содержащих функцию Грина (решение для оператора нестационарной модели линейной теории упругости) и корреляционную по времени и пространству функцию структуры. Исследована эффективная плотность.

Ключевые слова: гетерогенная среда, микроструктура, функция Грина, условное осреднение, корреляционная функция, преобразование Фурье, структурный фазовый переход.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.103

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] при нахождении осреднённых уравнений с определёнными эффективными коэффициентами (при гомогенизации) на исходные уравнения нестационарной линейной теории упругости сразу производится действие преобразованием Фурье по времени. При дальнейших операциях над исходными уравнениями не учитывается корреляционная функция структуры по времени, что ограничивает найденный результат. Возможность учёта корреляционной функции в подходах [1–3] сталкивается с трудностью, связанной с отсутствием механизма появления данной корреляционной функции в Фурье-представлении в интегралах, входящих в выражение по вычислению эффективных коэффициентов. Описываемое ограничение анализируемой гетерогенной среды приводит к отсутствию влияния её микроструктурных свойств (корреляция фаз системы в пространстве и времени) на макроскопические свойства (эффективные коэффициенты) гетерогенной среды. В работе [4] гомогенизация производится для нестационарных процессов, однако отсутствует алгоритм нахождения эффективных коэффициентов.

В настоящей работе предлагается вывод эффективных коэффициентов, входящих в осреднённые уравнения нестационарной модели линейной теории упругости. Вывод произведён на основе гомогенизации исходных уравнений методом условных моментов [5, 6], который включает в себя аппарат функций Грина, условное осреднение и преобразование Фурье. В работе анализируется влияние корреляционной функции как геометрии структуры, так и по времени

на эффективные упругие и инерционные свойства гетерогенной среды. Корреляционная функция возникает в результате применения условного осреднения к решению, записанному через функцию Грина. Для гомогенизации используется функция Грина, являющаяся решением нестационарного уравнения линейной теории упругости. Далее выполняется преобразование Фурье по пространству и времени на преобразованное решение, записанное через функцию Грина и условно осреднённое. То есть преобразование Фурье по времени в настоящей работе используется для преобразования решения, а не для преобразования исходных уравнений. В результате данной операции возникают интегралы, включающие функцию Грина и корреляционную функцию. Эти интегралы отображают отклик поля в среде на распространяющееся поле и геометрическую и временную корреляцию фаз в неоднородной структуре. Данные интегралы входят в выражения по вычислению итоговых эффективных коэффициентов линейной теории упругости и эффективной плотности.

Следует отметить, что исследования в области механики гетерогенных сред как активно велись [1–15], так и активно ведутся [16–23] вследствие наличия актуальных нерешённых вопросов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуем нестационарное распределение поля упругости в микронеоднородной двухфазной среде (композитный материал). В качестве исходной модели используем модель нестационарной изотропной линейной теории упругости в форме

$$\begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij} - \rho \partial_t \partial_t u_i &= 0, \quad \sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_\beta u_\alpha + \partial_\alpha u_\beta), \\ \lambda_{ij\alpha\beta} &= \left(K - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu I_{ij\alpha\beta}, \quad I_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda_{ij\alpha\beta}$ — тензор упругости, содержащий объёмный K и сдвиговый μ упругие модули системы в рассматриваемой точке, ρ — плотность в точке. $\delta_{i\alpha}$ — символ Кронекера, ∂_t — производная по времени, ∂_j — производная по пространственным переменным. Тензор упругости является коэффициентом пропорциональности в законе Гука $\sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$, связывающем тензора линейной деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и напряжений σ_{ij} . u_i — компонента вектора смещений.

Структуру среды считаем обладающей статистически однородными и изотропными свойствами и заполняющей всё трёхмерное пространство.

Характерный размер микроточки модели (1) считаем существенно большим относительно характерного расстояния между атомами (молекулами) в структуре и существенно меньшим относительно характерного размера пространственной неоднородности фаз в структуре — характерного размера для элементарных структурных элементов фаз. Характерный размер пространственной неоднородности фаз в структуре существенно меньше характерного масштаба осреднения, характеризующего макроточку. Макроточка определяет осреднённое поле.

2. ВЫВОД ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ВХОДЯЩИХ В ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ОСРЕДНЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Целью является получение из исходных уравнений (1) осреднённые, представимые в виде

$$\partial_j \langle \sigma_{ij} \rangle - \rho^* \partial_t \partial_t \langle u_i \rangle = 0, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ij\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle, \quad (2)$$

где $\lambda_{ij\alpha\beta}^*$ — входящий в осреднённый закон Гука эффективный изотропный тензор, содержащий искомые эффективные коэффициенты линейной теории упругости K^* и μ^* , ρ^* — эффективная плотность. Связь осреднённых тензоров $\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$ и $\langle \sigma_{ij} \rangle$ с осреднёнными тензорами деформаций и напряжений каждой из фаз имеет следующий вид $\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle = c_1 \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_1 + c_2 \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_2$,

$\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = c_1 \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle_1 + c_2 \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle_2$, аналогично для смещений $\langle u_i \rangle = c_1 \langle u_i \rangle_1 + c_2 \langle u_i \rangle_2$, где c_ν — объёмная концентрация фазы ν , $c_1 + c_2 = 1$. Необходимая информация о гетерогенной структуре располагается в эффективных коэффициентах K^* , μ^* , ρ^* вид которых следует получить.

Применим формализм метода условных моментов [5]. Исходное уравнение (1) на смещение преобразовывается путём прибавления и отнимания искомого тензора λ_{ijmn}^* к виду

$$\lambda_{ij\alpha\beta}^* \partial_j \partial_\beta u_\alpha - \rho^* \partial_t \partial_t u_i = -\partial_j (\lambda_{ij\alpha\beta} - \lambda_{ij\alpha\beta}^*) \partial_\beta u_\alpha + (\rho - \rho^*) \partial_t \partial_t u_i. \quad (3)$$

Для оператора $\hat{L} = \lambda_{ij\alpha\beta}^* \partial_j \partial_\beta - \rho^* \delta_{i\alpha} \partial_t \partial_t$ найдём функцию Грина, считая правую часть уравнения (3) источником, а среду бесконечной. Функция Грина нестационарной модели линейной теории упругости находится из уравнения

$$\lambda_{ijml}^* \partial_j^{(1)} \partial_l^{(1)} G_{mp}^{(1,2)} - \rho^* \partial_t \partial_t G_{ip}^{(1,2)} = \delta_{ip} \delta(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}) \quad (4)$$

и имеет вид (ещё впервые полученный Стоксом)

$$G_{ij}^{(1,2)} = t \frac{-\delta_{ij} + 3n_i n_j}{4\pi\rho^* r^3} \chi\left(\frac{r}{c_l}, \frac{r}{c_t}\right) + \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{4\pi r \rho^* c_t^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_t}\right) + \frac{n_i n_j}{4\pi r \rho^* c_l^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_l}\right),$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}}{r}$, $r = |\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}^{(2)}|$, $\mathbf{r}^{(i)}$ — радиус-вектор в точку i ; $(c_t)^2 = \frac{\mu^*}{\rho^*}$, $(c_l)^2 = \frac{K^* + \frac{4}{3}\mu^*}{\rho^*}$ — поперечная и продольная эффективные скорости звука гетерогенного материала соответственно, $\chi\left(\frac{r}{c_l}, \frac{r}{c_t}\right)$ — индикаторная функция, равная единице в интервале $\left(\frac{r}{c_l}, \frac{r}{c_t}\right)$ и нулю вне интервала.

Далее в рамках метода условных моментов, основываясь на формализме функции Грина, выпишем решение уравнений (3) на смещения и деформации:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= \langle u_i^{(1)} \rangle - \int_V G_{ip}^{(1,2)} \partial_q^{(2)} (\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^*) \partial_n^{(2)} u_m^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)} + \\ &\quad + \int_V G_{ip}^{(1,2)} (\rho^{(2)} - \rho^*) \ddot{u}_p^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}, \\ \varepsilon_{ij}^{(1)} &= \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle - \int_V \partial_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,2)} \partial_q^{(2)} (\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^*) \varepsilon_{mn}^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} + \\ &\quad + \int_V \partial_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,2)} (\rho^{(2)} - \rho^*) \ddot{u}_p^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $2\partial_{(j}^{(1)} G_{i)p}^{(1,2)} = \partial_j^{(1)} G_{ip}^{(1,2)} + \partial_i^{(1)} G_{jp}^{(1,2)}$.

3. НАХОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПЛОТНОСТИ

Продифференцируем дважды по времени уравнение на смещение (5):

$$\ddot{u}_i^{(1)} = \langle \ddot{u}_i^{(1)} \rangle + \int_V \ddot{G}_{ip}^{(1,2)} (\rho^{(2)} - \rho^*) \ddot{u}_p^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)} + (). \quad (6)$$

Слагаемое в скобках в выражении (6) в настоящей работе не рассматривается — в результате действий в рамках метода условных моментов оно приводит к модификации оператора осреднённой линейной нестационарной теории упругости (2). Целью является получение эффективных коэффициентов, входящих в уравнение с оператором, тождественным оператору линейной теории упругости (2). Обобщение оператора приведёт к появлению новых коэффициентов, не влияющих на эффективные коэффициенты.

Применим формализм условного осреднения к выражению (6). Для этого умножим его на $f(\ddot{u}_i^{(1)}, \ddot{u}_i^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \lambda_{ij\alpha\beta}^{(2)} |_{\nu}^{(1)})$ и проинтегрируем по конфигурации полей. В результате чего имеем равенство

$$\langle \ddot{u}_i^{(1)} \rangle_{\nu} = \langle \ddot{u}_i^{(1)} \rangle + \sum_k \int_V \ddot{G}_{ip}^{(1,2)} (\rho^k - \rho^*) \langle \ddot{u}_p^{(2)k} \rangle p_{\nu k}^{(1,2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}, \quad (7)$$

где слагаемое $p_{\nu k}^{(1,2)} = w_k^{(2)} |_{\nu}^{(1)} = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k) \varphi^{(1,2)}$ характеризует вероятностную функцию геометрии и времени структуры, которая определяет вероятность нахождения фазы k в точке $\mathbf{r}^{(2)}$ в момент времени $t^{(2)}$ при условии, что фаза ν в момент времени $t^{(1)}$ расположена в точке $\mathbf{r}^{(1)}$; $\varphi^{(1,2)}$ — корреляционная функция геометрии и времени неоднородной структуры; $\nu, k = 1, 2$.

Запись $\langle u_i^{(2)k} |_{\nu}^{(1)} \rangle$ обозначает условно осреднённый вектор смещений в точке $\mathbf{r}^{(2)}$ в момент времени $t^{(2)}$ для фазы k при условии, что в точке $\mathbf{r}^{(1)}$ в момент времени $t^{(1)}$ находится компонента ν . Для подобных членов, как и в работах [5, 6, 16], считается выполненным равенство $\langle u_i^{(2)k} |_{\nu}^{(1)} \rangle = \langle \ddot{u}_i^{(2)} \rangle_k$.

Следующая операция по поиску эффективного коэффициента плотности основана на нахождении разницы $\langle \ddot{u}_i^{(1)} \rangle_2 - \langle \ddot{u}_i^{(1)} \rangle_1$ на основе равенства (7) с последующим выполнением преобразования Фурье

$$\langle C_i \rangle_k = \int_{V, t} \langle \ddot{u}_i^{(1)} \rangle_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{r} dt$$

для него, что приводит к выражению

$$\langle C'_i \rangle = -\ddot{K}_{ip} ((\rho_1 - \rho^*) \langle C_p \rangle_1 - (\rho_2 - \rho^*) \langle C_p \rangle_2), \quad (8)$$

где

$$\ddot{K}_{ip} = \int_{V, t} \ddot{G}_{ip}^{(1,2)} \varphi e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{r} dt \quad (9)$$

являются интегралами, отображающими информацию об отклике поля в среде (функция Грина) на распространяющееся поле и о корреляционной функции геометрии структуры и времени $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

Выражение (8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \langle C'_p \rangle &= (\delta_{ip} - \ddot{K}_{ip} \rho'')^{-1} \ddot{K}_{in} \rho' \langle C_n \rangle, \\ \rho' &= \rho_2 - \rho_1, \quad \rho'' = c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1 - \rho^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее умножим выражение (7) на c_{ν} и просуммируем по ν . В результате получается выражение

$$\rho^* \langle \ddot{u}_i \rangle = c_1 \rho_1 \langle \ddot{u}_i \rangle_1 + c_2 \rho_2 \langle \ddot{u}_i \rangle_2,$$

которое с учётом равенств $\langle \rho \rangle = c_1 \rho_1 + c_2 \rho_2$, $\rho' = \rho_2 - \rho_1$ и преобразования Фурье переписывается к виду

$$\rho^* C_i = \langle \rho \rangle C_i + c_1 c_2 \rho' C'_i. \quad (11)$$

Объёмные концентрации считаем слабо меняющимися относительно изменения полей и масштаба корреляции фаз по времени.

Используя равенства (10) и (11), получим выражение для эффективного коэффициента плотности

$$\rho^* = \langle \rho \rangle + c_1 c_2 \rho' (\delta_{ji} - \ddot{K}_{ji} \rho'')^{-1} \ddot{K}_{ji} \rho'. \quad (12)$$

Для нахождения ρ^* следует вычислить интегралы $\ddot{K}_{ji}$ (9).

Заметим, что эффективная плотность (12) зависит от $\mathbf{k}, \omega$, то есть в общем виде приведёт к оператору, модифицирующему оператор линейной нестационарной теории упругости.

При вычислении интегралов $\ddot{K}_{ij}$ в работе будет полагаться $\mathbf{k} = 0, \omega = 0$. корреляционная функция геометрии и времени структуры имеет вид $\varphi(\mathbf{r}, t) = e^{-\alpha r} e^{-\beta t}$, в которой временные и пространственные переменные разделены.

Пояснения, связанные с предположением $\mathbf{k} = 0, \omega = 0$ и видом корреляционной функции, даны в конце данного пункта по нахождению эффективного коэффициента плотности.

Масштаб корреляции фаз по пространству означает, что структура является определённой на масштабе $(\alpha)^{-1}$, т.е. определённость имеется при движении от фиксированной точки до интересующей точки, находящейся на расстоянии, меньшем $(\alpha)^{-1}$; при соответствующем расстоянии, большем $(\alpha)^{-1}$, информация о структуре экспоненциально убывает. Масштаб корреляции фаз по времени означает, что для рассматриваемой точки пространства информация о фазе существует время $(\beta)^{-1}$, а далее экспоненциально убывает.

Интеграл $\ddot{K}_{ij}$ от первого слагаемого в функции Грина (4) обращается в нуль в силу интегрирования по углам $\int (-\delta_{ij} + 3n_i n_j) d\Omega = (-4\pi + 4\pi) \delta_{ij} = 0$. Проведём цепочку равенств для второго слагаемого в (4):

$$\begin{aligned} \int_{V, t} \frac{\delta_{ij} - n_i n_j}{4\pi r c_t^2} \partial_t \partial_t \delta \left(t - \frac{r}{c_t} \right) \varphi dr dt &= \frac{2}{3} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_{r, t} \partial_t \partial_t \delta \left(t - \frac{r}{c_t} \right) \varphi r dr dt = \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_{r, t} \left(\partial_t \partial_t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw(t-\frac{r}{c_t})} dw \right) \varphi r dr dt = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_{r, w} \left(\int_0^{+\infty} e^{-iwt} e^{-\beta t} dt \right) w^2 e^{iw \frac{r}{c_t}} dw e^{-\alpha r} r dr = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_{r, w} \frac{1}{iw + \beta} w^2 e^{iw \frac{r}{c_t}} dw e^{-\alpha r} r dr = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i}{w - i\beta} w^2 e^{iw \frac{r}{c_t}} dw e^{-\alpha r} r dr = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{-i}{2\pi} \frac{1}{c_t^2} \delta_{ij} \int_r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w - i\beta} w^2 e^{iw \frac{r}{c_t}} dw e^{-\alpha r} r dr = \\ &= \frac{2}{3} \frac{\beta^2}{c_t^2} \delta_{ij} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + \frac{\beta}{c_t})r} r dr = \frac{2}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_t\right)^2} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

В ходе данных операций использована формула для δ -функции

$$\delta \left(t - \frac{r}{c_t} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iw(t-\frac{r}{c_t})} dw,$$

далее интеграл по dw посчитан методом вычетов с учётом особой точки $i\beta$, лежащей в верхней полуплоскости.

Выполняя аналогичные операции для третьего слагаемого в (4), получим выражение

$$\rho^* \ddot{K}_{ij} = \rho^* \ddot{K} \delta_{ij} = \frac{2}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_t\right)^2} \delta_{ij} + \frac{1}{3} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_l\right)^2} \delta_{ij}.$$

Подставляя данные результаты в формулу (12), имеем выражение для эффективного коэффициента плотности

$$\rho^* = \langle \rho \rangle - \frac{c_1 c_2 (\rho_1 - \rho_2)^2}{c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1 + \rho^* \left(\frac{1}{\bar{K} \rho^*} - 1 \right)}, \quad (13)$$

который получился зависимым от коэффициентов $\frac{\alpha}{\beta} c_t$, $\frac{\alpha}{\beta} c_l$, включающих масштабы корреляции фаз по времени и пространству в гетерогенной структуре. Следует также отметить взаимовлияние эффективных коэффициентов линейной теории упругости и эффективной плотности, что является следствием зависимости ρ^* от эффективных скоростей звука c_t , c_l гетерогенной среды. Вычисление ρ^* произведено без предположения о малости коэффициентов $\left(\frac{\alpha}{\beta} c_t \right)^{-1}$, $\left(\frac{\alpha}{\beta} c_l \right)^{-1}$.

При нахождении эффективной плотности в (5) и (6) отброшено слагаемое $\int_V G_{ip}^{(1,2)} \partial_q^{(2)} \left(\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^* \right) \partial_n^{(2)} u_m^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}$. Проанализируем его. В соответствии с операциями, данное слагаемое дважды дифференцируется по времени, условно осредняется и преобразовывается. В результате чего имеем интеграл $\int_{V,t} \partial_q \ddot{G}_{ip}^{(1,2)} \varphi e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{r} dt$. Если отбросить член $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, то интеграл будет равен нулю вследствие интегрирования по углам. Рассмотрим вначале случай $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sim 1 + i\mathbf{k}\mathbf{r}$, при котором с учётом слагаемого $i\mathbf{k}\mathbf{r}$ интегрирование по углам не занулится. Сам интеграл при этом берётся по частям для производной ∂_q . В результате дифференцирования и операций, произведённых в работе при вычислении интеграла $\ddot{K}_{ij}$, результат получается пропорциональным $\frac{\mathbf{k}}{(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_t)^2}$. Масштабы корреляции

по пространству и времени в работе предполагаются малыми относительно скорости звука в среде. Рассматриваемое слагаемое $\int_V G_{ip}^{(1,2)} \partial_q^{(2)} \left(\lambda_{pqmn}^{(2)} - \lambda_{pqmn}^* \right) \partial_n^{(2)} u_m^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}$ при выполнении операций в рамках метода условных моментов приведёт к добавке к эффективным коэффициентам упругости (не плотности), которая является малой $\left(\frac{\alpha}{\beta} c_t \right)^{-2} \ll 1$, но не модифицирующей оператор линейной теории упругости. К модификации оператора приводят все последующие слагаемые $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$ при их разложении и интегрировании. То есть эффективные коэффициенты будут зависеть от частоты и волнового вектора, при этом коэффициент пропорциональности перед ними имеет вид $\left(\frac{\alpha}{\beta} c_t \right)^{-n}$, $n > 2$. Слагаемые, модифицирующие оператор, являются малыми вследствие используемой гипотезы о том, что характерный масштаб изменения осреднённого поля значительно превышает характерный масштаб геометрии структуры (аналогично для времени).

Анализ отброшенного слагаемого $\int_V \partial_j^{(1)} G_{ip}^{(1,2)} (\rho^{(2)} - \rho^*) \ddot{u}_p^{(2)} d\mathbf{r}^{(2)} dt^{(2)}$ в (5) при нахождении эффективных коэффициентов упругости (см. ниже) аналогичен представленным выше операциям. Отличие здесь в том, что при разложении $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$ возникают только слагаемые, модифицирующие оператор. То есть вклад в эффективный коэффициент плотности будет операторным.

Ненулевые волновой вектор и частота в интегралах $\ddot{K}_{ij}$ приводят к модификации оператора осреднённой линейной нестационарной теории упругости. Допустим, что у нас в экспоненте $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$ имеется только пространственная часть, которую мы разложим в ряд. И рассмотрим вначале только вклад от члена $(\mathbf{k}\mathbf{r})^2$. Нечётные слагаемые при разложении в ряд занулятся вследствие интегрирования по углам. Результат интегрирования при этом будет пропорционален $k^2 \alpha^{-2} \left(\frac{\alpha}{\beta} c_t \right)^2 \frac{1}{(1 + \frac{\alpha}{\beta} c_t)^4}$. Что при выполнении обратного преобразования Фурье приведёт к модификации анализируемого оператора. Аналогичные рассуждения справедливы далее при вычислении интегралов $R_{ijpq}(\mathbf{k}, \omega)$.

Вид корреляционной функции выбран в виде экспоненциального закона — как следствие решения дифференциального уравнения. Для пространственной составляющей дифференциальное уравнение имеет вид

$$dp_{11} = -\frac{dr}{x_1}p_{11} + \frac{dr}{x_2}(1 - p_{11}),$$

где x_1 — характерный размер фазы 1 в структуре, x_2 — характерный размер фазы 2; член p_{11} характеризует вероятность того, что в точке $\mathbf{r}^{(2)}$ находится фаза 1, при условии, что в точке $\mathbf{r}^{(1)}$ находится фаза 1. Дифференциальное уравнение записано на приращение dp_{11} , то есть на изменение вероятности p_{11} при сдвиге на dr с учётом характерных размеров фаз. Решение дифференциального уравнения с учётом равенств $c_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2}$, $c_2 = \frac{x_2}{x_1+x_2}$, $\alpha^{-1} = \frac{x_1x_2}{x_1+x_2}$ имеет вид, представленный в работе. Основываясь на таких же операциях, для временной составляющей дифференциальное уравнение и его решение имеют аналогичный вид. В работе используется предположение о независимости пространственной и временной корреляций — упрощённый вид функции условной вероятности.

4. НАХОЖДЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УПРУГОСТИ

Вывод эффективных коэффициентов упругости K^* , μ^* в рамках метода условных моментов аналогичен предыдущим работам [5, 6, 16] и операциям, представленным выше. Результатом гомогенизации является осреднённый закон Гука

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_1 \lambda_{ij\alpha\beta}^1 \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_1 + c_2 \lambda_{ij\alpha\beta}^2 \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle_2 = \lambda_{ij\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$$

с определённым видом эффективного тензора упругости:

$$\lambda_{jk\alpha\beta}^* = \langle \lambda_{jk\alpha\beta} \rangle + c_1 c_2 \lambda'_{jkmn} \left(I_{\gamma\delta mn} + R_{\gamma\delta pq} (\lambda_{pqmn}^* - \lambda''_{pqmn}) \right)^{-1} R_{\gamma\delta r\nu} \lambda'_{r\nu\alpha\beta}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda'_{ij\alpha\beta} &= \lambda_{ij\alpha\beta}^1 - \lambda_{ij\alpha\beta}^2, \quad \lambda''_{ij\alpha\beta} = c_2 \lambda_{ij\alpha\beta}^1 + c_1 \lambda_{ij\alpha\beta}^2, \\ R_{ijpq}(\mathbf{k}, \omega) &= - \int \partial_q \partial_{(j} G_{i)p}(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (15)$$

$\lambda'_{ij\alpha\beta}$ — тензор упругости фазы ν . Интегралы $R_{ijpq}(\mathbf{k}, \omega)$ являются следствием применения метода условных моментов и отображают информацию об отклике поля в среде (функция Грина) на распространяющееся поле и о корреляционной функции геометрии структуры и времени $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

Для нахождения коэффициентов K^* , μ^* вычислим интегралы R_{jkpq} , где также полагаем $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\omega = 0$. Разложение члена $e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t}$ по степеням $\mathbf{k}\mathbf{r}$ и ωt приведёт к зависимости от $\mathbf{k}$, ω эффективного тензора упругости $\lambda_{jk\alpha\beta}^*(\mathbf{k}, \omega)$, что при выполнении обратного преобразования Фурье модифицирует оператор осреднённой модели нестационарной линейной теории упругости. Модификация подразумевает появление новых операторных слагаемых с коэффициентами при производных (по пространству и времени), составленных из масштабов корреляции α^{-1} , β^{-1} в структуре. В настоящей работе характерный масштаб изменения осреднённого поля полагаем существенно превышающим характерные масштабы скоррелированности (неоднородности), этим и обусловлены равенства $\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\omega = 0$.

Интегралы R_{jkpq} (15) вычисляются аналогично интегралам $\ddot{K}_{ij}$. Итоговое выражение для них имеет следующий вид:

$$R_{jkpq} = -\frac{1+a}{3} \frac{1}{\rho^*(c_t)^2} I_{jkpq} + \frac{1+b}{15} \frac{(c_l)^2 - (c_t)^2}{\rho^*(c_t)^2 (c_l)^2} (\delta_{jk} \delta_{pq} + 2I_{jkpq}). \quad (16)$$

$$a = -\frac{7}{5} \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 \left(\frac{c_t}{c_l} \right)^2,$$

$$b = -\left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 \left(16 \frac{(c_t)^2}{(c_l)^2 - (c_t)^2} + 10 \left(\frac{c_l}{c_t} \right)^2 \frac{(c_l)^2}{(c_l)^2 - (c_t)^2} \right).$$

При вычислении интегралов R_{jkpq} по коэффициентам $\frac{\alpha}{\beta} c_t$, $\frac{\alpha}{\beta} c_l$ разложение произведено до первого порядка малости (в связи с существенным увеличением объёма вычислений).

Подставляя выражение (16) в (14), найдём искомые эффективные коэффициенты упругости:

$$K^* = c_1 K_1 + c_2 K_2 - \frac{c_1 c_2 (K_1 - K_2)^2}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + \frac{4}{3} \mu^* - \frac{(K^* + \frac{4}{3} \mu^*)^2}{\mu^*} \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 A},$$

$$\mu^* = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \frac{\mu^* (9K^* + 8\mu^* - \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 B)}{6K^* + 12\mu^* + \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^2 B}}, \quad (17)$$

где

$$A = \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^{-2} \left(a - b \frac{K^* + \frac{1}{3} \mu^*}{(K^* + \frac{4}{3} \mu^*)} \right),$$

$$B = \left(\frac{\beta}{\alpha c_l} \right)^{-2} \left(10a \left(K^* + \frac{4}{3} \mu^* \right) - 4b \left(K^* + \frac{1}{3} \mu^* \right) \right).$$

Найденные эффективные коэффициенты также получились зависимы от коэффициентов $\frac{\alpha}{\beta} c_t$, $\frac{\alpha}{\beta} c_l$, включающих масштабы корреляции фаз по времени и пространству в гетерогенной структуре. Эффективные коэффициенты линейной теории упругости (17) взаимозависимы между собой и с коэффициентом эффективной плотности. При $\frac{\beta}{\alpha c_l} = 0$ (соответственно, $a = b = 0$) полученные эффективные коэффициенты согласуются с рядом подходов, перечисленных в [17].

5. АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПЛОТНОСТИ

Во-первых, проанализируем асимптотические случаи $\frac{\alpha}{\beta} c_l \gg 1$ и $\frac{\alpha}{\beta} c_l \ll 1$. При $\frac{\alpha}{\beta} c_l \gg 1$ выражение (13) принимает вид $\rho^* = \langle \rho \rangle$, что соответствует формуле прямой теории смесей. В данном случае масштаб корреляции фаз по времени $(\beta)^{-1}$ существенно превышает временной параметр $(c_l \alpha)^{-1}$, асимптотика $\beta \rightarrow 0$ соответствует отсутствию корреляции фаз во времени. Этот же результат $\rho^* = \langle \rho \rangle$ получается если функция Грина ищется без учёта инерционного слагаемого (то есть это слагаемое считается источником). При $\frac{\alpha}{\beta} c_l \ll 1$ выражение (13) принимает вид формулы обратной теории смесей $\rho^* = \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle^{-1}$. В данном случае масштаб корреляции по времени фаз существенно меньше временного параметра $(c_l \alpha)^{-1}$, $(\beta \rightarrow \infty)$ и существенно влияет на инерционные свойства неоднородной структуры.

Коэффициент эффективной плотности (13) сводится к квадратичному уравнению

$$x(\rho^*)^2 + (c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1 - x \langle \rho \rangle) \rho^* - \rho_1 \rho_2 = 0, \quad x = \frac{1}{\bar{K}} - 1,$$

решением которого является выражение

$$\rho^* = \frac{-(c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1) + x \langle \rho \rangle + \sqrt{((c_1 \rho_2 + c_2 \rho_1) - x \langle \rho \rangle)^2 - 4x \rho_1 \rho_2}}{2x}.$$

Рассмотрим случай существенно различающихся плотностей фаз. При $\rho_1 = 0$ найденное решение принимает вид

$$\rho^* = \rho_2 \frac{(1+x)c_2 - 1}{x},$$

который имеет место для $c_2 > \frac{1}{(1+x)}$. При $c_2 < \frac{1}{(1+x)}$ решением является $\rho^* = 0$. Таким образом, анализ эффективного коэффициента плотности предсказывает наличие несущей фазы и структурного фазового перехода.

Анализ коэффициентов упругости (17) в частном случае $\frac{\alpha}{\beta}c_l = 0$ произведён в работе [17] и предсказывает несущую фазу и структурный фазовый переход. Анализ коэффициентов (17) с учётом взаимозависимости с коэффициентом эффективной плотности (13) планируется в одной из следующих работ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведённой гомогенизации нестационарной модели линейной теории упругости получены эффективные коэффициенты линейной теории упругости и коэффициент эффективной плотности. Итоговые эффективные инерционные и упругие свойства гетерогенного материала зависят от масштабов корреляции фаз по времени и пространству. Соответствующие корреляции являются следствием применения условного осреднения к решению, записанному через функцию Грина. В результате действия на решение преобразованием Фурье возникает свёртка функции Грина и корреляционной функции, определяющая итоговые эффективные коэффициенты и приводящая к их взаимовлиянию. Исследование асимптотических случаев эффективного коэффициента плотности приводит к формулам прямой и обратной теории смесей. Анализ эффективного коэффициента плотности для существенно различающихся плотностей фаз предсказывает структурный фазовый переход. Данный переход зависит от объёмной концентрации фаз и масштабов корреляции. В частном случае отсутствия корреляции по времени фаз найденные эффективные коэффициенты согласуются с существующими подходами.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счёт средств бюджетов Института теоретической и прикладной механики им. Христиановича СО РАН и Новосибирского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Д.Т. Теория упругости микroneоднородных сред. М.: Наука, 1977.
2. Khoroshun L.P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // Appl. Mech. 2000. V. 30, N 10. P. 30–62.
3. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. N. Y.: Academic Press, 1982.
4. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
5. Khoroshun L.P. A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites // Mekh. Kompos. Mater. 1995. V. 31, N 3. P. 310–318.
6. Khoroshun L.P. Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials // Appl. Mech. 1987. V. 23, N 10. P. 100–108.

7. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1962. V. 10, N 4. P. 335–342.
8. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11, N 2. P. 127–140.
9. Bruggeman D.A.G. Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielkristallen der nichtregularen Systeme // Ann. Phys. 1936. V. 417, N 25. P. 645–672.
10. Kroner E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls // Z. Phys. 1958. V. 151, N 4. P. 504–518.
11. Hill R.A. A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. V. 13, N 4. P. 213–222.
12. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: МИЛ, 1963.
13. Khoroshun L.P. Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media // Appl. Mech. 1978. V. 14. P. 3–17.
14. Болотин В.В., Москаленко В.Н. Задача об определении упругих постоянных микронеоднородной среды // Прикл. мех. техн. физ. 1968. Т. 9, № 1. С. 66–72.
15. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
16. Мишин А.В. Обобщённая производная и её использование для анализа микроструктуры гетерогенной среды // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 4. С. 79–96; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.406
17. Mishin A.V., Fomin V.M. Analysis of the Behavior of Heterogeneous Media with Significantly Differing Physical Properties with Allowance for the Effective Dimension of the Space and Generalized Derivative Formalism // Mech. Solids. 2022. V. 57. P. 2005–2019.
18. Fedotov A. The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials // J. Mater. Sci. 2018. V. 53, N 7. P. 5092–5102.
19. Danas K., Ponte Castañeda P. A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: I - Theory // Eur. J. Mech. A Solids. 2009. V. 28, N 3. P. 387–401.
20. Лурье С.А., Соляев Ю.О. Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2010. № 1. С. 80–90.
21. Gao J., Buldyrev S.V., Stanley H.E., Havlin S. Networks formed from interdependent networks // Nature Phys. 2012. V. 8, N 1. P. 40–48.
22. Ходаков Г.С. Реология суспензий. Теория фазового течения и её экспериментальное обоснование // Рос. хим. журн. 2003. № 2. С. 33–44.
23. Moshev V.V., Kozhevnikova L.L. Predictive potentialities of a cylindrical structural cell for particulate elastomeric composites // Int. J. Solids Struct. 2000. V. 37. N 7.

UDC 539.3

HOMOGENIZATION OF A NONSTATIONARY MODEL OF LINEAR THEORY OF ELASTICITY WITH ACCOUNT FOR TEMPORAL CORRELATION OF PHASES IN A HETEROGENEOUS STRUCTURE

© 2025 A. V. Mishin

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia
Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mail: alekseymishin1994@gmail.com

Received 27.10.2024, revised 15.04.2025, accepted 22.04.2025

Abstract. The paper presents the homogenization of the nonstationary model of the linear theory of elasticity by the method of conditional moments, as a result of which the effective coefficients of the linear theory of elasticity and the effective density are obtained. As a result of performing operations, the obtained effective coefficients depend on the scales of phase correlation in time and space and are interdependent. The occurrence of correlation scales is a consequence of calculating the integrals containing the Green's function (the solution for the operator of the nonstationary model of the linear theory of elasticity) and the correlation function of the structure in time and space. The effective density is investigated.

Keywords: heterogeneous medium, microstructure, Green's function, conditional averaging, correlation function, Fourier transform, structural phase transition.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.103

REFERENCES

1. T. D. Shermergor, *Elasticity Theory for Microinhomogeneous Materials* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
2. L. P. Khoroshun, "Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites," *Appl. Mech.* **30** (10), 30–62 (2000).
3. R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity* (Academic Press, New York, 1982).
4. R. I. Nigmatulin, *Fundamentals of Mechanics of Heterogeneous Media* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].
5. L. P. Khoroshun, "A new mathematical model of the nonuniform deformation of composites," *Mekh. Kompoz. Mater.* **31** (3), 310–318 (1995) [in Russian].
6. L. P. Khoroshun, "Conditional-moment method in problems of the mechanics of composite materials," *Appl. Mech.* **23** (10), 100–108 (1987).
7. Z. Hashin and S. Shtrikman, "On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity," *J. Mech. Phys. Solids* **10** (4), 335–342 (1962).
8. Z. Hashin and S. Shtrikman, "A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials," *J. Mech. Phys. Solids* **11** (2), 127–140 (1963).
9. D. A. G. Bruggeman, "Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. II. Dielektrizitätskonstanten und Leitfähigkeiten von Vielkristallen der nichtregularen Systeme," *Ann. Phys.* **417** (25), 645–672 (1936).

10. E. Kroner, "Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls," *Z. Phys.* **151** (4), 504–518 (1958).
11. R. A. Hill, "A self-consistent mechanics of composite materials," *J. Mech. Phys. Solids* **13** (4), 213–222 (1965).
12. J. D. Eshelby, *The Continuum Theory of Dislocations* (Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1963) [in Russian].
13. L. P. Khoroshun, "Random functions theory in problems on the macroscopic characteristics of microinhomogeneous media," *Appl. Mech.* **14**, 3–17 (1978).
14. V. V. Bolotin and V. N. Moskalenko, "Determination of the elastic constants of a micro inhomogeneous medium," *Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.* **34** (1), 66–72 (1968) [in Russian].
15. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Averaging of Processes in Periodic Media* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
16. A. V. Mishin, "The generalized derivative and its use in the analysis of the microstructure of a heterogeneous medium," *J. Appl. Ind. Math.* **15** (4), 631–646 (2021).
<https://doi.org/10.1134/S1990478921040074>
17. A. V. Mishin and V. M. Fomin, "Analysis of the behavior of heterogeneous media with significantly differing physical properties with allowance for the effective dimension of the space and generalized derivative formalism," *Mech. Solids* **57**, 2005–2019 (2022).
18. A. Fedotov, "The hybrid homogenization model of elastic anisotropic porous materials," *J. Mater. Sci.* **53** (7), 5092–5102 (2018).
19. K. Danas and P. Ponte Castañeda, "A finite-strain model for anisotropic viscoplastic porous media: I-Theory," *Eur. J. Mech. A Solids* **28** (3), 387–401 (2009).
20. S. A. Lurie and Yu. O. Solyaev, "Modified Eshelby method in the problem of determining effective properties with spherical micro- and nanoinclusions," *Vestn. PNIPU. Mekh.* (1), 80–90 (2010) [in Russian].
21. J. Gao, S. V. Buldyrev, H. E. Stanley, and S. Havlin, "Networks formed from interdependent networks," *Nature Phys.* **8** (1), 40–48 (2012).
22. G. S. Khodakov, "Rheology of suspensions. Theory of phase flow and its experimental substantiation," *Russ. Khim. Zh.* (2), 33–44 (2003) [in Russian].
23. V. V. Moshev and L. L. Kozhevnikova, "Predictive potentialities of a cylindrical structural cell for particulate elastomeric composites," *Int. J. Solids Struct.* **37** (7), (2000).

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО
УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ© 2025 В. Г. Романов^{1а}, Т. В. Бугуева^{1,2б}¹Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,²Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, РоссияE-mails: ^аromanov@math.nsc.ru, ^бbugueva@math.nsc.ruПоступила в редакцию 22.11.2024 г.; после доработки 26.02.2025 г.;
принята к публикации 10.03.2025 г.

Исследованы прямая и обратная задачи для квазилинейного волнового уравнения $\square u - qu^2 - K * u = 0$, в котором ядро $K(x, t)$ представимо в виде $K(x, t) = p(x)K_0(t)$, где $p(x)$ — непрерывная функция. Обратная задача посвящена определению функций $q(x)$ и $p(x)$. В качестве дополнительной информации в обратной задаче задаются следы производной по переменной x двух решений прямой начально краевой задачи, соответствующих различным краевыми условиям, при $x = 0$ на конечном отрезке $[0, T]$. Найдены условия однозначной разрешимости прямой задачи. Для обратной задачи установлена теорема о локальном существовании решения задачи.

Ключевые слова: нелинейное волновое уравнение, интегродифференциальное уравнение, уравнение с памятью, прямая задача, обратная задача, существование решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.104

В последние годы активно изучаются различные постановки прямых (см. работы [1–7]) и обратных (см. [8–14]) задач для линейных и нелинейных волновых уравнений «с памятью» и методы их решений. Так в работе [1] изучается задача Коши в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, для полулинейного затухающего волнового уравнения с нелинейной памятью $\square u + u_t = t^{-\gamma} * |u|^p$, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, здесь $0 < \gamma < 1$, $p > 1$. Установлено глобальное существование и асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ решений с малыми данными в случае, когда $1 \leq n \leq 3$. В работе [2] рассматривается нелинейное волновое уравнение $\square u + g * \Delta u - \omega \Delta u_t + \mu u_t = |u|^{p-2}u$, где $p > 1$, $\omega \geq 0$, $\mu > \lambda\omega$, λ — первое собственное значение оператора $-\Delta$ при однородных граничных условиях Дирихле. Доказана теорема о локальном существовании решения, также показано, что при некоторых подходящих предположениях на $g(t)$ и на исходные данные это решение является глобальным с энергией, которая экспоненциально убывает в потенциальной яме. В работе [3] получен критический показатель для квазилинейного волнового уравнения $\square u + \mu(-\Delta)^{-1/2}u_t = t^{-\gamma} * |u|^p$, здесь $\mu > 0$, $0 < \delta < 1$, $p > 1$. В сверхкритическом случае доказано существование глобальных решений с малыми данными, тогда как в подкритическом случае доказано отсутствие глобальных решений с малыми данными. В работе [4] исследуется критический показатель степени для уравнения $\square u = F(t, u)$, $F = f * N(u)$, $N(u) \approx |u|^p$. Для подходящих f и p доказано существование локальных по времени решений и глобальных решений задачи Коши с небольшими данными в однородных и неоднородных пространствах Соболева. Исследуется предельный случай степенной нелинейности, т. е. $F = N(u)$. В работе [5] изучается глобальное решение, единственность и асимптотическое поведение нелинейного уравнения $\square u = \Delta_p u - g * \Delta u$, где $\Delta_p u$ — нелинейный p -Лаплас оператор, $p > 2$. Глобальное решение построено с помощью приближений Фаедо—Галеркина с учётом того, что исходные данные находятся в соответствую-

ющем наборе устойчивости, созданном из многообразия Нехари. В работе [6] рассматривается нелинейное волновое уравнение $\square u + au_t + g * \Delta u = |u|^{p-2}u$, где $a > 0$, $p > 2$. С использованием функционала Ляпунова исследовано глобальное существование, установлен разрыв решений с неположительной начальной энергией. В работе [7] рассматривается задача Коши для полулинейного волнового уравнения $\square u + b_0(1+t)^{-\beta}u_t = t^{-\gamma} * |u|^p$, здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $0 < \gamma < 1$, $p > 1$, $b_0 > 0$, $0 < \beta < 1$. В энергетическом пространстве $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ получены условия глобального существования.

В работах [8–14] изучаются различные постановки обратных задач для нелинейных волновых уравнений «с памятью». В работе [8] относительно функции $u(x, t, \lambda)$ для интегродифференциального уравнения $\square u + au_t + (b + \lambda^2 c)u + Q * u = 0$, рассматривается обратная задача определения функций $a(x)$, $c(x)$, $q(x)$. Здесь λ — параметр, функция $Q(x, t) = q(x)\chi(t)$, $\chi(t) = 0$ при $t < 0$. Доказана локальная теорема существования, получена оценка устойчивости решения задачи. В работе [9] рассматривается задача Коши для уравнения $\square u + \omega u_t + k * u_{tt} = \delta(x - x_0, t)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, $n = 2\nu + 1$, $\nu = 1, 2, \dots$. Предполагается что поглощение $\omega(x)$ и память $k(x, t)$ локализованы в некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Рассматривается обратная задача определения $\omega(x)$ и $k(x, t)$ по данным рассеяния. Основным результатом является теорема о единственности решения обратной задачи. В работе [10] исследуется обратная задача идентификации неизвестного пространственно-зависимого источника $f(x)$ в нелинейном волновом уравнении $u_{tt} + g(u_t) - \nabla \cdot (a \nabla u_t) + cu + K * u = f + F$, где $K = K(t)$, а функции u , a , c , F зависят от (x, t) , $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Неизвестный коэффициент $f(x)$ восстанавливается по результатам финального временного наблюдения $u(x, T) = \Psi_T(x)$. Доказана единственность решения обратной задачи об источнике. В работе [11] рассматривается нелинейное волновое уравнение $\square u + K * u = f(x, t, u, u_t)$ с неизвестным ядром $K(t)$, которое восстанавливается по дополнительному (пространственному) интегральному измерению. Исследованы глобальное по времени существование, единственность и регулярность решения обратной задачи. В работе [12] рассматривается волновое уравнение $\square u = k * u$, где $u(x, y, t)$, $(x, y, t) \in \mathbb{R}_+^3$. Исследуется обратная задача определения ядра $k(y, t)$ в интегральном члене этого уравнения. Предполагается, что неизвестное ядро представляет собой тригонометрический многочлен по пространственным переменным с коэффициентами, непрерывными по временной переменной. Доказана теорема о локальном существовании решения, получена оценка устойчивости решения обратной задачи. В работе [13] рассматривается интегродифференциальное уравнение $\square u - qu = k * u$, где $q(x, z)$ — коэффициент, характеризующий свойства среды, в которой распространяется волновой процесс, k — ядро, описывающее память среды, функция u зависит от переменных (x, z, t) . Исследуется обратная задача последовательного определения двух функций: коэффициента $q(x, z)$, характеризующего свойства среды со слабо горизонтальной неоднородностью, и ядра $k(x)$ интегрального оператора, описывающего память среды. Доказаны теоремы однозначной локальной разрешимости поставленных обратных задач. В работе [14] для уравнения $\square u = k * u$, где $u = u(x, z, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $z \in (0, l)$, $t > 0$, рассматривается задача определения ядра $k(x, t)$. Доказывается локальная однозначная разрешимость поставленной задачи в классе функций, непрерывных по одной из переменных и аналитических по другой.

Отметим также цикл работ, связанных с задачами от определения памяти в интегродифференциальных уравнениях вязкоупругости. В работах [15–27] и книге [28] рассматриваются различные постановки одномерных и многомерных обратных задач и исследуются вопросы единственности и устойчивости их решений. Так в работе [15] исследуется обратная задача последовательного нахождения двух неизвестных (одномерного ядра интегрального оператора и двумерной скорости распространения волны) для уравнения вязкоупругости с памятью. В [16] рассматриваются задачи линейной и нелинейной идентификации, связанные с параболическими и гиперболическими интегродифференциальными уравнениями. Приведены результаты существования и единственности «в малом» и некоторые (условные) результаты единственности и устойчивости «в большом». В [17] изучается эволюция смещения u и тем-

пературы θ в трёхмерном линейном термовязкоупругом материале типа Больцмана определяется системой двух связанных интегродифференциальных уравнений Вольтерра. Механизм демпфирования характеризуется некоторыми зависящими от времени ядрами памяти, которые априори неизвестны. Эти ядра идентифицируются с помощью измерений граничных напряжений и локализованных температур, при условии, что пара (u, θ) решает подходящую начальную и граничную задачи для эволюционной системы. В [18] рассматривается обратная задача определения ядра памяти в режиме вязкоупругости, где ядро представлено конечной суммой произведений известных пространственно-зависимых функций и неизвестных функций, зависящих от времени. С помощью метода преобразования Лапласа доказана теорема существования и единственности ядра памяти. В [19] исследуется задача определения ядра Ламе в вязкоупругой системе, связанной с цилиндрической областью, с помощью поперечных измерений. Предполагается, что ядро имеет форму произведения известной функции, зависящей от времени, и неизвестной функции, зависящей от пространства. Доказаны теоремы единственности и устойчивости. В доказательстве использовались оценки типа Карлемана. В [20] рассматривается уравнение вязкоупругости и задача восстановления пространственной части $p(x)$ ядра Лэмба, зависящей от двух пространственных переменных. Получена оценка устойчивости решения этой задачи. В [21] исследуется задача восстановления двух ядер Ламе в вязкоупругой системе. Интегродифференциальная система включает коэффициенты Ламе λ_0 и μ_0 и связанные с ними вязкоупругие коэффициенты λ_1 и μ_1 . Эти последние функции выражаются в терминах неизвестных функций p и q соответственно. Авторы разработали новый подход, требующий всего трёх наблюдений для оценки этих двух неизвестных функций p и q . Авторы доказали единственность пары функций p и q и непрерывную зависимость от граничных условий. В [22] изучается трёхмерная обратная задача вязкоупругости. Показано, что обратная задача сводится к двум задачам интегральной геометрии на семействах геодезических $yp(x, y)$ и $ys(xy)$, для которых было показано, что они имеют единственное устойчивое решение. В [23] исследуется двумерная обратная задача определения пространственной части ядра, входящей в интегральный член уравнения вязкоупругости. Предполагается, что носитель искомой функции принадлежит компактной области Ω . В качестве информации для решения этой обратной задачи используются следы решения прямой задачи Коши и её нормальной производной для некоторого конечного интервала времени на границе Ω . Важной особенностью в постановке задачи является тот факт, что решение прямой задачи соответствует нулевым исходным данным и импульсу силы во времени, локализованному на фиксированной прямой, не пересекающейся с Ω . Основным результатом статьи заключается в получении липшицевой оценки условной устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи. В [24] рассматриваются интегродифференциальные уравнения электродинамики с уравнениями дисперсии и вязкоупругости. Эти уравнения отличаются от обычных уравнений электродинамики и упругости слагаемыми свёртки, которые приводят к зависимости решений этих уравнений от предыстории процесса. Следовательно, они обладают особым типом «памяти». Затем возникают некоторые новые обратные задачи. В работе восстанавливаются ядра интегральных операторов. В [25] изучается интегродифференциальная система уравнений вязкоупругости с источником взрывчатого типа. Предполагается, что коэффициенты уравнений зависят только от одной пространственной переменной. Исследуется задача определения ядра, входящего в интегральные члены уравнений. Доказана теорема о глобальной однозначной разрешимости и получена оценка устойчивости решения обратных задач. В [26] исследуются интегродифференциальные уравнения вязкоупругой пористой среды. Прямая задача заключается в определении y -компонент векторов смещений упругого пористого тела и жидкости при решении начально-краевой задачи для этих уравнений. Предполагается, что ядро, входящее в интегральный член первого уравнения, зависит как от временной, так и от пространственной переменной x . Для его отыскания задаётся дополнительное условие относительно решения прямой задачи при $z = 0$. Обратная задача заменяется эквивалентной системой ин-

тегродифференциальных уравнений для неизвестных функций. К этой системе применяется метод шкал банаховых пространств аналитических функций. Доказана теорема однозначной локальной разрешимости обратной задачи в классе функций, аналитических по переменной x и непрерывных по t . В [27] изучается обратная задача определения функций ядра, которые наилучшим образом описывают механическое поведение сложной среды, моделируемой общим нелокальным вязкоупругим волновым уравнением. Проводится анализ корректности состояния и совместных задач и, используя эти результаты, в трёхмерной постановке проведены численные эксперименты, иллюстрирующие метод решения.

В настоящей работе рассматриваются прямая и обратная задачи для квазилинейного интегродифференциального гиперболического уравнения с постоянной главной частью, квадратичной нелинейностью в младшем члене и свёрточным ядром, представимым в виде произведения функций, зависящих от пространственной и временной переменных. Уравнение рассматривается в полуплоскости $x > 0$, на её границе задаётся условие Дирихле. В разд. 1 ставятся прямая и обратная задачи. В разд. 2 изучается краевая задача с нулевыми начальными данными, устанавливается условие её разрешимости, находится оценка устойчивости решения, устанавливается теорема существования решения. В разд. 3 исследуется обратная задача, выписывается система интегральных уравнений этой задачи, доказывается теорема о существовании локального решения обратной задачи. Все результаты статьи являются новыми. В методическом отношении для исследования обратной задачи выбран метод, сходный с использованным в работах авторов [29, 30].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Прямая задача. Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - q(x)u^2 - \int_0^t K(x, t-s)u(x, s) ds &= 0, \quad x > 0, \quad t \in (0, T], \\ u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} &= f(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

в которых T — положительное число, $q(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $f \in C^3[0, T]$, ядро $K(x, t)$ представимо в виде

$$K(x, t) = p(x)K_0(t), \quad K_0(0) = 1. \quad (2)$$

Здесь $p(x)$ — непрерывная функция, $K_0 \in C^1[0, T]$.

Пусть $G_T = \{(x, t) | 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$. Обозначим решение задачи (1), отвечающее функции $f = f_k(t)$, через $u_k(x, t)$, $k = 1, 2$.

Обратная задача. Пусть задана функция $K_0(t)$ и заданы две функции

$$h_k(t) = \frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad t \in [0, T], \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

соответствующие решениям задачи (1) при $f = f_k(t)$. Требуется найти функции $q(x)$ и $p(x)$ на отрезке $[0, T/2]$ по заданной информации.

Замечание 1. В дальнейшем будем предполагать, что $f_1(0) \neq f_2(0)$.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Так как скорость распространения волн равна единице, то решение задачи (1) удовлетворяет условию

$$u(x, t) = 0, \quad t < x.$$

Обозначим $G_T = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$. Решение уравнения (1) эквивалентно решению интегрального уравнения

$$u(x, t) = f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) u(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau, \quad (x, t) \in G_T. \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть

$$\|q\|_{C[0, T/2]} \leq q_0, \quad \|p\|_{C[0, T/2]} \leq p_0, \quad \|K_0\|_{C[0, T]} \leq K_{00}, \quad \|f\|_{C[0, T]} \leq A, \quad (5)$$

выполнено условие

$$A \leq \frac{1}{e^{CT} - 1},$$

в котором

$$C = \frac{T}{4} \max\{q_0, p_0 K_{00} T\}, \quad (6)$$

и решение уравнения (4) непрерывно в области G_T (существование такого решения будет доказано ниже в теореме 1). Тогда это решение допускает оценку

$$|u(x, t)| \leq \frac{Ae^{Ct}}{1 + A - Ae^{Ct}} \leq \frac{Ae^{CT}}{1 + A - Ae^{CT}} =: \kappa, \quad (x, t) \in G_T. \quad (7)$$

Доказательство. Введём

$$z(t) = \max_{x \in [0, T/2 - |t - T/2|]} |u(x, t)|, \quad t \in [0, T]$$

и выпишем неравенство для $z(t)$. Используя (5), находим, что

$$z(t) \leq A + \frac{T}{4} \int_0^t \left[q_0 z^2(\tau) + p_0 K_{00} \int_0^{\tau} z(s) ds \right] d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

Так как

$$\int_0^t \int_0^{\tau} z(s) ds d\tau = \int_0^t z(s)(t - s) ds \leq T \int_0^t z(\tau) d\tau,$$

то неравенство (8) можно продолжить следующим образом:

$$z(t) \leq A + \frac{T}{4} \int_0^t [q_0 z^2(\tau) + p_0 K_{00} T z(\tau)] d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Следовательно,

$$z(t) \leq A + C \int_0^t (z^2(\tau) + z(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

где постоянная C определена формулой (6).

Обозначим

$$J(t) = A + C \int_0^t (z^2(\tau) + z(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Тогда $z(t) \leq J(t)$ и

$$J'(t) = C(z^2(t) + z(t)) \leq C(J^2(t) + J(t)), \quad J(0) = A, \quad t \in [0, T].$$

Следовательно,

$$\frac{dJ}{J^2 + J} \leq C dt, \quad J(0) = A, \quad t \in [0, T].$$

Интегрируя это неравенство, получаем, что

$$\ln \frac{J(t)(1+A)}{(1+J(t))A} \leq Ct, \quad t \in [0, T].$$

Из этого неравенства находим оценку для $J(t)$:

$$J(t) \leq \frac{Ae^{Ct}}{1 + A - Ae^{Ct}}, \quad t \in [0, T].$$

Так как $z(t) \leq J(t)$, то отсюда следует оценка (7). Лемма 1 доказана. $\square$

Теорема 1. Пусть $q \in C[0, T/2]$, $p \in C[0, T/2]$, а ядро уравнения (1) представимо в виде (2), причём $K_0 \in C[0, T]$. Тогда в области G_T существует единственное непрерывное решение задачи (1).

Доказательство. Пусть $(x, t) \in G_T$, рассмотрим уравнение (4) и определим последовательные приближения $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ следующим образом:

$$u_0(x, t) = f(t - x),$$

$$u_n(x, t) = f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u_{n-1}^2(\xi, \tau) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) u_{n-1}(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau.$$

Очевидно, что все функции $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ являются непрерывными при $(x, t) \in G_T$. Оценим функции $u_n(x, t)$, вводя новую функцию

$$\omega_n(t) = \max_{x \in [0, T/2 - |t - T/2|]} |u_n(x, t)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T].$$

Используя метод математической индукции покажем, что оценка

$$\omega_n(t) \leq \frac{Ae^{Ct}}{1 + A - Ae^{Ct}} \leq \frac{Ae^{CT}}{1 + A - Ae^{CT}} =: \kappa, \quad t \in [0, T] \quad (9)$$

верна для любого $n = 0, 1, 2, \dots$.

Действительно, при $n = 0$ справедливо неравенство

$$\omega_0(t) \leq A \leq \frac{Ae^{Ct}}{1 - A(e^{Ct} - 1)} \leq \frac{Ae^{CT}}{1 - A(e^{CT} - 1)} = \kappa. \quad (10)$$

Оценим $w_1(t)$, используя (10):

$$\omega_1(t) \leq A + C \int_0^t \left[\left(\frac{Ae^{C\tau}}{1 + A - Ae^{C\tau}} \right)^2 + \frac{Ae^{C\tau}}{1 + A - Ae^{C\tau}} \right] d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной $z = e^{C\tau}$. В результате получим

$$\omega_1(t) \leq A + \int_1^{e^{Ct}} \left[\frac{A^2 z}{(1 + A - Az)^2} + \frac{Az}{1 + A - Az} \right] dz, \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{Ct}} \frac{A^2 z}{(1 + A - Az)^2} dz &= \int_1^{e^{Ct}} \frac{-Az d(1 + A - Az)}{(1 + A - Az)^2} = \int_1^{e^{Ct}} Az d\left(\frac{1}{1 + A - Az}\right) \\ &= \frac{Az}{1 + A - Az} \Big|_{z=1}^{z=e^{Ct}} - \int_1^{e^{Ct}} \frac{A dz}{1 + A - Az} = \frac{Ae^{C\tau}}{1 + A - Ae^{C\tau}} - A - \int_1^{e^{Ct}} \frac{A dz}{1 + A - Az}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$\omega_1(t) \leq A + \frac{Ae^{C\tau}}{1 + A - Ae^{C\tau}} - A - \int_1^{e^{Ct}} \frac{A dz}{1 + A - Az} + \int_1^{e^{Ct}} \frac{A dz}{1 + A - Az} = \frac{Ae^{Ct}}{1 + A - Ae^{Ct}}, \quad t \in [0, T].$$

Аналогичные вычисления доказывают справедливость неравенства (9) при любом n .

Покажем, что последовательность $\{u_n(x, t)\}$ сходится равномерно на множестве G_T . Для этого рассмотрим разности

$$\bar{u}_n(x, t) = u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t)$$

и обозначим

$$\bar{\omega}_n(t) = \max_{0 \leq x \leq T/2 - |t - T/2|} |\bar{u}_n(x, t)|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in [0, T].$$

Так как

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u_{n-1}^2(\xi, \tau) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) u_{n-1}(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau, \\ u_{n+1}(x, t) &= f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u_n^2(\xi, \tau) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) u_n(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau \end{aligned}$$

и справедливы равенство

$$u_{n+1}^2(x, t) - u_n^2(x, t) = (u_{n+1}(x, t) - u_n(x, t))(u_{n+1}(x, t) + u_n(x, t)) = \bar{u}_n(x, t)(u_{n+1}(x, t) + u_n(x, t))$$

и оценка

$$|u_{n+1}^2(x, t) - u_n^2(x, t)| \leq |\bar{u}_n(x, t)|(|u_{n+1}(x, t)| + |u_n(x, t)|) \leq 2\kappa|\bar{u}_n(x, t)|,$$

можем написать

$$|\bar{u}_n(x, t)| \leq \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2-|\tau-(t+x)/2|} \left[2\kappa|q(\xi)||\bar{u}_{n-1}(\xi, \tau)| + \int_{\xi}^{\tau} |K(\tau-s)||\bar{u}_{n-1}(\xi, s)| ds \right] d\xi d\tau.$$

Переходя в этом неравенстве к функциям $\bar{w}_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, получим

$$\bar{w}_n(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t \bar{w}_{n-1}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (13)$$

Рассмотрим последовательные приближения

$$u_0(x, t) = f(t - x),$$

$$u_1(x, t) = f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2-|\tau-(t+x)/2|} \left[q(\xi)f^2(\tau - \xi) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s)f(\tau - s) ds \right] d\xi d\tau$$

и разность

$$\bar{u}_0(x, t) = u_1(x, t) - u_0(x, t) = \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2-|\tau-(t+x)/2|} \left[q(\xi)f^2(\tau - \xi) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s)f(\tau - s) ds \right] d\xi d\tau.$$

Переходя к функции $\bar{w}_0(t)$ в силу условия (5), получаем оценку

$$\bar{w}_0(t) \leq C \int_0^t (A + A^2) d\tau \leq C(A + A^2)t. \quad (14)$$

Далее, в силу (13), (14) можем записать неравенства

$$\bar{w}_1(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t C(A + A^2)\tau d\tau = C^2(2\kappa + 1)(A + A^2)\frac{t^2}{2},$$

$$\bar{w}_2(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t C^2(2\kappa + 1)(A + A^2)\frac{\tau^2}{2} d\tau = C^3(2\kappa + 1)^2(A + A^2)\frac{t^3}{3!},$$

$$\bar{w}_3(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t C^3(2\kappa + 1)^2(A + A^2)\frac{\tau^3}{3!} d\tau = C^4(2\kappa + 1)^3(A + A^2)\frac{t^4}{4!}, \dots$$

Продолжая процесс вычислений, устанавливаем оценку

$$\bar{\omega}_n(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t C^3(2\kappa + 1)^2(A + A^2) \frac{\tau^3}{3!} d\tau = \frac{(Ct)^{n+1}}{(n+1)!} (2\kappa + 1)^n (A + A^2), \quad t \in [0, T],$$

справедливую для любых $n = 0, 1, 2, \dots$.

Эта оценка легко доказывается методом математической индукции. Из оценки (14) следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\omega}_n(t)$ при $[0, T]$, что доказывает равномерную сходимость последовательности $u_n(x, t)$ в области G_T . Так как все функции $u_n(x, t)$ непрерывны в области G_T , то предел этой последовательности определяет непрерывную функцию $u(x, t)$, которая является решением уравнения (4). Теорема 1 доказана. $\square$

Лемма 2. В области G_T уравнение (4) имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения уравнения $u_k(x, t)$, $k = 1, 2$, непрерывные и ограниченные в области G_T , ограниченные константой κ . Обозначим $\tilde{u}(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ и определим функцию

$$\varpi(t) = \max_{x \in [0, T/2 - |t - T/2|]} \tilde{u}(x, t), \quad t \in [0, T].$$

В терминах функции $\tilde{u}(x, t)$ уравнение (4) примет вид

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) \tilde{u}(\xi, \tau) (u_1(\xi, \tau) + u_2(\xi, \tau)) + \int_{\xi}^{\tau} K(\tau - s) \tilde{u}(\xi, s) ds \right] d\xi d\tau,$$

для него справедлива оценка

$$|\tilde{u}(x, t)| \leq \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[|q(\xi)| |\tilde{u}(\xi, \tau)| (|u_1(\xi, \tau)| + |u_2(\xi, \tau)|) + \int_{\xi}^{\tau} |K(\tau - s)| |\tilde{u}(\xi, s)| ds \right] d\xi d\tau.$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\varpi(t) \leq C(2\kappa + 1) \int_0^t \varpi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \quad (15)$$

Из неравенства (15) следует, что $\varpi(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Следовательно $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ для всех $(x, t) \in G_T$. Лемма 2 доказана. $\square$

Теорема 2. Пусть $q \in C^1[0, T/2]$, $p \in C[0, T/2]$ и $K_0 \in C^1[0, T]$. Тогда $u \in C^2(G_T)$ и имеет в G_T непрерывную производную u_{xtt} .

Доказательство. Рассмотрим в уравнении (1) интеграл

$$\int_{\xi}^{\tau} K(\xi, \tau - s) u(\xi, s) ds.$$

Запишем его в виде

$$\int_{\xi}^{\tau} K(\xi, \tau - s) u(\xi, s) ds = \int_0^{\tau - \xi} K(\xi, s) u(\xi, \tau - s) ds = p(\xi) \int_0^{\tau - \xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds.$$

Таким образом, уравнение (4) в области G_T принимает вид

$$u(x, t) = f(t - x) + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^t \int_{|t-\tau|}^{(t+x)/2 - |\tau - (t+x)/2|} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau - \xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds \right] d\xi d\tau. \quad (16)$$

Запишем двойной интеграл в (16) виде суммы повторных интегралов:

$$\begin{aligned} u(x, t) = f(t - x) + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau - \xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau - \xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left[q(\xi) u^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau - \xi} K_0(s) u(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau. \quad (17) \end{aligned}$$

Из (17) имеем

$$u(x, x) = f(0) = f_0.$$

Продифференцируем (17) по переменной t . В результате получим

$$\begin{aligned} u_t(x, t) = f'(t - x) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[q(\xi) u^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi \\ - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi) u^2(\xi, t - x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u(\xi, t - x - \xi - s) ds \right] d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi) u^2(\xi, t + x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u(\xi, t + x - \xi - s) ds \right] d\xi. \quad (18) \end{aligned}$$

Продифференцируем (17) по переменной x . В результате получим

$$u_x(x, t) = -f'(t - x) - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \left[q(\xi) u^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi) u^2(\xi, t-x-\xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi) u^2(\xi, t+x-\xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi, \quad (x, t) \in G_T. \quad (19)
\end{aligned}$$

Продифференцируем (18) по переменной t . В результате получим

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x, t) &= f''(t-x) + \frac{f_0^2}{4} \left[q\left(\frac{x+t}{2}\right) - q\left(\frac{t-x}{2}\right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi) u(\xi, t-x+\xi) u_t(\xi, t-x+\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_t(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
&- \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi) u(\xi, t-x-\xi) u_t(\xi, t-x-\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t-x-2\xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_t(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi) u(\xi, t+x-\xi) u_t(\xi, t+x-\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t+x-2\xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_t(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi. \quad (20)
\end{aligned}$$

Продифференцируем (18) по переменной x . В результате получим

$$\begin{aligned}
u_{xt}(x, t) &= -f''(t-x) + \frac{f_0^2}{4} \left[q\left(\frac{t-x}{2}\right) + q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right] \\
&- \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi) u(\xi, t-x+\xi) u_t(\xi, t-x+\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_t(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi) u(\xi, t-x-\xi) u_t(\xi, t-x-\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t-x-2\xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_t(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi) u(\xi, t+x-\xi) u_t(\xi, t+x-\xi) + f_0 p(\xi) K_0(t+x-2\xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_t(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi. \quad (21)
\end{aligned}$$

Продифференцируем (20) по переменной x . Тогда получим

$$\begin{aligned}
u_{xtt}(x, t) = & -f'''(t-x) + \frac{f_0^2}{8} \left[q' \left(\frac{x+t}{2} \right) + q' \left(\frac{t-x}{2} \right) \right] + \frac{f_0}{4} \left[p \left(\frac{t-x}{2} \right) + p \left(\frac{t+x}{2} \right) \right] \\
& + \frac{f_0}{2} \left[q \left(\frac{t+x}{2} \right) u_t \left(\frac{t+x}{2}, \frac{t+x}{2} \right) + q \left(\frac{t-x}{2} \right) u_t \left(\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(u_t^2(\xi, t-x+\xi) + u(\xi, t-x+\xi) u_{tt}(\xi, t-x+\xi) \right) \right. \\
& \left. + f_0 p(\xi) K_0'(t-x) + p(\xi) K_0(t-x) u_t(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_{tt}(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi) \left(u_t^2(\xi, t-x-\xi) + u(\xi, t-x-\xi) u_{tt}(\xi, t-x-\xi) \right) \right. \\
& \left. + f_0 p(\xi) K_0'(t-x-2\xi) + p(\xi) K_0(t-x-2\xi) u_t(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_{tt}(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi) u_t^2(\xi, t+x-\xi) + 2q(\xi) u(\xi, t+x-\xi) u_{tt}(\xi, t+x-\xi) \right. \\
& \left. + f_0 p(\xi) K_0'(t+x-2\xi) + p(\xi) K_0(t+x-2\xi) u_t(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_{tt}(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi.
\end{aligned} \tag{22}$$

Так как $u \in C^2(G_T)$, то из (22) следует непрерывность в G_T функции $u_{xtt}(x, t)$. Теорема 2 доказана. $\square$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Напомним формулировку обратной задачи. Пусть T — заданное положительное число, $K_0(t)$, $h_k(t)$, $f_k(t)$, $k = 1, 2$ — заданные функции при $t \in [0, T]$. Требуется найти функции $q(x)$ и $p(x)$ по заданной информации (3) о решении прямой задачи (1).

Определение. Будем говорить, что функции $(f_k(t), h_k(t)) \in \mathcal{F}(F, H)$, если $f_k \in C^3[0, T]$, $h_k \in C^2[0, T]$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
\|f_k\|_{C^3[0, T]} \leq F, \quad \|h_k\|_{C^2[0, T]} \leq H, \quad f_k(0) \neq 0, \quad h_k(0) = -f_k'(0), \quad k = 1, 2; \\
f_{10} = f_1(0) \neq f_{20} = f_2(0), \quad \frac{h_1'(0) + f_1''(0)}{f_{10}^2} = \frac{h_2'(0) + f_2''(0)}{f_{20}^2}.
\end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $K_0 \in C^1[0, T]$, функции $(f_k(t), h_k(t)) \in \mathcal{F}(F, H)$, $k = 1, 2$. Тогда существует положительное число T_0 и единственные функции $q(x) \in C^1[0, T_0]$ и $p(x) \in C[0, T_0]$ такие, что решение задачи (1) удовлетворяет условию (3) для $t \leq T_0$.

Доказательство. Пусть функции $u_k(x, t)$, $k = 1, 2$ являются решениями задачи (1) при $f(t) = f_k(t)$. Для удобства записи введём обозначения

$$v_k(x, t) = \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t}, \quad w_k(x, t) = \frac{\partial^2 u_k(x, t)}{\partial t^2}, \quad u_{k0}(x, t) = f_k(t - x), \quad v_{k0}(x, t) = f'_k(t - x).$$

Тогда из уравнений (17), (18)–(22) следуют при $k = 1, 2$ соотношения

$$\begin{aligned} u_k(x, t) = & u_{k0}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} v_k(x, t) = & v_{k0}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t - x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t + x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right] d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u_{kx}(x, t) = & -f'_k(t - x) - \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t - x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi) u_k^2(\xi, t + x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad (x, t) \in G_T. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
w_k(x, t) = & f_k''(t-x) + \frac{f_{k0}^2}{4} \left[q\left(\frac{x+t}{2}\right) - q\left(\frac{t-x}{2}\right) \right] \\
& + \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x+\xi)v_k(\xi, t-x+\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
& - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x-\xi)v_k(\xi, t-x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t+x-\xi)v_k(\xi, t+x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t+x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi. \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{kx}(x, t) = & -f_k''(t-x) + \frac{f_{k0}^2}{4} \left[q\left(\frac{t-x}{2}\right) + q\left(\frac{x+t}{2}\right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x+\xi)v_k(\xi, t-x+\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x-\xi)v_k(\xi, t-x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t+x-\xi)v_k(\xi, t+x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t+x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi. \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{kx}(x, t) = & -f_k'''(t-x) + \frac{f_{k0}^2}{8} \left[q'\left(\frac{x+t}{2}\right) + q'\left(\frac{t-x}{2}\right) \right] + \frac{f_{k0}}{4} \left[p\left(\frac{t-x}{2}\right) + p\left(\frac{t+x}{2}\right) \right] \\
& + \frac{f_{k0}}{2} \left[q\left(\frac{t+x}{2}\right)v_k\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t+x}{2}\right) + q\left(\frac{t-x}{2}\right)v_k\left(\frac{t-x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, t-x+\xi) + u_k(\xi, t-x+\xi) w_k(\xi, t-x+\xi) \right) \right. \\
& + f_{k0} p(\xi) K_0'(t-x) + p(\xi) K_0(t-x) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) w_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \left. \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, t-x-\xi) + u_k(\xi, t-x-\xi) w_k(\xi, t-x-\xi) \right) \right. \\
& + f_{k0} p(\xi) K_0'(t-x-2\xi) + p(\xi) K_0(t-x-2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \left. \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi) v_k^2(\xi, t+x-\xi) + 2q(\xi) u_k(\xi, t+x-\xi) w_k(\xi, t+x-\xi) \right. \\
& + f_{k0} p(\xi) K_0'(t+x-2\xi) + p(\xi) K_0(t+x-2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \left. \right] d\xi.
\end{aligned} \tag{28}$$

Из уравнений (25), (27) при $x = 0$, $t = 0$ получим

$$h_k(0) = -f'_k(0), \quad k = 1, 2,$$

$$q_0 = q(0) = \frac{2}{f_{10}^2} [h'_1(0) + f''_1(0)] = \frac{2}{f_{20}^2} [h'_2(0) + f''_2(0)],$$

а из уравнения (28) при $x = 0$ следуют равенства

$$\begin{aligned}
h''_k(t) &= -f'''_k(t) + \frac{f_{k0}^2}{4} q' \left(\frac{t}{2} \right) + \frac{f_{k0}}{2} p \left(\frac{t}{2} \right) + f_{k0} q \left(\frac{t}{2} \right) v_k \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right) \\
&+ \int_0^{t/2} \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, t-\xi) + u_k(\xi, t-\xi) w_k(\xi, t-\xi) \right) + f_{k0} p(\xi) K_0'(t-2\xi) + p(\xi) K_0(t-2\xi) v_k(\xi, \xi) \right. \\
&\quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, t-\xi-s) ds \right] d\xi, \quad k = 1, 2. \tag{29}
\end{aligned}$$

Введём в рассмотрение функцию $\sigma(x) = q'(x)$. Тогда

$$q(x) = q_0 + \int_0^x \sigma(\xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2]. \tag{30}$$

Используя формулу (24), выпишем уравнение для определения $v_k(x, x)$. Замечая, что $v_{0k}(x, x) = f'_k(0)$, находим, что

$$v_k(x, x) = f_{k0} + \frac{1}{2} \int_0^x q(\xi) u_k^2(\xi, \xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2], \quad k = 1, 2. \tag{31}$$

Положим в равенстве (29) $t = 2x$ и во внеинтегральном члене заменим $q(x)$ на правую часть равенства (30), а $v_k(x, x)$ на правую часть равенства (31). Рассматривая полученные равенства как систему из двух уравнений найдём из неё уравнения для функций $\sigma(x)$ и $p(x)$. Эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma(x) = & \sigma_0(x) + \lambda_{10} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(\mu_{1k} + \nu_{1k} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi \right) \int_0^x q(\xi) u_k^2(\xi, \xi) d\xi \\ & + \sum_{k=1}^2 \lambda_{1k} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x - \xi) + u_k(\xi, 2x - \xi) w_k(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\ & \left. + f_{k0} p(\xi) K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi) K_0(2x - 2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) = & p_0(x) + \lambda_{20} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(\mu_{2k} + \nu_{2k} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi \right) \int_0^x q(\xi) u_k^2(\xi, \xi) d\xi \\ & + \sum_{k=1}^2 \lambda_{2k} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x - \xi) + u_k(\xi, 2x - \xi) w_k(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\ & \left. + f_{k0} p(\xi) K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi) K_0(2x - 2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad (33) \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} \sigma_0(x) &:= \frac{4}{f_{10} - f_{20}} \left[\frac{h_1''(2x) + f_1'''(2x)}{f_{10}} - \frac{h_2''(2x) + f_2'''(2x)}{f_{20}} \right] - 4q_0, \\ \lambda_{10} &:= -4, \quad \lambda_{11} := -\frac{4}{f_{10}(f_{10} - f_{20})}, \quad \lambda_{12} := \frac{4}{f_{20}(f_{10} - f_{20})}, \\ \mu_{11} &:= -\frac{2q_0}{f_{10} - f_{20}}, \quad \mu_{12} := \frac{2q_0}{f_{10} - f_{20}}, \quad \nu_{11} := -\frac{2}{f_{10} - f_{20}}, \quad \nu_{12} := \frac{2}{f_{10} - f_{20}}; \\ p_0(x) &:= \frac{2}{f_{10} - f_{20}} \left[\frac{f_{10}}{f_{20}} [h_2''(2x) + f_2'''(2x)] - \frac{f_{20}}{f_{10}} [h_1''(2x) + f_1'''(2x)] \right], \\ \lambda_{20} &:= 0, \quad \lambda_{21} := -\frac{2f_{10}}{f_{20}(f_{10} - f_{20})}, \quad \lambda_{22} := \frac{2f_{20}}{f_{10}(f_{10} - f_{20})}, \\ \mu_{21} &:= -\frac{q_0 f_{10}}{f_{10} - f_{20}}, \quad \mu_{22} := \frac{q_0 f_{20}}{f_{10} - f_{20}}, \quad \nu_{21} := -\frac{f_{10}}{f_{10} - f_{20}}, \quad \nu_{22} := \frac{f_{20}}{f_{10} - f_{20}}. \end{aligned}$$

Уравнения (23), (24), (26), (30), (32) и (33) образуют замкнутую систему нелинейных интегральных уравнений обратной задачи. Для дальнейшего перепишем уравнение (26) в другой более удобной форме, используя для внеинтегральных членов связанных с функцией q , формулу (30). В результате получим уравнение

$$w_k(x, t) = w_{k0}(x, t) - \frac{f_{k0}^2}{4} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} \sigma(\xi) d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x+\xi)v_k(\xi, t-x+\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \right] d\xi \\
& - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t-x-\xi)v_k(\xi, t-x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \right] d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t+x-\xi)v_k(\xi, t+x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t+x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \right] d\xi, \quad k = 1, 2, \quad (34)
\end{aligned}$$

в котором

$$w_{k0}(x, t) = f_k''(t - x).$$

Определим вектор-функции

$$\mathbf{g} = (q, \sigma, p, u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2), \quad \mathbf{g}^0 = (q_0, \sigma_0, p_0, u_1^0, u_2^0, v_1^0, v_2^0, w_1^0, w_2^0)$$

и запишем уравнения (23), (24), (30), (32), (33) и (34), в виде операторного уравнения

$$\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{g}, \quad (35)$$

где оператор $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9)$ определяется следующим образом:

$$A_1\mathbf{g}(x) = q_0 + \int_0^x \sigma(\xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2]. \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
A_2\mathbf{g}(x) = & \sigma_0(x) + \lambda_{10} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(\mu_{1k} + \nu_{1k} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi \right) \int_0^x q(\xi)u_k^2(\xi, \xi) d\xi \\
& + \sum_{k=1}^2 \lambda_{1k} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x-\xi) + u_k(\xi, 2x-\xi)w_k(\xi, 2x-\xi) \right) \right. \\
& \left. + f_{k0}p(\xi)K_0'(2x-2\xi) + p(\xi)K_0(2x-2\xi)v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s)w_k(\xi, 2x-\xi-s) ds \right] d\xi; \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3\mathbf{g}(x) = & p_0(x) + \lambda_{20} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(\mu_{2k} + \nu_{2k} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi \right) \int_0^x q(\xi)u_k^2(\xi, \xi) d\xi \\
& + \sum_{k=1}^2 \lambda_{2k} \int_0^x \left[2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x-\xi) + u_k(\xi, 2x-\xi)w_k(\xi, 2x-\xi) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$+ f_{k0}p(\xi)K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi)K_0(2x - 2\xi)v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s)w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \Big] d\xi; \quad (38)$$

$$\begin{aligned} A_{3+k}\mathbf{g}(x, t) = & u_{k0}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s)u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s)u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s)u_k(\xi, \tau - s) ds \right] d\tau, \quad k = 1, 2; \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{5+k}\mathbf{g}(x, t) = & v_{k0}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^x \left[q(\xi)u_k^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)u_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, t - x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)u_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[q(\xi)u_k^2(\xi, t + x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)u_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad k = 1, 2; \quad (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{7+k}\mathbf{g}(x, t) = & w_{k0}(x, t) - \frac{f_{k0}^2}{4} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} \sigma(\xi) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x \left[2q(\xi)u_k(\xi, t - x + \xi)v_k(\xi, t - x + \xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t - x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right] d\xi \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t - x - \xi)v_k(\xi, t - x - \xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t - x - 2\xi) \right. \\ & \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right] d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left[2q(\xi)u_k(\xi, t + x - \xi)v_k(\xi, t + x - \xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t + x - 2\xi) \right. \\ & \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right] d\xi, \quad k = 1, 2. \quad (41) \end{aligned}$$

Пусть при некотором $\gamma_0 > 0$ выполнены неравенства

$$\|g_k^0\|_{C[0, T/2]} \leq \gamma_0/2, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \|g_k^0\|_{C(G(T))} \leq \gamma_0/2, \quad k = \overline{4, 9}.$$

Обозначим через

$$\mathbf{C}(G(T)) = C[0, T/2] \times C[0, T/2] \times C[0, T/2] \times \\ \times C(G(T)) \times C(G(T)) \times C(G(T)) \times C(G(T)) \times C(G(T)) \times C(G(T))$$

банахово пространство непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G(T))} = \max \left\{ \max_{1 \leq k \leq 3} \|g_k\|_{C[0, T/2]}, \max_{4 \leq k \leq 9} \|g_k\|_{C(G(T))} \right\}.$$

Так как $\mathbf{g}^0 \in \mathbf{C}(G(T))$, то все вектор-функции, определённые в (35), являются элементами $\mathbf{C}(G(T))$. Рассмотрим в $\mathbf{C}(G(T))$ замкнутое множество

$$\mathbf{R}_T := \left\{ \mathbf{g} \in \mathbf{C}(G(T)) \mid \|g_k - g_k^0\|_{C[0, T/2]} \leq \frac{\gamma_0}{2}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \|g_k - g_k^0\|_{C(G(T))} \leq \frac{\gamma_0}{2}, \quad k = \overline{4, 9} \right\},$$

на этом множестве справедливы оценки

$$\|g_k\|_{C[0, T/2]} \leq \gamma_0, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \|g_k\|_{C(G(T))} \leq \gamma_0, \quad k = \overline{4, 9}. \quad (42)$$

Положим

$$\|K_0\|_{C^1[0, T]} \leq \tilde{K}_0.$$

Из (36) запишем оценку для $|A_1 \mathbf{g} - g_1^0|$:

$$|A_1 \mathbf{g} - g_1^0| \leq \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi \leq \frac{T}{2} \gamma_0 = \frac{T}{2} \gamma_0 C_1(T), \quad x \in [0, T/2], \quad C_1(T) =: C_1 = 1. \quad (43)$$

Используя (37)–(41), выпишем оценки для $|A_k \mathbf{g} - g_k^0|$, $k = \overline{2, 9}$:

$$\begin{aligned} |A_2 \mathbf{g} - g_2^0| &\leq |\lambda_{10}| \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{1k}| + |\nu_{1k}| \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi \right) \int_0^x |q(\xi) u_k^2(\xi, \xi)| d\xi \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 |\lambda_{1k}| \int_0^x \left| 2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x - \xi) + u_k(\xi, 2x - \xi) w_k(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\ &\quad \left. + f_{k0} p(\xi) K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi) K_0(2x - 2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \right| d\xi \\ &\leq \frac{T}{2} \gamma_0 \left\{ \underbrace{|\lambda_{10}| + \sum_{k=1}^2 (|\mu_{1k}| + |\nu_{1k}|) \gamma_0^2 + \sum_{k=1}^2 |\lambda_{1k}| \left[4\gamma_0^2 + \tilde{K}_0(|f_{k0}| + \gamma_0 + T\gamma_0^2) \right]}_{=: C_2(T)} \right\}. \quad (44) \end{aligned}$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned}
|A_3 \mathbf{g} - g_3^0| &\leq |\lambda_{20}| \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi + \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{2k}| + |\nu_{2k}| \int_0^x |\sigma(\xi)| d\xi \right) \int_0^x |q(\xi) u_k^2(\xi, \xi)| d\xi \\
&\quad + \sum_{k=1}^2 |\lambda_{2k}| \int_0^x \left| 2q(\xi) \left(v_k^2(\xi, 2x - \xi) + u_k(\xi, 2x - \xi) w_k(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\
&\quad \left. + f_{k0} p(\xi) K_0'(2x - 2\xi) + p(\xi) K_0(2x - 2\xi) v_k(\xi, \xi) + p(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k(\xi, 2x - \xi - s) ds \right| d\xi \\
&\leq \underbrace{\frac{T}{2} \gamma_0 \left\{ |\lambda_{20}| + \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{2k}| + |\nu_{2k}| \frac{T}{2} \gamma_0 \right) \gamma_0^2 + \sum_{k=1}^2 |\lambda_{2k}| (4\gamma_0^2 + \tilde{K}_0 [f_{k0} \gamma_0^3 + T \gamma_0^2]) \right\}}_{=: C_3(T)}; \quad (45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{3+k} \mathbf{g} - g_{3+k}^0| &\leq \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, \tau) + p(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k(\xi, \tau - s) ds \right| d\tau \\
&\leq \frac{3T^2}{8} \gamma_0 \left[\gamma_0^2 + \frac{T}{2} \tilde{K}_0 \gamma_0 \right] = \frac{T}{2} \gamma_0 \underbrace{\left[\gamma_0^2 + \frac{T}{2} \tilde{K}_0 \gamma_0 \right] \frac{3T}{4}}_{=: C_{3+k}(T)}, \quad k = 1, 2; \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{5+k} \mathbf{g} - g_{5+k}^0| &\leq \frac{1}{2} \int_0^x \left| q(\xi) u_k^2(\xi, t - x + \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) u_k(\xi, t - x + \xi - s) ds \right| d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, t - x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t - x - \xi - s) ds \right| d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left| q(\xi) u_k^2(\xi, t + x - \xi) + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_k(\xi, t + x - \xi - s) ds \right| d\xi \\
&\leq \frac{3T}{4} \left[\gamma_0^3 + \frac{T}{2} \tilde{K}_0 \gamma_0^2 \right] = \frac{T}{2} \gamma_0 \underbrace{\frac{3}{2} \left[\gamma_0^3 + \frac{T}{2} \tilde{K}_0 \gamma_0^2 \right]}_{=: C_{5+k}(T)}, \quad k = 1, 2; \quad (47)
\end{aligned}$$

$$|A_{7+k} \mathbf{g} - g_{7+k}^0| \leq \frac{f_{k0}^2}{4} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} |\sigma(\xi)| d\xi$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^x \left| 2q(\xi)u_k(\xi, t-x+\xi)v_k(\xi, t-x+\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x) + p(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k(\xi, t-x+\xi-s) ds \right| d\xi \\
& - \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left| 2q(\xi)u_k(\xi, t-x-\xi)v_k(\xi, t-x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t-x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t-x-\xi-s) ds \right| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left| 2q(\xi)u_k(\xi, t+x-\xi)v_k(\xi, t+x-\xi) + f_{k0}p(\xi)K_0(t+x-2\xi) \right. \\
& \quad \left. + p(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k(\xi, t+x-\xi-s) ds \right| d\xi \\
& \leq \frac{f_{k0}^2}{4} \frac{T}{2} \gamma_0 + \frac{3T}{2} \left[2\gamma_1^0 \gamma_0^3 + \tilde{K}_0 \left(|f_{k0}| \gamma_0 + \frac{T}{2} \gamma_0^2 \right) \right] \\
& = \frac{T}{2} \gamma_0 \underbrace{\left[\frac{f_{k0}^2}{4} + 3 \left[2\gamma_0^2 + \tilde{K}_0 \left(|f_{k0}| + \frac{T}{2} \gamma_0 \right) \right] \right]}_{=: C_{7+k}(T)}, \quad k = 1, 2. \quad (48)
\end{aligned}$$

Используя равенства (43)–(48), определим T'_0 следующим образом:

$$T'_0 = \min \left\{ 1, \frac{1}{C_k(1)}, \quad k = \overline{2, 9} \right\}.$$

Тогда выполняются неравенства

$$\|A_k \mathbf{g} - g_k^0\|_{C[0, T'_0/2]} \leq \frac{\gamma_0}{2}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \|A_k \mathbf{g} - g_k^0\|_{C(G(T'_0))} \leq \frac{\gamma_0}{2}, \quad k = \overline{4, 9}.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ отображает $\mathbf{R}_T$ в себя.

Покажем, что оператор $\hat{\mathbf{A}}$, определённый равенствами (36)–(41), является сжимающим при достаточно малом $T > 0$.

Пусть

$$\mathbf{g}^1 := (q^1, \sigma^1, p^1, u_{3+k}^1, v_{5+k}^1, w_{7+k}^1), \quad \mathbf{g}^2 := (q^2, \sigma^2, p^2, u_{3+k}^2, v_{5+k}^2, w_{7+k}^2), \quad k = 1, 2.$$

Заметим, что для разности $\varphi_1^2(x, t) - \varphi_2^2(x, t)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\varphi_1^2(x, t) - \varphi_2^2(x, t) &= (\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t)) R_2(\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)), \\
R_2(\varphi_1(x, t), \varphi_2(x, t)) &= 2 \int_0^1 [\varphi_1(x, t) s' + \varphi_2(x, t) (1 - s')] ds', \quad (49)
\end{aligned}$$

поэтому в силу (42), (49) можем написать

$$\begin{aligned}
& |R_2(u_k^1(x, t), u_k^2(x, t))| \leq 2\gamma_0, \quad k = 1, 2, \\
& |R_2(v_k^1(x, t), v_k^2(x, t))| \leq 2\gamma_0, \quad k = 1, 2, \\
& |(u_k^1(x, t))^2 - (u_k^2(x, t))^2| \leq 2\gamma_0 |u_k^1(x, t) - u_k^2(x, t)|, \quad k = 1, 2, \\
& |(v_k^1(x, t))^2 - (v_k^2(x, t))^2| \leq 2\gamma_0 |v_k^1(x, t) - v_k^2(x, t)|, \quad k = 1, 2. \quad (50)
\end{aligned}$$

Воспользуемся равенствами (36)–(41), (49), (50) и оценим разности $|\hat{A}_k \mathbf{g}^1 - \hat{A}_k \mathbf{g}^2|$, $k = \overline{1, 9}$:

$$\begin{aligned}
|A_1 \mathbf{g}^1 - A_1 \mathbf{g}^2| &\leq \int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \\
&\leq \frac{T}{2} \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} = TC'_1(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}, \quad C'_1(T) =: C'_1 = 1/2. \\
|A_2 \mathbf{g}^1 - A_2 \mathbf{g}^2| &\leq |\lambda_{10}| \int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \\
&+ \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{1k}| \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \xi))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \xi) - u_k^2(\xi, \xi)) R_2(u_k^1(\xi, \xi), u_k^2(\xi, \xi)) \right| d\xi \right. \\
&\quad \left. + |\nu_{1k}| \left[\int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \int_0^x |q^1(\xi)| (u_k^1(\xi, \xi))^2 d\xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^x \sigma^2(\xi) d\xi \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \xi))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \xi) - u_k^2(\xi, \xi)) R_2(u_k^1(x, t), u_k^2(x, t)) \right| d\xi \right] \right. \\
&\quad \left. + |\lambda_{1k}| \int_0^x \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi)) \left((v_k^1(\xi, 2x - \xi))^2 + u_k^1(\xi, 2x - \xi) w_k^1(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2q^2(\xi) \left((v_k^1(\xi, 2x - \xi) - v_k^2(\xi, 2x - \xi)) R_2(v_k^1(\xi, 2x - \xi), v_k^2(\xi, 2x - \xi)) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (u_k^1(\xi, 2x - \xi) - u_k^2(\xi, 2x - \xi)) w_k^1(\xi, 2x - \xi) + u_k^2(\xi, 2x - \xi) (w_k^1(\xi, 2x - \xi) - w_k^2(\xi, 2x - \xi)) \right) \right. \\
&\quad \left. + f_{k0} K'_0(2x - 2\xi) (p^1(\xi) - p^2(\xi)) + K_0(2x - 2\xi) \left((p^1(\xi) - p^2(\xi)) v_k^1(\xi, \xi) + p^2(\xi) (v_k^1(\xi, \xi) - v_k^2(\xi, \xi)) \right) \right. \\
&\quad \left. + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k^1(\xi, 2x - \xi - s) ds \right. \\
&\quad \left. + p^2(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) (w_k^1(\xi, 2x - \xi - s) - w_k^2(\xi, 2x - \xi - s)) ds \right| d\xi \Bigg) \\
&\leq \frac{1}{2} \left\{ |\lambda_{10}| + \sum_{k=1}^2 \left[|\mu_{1k}| \gamma_0^3 + 2\gamma_0^2 \right] + |\nu_{1k}| (T\gamma_0^3 + 3\gamma_0^3) + |\lambda_{1k}| [5\gamma_0^2 + 2\gamma_0] \right. \\
&\quad \left. + \tilde{K}_0(|f_{k0}| + 2\gamma_0 + T\gamma_0) \right\} T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} = TC'_2(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}; \\
|A_3 \mathbf{g}^1 - A_3 \mathbf{g}^2| &\leq |\lambda_{20}| \int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \\
&+ \sum_{k=1}^2 \left(|\mu_{2k}| \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \xi))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \xi) - u_k^2(\xi, \xi)) R_2(u_k^1(\xi, \xi), u_k^2(\xi, \xi)) \right| d\xi \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |\nu_{2k}| \left[\int_0^x |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi \int_0^x |q^1(\xi)| (u_k^1(\xi, \xi))^2 d\xi \right. \\
& + \left. \int_0^x \sigma^2(\xi) d\xi \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \xi))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \xi) - u_k^2(\xi, \xi)) R_2(u_k^1(x, t), u_k^2(x, t)) \right| d\xi \right] \\
& + |\lambda_{2k}| \int_0^x \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi)) \left((v_k^1(\xi, 2x - \xi))^2 + u_k^1(\xi, 2x - \xi) w_k^1(\xi, 2x - \xi) \right) \right. \\
& + 2q^2(\xi) \left((v_k^1(\xi, 2x - \xi) - v_k^2(\xi, 2x - \xi)) R_2(v_k^1(\xi, 2x - \xi), v_k^2(\xi, 2x - \xi)) \right. \\
& + \left. (u_k^1(\xi, 2x - \xi) - u_k^2(\xi, 2x - \xi)) w_k^1(\xi, 2x - \xi) + u_k^2(\xi, 2x - \xi) (w_k^1(\xi, 2x - \xi) - w_k^2(\xi, 2x - \xi)) \right) \\
& + f_{k0} K_0'(2x - 2\xi) (p^1(\xi) - p^2(\xi)) + K_0(2x - 2\xi) \left((p^1(\xi) - p^2(\xi)) v_k^1(\xi, \xi) + p^2(\xi) (v_k^1(\xi, \xi) - v_k^2(\xi, \xi)) \right) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) w_k^1(\xi, 2x - \xi - s) ds \\
& + \left. p^2(\xi) \int_0^{2x-2\xi} K_0(s) (w_k^1(\xi, 2x - \xi - s) - w_k^2(\xi, 2x - \xi - s)) ds \right| d\xi \Bigg) \\
& \leq \frac{1}{2} \left\{ |\lambda_{20}| + \sum_{k=1}^2 \left[|\mu_{2k}| 3\gamma_0^2 + |\nu_{2k}| 2T\gamma_0^3 + |\lambda_{2k}| [12\gamma_0^2 + \tilde{K}_0(f_{k0} + 2\gamma_0 + T\gamma_0)] \right] \right\} T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{\mathbf{C}(G(T))} \\
& = TC_3'(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{\mathbf{C}(G(T))};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_{3+k}\mathbf{g}^1 - A_{3+k}\mathbf{g}^2| & \leq \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \tau))^2 \right. \\
& + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \tau) - u_k^2(\xi, \tau)) R_2(u_k^1(\xi, \tau), u_k^2(\xi, \tau)) + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, \tau - s) ds \\
& + \left. p^2(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, \tau - s) - u_k^2(\xi, \tau - s)) ds \right| d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^x d\xi \int_{\xi}^{t-x+\xi} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \tau))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \tau) - u_k^2(\xi, \tau)) R_2(u_k^1(\xi, \tau), u_k^2(\xi, \tau)) \right. \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, \tau - s) ds + \left. p^2(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, \tau - s) - u_k^2(\xi, \tau - s)) ds \right| d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} d\xi \int_{\xi}^{t+x-\xi} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, \tau))^2 + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, \tau) - u_k^2(\xi, \tau)) R_2(u_k^1(\xi, \tau), u_k^2(\xi, \tau)) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, \tau - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{\tau-\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, \tau - s) - u_k^2(\xi, \tau - s)) ds \Big| d\tau \\
& \leq \frac{3T}{8} (3\gamma_0^2 + \tilde{K}_0 T \gamma_0) T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} = TC'_{3+k}(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}, \quad k = 1, 2; \\
& |A_{5+k}\mathbf{g}^1 - A_{5+k}\mathbf{g}^2 v| \leq \frac{1}{2} \int_0^x \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, t - x + \xi))^2 \right. \\
& + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, t - x + \xi) - u_k^2(\xi, t - x + \xi)) R_2(u_k^1(\xi, t - x + \xi), u_k^2(\xi, t - x + \xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t-x} K_0(s) u_k^1(\xi, t - x + \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s) (u_k^1(\xi, t - x + \xi - s) - u_k^2(\xi, t - x + \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, t - x - \xi))^2 \right. \\
& + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, t - x - \xi) - u_k^2(\xi, t - x - \xi)) R_2(u_k^1(\xi, t - x - \xi), u_k^2(\xi, t - x - \xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, t - x - \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, t - x - \xi - s) - u_k^2(\xi, t - x - \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left| (q^1(\xi) - q^2(\xi)) (u_k^1(\xi, t + x - \xi))^2 \right. \\
& + q^2(\xi) (u_k^1(\xi, t + x - \xi) - u_k^2(\xi, t + x - \xi)) R_2(u_k^1(\xi, t + x - \xi), u_k^2(\xi, t + x - \xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) u_k^1(\xi, t + x - \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s) (u_k^1(\xi, t + x - \xi - s) - u_k^2(\xi, t + x - \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& \leq \frac{3}{4} (3\gamma_0^2 + \tilde{K}_0 T \gamma_0) T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} = TC'_{5+k}(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}, \quad k = 1, 2; \\
& |A_{7+k}\mathbf{g}^1 - A_{7+k}\mathbf{g}^2| \leq \frac{f_{k0}^2}{4} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} |\sigma^1(\xi) - \sigma^2(\xi)| d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^x \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi))u_k^1(\xi, t - x + \xi)v_k^1(\xi, t - x + \xi) \right. \\
& + 2q^2(\xi)(u_k^1(\xi, t - x + \xi) - u_k^2(\xi, t - x + \xi))v_k^1(\xi, t - x + \xi) \\
& + 2q^2(\xi)u_k^2(\xi, t - x + \xi)(v_k^1(\xi, t - x + \xi) - v_k^2(\xi, t - x + \xi)) + f_{k0}K_0(t - x)(p^1(\xi) - p^2(\xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t-x} K_0(s)v_k^1(\xi, t - x + \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t-x} K_0(s)(v_k^1(\xi, t - x + \xi - s) - v_k^2(\xi, t - x + \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x)/2} \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi))u_k^1(\xi, t - x - \xi)v_k^1(\xi, t - x - \xi) \right. \\
& + 2q^2(\xi)(u_k^1(\xi, t - x - \xi) - u_k^2(\xi, t - x - \xi))v_k^1(\xi, t - x - \xi) \\
& + 2q^2(\xi)u_k^2(\xi, t - x - \xi)(v_k^1(\xi, t - x - \xi) - v_k^2(\xi, t - x - \xi)) + f_{k0}K_0(t - x - 2\xi)(p^1(\xi) - p^2(\xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)v_k^1(\xi, t - x - \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t-x-2\xi} K_0(s)(v_k^1(\xi, t - x - \xi - s) - v_k^2(\xi, t - x - \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& + \frac{1}{2} \int_x^{(x+t)/2} \left| 2(q^1(\xi) - q^2(\xi))u_k^1(\xi, t + x - \xi)v_k^1(\xi, t + x - \xi) \right. \\
& + 2q^2(\xi)(u_k^1(\xi, t + x - \xi) - u_k^2(\xi, t + x - \xi))v_k^1(\xi, t + x - \xi) \\
& + 2q^2(\xi)u_k^2(\xi, t + x - \xi)(v_k^1(\xi, t + x - \xi) - v_k^2(\xi, t + x - \xi)) + f_{k0}K_0(t + x - 2\xi)(p^1(\xi) - p^2(\xi)) \\
& + (p^1(\xi) - p^2(\xi)) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)v_k^1(\xi, t + x - \xi - s) ds \\
& + p^2(\xi) \int_0^{t+x-2\xi} K_0(s)(v_k^1(\xi, t + x - \xi - s) - v_k^2(\xi, t + x - \xi - s)) ds \Big| d\xi \\
& \leq \frac{1}{4} \left(\frac{f_{k0}^2}{2} + 6\gamma_0^2 + \tilde{K}_0(|f_{k0}| + T\gamma_0) \right) T \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))} \\
& = TC'_{7+k}(T) \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T))}, \quad k = 1, 2.
\end{aligned}$$

Пусть $\rho \in (0, 1)$. Выберем T_0'' из условия

$$T_0'' = \min \left\{ T_0', \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{C'_k(1/2)} \quad \text{при} \quad k = \overline{2, 9} \right\},$$

тогда

$$\|\mathbf{A}\mathbf{g}^1 - \mathbf{A}\mathbf{g}^2\|_{C(G(T_0''))} \leq \rho \|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\|_{C(G(T_0''))}.$$

Таким образом, $\mathbf{A}$ является сжимающим отображением на множестве $\mathbf{R}_{T_0}$, где

$T_0 = \min \{T'_0, T''_0\}$. В силу принципа сжимающих отображений на $\mathbf{R}_{T_0}$ существует единственное решение операторного уравнения (48). Теорема 3 доказана. $\square$

Замечание 2. Доказательство устойчивости обратной задачи проводится аналогично доказательству, приведённому в работе [30].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fino A.Z. Critical exponent for damped wave equations with nonlinear memory // Nonlinear Anal. 2011. V. 74, N 16. P. 5495–5505.
2. Liang F., Gao H. Global existence and blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with memory // J. Inequal. Appl. 2012. Article 33; DOI: 10.1186/1029-242X-2012-33
3. D'Abbicco M. A wave equation with structural damping and nonlinear memory // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2014. V. 21. P. 751–773; DOI: 10.1007/s00030-014-0265-2
4. D'Abbicco M., Lucente S. The beam equation with nonlinear memory // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, N 3. P. 1–18; DOI: 10.1007/s00033-016-0655-x
5. Raposo C.A., Cattai A.P., Ribeiro J.O. Global solution and asymptotic behaviour for a wave equation type p-Laplacian with memory // Open J. Math. Anal. 2018. V. 2, N 2. P. 156–171; DOI: 10.30538/psrp-oma2018.0025
6. Boulaaras S., Kamache F., Bouizem Y., Guefaia R. General decay and blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with memory and fractional boundary damping terms // Bound. Value Probl. 2020. Article 172; DOI: 10.1186/s13661-020-01470-w
7. Kirane M., Fino A. Z., Alsaedi A., Ahmad B. Global existence for time-dependent damped wave equations with nonlinear memory // Adv. Nonlinear Anal. 2023. V. 12. Article 20230111; DOI: 10.1515/anona-2023-0111
8. Романов В.Г. Обратная задача для интегродифференциального уравнения, содержащего параметр // Докл. АН. 1996. Т. 350, № 5. С. 592–594.
9. Bukhgeim A.L., Dyatlov G.V. Inverse problems for equations with memory // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 1, N 2. P. 1–17; DOI: 10.1201/9780429187841-2
10. Seliga L., Slodička M. An inverse source problem for a damped wave equation with memory // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 24, N 2; DOI: 10.1515/jiip-2014-0026
11. Slodička M., Seliga L. Determination of a time-dependent convolution kernel in a non-linear hyperbolic equation // Inverse Probl. Sci. Engrg. 2015. V. 24, N 6. P. 1–19; DOI: 10.1080/17415977.2015.1101762
12. Durdiev U.D. A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2019. V. 7, N 2. P. 4–19; DOI: 10.32523/2306-6172-2019-7-2-4-19
13. Ахматов З.А., Тотиева Ж.Д. Квазидвумерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью // Владикавказ. матем. журн. 2021. Т. 23, № 4. С. 15–27; DOI: 10.46698/14464-6098-4749-m
14. Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш. Определение двумерного ядра релаксации интегродифференциального волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 2. С. 208–222; DOI: 10.31857/S0374064123020073

15. *Lorenzi A., Sinestrari E.* An inverse problem in the theory of materials with memory I // *Nonlinear Anal.* 1988. V. 12. P. 1217–1335.
16. *Lorenzi A.* Identification problems for integro-differential equations // *Ill-Posed problems in Natural Sciences.* 1992. P. 342–366.
17. *Cavaterra C., Grasselli M.* Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type // *Math. Model. Meth. Appl. Sci.* 1994. V. 4, N 6. P. 807–842.
18. *Janno J., von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.
19. *Lorenzi A., Messina F., Romanov V.G.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // *Appl. Anal.* 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
20. *Romanov V.G., Yamamoto M.* Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // *Appl. Anal.* 2010. V. 89, N 3. P. 377–390.
21. *Lorenzi A., Romanov V.G.* Recovering two Lamé Kernels in a Viscoelastic System // *Inverse Probl. Imaging.* 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.
22. *Романов В.Г.* Трёхмерная обратная задача вязкоупругости // *Докл. АН.* 2011. Т. 441, № 4. С. 452–455.
23. *Романов В.Г.* Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
24. *Романов В.Г.* Inverse problems for differential equations with memory // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2014. V. 2, N 4. P. 51–80.
25. *Durdiev D.K., Totieva Zh.D.* The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equation // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2018. V. 41, N 17. P. 8019–8032.
26. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2020. Т. 23, № 2. С. 63–80.
27. *Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolic V., Rajendran L.M., Wohlmuth B.* Determining kernels in linear viscoelasticity // *J. Comput. Phys.* 2022. V. 464. Article 111331.
28. *Durdiev D.K., Totieva Z.D.* Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations. Singapore: Springer-Verl, 2023.
29. *Romanov V.G., Bugueva T.V.* An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation // *Eurasian J. Math. Comp. Appl.* 2024. V. 12, N 2. P. 134–154.
30. *Romanov V.G., Bugueva T.V.* An one-dimensional inverse problem for the wave equation // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2024. V. 12, N. 3. P. 135–162.

UDC 517.956

THE INVERSE PROBLEM FOR A QUASILINEAR WAVE EQUATION WITH MEMORY

© 2025 V. G. Romanov¹, T. V. Bugueva^{1,2}

¹*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, 630090 Russia*

²*Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia*

E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ru

Received 22.11.2024, revised 26.02.2025, accepted 10.03.2025

Abstract. The forward and inverse problems are investigated for the quasilinear wave equation $\square u - qu^2 - K * u = 0$ where the kernel $K(x, t)$ is represented in the form $K(x, t) = p(x)K_0(t)$ with $p(x)$ being a continuous function. The inverse problem is devoted to the determination of the compact functions $q(x)$ and $p(x)$. Traces of the derivative with respect to x of two solutions to the forward initial-boundary value problem related to two arbitrary boundary data are given for $x = 0$ on the finite segment $[0, T]$ as an additional information for the solution to the inverse problem. The conditions for the unique solvability of the forward problem

Keywords: nonlinear wave equation, integro-differential equation, equation with memory, forward problem, inverse problem, existence of solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.104

REFERENCES

1. A. Z. Fino, “Critical exponent for damped wave equations with nonlinear memory,” *Nonlinear Anal.* **74** (16), 5495–5505 (2011).
2. F. Liang and H. Gao, “Global existence and blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with memory,” *J. Inequal. Appl.* **33** (2012). <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-33>
3. M. D’Abbicco, “A wave equation with structural damping and nonlinear memory,” *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* **21**, 751–773 (2014). <https://doi.org/10.1007/s00030-014-0265-2>
4. M. D’Abbicco and S. Lucente, “The beam equation with nonlinear memory,” *Z. Angew. Math. Phys.* **67** (3), 1–18 (2016). <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0655-x>
5. C. A. Raposo, A. P. Cattai, and J. O. Ribeiro, “Global solution and asymptotic behaviour for a wave equation type p-Laplacian with memory,” *Open J. Math. Anal.* **2** (2), 156–171 (2018). <https://doi.org/10.30538/psrp-oma2018.0025>
6. S. Boulaaras, F. Kamache, Y. Bouizem, and R. Guefaïfa, “General decay and blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with memory and fractional boundary damping terms,” *Bound. Value Probl.* **172** (2020). <https://doi.org/10.1186/s13661-020-01470-w>
7. M. Kirane, A. Z. Fino, A. Alsaedi, and B. Ahmad, “Global existence for time-dependent damped wave equations with nonlinear memory,” *Adv. Nonlinear Anal.* **12**, 20230111 (2023). <https://doi.org/10.1515/anona-2023-0111>
8. V. G. Romanov, “Inverse problem for an integro-differential equation containing a parameter,” *Dokl. Ross. Akad. Nauk* **350** (5), 592–594 (1996) [in Russian].

9. A. L. Bukhgeim and G. V. Dyatlov, "Inverse problems for equations with memory," *SIAM J. Math. Anal.* **1** (2), 1–17 (1998). <https://doi.org/10.1201/9780429187841-2>
10. L. Seliga and M. Slodička, "An inverse source problem for a damped wave equation with memory," *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **24** (2) (2015). <https://doi.org/10.1515/jiip-2014-0026>
11. M. Slodička and L. Seliga, "Determination of a time-dependent convolution kernel in a non-linear hyperbolic equation," *Inverse Probl. Sci. Engrg.* **24** (6), 1–19 (2015). <https://doi.org/10.1080/17415977.2015.1101762>
12. U. D. Durdiev, "A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **7** (2), 4–19 (2019). <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2019-7-2-4-19>
13. Z. A. Akhmatov and Zh. D. Totieva, "Quasi-two-dimensional coefficient inverse problem for the wave equation in a weakly horizontally inhomogeneous medium with memory," *Vladikavkaz. Mat. Zh.* **23** (4), 15–27 (2021) [in Russian]. <https://doi.org/10.46698/14464-6098-4749-m>
14. D. K. Durdiev and J. Sh. Safarov, "Finding the two-dimensional relaxation kernel of an integro-differential wave equation," *Differ. Equations* **59** (2), 214–229 (2023). <https://doi.org/10.1134/S0012266123020064>
15. A. Lorenzi and E. Sinestrari, "An inverse problem in the theory of materials with memory I," *Nonlinear Anal.* **12**, 1217–1335 (1988).
16. A. Lorenzi, "Identification problems for integro-differential equations," *Ill-Posed Probl. Nat. Sci.* 342–366 (1992).
17. C. Cavaterra and M. Grasselli, "Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type," *Math. Model. Meth. Appl. Sci.* **4** (6), 807–842 (1994).
18. J. Janno and L. von Wolfersdorf, "Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity," *Math. Meth. Appl. Sci.* **20** (4), 291–314 (1997).
19. A. Lorenzi, F. Messina, and V. G. Romanov, "Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system," *Appl. Anal.* **86** (11), 1375–1395 (2007).
20. V. G. Romanov and M. Yamamoto, "Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement," *Appl. Anal.* **89** (3), 377–390 (2010).
21. A. Lorenzi and V. G. Romanov, "Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system," *Inverse Probl. Imaging* **5** (2), 431–464 (2011).
22. V. G. Romanov, "A three-dimensional inverse problem of viscoelasticity," *Dokl. Math.* **84** (3), 833–836 (2011).
23. V. G. Romanov, "Stability estimates for the solution to the problem of determining the kernel of a viscoelastic equation," *J. Appl. Ind. Math.* **6** (3), 360–370 (2012). <https://doi.org/10.1134/S1990478912030118>
24. V. G. Romanov, "Inverse problems for differential equations with memory," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **2** (4), 51–80 (2014).
25. D. K. Durdiev and Zh. D. Totieva, "The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equation," *Math. Meth. Appl. Sci.* **41** (17), 8019–8032 (2018).
26. D. K. Durdiev and A. A. Rakhmonov, "The problem of determining the 2D kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium," *J. Appl. Ind. Math.* **14** (2), 281–295 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1990478920020076>
27. B. Kaltenbacher, U. Kristenko, V. Nikolic, L. M. Rajendran, and B. Wohlmuth, "Determining kernels in linear viscoelasticity," *J. Comput. Phys.* **464**, 111331 (2022).
28. D. K. Durdiev and Zh. D. Totieva, *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations* (Springer-Verlag, Singapore, 2023).
29. V. G. Romanov and T. V. Bugueva, "An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation," *Eurasian J. Math. Comp. Appl.* **12** (2), 134–154 (2024).
30. V. G. Romanov and T. V. Bugueva, "A one-dimensional inverse problem for the wave equation," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **12** (3), 135–162 (2024).

УДК 539.37

ЗАДАЧА О КРАЕВОЙ ДИСЛОКАЦИИ, БЕГУЩЕЙ СО СВЕРХСЕЙСМИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ

© 2025 В. М. Садовский^a, О. В. Садовская^b*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия*E-mails: ^asadov@icm.krasn.ru, ^bo_sadov@icm.krasn.ruПоступила в редакцию 16.12.2024 г.; после доработки 28.02.2025 г.;
принята к публикации 26.03.2025 г.

В качестве модели сдвигового разрыва в земной коре на глубинах сейсмической активности, растущего со сверхсейсмической скоростью, т. е. скоростью, превышающей скорость продольных волн, рассматривается краевая дислокация Вольтерра, движущаяся в безграничной изотропной упругой среде под действием предварительных касательных напряжений. В приближении плоской деформации уравнения стационарного движения среды вокруг дислокации приводятся к гиперболической системе уравнений для скоростей и напряжений, которая интегрируется методом характеристик. С помощью инвариантного J -интеграла получена оценка энергии, высвобождающейся по мере продвижения дислокации, в зависимости от скорости, величины касательного напряжения на бесконечности, длины веера, примыкающего к вершине, и от характера распределения вектора Бюргерса в веере.

Ключевые слова: сдвиговый разрыв, динамика, краевая дислокация, метод характеристик, инвариантный интеграл.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.105

ВВЕДЕНИЕ

Наряду с медленно растущими трещинами в земной коре, которые со временем приводят к формированию геологических разломов, в твёрдых горных породах на глубинах порядка десятка километров наблюдаются сдвиговые разрывы, распространяющиеся с аномально высокими скоростями, сравнимыми и даже превышающими скорости упругих волн. Такие разрывы были зарегистрированы в натурных наблюдениях [1, 2, 3] и являются предметом исследований в лабораторных экспериментах [4, 5]. В недавних публикациях [6, 7] по результатам обработки данных разрушительного землетрясения магнитудой 7.8 баллов, произошедшего 6 февраля 2023 г. в районе города Кахраманмараш (Турецкая Республика), были зарегистрированы сейсмические события, которые распространялись в пространстве со скоростью, в полтора раза превышающей скорость поперечных упругих волн.

Для объяснения движения сдвиговых разрывов с сейсмическими скоростями Б. Г. Тарасов предложил оригинальный механизм [8, 9, 10]. По его представлениям, в вершине разрыва под действием бокового давления образуется веерная структура, состоящая из домино-пластин. Пластины поворачиваются при возникновении относительно небольших касательных напряжений в окружающем горном массиве и, что самое главное, сохраняют свою целостность при вращении. Так образуется веерная система, схематично изображённая на рис. 1. В отсутствие трения и внешних активных сил веерная система находится в положении безотносительного равновесия и может свободно перемещаться вдоль уже образовавшегося разлома. Силы трения, к которым относится сила сопротивления отрыву пластин в вершине веера, препятствуют

такому перемещению. Под действием предварительных касательных напряжений, обусловленных протекающими тектоническими процессами, веер выходит из равновесия и начинает двигаться как волна, развивая высокую скорость. Начало такого движения происходит при пороговом значении касательного напряжения, при котором движущая сила веера оказывается равной силе трения.

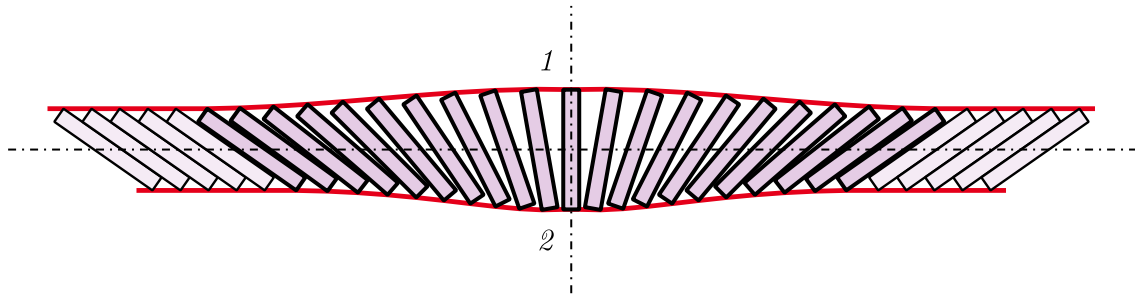


Рис. 1. Конфигурация самоуравновешенного веера (1 — зона растяжения, 2 — зона сжатия)

Лабораторная модель, имитирующая движение веерной системы, соответствующая ей математическая модель и результаты численного анализа представлены в работе [11]. Статическое напряжённо-деформированное состояние среды вокруг равновесного веера в приближении плоской деформации построено на основе метода суперпозиции дислокаций в [12]. Численное моделирование страгивания и последующего ускоренного движения веерной системы проводилось в рамках двумерных уравнений динамической теории упругости в [13]. Для этого был разработан специальный метод решения на основе неявной разностной схемы с контролируемой искусственной диссипацией энергии [14].

Учитывая, что моделирование динамики веерной системы на больших временах в полной постановке оказалось неподъёмной задачей даже для высокопроизводительных вычислений, к её решению была применена упрощённая математическая модель краевой дислокации, движущейся с постоянной скоростью. Такое движение является стационарным по аналогии с движением бегущей волны. Упрощение состоит в том, что динамика образования нового геологического разлома рассматривается в крупномасштабном приближении, на котором веер, имеющий конечную длину, превращается в точку — вершину дислокации. Решение задачи о бегущей дислокации для относительно низких скоростей, не превышающих скорость поперечных упругих волн, в такой постановке получено авторами на основе системы определяющих уравнений эллиптического типа с помощью разложения вектора перемещений на градиент скалярного и ротор векторного потенциалов [15]. Кроме того, задача решена в предположении о трансзвуковой скорости в диапазоне между скоростями поперечных и продольных волн. Система определяющих уравнений имеет в этом случае смешанный эллиптико-гиперболический тип. В настоящей статье рассматривается диапазон скоростей выше скорости продольных волн, который описывается гиперболической системой.

Заметим, что основы теории дислокаций для описания необратимой пластической деформации кристаллов были заложены в классических трудах В. Вольтерра, Л. Прандтля, О. Э. Лява, Дж. М. Бюргерса (см. [16, 17]). Принципиальную важность независимого моделирования процессов, происходящих в вершине дислокации, подчёркивал Ю. Н. Работнов [18]. Современному развитию теории посвящены работы [19, 20] и многие другие.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В упругой плоскости рассматривается краевая дислокация, вершина которой движется в положительном направлении оси x_2 декартовой системы координат Ox_1x_2 с постоянной сверхсейсмической скоростью. В результате такого движения в полуплоскостях $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$ реализуется стационарное напряжённо-деформированное состояние. На границе полуплоскостей

за вершиной дислокации на некотором удалении от вершины скачок проекции вектора перемещения u_2 на горизонтальную ось равен постоянной b — модулю вектора Бюргерса. Проекция вектора перемещения u_1 на вертикальную ось непрерывна. Перед осью дислокации упругая среда находится в естественном ненапряженном состоянии, так как скорость вершины превосходит скорости упругих волн. На бесконечности в обеих полуплоскостях действует постоянное касательное напряжение τ , за счёт которого возникает стационарный режим движения. Схематично граничные условия задачи представлены на рис. 2. Чтобы избежать сингулярности решения, предположим далее, что при подходе к вершине дислокации скачок продольного перемещения точек среды на линии дислокации монотонно убывает в некоторой окрестности вершины от величины вектора Бюргерса до нулевого значения. Эта окрестность рассматривается в качестве прообраза веерной системы.

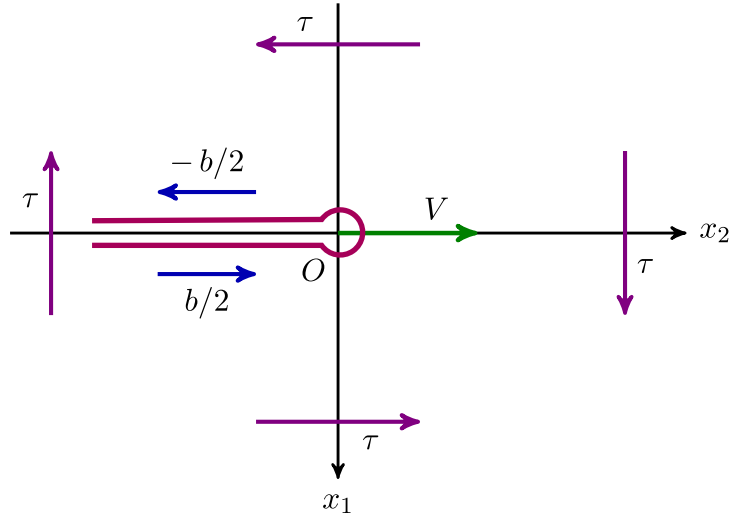


Рис. 2. Бегущая дислокация (b — вектор Бюргерса, V — скорость, τ — касательное напряжение)

В системе координат, движущейся с постоянной скоростью вместе с вершиной, состояние среды описывается уравнениями динамической теории упругости в приближении плоской деформации:

$$\begin{aligned} -\rho V \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2}, & -\rho V \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2}, \\ -V \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2}, & -V \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2} &= \mu \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} + \mu \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1}, \\ -V \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2} &= \lambda \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность среды, λ и μ — параметры Ламе, V — скорость вершины, v_i — проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат Ox_1x_2 , σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в этих же осях ($i, j = 1, 2$), $\xi_1 = x_1$ и $\xi_2 = x_2 - Vt$ — стационарные переменные, t — время.

С учётом обозначений для скоростей продольных волн $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и поперечных волн $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ уравнения (1) преобразуются к системе

$$\begin{aligned} \rho (V^2 - c_2^2) \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\mu v_2 - V \sigma_{11}), & \rho (V^2 - c_1^2) \frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} (\lambda v_1 - V \sigma_{12}), \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\mu v_1 + V \sigma_{12}) &= -\mu \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial}{\partial \xi_2} (\lambda v_2 + V \sigma_{11}) &= -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1}. \end{aligned}$$

Уравнение для σ_{22} , дополняющее эту систему до (1), целесообразно представить в виде уравнения на контактной характеристике $d\xi_1 = 0$: $dR^{(0)} = 0$ для инварианта Римана

$$R^{(0)} = (\lambda + 2\mu) V \sigma_{22} - \lambda V \sigma_{11} + 4\mu (\lambda + \mu) v_2.$$

Интегрирование позволяет получить равенство $R^{(0)} = f_0(\xi_1)$, которое служит для вычисления напряжения σ_{22} через остальные неизвестные функции с произволом в функцию f_0 .

Преобразованная система представима в матричной форме

$$A \frac{\partial U}{\partial \xi_2} = B \frac{\partial U}{\partial \xi_1} \quad (2)$$

с матрицами-коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} \rho(V^2 - c_2^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(V^2 - c_1^2) & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & V \\ 0 & \lambda & V & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \mu & -V & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -V \\ 0 & -\mu & 0 & 0 \\ -\lambda - 2\mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}.$$

Система (2) относится к гиперболическому типу, так как $V > c_1$, и приводится к уравнениям на характеристиках. Собственные значения системы — корни характеристического уравнения $\det(A - kB) = 0$, которое записывается в виде

$$(V^2 - k^2 c_1^2 - c_2^2)(V^2 - c_1^2 - k^2 c_2^2) = k^2(c_1^2 - c_2^2)^2,$$

равны $\pm k_1$ и $\pm k_2$, где

$$k_1 = \sqrt{\frac{V^2}{c_1^2} - 1}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{V^2}{c_2^2} - 1}.$$

Левые собственные векторы X : $X(A - kB) = 0$, соответствующие собственным значениям $k = k_1, -k_1, k_2$ и $-k_2$, оказываются равными

$$X^{(\pm 1)} = (1, \pm 1/k_1, -1, \mp k_1), \quad X^{(\pm 2)} = (\mp 1/k_2, 1, \mp k_2, 1).$$

Инварианты Римана $R^{(\pm j)} = Y_1^{(\pm j)} v_1 + Y_2^{(\pm j)} v_2 + Y_3^{(\pm j)} \sigma_{11} + Y_4^{(\pm j)} \sigma_{12}$ ($j = 1, 2$) выражаются через производящие векторы $Y = XA$, которые принимают следующий вид:

$$Y^{(\pm 1)} = (\mu(k_2^2 - 1), \pm 2\mu k_1, \mp k_1 V, -V), \quad Y^{(\pm 2)} = (\mp 2\mu k_2, \mu(k_2^2 - 1), V, \mp k_2 V).$$

Для инвариантов Римана выполняется система уравнений на характеристиках

$$k_1 d\xi_1 \pm d\xi_2 = 0 : dR^{(\pm 1)} = 0, \quad k_2 d\xi_1 \pm d\xi_2 = 0 : dR^{(\pm 2)} = 0.$$

После интегрирования из неё следует замкнутая система линейных алгебраических уравнений для общего решения системы (2), зависящего от четырёх произвольных функций $f_{\pm 1}$ и $f_{\pm 2}$:

$$\begin{aligned} \mu(k_2^2 - 1)v_1 + 2\mu k_1 v_2 - k_1 V \sigma_{11} - V \sigma_{12} &= 2k_1 f_{+1}(k_1 \xi_1 + \xi_2), \\ \mu(k_2^2 - 1)v_1 - 2\mu k_1 v_2 + k_1 V \sigma_{11} - V \sigma_{12} &= 2k_1 f_{-1}(-k_1 \xi_1 + \xi_2), \\ -2\mu k_2 v_1 + \mu(k_2^2 - 1)v_2 + V \sigma_{11} - k_2 V \sigma_{12} &= 2k_2 f_{+2}(k_2 \xi_1 + \xi_2), \\ 2\mu k_2 v_1 + \mu(k_2^2 - 1)v_2 + V \sigma_{11} + k_2 V \sigma_{12} &= 2k_2 f_{-2}(-k_2 \xi_1 + \xi_2). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mu(k_2^2 - 1)v_1 - V\sigma_{12} &= k_1(f_{+1} + f_{-1}), & 2\mu v_2 - V\sigma_{11} &= f_{+1} - f_{-1}, \\ \mu(k_2^2 - 1)v_2 + V\sigma_{11} &= k_2(f_{+2} + f_{-2}), & 2\mu v_1 + V\sigma_{12} &= f_{-2} - f_{+2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее для краткости аргументы произвольных функций опущены.

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть $h(\xi)$ — непрерывно-дифференцируемая функция, представляющая собой сглаженную на отрезке $[0, a]$ ступеньку Хевисайда, равная единице при $\xi > a$ и нулю при $\xi < 0$. В терминах этой функции граничные условия для перемещения u_2 и соответствующей скорости на горизонтальной оси записываются в виде

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \pm 0} u_2 = \pm \frac{b}{2} h(-\xi_2), \quad v_2 = -V \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \implies \lim_{\xi_1 \rightarrow \pm 0} v_2 = \pm \frac{bV}{2} h'(-\xi_2). \quad (4)$$

Кроме этих условий на оси ξ_2 выполняются условия непрерывности скорости v_1 , а также нормального и касательного напряжений σ_{11} и σ_{12} .

Так как вершина дислокации движется со сверхсейсмической скоростью, то в нижней полуплоскости $\xi_1 > 0$ функции f_{-1} и f_{-2} , входящие в общее решение, тождественно равны нулю. Из уравнений системы (3) следует, что

$$\begin{aligned} v_1 &= V(k_1 \tilde{f}_{+1} - \tilde{f}_{+2}), & v_2 &= V(\tilde{f}_{+1} + k_2 \tilde{f}_{+2}), \\ \sigma_{11} &= -\mu((k_2^2 - 1)\tilde{f}_{+1} - 2k_2 \tilde{f}_{+2}), & \sigma_{12} &= -\mu(2k_1 \tilde{f}_{+1} + (k_2^2 - 1)\tilde{f}_{+2}). \end{aligned}$$

В верхней полуплоскости $\xi_1 < 0$ равны нулю функции f_{+1} и f_{+2} . Поэтому

$$\begin{aligned} v_1 &= V(k_1 \tilde{f}_{-1} + \tilde{f}_{-2}), & v_2 &= -V(\tilde{f}_{-1} - k_2 \tilde{f}_{-2}), \\ \sigma_{11} &= \mu((k_2^2 - 1)\tilde{f}_{-1} + 2k_2 \tilde{f}_{-2}), & \sigma_{12} &= -\mu(2k_1 \tilde{f}_{-1} - (k_2^2 - 1)\tilde{f}_{-2}). \end{aligned}$$

Здесь и ниже для краткости используются вспомогательные обозначения $\tilde{f}_{\pm j} = f_{\pm j}/(\rho V^3)$.

Подстановка этих формул в граничные условия (4) и условия непрерывности напряжений приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{+1}(\xi_2) + k_2 \tilde{f}_{+2}(\xi_2) &= \frac{b}{2} h'(-\xi_2), & \tilde{f}_{-1}(\xi_2) - k_2 \tilde{f}_{-2}(\xi_2) &= \frac{b}{2} h'(-\xi_2), \\ (k_2^2 - 1)(\tilde{f}_{+1}(\xi_2) + \tilde{f}_{-1}(\xi_2)) - 2k_2(\tilde{f}_{+2}(\xi_2) + \tilde{f}_{-2}(\xi_2)) &= 0, \\ 2k_2(\tilde{f}_{+1}(\xi_2) + \tilde{f}_{-1}(\xi_2)) + (k_2^2 - 1)(\tilde{f}_{+2}(\xi_2) + \tilde{f}_{-2}(\xi_2)) &= 0, \end{aligned}$$

из которой следует, что

$$\tilde{f}_{+1}(\xi) = \tilde{f}_{-1}(\xi) = \frac{b}{k_2^2 + 1} h'(-\xi), \quad \tilde{f}_{+2}(\xi) = -\tilde{f}_{-2}(\xi) = \frac{b}{2k_2} \frac{k_2^2 - 1}{k_2^2 + 1} h'(-\xi).$$

Таким образом, решение задачи в нижней полуплоскости $\xi_1 > 0$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{bV}{2k_2(k_2^2 + 1)} \left(2k_1k_2 h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) - (k_2^2 - 1) h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
 v_2 &= \frac{bV}{2(k_2^2 + 1)} \left(2 h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1) h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
 \sigma_{11} &= -\mu b \frac{k_2^2 - 1}{k_2^2 + 1} \left(h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) - h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
 \sigma_{12} &= -\frac{\mu b}{2k_2(k_2^2 + 1)} \left(4k_1k_2 h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1)^2 h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Для определения напряжения σ_{22} служит уравнение $R^{(0)} = f_0(\xi_1)$. Входящая в него функция f_0 тождественно равна нулю, поскольку в правой полуплоскости среда неподвижна и находится в ненапряжённом состоянии. С учётом выражения для инварианта Римана $R^{(0)}$ это уравнение даёт

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22} &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \sigma_{11} - \frac{4\mu}{V} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} v_2 = \\
 &= -\frac{\mu b}{k_2^2 + 1} \left(\frac{(k_2^2 + 3)\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} h'(-k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1) h'(-k_2 \xi_1 - \xi_2) \right).
 \end{aligned}$$

В верхней полуплоскости $\xi_1 < 0$ решение принимает вид

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{bV}{2k_2(k_2^2 + 1)} \left(2k_1k_2 h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) - (k_2^2 - 1) h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
 v_2 &= -\frac{bV}{2(k_2^2 + 1)} \left(2 h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1) h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
 \sigma_{11} &= \mu b \frac{k_2^2 - 1}{k_2^2 + 1} \left(h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) - h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
 \sigma_{12} &= -\frac{\mu b}{2k_2(k_2^2 + 1)} \left(4k_1k_2 h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1)^2 h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right), \\
 \sigma_{22} &= \frac{\mu b}{k_2^2 + 1} \left(\frac{(k_2^2 + 3)\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} h'(k_1 \xi_1 - \xi_2) + (k_2^2 - 1) h'(k_2 \xi_1 - \xi_2) \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Поля скоростей и напряжений (5), (6) представляют собой точное решение задачи о сверхсейсмическом стационарном движении дислокации в ненапряжённой упругой среде. При учёте сдвигов, обусловленных природными тектоническими процессами, в соответствии с принципом суперпозиции, к напряжению σ_{12} необходимо добавить предварительное касательное напряжение τ . Наличие такого напряжения служит триггерным механизмом, запускающим движение дислокации. Под его влиянием веерная система в вершине дислокации выходит из состояния равновесия и создаёт движущую силу. К нормальным напряжениям σ_{11} и σ_{22} также следует добавить постоянное гидростатическое напряжение $-p$, характерное для данной глубины.

3. ИНВАРИАНТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Движущая сила дислокации однозначно определяется действующими на бесконечности напряжениями и скоростью движения вершины. На то, что термин “движущая сила” в данном случае неудачен, так как в действительности сила в привычном для механики понимании

в вершине дислокации отсутствует, обратил внимание Ю. Н. Работнов [18]. Сила трактуется здесь в более широком смысле, как причина, вызывающая движение. На самом деле размерность силы имеет энергия, затрачиваемая на продвижение дислокации на единицу длины. Это часть запасённой упругой энергии предварительных напряжений, которая высвобождается из окружающей горной породы, представляя собой разрушительную энергию сейсмического процесса.

Формула для вычисления движущей силы J выводится, исходя из вариационного принципа возможных перемещений, записанного для произвольной односвязной области D , ограниченной контуром L :

$$\iint_D \delta W \, d\xi_1 \, d\xi_2 = - \iint_D \left(\rho V^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} \delta u_1 + \rho V^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} \delta u_2 \right) d\xi_1 \, d\xi_2 + \int_L \left(\sigma_{n1} \delta u_1 + \sigma_{n2} \delta u_2 \right) ds + J \delta \xi_2.$$

Здесь W — удельная потенциальная энергия:

$$2W = \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \sigma_{12} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \right),$$

σ_{n1} и σ_{n2} — компоненты вектора напряжений на контуре L :

$$\sigma_{n1} = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2, \quad \sigma_{n2} = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2,$$

n_1, n_2 — проекции вектора нормали к контуру, ds — элемент дуги.

В соответствии с принципом Даламбера силы инерции, входящие в подынтегральное выражение первого из интегралов в правой части, участвуют в качестве статических объёмных сил. Полагая

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \xi_2} \delta \xi_2, \quad \delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \delta \xi_2, \quad \delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \delta \xi_2,$$

после применения формулы Грина из вариационного принципа получим

$$J = - \int_P^Q \left(W + \frac{1}{2} \rho V^2 \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right|^2 \right) \right) d\xi_1 + \left(\sigma_{n1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \sigma_{n2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right) ds. \quad (7)$$

Интеграл берётся по произвольному контуру, охватывающему вершину дислокации, с концами в точках P и Q , расположенными друг над другом на разных берегах линии разрыва перемещения.

Интеграл (7) является обобщением на случай стационарного движения среды известного в механике разрушений инвариантного J -интеграла Черепанова—Райса. Свойство инвариантности, то есть независимости от контура интегрирования, вытекает из условия полного дифференциала подынтегрального выражения, которое с помощью геометрических формул $n_1 ds = d\xi_2$ и $n_2 ds = -d\xi_1$ приводится к дифференциальной форме $P d\xi_1 + Q d\xi_2$, где

$$P = W + \frac{1}{2} \rho V^2 \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right|^2 \right) - \sigma_{11} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} - \sigma_{12} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, \quad Q = \sigma_{12} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \sigma_{22} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}.$$

Условие полного дифференциала $\partial P / \partial \xi_2 = \partial Q / \partial \xi_1$ является следствием уравнений теории упругости (1), переписанных в терминах перемещений:

$$\begin{aligned} \rho V^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi_2^2} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_2}, & \rho V^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi_2^2} &= \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \xi_2}, \\ \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}, & \sigma_{12} &= \mu \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}, & \sigma_{22} &= \lambda \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

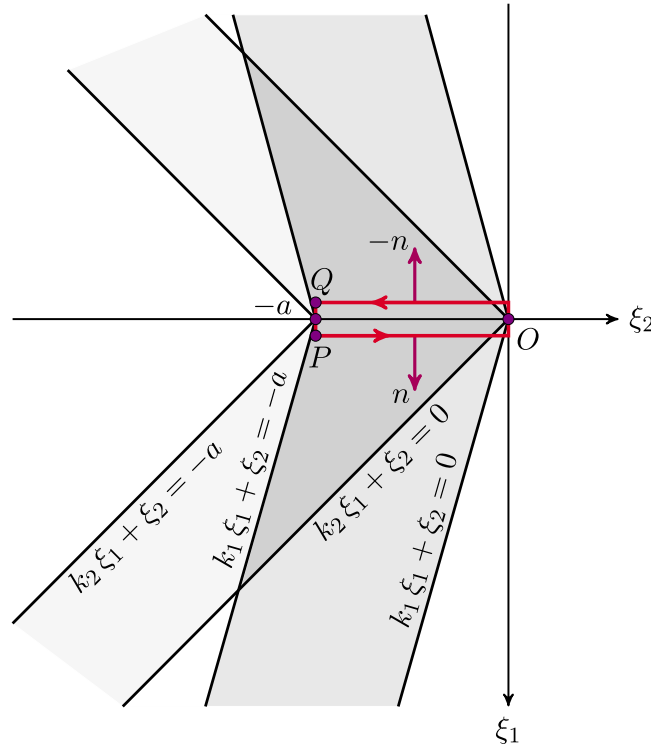


Рис. 3. Волновая картина и контур интегрирования

Инвариантный интеграл тождественно равен нулю, если внутри контура нет особенностей решения системы (8). Он имеет смысл при наличии особенностей типа разрывов перемещений в рассматриваемой задаче о бегущей дислокации.

При вычислении J -интеграла для дислокации в качестве контура интегрирования выберем вырожденный (бесконечно тонкий) прямоугольник, охватывающий отрезок $[-a, 0]$ на оси абсцисс (см. рис. 3). Учитывая, что на этом контуре $d\xi_1 = 0$, $n_2 = 0$ и $n_1 ds = d\xi_2$, получим

$$\begin{aligned} J &= - \int_P^Q \left((\sigma_{11} - p) \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} + (\sigma_{12} + \tau) \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \right) n_1 ds = \\ &= \frac{1}{V} \int_P^Q \left((\sigma_{11} - p) v_1 + (\sigma_{12} + \tau) v_2 \right) n_1 ds = \frac{2}{V} \int_{-a}^0 (\sigma_{12} + \tau) v_2 \Big|_{\xi_1=0} d\xi_2. \end{aligned}$$

Преобразование интеграла после подстановки v_2 и σ_{12} из (5) приводит к следующей формуле:

$$J = - \frac{\mu b^2}{2k_2} \frac{4k_1k_2 + (k_2^2 - 1)^2}{k_2^2 + 1} \int_{-a}^0 |h'(-\xi_2)|^2 d\xi_2 + b\tau. \quad (9)$$

Судя по формуле (9), значение J -интеграла не зависит от величины давления и существенно зависит от вида функции $h(\xi)$. Максимум по всем таким функциям при фиксированном a достигается, если h линейна на отрезке $[0, a]$. Для такой функции $h' = 1/a$ на отрезке и, следовательно,

$$J = - \frac{\mu b^2}{2a k_2} \frac{4k_1k_2 + (k_2^2 - 1)^2}{k_2^2 + 1} + b\tau.$$

При стремлении a к нулю J -интеграл принимает отрицательные значения. Движение дислокации в этом случае физически неосуществимо, так как оно сопровождается не высвобождением, а накоплением потенциальной энергии. Надо ещё учесть, что определённая часть энергии поглощается силами трения, включая энергию, затрачиваемую на разрушение горной породы вблизи вершины трещины. Поэтому значение J -интеграла должно быть ограниченным от нуля. Типичные графики зависимости J -интеграла от скорости V представлены на рис. 4. В расчётах были приняты следующие значения параметров, характерные для сверх-хрупкой горной породы: $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 6000$, $c_2 = 3300 \text{ м/с}$. Модуль вектора Бюргерса $b = 0.12 \text{ м}$ взят по результатам натурных наблюдений В. Д. Ортлеппа [1]. Величина касательного напряжения $\tau = 250 \text{ МПа}$ выбрана произвольно, учитывая, что в природе она может изменяться в широком диапазоне.

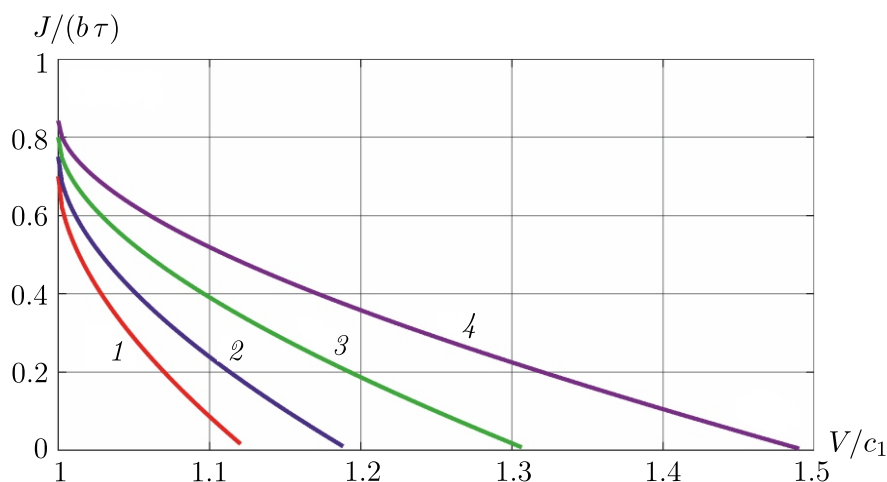


Рис. 4. Графики зависимости безразмерной величины $J/(b\tau)$ от V/c_1 для значений параметра a , равных 10, 12, 15 и 19 м (кривые 1–4 соответственно)

Чтобы дислокация двигалась с высокой скоростью, в её вершине должны происходить интенсивные деформационные процессы, источником которых служит потенциальная энергия предварительных напряжений в горной породе. Такие процессы в принципе описываются с помощью модельного представления о веерном механизме Б. Г. Тарасова. При этом в качестве параметра a участвует длина веера. Как показали расчёты [12, 13], длина веерной системы в основном определяется величиной гидростатического давления, и на глубинах порядка 10 км она на два порядка превышает величину вектора Бюргерса. Из этих соображений параметр a на приведённых графиках варьировался в пределах от 10 до 20 м.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено точное решение задачи о бегущей дислокации, моделирующее движение сдвигового разрыва в массиве горных пород с аномально высокой скоростью, превышающей скорость продольных упругих волн. С его помощью оценена величина энергии, которая высвобождается в процессе движения. Анализ показал, что при заданном преднапряжённом состоянии массива энергия бегущей дислокации тем меньше, чем больше скорость её вершины. Таким образом, разрывы, растущие с более высокими скоростями в сверхсейсмическом диапазоне, оказываются менее опасными по уровню высвобождаемой энергии. Полученное решение может быть полезным при исследовании вопроса о допустимом диапазоне скоростей роста трещин на глубинах сейсмической активности в земной коре и об уровне разрушительной энергии, связанной с такими трещинами. Оно применимо к анализу физических механизмов сверхбыстрого роста трещин, что в конечном итоге может быть использовано при разработке систем предупреждения и защиты населения и инфраструктуры городов от крупных сейсмических событий.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института вычислительного моделирования СО РАН (проект FWES-2024-0025) и при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (соглашение 075-02-2025-1606). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ortlepp W.D.* Rock fracture and rockbursts: An illustrative study. Monograph series M9. Johannesburg: South African Institute of Mining and Metallurgy, 1997.
2. *McGarr A.F., Simpson D., Seeber L.* Case histories of induced and triggered seismicity // *Int. Handb. Earthquake Eng. Seismol.* 2002. V. 81, N 40. P. 647–661; DOI: 10.1016/S0074-6142(02)80243-1
3. *Otsuki K., Dilov T.* Evolution of hierarchical self-similar geometry of experimental fault zones: Implications for seismic nucleation and earthquake size // *J. Geophys. Res.* 2005. V. 110, N B3. Article B03303; DOI: 10.1029/2004JB003359
4. *Rosakis A. J., Samudrala O., Coker D.* Cracks faster than the shear wave speed // *Science.* 1999. V. 284, N 5418. P. 1337–1340; DOI: 10.1126/science.284.5418.1337
5. *Gori M., Rubino V., Rosakis A.J., Lapusta N.* Pressure shock fronts formed by ultra-fast shear cracks in viscoelastic materials // *Nature Commun.* 2018. V. 9. Article 4754; DOI: 10.1038/s41467-018-07139-4
6. *Rosakis A.J., Abdelmeguid M., Elbanna A.* Evidence of early supershear transition in the Mw 7.8 Kahramanmaraş earthquake from near-field records // *arXiv.* 2023; DOI: 10.48550/arXiv.2302.07214
7. *Каракозова А.И., Кузнецов С.В., Мондрус В.Л.* Землетрясение Кахраманмарас 06.02.2023: математические модели, оценки и методы сейсмической защиты // *Изв. РАН. МТТ.* 2024. № 2. С. 90–102; DOI: 10.31857/S1026351924020034
8. *Tarasov B.G.* Hitherto unknown shear rupture mechanism as a source of instability in intact hard rocks at highly confined compression // *Tectonophysics.* 2014. V. 621. P. 69–84; DOI: 10.1016/j.tecto.2014.02.004
9. *Tarasov B.G., Randolph M.F.* Improved concept of lithospheric strength and earthquake activity at shallow depths based upon the fan-head dynamic shear rupture mechanism // *Tectonophysics.* 2016. V. 667. P. 124–143; DOI: 10.1016/j.tecto.2015.11.016
10. *Tarasov B.G.* New physics of supersonic ruptures // *Deep Undergr. Sci. Eng.* 2023. V. 2, N 3. P. 207–244; DOI: 10.1002/dug2.12050
11. *Тарасов Б.Г., Садовский В.М., Садовская О.В.* Анализ веерных волн в лабораторной модели, имитирующей распространение сдвиговых трещин в горных породах // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 1. С. 38–51; DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.1.4
12. *Tarasov B.G., Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V., Cassidy M.J., Randolph M.F.* Modelling the static stress-strain state around the fan-structure in the shear rupture head // *Appl. Math. Model.* 2018. V. 57. P. 268–279; DOI: 10.1016/j.apm.2018.01.020
13. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Supercomputing analysis of fan-shaped waves in the Earth's crust at the depths of seismic activity // *Mater. Phys. Mech.* 2019. V. 42, N 3. P. 330–339; DOI: 10.18720/MPM.4232019_8
14. *Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V.* Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2018. V. 33, N 2. P. 111–121; DOI: 10.1515/rnam-2018-0010
15. *Садовский В.М., Садовская О.В.* Моделирование веерного механизма образования разломов в земной коре // *Программа и аннотации докладов конференции 053w: “Перспективы математического моделирования физических процессов в многомасштабных геологических средах”.* 2024. С. 11–12.

16. *Nabarro F.R.N.* Mathematical theory of stationary dislocations // *Adv. Phys.* 1952. V. 1, N 3. P. 269–394; DOI: 10.1080/00018735200101211
17. *Фридель Ж.* Дислокации. М.: Мир, 1967.
18. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1988.
19. *Shima H., Umeno Y., Sumigawa T.* Analytic formulation of elastic field around edge dislocation adjacent to slanted free surface // *R. Soc. Open Sci.* 2022. V. 9. Article 220151; DOI: 10.1098/rsos.220151
20. *Markenscoff X.* Loss of pseudo-momentum, energy-release rate and the effective mass of a moving dislocation // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2023. V. 381. Article 20230232; DOI: 10.1098/rsta.2023.0232

UDC 539.37

THE PROBLEM ON AN EDGE DISLOCATION RUNNING AT SUPERSEISMIC VELOCITY

© 2025 V. M. Sadovskii^a, O. V. Sadovskaya^b

*Institute of Computational Modeling of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia*

E-mails: ^asadov@icm.krasn.ru, ^bo_sadov@icm.krasn.ru

Received 16.12.2024, revised 28.02.2025, accepted 26.03.2025

Abstract. As a model of shear rupture in the Earth's crust at the depths of seismic activity, which grows with a velocity exceeding the velocity of longitudinal waves, we consider a Volterra edge dislocation moving in an infinite isotropic elastic medium under the action of preliminary tangential stresses. In the plane strain approximation, the equations of stationary motion of the medium around the dislocation are reduced to a hyperbolic system of equations for velocities and stresses, which is integrated by the method of characteristics. Using the invariant J -integral, an estimate of the energy released during the motion of dislocation is obtained, depending on the velocity, the value of tangential stress at infinity, the length of the fan adjacent to the vertex of dislocation, and on the nature of the distribution of the Burgers vector in the fan.

Keywords: shear rupture, dynamics, edge dislocation, method of characteristics, invariant integral.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.105

REFERENCES

1. W. D. Orllepp, *Rock Fracture and Rockbursts: An Illustrative Study*. Monograph Series M9 (South Afr. Inst. Min. Metall., Johannesburg, 1997).
2. A. F. McGarr, D. Simpson, and L. Seeber, "Case histories of induced and triggered seismicity," *Int. Handb. Earthquake Eng. Seismol.* **81** (40), 647–661 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0074-6142\(02\)80243-1](https://doi.org/10.1016/S0074-6142(02)80243-1)
3. K. Otsuki and T. Dilov, "Evolution of hierarchical self-similar geometry of experimental fault zones: Implications for seismic nucleation and earthquake size," *J. Geophys. Res.* **110** (B3), B03303 (2005). <https://doi.org/10.1029/2004JB003359>
4. A. J. Rosakis, O. Samudrala, and D. Coker, "Cracks faster than the shearwave speed," *Science* **284** (5418), 1337–1340 (1999). <https://doi.org/10.1126/science.284.5418.1337>
5. M. Gori, V. Rubino, A. J. Rosakis, and N. Lapusta, "Pressure shock fronts formed by ultra-fast shear cracks in viscoelastic materials," *Nature Commun.* **9**, 4754 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41467-018-07139-4>
6. A. J. Rosakis, M. Abdelmeguid, and A. Elbanna, "Evidence of early supershear transition in the Mw 7.8 Kahramanmaraş earthquake from near-field records," *arXiv:2302.07214* (2023).
7. A. I. Karakozova, S. V. Kuznetsov, and V. L. Mondrus, "Kahramanmaraş earthquake on February 6, 2023: Mathematical models, estimates and methods of seismic protection," *Izv. RAN. MTT* (2), 90–102 (2024) [in Russian]. <https://doi.org/10.31857/S1026351924020034>
8. B. G. Tarasov, "Hitherto unknown shear rupture mechanism as a source of instability in intact hard rocks at highly confined compression," *Tectonophysics* **621**, 69–84 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2014.02.004>

9. B. G. Tarasov and M. F. Randolph, “Improved concept of lithospheric strength and earthquake activity at shallow depths based upon the fan-head dynamic shear rupture mechanism,” *Tectonophysics* **667**, 124–143 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2015.11.016>
10. B. G. Tarasov, “New physics of supersonic ruptures,” *Deep Undergr. Sci. Eng.* **2** (3), 207–244 (2023). <https://doi.org/10.1002/dug2.12050>
11. B. G. Tarasov, V. M. Sadovskii, and O. V. Sadovskaya, “Analysis of fan waves in a laboratory model simulating the propagation of shear cracks in rocks,” *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred* **9** (1), 38–51 (2016) [in Russian]. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.1.4>
12. B. G. Tarasov, V. M. Sadovskii, O. V. Sadovskaya, M. J. Cassidy, and M. F. Randolph, “Modelling the static stress-strain state around the fan-structure in the shear rupture head,” *Appl. Math. Model.* **57**, 268–279 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.01.020>
13. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Supercomputing analysis of fan-shaped waves in the Earth’s crust at the depths of seismic activity,” *Mater. Phys. Mech.* **42** (3), 330–339 (2019). https://doi.org/10.18720/MPM.4232019_8
14. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Numerical algorithm based on implicit finite-difference schemes for analysis of dynamic processes in blocky media,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* **33** (2), 111–121 (2018). <https://doi.org/10.1515/rnam-2018-0010>
15. V. M. Sadovskii and O. V. Sadovskaya, “Modeling of the fan mechanism of fault formation in the Earth’s crust,” *Progr. Annot. Dokl. Konf. 053w “Perspektivy matematicheskogo modelirovaniya fizicheskikh protsessov v mnogomasshtabnykh geologicheskikh sredakh”* (Progr. Abstr. Rep. Conf. 053w: Prospects for Mathematical Modeling of Physical Processes in Multiscale Geological Environments) (2024), pp. 11–12 [in Russian].
16. F. R. N. Nabarro, “Mathematical theory of stationary dislocations,” *Adv. Phys.* **1** (3), 269–394 (1952). <https://doi.org/10.1080/00018735200101211>
17. J. Friedel, *Dislocations* (Pergamon Press, Oxford, 1964; Mir, Moscow, 1967).
18. Yu. N. Rabotnov, *Mechanics of Deformable Solids* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
19. H. Shima, Y. Umeno, and T. Sumigawa, “Analytic formulation of elastic field around edge dislocation adjacent to slanted free surface,” *R. Soc. Open Sci.* **9**, 220151 (2022). <https://doi.org/10.1098/rsos.220151>
20. X. Markenscoff, “Loss of pseudo-momentum, energy-release rate and the effective mass of a moving dislocation,” *Phil. Trans. R. Soc. A* **381**, 20230232 (2023). <https://doi.org/10.1098/rsta.2023.0232>

УДК 517.958

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

© 2025 Ж. Д. Тотиева^{1,2}

¹ Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
ул. Ватутина, 53, г. Владикавказ 362025, Россия,

² Северо-Кавказский центр математических исследований
Владикавказского научного центра РАН,
ул. Вильямса, 1, с. Михайловское 363110, Россия

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

Поступила в редакцию 11.08.2023 г.; после доработки 31.10.2024 г.;
принята к публикации 26.03.2025 г.

Рассматривается двумерная обратная задача определения ядра, входящего в интегро-дифференциальное уравнение вязкоупругости. Предполагается, что коэффициенты уравнений зависят только от одной пространственной переменной. Применяя принцип линеаризации, обратная задача сводится к эквивалентной линейной системе интегральных уравнений. К последней в пространстве непрерывных функций применяется обобщённый принцип сжатых отображений. Доказана теорема однозначной разрешимости и получена оценка устойчивости решения обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, интегро-дифференциальное уравнение, вязкоупругость, устойчивость, дельта-функция, ядро.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.106

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для (x, z, t) , $x \in \mathbb{R}$, $z > 0$, $t \in \mathbb{R}$ рассматривается следующая система интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t h(x, t - \tau) \mu \frac{\partial u}{\partial x} d\tau \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ + \int_0^t h(x, t - \tau) \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial z} \right] d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \int_0^t h(x, t - \tau) \frac{\partial u}{\partial z} d\tau \right]_{z=+0} = -\frac{\delta(t)}{\lambda(0) + 2\mu(0)}, \quad (3)$$

где $u(x, z, t)$ — функция смещения, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, ρ — плотность среды, λ, μ — параметры Ламе. Функция $h(x, t)$, входящая в интеграл свёртки, описывает вязкие свойства среды и называется ядром памяти.

Предполагаем, что величины ρ, λ, μ известны и принадлежат классу Λ :

$$\begin{aligned} \Lambda = \{ \rho(z), \mu(z), \lambda(z) \in C^2(\mathbb{R}_+), \rho(z) > 0, \mu(z) > 0, \lambda(z) > 0, \\ \lambda'(+0) = \mu'(+0) = \rho'(+0) = 0, \quad \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \}. \end{aligned}$$

Определение 1. Задачу определения вектора смещения $u(x, z, t)$, удовлетворяющих (в обобщённом смысле) равенствам (1)–(3), при заданных функциях $h(x, t)$, $\rho(z)$, $\mu(z)$, $\lambda(z)$ будем называть *прямой задачей*.

Предполагаем, что ядро памяти $h(x, t)$ является малой величиной и, вводя формально параметр малости ε , его можно представить в виде

$$h(x, t) = \varepsilon h_1(x, t). \quad (4)$$

Решение прямой задачи (1)–(5) будем искать в виде ряда по степеням ε :

$$u(x, z, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x, z, t). \quad (5)$$

Подставляя (4), (5) в (1) и считая, что вклад слагаемых с членами при ε^j , $j = 2, 3, \dots$ пренебрежимо мал, приравниваем члены, стоящие при ε^j , $j = 0, 1$. В результате получаем две прямые задачи:

(i) *Задача определения $u_0(x, z, t)$ из равенств*

$$\rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_0}{\partial z} \right), \quad (6)$$

$$u_0|_{t < 0} \equiv 0, \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial z} \right]_{z=+0} = -\frac{\delta(t)}{\lambda(0) + 2\mu(0)}. \quad (8)$$

(ii) *Задача определения $u_1(x, z, t)$ из равенств*

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \int_0^t h_1(x, t - \tau) \left[\mu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \right] d\tau, \quad (9)$$

$$u_1|_{t < 0} \equiv 0, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \int_0^t h_1(x, t - \tau) \frac{\partial u_0}{\partial z} d\tau \right) \Big|_{z=+0} = 0. \quad (11)$$

Обратная задача: найти ядро $h_1(x, t)$, $t > 0$, входящее в (9), (11), если известна дополнительная информация о решении прямой задачи (9)–(11)

$$u_1(x, z, t)|_{z=+0} = g(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (12)$$

$g(x, t)$ — заданная функция.

Определение 2. Функция $h_1(x, t)$ из класса $C_t^1([0, \infty); L_2(\mathbb{R}))$ называется решением обратной задачи (9)–(12) если соответствующее ей решение прямой задачи (9)–(11) $u_1(x, z, t)$ из класса обобщённых функций $D'(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R})$ удовлетворяет (12) для $g(x, t)$, принадлежащих классу обобщённых функций $D'(\mathbb{R}_+^2)$. Здесь $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Данное исследование представляет двумерную обратную задачу линейной динамической упругости с памятью. Искомой величиной в поставленной задаче является ядро интегрального оператора, моделирующего явление памяти (или последствия), которое имеет место при распространении волновых процессов в вязкоупругих средах.

Задачи определения ядер памяти в интегро-дифференциальных уравнениях — направление в теории обратных задач, возникшее в конце прошлого столетия [1–7]. Подробный анализ

источников по данному направлению представлен в монографии [8], которая является одной из последних фундаментальных работ в области исследования обратных задач для сред с последствием. В ней представлены результаты исследования корректности ряда постановок одномерных и многомерных обратных динамических задач для гиперболических интегродифференциальных уравнений, возникающих при описании внутренних характеристик сред с последствием по измерениям волнового поля в доступных областях.

Многомерные обратные задачи являются наименее изученными. Их решение представляет как математический интерес, так и интерес с точки зрения приложений. Задачи по определению ядер, когда искомая функция зависит от двух и более переменных, рассмотрены в работах [9–19]. В [9] для решения обратных задач в ограниченной области применяется метод разделения переменных, с помощью которого задачи сводятся к системе интегральных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных функций, зависящих от временной переменной. В работах [10–15] отличительной особенностью исследований по определению ядер (имеющих специальный вид) является использование сосредоточенного источника возмущения волн и сведение исходной задачи к решению задач интегральной геометрии. Решениями обратных задач являются коэффициенты уравнения и пространственные части ядер, носитель которых сосредоточен в некоторой компактной области пространства. В работе [16] на основе метода шкал банаховых пространств получена локальная однозначная разрешимость задачи определения ядра $k(x, t)$ для уравнения вязкоупругости в классе функций, аналитических по переменной x и гладких по переменной t . Позже [17] с помощью этого же метода в комбинации с методом весовых норм была исследована глобальная однозначная разрешимость задачи определения $k(x, t)$.

В работах [18, 19] применялся асимптотический подход к решению двумерных задач определения ядер и коэффициентов в слабо горизонтально-неоднородных упругих средах с памятью. Из результатов по численному исследованию обратных задач для интегродифференциальных уравнений упругости можно отметить работы [20–23].

Новизна представленной работы заключается в применении принципа линеаризации к исследованию многомерной обратной задачи определения функции памяти для системы вязкоупругости. Теоретическая значимость исследования — получение необходимых и достаточных условий однозначной разрешимости двумерной обратной задачи (9)–(12) и оценки устойчивости её решения.

2. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

Прямая задача (6)–(8) изучена в монографии [24]. Показано, что в такой постановке при $(\rho, \lambda, \mu) \in \Lambda$ функция $u_0(x, z, t) \equiv u_0(z, t)$. Доказаны теоремы существования и единственности решения прямой задачи для $u_0(z, t)$ в классе $C^2(D_T)$, $D_T = \{(y, t) : y \leq t \leq T - y\}$, $T > 0$ фиксировано, $y = \phi(z) := \int_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}$, $c(z) := \sqrt{\frac{\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)}}$.

Далее будем полагать функцию $u_0(z, t)$ известной, удовлетворяющей условиям достаточной гладкости в области D_T .

В задаче (9)–(12) перейдём от функции $u_1(x, z, t)$ к её образу Фурье $\tilde{u}_1(\nu, z, t) := F_x[u_1](\nu, z, t)$, причём $\text{supp } \tilde{u}_1(\nu, z, t) \subset [-\omega, \omega]$, $j = 1, 2$, где ω — фиксированное положительное число.

Будем считать, что $\tilde{h}_1(\nu, t) = F_x[h_1](\nu, t) \in \tilde{\Lambda}_1(\omega, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu, t) \in C_t^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ и для любого фиксированного $t \in [0, T]$ $\text{supp } \tilde{h}_1(\nu, t) \subset [-\omega, \omega]$. Соответственно, $h_1(x, t) \in \Lambda_1(\omega, T)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{h}_1(\nu, t) = F_x[h_1](\nu, t) \in \tilde{\Lambda}_1(\omega, T)$.

Обратная задача (9)–(12) в терминах функции $\tilde{u}_1$ переписывается в виде

$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_1(\nu, z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} \right) - \nu^2 \mu \tilde{u}_1 + \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right] d\tau, \quad (13)$$

$$\tilde{u}_1|_{t<0} \equiv 0, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} + \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial u_0(z, \tau)}{\partial z} d\tau \right) \Big|_{z=+0} = 0, \quad (15)$$

$$\tilde{u}_1^1(\nu, 0, t) = F_x[g](\nu, t) =: \tilde{g}(\nu, t). \quad (16)$$

Пусть

$$V_1(\nu, y, t) := \frac{\tilde{u}_1(\nu, \phi^{-1}(y), t)}{s(y)}, \quad V_0(y, t) := \frac{u_0(\phi^{-1}(y), t)}{s(y)}, \quad s(y) := \sqrt{\frac{c(+0)\rho(+0)}{c(\phi^{-1}(y))\rho(\phi^{-1}(y))}}.$$

Тогда (13)–(16) для $y > 0$, $t \in \mathbb{R}$ примут вид

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \tilde{q}(\nu, y)V_1 + \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \left[\frac{\partial^2 V_0(y, \tau)}{\partial y^2} + q(y)V_0(y, \tau) \right] d\tau, \quad (17)$$

$$V_1|_{t<0} \equiv 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial V_0(y, \tau)}{\partial y} d\tau \right) \Big|_{y=+0} = 0, \quad (19)$$

$$V_1|_{y=0} = \tilde{g}(\nu, t), \quad (20)$$

где

$$\tilde{q}(y, \nu) := q(y) - \nu^2 \frac{\mu(\phi^{-1}(y))}{\rho(\phi^{-1}(y))}.$$

Имеем [24]

$$\begin{aligned} V_0(y, t) &= \theta(t - y) [a(0) + v(y, t)], \quad a(0) = [(\lambda(+0) + 2\mu(+0))\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}, \\ \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial V_0(y, \tau)}{\partial y} d\tau &= \frac{\partial}{\partial y} \int_y^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) (a(0) + v(y, \tau)) d\tau \\ &= -a(0)\tilde{h}_1(\nu, t - y) + \int_y^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial v}{\partial y}(y, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial^2 V_0(y, \tau)}{\partial y^2} d\tau &= a(0)\tilde{h}_1'(\nu, t - y) + \tilde{h}_1(\nu, t - y) \frac{\partial v}{\partial y}(y, y) \\ &\quad + \int_y^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь и далее, к примеру, $\tilde{h}_1'$, $\tilde{g}''$ означает операцию однократного и двукратного дифференцирования по переменной t соответствующих функций.

С учётом (21), (22) задача (17)–(20) перепишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \tilde{q}(y, \nu)V_1 + a(0)\tilde{h}_1'(\nu, t - y) + \tilde{h}_1(\nu, t - y) \frac{\partial v}{\partial y}(y, y) \\ &\quad + \int_y^t \tilde{h}_1(\nu, t - \tau) p(y, \tau) d\tau, \quad y > 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} \Big|_{y=+0} = a(0)\tilde{h}_1(\nu, t),$$

$$V_1|_{y=0} = \tilde{g}(\nu, t),$$

$$V_1|_{t=y} = 0, \quad (23)$$

где

$$p(y, t) := \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(y, t) + q(y) \left(a(0) + v(y, t) \right).$$

С помощью формулы Даламбера получаем

$$\begin{aligned} V_1(\nu, y, t) = & \frac{1}{2} (\tilde{g}(\nu, t-y) + \tilde{g}(\nu, t+y)) + \frac{1}{2} \int_{t-y}^{t+y} a(0) \tilde{h}_1(\nu, \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{t-y+\xi}^{t+y-\xi} \left\{ a(0) \tilde{h}'_1(\nu, \tau - \xi) + \tilde{h}_1(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) + \tilde{q}(\nu, \xi) V_1(\nu, \xi, \tau) \right. \\ & \left. + \int_\xi^\tau \tilde{h}_1(\nu, \tau - \eta) p(\xi, \eta) d\eta \right\} d\tau d\xi =: W[V_1, h_1, h'_1]. \end{aligned} \quad (24)$$

Переходя в равенстве (24) к пределу $t \rightarrow y + 0$ с учётом (23) и $\tilde{g}(\nu, 0) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} -\tilde{g}(\nu, 2y) = & \int_0^{2y} a(0) \tilde{h}_1(\nu, \tau) d\tau \\ & + \int_0^y \int_\xi^{2y-\xi} \left\{ a(0) \tilde{h}'_1(\nu, \tau - \xi) + \tilde{h}_1(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) + \tilde{q}(\nu, \xi) V_1(\nu, \xi, \tau) \right. \\ & \left. + \int_\xi^\tau \tilde{h}_1(\nu, \tau - \eta) p(\xi, \eta) d\eta \right\} d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (25)$$

Заменяя $2y$ на t и дифференцируя (25) по t , получаем

$$\begin{aligned} -\tilde{g}'(\nu, t) = & a(0) \tilde{h}_1(\nu, t) + \int_0^{t/2} \left\{ a(0) \tilde{h}'_1(\nu, t - 2\xi) + \tilde{h}_1(\nu, t - 2\xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) \right. \\ & \left. + \tilde{q}(\nu, \xi) V_1(\nu, \xi, t - \xi) + \int_\xi^{t-\xi} \tilde{h}_1(\nu, t - \xi - \tau) p(\xi, \tau) d\tau \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (26)$$

Дифференцируя по t (26) (предварительно сделав замену переменной во втором интеграле $t - 2\xi = \tau$), получаем уравнение для $\tilde{h}'_1(\nu, t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{h}'_1(\nu, t) = & -\frac{2}{3a(0)} \tilde{g}''(\nu, t) - \frac{2}{3a} \int_0^{t/2} \left\{ \tilde{h}_1(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) + \tilde{q}(\nu, \xi) \frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, \xi, t - \xi) \right. \\ & \left. + \tilde{h}_1(\nu, 0) p(\xi, t - \xi) + \int_\xi^{t-\xi} \tilde{h}'_1(\nu, t - \xi - \tau) p(\xi, \tau) d\tau \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (27)$$

Для замыкания системы (24), (27) необходимо добавить уравнение для $\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t)$:

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} W[V_1, h_1, h'_1], \quad (28)$$

и уравнение для $\tilde{h}_1(\nu, t)$:

$$\tilde{h}_1(\nu, t) = \tilde{h}_1(\nu, 0) + \int_0^t \tilde{h}'_1(\nu, \tau) d\tau. \quad (29)$$

Таким образом, получаем замкнутую линейную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода (24), (27)–(29) в области D_T относительно $V_1(\nu, y, t)$, $\tilde{h}'_1(\nu, t)$, $\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t)$, $\tilde{h}_1(\nu, t)$.

Так как в данную систему входит неизвестная величина $\tilde{h}_1(\nu, 0)$, то её можно найти из уравнения (26) при $t = 0$:

$$\tilde{h}_1(\nu, 0) = -\frac{1}{a(0)} \tilde{g}'(\nu, 0).$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основными результатами исследования являются следующие теоремы однозначной глобальной разрешимости и устойчивости обратной задачи определения $\tilde{h}_1(\nu, t)$.

Теорема 1. Пусть ω , T — фиксированные положительные числа, $(\rho, \lambda, \mu) \in \Lambda$. Для существования и единственности решения обратной задачи (9)–(12) $h_1(x, t) \in \Lambda_1(\omega, T)$ необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{g}(\nu, t) \in C_t^2(\mathbb{R} \times [0, T])$, $\tilde{g}(\nu, 0) = 0$, и для любого фиксированного $t \in [0, T]$ $\text{supp } \tilde{g}(\nu, t) \subset [-\omega, \omega]$.

Доказательство. Обратная задача (9)–(12) эквивалентна системе интегральных уравнений (24), (27)–(29). Данная система является замкнутой линейной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными свободными членами и ядрами относительно неизвестных функций в области D_T при $\nu \in \mathbb{R}$. Идея доказательства существования единственного решения данной системы состоит в применении обобщённого принципа сжатых отображений. Запишем систему (24), (27)–(29) в виде операторного уравнения

$$\psi = B\psi, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \psi &= [\psi_1(\nu, y, t), \psi_2(\nu, t), \psi_3(\nu, y, t), \psi_4(\nu, t)] : \\ &= [V_1(\nu, y, t), \tilde{h}'_1(\nu, t), \frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t) - \frac{a(0)}{2} y \tilde{h}'_1(\nu, t - y), \tilde{h}_1(\nu, t)]. \end{aligned}$$

Оператор $B = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ определён на множестве функций $\psi \in C(\mathbb{R} \times D_T)$, где

$$\begin{aligned} B_1\psi &= \psi_{01}(\nu, y, t) + \int_0^y a(0) \psi_4(\nu, 2\xi + t - y) d\xi \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^y \int_{t-y+\xi}^{t+y-\xi} \left\{ a(0) \psi_2(\nu, \tau - \xi) + \psi_4(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) \right. \\ &\left. + \tilde{q}(\nu, \xi) \psi_1(\nu, \xi, \tau) + \int_\xi^\tau \psi_4(\nu, \tau - \eta) p(\xi, \eta) d\eta \right\} d\tau d\xi, \\ B_2\psi &= \psi_{02}(\nu, t) - \frac{2}{3a(0)} \int_0^{t/2} \left\{ \psi_4(\nu, \tau - \xi) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) + \tilde{q}(\nu, \xi) \frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, \xi, t - \xi) \right. \\ &\left. + \psi_4(\nu, 0) p(\xi, t - \xi) + \int_\xi^{t-\xi} \psi_2(\nu, t - \xi - \tau) p(\xi, \tau) d\tau \right\} d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3\psi &= \psi_{03}(\nu, y, t) + \int_0^y a(0)\psi_2(\nu, 2\xi + t - y)d\xi \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^y \left\{ \frac{a}{2}\psi_2(\nu, t + y - 2\xi) + (\psi_4(\nu, t + y - 2\xi) - \psi_4(t - y)) \frac{\partial v}{\partial y}(\xi, \xi) \right. \\
&\quad \left. + \tilde{q}(\nu, \xi) (\psi_1(\nu, \xi, t + y - \xi) - \psi_1(\nu, \xi, t - y + \xi)) \right. \\
&\quad \left. + \int_\xi^{t+y-\xi} \psi_4(\nu, t + y - \xi - \eta)p(\xi, \eta)d\eta - \int_\xi^{t-y+\xi} \psi_4(\nu, t - y + \xi - \eta)p(\xi, \eta)d\eta \right\} d\xi,
\end{aligned}$$

$$B_4\psi = \psi_{04}(\nu) + 2 \int_0^{t/2} (t - 2\xi)\psi_2(\nu, 2\xi)d\xi,$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial t}(\nu, y, t) &= \psi_3(\nu, y, t) + \frac{a(0)}{2}y\psi_2(\nu, t - y), \\
\psi_{01}(\nu, y, t) &= \frac{1}{2}(\tilde{g}(\nu, t - y) + \tilde{g}(\nu, t + y)), \quad \psi_{02}(\nu, t) = -\frac{2}{3a}\tilde{g}''(\nu, t), \\
\psi_{03}(\nu, y, t) &= \frac{1}{2}(\tilde{g}'(\nu, t - y) + \tilde{g}'(\nu, t + y)), \quad \psi_{04}(\nu) = \tilde{h}_1(\nu, 0).
\end{aligned}$$

Покажем теперь, что некоторая степень n (n — натуральное число) линейного отображения $B\psi$ является сжатием. Положим

$$\|\psi\|(\nu) = \max \left\{ \max_{(y,t) \in D_T} |\psi_{1,3}(\nu, y, t)|, \max_{t \in [0, T]} |\psi_{2,4}(\nu, t)| \right\}.$$

Пусть $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ — две непрерывные вектор-функции в $\mathbb{R} \times D_T$, удовлетворяющие линейной системе интегральных уравнений (30). Обозначим

$$\Delta(y, t) = \{(\xi, \tau) : 0 \leq \xi \leq y, t - y + \xi \leq \tau \leq t + y - \xi\}, \quad \Sigma(y, t, \xi) = \{\tau : (\xi, \tau) \in \Delta(y, t)\}.$$

Тогда для $(\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T$ имеем (в оценках используем факт, что в уравнении (27) $t = 2y$)

$$\begin{aligned}
&|B_1\psi^{(1)} - B_1\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \\
&\leq \mu_1 \int_0^y \max \left\{ \max_{\tau \in \Sigma(y, t, \xi)} |\psi_1^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - \psi_1^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
&\leq \mu_1 \int_0^y \max \left\{ \max_{(\xi, \tau) \in D_T} |\psi_1^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - \psi_1^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, \max_{\xi \in [0, T/2]} |\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
&\leq \mu_1 y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,
\end{aligned}$$

далее

$$\begin{aligned}
&|B_2\psi^{(1)} - B_2\psi^{(2)}|(2y) \\
&\leq \mu_2 \int_0^y \max \left\{ \max_{\xi \in [0, T/2]} |\psi_3^{(1)}(\xi, T - \xi, \nu) - \psi_3^{(2)}(\xi, T - \xi, \nu)|, \max_{\xi \in [0, T/2]} |\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
&\leq \mu_2 y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |B_3\psi^{(1)} - B_3\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \\
& \leq \mu_3 \int_0^y \max \left\{ \max_{\tau \in \Sigma(y, t, \xi)} |\psi_1^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - \psi_1^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |\psi_{2,4}^{(1)}(2\xi) - \psi_{2,4}^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
& \leq \mu_3 y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,
\end{aligned}$$

$$|B_4\psi^{(1)} - B_4\psi^{(2)}|(2y) \leq \mu_4 \int_0^y \max_{\xi \in [0, T/2]} |\psi_2^{(1)}(2\xi) - \psi_2^{(2)}(2\xi)| d\xi \leq \mu_4 y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,$$

где μ_j — константы, зависящие от величин, входящих в C (теорема 2).

Полагая $M = \max\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4\}$, получаем, что

$$\max_{1 \leq j \leq 4} |B_j\psi^{(1)} - B_j\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \leq My \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T.$$

Далее

$$\begin{aligned}
& |B_1^2\psi^{(1)} - B_1^2\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \\
& \leq \mu_1 \int_0^y \max \left\{ \max_{\xi \in \Sigma(y, t, \tau)} |B_1\psi^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - B_1\psi^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |B_{2,4}\psi^{(1)}(2\xi) - B_{2,4}\psi^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
& \leq \mu_1 M \int_0^y \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| d\xi \leq \mu_1 M \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \\
& |B_2^2\psi^{(1)} - B_2^2\psi^{(2)}|(2y) \\
& \leq \mu_2 \int_0^y \max \left\{ \max_{\tau \in [\xi, 2y-\xi]} |B_3\psi^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - B_3\psi^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |B_{2,4}\psi^{(1)}(2\xi) - B_{2,4}\psi^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
& \leq \mu_2 M \int_0^y \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| d\xi \leq \mu_2 M \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \\
& |B_3^2\psi^{(1)} - B_3^2\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \\
& \leq \mu_3 \int_0^y \max \left\{ \max_{\tau \in \Sigma(y, t, \xi)} |B_1\psi^{(1)}(\nu, \xi, \tau) - B_1\psi^{(2)}(\nu, \xi, \tau)|, |B_{2,4}\psi^{(1)}(2\xi) - B_{2,4}\psi^{(2)}(2\xi)| \right\} d\xi \\
& \leq \mu_3 M \int_0^y \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| d\xi \leq \mu_3 M \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \\
& |B_4^2\psi^{(1)} - B_4^2\psi^{(2)}|(2y) \leq \mu_4 \int_0^y \max |B_2\psi^{(1)}(2\xi) - B_2\psi^{(2)}(2\xi)| d\xi \\
& \leq \mu_4 M \int_0^y \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| d\xi \leq \mu_4 M \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\max_{1 \leq j \leq 3} |B_j^2\psi^{(1)} - B_j^2\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \leq M^2 \frac{y^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T,$$

и, вообще,

$$\max_{1 \leq j \leq 4} |B_j^n\psi^{(1)} - B_j^n\psi^{(2)}|(\nu, y, t) \leq M^n \frac{y^n}{n!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (\nu, y, t) \in \mathbb{R} \times D_T,$$

$$\|B^n\psi^{(1)} - B^n\psi^{(2)}\| \leq M^n \frac{(\frac{T}{2})^n}{n!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|.$$

При любом фиксированном T число n можно выбрать настолько большим, что

$$M^n \frac{\left(\frac{T}{2}\right)^n}{n!} < 1.$$

Тогда отображение B^n является сжатием. Согласно обобщению принципа сжимающих отображений уравнение $B\psi = \psi$ имеет одно и только одно решение, принадлежащее $C(\mathbb{R} \times D_T)$. Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений. $\square$

Теорема 2. Пусть $h_1^{(1)}(x, t), h_1^{(2)}(x, t) \in \Lambda_1(\omega, T)$ — решения обратной задачи (9)–(12), отвечающие информации $g^{(1)}(x, t), g^{(2)}(x, t)$ соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 1 имеет место оценка устойчивости

$$\int_R \|h_1^{(1)} - h_1^{(2)}\|_{C[0, T]}^2 dx \leq C \int_{-\omega}^{\omega} \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|_{C^2[0, T]}^2 d\nu, \quad (31)$$

где C — некоторая константа, зависящая от величин ω, T и значений функций $\mu(z), \lambda(z), \rho(z)$.

Доказательство. Пусть $\psi^{(j)}$ — вектор-функции, которые являются решениями (30), то есть справедливы уравнения $\psi^{(j)} = B\psi^{(j)}$.

Переходя в этом выражении к разностям $\psi^{(1)} - \psi^{(2)}, \tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}$, из рассуждений, проведённых при доказательстве теоремы 1, получим оценку

$$\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|(\nu) \leq \alpha \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|_{C^2[0, T]}(\nu) + \beta \int_0^y \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|(\nu, \xi) d\xi, \quad (32)$$

где постоянные α, β зависят от величин, входящих в C . Из неравенства (32) следует, что

$$\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|(\nu) \leq C \|\tilde{g}^{(1)} - \tilde{g}^{(2)}\|_{C^2[0, T]}(\nu).$$

Неравенство (31) вытекает из следующего свойства изометричности оператора преобразования Фурье F_x :

$$\int_{-\omega}^{\omega} |\tilde{h}_1^{(1)}(\nu, t) - \tilde{h}_1^{(2)}(\nu, t)|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}} |h_1^{(1)}(x, t) - h_1^{(2)}(x, t)|^2 dx.$$

Теорема 2 доказана. $\square$

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости последовательности решений некоторого семейства задач к искомому решению. Пусть существует решение $h_1(x, t) \in C_t^1([0, \infty); L_2(\mathbb{R}))$, отвечающее информации $\tilde{g}(\nu, t)$.

Определим множество функций $\tilde{g}_\omega(\nu, t)$ по правилу

$$\tilde{g}_\omega(\nu, t) := \theta(\omega - |\nu|) \tilde{g}(\nu, t).$$

Выделим семейство обратных задач: определить функцию $h_1^\omega(x, t) = F_\nu^{-1}[\tilde{h}^\omega(\nu, t)]$ по информации $\tilde{g}_\omega(\nu, t)$.

Теорема 3. Данное семейство является регуляризованным, то есть:

- 1) для каждого $\omega > 0$ обратная задача корректна;
- 2) если данные таковы, что решение исходной (корректной) задачи существует, то при $\omega \rightarrow \infty$ последовательность решений семейства задач с этими данными стремится к решению исходной (некорректной) задачи.

Доказательство. Теоремы 1 и 2, доказанные ранее, утверждают о корректности обратной задачи. Теперь покажем, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}} |h_1^\omega(x, t) - h_1(x, t)|^2 dx = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}} |h_1^\omega(x, t) - h_1(x, t)|^2 dx &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_{-\omega}^{\omega} |\tilde{h}_1^\omega(\nu, t) - \tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu + \right. \\ &\left. \int_{-\infty}^{-\omega} |\tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu + \int_{\omega}^{+\infty} |\tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu \right) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left(\int_{-\infty}^{-\omega} |\tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu + \int_{\omega}^{+\infty} |\tilde{h}_1(\nu, t)|^2 d\nu \right) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым теорема 3 доказана. $\square$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВЦ РАН при поддержке Минобрнауки России (соглашение 075-02-2025-1633). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lorenzi A., Sinestrari E. An inverse problem in the theory of materials with memory I // Nonlinear Anal. 1988. V. 12. P. 1217–1335.
2. Grasselli M., Kabanikhin S.I., Lorentsi A. An inverse problem for an integro-differential equation // Sib. Mat. J. 1992. V. 33, N 3. P. 58–68.
3. Дурдиев Д.К. Обратная задача для трёхмерного волнового уравнения в среде с памятью // Математический анализ и дискретная математика. 1989. С. 19–27.
4. Cavaterra C., Grasselli M. Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type // Math. Models Methods Appl. Sci. 1994. V. 4, N 6. P. 807–842.
5. Bukhgeym A.L. Inverse problems of memory reconstruction // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1993. V. 1, N 3. P. 193–206.
6. Дурдиев Д.К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 574–582.
7. Bukhgeim A.L., Dyatlov G.V. Inverse problems for equations with memory // SIAM J. Math. Anal. 1998. V. 1, N 2. P. 1–17.
8. Durdiev D.K., Totieva Z.D. Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations. Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2023.
9. Janno J., Von Wolfersdorf L. An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity // Inverse Probl. 2001. V. 17. P. 13–24.
10. Lorenzi A., Messina F., Romanov V.G. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // Appl. Anal. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
11. Romanov V.G., Yamamoto M. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Appl. Anal. 2010. V. 89, N 3. P. 377–390.

12. *Lorenzi A., Romanov V.G.* Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // *Inverse Probl. Imaging.* 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.
13. *Романов В.Г.* Двумерная обратная задача для уравнения вязкоупругости // *Сиб. матем. журн.* 2012. Т. 53, № 6. С. 1401–1412.
14. *Романов В.Г.* Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
15. *Romanov V.G.* Inverse problems for differential equations with memory // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2014. V. 2, N 4. P. 51–80.
16. *Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // *Владикавк. матем. журн.* 2015. Т. 17, № 4. С. 18–43.
17. *Totieva Z.D.* A global solvability of a two-dimensional kernel determination problem for a viscoelasticity equation // *Math. Methods Appl. Sci.* 2022. V. 45, N 12. P. 7555–7575.
18. *Дурдиев Д.К., Бозоров З.Р.* Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // *Дальневост. матем. журн.* 2013. Т. 13, № 2. С. 209–221.
19. *Дурдиев Д.К., Сафаров Ж.Ш.* Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости со слабо горизонтальной неоднородностью // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2022. Т. 25, № 1. С. 14–38.
20. *Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г.* Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2001. Т. 4, № 3. С. 259–269.
21. *Durdiev U.D.* Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2020. V. 17. С. 179–189.
22. *Bozorov Z.R.* Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* 2020. V. 8, N 2. С. 4–16.
23. *Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolic V., Rajendra L. M., Wohlmuth B.* Determining Kernels In Linear Viscoelasticity // *J. Comput. Phys.* 2022. V. 464. Article 111331.
24. *Яхно В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1988.

UDC 517.958

TWO-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM FOR A VISCOELASTICITY EQUATION IN A VERTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

© 2025 Zh. D. Totieva^{1,2}

¹*Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, 362027 Russia*

²*North Caucasus Center for Mathematical Research
of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
selo Mikhailovskoe, North Ossetia–Alania, 363110 Russia*

E-mail: jannatuaeva@inbox.ru

Received 11.08.2023, revised 31.10.2024, accepted 26.03.2025

Abstract. The two-dimensional inverse problem of determining the kernel of an elasticity equation of memory type is studied. It is assumed that the coefficients of the equations depend on only one spatial variable. Applying the linearization principle, the inverse problem is reduced to an equivalent linear system of integral equations. The generalized principle of compressed maps is applied to the latter in the space of continuous functions. The theorem of unique solvability is proved and an estimate of the stability of the solution to the inverse problem is obtained.

Keywords: inverse problem, integro-differential equation, viscoelasticity, stability, delta function, kernel.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.106

REFERENCES

1. A. Lorenzi and E. Sinestrari, “An inverse problem in the theory of materials with memory I,” *Nonlinear Anal.* **12**, 1217–1335 (1988).
2. M. Grasselli, S. I. Kabanikhin, and A. Lorentsi, “An inverse problem for an integro-differential equation,” *Sib. Math. J.* **33** (3), 58–68 (1992).
3. D. K. Durdiev, “Inverse problem for three-dimensional wave equation in a medium with memory,” in *Mathematical Analysis and Discrete Mathematics* (1989), pp. 19–27 [in Russian].
4. C. Cavaterra and M. Grasselli, “Identifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type,” *Math. Models Methods Appl. Sci.* **4** (6), 807–842 (1994).
5. A. L. Bukhgeym, “Inverse problems of memory reconstruction,” *J. Inverse Ill-Posed Probl.* **1** (3), 193–206 (1993).
6. D. K. Durdiev, “A multidimensional inverse problem for an equation with memory,” *Sib. Math. J.* **35** (3), 514–521 (1994).
7. A. L. Bukhgeim and G. V. Dyatlov, “Inverse problems for equations with memory,” *SIAM J. Math. Anal.* **1** (2), 1–17 (1998).
8. D. K. Durdiev and Z. D. Totieva, *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations* (Springer Nature, Singapore, 2023).
9. J. Janno and L. Von Wolfersdorf, “An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity,” *Inverse Probl.* **17**, 13–24 (2001).

10. A. Lorenzi, F. Messina, and V. G. Romanov, "Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system," *Appl. Anal.* **86** (11), 1375–1395 (2007).
11. V. G. Romanov and M. Yamamoto, "Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement," *Appl. Anal.* **89** (3), 377–390 (2010).
12. A. Lorenzi and V. G. Romanov, "Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system," *Inverse Probl. Imaging* **5** (2), 431–464 (2011).
13. V. G. Romanov, "A two-dimensional inverse problem for the viscoelasticity equation," *Sib. Math. J.* **53** (6), 1128–1138 (2012).
14. V. G. Romanov, "Stability estimates for the solution to the problem of determining the kernel of a viscoelastic equation," *J. Appl. Ind. Math.* **6** (3), 360–370 (2012).
15. V. G. Romanov, "Inverse problems for differential equations with memory," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **2** (4), 51–80 (2014).
16. D. K. Durdiev and Zh. D. Totieva, "The problem of determining the multidimensional kernel of a viscoelasticity equation," *Vladikavkaz. Mat. Zh.* **17** (4), 18–43 (2015) [in Russian].
17. Z. D. Totieva, "A global solvability of a two-dimensional kernel determination problem for a viscoelasticity equation," *Math. Methods Appl. Sci.* **45** (12), 7555–7575 (2022).
18. D. K. Durdiev and Z. R. Bozorov, "The problem of determining the kernel of the integro-differential wave equation with weakly horizontal homogeneity," *Dal'nevostochn. Mat. Zh.* **13** (2), 209–221 (2013) [in Russian].
19. D. K. Durdiev and J. Sh. Safarov, "Problem of determining the two-dimensional kernel of the viscoelasticity equation with a weakly horizontal inhomogeneity," *J. Appl. Ind. Math.* **16** (1), 22–44 (2022).
20. A. L. Karchevskii and A. G. Fat'yanov, "Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system with aftereffect for a vertically inhomogeneous medium," *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* **4** (3), 259–269 (2001) [in Russian].
21. U. D. Durdiev, "Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory," *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **17**, 179–189 (2020).
22. Z. R. Bozorov, "Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect," *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **8** (2), 4–16 (2020).
23. B. Kaltenbacher, U. Khristenko, V. Nikolic, L. M. Rajendra, and B. Wohlmuth, "Determining kernels in linear viscoelasticity," *J. Comput. Phys.* **464**, 111331 (2022).
24. V. G. Yakhno, *Inverse Problems for Differential Equations of Elasticity* (Nauka, Novosibirsk, 1988) [in Russian].

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2025. Том 28, № 1

Зав. редакцией Т. А. Звонарева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 24.09.2025 г.
Формат $60 \times 84 \frac{1}{8}$. Усл. печ. л. 11.
Объём 4, 8 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия