

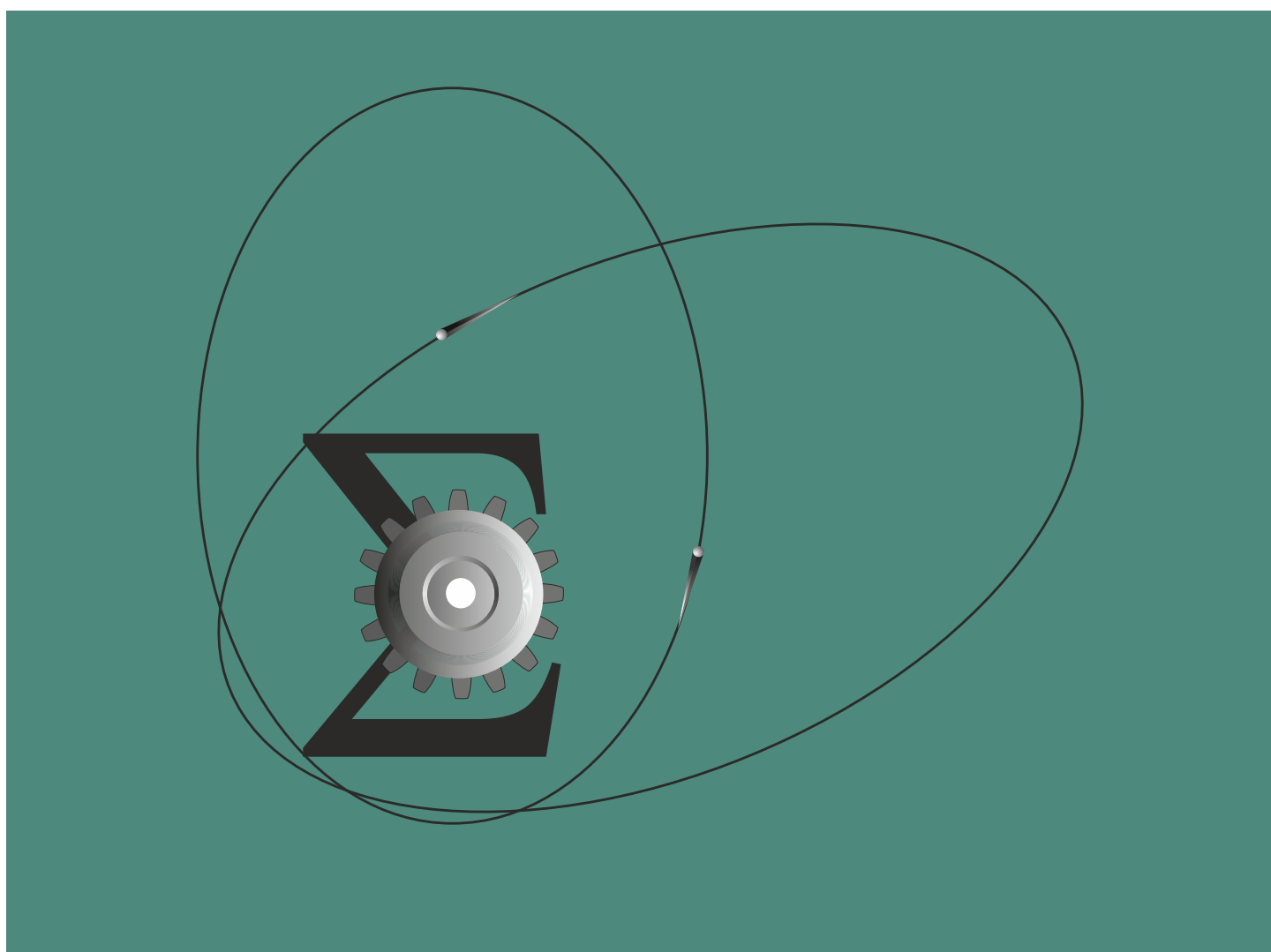
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 28

№ 4

2025



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Зам. главного редактора	М. А. Шишленин
Отв. секретарь	В. А. Дедок

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	С. Б. Медведев
Б. Д. Аннин	Р. Г. Новиков
В. С. Белоносов	Д. Е. Пальчунов
В. Н. Белых	И. Б. Петров
Ю. С. Волков	П. И. Плотников
К. В. Воронцов	М. И. Протасов
А. В. Гасников	В. Г. Романов
М. А. Гузеев	Е. М. Рудой
В. П. Ильин	К. К. Сабельфельд
С. И. Кабанихин	В. М. Садовский
А. Н. Карапетянц	Д. Н. Сидоров
М. В. Клибанов	А. С. Терсенов
В. А. Левин	В. С. Тимофеев
Н. И. Макаренко	В. В. Шайдуров
	А. А. Шананин

Учредители журнала:

Сибирское отделение РАН

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году

Выходит 4 раза в год

Том 28, № 4(104)

Научный журнал

Октябрь–декабрь, 2025 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Алексеев Г. В., Пухначев В. В., Соболева О. В. Анализ разрешимости краевой задачи для стационарной модели термодиффузии	5
Банщикова И. А. Кручение стержня квадратного сечения при ортотропной ползучести	21
Бойко С. В., Прохоров А. Н., Новоселов А. Н., Карпов Е. В. Алгоритм обучения системы ультранизкочастотной виброизоляции высокоточных измерительных приборов	40
Гладков С. О., Зморка И. Ю. К вопросу о сильном изгибе стержней	55
Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В. Модели послойного решения задачи рефракционной томографии в полупространстве	64
Иртегов В. Д., Титоренко Т. Н. Об особых решениях в задаче о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью	81
Кононенко Л. И. Параметрическое и явное задания медленных интегральных многообразий в двух задачах химической кинетики	96
Корзин А. И., Чичкова Н. А., Капарулин Т. И., Леоненко В. Н. Индивидуум-ориентированное моделирование эпидемических ОРВИ в городах РФ: методы реализации и оценки применимости	108
Кулешов А. С., Скрипкин А. Д. О существовании лиувиллевых решений в случае Гесса задачи о движении тяжёлого гиростата под действием гироскопических сил	130
Садовский В. М., Коянкин А. А., Садовский В. В. Быстрый алгоритм для численного решения задачи изгиба круговой пластины на опорах	145
Саламатин А. А., Халиуллина А. С., Даутов Р. З. Вязкостное пальцеобразование в условиях сверхкритической флюидной экстракции: полидисперсный зернистый слой	156
Ульянов О. Н., Рубина Л. И. Об одном подходе к изучению математических моделей естественной конвекции	174
Хлуднев А. М., Лазарев Н. П. О равновесии упругой пластины с включением и жёсткими перемычками: некоэрцитивные задачи	189
Шишкин Д. М., Киреев И. В., Зализняк В. Е. Визуализация областей абсолютной устойчивости численных схем Адамса методом boundary locus	205

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ

в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СибЖИМ
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998

4 issues per year

Vol. 28, No. 4(104)

Scientific journal

October-December, 2025

CONTENTS

Alekseev G. V., Pukhnachev V. V., Soboleva O. V. Analysis of solvability of boundary value problem for stationary thermal diffusion model	5
Banshchikova I. A. Torsion of square rod under orthotropic creep	21
Boiko S. V., Prokhorov A. N., Novoselov A. N., Karpov E. V. An algorithm for learning the mechanisms of ultra-low frequency vibration isolation of high-precision measuring systems	40
Gladkov S. O., Zmorka I. Y. On the issue of strong bending of the rod	55
Derevtsov E. Yu., Maltseva S. V. Models of a slice-by-slice solution for the refractive tomography problem in a half-space	64
Irtegov V. D., Titorenko T. N. On singular solutions in the problem of rolling of a ball with a multiply connected cavity filled with an ideal fluid	81
Kononenko L. I. Parametric and explicit representations of slow integral manifolds in two problems of chemical kinetics	96
Korzin A. I., Chichkova N. A., Kaparulin T. I., Leonenko V. N. Individual-oriented modeling of epidemic ARI in cities of the Russian Federation: methods of implementation and applicability assessment	108
Kuleshov A. S., Skripkin A. D. Existence of liouvillian solutions in the problem of motion of a heavy gyrostat under the action of gyroscopic forces in the Hess case	130
Sadovskii V. M., Koyankin A. A., Sadovskii V. V. Fast algorithm for numerical solution of the problem of bending of a circular plate on supports	145
Salamatin A. A., Khaliullina A. S., Dautov R. Z. Viscous fingering at supercritical fluid extraction conditions: polydisperse packed beds	156
Ul'yanov O. N., Rubina L. I. About one approach to studying mathematical models of natural convection	174
Khudnev A. M., Lazarev N. P. On the equilibrium of an elastic plate with inclusion and rigid bridges: non-coercive problems	189
Shishkin D. M., Kireev I. V., Zalizniak V. E. Visualization of absolute stability regions of the Adams numerical schemes by the boundary locus method	205

NOVOSIBIRSK

SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis

in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:

SibJIM

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

prosp. Akad. Koptiyuga 4

Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

УДК 517.958

**АНАЛИЗ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОДИФФУЗИИ**© 2025 Г. В. Алексеев^{1,2a}, В. В. Пухначев^{3b}, О. В. Соболева^{1c}¹*Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, г. Владивосток 690041, Россия,*²*Дальневосточный федеральный университет,
пос. Аякс, 10, о. Русский, г. Владивосток 690922, Россия,*³*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия*E-mails: ^aalekseev@iam.dvo.ru, ^bpukhnachev@gmail.com, ^csoboleva22@mail.ruПоступила в редакцию 14.10.2025 г.; после доработки 16.12.2025 г.;
принята к публикации 16.12.2025 г.

Доказывается глобальная разрешимость краевой задачи для стационарной модели термодиффузии, учитывающей эффект Сорé. В случае, когда исходные данные малы, доказывается локальная единственность слабого решения. В работе также выводятся априорные оценки основных компонент (скорости, температуры и концентрации) решения и анализируются результаты исследования их зависимости от всех коэффициентов переноса, входящих в рассматриваемую модель. Устанавливается особый характер зависимости указанных величин от модуля коэффициента Сорé.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, тепломассоперенос, термодиффузия, краевая задача, переменные коэффициенты, разрешимость, единственность, коэффициент Сорé, коэффициент Дюфура.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.401

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большое внимание уделяется теоретическому анализу многодиффузионных моделей тепломассопереноса (ТМП) и исследованию качественных свойств их решений. Это связано, с одной стороны, с той большой ролью, которую играют многокомпонентные жидкие системы на практике, а, с другой стороны, с большим разнообразием важных явлений, которые могут происходить в многокомпонентных смесях. Хорошо известно, например, что в теплопроводящей бинарной жидкости диффузионный массоперенос может возникать не только за счёт градиента концентрации в силу закона Фика [1], но и за счёт градиента температуры. Соответствующий эффект получил название эффекта Сорé [2]. В свою очередь, диффузионный теплосоперенос может возникать не только за счёт градиента температуры в силу закона Фурье [1], но и за счёт градиента концентрации (согласно эффекту Дюфура [2]).

К настоящему времени в литературе появилось достаточно большое количество работ, посвящённых исследованию качественных свойств решений для моделей ТМП, в том числе для моделей, учитывающих эффекты Сорé и/или Дюфура. Опубликованные работы можно разбить на несколько групп.

Первая группа содержит работы, в которых разрабатываются эффективные методы нахождения точных решений уравнений ТМП. Отметим среди них, начиная с пионерской работы Л. В. Овсянникова [3], работы [4]–[7], а также обзорную статью [8]. Вторая группа содержит

работы, посвящённые применению метода симметрии Ли – Овсянникова для исследования качественных свойств решений уравнений ТМП (см., например, [9]–[13]). Ряд работ посвящён разработке эффективных численных алгоритмов решения краевых задач для уравнений ТМП (с учётом эффекта Сорé) [14, 15]. Ещё одна группа содержит работы, касающиеся исследования разрешимости краевых задач для однодиффузионных моделей ТМП с переменными коэффициентами переноса (см., например, [16]–[21]). Но нужно отметить, что авторам неизвестны какие-либо работы по исследованию разрешимости краевых задач для двухдиффузионных моделей ТМП, учитывающих эффект Сорé или Дюфура. Во всяком случае, несмотря на наш тщательный поиск, мы не смогли найти в литературе публикации, посвящённые строгому исследованию разрешимости краевых задач для указанных моделей.

С учётом этого целью настоящей работы будет являться разработка математического аппарата исследования краевых задач для стационарной модели термодиффузии, описывающей течение теплопроводящей бинарной жидкости с учётом эффекта Сорé. Мы рассмотрим простой, но важный для практики случай, когда все коэффициенты переноса, входящие в указанные модели, постоянны, причём коэффициент Сорé, входящий в уравнение конвекции-диффузии для концентрации, может иметь произвольный знак (и величину). Основываясь на разработанном аппарате, мы докажем глобальную разрешимость сформулированной ниже конкретной краевой задачи для рассматриваемой модели термодиффузии, выведем априорные оценки норм решений, проанализируем их зависимость от всех коэффициентов переноса, а также докажем локальную единственность слабого решения. Аналогичные результаты справедливы в отношении разрешимости краевой задачи для двухдиффузионной модели ТМП, учитывающей эффект Дюфура (вместо эффекта Сорé).

1. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^3 с липшицевой границей Γ , состоящей из двух частей: Γ_D и Γ_N . В данной работе мы рассмотрим следующую краевую задачу для модели тепломассообмена, описывающую движение бинарной теплопроводящей жидкости в области Ω :

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - (\beta_T T - \beta_C C)\mathbf{G}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$-k\Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$-\lambda\Delta C - D^\theta\Delta T + \mathbf{u} \cdot \nabla C = f^c \text{ в } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad C = 0 \text{ на } \Gamma, \quad k \frac{\partial T}{\partial n} = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор скорости, T — температура среды, C — концентрация растворённого вещества, составляющего вместе с основной средой бинарную жидкость, $p = P/\rho_0$, где P — давление, $\rho_0 = \operatorname{const}$ — плотность жидкости, $\nu = \operatorname{const} > 0$ — коэффициент кинематической вязкости, $k = \operatorname{const} > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\lambda = \operatorname{const} > 0$ — коэффициент диффузии, $D^\theta = \operatorname{const}$ — коэффициент Сорé, $\beta_T > 0$ и $\beta_C > 0$ — постоянные коэффициенты теплового расширения и концентрационного сжатия, $\mathbf{G} = -(0, 0, G)$ — вектор гравитационного ускорения, а выражения $\beta_T T \mathbf{G}$ и $\beta_C C \mathbf{G}$ описывают соответственно плотности сил тепловой либо концентрационной плавучести, \mathbf{f} — плотность гидродинамических источников, f (либо f^c) — плотность источников тепла (либо вещества). Ниже на задачу (1)–(4) для заданных величин $\nu, k, \lambda, \beta_T, \beta_C, \mathbf{f}, f, f^c, \mathbf{g}$ и χ будем ссылаться как на задачу 1. Более подробно о выводе модели (1), (2), (3), причём в более общем случае переменных коэффициентов, можно прочитать в [8, 22].

Отметим, что для концентрации C мы используем условие Дирихле $C|_\Gamma = 0$ на всей границе Γ , тогда как для температуры T используется условие Дирихле $T|_{\Gamma_D} = 0$ на участке Γ_D и условие Неймана на Γ_N . Оно физически отвечает заданию нормального теплового потока

$k \frac{\partial T}{\partial n}$ на участке Γ_N . По аналогичной схеме могут быть исследованы другие краевые задачи для модели (1)–(4).

Для упрощения доказательства разрешимости и большей прозрачности рассуждений мы рассматриваем задачу 1 при однородных граничных условиях Дирихле для T и C соответственно на Γ_D и Γ . Случай неоднородных граничных условий Дирихле для T и C может быть сведён к однородному случаю путём введения лифтингов неоднородных граничных данных для T и C . О деталях сведения можно прочитать в [23, гл. 5].

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Так же, как и в работах [23, 24], при исследовании задачи 1, мы будем использовать пространства $L^r(D)$, $1 \leq r \leq \infty$, и пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω , либо границу Γ , либо часть Γ_0 границы Γ . Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{L}^r(D)$ и $\mathbf{H}^s(D)$. Через $(\cdot, \cdot)_{s,\Omega}$, $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ или $|\cdot|_{s,\Omega}$ будем обозначать скалярное произведение, норму или полунорму в $H^s(\Omega)$ или $\mathbf{H}^s(\Omega)$ соответственно. Скалярные произведения и нормы в пространстве $L^2(\Omega)$ или в его векторном аналоге будем обозначать через (\cdot, \cdot) и $\|\cdot\|_\Omega$, соответственно. X^* обозначает двойственное пространство к гильбертову пространству X , а отношение двойственности для пары X и X^* записывается через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ или просто $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

В нашем анализе мы будем также использовать следующие функциональные пространства:

$$\begin{aligned} L_0^2(\Omega) &= \{h \in L^2(\Omega) \mid (h, 1) = 0\}, & H_0^1(\Omega) &= \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \varphi|_\Gamma = 0\}, & \mathcal{C} &= H_0^1(\Omega), \\ \mathcal{T} &= \{h \in H^1(\Omega) \mid h|_{\Gamma_D} = 0\}, & \mathbf{H}_0^1(\Omega) &= H_0^1(\Omega)^3, & V &= \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}. \end{aligned}$$

Отметим, что каждое из пространств $H^1(\Omega)$, $\mathcal{C} \equiv H_0^1(\Omega)$ и \mathcal{T} является гильбертовым пространством по норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, которая эквивалентна полунорме $|\cdot|_{1,\Omega}$ для функции $C \in \mathcal{C}$ или $T \in \mathcal{T}$ в соответствии с неравенством Фридрихса — Пуанкаре [23, с. 26]:

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq C_P |\varphi|_{1,\Omega} \text{ для любой } \varphi \in \mathcal{T} \text{ (либо } \varphi \in \mathcal{C}), \quad C_P = \operatorname{const} > 1. \quad (5)$$

Для функции $T \in \mathcal{T}$ неравенство (5) имеет место, конечно, в случае, когда $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$, что, конечно, будет предполагаться выполненным (см. условие **2.1** ниже). Определим произведения пространств $X = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ и $W = V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C} \subset X$ с нормой

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_X^2 &= \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|T\|_{1,\Omega}^2 + \|C\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любого } \mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, T, C) \in X \\ &\text{(или для любого } (\mathbf{u}, T, C) \in W) \end{aligned} \quad (6)$$

и обозначим через X^* двойственное пространство $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathcal{T}^* \times \mathcal{C}^*$ к X .

Мы предполагаем, что для исходных данных задачи 1 выполняются следующие условия:

2.1. Ω — ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$; открытые подмножества Γ_D и Γ_N множества Γ удовлетворяют условиям $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ и $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$.

2.2. $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $f \in \mathcal{T}^*$, $f^c \in \mathcal{C}^*$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$.

2.3. $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $(\mathbf{g}, \mathbf{n})_{\Gamma^{(j)}} = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$; $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} \geq 0$.

2.4. $k \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\nu \in \mathbb{R}^+$, $D^\theta \in \mathbb{R}$, $\beta_T \in \mathbb{R}$, $\beta_C \in \mathbb{R}$.

Здесь и ниже $\mathbb{R}^+ = \{s \in \mathbb{R}, s > 0\}$.

Введём постоянные векторы

$$\mathbf{b}_1 = \beta_T \mathbf{G}, \quad \mathbf{b}_2 = \beta_C \mathbf{G}. \quad (7)$$

Отметим, что существуют константы β_1 и β_2 , с которыми выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |(\mathbf{b}_1 T, \mathbf{v})| &\equiv |(\beta_T \mathbf{G} T, \mathbf{v})| \leq \beta_1 \|T\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } T \in \mathcal{T}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ |(\mathbf{b}_2 C, \mathbf{v})| &\equiv |(\beta_C \mathbf{G} C, \mathbf{v})| \leq \beta_2 \|C\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } C \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ниже нам потребуются некоторые хорошо известные свойства билинейных и трилинейных форм, связанных с линейными и нелинейными слагаемыми в уравнениях (1)–(3). Сформулируем их в виде следующей леммы.

Лемма. Пусть $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ с $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ — заданная функция и пусть выполняются условия **2.1**, **2.4**. Тогда существуют положительные константы $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma'_2, \gamma_3$ и β , зависящие от Ω , такие, что имеют место следующие соотношения:

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \geq \delta_0 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (9)$$

$$(\nabla T, \nabla T) \geq \delta_1 \|T\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любой } T \in \mathcal{T}, \quad (10)$$

$$(\nabla C, \nabla C) \geq \delta_2 \|C\|_{1,\Omega}^2, \text{ для любой } C \in \mathcal{C}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \gamma'_1 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \\ &\leq \gamma_1 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \end{aligned} \quad (12)$$

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \text{ для любых } \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{w} \cdot \nabla T, h)| &\leq \gamma'_2 \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|T\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \leq \gamma_2 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|T\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \\ &\text{для любых } \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), T \in \mathcal{T}, h \in \mathcal{T} \text{ (либо } T \in \mathcal{C}, h \in \mathcal{C}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla S, S) &= (1/2)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, S^2)_{\Gamma_N} \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla h, h) &= 0 \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi, \varphi) = 0 \text{ для любых } \mathbf{w} \in V, \varphi \in \mathcal{T} \text{ (либо } \varphi \in \mathcal{C}), \quad (16)$$

$$|(\chi, S)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \chi \in L^2(\Gamma_N), S \in \mathcal{T}, \quad (17)$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}} -(\operatorname{div} \mathbf{v}, p) / \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \geq \beta \|p\|_{\Omega} \text{ для любой } p \in L_0^2(\Omega). \quad (18)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ 1

Введём слабую формулировку задачи 1. Для этого умножим первое уравнение в (1) на функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, уравнение (2) — на функцию $S \in \mathcal{T}$, а уравнение (3) — на функцию $h \in \mathcal{C}$, проинтегрируем по области Ω , применим формулы Грина и воспользуемся граничными условиями в (4). В результате мы приходим к слабой формулировке задачи 1, которая заключается в нахождении такой четвёрки функций $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $p \in L_0^2(\Omega)$, $T \in \mathcal{T}$, $C \in \mathcal{C}$, называемой слабым решением задачи 1, что

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1 T - \mathbf{b}_2 C, \mathbf{v}) \text{ для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (19)$$

$$k(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (20)$$

$$\lambda(\nabla C, \nabla h) + D^\theta(\nabla T, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C, h) = \langle f^c, h \rangle \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma. \quad (22)$$

Рассмотрим сужение тождества (19) на пространство V , имеющее вид

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1 T - \mathbf{b}_2 C, \mathbf{v}) \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (23)$$

Несложно показать, рассуждая, как, например, в [23, гл. 5], что для доказательства существования слабого решения задачи 1 достаточно доказать существование решения $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ задачи (20)–(23), а затем восстановить давление $p \in L_0^2(\Omega)$ по стандартной схеме с использованием схемы де Рама (см, например, [25]).

Поскольку скорость \mathbf{u} удовлетворяет неоднородному граничному условию $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}$, то, как обычно, будем искать компоненту \mathbf{u} решения $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ задачи (20)–(23) в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}. \quad (24)$$

В (24) $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ — новая неизвестная функция, тогда как $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}_{\varepsilon_0} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ — значение при $\varepsilon = \varepsilon_0$ так называемого лифтинга \mathbf{u}_ε скорости \mathbf{u} , $0 < \varepsilon \leq 1$, удовлетворяющего условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_\Gamma = \mathbf{g}, \quad \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq C_\varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \quad (25)$$

$$|(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}| \leq \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (26)$$

Здесь C_ε — константа, не зависящая от \mathbf{g} , но зависящая от ε и Ω . Доказательство существования лифтинга \mathbf{u}_ε с описанными свойствами можно найти в [23, прил. 2] и [25]. Что касается конкретного значения ε_0 параметра ε , характеризующего лифтинг скорости, то, как и в [23, 25], мы выберем его из условия $\varepsilon = \varepsilon_0 \leq (\nu_*/2) \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$. Из него и (26) следует, что

$$|((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\varepsilon_0}, \mathbf{v})| \leq (\nu_*/2) \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (27)$$

Подставляя (24) в (20), (21) и (23), мы получаем следующие тождества для тройки $(\tilde{\mathbf{u}}, T, C)$:

$$k(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T, S) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla T, S) = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (28)$$

$$\lambda(\nabla C, \nabla h) + D^\theta(\nabla T, \nabla h) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C, h) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla C, h) = \langle f^c, h \rangle \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \nu(\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \nu(\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - (\mathbf{b}_1 T, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2 C, \mathbf{v}) \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (30)$$

Нашей ближайшей целью является доказательство существования решения $(\tilde{\mathbf{u}}, T, C) \in W \equiv V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ задачи (28), (29), (30). Для этого мы применим теорему Шаудера о неподвижной точке. С этой целью введём тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$, $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}}, T, C) \in W$ и определим оператор $F : W \rightarrow W$, действующий по формуле: $F(\mathbf{z}) = \mathbf{y}$, где элементы $T \in \mathcal{T}$, $C \in \mathcal{C}$ и $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ получаются путём последовательного решения следующих линейных задач:

$$a_1(T, S) \equiv k(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T, S) + (\mathbf{w} \cdot \nabla T, S) = \langle l_1, S \rangle \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} a_2(C, h) &\equiv \lambda(\nabla C, \nabla h) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C, h) + (\mathbf{w} \cdot \nabla C, h) \\ &= \langle l_2, h \rangle - D^\theta(\nabla T_{\mathbf{w}}, \nabla h) \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} a_0(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &\equiv \nu(\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \\ &+ ((\mathbf{w} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \langle l_0, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1 T_{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}_2 C_{\mathbf{w}}, \mathbf{v} \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $\mathbf{z} \equiv (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ — заданный элемент, тогда как функционалы $l_1 : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $l_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ и $l_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ определяются формулами

$$\langle l_1, S \rangle = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N}, \quad \langle l_2, h \rangle = \langle f^c, h \rangle, \quad (34)$$

$$\langle l_0, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \nu(\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}). \quad (35)$$

Индекс \mathbf{w} у функций $T_{\mathbf{w}}$ и $C_{\mathbf{w}}$ в (33) означает, что $T_{\mathbf{w}}$ и $C_{\mathbf{w}}$ являются решениями соответственно задач (31) или (32), отвечающих заданному элементу $\mathbf{w} \in V$ или паре $(\mathbf{w}, T_{\mathbf{w}}) \in V \times \mathcal{T}$.

Используя (9), (12), (15), (16) и (26), мы выводим следующие оценки:

$$\nu|(\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v})| \leq \nu C_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (36)$$

$$|((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v})| \leq \gamma_1 \|\mathbf{u}_0\|_{1, \Omega}^2 \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \leq \gamma_1 C_{\varepsilon_0}^2 \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma}^2 \|\mathbf{v}\|_V \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (37)$$

$$\nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \geq (\delta_0 \nu / 2) \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega}^2 \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T, T) &= (1/2)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, T^2)_{\Gamma_N} \geq 0, & (\mathbf{w} \cdot \nabla T, T) &= 0, \\ (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C, C) &= 0, & (\mathbf{w} \cdot \nabla C, C) &= 0, \end{aligned} \quad (39)$$

для любых $T \in \mathcal{T}$ или $C \in \mathcal{C}$, $\mathbf{w} \in V$.

Из (34), (35), (36), (37) и (17) следует, что $l_1 \in \mathcal{T}^*$, $l_2 \in \mathcal{C}^*$, $l_0 \in V^*$ и выполняются следующие оценки:

$$\|l_1\|_{\mathcal{T}^*} \leq \|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N}, \quad \|l_2\|_{\mathcal{C}^*} = \|f^c\|_{\mathcal{C}^*}, \quad (40)$$

$$\|l_0\|_{V^*} \leq M_{l_0} \equiv \|\mathbf{f}\|_{-1, \Omega} + M_{\mathbf{g}}, \quad M_{\mathbf{g}} = \nu_{\max} C_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} + \gamma_1 C_{\varepsilon_0}^2 \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma}^2. \quad (41)$$

Кроме того, для каждого вектора $\mathbf{w} \in V$ билинейная форма $a_1 : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, определённая в тождестве (31), непрерывна с учётом (14) и коэрцитивна на \mathcal{T} с константой $k_* = \delta_1 k$. Последнее следует из (10), (16) и (39), в силу которых имеем:

$$a_1(S, S) \geq k(\nabla S, \nabla S) + (1/2)(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, S^2)_{\Gamma_N} \geq k_* \|S\|_{1, \Omega}^2 \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad k_* = \delta_1 k. \quad (42)$$

Точно так же для каждого вектора $\mathbf{w} \in W$ билинейная форма $a_2 : \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, определённая в (32), непрерывна с учётом (14) и коэрцитивна на \mathcal{C} с константой $\lambda_* = \delta_2 \lambda$, поскольку в силу (11), (16) и (39) имеем

$$a_2(h, h) \geq \lambda(\nabla h, \nabla h) \geq \lambda_* \|h\|_{1, \Omega}^2 \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \quad \lambda_* = \delta_2 \lambda. \quad (43)$$

Из теоремы Лакса — Мильграма и оценок (40) следует, что для любой тройки $\mathbf{z} \equiv (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ существует единственное решение $T \equiv T_{\mathbf{w}} \in \mathcal{T}$ задачи (31) и $C \equiv C_{\mathbf{w}} \in \mathcal{C}$ задачи (32). Кроме того, с учётом (40), (42), (43) для функций T и C справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|T\|_{1, \Omega} &\leq c_1 (\|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N}) \equiv M_T \quad (c_1 = 1/k_*), \\ \|C\|_{1, \Omega} &\leq c_2 (\|f\|_{\mathcal{C}^*} + |D^\theta| \|\nabla T\|_{\Omega}) \leq c_2 (\|f\|_{\mathcal{C}^*} + |D^\theta| M_T) \equiv M_C \quad (c_2 = 1/\lambda_*). \end{aligned} \quad (44)$$

Теперь рассмотрим задачу (33) относительно $\tilde{\mathbf{u}}$. Из (8), (41) и (44) следует, что для правой части в (33) справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} |\langle l_0, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1 T_{\mathbf{w}}, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2 C_{\mathbf{w}}, \mathbf{v})| &\leq [M_{l_0} + \beta_1 \|T_{\mathbf{w}}\|_{1, \Omega} + \beta_2 \|C_{\mathbf{w}}\|_{1, \Omega}] \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \\ &= [M_{l_0} + (\beta_1 M_T + \beta_2 M_C)] \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (45)$$

Кроме того, из (13) и (38) следует, что для каждой тройки (\mathbf{w}, η, μ) билинейная форма $a_0 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, определённая в (33), непрерывна и коэрцитивна с константой коэрцитивности $(\nu_*/2)$, где $\nu_* = \delta_0 \nu$. В таком случае из теоремы Лакса — Мильграма следует, что для каждой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W \equiv V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ существует единственное решение $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ задачи (33), и выполняется с учётом (45) следующая оценка:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \leq M_{\tilde{\mathbf{u}}} = (2/\nu_*)(M_{l_0} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C). \quad (46)$$

Исходя из формул (44) и (46), мы введём выпуклое замкнутое множество (типа бесконечномерного бруса) K в W формулой

$$\begin{aligned} K = \{(\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W \mid & \|\eta\|_{1,\Omega} \leq M_T \equiv (1/k_*)(\|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N}), \\ & \|\mu\|_{1,\Omega} \leq M_C \equiv (1/\lambda_*)(\|f^c\|_{\mathcal{C}^*} + |D^\theta| M_T), \\ & \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \leq M_{\tilde{\mathbf{u}}} \equiv (2/\nu_*)(M_{l_0} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C)\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Из (44), (46), (47) следует, что определённый выше оператор $F : W \rightarrow W$ отображает множество K в себя. Это означает, что для любой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in K$ решение $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, T, C)$ задачи (31), (32), (33) удовлетворяет следующим оценкам:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \leq M_{\tilde{\mathbf{u}}}, \quad \|T\|_{1,\Omega} \leq M_T, \quad \|C\|_{1,\Omega} \leq M_C. \quad (48)$$

Осталось доказать, что оператор F компактен и непрерывен на множестве K , заданном в (47). Для этого выберем произвольную последовательность $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n)$, $n = 1, 2, \dots$ из K и положим $\mathbf{y}_n \equiv (\tilde{\mathbf{u}}_n, T_n, C_n) = F(\mathbf{z}_n) \in K$. Покажем, что из последовательности \mathbf{y}_n можно выделить подпоследовательность, которая сходится по норме X к элементу $\mathbf{y} \in K$. В силу рефлексивности пространств $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и компактности вложений $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$ существует подпоследовательность последовательности $\{\mathbf{z}_n\} = \{(\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n)\}$, которую мы снова обозначим через $\{\mathbf{z}_n\}$, и существует элемент $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in K$ такой, что

$$\eta_n \rightarrow \eta \text{ слабо в } H^1(\Omega), \text{ сильно в } L^4(\Omega) \text{ и п.в. в } \Omega \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (49)$$

$$\mu_n \rightarrow \mu \text{ слабо в } H^1(\Omega), \text{ сильно в } L^4(\Omega) \text{ и п.в. в } \Omega \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (50)$$

$$\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w} \text{ слабо в } \mathbf{H}^1(\Omega), \text{ сильно в } \mathbf{L}^4(\Omega) \text{ и п.в. в } \Omega \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (51)$$

Пусть $\mathbf{y} = F(\mathbf{z})$. По определению, элемент $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, T, C) \in W$ является решением задачи (31), (32), (33), которая соответствует тройке $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu)$, а элемент $\mathbf{y}_n \equiv (\tilde{\mathbf{u}}_n, T_n, C_n) \in W$ является решением следующей задачи:

$$a_1(T_n, S) \equiv k(\nabla T_n, \nabla S) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_n, S) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla T_n, S) = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N}, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} a_2(C_n, h) \equiv \lambda(\nabla C_n, \nabla h) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C_n, h) \\ + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla C_n, h) = \langle f^c, h \rangle - D^\theta(\nabla T_n, \nabla h) \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} a_0(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) \equiv \nu(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_n, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\mathbf{w}_n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) \\ = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \nu(\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - (\mathbf{b}_1 T_n, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2 C_n, \mathbf{v}), \mathbf{v} \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (54)$$

Она получается из (31), (32), (33) заменой элемента $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu)$ на $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n)$, а тройки (\mathbf{u}, T, C) — на (\mathbf{u}_n, T_n, C_n) .

Докажем, что $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$ сильно в X при $n \rightarrow \infty$ или, что эквивалентно, $T_n \rightarrow T$, $C_n \rightarrow C$ сильно в $H^1(\Omega)$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}$ сильно в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ при $n \rightarrow \infty$. Для этого вычтем (31), (32) и (33),

соответственно, из (52), (53) и (54). В результате мы получим следующие линейные задачи для разностей $T_n - T$, $C_n - C$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}$:

$$a_1(T_n - T, S) \equiv k(\nabla(T_n - T), \nabla S) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla(T_n - T), S) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla(T_n - T), S) - ((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla T, S) \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (55)$$

$$a_2(C_n - C, h) \equiv \lambda(\nabla(C_n - C), \nabla h) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla(C_n - C), h) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla(C_n - C), h) - D^\theta((\nabla T_n - \nabla T), \nabla h) - ((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla C, h) \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (56)$$

$$a_0(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \equiv \nu(\nabla(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) + (((\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\mathbf{w}_n \cdot \nabla)(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) = -(((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - (\mathbf{b}_1(T_n - T), \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2(C_n - C), \mathbf{v}) \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (57)$$

Используя (14), (48), (49) и (51), мы имеем

$$|((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla T, S)| \leq \gamma'_2 \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|T\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \leq \gamma'_2 M_T \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|S\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (58)$$

Как было показано выше, для любой тройки $(\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n) \in V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ билинейная относительно разности $T_n - T$ и S форма $a_1 : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, определённая в (55), непрерывна и коэрцитивна с константой коэрцитивности $k_* > 0$. Отсюда вытекает, в силу (58) и теоремы Лакса — Мильграма, применённой к задаче (55), что

$$\|T_n - T\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Нам осталось показать, что

$$\|C_n - C\|_{1,\Omega} \rightarrow 0, \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (60)$$

Первое утверждение в (60) доказывается аналогично (59) с использованием (14), (59) и оценки

$$\|(\nabla T_n - \nabla T), \nabla h\| \leq \|\nabla T_n - \nabla T\|_{\Omega} \|\nabla h\|_{\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любой } h \in \mathcal{C}. \quad (61)$$

Для доказательства второго утверждения в (60) обратимся к задаче (57) и рассмотрим, как при выводе оценки (59), сначала первое слагаемое в правой части (57). Используя (12), (46) и (51), выводим что

$$(((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \leq \gamma'_1 \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq \gamma'_1 M_{\tilde{\mathbf{u}}} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (62)$$

Применяя далее оценки (8) ко второму и третьему слагаемым в правой части (57) и используя (59) и первое соотношение в (60), имеем

$$|(\mathbf{b}_1(T_n - T), \mathbf{v})| \leq \beta_1 \|T_n - T\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (63)$$

$$|(\mathbf{b}_2(C_n - C), \mathbf{v})| \leq \beta_2 \|C_n - C\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (64)$$

Из (62)–(64) вытекает в силу теоремы Лакса — Мильграма, применённой к задаче (57), коэрцитивной с константой коэрцитивности $\nu_*/2$, не зависящей от n , справедливость второго соотношения в (60).

Из (59) и (60) следует, что упомянутый выше оператор $F : W \rightarrow W$ является непрерывным и компактным на множестве $K \subset W$, определённом в (47). Поэтому в силу теоремы Шаудера оператор F имеет неподвижную точку $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, T, C) = F(\mathbf{z}) \in K$, которая, по построению, является искомым решением задачи (28), (29), (30) и, кроме того, удовлетворяет всем оценкам в (48). Это, в свою очередь, означает, что тройка $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$, где вектор \mathbf{u} определён в (24), является искомым решением задачи (20), (21), (22), (23) и справедливы следующие оценки для (\mathbf{u}, T, C) :

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq M_{\mathbf{u}} \equiv M_{\tilde{\mathbf{u}}} + C_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \quad \|T\|_{1,\Omega} \leq M_T, \quad \|C\|_{1,\Omega} \leq M_C. \quad (65)$$

Осталось доказать существование компоненты p слабого решения задачи 1, удовлетворяющей вместе с тройкой (\mathbf{u}, T, C) тождеству (19). Это делается с помощью теоремы де Рама (см. детали в [23] и [25]). Кроме того, используя $\inf - \sup$ условие (18) и рассуждая, как в [21], можно получить следующую оценку для p :

$$\|p\|_{\Omega} \leq M_p \equiv \beta^{-1}[(\nu + \gamma_1 M_{\mathbf{u}})M_{\mathbf{u}} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}]. \quad (66)$$

Здесь β — константа, введённая в (18). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 2.1–2.4. Тогда существует слабое решение $(\mathbf{u}, p, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ задачи 1, для которого справедливы оценки (65), (66), где $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$, M_T и M_C — непрерывные неотрицательные функции норм $\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}$, $\|f\|_{\mathcal{T}^*}$, $\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}$, $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} M_T &\equiv (1/\delta_1 k)(\|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N}), \\ M_C &\equiv (1/\delta_2 \lambda)(\|f^c\|_{\mathcal{C}^*} + |D^\theta| M_T), \\ M_{\tilde{\mathbf{u}}} &\equiv (2/\delta_0 \nu)(M_{i_0} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C). \end{aligned} \quad (67)$$

Совершенно по аналогичной схеме может быть исследована краевая задача для двухдиффузионной модели ТМП, учитывающей эффект Дюфура (вместо эффекта Сорé). Для этой модели, называемой моделью концентрационной диффузии, уравнения (1) и (4) не изменяются, а (2) и (3) принимают вид

$$-k\Delta T - D^\delta \Delta C + \mathbf{u} \cdot \nabla T = f \text{ в } \Omega, \quad (2a)$$

$$-\lambda \Delta C + \mathbf{u} \cdot \nabla C = f^c \text{ в } \Omega. \quad (3a)$$

Здесь $D^\delta \in \mathbb{R}$ — коэффициент Дюфура. На полученную задачу (1), (2a), (3a), (4), будем ссылаться как на задачу 2. Для задачи 2 справедлив следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 2.1–2.4 и $D^\delta \in \mathbb{R}$. Тогда существует слабое решение $(\mathbf{u}, p, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ задачи 2, для которого справедливы оценки (65), (66), где M_C , M_T и $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$ — непрерывные неотрицательные функции норм $\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}$, $\|f\|_{\mathcal{T}^*}$, $\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}$, $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|\chi\|_{\Gamma_N}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned} M_C &\equiv (1/\delta_2 \lambda)\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}, \\ M_T &\equiv (1/\delta_1 k)(\|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N} + |D^\delta| M_C), \\ M_{\tilde{\mathbf{u}}} &\equiv (2/\delta_0 \nu)(M_{i_0} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C). \end{aligned} \quad (68)$$

Анализ оценок (65)–(68) показывает, что известный факт об обратной пропорциональной зависимости H^1 -норм основных компонент (скорости, температуры и концентрации) решения задачи 1 от ведущих коэффициентов ν , k и λ (см., например, [23, гл. 5], [26]) сохраняется

и для модели термодиффузии (1)–(3). Но в отношении их зависимости от коэффициента Сорé наблюдается совсем другая тенденция. Видно, что для задачи 1 оценки H^1 -норм скорости и концентрации линейно растут с ростом $|D^\theta|$, тогда как оценка H^1 -нормы температуры, вообще, не зависит от $|D^\theta|$. Точно так же для задачи 2 оценки H^1 -норм скорости и температуры линейно растут с ростом модуля коэффициента Дюфура $|D^\delta|$, тогда как оценка H^1 -нормы концентрации не зависит от $|D^\delta|$. В этом состоит основное отличие в поведении решений краевых задач для классической стационарной модели ТМП, рассмотренной, например, в [26], и исследованных в этой работе краевых задач для модели ТМП, учитывающей эффект Сорé (или Дюфура).

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Выведем в этом разделе достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие единственность слабого решения задачи 1. Предположим, что, наряду с решением $(\mathbf{u}_1, p_1, T_1, C_1)$ задачи 1, существование которого вместе с оценками (65), (66) вытекает из теоремы 3.1, существует ещё одно решение $(\mathbf{u}_2, p_2, T_2, C_2)$ задачи 1. Полагая $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $p = p_1 - p_2$, $T = T_1 - T_2$, $C = C_1 - C_2$, вычтем соотношения (19)–(22), записанные для \mathbf{u}_2 , p_2 , T_2 и C_2 , из этих же соотношений, записанных для \mathbf{u}_1 , p_1 , T_1 и C_1 . В результате мы приходим к следующим соотношениям для разностей \mathbf{u} , p , T и C :

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p) \\ = -(\mathbf{b}_1 T, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2 C, \mathbf{v}) \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \end{aligned} \quad (69)$$

$$k(\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla T, S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T_1, S) = 0 \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (70)$$

$$\lambda(\nabla C, \nabla h) + D^\theta(\nabla T, \nabla h) + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla C, h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C_1, h) = 0 \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (71)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad T = 0 \text{ на } \Gamma_D, \quad C = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (72)$$

Полагая в (69)–(71) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, $S = T$, $h = C$ и учитывая (13), (15), (16) и условие $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, будем иметь

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) = -((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u}) - (\mathbf{b}_1 T, \mathbf{u}) + (\mathbf{b}_2 C, \mathbf{u}), \quad (73)$$

$$k(\nabla T, \nabla T) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T_1, T) \leq 0, \quad (74)$$

$$\lambda(\nabla C, \nabla C) + D^\theta(\nabla T, \nabla C) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C_1, C) \leq 0. \quad (75)$$

Из (74) и (75) выводим последовательно с учётом (10), (11), (14) и оценок $\|T_1\|_{1,\Omega} \leq M_T$, $\|C_1\|_{1,\Omega} \leq M_C$, что

$$\|T\|_{1,\Omega} \leq \frac{\gamma_2}{\delta_1 k} M_T \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}, \quad \|C\|_{1,\Omega} \leq \frac{\gamma_2}{\delta_2 \lambda} M_C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \frac{|D^\theta|}{\delta_2 \lambda} \|T\|_{1,\Omega}. \quad (76)$$

Из (76) вытекает, что

$$\|C\|_{1,\Omega} \leq \frac{\gamma_2}{\delta_2 \lambda} M_C \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \frac{|D^\theta|}{\delta_2 \lambda} \left(\frac{\gamma_2}{\delta_1 k} M_T \right) \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq \left[\frac{\gamma_2}{\delta_2 \lambda} M_C + \frac{|D^\theta|}{\delta_2 \lambda} \left(\frac{\gamma_2}{\delta_1 k} M_T \right) \right] \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}. \quad (77)$$

Используя предыдущие оценки (12), (8), (76), (77), и оценку $\|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega} \leq M_{\mathbf{u}}$ из (73) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \delta_0 \nu \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 &\leq \gamma_1 \|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + (\beta_1 \|T\|_{1,\Omega} + \beta_2 \|C\|_{1,\Omega}) \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \\ &\leq \left[\gamma_1 M_{\mathbf{u}} + \frac{\beta_1 \gamma_2}{\delta_1 k} M_T + \frac{\beta_2}{\delta_2 \lambda} \left(\gamma_2 M_C + \frac{\gamma_2 D^\theta}{\delta_1 k} M_T \right) \right] \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Из него вытекает, в свою очередь, следующее основное неравенство:

$$\left[\delta_0 \nu - \gamma_1 M_{\mathbf{u}} - \frac{\gamma_2}{\delta_1 k} \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 D^\theta}{\delta_2 \lambda} \right) M_T - \frac{\beta_2 \gamma_2}{\delta_2 \lambda} M_C \right] \|\mathbf{u}\|_{1, \Omega}^2 \leq 0. \quad (78)$$

Пусть исходные данные для задачи 1 таковы, что выполняется условие

$$\gamma_1 M_{\mathbf{u}} + \frac{\gamma_2}{\delta_1 k} \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 |D^\theta|}{\delta_2 \lambda} \right) M_T + \frac{\beta_2 \gamma_2}{\delta_2 \lambda} M_C < \delta_0 \nu$$

или (эквивалентное) условие

$$\frac{\gamma_1}{\delta_0 \nu} M_{\mathbf{u}} + \frac{\beta_1}{\delta_0 \nu} \frac{\gamma_2}{\delta_1 k} M_T + \frac{\beta_2}{\delta_0 \nu \delta_2 \lambda} \left(\gamma_2 M_C + \frac{\gamma_2 |D^\theta|}{\delta_1 k} M_T \right) < 1. \quad (79)$$

Из (78) тогда вытекает, что $\mathbf{u} = 0$, а из (76), в свою очередь, следует, что $T = 0$ и $C = 0$. Это означает, что $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, $T_1 = T_2$, $C_1 = C_2$. Отсюда и (69) с учётом $\inf - \sup$ условия (18) вытекает, что $p = 0$. Тем самым доказана теорема.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 3.1 и условие (79). Тогда слабое решение задачи 1 существует и единственно.

Аналогичная теорема единственности верна и для задачи 2.

Замечание. При $D^\theta = 0$, т. е. в отсутствие эффекта Сорé, неравенство (79) переходит в условие

$$\frac{\gamma_0}{\delta_0 \nu} M_{\mathbf{u}} + \frac{\gamma_2}{\delta_0 \nu} \frac{\beta_1}{\delta_1 k} M_T + \frac{\gamma_2}{\delta_0 \nu} \frac{\beta_2}{\delta_2 \lambda} M_C < 1, \quad (*)$$

имеющее смысл условия единственности решения краевой задачи для классической модели тепломассопереноса, установленное в [26] (см. также [23, гл. 5]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены краевые задачи для стационарных двухдиффузионных моделей тепломассопереноса, учитывающих эффект Сорé (либо эффект Дюфура). Развита математический аппарат их исследования, на основе которого доказана глобальная разрешимость указанных краевых задач, выведены априорные оценки решений и доказана локальная единственность слабого решения. Структура построенных оценок норм основных компонент решения такова, что, в частности, для задачи 1 оценка H^1 -нормы температуры не зависит от модуля коэффициента Сорé, тогда как оценки для H^1 -норм скорости и концентрации линейно растут с его ростом. Аналогичная ситуация наблюдается и для задачи 2. Отметим, что сценарий, для которого в исходной модели учитываются оба эффекта Сорé и Дюфура, (с коэффициентами D^θ и D^δ), является существенно более сложным для теоретического анализа. Исследованию этого сценария, так же, как и случаев, когда все входящие в модель коэффициенты переноса зависят от одного или обоих диффузионных параметров, авторы предполагают посвятить отдельную работу.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (проект № 075-00459-25-00). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

Исследование первого автора также выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2025-1638/1 от 10.03.2025). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гебхарт Б. и др. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. М: Мир, 1991. Т. 1.
2. Пригожин И, Канделупи Д. Современная термодинамика (От тепловых двигателей до диссипативных структур). Москва: Мир, 2002.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. 1959. Т. 125, № 3. С. 492–495.
4. Пухначев В.В. Многомерные точные решения уравнений нелинейной диффузии // Прикл. математика и техн. физика. 1995. Т. 36, № 2. С. 23–31.
5. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338, N 448; <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.016>.
6. Рыжков И.И. Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии бинарной смеси в случае плоского движения // Прикл. математика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 1. С. 95–108.
7. Андреев В.К., Рыжков И.И. Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 4. С. 508–517.
8. Степанова И.В. Симметрии в уравнениях тепломассопереноса в вязких жидкостях (обзор) // Вестн. Омск. гос. ун-та. 2019. Т. 24. № 2. С. 51–65.
9. Stepanova I.V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity // Appl. Math Comput. 2019. V. 343. P. 57–66.
10. Stepanova I.V. Symmetry analysis of nonlinear heat and mass transfer equations under Soret effect // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2015. V. 20. P. 684–691.
11. Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013.
12. Stepanova I.V. Group classification for equations of thermodiffusion in binary mixture // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2013. V. 18. P. 1341–1346.
13. Андреев В.К., Степанова И.В. Симметрия уравнений термодиффузии при нелинейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 4. С. 47–56.
14. Lyubimova T., Rushinskaya K., Zubova N. Onset and nonlinear regimes of convection of a binary mixture in rectangular cavity heated from below // Microgravity Sci. Technol. 2020. V. 32. P. 961–972; <https://doi.org/10.1007/s12217-020-09823-x>
15. Любимова Т.П., Рушинская К.С., Зубова Н.А. Влияние переменного коэффициента термодиффузии на конвекцию бинарной смеси в прямоугольных полостях // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 2. С. 233–244; <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.20>
16. Lorca S.A, Boldrini J.L. Stationary solutions for generalized Boussinesq models // J. Diff. Eq. 1996. V. 124. N 389; DOI:10.1006/jdeq.1996.0016
17. Lorca S.A, Boldrini J.L. The initial value problem for a generalized Boussinesq model // Nonlinear Anal. 1999. V. 36. N 457; DOI:10.21711/231766361996/rmc115
18. Гончарова О.Н. Единственность решения двумерной нестационарной задачи для уравнений конвекции с вязкостью, зависящей от температуры // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 2. С. 234–242; <https://www.mathnet.ru/de10552>
19. Antontsev S.N., Diaz J.L., de Oliveira H.B. Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. 2005. V. 61. P. 1–14.
20. Antontsev S.N., de Oliveira H.B. The Oberbeck–Boussinesq problem modified by a thermo-absorption term // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 379. P. 802–817.

21. *Alekseev G.V, Soboleva O.V.* Solvability analysis for the Boussinesq model of heat transfer under the nonlinear Robin boundary condition for the temperature // *Phil. Trans. R. Soc.* 2024. V. A. Article 382: 20230301; <https://doi.org/10.3390/math12030391>
22. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.x
23. *Алексеев Г.В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. Москва: Научный мир, 2010.
24. *Kovtunen V.A., Zubkova A.V.* On generalized Poisson–Nernst–Planck equations with inhomogeneous boundary conditions: a-priori estimates and stability // *Math. Methods Appl. Sci.* 2017. V. 40. N 6. P. 2284–2299.
25. *Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначёв В.В., Руссо Р.* Задача протекания для уравнений Навье–Стокса // *Успехи мат. наук.* 2014. Т. 69. Вып. 6. № 420. С. 1065–1122; DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9616>
26. *Алексеев Г.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепло-массопереноса // *Сиб. мат. журн.* 2001. Т. 42. № 5. С. 971–991.

UDC 517.958

ANALYSIS OF SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR STATIONARY THERMAL DIFFUSION MODEL© 2025 G. V. Alekseev^{1,2a}, V. V. Pukhnachev^{3b}, O. V. Soboleva^{1c}¹*Institute of Applied Mathematics, FEB RAS,
Radio st., 7, Vladivostok 690041, Russia,*²*Far Eastern Federal University,
Campus 10 Ajax Bay, Russky Island, Vladivostok 690922, Russia,*³*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Acad. Lavrentyev pr., 15, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^aalekseev@iam.dvo.ru, ^bpukhnachev@gmail.com, ^csoboleva22@mail.ru

Received 14.10.2025, revised 16.12.2025, accepted 16.12.2025

Abstract. The mathematical apparatus for studying the boundary value problem for a stationary thermal diffusion model taking into account the Soré effect is developed. On the basis of the apparatus, the global solvability of the boundary value problem under study is proved. In the case when the problem data are small, the local uniqueness of the weak solution is proved. Also, we derive a priori estimates of the main components (velocity, temperature and concentration) of the solution of the problem under consideration and discuss the results of a study of the nature of their dependence on all transfer coefficients. A special dependence on the modulus of the Soré coefficient is established.

Keywords: differential equations, heat and mass transfer, thermal diffusion, boundary value problem, variable coefficients, solvability, uniqueness, Soré coefficient.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.401

REFERENCES

1. Gebkhart B., et. al. Svobodnokonvektivnye techeniya, teplo- i massoobmen. [Free-convective flows, heat and mass exchange]. Moscow: Mir, 1991. Vol. 1 (in Russian).
2. Prigozhin I., Kandepudi D. Sovremennaya termodinamika (Ot teplovykh dvigatelei do dissipativnykh struktur) [Modern thermodynamics (From heat engines to dissipative structures)]. Moscow: Mir, 2002 (in Russian).
3. Ovsyannikov L.V. Gruppovye svoystva uravnenii nelineinoy teploprovodnosti [Group properties of nonlinear thermal conductivity equations]. *DAN SSSR*, 1959, Vol. 125, No. 3, pp. 492–495 (in Russian).
4. Pukhnachev V.V. Mnogomernye tochnye resheniya uravnenii nelineinoy diffuzii [Multidimensional exact solutions of nonlinear diffusion equations]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1995, Vol. 36, No. 2, pp. 23–31 (in Russian).
5. Meleshko S.V., Moyo S. On the complete group classification of the reaction–diffusion equation with a delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, Vol. 338, No. 448; <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.016>.
6. Ryzhkov I.I. Ob invariantnykh resheniyakh uravnenii termodiffuzii binarnoi smesi v sluchae ploskogo dvizheniya [On invariant solutions of equations of thermal diffusion of binary mixture in case of plane motion]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 2006, Vol. 47, No. 1, pp. 95–108 (in Russian).
7. Andreev V.K., Ryzhkov I.I. Gruppovaya klassifikatsiya i tochnye resheniya uravnenii termodiffuzii. [Symmetry Classification and Exact Solutions of the Thermal Diffusion Equations]. *Differenc. Uravn. [Diff. Equ.]*, 2005, Vol. 41, No. 4, pp. 508–517 (in Russian).

8. Stepanova I.V. Simmetrii v uravneniyakh teplomassoperenosa v vyazkikh zhidkostyakh (obzor) [Symmetries of heat and mass transfer equations in viscous fluids (review)]. *Vestn. Omskogo un-ta* [Herald of Omsk University], 2019, Vol. 24, No. 2, pp. 51–65 (in Russian).
9. Stepanova I.V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity. *Appl. Math Comput.*, 2019, Vol. 343, pp. 57–66.
10. Stepanova I.V. Symmetry analysis of nonlinear heat and mass transfer equations under Soret effect // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2015. V. 20. P. 684–691.
11. Ryzhkov I.I. Termodiffuziya v smesyakh: uravneniya, simmetrii, resheniya i ikh ustoychivost' [Thermal diffusion in mixtures: equations, symmetries, solutions and their stability]. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2013 (in Russian).
12. Stepanova I.V. Group classification for equations of thermodiffusion in binary mixture. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2013, Vol. 18, pp. 1341–1346.
13. Andreev V.K., Stepanova I.V. Simmetriya uravnenii termodiffuzii pri nelineinoi zavisimosti sily plavuchesti ot temperatury i kontsentratsii [Symmetry of thermal diffusion equations with non-linear dependence of buoyancy force on temperature and concentration]. *Vychisl. Tekhnol.*, 2010, Vol. 15, No. 4, pp. 47–56 (in Russian).
14. Lyubimova T., Rushinskaya K., Zubova N. Onset and nonlinear regimes of convection of a binary mixture in rectangular cavity heated from below. *Microgravity Sci. Technol.*, 2020, Vol. 32, pp. 961–972; <https://doi.org/10.1007/s12217-020-09823-x>
15. Lyubimova T.P., Rushinskaya K.S., Zubova N.A. Vliyanie peremennogo koeffitsienta termodiffuzii na konvektsiyu binarnoi smesi v pryamougol'nykh polostyakh. [Influence of a variable thermal diffusion coefficient on convection of a binary mixture in rectangular cavities]. *Vychisl. Mekh. Sploshn. Sred.*, 2021, Vol. 14, No. 2, pp. 233–244 (in Russian); <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.20>
16. Lorca S.A, Boldrini J.L. Stationary solutions for generalized Boussinesq models. *J. Diff. Eq.*, 1996, Vol. 124, No. 389; DOI:10.1006/jdeq.1996.0016
17. Lorca S.A, Boldrini J.L. The initial value problem for a generalized Boussinesq model. *Nonlinear Anal.*, 1999, Vol. 36, No. 457; DOI:10.21711/231766361996/rmc115
18. Goncharova O.N. Edinstvennost' resheniya dvumernoi nestatsionarnoi zadachi dlya uravnenii konvektsii s vyazkost'yu, zavisyashchei ot temperatury [Unique Solvability of a Two-Dimensional Nonstationary Problem for the Convection Equations with Temperature-Dependent Viscosity]. *Differenc. Uravn.* [Diff. Equ.], 2002, Vol. 38, No. 2. pp. 234–242 (in Russian); <https://www.mathnet.ru/de10552>
19. Antontsev S.N., Diaz J.I., de Oliveira H.B. Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing. *Progress Nonlinear Differ. Equ. Their Appl.*, 2005, Vol. 61, pp. 1–14.
20. Antontsev S.N., de Oliveira H.B. The Oberbeck–Boussinesq problem modified by a thermo-absorption term. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, Vol. 379, pp. 802–817.
21. Alekseev G.V, Soboleva O.V. Solvability analysis for the Boussinesq model of heat transfer under the nonlinear Robin boundary condition for the temperature. *Phil. Trans. R. Soc.*, 2024, V. A. Article 382: 20230301; <https://doi.org/10.3390/math12030391>
22. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika [Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics]. Moscow: Nauka, 1986 (in Russian).
23. Alekseev G.V. Optimizatsiya v statsionarnykh zadachakh teplomassoperenosa i magnitnoi gidrodinamiki [Optimization in stationary problems of heat and mass transfer and magnetic hydrodynamics]. Moscow: Nauchnyi Mir, 2010 (in Russian).
24. Kovtunen V.A., Zubkova A.V. On generalized Poisson–Nernst–Planck equations with inhomogeneous boundary conditions: a-priori estimates and stability. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, Vol. 40, No. 6, pp. 2284–2299.
25. Korobkov M.V., Piletskas K., Pukhnachev V.V., Russo R. Zadacha protekaniya dlya uravnenii Nav'e-Stoksa [The flux problem for the Navier–Stokes equations]. *Uspekhi Mat. Nauk*, 2014, Vol. 69, Iss. 6, No. 420, pp. 1065–1122 (in Russian); DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9616>

26. Alekseev G.V. Razreshimost' obratnykh ekstremal'nykh zadach dlya stacionarnykh uravnenii teplomassoperenosa [Solvability of Inverse Extremal Problems for Stationary Heat and Mass Transfer Equations]. *Sib. mat. zhurn.*, 2001, Vol. 42, No. 5, pp. 971–991 (in Russian).

УДК 539.376

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2025 И. А. Банщикова^{1,2}

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева 15, г. Новосибирск, 630090, Россия

²Новосибирский государственный технический университет
просп. К.Маркса, 20, г. Новосибирск, 630073, Россия

E-mail: bia@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 11.03.2024 г.; после доработки 25.12.2025 г.;
принята к публикации 25.12.2025 г.

Рассмотрена задача о кручении стержня квадратного сечения, находящегося под действием постоянного момента в условиях ортотропной ползучести. Полагается, что точки на торцах стержня могут свободно смещаться в направлении оси стержня, т.е. отсутствует стеснение. Расчёт выполнен для стержней, изготовленных из трансверсально-изотропной плиты из алюминиевого сплава В95пч (Al-Zn-Mg-Cu). Исследована сходимость решения в зависимости от плотности разбиения сетки в конечно-элементном пакете ANSYS. Для оценки угловой скорости закручивания на установившейся стадии ползучести применён метод, основанный на принципе минимума дополнительного рассеяния. Получено удовлетворительное соответствие с решением, найденным методом конечных элементов. Показано: направление вырезки стержней из трансверсально-изотропной плиты оказывает существенное влияние на величину угла закручивания; депланация поперечного сечения зависит не только от его геометрической формы, но и свойств ортотропии материала.

Ключевые слова: конструкционные сплавы, ортотропия, ползучесть, кручение стержня квадратного сечения, минимум дополнительного рассеяния, депланация.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.402

ВВЕДЕНИЕ

Профили с поперечными сечениями уголкового, таврового, прямоугольного и других типов широко применяются в качестве подкрепляющих элементов обшивки корпусов летательных аппаратов и изделий общего машиностроения. Как следствие возникают задачи по расчёту напряжённо-деформированного состояния таких изделий как в процессе эксплуатации [1–3], так и при их производстве путём придания необходимой формы заготовкам, которые или уже изначально отфрезерованы с рёбрами [4–6] или получены методом наклёпа рёбер жёсткости на гладкие панели [7, 8].

Используемый в практике проектирования подход, в котором тонкая обшивка относится к продольным рёбрам в виде присоединённых полос, применяется к упругой многослойной ортотропной обшивке из композиционных материалов [1], что даёт возможность с использованием гипотез балочной теории, учитывая изгиб, сдвиг и кручение, найти осреднённые напряжения в продольных рёбрах и по контуру панелей обшивки крыла или фюзеляжа. В [2] приводятся результаты расчётов критической нагрузки потери устойчивости в условиях упругости неподкреплённой пластины и подкреплённой тонкостенными стержнями пластины с учётом депланации сечений стержней и без учёта. Показано, что не учёт депланации приводит к завышению критической силы. В [3] рассматривается знакопеременный изгиб балок с учётом накопления

повреждений применительно к задачам сохранения ресурса и материала на стадии производства.

В [4] исследуется задача о кручении в седловидную поверхность оребрённой пластины четырьмя силами, приложенными в углах в условиях ползучести. Показано, что свойство пониженного сопротивления деформациям ползучести в сдвиговом направлении приводит к снижению жёсткости оребрённой пластины. Работы [5, 6] посвящены решению обратных задач формообразования в условиях пластичности и ползучести балок с тавровым сечением и оребрённых панелей из сплава АК4-1 с учётом разных механических свойств материала при растяжении и сжатии. В [7, 8] проводится моделирование процесса высокоресурсного заклёпочного соединения элементов панелей двойной кривизны с рёбрами жёсткости из сплава В95пчТ2, анализируется влияние маршрута клёпки на торцевые перемещения элемента обшивки и отклонение фактических геометрических параметров обшивки от заданных.

При решении технологических задач, возникающих при изготовлении конструкций и их эксплуатации, приходится учитывать ортотропные свойства современных материалов. Ортотропия металлических плит, из которых вырезаются заготовки, может появиться после различных типов обработок, таких как прокатка, дробеструйная обработка поверхностного слоя и других. В подкрепляющих балках и стрингерах под действием постоянной или меняющейся нагрузки могут возникать изгибно-крутильные деформации.

В данной работе решается задача о кручении стержня квадратного сечения из ортотропного материала под действием постоянного момента в условиях ползучести. Один из подходов к решению задач теории ползучести состоит в комбинировании решений, соответствующих аналогичным задачам в упругой и пластической постановках. Общая теория кручения упругих изотропных и анизотропных неоднородных стержней с различными типами поперечных сечений изложена в [9, 10]. В [11] приводятся решения по упругому деформированию многослойных композитных стержней при кручении и растяжении, показано, что из-за свойств анизотропии могут значительно увеличиваться нормальные и касательные напряжения в наружных слоях, что сказывается на долговечности конструкции. В ряде работ авторов [12] изучаются общие соотношения теории кручения стержней из пластического анизотропного материала. В [13] рассмотрено кручение призматических стержней из изотропного упрочняющегося вязкопластического материала, получены аналитические решения для напряжений и деформаций в случае стержней полигонального поперечного сечения.

В условиях ползучести кручение изотропных стержней с нестеснёнными торцами рассматривается в [14, 15], тонкостенных стержней со стеснёнными торцами в [16, 17], кручение стержней кольцевого и сплошного круглого сечений с учётом больших деформаций в [18, 19]. Работа [20] посвящена решению прямых и обратных задач кручения стержней прямоугольного и уголкового сечений с нестеснёнными торцами в условиях изотропной ползучести методами конечных разностей и конечных элементов. В [21] исследовано реологическое поведение стержней при кручении с применением уравнений ползучести по наследственной теории, по технической теории старения и обобщённой нелинейной вязкоупругой модели Фойгта; в [22–24] для ортотропных при ползучести стержней с круглыми сечениями получен ряд аналитических решений и оценок, а также приводятся результаты расчёта методом конечных элементов (МКЭ) в программе ANSYS.

В данной работе при решении задачи о кручении стержня квадратного сечения в условиях ползучести учитывается возникновение депланации сечения (смещение точек поперечного сечения в направлении оси стержня) не только за счёт геометрической формы сечения, но и в результате наличия ортотропных свойств материала. Предполагается, что точки на торцах могут свободно перемещаться в направлении оси стержня. Так как стеснение на торцах отсутствует, то задачу можно сформулировать в двумерной постановке. Для нахождения угловой скорости закручивания на установившейся стадии ползучести используется методика расчёта на основе принципа минимума дополнительного рассеяния (метод 1), позволяющая

получить оценку сверху. Полученное решение сравнивается с расчётом, выполненным МКЭ (метод 2). Оба подхода рассматриваются в геометрически линейной постановке.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Для описания ортотропной ползучести используется модель Соснина, которая обобщает модель Хилла ортотропной пластичности:

$$\eta_{ij} = \partial\Phi/\partial\sigma_{ij}, \quad \Phi = T_s^{n+1}/(n+1), \quad (1)$$

$$T_s(\sigma_{ij}) = [A_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}\sigma_{12}^2 + 2A_{23}\sigma_{23}^2 + 2A_{31}\sigma_{31}^2]^{0.5}. \quad (2)$$

Здесь $\eta_{ij} = d\varepsilon_{ij}^c/dt$ — компоненты тензора скоростей деформаций ползучести; ε_{ij}^c , σ_{ij} — компоненты тензора деформаций ползучести и тензора напряжений; A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — коэффициенты ортотропии [25], n — показатель ползучести считается одинаковым для растяжения и сжатия и не зависит от направления. В (2) учтено, что $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ и $A_{ij}\sigma_{ij}^2 = A_{ji}\sigma_{ji}^2$ при $i \neq j$.

Из (1), (2) следует

$$\eta_{11} = T_s^{n-1}((A_{22} + A_{33})\sigma_{11} - A_{33}\sigma_{22} - A_{22}\sigma_{33}), \quad \eta_{12} = \eta_{21} = T_s^{n-1}A_{12}\sigma_{12}. \quad (3)$$

Остальные компоненты η_{ij} получаются круговой перестановкой индексов.

Рассматривается трансверсально-изотропная (транстропная) плита. Пусть ось x_3 совпадает с направлением нормали к трансверсально-изотропной плите, а оси x_1 и x_2 с продольным и поперечным направлениями плиты. Предполагается трансверсальная изотропия, при которой свойства в направлении под углом $\pi/4$ к направлению нормали к плите отличаются от свойств в плоскости плиты и по нормали к плите. Для констант B_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), характеризующих процесс одномерной установившейся ползучести в трёх главных направлениях ($\eta_{ii} = B_{ii}\sigma_{ii}^n$) и в трёх направлениях вдоль осей системы координат, которые являются результатом поворота исходной системы координат на угол $\pi/4$ ($\eta_{ij} = B_{ij}\sigma_{ij}^n$, $i \neq j$), выполняются следующие условия

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = B_{12} = B_0, \quad B_{23} = B_{31} = B_\Delta \neq B_0. \quad (4)$$

В этом случае для коэффициентов A_{ij} имеем [25]

$$2A_{12} = 3B_0^{2/(n+1)}, \quad 2A_{31} = 2A_{23} = 4B_\Delta^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}, \quad A_{11} = A_{22} = A_{33} = B_0^{2/(n+1)}/2. \quad (5)$$

Отметим, что для коэффициентов сдвига выполняется

$$A_{31} = A_{23} \neq A_{12}. \quad (6)$$

В частном случае изотропного материала $B_{ij} = B_0$, т.е. если полагать, что свойства плиты по всем направлениям одинаковые и совпадают со свойствами в её плоскости ($B_\Delta = B_0$), то

$$2A_{12} = 2A_{31} = 2A_{23} = 3B_0^{2/(n+1)}, \quad A_{11} = A_{22} = A_{33} = B_0^{2/(n+1)}/2. \quad (7)$$

Исследуем задачу о кручении стержней трёх типов: первый тип — в предположении изотропных свойств материала (7); второй и третий типы — стержни, изготовленные из описываемой параметрами (4) трансверсально-изотропной плиты и ориентированные соответственно в направлении её нормали и в продольном направлении.

2. ОЦЕНКА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ЗАКРУЧИВАНИЯ СВЕРХУ

Рассмотрим решение задачи о кручении на основе принципа минимума дополнительного рассеяния (*метод 1*), позволяющего получить оценку угловой скорости закручивания на установившейся стадии ползучести сверху.

2.1. Кручение стержня, вырезанного вдоль нормали к трансверсально-изотропной плите

При кручении стержня, вырезанного вдоль нормали трансверсально-изотропной плиты (в направлении оси x_3), при отсутствии стеснения на торцах перемещений в направлении оси стержня для напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0$, $\sigma_{23} \neq 0$, $\sigma_{13} \neq 0$ выполняется уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0. \quad (8)$$

Граничные условия на контуре поперечного сечения

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = 0, \quad (9)$$

где n_1, n_2 компоненты нормали к контуру сечения в плоскости x_1x_2 . Предполагается установившееся состояние ползучести. Скорости деформаций ползучести (3) в направлении сдвига записываются в виде

$$2\eta_{13} = \dot{W}_{,1} - \theta x_2 = 2T_s^{n-1}A_{31}\sigma_{13}, \quad 2\eta_{23} = \dot{W}_{,2} + \theta x_1 = 2T_s^{n-1}A_{23}\sigma_{23}. \quad (10)$$

Здесь $W = W(x_1, x_2)$ — смещение точек поперечного сечения (депланация) в направлении x_3 , точка сверху означает производную по времени; θ — скорость погонного угла закручивания. Так как выполняется (5), (6), то $T_s = \sqrt{2A_{31}\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}}$. В случае изотропного материала (7), так как $B_\Delta = B_0$, константы A_{31}, A_{23} в (10) заменяются на A_{12} , а выражение для T_s переписывается в виде $T_s = \sqrt{2A_{12}\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}}$.

Крутящий момент есть

$$M = \iint_S (\sigma_{23}x_1 - \sigma_{13}x_2) dx_1 dx_2, \quad (11)$$

S — площадь поперечного сечения.

Для решения воспользуемся подходом, предложенным для расчёта изотропного стержня квадратного поперечного сечения путём нахождения минимума дополнительного рассеяния [14]

$$I = \iint_S (T_s^{n+1}/(n+1) - 2\theta F_s) dS. \quad (12)$$

Здесь $F_s = F_s(x_1, x_2)$ — функция напряжений, для которой выполняется

$$\sigma_{13} = \frac{\partial F_s}{\partial x_2}, \quad \sigma_{23} = -\frac{\partial F_s}{\partial x_1}. \quad (13)$$

В этом случае уравнение равновесия (8) с условиями на контуре сечения (9) тождественно удовлетворяются. Запись решения задачи о кручении изотропного стержня прямоугольного поперечного сечения в условиях установившейся ползучести в виде аналитической зависимости встречает определённые сложности. Поэтому будем искать решение вариационного уравнения $\delta I = 0$ аналогично [14] в виде комбинации функции напряжений соответствующей упругой задаче $F^e(x_1, x_2)$ с функцией напряжений в предельном состоянии ползучести $F^p(x_1, x_2)$:

$$F_s = F^p + K(F^e - F^p), \quad (14)$$

где $K = K(n)$ — искомая константа, зависящая от n . Предельное состояние ползучести ($n \rightarrow \infty$) в задаче о кручении совпадает с идеально пластическим распределением напряжений, при этом функция F^p соответствует поверхности равного ската. На контуре $F^e = 0$ и $F^p = 0$. Поверхность ската $x_3 = F^p(x_1, x_2)$ для квадратного поперечного сечения имеет рёбра и производные $F^p(x_1, x_2)$ имеют разрывы. Константа K находится из условия

$$\frac{\partial I}{\partial K} = 0. \quad (15)$$

Дифференцируя (15) и учитывая, что

$$2 \iint_S F^e dx_1 dx_2 = 2 \iint_S F^p dx_1 dx_2 = M = \text{const},$$

получаем уравнение для нахождения константы K

$$\iint_S T_s^{n-1} \left[\frac{\partial F_s}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F^e}{\partial x_2} - \frac{\partial F^p}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial F_s}{\partial x_1} \left(\frac{\partial F^e}{\partial x_1} - \frac{\partial F^p}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 dx_2 = 0. \quad (16)$$

Здесь с учётом (4)–(7), (13) в случае изотропного материала (для стержня первого типа) имеем

$$T_s = \sqrt{2A_{12}} \sqrt{\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_1} \right)^2}.$$

Для стержня второго типа, ориентированного в направлении нормали трансверсально-изотропной плиты,

$$T_s = \sqrt{2A_{31}} \sqrt{\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_1} \right)^2}.$$

Из (13), (14) для напряжений следует

$$\sigma_{13} = \sigma_{13}^p + K(\sigma_{13}^e - \sigma_{13}^p), \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^p + K(\sigma_{23}^e - \sigma_{23}^p). \quad (17)$$

Решение задачи о кручении упруго стержня прямоугольного сечения в виде ряда [10] содержит слишком большое число слагаемых, поэтому будем искать решение приближённо в виде [14]

$$F^e(x_1, x_2) = \left(x_1^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) \left(x_2^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) [L_0 + L_1(x_1^2 + x_2^2)] = MF_0^e(x_1, x_2),$$

где

$$L_0 = \frac{5}{2} \frac{259}{277} \frac{G\alpha_0}{a^2} = \frac{5}{2} \frac{259}{277} \frac{M}{0.1404a^6}, \quad L_1 = 15 \frac{35}{277} \frac{G\alpha_0}{a^4} = 15 \frac{35}{277} \frac{M}{0.1404a^8},$$

G — модуль сдвига, a — длина стороны поперечного сечения, α_0 — погонный угол закручивания, соответствующий решению упругой задачи о кручении стержня моментом M . Тогда

$$\sigma_{13}^e = 3Ms_{13}/a^3, \quad \sigma_{23}^e = 3Ms_{23}/a^3, \quad (18)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} s_{13}(x_1, x_2) &= 1.387 \left(\frac{2}{a} x_2 \right) \left[\left(\frac{2}{a} x_1 \right)^2 - 1 \right] \left[1 + \frac{105}{518} \left(\left(\frac{2}{a} x_1 \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{a} x_2 \right)^2 - 1 \right) \right], \\ s_{23}(x_1, x_2) &= 1.387 \left(\frac{2}{a} x_1 \right) \left[\left(\frac{2}{a} x_2 \right)^2 - 1 \right] \left[1 + \frac{105}{518} \left(\left(\frac{2}{a} x_2 \right)^2 + 2 \left(\frac{2}{a} x_1 \right)^2 - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Идеально пластическое распределение напряжений определяется на основе предельной нагрузки. В области 1 поперечного сечения (см. рис. 1(а)) выполняется

$$\sigma_{13}^p = 0, \quad \sigma_{23}^p = 3M/a^3; \quad (20)$$

в области 2 (см. рис. 1(а))

$$\sigma_{13}^p = -3M/a^3, \quad \sigma_{23}^p = 0. \quad (21)$$

Учитывая (17)–(21), находим для области 1

$$\sigma_{13} = 3MKs_{13}/a^3, \quad \sigma_{23} = 3M(1 + K(s_{23} - 1))/a^3; \quad (22)$$

для области 2

$$\sigma_{13} = 3M(-1 + K(s_{13} + 1))/a^3, \quad \sigma_{23} = 3Ms_{23}/a^3. \quad (23)$$

Интеграл (16) разбивается на две подобласти интегрирования. В рассматриваемом случае решение не зависит от параметров A_{31}, A_{23}, A_{12} и значение K для стержня в предположении изотропных свойств материала совпадает со значением для стержня ориентированного в направлении нормали трансверсально-изотропной плиты. Уравнение (16) для нахождения K преобразуется к виду

$$I_1 + I_2 = 0, \quad (24)$$

где

$$I_1 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \int_0^{a/2} \int_0^{x_1} \left[K^2 s_{13}^2 + (K(s_{23} - 1) + 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left[(K(s_{23} - 1) + 1)(s_{23} - 1) + Ks_{13}^2 \right] dx_2 dx_1,$$

$$I_2 = \left(\frac{2}{a}\right)^2 \int_0^{a/2} \int_{x_1}^{a/2} \left[K^2 s_{23}^2 + (K(s_{13} + 1) - 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \left[(K(s_{13} + 1) - 1)(s_{13} + 1) + Ks_{23}^2 \right] dx_2 dx_1.$$

2.2. Кручение стержня, вырезанного в продольном направлении трансверсально-изотропной плиты

Для стержня третьего типа, ось которого совпадает с направлением оси x_1 , можно записать уравнения аналогичные (8) – (23), используя круговую перестановку индексов. Для напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = 0, \sigma_{21} \neq 0, \sigma_{31} \neq 0$ выполняется уравнение равновесия

$$\partial\sigma_{21}/\partial x_2 + \partial\sigma_{31}/\partial x_3 = 0. \quad (25)$$

Граничные условия на контуре поперечного сечения в плоскости x_2x_3

$$\sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 = 0, \quad (26)$$

где n_2, n_3 — компоненты нормали к контуру сечения в плоскости x_2x_3 . Скорости деформаций ползучести (1) записываются в виде

$$2\eta_{31} = \dot{W}_{,3} + \theta x_2 = 2T_s^{n-1} A_{31} \sigma_{31}, \quad 2\eta_{21} = \dot{W}_{,2} - \theta x_3 = 2T_s^{n-1} A_{12} \sigma_{21}.$$

Здесь $W = W(x_2, x_3)$ — смещение точек поперечного сечения (депланация) в направлении x_1 ; $T_s = \sqrt{2A_{31}\sigma_{31}^2 + 2A_{12}\sigma_{21}^2}$, при этом $A_{31} \neq A_{12}$. Крутящий момент есть

$$M = \int \int_S (\sigma_{31} x_2 - \sigma_{21} x_3) dx_2 dx_3. \quad (27)$$

Для функции напряжений $F_s = F_s(x_2, x_3)$ выполняется $\sigma_{21} = \frac{\partial F_s}{\partial x_3}$, $\sigma_{31} = -\frac{\partial F_s}{\partial x_2}$, при этом тождественно удовлетворяются уравнение равновесия (25) и условия на контуре сечения (26). При решении аналогичной задачи о кручении ортотропного стержня круглого и кольцевого сечений полагалось, что функция F_s имеет вид, который с точностью до множителя является решением задачи о кручении изотропного стержня в условиях установившейся ползучести [23, 24]. Так как аналитическое решение задачи о кручении изотропного стержня прямоугольного поперечного сечения в условиях установившейся ползучести отсутствует, то будем искать его в виде (14). Повторив преобразования, вместо интеграла (16) получим

$$\int \int_S T_s^{n-1} \left[2A_{12} \frac{\partial F_s}{\partial x_3} \left(\frac{\partial F^e}{\partial x_3} - \frac{\partial F^p}{\partial x_3} \right) + 2A_{31} \frac{\partial F_s}{\partial x_2} \left(\frac{\partial F^e}{\partial x_2} - \frac{\partial F^p}{\partial x_2} \right) \right] dx_2 dx_3 = 0, \quad (28)$$

где

$$T_s = \sqrt{2A_{12} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_3} \right)^2 + 2A_{31} \left(\frac{\partial F_s}{\partial x_2} \right)^2}.$$

Далее уравнение (28) для определения значения K преобразуется к виду (24), где

$$I_1 = \left(\frac{2}{a} \right)^2 \int_0^{a/2} \int_0^{x_2} \left[2A_{12} K^2 s_{21}^2 + 2A_{31} (K(s_{31} - 1) + 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \times \left[2A_{31} (K(s_{31} - 1) + 1)(s_{31} - 1) + 2A_{12} K s_{21}^2 \right] dx_3 dx_2,$$

$$I_2 = \left(\frac{2}{a} \right)^2 \int_0^{a/2a/2} \int_{x_2}^{a/2} \left[2A_{31} K^2 s_{31}^2 + 2A_{12} (K(s_{21} + 1) - 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \times \left[2A_{12} (K(s_{21} + 1) - 1)(s_{21} + 1) + 2A_{31} K s_{31}^2 \right] dx_3 dx_2.$$

Здесь $s_{21} = s_{21}(x_2, x_3)$, $s_{31} = s_{31}(x_2, x_3)$ получены из (19) циклической перестановкой индексов.

2.3. Обобщение на случай всех трёх типов стержней

Для всех трёх типов стержней выражения для I_1, I_2 , входящие в (24), можно представить в обобщённом виде, перейдя в локальную систему координат xyz , ось z которой направлена вдоль оси стержня:

$$I_1 = \left(\frac{2}{a} \right)^2 \int_0^{a/2} \int_0^x \left[2C_1 K^2 s_x^2 + 2C_2 (K(s_y - 1) + 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \times \left[2C_2 (K(s_y - 1) + 1)(s_y - 1) + 2C_1 K s_x^2 \right] dy dx,$$

$$I_2 = \left(\frac{2}{a} \right)^2 \int_0^{a/2} \int_x^{a/2} \left[2C_2 K^2 s_y^2 + 2C_1 (K(s_x + 1) - 1)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \times \left[2C_1 (K(s_x + 1) - 1)(s_x + 1) + 2C_2 K s_y^2 \right] dy dx, \quad (29)$$

где выражения для s_x, s_y совпадают с выражениями (19) с заменой x_1 на x и x_2 на y . Для констант в (29) в случае изотропного стержня выполняется $C_1 = C_2 = A_{12} = 3B_0^{2/(n+1)}/2$, для стержня второго типа $C_1 = C_2 = A_{31} = 2B_{\Delta}^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}/2$ и для стержня третьего типа

$$C_1 = A_{12} = 3B_0^{2/(n+1)}/2, \quad C_2 = A_{31} = 2B_{\Delta}^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}/2.$$

Для нахождения угловой скорости закручивания θ будем искать в (12) функцию напряжений $F_s = F_s(x, y)$ с учётом вычисленного K в виде $F_s = \theta^{1/n} C (F^p + K(F^e - F^p))/M = \theta^{1/n} C F_0$, где $F_0 = F_0^p + K(F_0^e - F_0^p)$ [24]. Константа C подлежит определению. Из (12) следует

$$\delta I = \delta \iint_S \left[\frac{1}{n+1} \left(2C_1 \sigma_{xz}^2 + 2C_2 \sigma_{yz}^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} - 2\theta F_s \right] dydx = 0. \quad (30)$$

Учитывая, что $\sigma_{xz} = \frac{\partial F_s}{\partial y}$, $\sigma_{yz} = -\frac{\partial F_s}{\partial x}$, (30) преобразуется к виду

$$\delta \left[C^{n+1} \frac{1}{n+1} \iint_S \left[2C_1 \left(\frac{\partial F_0}{\partial y} \right)^2 + 2C_2 \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} dydx - C \iint_S 2F_0 dydx \right] = 0. \quad (31)$$

Варьируя (31) по C и принимая во внимание, что $\iint_S 2F_0 dydx = 1$, получаем

$$C = \left(\frac{1}{\Phi} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \Phi = \iint_S \left[2C_1 \left(\frac{\partial F_0}{\partial y} \right)^2 + 2C_2 \left(\frac{\partial F_0}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} dydx. \quad (32)$$

Подынтегральное выражение в (32) в силу симметрии необходимо вычислять в двух областях 1 и 2 (см. рис. 1(a)).

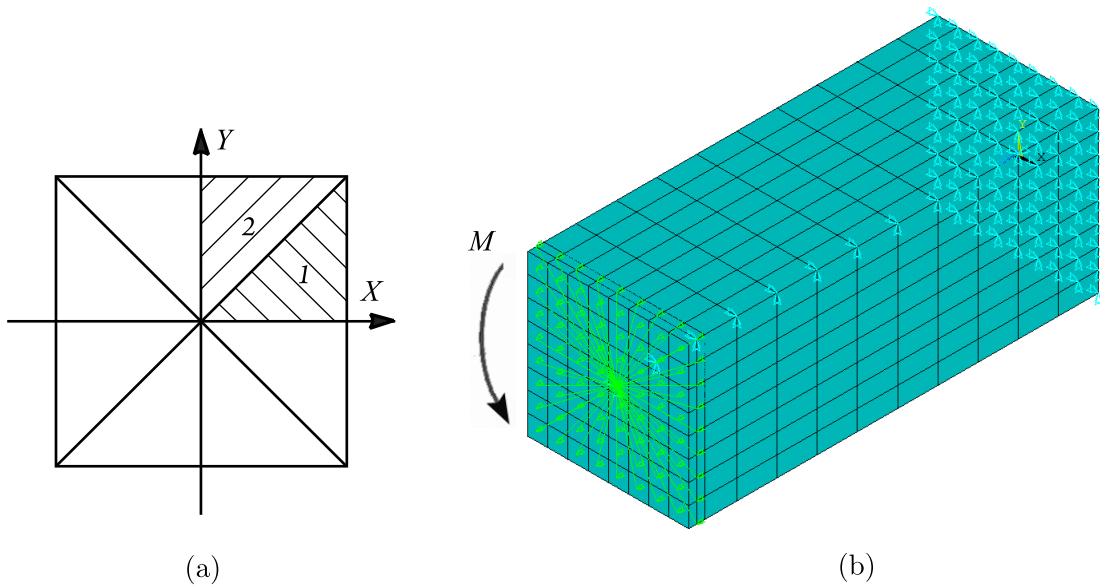


Рис. 1. Поперечное сечение стержня (а); разбиение конечными элементами Solid45 с оболочечными элементами Shell181 на торце $z = L$ и схема закреплений (б)

После преобразований имеем $\Phi = 4(\Phi_1 + \Phi_2)$, где

$$\Phi_1 = \left(\frac{3}{a^3}\right)^{n+1} \int_0^{a/2} \int_0^x \left[2C_1 K^2 s_x^2 + 2C_2 (K(s_y - 1) + 1)^2\right]^{\frac{n+1}{2}} dy dx,$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{3}{a^3}\right)^{n+1} \int_0^{a/2} \int_x^{a/2} \left[2C_2 K^2 s_y^2 + 2C_1 (K(s_x + 1) - 1)^2\right]^{\frac{n+1}{2}} dy dx.$$

Моменты (11) и (27), выраженные через функцию напряжений в системе координат xyz , перепишутся в виде $M = 2 \iint_S F_s dx dy = 2\theta^{1/n} C \iint_S F_0 dx dy$. Откуда $\theta = (M/C)^n$, учитывая (32), приходим к выражению для угловой скорости закручивания

$$\theta = \Phi M^n. \quad (33)$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для решения задачи МКЭ (метод 2) тестировались твёрдотельные 3-D элементы Solid45, а также балочные элементы Beam189 программы ANSYS. При использовании твёрдотельных элементов на одном из торцов для возможности приложения скручивающего момента применялись элементы Shell181. Численная верификация восьмиузловых объёмных конечных элементов Solid45 и оболочечных элементов Shell181 при расчёте скручиваемых круглых стержней в условиях изотропной и ортотропной ползучести выполнена в [23, 24]. Для аппроксимации перемещений внутри элемента Solid45 помимо функций форм соответствующих узлам элемента используются дополнительные функции формы квадратичного вида, что даёт возможность получать сходящиеся решения без сильного измельчения конечно-элементных сеток. Для всех узлов торца, на котором создаются оболочечные элементы задаётся закрепление в виде одинакового угла поворота вокруг оси стержня для избегания возникновения краевых эффектов от приложения сосредоточенной нагрузки. На обоих торцах точки могут свободно перемещаться вдоль оси стержня, т. е. стеснение отсутствует. Перемещения точек оси стержня в направлении осей x и y равны нулю. Какие-либо условия контакта между элементами Solid45 и Shell181 отсутствуют. На рис. 1(b) приведена твёрдотельная конечно-элементная сетка с разбиением поперечного сечения 8×8 элементов и 10 элементов Solid45 вдоль оси стержня, толщина оболочечного элемента Shell181 составляет $h = 0.002$ м. При расчёте МКЭ при $t = 0$ стержень деформируется упруго, затем развиваются необратимые деформации ползучести. В процессе деформирования напряжённое состояние меняется от начального упругого до состояния близкого к состоянию установившейся ползучести, так как $M(t) = \text{const}$.

Результаты расчёта кручения стержня с круглым поперечным сечением в условиях ортотропной ползучести с использованием балочных элементов Beam189 приведены в [4, 23]. Показано, что при включённой опции седьмой степени свободы, учитывающей искривление из плоскости поперечного сечения, депланация, возникающая за счёт ортотропных свойств материала, балочным элементом Beam189 не учитывается. Это приводит к существенному занижению угла закручивания, по сравнению с углом закручивания, который вычислен на основе твёрдотельной сетки.

Для активации модели ортотропной ползучести используются команды TB, Creep и TB, Hill. Коэффициенты ортотропии $R_{xx}, R_{yy}, R_{zz}, R_{xy}, R_{yz}, R_{xz}$ задаются командой TB, DATA. Формулы, связывающие эти коэффициенты с коэффициентами определяемыми по формулам (4), (5) в случае трансверсальной изотропии, приведены в [24].

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТА И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Расчёт выполнен для сплава В95пч (Al-Zn-Mg-Cu) с учётом свойств на растяжение. Константы для этого сплава $A_{12} = 3B_0^{2/(n+1)}/2$, $A_{31} = 2B_\Delta^{2/(n+1)} - B_0^{2/(n+1)}/2$ при $T = 180^\circ \text{C}$ определены из испытаний образцов, вырезанных из плиты толщиной 50 мм [24, 26]: $B_0 = 6.3 \cdot 10^{-31} (\text{МПа})^{-n}/\text{с}$, $B_\Delta = 3.9 \cdot 10^{-30} (\text{МПа})^{-n}/\text{с}$, $n = 10$. Модуль Юнга $E = 55 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.4$. Длина стороны квадратного сечения $a = 0.02 \text{ м}$, длина стержня $L = 0.05 \text{ м}$, время деформирования $t_* = 7200 \text{ с}$, крутящий момент $M = 420 \text{ Н}\cdot\text{м}$. В [26] приводятся результаты испытаний на растяжение в диапазоне напряжений от 220 МПа до 310 МПа, поэтому крутящий момент подобран так, чтобы значения интенсивности напряжений на грани, где они максимальные на стадии установившейся ползучести, укладывались в этот диапазон или меньше отклонялись от него.

Линии 1–5 на рис. 2 (а, б) — зависимости погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$ и интенсивности напряжений от времени $\sigma_i(t)$ в узле A с координатами $x = z = 0.01 \text{ м}$, $y = 0$ для стержня из изотропного материала для следующих пяти различных плотностей разбиения N ($N_1 \times N_1 \times N_2$): 1 – $4 \times 4 \times 10$; 2 – $8 \times 8 \times 10$; 3 – $8 \times 8 \times 20$; 4 – $16 \times 16 \times 20$; 5 – $32 \times 32 \times 20$ ($N_1 \times N_1$ число элементов типа Solid45 в поперечном сечении и N_2 вдоль длины стержня), толщина оболочки Shell181 – 0.005 м .

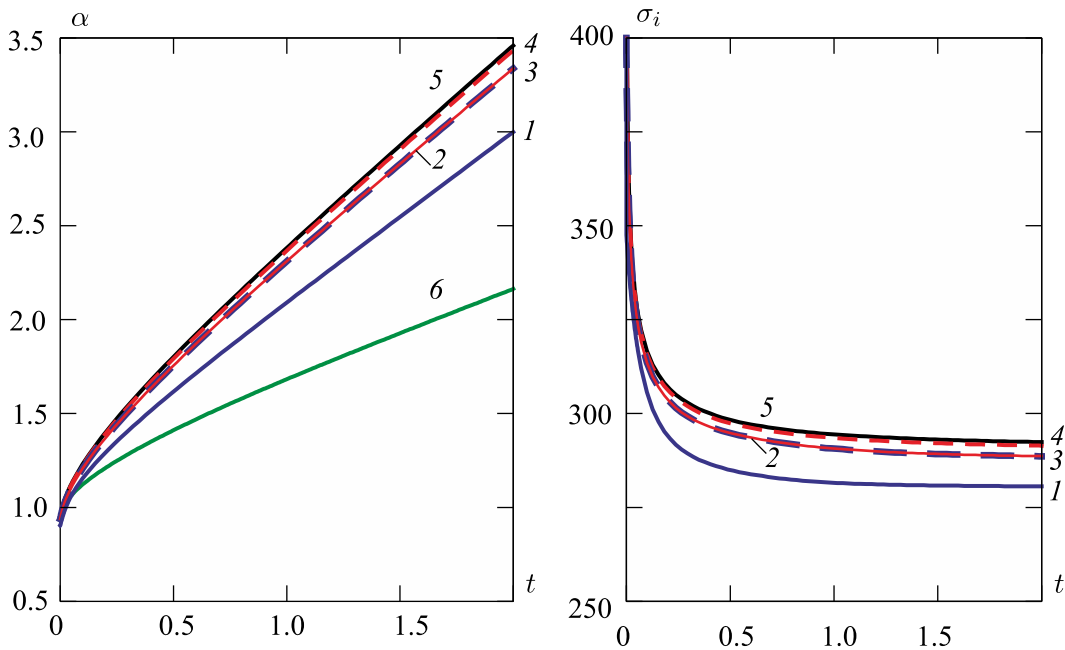


Рис. 2. Зависимость погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$ (а) и интенсивность напряжений от времени $\sigma_i(t)$ в узле с координатами $x = z = 0.01 \text{ м}$, $y = 0$ (б) для стержня из изотропного материала.

Линии 1–5 — расчёт с применением элементов Solid45 с плотностью сетки $4 \times 4 \times 10$, $8 \times 8 \times 10$, $8 \times 8 \times 20$, $16 \times 16 \times 20$, $32 \times 32 \times 20$ соответственно; линия 6 расчёт с использованием элементов Beam189

Интенсивность напряжений σ_i через компоненты девиатора напряжений $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$, где $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$, выражается по формуле $\sigma_i = (3\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ji}/2)^{0.5}$. Из диаграмм на рисунках следует, что увеличение плотности разбиения в плоскости поперечного сечения существенно влияет на сходимость решения, при этом для четвёртого и пятого типов разбиения решения практически совпадают. Совпадение кривых 2 и 3 на рис. 2 (а, б) показывает, что увеличение числа элементов вдоль оси стержня слабо влияет на результаты расчёта, т. е. для моделирования можно использовать элемент, длина которого существенно превосходит два других размера. На рис.

3 (a, b) для стержня из изотропного материала показаны перемещения Uz (изолинии деформации) при $t = t_*$ для плотности разбиения второго типа с толщиной оболочечного элемента Shell181 на торце $z = L$ равной $h = 0.005$ м и 0.002 м соответственно.

В таблице для трёх типов стержней приведены результаты решения разными методами, в том числе и МКЭ с различной плотностью разбиения: значения погонного угла закручивания в начальный момент времени $\alpha_0 = \alpha(0)$ и на момент окончания процесса деформирования $\alpha_* = \alpha(t_*)$, а также скорость погонного угла закручивания θ , вычисленная на установившейся стадии при $0.75 \cdot t_* \leq t \leq t_*$. Для исключения влияния краевого эффекта, возникающего от оболочечных элементов на торце $z = L$ (рис. 3), угол закручивания $\alpha(t) = 2Uy(t)/(az)$ определялся по перемещениям $Uy(t)$ в узле A с координатами $x = z = 0.01$ м, $y = 0$, расположенном вблизи торца $z = 0$, где оболочечные элементы отсутствуют. Различие угловой скорости закручивания (см. таблицу), вычисленной по перемещению в узле A для КЭ-моделей, изображённых на рис. 3, составляет 0.2 %.

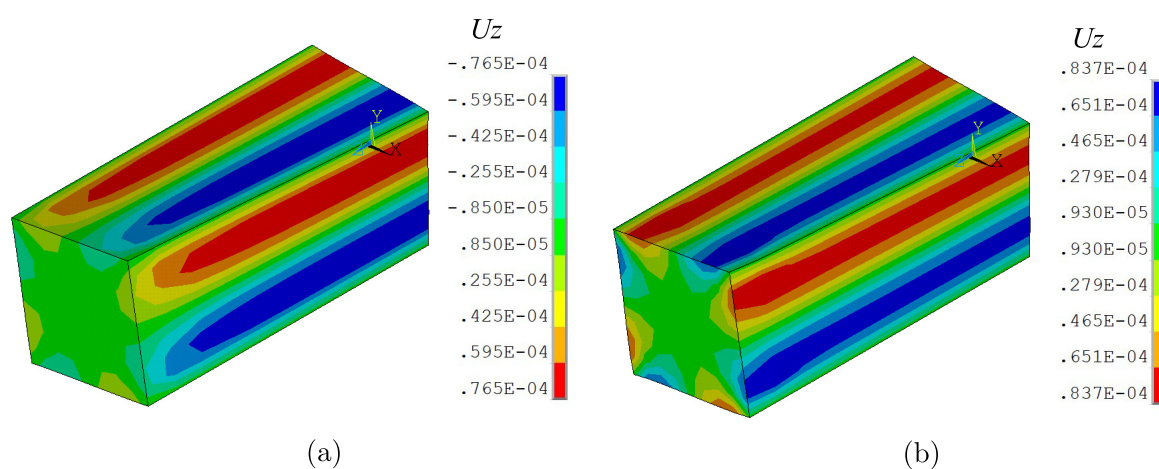


Рис. 3. Изолинии перемещений Uz для стержня из изотропного материала при $t = t_*$ с плотностью разбиения элементами Solid45 $8 \times 8 \times 10$ и толщиной элемента Shell181 на торце $z = L$ равной $h = 0.005$ м (a), 0.002 м (b)

Проведено исследование влияния шага по времени на результаты расчётов, выполненных МКЭ. На рис. 2 (b) видно, что в узле A в начале процесса деформирования происходит резкое уменьшение интенсивности напряжений, а затем интенсивность напряжений становится близкой к некоторому постоянному установившемуся значению. Поэтому в начале расчёта ($0 \leq t \leq 200$ с) автоматический шаг по времени Δt был выбран в диапазоне $0.1 \div 1.0$ с, а затем он был увеличен до 5 с. Для сравнения в таблице для стержня третьего типа с плотностью разбиения $16 \times 16 \times 20$ приведены результаты расчёта с максимальным шагом по времени $\Delta t = 1$ с и 5 с при $t > 200$ с. Различие угловой скорости закручивания, вычисленной по перемещению Uy в узле A , составляет 0,1 %. Расчёты при измельчении сетки и уменьшении шага по времени требуют значительных временных затрат, поэтому с целью уменьшения общего времени численного расчёта величина максимального шага по времени при $t > 200$ с была принята равной 5 с. Из таблицы следует, что для разбиений $16 \times 16 \times 20$ и $32 \times 32 \times 20$ для всех трёх типов стержней различие углов закручивания не превосходит 1%.

В таблице и на рис. 2 (a) (линия б) представлены также результаты решения задачи о кручении стержня в ANSYS с помощью элементов Beam189 с включённой опцией седьмой степени свободы, учитывающей деформацию поперечного сечения. Необходимо отметить, что начальный упругий угол закручивания $\alpha_0 = \alpha(0)$ вычисляется достаточно точно. Угол $\alpha_0 = M/(0.1406G\pi a^4)$, являющийся приближённым решением упругой задачи о кручении [14], составил 0.95 рад. Таким образом, деформация сечения, возникающая при $t = 0$ из-за того,

Таблица

Результаты решения задачи о кручении для трёх типов стержней разными методами

метод решения (тип элемента)	N	Δt (с)	$h \cdot 10^3$ (м)	α_0 (рад/м)	α_* (рад/м)	$\theta \cdot 10^4$ (рад/(мс))
стержень первого типа (изотропный)						
МКЭ (solid45)	1	5	5	0.903	2.999	2.512
МКЭ (solid45)	2	5	5	0.938	3.337	2.820
МКЭ (solid45)	3	5	5	0.938	3.337	2.819
МКЭ (solid45)	4	5	5	0.947	3.434	2.926
МКЭ (solid45)	5	5	5	0.950	3.459	2.955
МКЭ (solid45)	2	5	2	0.938	3.339	2.825
МКЭ (beam189)	–	5	–	0.950	2.164	1.312
Метод 1	–	–	–	0.950	3.172	3.086
стержень второго типа (ориентация по нормали трансформной плиты)						
МКЭ (solid45)	4	5	5	0.947	21.973	28.463
МКЭ (solid45)	5	5	5	0.950	22.140	28.675
Метод 1	–	–	–	0.950	23.500	31.322
стержень третьего типа (продольное направление трансформной плиты)						
МКЭ (solid45)	4	5	5	0.947	8.928	10.315
МКЭ (solid45)	4	1	5	0.947	8.928	10.315
МКЭ (solid45)	5	5	5	0.950	8.997	10.401
Метод 1	–	–	–	0.950	13.320	17.192

что поперечное сечение стержня имеет квадратную форму, учитывается. Однако при деформировании в условиях ползучести, как и в случае стержня с круглым поперечным сечением [23], учёт деформации выполняется некорректно, так как при $t > 0$ угол закручивания намного меньше угла, вычисленного с использованием твёрдотельных элементов и оценки, основанной на принципе минимума дополнительного рассеяния.

Таблица и рис. 4 включают результаты решения задачи о кручении разными методами. На рис. 4, а изображена зависимость погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$ для стержней первого, второго и третьего типа соответственно: сплошные линии 1, 2, 3 — расчёт МКЭ с разбиением $32 \times 32 \times 20$; штриховые линии 4, 5, 6 — зависимость $\alpha(t) = \alpha_0 + \theta t$, найденная на основе принципа минимума дополнительного рассеяния с учётом (33).

Из условия (24) при $n = 10$ получено $K = 0.1586$ для стержней первого и второго типа и $K = 0.1567$ для стержня третьего типа. На рис. 4(b) линии 1, 2 — интенсивность напряжений от времени для стержней первого и второго типа в узле А. Линии 3, 4 на рис. 4(b) — кривые $\sigma_i(t)$ для стержня третьего типа соответственно в узле А и в узле В с координатами $y = z = 0.01$ м, $x = 0$. Анализируя $\sigma_i(t)$ при $0 \leq t \leq t_*$ можно отметить, что для стержня второго типа состояние, близкое к состоянию установившейся ползучести, наступает быстрее, чем для стержней первого и третьего типа, а для стержня третьего типа быстрее, чем для стержня первого типа. Аналогичный вывод следует из анализа угловой скорости закручивания на участках $0.75 \cdot t_* \leq t \leq t_*$ и $0.973 \cdot t_* \leq t \leq t_*$. Для разбиения $32 \times 32 \times 20$ элементами Solid45 при толщине оболочечного элемента Shell181 $h = 0.005$ м угловая скорость закручивания θ для стержней первого, второго и третьего типов составила на участке $0.75 \cdot t_* \leq t \leq t_*$ соответственно $2.955 \cdot 10^{-4}$, $2.868 \cdot 10^{-3}$ и $1.04 \cdot 10^{-3}$ рад/(мс), а на участке $0.973 \cdot t_* \leq t \leq t_*$ —

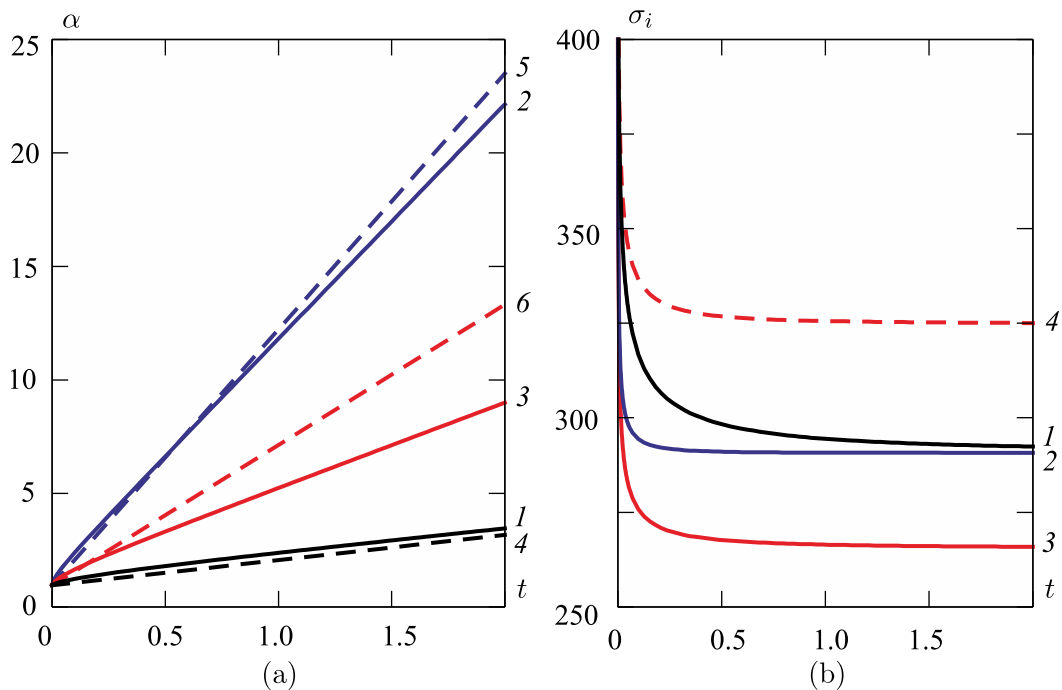


Рис. 4. Зависимость погонного угла закручивания от времени $\alpha(t)$: сплошные линии 1-3 — расчёт МКЭ с плотностью разбиения $32 \times 32 \times 20$; штриховые линии 4 - 6 — зависимость $\alpha(t) = \alpha_0 + \theta t$ (а). Интенсивность напряжений от времени $\sigma_i(t)$: линии 1 - 3 расчёт в узле А с координатами $x = z = 0.01$ м, $y = 0$; линия 4 расчёт в узле В с координатами $y = z = 0.01$ м, $x = 0$ (б). Стержень первого типа - линии 1, 4 (а), линия 1 (б); стержень второго типа - линии 2, 5 (а), линия 2 (б); стержень третьего типа - линии 3, 6 (а), линии 3, 4 (б)

$2.936 \cdot 10^{-4}$, $2.867 \cdot 10^{-3}$ и $1.038 \cdot 10^{-3}$ рад/(м с). Различие составляет 0.647, 0.035, 0.193%.

На рис. 5 изображены изолинии перемещения Uz при $t = t_*$ в сечении $z = 0.01$ м для стержней, вырезанных в направлении нормали (а) и в продольном направлении (б) трансверсально-изотропной плиты. Для этих же стержней на рис. 5 (с, d) представлены изолинии интенсивности напряжений σ_i . Для изотропного стержня и стержня, вырезанного в направлении нормали трансверсально-изотропной плиты, общий вид распределения изолиний перемещения Uz и интенсивности напряжений σ_i совпадает, различие наблюдается в значениях, причём для напряжений это различие незначительно (в узле А его можно оценить по линиям 1, 2 на рис. 4 (б) при $t = t_*$).

Сравнивая результаты расчётов угла закручивания, можно отметить, что для стержней первого и второго типа значения, полученные двумя способами близки. В методе 1 искомая функция (14) является статически допустимой, поэтому решение для угловой скорости закручивания (33) является верхней оценкой истинной угловой скорости закручивания, что подтверждается результатами, приведёнными в таблице. Необходимо отметить, что на рис. 4 (а) штриховые линии, полученные методом 1, для стержней первого и второго типа полностью или частично располагаются ниже сплошных линий, вычисленных методом 2. Это связано с тем, что при решении МКЭ в стержне напряжённо-деформированное состояние меняется от упругого до состояния установившейся ползучести, а при построении линий $\alpha(t) = \alpha_0 + \theta t$ стадия перераспределения от одного состояния до другого не учитывается. Тем не менее, для всех типов стержней на установившейся стадии угловая скорость закручивания, вычисленная МКЭ меньше, полученной методом, основанным на принципе минимума дополнительного рассеяния. Для стержня третьего типа штриховая линия, полученная методом 1, располагается значительно выше сплошной линии, вычисленной методом 2. Это можно объяснить тем, что

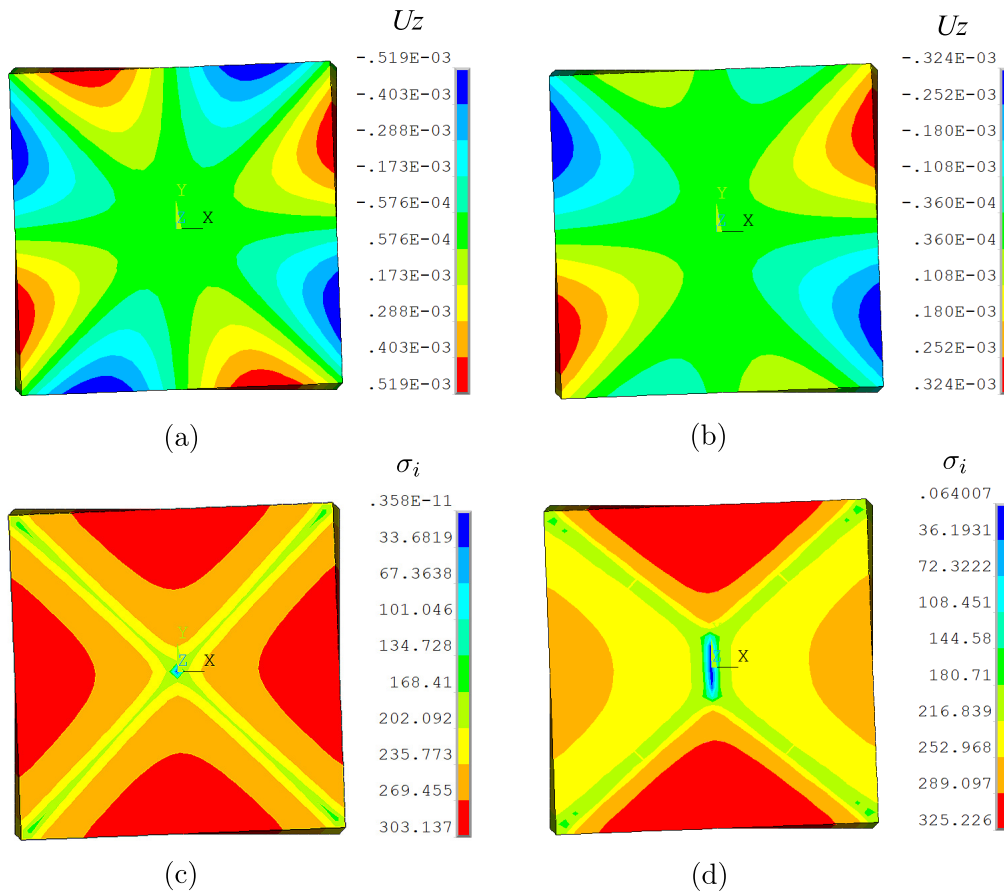


Рис. 5. Изолинии перемещений Uz (a, b) и интенсивность напряжений σ_i (c, d) при $t = t_*$ в сечении $z = 0.01$ м. Стержень, вырезанный в направлении нормали (a, c) и в продольном направлении (b, d) трансверсально-изотропной плиты

функция (14) принята в виде, обеспечивающем симметрию изолиний интенсивности напряжений не только относительно осей x, y , но и относительно диагоналей поперечного сечения, а результаты вычислений для стержня третьего типа на рис. 4 (b) и 5 (d) свидетельствуют, что такая симметрия отсутствует. Вместе с тем метод 1 позволяет получить оценку угловой скорости закручивания сверху для всех типов стержней.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен расчёт напряжённо-деформированного состояния скручиваемого стержня квадратного сечения под действием постоянного момента в условиях ортотропной ползучести. Для решения задачи использовались два способа: метод конечных элементов пакета ANSYS и метод, основанный на принципе минимума дополнительного рассеяния. Протестированы твёрдотельные элементы Solid45 и балочные элементы Beam189. Исследована сходимость решения в зависимости от плотности разбиения сетки. При моделировании полагается, что точки торцов стержня могут свободно смещаться в направлении оси стержня. Вычисления выполнены для алюминиевого сплава В95пч (Al-Zn-Mg-Cu), обладающего свойствами слабого сопротивления деформациям ползучести под углом $\pi/4$ к нормали к плите при температуре 180°C , по сравнению со свойствами сплава в плоскости плиты. Получено, что при моделировании стержня балочными элементами депланация поперечного сечения учитывается корректно только на стадии упругости. Показано:

— на депланацию поперечного сечения влияет не только его геометрическая форма, но и свойства ортотропии материала;

— величина угла закручивания существенно зависит от направления вырезки образцов из трансверсально-изотропной плиты и может отличаться на порядок;

— решение, полученное методом конечных элементов, удовлетворительно согласуется с верхней оценкой угловой скорости закручивания, найденной на основе принципа минимума дополнительного рассеяния.

Результаты проведённых исследований необходимо принимать во внимание при выборе нагрузки в задачах формования элементов конструкций.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (проект FWGG-2021-0013). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шатаев В.Г., Шатаев П.А. К расчёту тонкостенных подкреплённых стержней из композиционных материалов по балочной теории // Изв. вузов. Авиационная техника. 2011. № 1. С. 37–40.
2. Чернов С.А. Моделирование устойчивости подкреплённой тонкостенными стержнями пластины // Программные продукты и системы. 2014. Т. 108, № 4. С. 183–187; DOI: 10.15827/0236-235X.108.183-187
3. Иявойнен С. В., Ларичкин А. Ю., Колодезев В. Е. Численное и экспериментальное исследование чистого изгиба балок из титанового сплава АБВТ-20 в условиях ползучести с учётом различных свойств на растяжение и сжатие // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 3. С. 430–446; DOI: 10.14498/vsgtu1614
4. Банщикова И.А., Цвелодуб И.Ю., Петров Д.М. Деформирование элементов конструкций из сплавов с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в сдвиговом направлении // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 157, № 3. С. 34–41.
5. Бойко С. В., Ларичкин А. Ю. Обратная задача чистого изгиба балки в условиях ползучести // Сибирский журнал промышленной математики. 2023. Т. 26, № 2 (94). С. 37–52; DOI: 10.1134/s1990478923020047
6. Бойко С.В., Ларичкин А.Ю. Обратная задача формообразования оребрённой панели // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 3 (379). С. 216–226; DOI: 10.15372/PMTF202215214
7. Бормотин К.С., Олейников А.И., Овчаров И.О. Моделирование клёпочной сборки обшивок крыла с упреждением рёбер жёсткости // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16, № 3. С. 376–386.
8. Олейников А.И., Бормотин К.С. Моделирование процесса клёпки панели // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, № 1. С. 102–106.
9. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физ.-Мат. лит., 1959.
10. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука. 1971.
11. Nurimbetov A. Naturally twisted layered anisotropic rod made of reinforced materials research/A. Nurimbetov, A. Bekbayev, S. Oiynbayev, M. Dzhamanbayev, M. Keikimanova // Appl. Mech. Materials. 2015. V. 736. P. 30–38; DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.736.30
12. Миронов Б.Г., Миронов Ю.Б. К вопросу кручения анизотропных стержней, находящихся под действием внешнего давления // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2023. № 2. С. 160–165; DOI: 10.3103/S0025654422600878

13. Спорыхин А.Н., Чупис С.Г., Щеглова Ю.Д. О кручении призматических стержней из упрочняющегося вязкопластического материала // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2006. № 2. С. 235–240.
14. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз. 1960.
15. Манукян М.М. Кручение тел с учётом ползучести. Ереван: Изд-во Ереванского университета, 1972.
16. Наместников В.С. Стеснённое кручение при ползучести тонкостенного стержня замкнутого профиля // Науч. тр. Всесоюз. заоч. машиностроит. ин-т. 1975. Т. 25. С. 109–114.
17. Mordfin L. Torsion creep of circular and noncircular tubes // Journal of research of the national Bureau of standards. C. Engineering and Instrumentation. 1967. V. 71, N 3. P. 209–225.
18. Shutov A.V., Larichkin A.Yu., Shutov V.A. Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient // ZAMM. (Z. Angew. Math. Mech.) 2017. P. 1–17; DOI: 10.1002/zamm.201600286
19. Горев Б.В., Клопотов И.Д. Методика построения кривых деформирования на кручение при больших деформациях // Заводская лаборатория. 1995. № 12. С. 50–53.
20. Банщикова И.А. Кручение стержней в кинематических режимах ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63. № 5. С. 185–196; DOI: 10.15372/PMTF20220519
21. Кравчук А.С., Кравчук А.И., Тарасюк И.А. Реология круглого структурно-неоднородного композиционного стержня при кручении и крутильных колебаниях // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2015. Т. 81, № 11. С. 53–61.
22. Bhatnagar N.S., Gupta S.K., Gupta R.P. The torsion of an orthotropic rod in the theory of creep // Wood Science and Technology. 1969. V. 3, Iss. 2. P. 167–174.
23. Banshchikova I.A. Evaluation of the stress-strain state of rod at torsion from an anisotropic material in the shear direction at creep // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 894; Article number 012006; DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012006
24. Банщикова И.А. Исследование с использованием метода характеристических параметров ползучести ортотропного стержня при кручении // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 1. С. 169–184; DOI: 10.15372/PMTF202215115
25. Соснин О.В. Об анизотропной ползучести материалов // Прикладная механика и техническая физика. 1965. № 6. С. 99–104.
26. Горев Б.В., Масанов И.Ж. Особенности деформирования листовых конструкционных алюминиевых сплавов и плит в режимах ползучести // Технология машиностроения. 2009. № 7. С. 13–20.

UDC 539.376

TORSION OF SQUARE ROD UNDER ORTHOTROPIC CREEP

© 2025 I. A. Banshchikova^{1,2}

¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Akad. Lavrentyev prosp., 15, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Novosibirsk State Technical University
K. Marks prosp., 20, Novosibirsk 630073, Russia*

E-mail: bia@hydro.nsc.ru

Received 11.03.2024, revised 25.12.2025, accepted 25.12.2025

Abstract. The problem of a square rod torsion loaded by moment under conditions of orthotropic creep is considered. It is assumed that the points of the rod ends can freely move in the direction of the rod axis, i.e. there is no constraint. The calculation was performed for rods made of a transversally isotropic plate of aluminum alloy V95pch (Al-Zn-Mg-Cu). The convergence of the solution depending on finite element mesh density in the ANSYS was studied. To estimate the angular velocity of twisting at the steady stage of creep, a method based on the principle of minimum additional dissipation was used. The resulting solution is in satisfactory agreement with the solution found by the finite element method. It is shown: the direction of rods cutting from a transversally isotropic plate has a significant influence on the value of the twist angle; warping of the cross section depends not only on its geometric shape, but also on the orthotropic properties of the material.

Keywords: structural alloys, orthotropy, creep, torsion of square rod, minimum additional dissipation, warping.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.402

REFERENCES

1. Shataev V.G., Shataev P.A. Analysis of thin-walled stiffened rods using the beam theory. *Russian Aeronautics*, 2011, Vol. 54, Iss. 1, pp. 49–55; DOI: 10.3103/S1068799811010090
2. Chernov S.A. Modeling of stability of a plate stiffened by thin-walled beams. *Software & Systems*, 2014, Vol. 108, No. 4, pp. 183–187; DOI: 10.15827/0236-235X.108.183-187
3. Iyavoynen S.V., Larichkin A.Yu., Kolodezev V.E. Chislennoe i eksperimental'noe issledovanie chistogo izgiba balok iz titanovogo splava ABVT-20 v usloviyakh polzuchesti s uchetom razlichnykh svoystv na rastyazhenie i szhatie [Numerical and experimental research of pure bending of beams made of the titanium ABVT-20 alloy with different properties for tension and compression under creep conditions]. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, Vol. 22, No. 3, pp. 430–446 (in Russian); DOI: 10.14498/vsgtu1614
4. Banshchikova I.A., Tsvlodub I.Yu., Petrov D.M. Deformirovanie elementov konstruktсии iz splavov s ponizhennoi soprotivlyaemost'yu deformatsiyam polzuchesti v sdvigovom napravlenii [Deformation of structural elements made of alloys with reduced resistance to creep in shear direction]. *Uch. Zap. Kazan. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2015, Vol. 157, No. 3, pp. 34–41 (in Russian).
5. Boyko S.V., Larichkin A.Y. Inverse problem of pure bending of a beam under creep conditions. *J. Appl. Indust. Math.*, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 260–271; DOI: 10.1134/s1990478923020047

6. Boyko S.V., Larichkin A.Y. Inverse problem of ribbed panel forming. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2023, Vol. 64, No. 3, pp. 546–554; DOI: 10.1134/S0021894423030215
7. Bormotin K. S., Oleinikov A. I., Ovcharov I. O. Modelirovanie klepochnoi sborki obshivok kryla s uprezhdeniem reber zhestkosti [Modeling of riveted assembly of wing sheathing with forward stiffeners]. *Vychislitel'nye metody i programirovanie* [Numer. Meth. Programm.], 2015, Vol. 16, Iss. 3, pp. 376–386 (in Russian).
8. Oleinikov A.I. , Bormotin K.S. Modelirovanie protsessa klepki paneli [Modeling of the panel-riveting process]. *Dal'nevost. Mat. Zhurn.* [Far Eastern Math. J.], Vol. 13, No. 1, pp. 102–106 (in Russian).
9. Vlasov V. Z. Thin-walled elastic beams. Washington: Israel Program for Scientific Translations. Translated from Russian [by Y. Schectman], 1961.
10. Lekhnitskii S.G. Kruchenie anizotropnyh i neodnorodnyh sterzhnej [Torsion of Anisotropic and Inhomogeneous Rods]. Moscow: Nauka, 1971 (in Russian).
11. Nurimbetov A., Bekbayev A., Oiybayev S., Dzhamanbayev M., Keikimanova M. Naturally twisted layered anisotropic rod made of reinforced materials research. *Appl. Mech. Materials*, 2015, Vol. 736, pp. 30–38; DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.736.30
12. Mironov B.G., Mironov Yu.B. On the problem of anisotropic rods torsion under external pressure. *Izvestiya RAN, Mekhanika Tverdogo Tela (Mechanics of Solids)*, 2023, Vol. 58, Iss. 2, pp. 511–515; DOI: 10.3103/S0025654422600878
13. Sporykhin A.N., Chupis S.G., Scheglova Y.D. O kruchenii prizmaticheskikh sterzhnei iz uprochnyayushchegosya vyazkoplasticheskogo materiala [On torsion of prismatic viscoplastic bars with hardening]. *Vestnik Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fizika, Matematika*, 2006, No. 2, pp. 235–240 (in Russian).
14. Kachanov L.M. Teoriya polzuchesti [Creep Theory]. Moscow: Fizmatgiz, 1960 (in Russian).
15. Manukyan M. M. Kruchenie tel s uchyotom polzuchesti [Torsion of bodies taking into account creep]. Yerevan: Yerevan Univ. Publ. House, 1972. (in Russian).
16. Namestnikov V.S. Stesnyonnoe kruchenie pri polzuchesti tonkostennogo sterzhnya zamknutogo profilya [Constrained torsion of a thin-walled rod of a closed profile at creep]. *Nauch. Tr. Vsesoyuz. Zaoch. Mashinosroit. Instit.*, 1975, Vol. 25, pp. 109–114 (in Russian).
17. Mordfin L. Torsion creep of circular and noncircular tubes. *J. Research National Bureau Standards. C. Engrg. Instrumentation*. 1967. Vol. 71, No. 3. P. 209–225.
18. Shutov A.V., Larichkin A.Yu., Shutov V.A. Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient. *ZAMM (Z. Angew. Math. Mech)*, 2017, pp. 1-17; DOI: 10.1002/zamm.201600286
19. Gorev V.B., Klopotov I.D. Metodika postroeniya krivykh deformirovaniya na kruchenie pri bol'shikh deformatsiyakh [Method for constructing torsion deformation curves at large strains]. *Zavodskaya laboratoriya*, 1995, No. 12, pp. 50–53 (in Russian).
20. Banshchikova I.A. Rod torsion in kinematic creep modes. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2022, Vol. 63, No. 5, pp. 891–902; DOI: 10.1134/S0021894422050194
21. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Tarasyuk I.A. Reologiya kruglogo strukturno-neodnorodnogo kompozitsionnogo sterzhnya pri kruchenii i krutil'nykh kolebaniyakh [Rheology of round longitudinal fibrous, cross layered and structurally nonuniform composite rod in conditions of torsion and torsional oscillations]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials], 2015, Vol. 81 No. 11, pp. 53–61 (in Russian).
22. Bhatnagar N.S., Gupta S.K., Gupta R.P. The torsion of an orthotropic rod in the theory of creep. *Wood Sci. Technology*, 1969, Vol. 3, Iss. 2, pp. 167–174.
23. Banshchikova I. A. Evaluation of the stress-strain state of rod at torsion from an anisotropic material in the shear direction at creep. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, Vol. 894, Article number 012006; DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012006.
24. Banshchikova I.A. Study of creep of orthotropic rods under torsion using the method of characteristic parameters. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2023, Vol. 64, No. 1, pp. 146–158; DOI: 10.1134/S0021894423010169

25. Sosnin O.V. Anisotropy of creep of materials. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 1965, No. 6, pp. 99–104; DOI: 10.1007/BF00919316
26. Gorev V.B., Masanov I.Zh. Osobennosti deformirovaniya listovykh konstruktsionnykh alyuminievykh splavov i plit v rezhimakh polzuchesti [Specific features of deformation of structural sheet plates made of aluminum alloys in creep regimes]. *Tekhnologiya mashinostroeniya* [Mechanical Engrg. Technol.], 2009, No. 7, pp. 13–20 (in Russian).

УДК 004.85

АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ СИСТЕМЫ УЛЬТРАНИЗКОЧАСТОТНОЙ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ ВЫСОКОТОЧНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

© 2025 С. В. Бойко^{1a,2}, А. Н. Прохоров^{2b}, А. Н. Новоселов^{1c,2},
Е. В. Карпов^{1d,2}

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия,*

²*Московский политехнический университет,
Большая Семёновская, 38, Москва 107023, Россия*

E-mails: ^aboykosv.hydro@gmail.com, ^bprohorovan05@yandex.ru,
^cAleksey.Novoselov@gmail.com, ^devkarpov@mail.ru

Поступила в редакцию 07.08.2024 г.; после доработки 14.11.2025 г.;
принята к публикации 03.12.2025 г.

Предложен алгоритм обучения активных механизмов для систем виброизоляции измерительных приборов, чувствительных к критическим вибрациям почти нулевых частот. Исследуется сравнительная эффективность обучения с помощью модели искусственной нейронной сети, разработка которой основана на алгоритмических методах Левенберга — Марквардта и обратного распространения ошибки. Валидность алгоритма обучения иллюстрируется для параметрической модели позиционного управления прототипом механизма с квазиулевой жёсткостью, с использованием сформированной репрезентативной базы экспериментальных данных. Результаты исследования могут найти применение при разработке и эксплуатации высокоточных и особой точности бортовых и наземных измерительных систем.

Ключевые слова: искусственная нейронная сеть, машинное обучение, вибрация почти нулевых частот, виброизолирующий механизм с квазиулевой жёсткостью.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.403

ВВЕДЕНИЕ

Ультранизкочастотные вибрации, т. е. включающие диапазон почти нулевых частот, $0 < f \leq 1$ Гц, являются новой проблемой нелинейной механики. Такие структурные вибрации, усиливаемые техногенной вибрацией, стали критическим фактором, ограничивающим разработку и применение высокоточных и особой точности бортовых и наземных измерительных систем. Нерешённая проблема резко снижает качество и, во многих случаях, исключает возможность фундаментальных исследований и разработки систем нового поколения. Например, системы магнетронного напыления и рефлектометрического восстановления многослойных нанопленок, используемые для изготовления зеркал EUV-литографии, чувствительны к вибрации, начиная с $f = 1$ Гц [1]. Конструкции солнечных панелей орбитальных станций вибрируют на частотах $f \leq 0.1 - 0.5$ Гц [2]. Колебания на частотах $f \geq 0.3 - 0.5$ Гц, генерируемые в оптических и ускорительных элементах электронных накопителей синхротронного излучения, превышают допустимые амплитуды в 100-1000 раз. Разработчики ускорителей для экспериментальных станций не могут достичь требуемых параметров пучков: эммитанс, размер пучка, рассеивание энергии и т. д. Для этого необходимо снизить вибрации до наноразмерных значений [3]–[5].

Виброизолирующие механизмы с квазиулевой жёсткостью (далее — ВИМ) открывают беспрецедентные возможности для повышения качества виброизоляции объектов в широком диапазоне частот, включая почти нулевые значения. Поскольку механизмы, основанные на методах демпфирования или динамического гашения колебаний, «не видят», в силу физических закономерностей, вибраций почти нулевых частот, а их эффективность начинается на частотах $f \gg 1 - 2$ Гц [6]–[9]. Для виброизоляции на почти нулевых частотах, ВИМ требуют активного управления. Однако управление ВИМ требует небольшого количества каналов, активируемых для контроля внутренних параметров состояния ВИМ и обеспечения метастабильности системы виброизоляции при движении на таких частотах. Разрабатываемые активные ВИМ планируются как длительно необслуживаемые структурные элементы в составе измерительных систем. Поэтому разработка алгоритмов, программных и аппаратных средств управления с компонентами искусственного интеллекта (ИИ) представляется одной из перспективных задач создания и применения ВИМ в измерительных системах нового поколения.

Одним из интенсивно развивающихся направлений теории и стратегий ИИ является разработка крупномасштабных моделей машинного обучения объектов, связанных с обработкой больших баз данных [10, 11]. Оптимизаторы, используемые при обучении, демонстрируют высокую адаптивность к решению задач распознавания и визуализации образов, молекулярного моделирования, квантовой химии (см., например, [12, 13]). Глубокие нейронные сети менее подвержены переобучению. Вместе с тем, известные приложения для глубокого обучения объектов используют чрезмерно детализированные настройки. Поэтому должным образом обученные модели маломасштабных сетей могут дать результат, более приемлемый для практического применения при решении ряда перспективных прикладных задач [14].

Разработке алгоритмов и программных средств с использованием различных ИИ-стратегий для решения задач управления полуактивными и активными виброзащитными механизмами, основанными на методах демпфирования или динамического гашения вибраций, посвящено немало работ (см., например, [15]–[18]). Это, как правило, задачи повышения качества частотной фильтрации и цифровой обработки сигналов с датчиков внешних вибраций для ослабления колебаний объекта виброзащиты на инфранизких, $f > 3 - 6$ Гц, средних, $f = 30 - 50$ Гц, высоких, $f > 100$ Гц, и более высоких, $f > 1000$ Гц, частотах.

В статье рассматриваются вопросы разработки и реализации алгоритма адаптивного управления ВИМ на почти нулевых частотах $0 < f \leq 1$ Гц, включая новые задачи моделирования, обучения и тестирования моделей искусственной нейронной сети (ИНС-моделей), генерирования набора внутренних параметров состояния для обучения ВИМ движению по заданному закону, с использованием экспериментальной базы данных параметрического и позиционного управления прототипом подобного ВИМ.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОБУЧЕНИЕ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

При определённом балансе значений внутренних параметров состояния ВИМ и обеспечении метастабильности системы виброизоляции вблизи почти нулевых частот, внешним вибрациям практически невозможно «пробиться» к объекту виброизоляции [19]. Для управления ВИМ нет необходимости в непрерывном мониторинге параметров внешних вибраций для ослабления резонансных амплитуд, в отличие от механизмов демпфирования или динамических гасителей. Задача управления ВИМ может быть решена с помощью «внутреннего наблюдателя» [20] за медленно меняющимся движением объекта, размещаемого на упругом основании квазиулевой жёсткости. Функцию такого «наблюдателя» могла бы выполнить маломасштабная ИНС-модель обучения ВИМ устойчивому движению в исследуемом диапазоне частот.

На рис. 1(а) представлена одна из схем управления ВИМ. Для генерации управляющих сигналов, ИНС-модель работает как обратная, т. е. входами являются выходные параметры:

амплитуда дрейфа, т. е. перемещений объекта виброизоляции относительно источника возмущения. Выходы ИНС-модели являются параметрами управляющего сигнала. В данном случае, $X(p)$ — входное возмущение, на выходе — реакция (дрейф) объекта $Y = F(X(p), t)$, измеренная в заданной точке пространства дрейфа. Управление осуществляется с учётом временной задержки между итерациями контролируемых параметров и управляющего сигнала, чтобы получить фазовый параметр входа ИНС-модели.

На рис. 1(b) представлена ИНС-модель, которая может быть использована для реализации, в общем случае, процессов как параметрического, так и позиционного управления ВИМ.

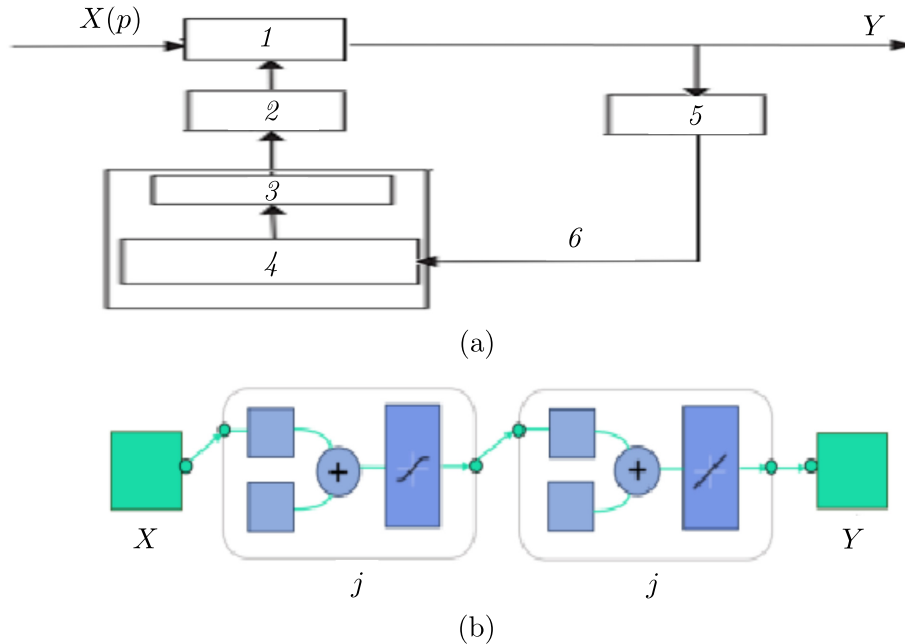


Рис. 1. Моделирование и обучение ИНС:

(а) блок-схема модуля позиционного управления ВИМ:

1 — объект виброизоляции, 2 — активатор, 3 — ИНС, 4 — оценка задержки сигнала, 5 — модуль контроля сигнала позиционной ошибки, 6 — амплитуда относительных перемещений и частота колебаний объекта;

(б) ИНС-модель обучения ВИМ адаптивному управлению

Это многослойная сеть прямого распространения, имеющая вход, скрытые слои нейронов и выходной слой. Каждый нейрон сети выполняет две операции: вычисляет взвешенную сумму входных сигналов, а затем преобразует полученное значение с помощью функции активации $y(a)$, где a — взвешенная сумма входных сигналов. В данной работе, в архитектуре ИНС прямого распространения функция активации нейронов в скрытых слоях моделируется сигмоидальной функцией

$$y(a) = \frac{1}{1 + \exp(-a)}.$$

Сигмоидальная функция активации вводит нелинейность в ИНС-модель и ограничивает выходной сигнал нейрона диапазоном $[0, 1]$, что позволяет сети обучаться моделированию сложных нелинейных зависимостей между входными (например, амплитудой и частотой возмущения) и желаемыми выходными данными (желаемыми параметрами управляющего сигнала). Сигмоидные функции дифференцируемы, что позволяет использовать алгоритмы обратного распространения ошибки для обучения сети. На выходном слое применяется линейная функция активации:

$$y(a) = a,$$

которая не имеет ограничений на выходное значение, что важно в тех случаях, когда параметры управляющего сигнала могут принимать широкий диапазон значений.

Комбинация сигмоидальной активации в скрытых слоях и линейной активации на выходе обеспечивает достаточную гибкость для моделирования сложных взаимосвязей и генерации управляющих сигналов широкого диапазона.

Входной сигнал X_j обрабатывается функцией активации F для получения выходного сигнала нейрона. На входе модели задают значения амплитуд перемещения (x_1) и частот (x_2) возмущения, на выходе получают скорректированные значения относительного перемещения Y (дрейфа) объекта. Таким образом, «идеальный» управляющий сигнал должен повторить движение объекта на упругом основании, т. е. на поддрессоренной платформе ВИМ, связанной с неподдрессоренной платформой параметрическими элементами квазиулевого жёсткости. Количество скрытых слоёв и нейронов в каждом скрытом слое определяется путём анализа наилучших значений при расчёте наименьшей среднеквадратической ошибки (MSE) для проверочных наборов данных.

Алгоритм обучения состоит в определении значений весовой функции на основе базы данных (примеров), образующих обучающее множество для ИНС-модели, имеющей n входов и m выходов, с использованием N обучающих примеров [21]. Степень соответствия параметров модели данным множества задаётся функционалом качества обучения:

$$E(\omega) = \sum_{i=1}^N (F(x_i, \omega) - y_i)^2, \quad (1)$$

где x_i – входной вектор из i -го примера, y_i – вектор ожидаемых значений, ω – вектор весов.

По завершении определённого этапа обучения, ИНС становится способна к управлению ВИМ в режиме реального времени. На начальном этапе обучения, применён подход валидации ИНС-модели. Для коррекции значений примеров с использованием базы экспериментальных данных и последующей оптимизации, а затем, для настройки программы обучения, применён метод Левенберга – Марквардта [22]. Метод является одним из наиболее эффективных для минимизации значений квадратичных отклонений. Он сочетает в себе преимущества методов градиентного спуска и наискорейшего спуска, что позволяет достичь высокой скорости расчёта и быстрой сходимости алгоритма. Это делает его особенно подходящим для задач, требующих точной настройки параметров и быстрой реакции на изменения входных данных. В качестве альтернативного подхода к моделированию обучающей ИНС-модели, применён метод обратного распространения ошибки [23]. Метод широко используется из-за универсальности и эффективности решения задач классификации и регрессии. Обратное распространение ошибки позволяет корректировать веса нейронной сети на основе разницы между предсказанными и фактическими значениями, тем самым минимизируя функцию потерь.

2. ТЕСТИРОВАНИЕ ИНС-МОДЕЛИ И НАЧАЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ ВИМ

Для моделирования процесса управления случайным, медленно меняющимся движением ВИМ реализован и протестирован алгоритм обучения с помощью ИНС-модели. Цель обучения: определение возможности точного запоминания и восстановления заданной криволинейной (тестовой) траектории поддрессоренной платформы ВИМ. Для оценки качества обучения использован мгновенный функционал $E(\omega)$, согласно (1), при этом задавался входной сигнал вида:

$$x(t) = A \sin(\omega_* t + \phi) + K,$$

где A , ω_* , ϕ , K – неизвестные амплитуда, частота, фаза и постоянный член возмущения траектории, соответственно.

Программные средства оптимизации ИНС-модели для обучения ВИМ разработаны на языке Python, для создания графического интерфейса использована библиотека PyQt5 [24], [25]. С помощью разработанных программных средств реализованы альтернативные варианты алгоритма обучения на основе методов оптимизации Левенберга-Марквардта (с расчётом матрицы Якобиана) и обратного распространения ошибки. Для предотвращения проблем регрессии [26] учитывался подбор гиперпараметров, отслеживалась метрика и переобучение (см. примеры табл. 1 и табл. 2).

Таблица 1

Расчётные параметры
(метод оптимизации Левенберга — Марквардта)

Графики	кривая 1	кривая 2	кривая 3	кривая 4	кривая 5	кривая 6
λ	1.6	1.6	1.25	0.62	0.49	0.85
τ_{\max}	1000	1000	100	300	169	33
α	0.6	0.7	0.5	0.43	0.9	0.82
MSE	0.08	0.77	1.34	2.99	0.04	0.13
Точность, %	93.93	86.39	91.08	82.01	62.2	37.77

В табл. 1 приняты следующие обозначения: λ — коэффициент затухания, τ_{\max} — максимальное число итераций, α — параметр регуляризации, MSE — минимальное среднеквадратичное отклонение.

Таблица 2

Расчётные параметры
(метод оптимизации обратного распространения ошибки)

Графики	1	2	3	4	5	6	7	8
X	1	1	1	1	1	1	1	1
j_1	5	5	5	5	15	15	15	15
j_2	5	5	5	5	15	15	15	15
Y	1	1	1	1	1	1	1	1
эпоха	1000	4000	2200	2000	4000	5300	7500	4000
η	0.001	0.015	0.02	0.05	0.01	0.018	0.026	0.02
p	0.1	0.1	0.01	0.2	0.01	0.015	0.01	0.01
MSE	0.011	0.01	0.008	8.1e+76	0.0004	0.004	0.0003	0.0015

В табл. 2 обозначены: X — входной слой, j_1 и j_2 — скрытые слои, η — скорость обучения. Параметр p контролирует степень «зашумления» обучения путём определения вероятности, с которой каждый нейрон временно исключается из работы (dropout).

При оптимизации методом Левенберга — Марквардта воспроизводимость результатов обеспечивалась установкой фиксированного параметра генератора случайных чисел ($\text{seed}=42$) при разделении данных на обучающую (60%), валидационную (20%) и тестовую (20%) выборки, что позволило обеспечить независимую оценку ИНС-модели (рис. 2(с)).

График 1 (см. табл. 1) на рис. 2(а) демонстрирует работу модели для заданных условий, а также малые значения ошибки (см. рис. 2(с)) моделирования траектории движения объекта. На каждом шаге итераций, при обновлении параметров ИНС, алгоритм улучшал прогноз, приближая их значения к экспериментальным данным (см. точки на рис. 2(а)). На обучающем наборе функция потерь быстро снижается до 100 итераций (синяя кривая на рис. 2(с)), далее следовала стагнация. Это указывает на эффективную работу на обучающих данных. Функция потерь снижается в начале в валидационном наборе (зелёная кривая на рис. 2(с)) и стабилизируется на более высоком уровне. Для предотвращения деградации производительности на

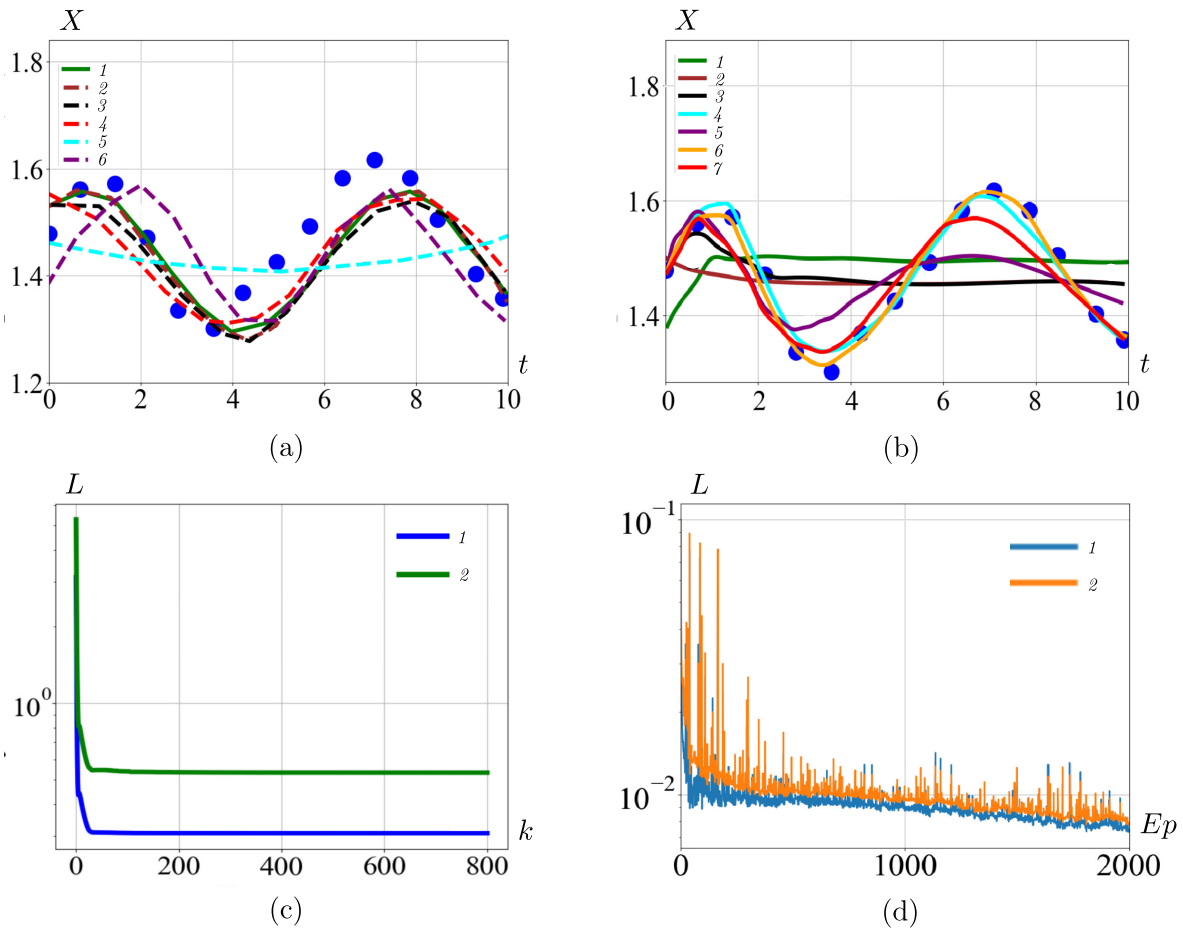


Рис. 2. Тестирование ИНС-моделей на основе методов:

- (а) Левенберга — Марквардта (графики 1–6);
 - (б) обратного распространения ошибки (графики 1–7) — расчетные данные в сравнении с экспериментальной выборкой (синие круги);
- Кривые обучения (с): зависимость функции потерь L от номера итерации k для обучающей (график 1) и валидационной (график 2) выборок для методов Левенберга — Марквардта и обратного распространения ошибки соответственно;
- (d) зависимость функции потерь L от порядкового номера эпохи Ep .

валидационном наборе внедрена ранняя остановка обучения. Точность, определяющая критерий завершения программы, составила $\varepsilon = 10^{-8}$. Тенденция к снижению ошибки отражает успешность алгоритма обучения относительно минимизации невязки в процессе обучения. Преимуществами метода являются Левенберга — Марквардта адаптивность и способность эффективно преодолевать локальные минимумы.

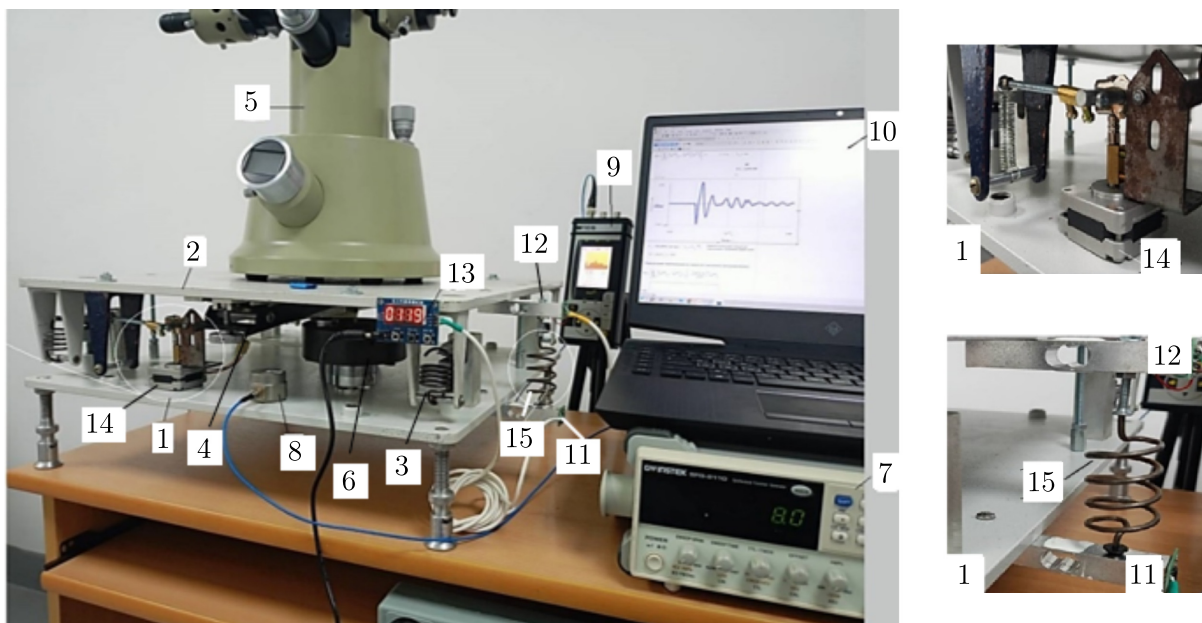
Метод обратного распространения ошибки позволил существенно, до 98.32%, повысить точность вычислений (см. рис. 2(b)). В расчётах был выбран оптимальный размер скрытого слоя — два (j_1 и j_2), каждый из них содержал по 15 нейронов и один выходной слой (Y) (см. табл. 2). При увеличении количества нейронов в скрытых слоях существенно увеличивалось время вычислений. При неизменном числе итераций и увеличении числа нейронов наблюдался рост функционала $E(\omega)$.

Анализ графиков потерь (см. рис. 2(d)) показывает, что кривые, отражающие показатели как на обучающей, так и валидационной выборках, демонстрируют снижение с каждым новым этапом обучения. Модель успешно осваивает представленные данные. График валидационных потерь выглядит более «возмущённым», что, связано с тем, что валидационный

набор данных меньше и более чувствителен к обучению. Однако переобучение не было за счёт введения функции ранней остановки (early stopping). Если метрика не улучшилась за заданное число итераций, то обучение прерывалось. Минимум MSE зафиксирован $\eta = 0.02$, максимум — при $\eta = 0.001$. Dropout используется только в функции прямого прохода, а не как часть регуляризации при обновлении весов.

Таким образом, для обучения ИНС использовалась простая реализация градиентного спуска (SGD), без необходимости в более сложных алгоритмах, например, Adam, RMSProp или L-BFGS [10], [11]. Для реализации и контроля использовался фиксированный шаг и большое число эпох. Удаление регуляризации и сложных критериев остановки делает предложенный алгоритм обучения более понятным и легко воспроизводимым, что важно для анализа и отладки параметров управления ВИМ. Модель успешна в обучении, но критически важно следить за потерями на валидационном наборе, чтобы обеспечить хорошую обобщающую способность. Алгоритм позволяет также принимались меры для предотвращения переобучения модели.

Далее представлены примеры, демонстрирующие работоспособность ИНС-модели на основе метода обратного распространения ошибки применительно к задаче обучения ВИМ с одной степенью свободы. В примерах использована выборка из базы экспериментальных данных параметрического и позиционного управления масштабной моделью системы виброизоляции, разработанной и многократно испытанной на основе прототипа ВИМ [27]. На рис. 3(а) показан стенд для тестирования модели обучения ВИМ, который включает неподдрессоренную 1 и поддрессоренную 2 платформы. Платформы связаны между собой параметрическим элементом квазиулевого жёсткости, состоящим из пружин 3 и 4 с регулируемой положительной $k_{(+)}$ и отрицательной $k_{(-)}$ жёсткостью, соответственно.



(a)

(b)

Рис. 3. Стенд имитации процесса обучения ВИМ: (а) компоновка стенда; (б) контур коррекции жёсткости параметрического элемента ВИМ и относительной позиции объекта виброизоляции при движении в вертикальном направлении.

В качестве объекта виброизоляции использован высокоточный измерительный прибор 5 (интерферометр). Эффект квазиулевого жёсткостью достигается совместной работой пружин 3 и 4. Эффект квазиулевого жёсткостью достигается совместной работой пружин 3 и 4. Регу-

лируя, с помощью активатора в контуре коррекции параметров, и поддерживая баланс жесткостей пружин, достигают квазиулевой суммарной (квазиулевой) жёсткости параметрического элемента: $k_{(+)} + k_{(-)} \rightarrow \min$. В результате, собственные частоты системы виброизоляции могут достигать почти нулевых, $f_0 \rightarrow 0$ (Гц), значений, на которых движется платформа 2 без потери устойчивости. Поэтому внешние вибрации от источника 6, размещённого на неподдресоренной платформе 1, не передаются на объект, установленный на платформе 2. Внешние вибрации задают генератором 7, измеряют датчиком 8 и анализируют виброметром 9. Процессы возбуждения и измерения вибраций осуществляют с помощью программного обеспечения, установленного на управляющем компьютере 10.

На рис. 3(b) показан один из вариантов контура коррекции параметров ВИМ, включающего элементы управления и контроля суммарной жёсткости пружин 3 и 4 параметрического элемента ВИМ и контроля дрейфа позиции объекта виброизоляции. Основные структурные элементы контура: тензодатчики положения 11 и 12 платформ 1 и 2, индикатор 13 (точность определения величины дрейфа до 0.1 мкм), активатор 14 (шаговый, реверсный микроэлектродвигатель постоянного тока с короткой, безынерционной кинематической цепью связи с платформой 2), пружинный регулятор 15 для прецизионной настройки параметрического элемента.

Рис. 4 демонстрирует результаты (примеры) моделирования, с помощью стенда, упругих характеристик параметрического элемента ВИМ, включая участок квазиулевой жёсткости.

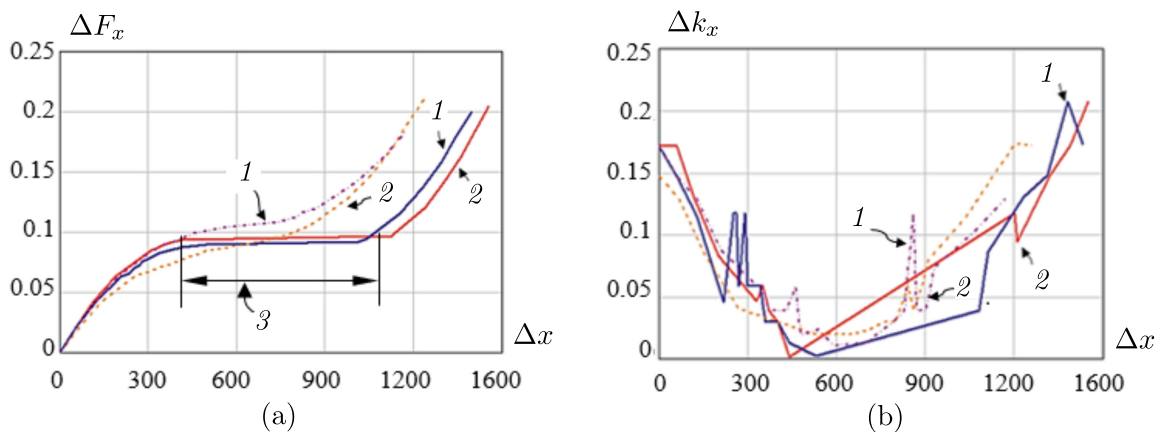


Рис. 4. Упругие характеристики ВИМ: (а) силовая, (б) жесткостная.

Графики 1 и 2 — прямой и обратный ход платформы 2; 3 — участок квазиулевой жесткости

Рис. 4(а) показывает (см. сплошные линии), что ВИМ способен иметь участок предельно малой (квазиулевой) жёсткости. Это следует из анализа рис. 4(б) (см. также сплошные линии), на котором представлены данные об изменении жёсткости параметрического элемента, получаемые автоматически (программными средствами) по результатам измерений. Из рис. 4(а) также следует, что жёсткость может быть как предельно малой положительной, т. е. $k_{(+)} + k_{(-)} \rightarrow +\min$ (режим мягкого виброизолятора), так и предельно малой отрицательной, т. е. $k_{(+)} + k_{(-)} \rightarrow -\min$ (режим мягкого упора). Поэтому, для обеспечения метастабильности системы виброизоляции на почти нулевых частотах, если ВИМ настроен на режим виброизолятора, необходимо его активное управление, не допускающее инверсии знака квазиулевой жёсткости.

В табл. 3 представлены исходные данные (примеры) для расчёта упругих характеристик параметрического элемента ВИМ и собственных частот системы виброизоляции.

Анализ результатов расчётов позволил выбрать оптимальную архитектуру и исходные значения параметров ИНС-модели для обучения ВИМ. Из табл. 3 следует (см. набор 3), что, размер скрытого слоя равен четырём, а каждый слой включает по 15 нейронов. При этом скорость обучения составила $\eta = 0.6 \cdot 10^{-3}$ для $\sim 35000 - 76000$ эпох и значений параметра

Таблица 3

Сравнение архитектур ИНС-модели для обучения ВИМ

	Набор 1				Набор 2				Набор 3			
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
X, Y	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
j_1	18	16	20	16	10	15	13	14	15	15	15	15
j_2	15	18	17	19	11	13	13	15	15	15	15	15
j_3	16	18	17	18	-	-	-	-	15	15	15	15
j_4	20	15	19	15	-	-	-	-	15	15	15	15
j_5	19	18	17	16	-	-	-	-	-	-	-	-
Эпохи	12363	9898	6000	19765	7119	1373	4860	5923	34992	26880	74652	75890
η	0.005	0.009	0.0003	0.0005	0.005	0.002	0.004	0.004	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
p	0.01	0.04	0.0	0.0	0.02	0.05	0.05	0.04	0.01	0.02	0.04	0.03
%	95.69	92.88	93.99	94.76	78.26	78.22	79.55	78.22	98.12	98.12	98.12	98.12

$p = 0.01 - 0.04$, соответственно.

На рис. 5 показаны результаты (примеры) применения ИНС-модели для обучения ВИМ устойчивому движению системы виброизоляции вблизи почти нулевых частот.

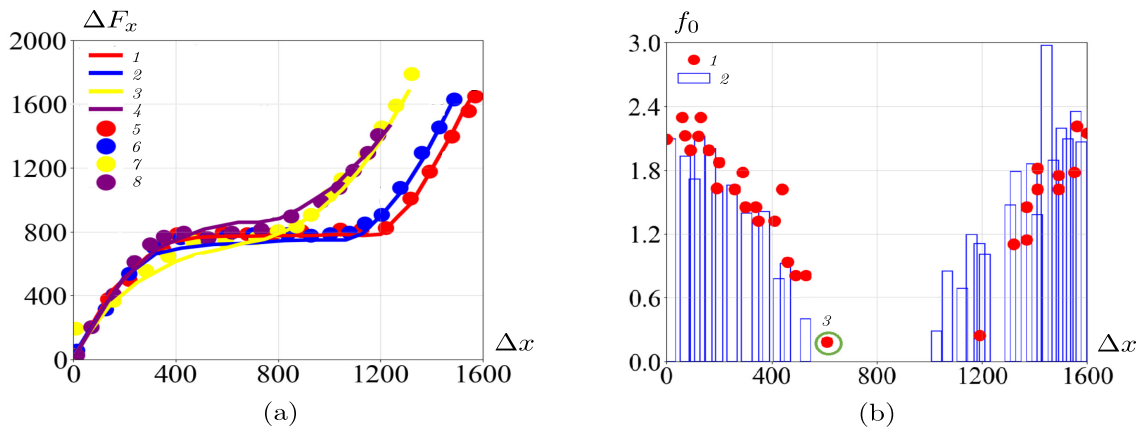


Рис. 5. Сравнительные упругие (а) и частотные (б) характеристики (примеры) системы виброизоляции при настройке на стенде (а) графики 1–4 и обучении ВИМ с помощью ИНС-модели: (а) графики 5–8; (б) точечный график: 1 – ИНС; 3 – частота системы виброизоляции $f_0 \leq 0.16$ Гц; 2 – экспериментальные данные

На данном (начальном) этапе обучения проведены обучающие серии, по 400 экспериментов в каждой. Было применено масштабирование для предобработки экспериментов. Для сдвига f_0 -спектра собственных частот модели системы виброизоляции к следующему наименьшему возможному значению была использована линейная функция сглаживания настраиваемых параметров. Данные были разделены на обучающую (60%), валидационную (20%) и тестовую (20%) выборки. Для предотвращения переобучения сети применялась ранняя остановка, срабатывающая на начальном этапе увеличения потерь с ростом числа эпох. Воспроизводимость результатов обеспечивалась установкой фиксированного параметра генератора случайных чисел ($seed=42$).

На рис. 5(а) (см. точечные графики ИНС1–ИНС4) показаны результаты применения ИНС-модели для воспроизведения упругих характеристик параметрического элемента ВИМ, включая участки с инверсией знака квазиулевого жёсткости. Результаты представлены в срав-

нении с экспериментальными данными (см. сплошные линии) для четырёх режимов настройки параметрического элемента: два — для прямого и два — для обратного хода платформы 2 стенда на рис. 3. Скорость обучения составила $\eta = 6 \cdot 10^{-4}$, при этом размер скрытого слоя равен четырём, а каждый слой включает 15 нейронов (см. набор в табл. 3).

Рис. 5(b) иллюстрирует (точечный график) данные расчёта собственных частот f_0 системы виброизоляции в сравнении с экспериментальными данными (гистограмма) и, соответственно, оценку качества виброизоляции с помощью управляемого ВИМ при движении вблизи нулевых частот. Скорость обучения была установлена на уровне $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$ для 80000 – 90000 эпох, а скрытый слой состоял из 4 слоёв, каждый из которых включал по 15 нейронов (см. табл. 4).

Таблица 4

Сравнение архитектур ИНС для модели ВИМ
(частотные характеристики)

X, Y	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	1	1	1	1	1	1	1
j_1	9	15	8	15	14	11	15	15
j_2	14	12	11	14	15	15	15	15
j_3	-	4	14	-	15	14	15	15
j_4	-	-	-	-	14	10	15	15
Эпохи	79125	76854	59899	51872	60941	56734	54684	87923
η	0.0003	0.0004	0.036	0.0005	0.0004	0.0006	0.0004	0.0005
p	0.01	0.04	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.01
%	70.12	78.50	85.17	84.50	89.50	93.71	96.70	98.12

В процессе обучения (см. рис. 6(a,b)) наблюдается уменьшение MSE с ростом числа эпох. Модели эффективно обучаются, повышается точность. Значения потерь быстро падают до четвёртого режима, приближаясь к нулю при ≥ 2000 эпох, с небольшими колебаниями, что свидетельствует о хорошей стабильности. Для всех моделей точность растёт с увеличением эпох и, достигнув плато, стабилизируется на уровне, близком к 100% ($\approx 98.12\%$).

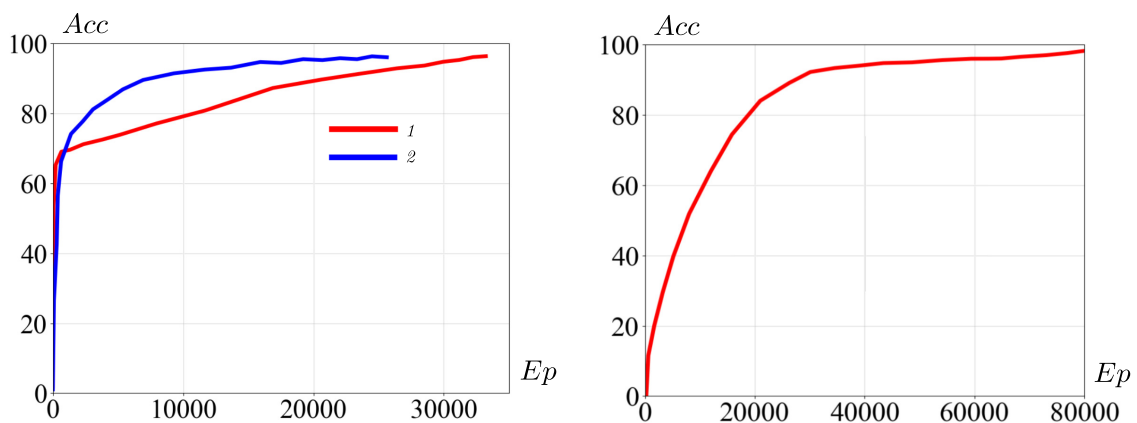


Рис. 6. Зависимость точности обучения Acc от порядкового номера эпохи Ep при настройке параметров состояния ВИМ и системы виброизоляции:

(а) прямого (1) и обратного (2) хода платформы 2; (б) собственных колебаний системы

Анализ результатов на рис. 5 и рис. 6 показывает, в частности, что разработанная ИНС-модель способна достаточно точно: 1) воспроизводить упругие характеристики ВИМ, включая

участок квазиулевой жёсткости; 2) отслеживать изменения жёсткости параметрического элемента ВИМ, включая инверсию знака жёсткости; 3) реализовать алгоритм управления движением ВИМ в исследуемом диапазоне частот, включая почти нулевые значения. Кроме того, применение ИНС-модели даёт возможность сместить собственную частоту системы виброизоляции до $f_0 \leq 0.16$ Гц. Результаты расчётов вполне коррелируются с экспериментальными данными, полученными на масштабных моделях системы виброизоляции на основе прототипа ВИМ: $f_0 < 0.2$ Гц [27].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрен подход к решению вибрационной проблемы, критической для ряда высокоточных измерительных систем, с помощью виброизолирующих механизмов с квазиулевой жёсткостью. Подобные механизмы с активным параметрическим и позиционным управлением являются безальтернативными, в известной степени, техническими средствами ультранизкочастотной виброизоляции, включая почти нулевые частоты, $0 \leq f \leq 1$ Гц, к которым высокочувствительны данные системы. Для решения проблемы разработан и протестирован алгоритм обучения виброизолирующих механизмов с помощью модели искусственной нейронной сети, основанной на методах Левенберга-Марквардта и обратного распространения ошибки. Реализация алгоритма на начальном этапе обучения механизма с одной степенью свободы показала эффективность обучения, в частности, точность воспроизведения параметров управления механизмом превышает 98%. Далее планируются разработка и реализация алгоритмов обучения механизмов со многими степенями свободы с целью приближения объектов разработки к условиям практического использования.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-19-00258). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee C.M., Karpov E.V., Goverdovskiy V.N., Larichkin A.Yu., Brovkina Ju.I., Prokhorov A.N. Parametric control of quasi-zero stiffness mechanisms for vibration isolation at near-zero frequencies // J. Vibration and Control. 2024. V. 1; DOI: 10.1177/10775463241239381
2. Li D., Liu W. Vibration control for the solar panels of spacecraft: Innovation methods and potential approaches // Internat. J. Mech. System Dynamics. 2023. V. 4. P. 300–330.
3. Kongtawong S., Chubar O., Shaftan T. Simulation of synchrotron radiation from electron beams affected by vibrations and drifts // Phys. Rev. Accelerators and Beams. 2022. V. 25. Article number 024601; DOI:10.1103/PhysRevAccelBeams.25.024601
4. Lee C.-M., Goverdovskiy V.N., Tolochko B.P., Antokhin E.I., Prokhorov A.N., Larichkin A.Yu. A new concept of vibration protection systems with «quasi-zero» stiffness and a new challenge to use such systems // Proceed. 26th International Congress on Sound and Vibration (ICSV26), Montreal, Canada, 2019.
5. Serluca M., Aimard B., Balik G., Caron B., Brunetti L., Dominjon A., Jeremie A. Vibration analysis and control in particle accelerator // Proceed. FCC-ee MDI workshop CERN, France-Swiss, 2018.
6. Wang M., Xiong J., Fu S. et al. An active vibration isolation and compensation system for improving optical image quality: modeling and experiment // Micromachines. 2023. V. 14. P. 1387; DOI: 10.3390/mi14071387

7. *Burdzik R., Khan D.* An overview of the current state of knowledge and technology on techniques and procedures for signal processing, analysis, and accurate inference for transportation noise and vibration // *Measurement*. 2025. V. 252. Article number 117314; DOI: 10.1016/j.measurement.2025.117314
8. *Wang F., Zheng S., Huang C.* Research and application of vibration isolation platform based on nonlinear vibration isolation system // *J. Sensors*. 2023. V. 1. P. 1–17; DOI:10.1155/2023/9967142
9. *Herzog R.* Active versus passive vibration absorbers // *J. Dynamic Systems, Measurement and Control*. 1994. V. 116. P. 367–371; DOI: 10.1115/1.2899231
10. *Sun X., Xu Z.* Hybrid optimization approaches for deep learning: Integrating reinforcement learning and evolutionary algorithms // *J. Machine Learning Research*. 2023. V. 24, N 1. P. 1–25.
11. *Qian X., Xiaodan W., Lei L., Yafei S.* Dynamic bound adaptive gradient methods with belief in observed gradients // *Pattern Recognition*. 2025. V. 168. P. 111819; DOI:10.1016/j.patcog.2025.111819
12. *Zhang Z., Yuan G., Qin Z., Luo Q.* An improvement by introducing LBFGS idea into the Adam optimizer for machine learning // *Expert Syst. Appl.* 2026. V. 296. Article number 129002; DOI:10.1016/j.eswa.2025.129002
13. *Alridha H.A., Abd Alsherify F.H., Al-Khafaji Z.* A Review of Optimization Techniques: Applications and Comparative Analysis // *J. Computer Sci. Math.* 2024. V. 5, N 2. P. 122–134; DOI:10.52866/ijcsm.2024.05.02.011
14. *Song M.-H.* Trainability and Generalization of Small-Scale Neural Networks. PhD-thesis. University of Illinois, Urbana, USA. 2019.
15. *Li S., Zhang N., Tao Z.* A kind of vibratory isolation algorithms based on neural network // *Proceed. Internat. Conf. «Geo-Informatics in Resource Management and Sustainable Ecosystem»*. 2016. P. 128–136; DOI: 10.1007/978 – 3 – 662 – 49155 – 3₁₂
16. *Ghahremani A., Hamid Khaloozadeh H., Ghahremani P.* Adaptive sliding neural network-based vibration control of a nonlinear quarter car active suspension system with unknown dynamics // *Vibroengineering Procedia*. 2018. V. 17, N 10. P. 67–72; DOI: 0.21595/vp.2018.19871
17. *Han S.-Y., Dong J.-F., Zhou J., Chen Y.-H.* Adaptive fuzzy PID control strategy for vehicle active suspension based on road evaluation // *Electronics*. 2022. V. 921. Article number 11060921.
18. *Yang K., Tong W., Zhou X.* Active vibration isolation of a monostable nonlinear electromagnetic actuator using machine learning adaptive feedforward control // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2025. V. 192. P. 116035.
19. *Lee C.-M., Goverdovskiy V. N.* *Vibration Protection Systems. Negative and Quasi-Zero Stiffness.* Cambridge University Press, 2021. DOI:10.1016/j.chaos.2025.116035.
20. *Zhang L.J., Das T., Yu X.Y.* Neural network-based control and active vibration mitigation in a fully-flexible arm space robot under elastic base influence: A luenberger observer approach // *Internat. J. Comput. Intelligence Systems*. 2023. V. 2, N 2. P. 197–208; <https://doi.org/10.56578/jisc020402>.
21. *Xia Y., Ghasempour Ah.* *Active Vibration Suppression Using Neural Networks.* The World Congress on Engrg. V. II. London, U.K., 2009.
22. *Kaygorodtseva A.A., Shutov A.V.* Inspection of ratcheting models for pathological error sensitivity and overparametrization // *Meccanica*. 2022. V. 57, N 8. P. 1975–2000; DOI: 10.1007/s11012-022-01533-5
23. *Rumelhart D.E., Hinton G.E., Williams R.J.* Learning representations by back-propagating errors // *Nature*. 1986. V. 323. P. 533–536.
24. *Kirsan A.S., Takano K., Mansurina S.T.Z.* EksPy: A new Python framework for developing graphical user interface based PyQt5 // *Internat. J. Electrical and Comput. Engrg.* 2024. V. 14, N 1. P. 520–531; DOI:10.11591/ijece.v14i1.pp520-531
25. *Saabith S., Vinothraj T., Fareez M.* A review on python libraries and ides for data science // *Internat. J. Research Engrg. Sci.* 2021. V. 9, N 11. P. 36–53.
26. *He R., Li B., Li F., Qingqing S.* A Review of Feature Engineering Methods in Regression Problems // *Academic J. Natural Sci.* 2024. V. 9, N 11. P. 32–40; DOI: 10.5281/zenodo.13905622
27. *Говердовский В.Н., Ли Ч.-М., Прохоров А.Н., Ларичкин А.Ю., Полубояров В. А.* Способ виброизоляции и механизм для реализации способа. РФ патент № 2753061, 2021.

UDC 004.85

**AN ALGORITHM FOR LEARNING THE MECHANISMS
OF ULTRA-LOW FREQUENCY VIBRATION ISOLATION
OF HIGH-PRECISION MEASURING SYSTEMS**

© 2025 S. V. Boiko^{1,2a}, A. N. Prokhorov^{2b}, A. N. Novoselov^{1,2c},
E. V. Karpov^{1,2d}

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Acad. Lavrentyev pr., 15, Novosibirsk 630090, Russia,
Moscow Polytechnic University,
Bol'shaya Semenovskaya st., 38, Moscow 107023, Russia*

E-mails: ^aboykosv.hydro@gmail.com, ^bprohorovan05@yandex.ru,
^cAleksey.Novoselov@gmail.com, ^devkarpov@mail.ru

Received 07.08.2024, revised 14.11.2025, accepted 03.12.2025

Abstract. This paper presents an algorithm for learning the active mechanisms for vibration isolation systems of measuring instruments sensitive to critical vibrations at near-zero frequencies. The comparative effectiveness is studied for the learning using a model of artificial neural network under development based on the algorithmic methods of Levenberg-Marquardt and error back propagation. The validity of the learning algorithm is illustrated for a parametric model of positional control by using a prototype mechanism with quasi-zero stiffness, for which a representative database of experimental data has been formed. The results of the study can be used for developing and operating the high-precision and ultra-high-precision on-board and ground-based measuring systems.

Keywords: artificial neural network, machine learning, vibration, near-zero frequencies, vibration isolating mechanism with quasi-zero stiffness.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.403

REFERENCES

1. Lee C.M., Karpov E.V., Goverdovskiy V.N., Larichkin A.Yu., Brovkina Ju.I., Prokhorov A.N. Parametric control of quasi-zero stiffness mechanisms for vibration isolation at near-zero frequencies. *J. Vibration and Control*, 2024, Vol. 1; DOI: 10.1177/10775463241239381
2. Li D., Liu W. Vibration control for the solar panels of spacecraft: Innovation methods and potential approaches. *Internat. J. Mech. System Dynamics*, 2023, Vol. 4, pp. 300–330.
3. Kongtawong S., Chubar O., Shaftan T. Simulation of synchrotron radiation from electron beams affected by vibrations and drifts. *Phys. Rev. Accelerators and Beams*, 2022, Vol. 25, Article number 024601; DOI:10.1103/PhysRevAccelBeams.25.024601
4. Lee C.-M., Goverdovskiy V.N., Tolochko B.P., Antokhin E.I., Prokhorov A.N., Larichkin A.Yu. A new concept of vibration protection systems with «quasi-zero» stiffness and a new challenge to use such systems. *Proceed. 26th International Congress on Sound and Vibration (ICSV26)*, Montreal, Canada, 2019.
5. Serluca M., Aimard B., Balik G., Caron B., Brunetti L., Dominjon A., Jeremie A. Vibration analysis and control in particle accelerator. *Proceed. FCC-ee MDI workshop CERN*, France-Swiss, 2018.

6. Wang M., Xiong J., Fu S. et al. An active vibration isolation and compensation system for improving optical image quality: modeling and experiment. *Micromachines*, 2023, Vol. 14, pp. 1387; DOI: 10.3390/mi14071387
7. Burdzik R., Khan D. An overview of the current state of knowledge and technology on techniques and procedures for signal processing, analysis, and accurate inference for transportation noise and vibration. *Measurement*, 2025, Vol. 252, Article number 117314; DOI: 10.1016/j.measurement.2025.117314
8. Wang F., Zheng S., Huang C. Research and application of vibration isolation platform based on nonlinear vibration isolation system. *J. Sensors*, 2023, Vol. 1, pp. 1–17; DOI:10.1155/2023/9967142
9. Herzog R. Active versus passive vibration absorbers. *J. Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1994, Vol. 116, pp. 367–371; DOI: 10.1115/1.2899231
10. Sun X., Xu Z. Hybrid optimization approaches for deep learning: Integrating reinforcement learning and evolutionary algorithms. *J. Machine Learning Research*, 2023, Vol. 24, No. 1, pp. 1–25.
11. Qian X., Xiaodan W., Lei L., Yafei S. Dynamic bound adaptive gradient methods with belief in observed gradients. *Pattern Recognition*, 2025, Vol. 168, pp. 111819; DOI:10.1016/j.patcog.2025.111819
12. Zhang Z., Yuan G., Qin Z., Luo Q. An improvement by introducing LBFGS idea into the Adam optimizer for machine learning. *Expert Syst. Appl.*, 2026, Vol. 296, Article number 129002; DOI:10.1016/j.eswa.2025.129002
13. Alridha H.A., Abd Alsherify F.H., Al-Khafaji Z. A Review of Optimization Techniques: Applications and Comparative Analysis. *Iraqi J. Computer Sci. Math.*, 2024, Vol. 5, No. 2, pp. 122–134; DOI:10.52866/ijcsm.2024.05.02.011
14. Song M.-H. *Trainability and Generalization of Small-Scale Neural Networks*, PhD-thesis. University of Illinois, Urbana, USA. 2019.
15. Li S. , Zhang N., Tao Z. A kind of vibratory isolation algorithms based on neural network. *Proceed. Internat. Conf. «Geo-Informatics in Resource Management and Sustainable Ecosystem»*, 2016, pp. 128–136; DOI: 10.1007/978 – 3 – 662 – 49155 – 3 _12
16. Ghahremani A., Hamid Khaloozadeh H., Ghahremani P. Adaptive sliding neural network-based vibration control of a nonlinear quarter car active suspension system with unknown dynamics. *Vibroengineering Procedia*, 2018, Vol. 17, No. 10, pp. 67–72; DOI: 0.21595/vp.2018.19871
17. Han S.-Y., Dong J.-F., Zhou J. , Chen Y.-H. Adaptive fuzzy PID control strategy for vehicle active suspension based on road evaluation. *Electronics*, 2022, Vol. 921, Article number 11060921.
18. Yang K. , Tong W., Zhou X. Active vibration isolation of a monostable nonlinear electromagnetic actuator using machine learning adaptive feedforward control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2025, Vol. 192, pp. 116035.
19. Lee C.-M., Goverdovskiy V. N. *Vibration Protection Systems. Negative and Quasi-Zero Stiffness*. Cambridge University Press, 2021. DOI:10.1016/j.chaos.2025.116035.
20. Zhang L.J., Das T., Yu X.Y. Neural network-based control and active vibration mitigation in a fully-flexible arm space robot under elastic base influence: A luenberger observer approach. *Internat. J. Comput. Intelligence Systems*, 2023, Vol. 2, No. 2, pp. 197–208; <https://doi.org/10.56578/jisc020402>.
21. Xia Y., Ghasempoor Ah. *Active Vibration Suppression Using Neural Networks. The World Congress on Engrg.*, V. II. London, U.K., 2009.
22. Kaygorodtseva A.A., Shutov A.V. Inspection of ratcheting models for pathological error sensitivity and overparametrization. *Meccanica*, 2022, Vol. 57, No. 8, pp. 1975–2000; DOI: 10.1007/s11012-022-01533-5
23. Rumelhart D.E., Hinton G.E., Williams R.J. Learning representations by back-propagating errors. *Nature*, 1986, Vol. 323, pp. 533–536.
24. Kirsan A.S., Takano K., Mansurina S.T.Z. EksPy: A new Python framework for developing graphical user interface based PyQt5. *Internat. J. Electrical and Comput. Engrg.*, 2024, Vol. 14, No. 1, pp. 520–531; DOI:10.11591/ijece.v14i1.pp520-531
25. Saabith S., Vinothraj T., Fareez M. A review on python libraries and ides for data science. *Internat. J. Research Engrg. Sci.*, 2021, Vol. 9, No. 11, pp. 36–53.

26. He R., Li B., Li F., Qingqing S. A Review of Feature Engineering Methods in Regression Problems. *Academic J. Natural Sci.*, 2024, Vol. 9, No. 11, pp. 32–40; DOI: 10.5281/zenodo.13905622
27. Goverdovskii V.N., Li CH.-M., Prokhorov A.N., Larichkin A.YU., Poluboyarov V. A. *Sposob vibroizolyatsii i mekhanizm dlya realizatsii sposoba* [A vibration isolation method and a mechanism for implementing the method]. Patent № 2753061, Russia, 2021.

УДК 539.3

К ВОПРОСУ О СИЛЬНОМ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ

© 2025 С. О. Гладков^a, И. Ю. Зморка^b

*Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет),
Волоколамское шоссе, 4, г. Москва 125993, Россия*

E-mails: ^asgrad51@mail.ru , ^bmuratov.ilyas2003@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.04.2025 г.; после доработки 24.10.2025 г.;
принята к публикации 06.11.2025 г.

С помощью вариационной задачи с подвижной границей, найдена статическая форма балки, жёстко закреплённая на одном конце, при условии воздействия на её свободный конец постоянной силы тяжести. Получено общее выражение для функционала энергии с учётом двух типов потенциальной энергии: энергии изгиба и энергии сдвига свободного конца по криволинейной траектории. Из решения уравнения Эйлера — Пуассона найдено нетривиальное решение в виде степенной функции с дробным показателем.

Ключевые слова: упругая балка, потенциальная энергия, вариация, условие трансверсальности.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.404

ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача, связанная с установлением формы балки при её изгибе под воздействием какой-либо сосредоточенной силы, описана во многих учебниках по теории упругости, и используется как олимпиадная задача по математике. При этом её условие формулируется следующим образом. Имеется жёстко закреплённая с одного конца упругая балка, к свободному концу которой приложена точечная сила в виде тела массы m , которое под действием силы тяжести каким-то образом изгибает её. Необходимо установить форму балки, которую она приобретает при упругом изгибе. При этом во всех решениях считается, что потенциальная энергия перемещения свободного конца при воздействии силы тяжести в условиях небольшого смещения вдоль оси y просто равна $mg y$, где g — ускорение силы тяжести, а y — текущая ордината декартовой системы координат. Однако, если внимательно присмотреться к траектории перемещения, то становится вполне понятно, что тело смещает свободный конец совсем не по прямой линии, а по криволинейной, что наглядно может проиллюстрировать эксперимент с обычной деревянной или металлической линейкой, которая вполне может служить хорошим примером абсолютно упругого тела.

Именно поэтому довольно любопытно, на наш взгляд, найти ответ на вполне закономерный вопрос о нахождении формы деформируемой длинной балки под воздействием точечной силы тяжести, приложенной к её свободному концу в случае не малой, а произвольной деформации.

С интуитивной точки зрения абсолютно очевидно, что в рассматриваемом нами двухмерном случае её форма будет описываться некоторой степенной функцией от координаты. Именно поэтому задача здесь как раз и заключается в точном определении этой степени. В случае совсем малых деформаций смещение свободного конца обычно считается прямолинейным. Показатель степени при этом оказывается равным четырём.

В случае же сильных изгибов ситуация существенно изменится (см. [1–3]). Как будет строго показано ниже, при учёте криволинейного перемещения свободного конца, форма балки оказывается существенно отличной от зависимости $y = Ax^4$

Однако, при этом задача довольно сильно усложняется, поскольку для её решения необходимо будет проинтегрировать нелинейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка, решение которого и даст нам ответ об истинной степенной зависимости.

Стоит также обратить внимание и на то факт, что решаемая в настоящей работе задача, с нашей точки зрения, имеет вполне обоснованное и не только познавательное, но и чисто прикладное значение. Этим фактом подчёркивается актуальность поставленной задачи, поскольку описываемый метод её решения может быть применён также и к множеству подобного рода близких проблем.

Действительно, в настоящем сообщении поднимается вполне актуальный вопрос о решении не просто задач из классической теории упругости, а из области проблем нелинейной теории сильных деформаций упругих стержней, когда помимо произвольного смещения свободного конца (не малого), важным фактором является учёт нелинейности его траектории. Этот факт уже сам по себе является новой и вполне актуальной темой, которая требует строгого математического исследования.

Дело в том, что до настоящего момента времени изучение деформаций стержневых систем проводилось только с точки зрения теории малых изгибов. Сказанное подразумевает квадратичную зависимость плотности свободной энергии упруго — деформируемых тел от тензора деформации u_{ik} . Из курса вариационного исчисления известно, однако, что если хотя бы один из концов экстремали описывает некоторую траекторию, то такая задача сводится к совместному решению уравнения Эйлера при обязательном учёте условия трансверсальности. Именно подобного рода задача и является предметом настоящего сообщения, что и говорит о её вполне обоснованной актуальности.

1. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ БАЛКИ

Поскольку запасённая потенциальная энергия упруго-деформируемой балки пропорциональна квадрату её кривизны, т. е.

$$U_1 = B \int_l \frac{dl}{R^2}, \quad (1)$$

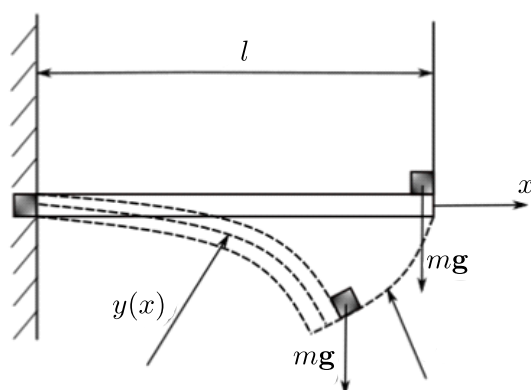
где B — коэффициент упругости балки, R — её радиус кривизны в произвольной точке, который определяется из соотношения

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad (2)$$

то в случае относительно небольших изгибов из формулы (2) следует, что $\frac{1}{R} \approx y''$. При этом потенциальную энергию (1) с учётом того, что $dl = dx\sqrt{1 + y'^2} \approx dx$, можно переписать в значительно более простом виде, а именно

$$U_1 \approx B \int_0^l y''^2 dx. \quad (3)$$

Вторая часть потенциальной энергии связана с вычислением работы, которую совершает сила тяжести, обязанная перемещению тела массой m вдоль криволинейной траектории (см. рисунок).



Схематическое изображение всех параметров задачи

Речь идёт о вычислении интеграла

$$A = m \int_C g ds = -mg \int_l^{x_1} \sqrt{1 + \psi'^2} \sin \alpha dx = mg \int_{x_1}^l \sqrt{1 + \psi'^2} \sin \alpha dx,$$

где функция $\psi(x)$ представляет собой уравнение траектории свободного конца стержня. Угол α — это тупой угол между касательной к функции $\psi(x)$ и осью x .

Однако, здесь следует понимать, что когда мы записываем интеграл (4), то интегрирование начинается от правой точки. Это означает, что при переходе к неподвижной системе координат, начало которой расположено в точке $M_0 = M(0, 0)$ нам следует сделать формальную замену переменной $x \rightarrow l - x$, в результате чего интеграл (4) перейдёт в интеграл

$$A = mg \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \psi'^2} \sin \alpha dx. \quad (4)$$

Следуя общим принципам решения вариационных задач с подвижными границами (см. [4, 5]), мы можем воспользоваться условием ортогональности экстремали и функции $\psi(x)$, а именно соотношением

$$y' \psi' = -1. \quad (5)$$

Поскольку

$$\psi' = \operatorname{tg} \alpha, \quad (6)$$

формула (4) преобразуется к виду

$$A = mg \int_0^{x_1} \psi' dx = -mg \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'}. \quad (7)$$

Таким образом, искомая потенциальная энергия, обязанная работе силы тяжести по перемещению тела массы m вдоль траектории $\psi(x)$ становится такой

$$U_2 = mg \int_0^{x_1} \frac{dx}{y'}. \quad (8)$$

И, следовательно, с учётом (2) и (8) полный функционал потенциальной энергии в наиболее общем случае приводится к виду

$$U = U_1 + U_2 = \int_0^{x_1} \left[B \frac{y''^2}{(1+y'^2)^{5/2}} + \frac{mg}{y'} \right] dx. \quad (9)$$

Рассмотрим вначале упрощённый вариант решения. А именно, будем считать, что $y'^2 \ll 1$. В этом случае функционал (9) упрощается и становится следующим

$$U = \int_0^{x_1} \left[By''^2 + \frac{mg}{y'} \right] dx.$$

Подынтегральная функция должна удовлетворять уравнению Эйлера — Пуассона

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2F_{y''}}{dx^2} = 0, \quad (10)$$

где

$$F = By''^2 + \frac{mg}{y'}.$$

Поскольку $F_y = 0$, то первый интеграл уравнения (10) даёт

$$By''' + \frac{mg}{y'^2} = C_1, \quad (11)$$

где C_1 — константа интегрирования.

Полагая

$$C_1 = 0$$

и совершая подстановку

$$y' = u, \quad y''' = u^2 \frac{d^2u}{dy^2} + u \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (12)$$

приходим к уравнению

$$B \left(u^2 \frac{d^2u}{dy^2} + u \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \right) + \frac{mg}{u^2} = 0,$$

или в более компактном виде

$$B(uu')' + \frac{mg}{u^3} = 0. \quad (13)$$

Полагая здесь

$$u^2 = z, \quad (14)$$

имеем

$$Bz'' + \frac{2mg}{z^{3/2}} = 0. \quad (15)$$

Ещё одна замена

$$z' = V, \quad z'' = V \frac{dV}{dz} \quad (16)$$

приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$BV \frac{dV}{dz} = -\frac{2mg}{z^{3/2}}.$$

Интегрируя, имеем

$$BV^2 = \frac{8mg}{\sqrt{z}} + C_2, \quad (17)$$

где C_2 — ещё одна константа интегрирования.

Полагая $C_2 = 0$ и вспоминая подстановку (12), получаем из решения (17)

$$z' = \frac{2\lambda}{z^{1/4}}, \quad (18)$$

где

$$\lambda = \sqrt{\frac{2mg}{B}}. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (18), получаем

$$z^{5/4} = \frac{5}{2}\lambda y + C_3,$$

где C_3 — константа интегрирования.

Считая, опять-таки, что $C_3 = 0$ и используя подстановки (12) и (14) имеем

$$y^{5/2} = \frac{5}{2}\lambda y, \quad (20)$$

откуда немедленно следует, что

$$y' = \left(\frac{5}{2}\lambda y\right)^{2/5},$$

и после интегрирования получаем

$$y = \left(\frac{3}{5}\right)^{5/3} \left(\frac{5}{2}\lambda\right)^{2/3} x^{5/3} + C_4, \quad (21)$$

где C_4 — четвёртая постоянная интегрирования, которая находится из условия $y(0) = 0$, и, следовательно, $C_4 = 0$. Таким образом, форма изгибающейся балки должна иметь вид

$$y = \beta x^{5/3}, \quad (22)$$

где

$$\beta = \left(\frac{3}{5}\right)^{5/3} \left(\frac{5}{2}\lambda\right)^{2/3}. \quad (23)$$

Как видно из (23) и определения (19), константа β имеет размерность $L^{-2/3}$.

Если смещения незакреплённого конца совсем маленькие, то классический закон говорит нам о том, что в этом случае зависимость $y(x) \sim x^4$. По большому счёту эта зависимость и зависимость (22) довольно слабо отличаются друг от друга в силу их степенного характера. Хотя с точки зрения качественного анализа вполне очевидно, что когда кривая почти лежит на оси абсцисс, то её полиномиальная степень вполне может быть и больше четырёх. В том же случае, если дело касается несколько более сильных изгибов, то найденная зависимость (22) вполне неплохо их описывает.

2. Общий случай сильных изгибов

Чтобы их описать, возвратимся к функционалу (9)

$$U = \int_0^{x_1} \left(B \frac{y''^2}{(1+y'^2)^{5/2}} + \frac{mg}{y'} \right) dx \quad (24)$$

и запишем для него уравнение Эйлера — Пуассона согласно формуле (10)

После простого дифференцирования находим

$$F_y = 0, \quad F_{y'} = -\frac{5By''^2 y'}{(1+y'^2)^{7/2}} - \frac{mg}{y'^2}, \quad F_{y''} = \frac{2By''}{(1+y'^2)^{5/2}}. \quad (25)$$

В результате из уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0$$

следует, что первый интеграл есть

$$F_{y'} = \frac{d}{dx} F_{y''} + \text{const}.$$

Полагая константу равной нулю, с учётом (25), находим интересующее нас уравнение

$$\frac{2y'''}{(1+y'^2)^{5/2}} - \frac{5y''^2 y'}{(1+y'^2)^{7/2}} + \frac{\lambda}{y'^2} = 0, \quad (26)$$

где параметр

$$\lambda = \frac{mg}{B}.$$

Уравнение (26) проще всего решить с помощью подстановки

$$y' = \text{tg } \alpha. \quad (27)$$

Тогда

$$y'' = \frac{\alpha'}{\cos^2 \alpha}, \quad y''' = \frac{\alpha''}{\cos^2 \alpha} + \frac{2\alpha'^2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha},$$

и уравнение (26) сводится к довольно компактному виду

$$2\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha + \frac{\lambda}{\sin^2 \alpha} = 0 \quad (28)$$

С помощью подстановки

$$\alpha' = u, \quad \alpha'' = u \frac{du}{d\alpha} \quad (29)$$

приходим к уравнению

$$2u \frac{du}{d\alpha} \cos \alpha - u^2 \sin \alpha + \frac{\lambda}{\sin^2 \alpha} = 0. \quad (30)$$

Очередная подстановка здесь вполне очевидна, а именно

$$z = u^2. \quad (31)$$

В результате у нас получается простейшее неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dz}{d\alpha} \cos \alpha - z \sin \alpha = -\frac{\lambda}{\sin^2 \alpha},$$

решение которого находится элементарно, и в результате мы получаем, что

$$z = \frac{\lambda}{\sin \alpha} + \frac{C_1}{\cos \alpha}.$$

Физическим смыслом, очевидно, обладает только первое слагаемое, поэтому полагаем $C_1 = 0$, т. е.

$$z = \frac{\lambda}{\sin \alpha}. \quad (32)$$

Согласно (29) и (31) имеем

$$\alpha'^2 = \frac{\lambda}{\sin \alpha}, \quad (5)$$

откуда следует, что

$$x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int \sqrt{\sin \alpha} d\alpha + C_2, \quad (33)$$

где C_2 — константа интегрирования.

Согласно 27) имеем

$$y = \int \operatorname{tg} \alpha dx + C_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\sin \alpha} d\alpha + C_3, \quad (34)$$

где C_3 — ещё одна константа интегрирования.

Таким образом, точное параметрическое решение поставленной задачи в квадратурах, мы можем записать в виде следующей очень компактной системы уравнений

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int \sqrt{\sin \alpha} d\alpha + C_2, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\sin \alpha} d\alpha + C_3. \end{aligned} \quad (35)$$

Проанализируем полученное решение (35). Если угол отклонения мал, т. е. изгибы относительно невелики, из уравнений (35) следует, что

$$\begin{aligned} x &\approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int \sqrt{\alpha} d\alpha + C_2 = \frac{2\alpha^{3/2}}{3\sqrt{\lambda}} + C_2, \\ y &\approx \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int \alpha^{3/2} d\alpha + C_3 = \frac{2\alpha^{5/2}}{5\sqrt{\lambda}} + C_3. \end{aligned} \quad (36)$$

Избавляясь здесь от α , получаем

$$\left(\frac{3\sqrt{\lambda}}{2} x - C_2 \right)^{2/3} = \left(\frac{5\sqrt{\lambda}}{2} y - C_3 \right)^{2/5} \quad (37)$$

Поскольку $y(0) = 0$, то следует считать, что $C_2 = C_3 = 0$.

В результате из (37) следует искомая зависимость

$$y = 0.6 (1.5)^{2/3} \lambda^{1/3} x^{5/3}. \quad (38)$$

Сравнив решение (38) с полученным выше решением (22), (23) и (19), видим их полную тождественность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая это сообщение, подведём основные итоги проведённого выше анализа:

- найдено общее выражение для функционала при учёте подвижности свободного конца балки;
- из условия экстремума найденного функционала получено дифференциальное уравнение, и проанализировано его решение;
- получено общее решение поставленной задачи в параметрическом виде (35);
- показано, что зависимость линии изгиба при сравнительно небольших деформациях подчиняется степенному закону $y(x) \sim x^{5/3}$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Московского авиационного института. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // Прикл. математика и техн. физика. 2002. Т. 43, вып. 5. С. 124–131.
2. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г., Скоробогатов А.Д. Изгиб стержней под действием следящей нагрузки // Прикл. математика и техн. физика. 2004. Т. 45, вып. 3. С. 167–175.
3. Леваков С.В. Нелинейный пространственный изгиб криволинейных стержней с учётом поперечного сдвига // Прикл. математика и техн. физика. 2012. Т. 53, вып. 2. С. 128–136.
4. Гладков С.О. К вопросу о вычислении модуля Юнга // Инж.-физ. журн. 2003. Т. 76, вып. 5. С. 144–147.
5. Gladkov S.O. On a transversality condition for one variation problem with moving boundary // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2019. V. 12, N 1. P. 125–129.

UDC 539.3

ON THE ISSUE OF STRONG BENDING OF THE ROD

© 2025 S. O. Gladkov^a, I. Y. Zmorka^b

Moscow Aviation Institute
(National Research University)
Volokolamskoye shosse, 4, Moscow 125993, Russia

E-mails: ^asgrad51@mail.ru , ^bmuratov.ilyas2003@yandex.ru

Received 28.04.2025, revised 24.10.2025, accepted 06.11.2025

Abstract. With the help of the variation problem with a moving boundary a static shape of a beam is found rigidly fixed at one end provided that its free end is affected by a constant point force. A general expression is obtained for the energy functional taking into account two types of potential energy: bending energy and free end shear energy along a curved trajectory. From the solution of the Euler-Poisson equation a non-trivial solution was found in the form of a power function with a fractional exponent.

Keywords: elastic beam, potential energy, variation, transversality condition, parametric decision.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.404

REFERENCES

1. Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G. Nelineinyi izgib tonkikh uprugikh sterzhnei [Nonlinear bending of thin elastic rods]. *Prikl. Matematika i Tekhn. Fizika* [Appl. Math. Engng. Phys.], 2002. Vol. 43, No. 5, pp. 124–131 (in Russian).
2. Zakharov Yu.V., Okhotkin K.G., Skorobogatov A.D. Izgib strezhnei pod deistviem sledyashchei nagruzki [Bending of the rods under the action of a tracking load]. *Prikl. Matematika i Tekhn. Fizika* [Appl. Math. Engng. Phys.], 2004. Vol. 45, No. 3, pp. 167–175 (in Russian).
3. Levakov S.V. Nelineinyi prostranstvennyi izgib krivolineinykh sterzhnei s uchetom poperechnogo sdviga [Nonlinear spatial bending of curved rods with allowance for lateral shear]. *Prikl. Matematika i Tekhn. Fizika* [Appl. Math. Engng. Phys.], 2012, Vol. 53, No. 2, pp. 128–136 (in Russian).
4. Gladkov S.O. K voprosu o vychislenii modulya Yung [On the question of calculating the Young's modulus]. *Inzh.-fiz. zhurn.* [Engng.-Phys. J.], 2003, Vol. 76, No. 5, pp. 144–147 (in Russian).
5. Gladkov S.O. On a transversality condition for one variation problem with moving boundary. *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, 2019, Vol. 12, No. 1, pp. 125–129.

УДК 519.677:514.753

МОДЕЛИ ПОСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ© 2025 Е. Ю. Деревцов^{1а}, С. В. Мальцева^{1,2б}

*¹Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

*²Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^aeydert@mail.ru, ^bmaltsevasv@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 30.09.2025 г.; после доработки 25.10.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Рассматривается задача рефракционной томографии, поставленная в полупространстве с рефракцией, интерпретируемая как задача интегральной геометрии, в рамках которой рефракция моделируется заданной римановой метрикой, допускающей наличие семейств вполне геодезических подмногообразий топологической размерности два. Предложены варианты послойного решения 3D задачи путём понижения размерности исходной задачи и её сведения к решению серии двумерных задач. Построены 2D метрики в круге, изометричные соответствующим вполне геодезическим подмногообразиям. Установлены геометрические характеристики исходной 3D метрики и порождённых ею 2D метрик. Предложена схема алгоритма послойного решения 3D задачи рефракционной томографии численными методами.

Ключевые слова: рефракционная томография, интегральная геометрия, риманова метрика, кривизна, вполне геодезическое подмногообразие, геодезическое лучевое преобразование, послойная реконструкция.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.405

*Памяти Проф. А. К. Луиса, выдающегося учёного,
доброжелательного коллеги, доброго друга*

ВВЕДЕНИЕ

Явление рефракции луча, вдоль которого распространяется сигнал, возникает в процессе зондирования неоднородной среды физическим полем практически любой природы. В рамках основных моделей томографии, и особенно в рентгеновской, этот эффект пренебрежимо мал, и им вполне обоснованно пренебрегают. В ряде других постановок, например, в рамках сейсмической томографии, рефракция столь значительна или представляет собой настолько важный элемент модели, что пренебречь ею становится уже невозможно. Задача восстановления (по известному экспоненциальному лучевому преобразованию) функции распределения источников, заданной в ограниченной плоской области с известным коэффициентом поглощения в случае, если рефракция (даже значительная) в среде известна, была успешно решена алгоритмами, построенными на основе метода наименьших квадратов с использованием многочленов или *B*-сплайнов в качестве базисов (см. [1, 2]).

Задача рефракционной томографии в трёхмерной постановке существенно отличается от задач традиционной компьютерной 3D-томографии, постановки которых не включают в себя явление рефракции. Отметим, что значения лучевого преобразования, которые используются

в данной работе в качестве данных, представляют собой функции, зависящие от четырёх переменных, и, таким образом, мы приходим к переопределённой по размерности обратной задаче. В рамках компьютерной томографии, с целью сокращения размерности данных обычно прибегают к одному из двух подходов. В первом 3D-задача сводится к серии двумерных задач, решение каждой из которых даёт след на плоскости восстанавливаемой функции, зависящей от трёх переменных. Обычно такая плоскость является одной из фиксированного семейства параллельных плоскостей. Второй подход состоит в использовании конусной схемы наблюдения, в которой источники трансмиссии располагают на пространственной кривой, удовлетворяющей определённым геометрическим требованиям. Задача, тем самым, ставится как задача конусной томографии, и топологическая размерность данных сокращается до трёх (см. [3–5]).

К сожалению, если не удовлетворены довольно жёсткие требования к римановой метрике, оба эти подхода к задаче рефракционной 3D-томографии неприменимы. Причина заключается в том, что у произвольного риманова многообразия, заданного в ограниченной области из \mathbb{R}^3 , как правило, отсутствует достаточно богатое семейство вполне геодезических подмногообразий размерности два, аналогичное по своим свойствам семейству плоскостей в евклидовом пространстве. Упомянутое обстоятельство ставит под сомнение возможность использования в общем случае часто применяемой в задачах томографии процедуры организации таких схем наблюдения, которые часто порождают новые томографические операторы и сокращают топологическую размерность образов лучевых преобразований до трёх с целью исключения фактора переопределённости данных обратной задачи (см. [6–8]).

Возникает вопрос о существовании таких римановых областей и метрик, заданных, в частности, в полупространстве, которые бы позволили свести трёхмерную задачу рефракционной томографии в общей постановке к серии двумерных, и, тем самым, к общеизвестной методике послойного восстановления искомой функции. Ответ положительный, хотя и не исчерпывающий. Ниже рассматриваются задачи рефракционной томографии, состоящие в определении в полупространстве скалярного поля по его известным геодезическим лучевым преобразованиям. Обосновывается методика приближённого решения задачи, основанная на последовательном решении серии двумерных задач, каждая из которых сводится к задаче рефракционной скалярной томографии.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть (D, g) — риманова область в \mathbb{R}^3 , т. е. область D с заданной в ней простой римановой метрикой g с элементом длины

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{1}$$

где $x = (x^1, x^2, x^3) \in D$ (по разноразмерным индексам в одном мономе подразумеваем суммирование по $i, j = 1, 2, 3$); область D такова, что её граница ∂D строго выпукла по отношению к метрике g . Напомним, что риманова метрика характеризуется как простая, если любые две точки из $\bar{D} \equiv D \cup \partial D$ соединяются единственной геодезической, а риманово многообразие, атлас которого состоит из одной карты, называем римановой областью. Для точек $x, y \in \bar{D}$ через $\gamma_{x,y}(t)$ обозначим геодезическую, соединяющую эти точки. При этом параметр t — длина (в смысле римановой метрики) дуги, $\gamma_{x,y}(0) = x$, $\gamma_{x,y}(t_+) = y$.

Приведём систему, состоящую из обыкновенных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, решениями которых являются геодезические римановой метрики (1),

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2}$$

По i, j производится суммирование от 1 до 3, параметр s пропорционален длине дуги, а символы Кристоффеля задаются формулами

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} \left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p} \right). \tag{3}$$

Определения (1), (2), (3) применимы и в двумерном случае, нужно всего лишь исправить диапазон изменения индексов i, j, k ; в 2D случае значения индексов меняются от 1 до 2.

В настоящей работе в качестве области D выбирается полупространство

$$D = \mathbb{R}_{x^3+}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 > 0\}.$$

Обычно при моделировании явления рефракции в полупространстве римановой метрикой фиксируется условие, что метрика — отрицательной кривизны. Здесь и далее координаты точки $p \in \mathbb{R}^3$ в индексных (x^1, x^2, x^3) или традиционных (x, y, z) обозначениях считаем равноправными.

В качестве \bar{D} выбираем замкнутое полупространство $\mathbb{R}_{z+}^3 \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$. Элемент длины метрики в \mathbb{R}_{z+}^3 зададим следующим образом,

$$ds^2 = \lambda^2(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4)$$

Метрику такого вида, в рамках настоящей работы, условно будем называть «изотермической». Строго говоря, термин не вполне корректен, так как обычно говорят о (локальной) «изотермической» системе координат, в которой возможно представление римановой метрики (1) в диагональной форме (4). Двумерное риманово многообразие допускает возможность введения (локальной) изотермической системы координат всегда. Если многообразие трехмерно, то необходимым и достаточным условием существования такой системы координат является условие обращения в нуль тензора Коттона.

Пусть на плоскости $z = 0$ заданы две произвольные точки $q_1(x_1, y_1, 0)$, $q_2(x_2, y_2, 0)$. Соединим их геодезической линией γ_{q_1, q_2} , задаваемой изотермической метрикой (4), и рассмотрим функционал

$$\varrho(q_1, q_2) = \int_{\gamma(q_1, q_2)} \lambda(x, y, z) |dp|, \quad (5)$$

где $|dp| = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2}$. Функция $\lambda(x, y, z)$ является величиной, обратной скорости, и, следовательно, $\varrho(q_1, q_2)$ представляет собой время пробега сигнала от точки q_1 до точки q_2 . Интегральный оператор в правой части (5) часто называют геодезическим лучевым преобразованием. Функция $\lambda(x, y, z)$ и геодезическая γ_{q_1, q_2} тесно связаны: изменение скорости распространения сигнала влечёт изменение метрики (4) и, следовательно, её геодезических. Нелинейные функционалы (5), известные для любых пар точек $q_1, q_2 \in \partial D$, являются исходными данными для обратной кинематической задачи сейсмологии (см. [9, 10]), состоящей в отыскании функции скорости $v(x, y, z) = \lambda^{-1}(x, y, z)$ распространения сигнала в среде по известным временам $\varrho(q_1, q_2)$ его пробега.

В настоящей работе рассматриваемые 3D задачи рефракционной томографии, при известной римановой метрике, могут быть охарактеризованы как задачи скалярной томографии, состоящие в восстановлении функции λ , которая уже не связана с римановой метрикой (4) и её геодезическими. Оставляем за восстанавливаемой функцией в этой задаче прежнее обозначение λ (иногда заменяя её на f), а геодезическое лучевое преобразование определим следующим образом,

$$\mathcal{R}(p, q) = \int_{\gamma_{p, q}} \lambda(x, y, z) |dp| = \int_0^{t_+} \lambda(\gamma_{p, q}(t)) dt, \quad p \in D \cup \partial D, \quad q \in \partial D. \quad (6)$$

Напомним, что значения $0, t_+$ параметра t выбраны таким образом, что $\gamma_{p, q}(0) = p$, $\gamma_{p, q}(t_+) = q$.

2. СВЯЗЬ 3D И 2D ЗАДАЧ

Ограниченную поверхность $E \subset D$ будем называть вполне геодезической подобластью, если из того, что $p, q \in E$ следует, что $\gamma_{p,q} \subset E$. Риманову метрику g , заданную в D , назовём точно расслаивающей область D метрикой, если:

1) для любой точки $p \in D \setminus \partial D$ существует хотя бы одна вполне геодезическая подобласть E_p , содержащая точку p ;

2) в области D существует хотя бы одна геодезическая $\gamma(t)$ такая, что вполне геодезические подобласти E_p, E_q , соответствующие различным точкам $p \equiv \gamma(t_1), q \equiv \gamma(t_2)$ геодезической, не пересекаются.

Рассмотрим один класс точно расслаивающих полупространство римановых метрик. Конкретизируем вид метрики (4), полагая $\lambda(x, y, z) = 1/(az + b)$, $a, b > 0$. Иными словами, $g_{jj} = (az + b)^{-2}$, $j = 1, 2, 3$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Отличные от нуля символы Кристоффеля таковы,

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{33}^3 = -\Gamma_{11}^3 = -\Gamma_{22}^3 = -\frac{a}{az + b}. \quad (7)$$

Приведём общие формулы [11], в соответствии с которыми проводятся вычисления. Тензор кривизны Римана — Кристоффеля \mathfrak{R}_{jkl}^i выражается через символы Кристоффеля и их производные,

$$\mathfrak{R}_{jkl}^i = \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sl}^i \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{sk}^i \right), \quad (8)$$

а ковариантные компоненты тензора кривизны (8), образуемые по правилу $\mathfrak{R}_{ijkl} = g_{is} \mathfrak{R}_{jkl}^s$, могут быть заданы прямыми формулами

$$\mathfrak{R}_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} \right) - g_{rs} (\Gamma_{jk}^r \Gamma_{il}^s - \Gamma_{jl}^r \Gamma_{ik}^s). \quad (9)$$

Свёртка

$$\mathfrak{R}_{jk} = \mathfrak{R}_{jks}^s = -\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{js}^s + \frac{\partial}{\partial x^s} \Gamma_{jk}^s + \Gamma_{js}^p \Gamma_{kp}^s - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{sp}^p, \quad (10)$$

тензора кривизны (8) приводит к компонентам симметричного тензора Риччи, который в свою очередь порождает скаляр

$$\mathfrak{R} = g^{jk} \mathfrak{R}_{jk}, \quad (11)$$

известный как скалярная кривизна. Тензор Коттона задаётся соотношением (при размерности риманова многообразия $n = 3$), $i, j, k, s, p = 1, 2, 3$,

$$C_{ijk} = \nabla_k \mathfrak{R}_{ij} - \nabla_j \mathfrak{R}_{ik} + \frac{1}{4} (\nabla_j \mathfrak{R} g_{ik} - \nabla_k \mathfrak{R} g_{ij}), \quad (12)$$

где ∇_k — ковариантная производная по координате x^k .

Лемма 1. Пусть в полупространстве $\mathbb{R}_{z+}^3 \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$ задана метрика (4) при $\lambda(x, y, z) = (az + b)^{-1}$, $a, b > 0$. Тогда ненулевые компоненты тензора Римана — Кристоффеля и тензора Риччи принимают значения

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{1212} = \mathfrak{R}_{1313} = \mathfrak{R}_{2323} &= -a^2/(az + b)^4; \\ \mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{R}_{22} = \mathfrak{R}_{33} &= -2a^2/(az + b)^2; \end{aligned}$$

скалярная кривизна постоянна, $\mathfrak{R} = -6a^2$; тензор Коттона C_{ijk} обращается в нуль.

Доказательство. Компоненты тензора кривизны Римана — Кристоффеля вычисляются непосредственно по формулам (9). Применяя соотношения (7)–(12), непосредственными вычислениями получим выражения для компонент тензора Риччи, тензора Коттона и скалярной кривизны. Убедимся в справедливости утверждения леммы, например, для компоненты \mathfrak{R}_{33} , предварительно отметив, что

$$\frac{\Gamma_{13}^1}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma_{23}^2}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma_{33}^3}{\partial z} = a^2/(az+b)^2, \quad \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial z} = \frac{\partial \Gamma_{22}^3}{\partial z} = -a^2/(az+b)^2.$$

Детальное выражение для этой компоненты выглядит следующим образом,

$$\mathfrak{R}_{33} = \frac{\partial \Gamma_{33}^s}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{3s}^s}{\partial x^3} + \Gamma_{s1}^s \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{s2}^s \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{s3}^s \Gamma_{33}^3 - \Gamma_{31}^s \Gamma_{s3}^1 - \Gamma_{32}^s \Gamma_{s3}^2 - \Gamma_{33}^s \Gamma_{s3}^3.$$

Подставляя в выражение для \mathfrak{R}_{33} значения ненулевых символов Кристоффеля и их производных по z , получаем, что $\mathfrak{R}_{33} = -2a^2/(az+b)^2$. Аналогичным образом убеждаемся в том, что $\mathfrak{R}_{11} = \mathfrak{R}_{22} = -2a^2/(az+b)^2$, а $\mathfrak{R}_{jk} = 0$, $j \neq k$. Проверим, например, что $\mathfrak{R}_{31} = 0$:

$$\mathfrak{R}_{31} = \frac{\partial \Gamma_{31}^s}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{1s}^s}{\partial x^3} + \Gamma_{s1}^s \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{s2}^s \Gamma_{31}^2 + \Gamma_{s3}^s \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{31}^s \Gamma_{s1}^1 - \Gamma_{32}^s \Gamma_{s1}^2 - \Gamma_{33}^s \Gamma_{s1}^3.$$

Что касается скалярной кривизны, то из того, что $\mathfrak{R} = g^{jj}\mathfrak{R}_{jj}$, $j = 1, 2, 3$, следует, что $\mathfrak{R} = 3g^{11}\mathfrak{R}_{11} = -6a^2$.

Найдём ненулевые производные тензора Риччи,

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_{ii}}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^3} (-2a^2(az+b)^{-2}) = \frac{4a^3}{(az+b)^3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Принимая во внимание, что

$$\nabla_k \mathfrak{R}_{ij} = \frac{\partial \mathfrak{R}_{ij}}{\partial x^k} - \mathfrak{R}_{sj} \Gamma_{ik}^s - \mathfrak{R}_{is} \Gamma_{jk}^s, \quad \nabla_j \mathfrak{R}_{ik} = \frac{\partial \mathfrak{R}_{ik}}{\partial x^j} - \mathfrak{R}_{sk} \Gamma_{ij}^s - \mathfrak{R}_{is} \Gamma_{jk}^s,$$

и скалярная кривизна \mathfrak{R} постоянна, получаем, что $\frac{\partial \mathfrak{R}_{ij}}{\partial x^k} = \mathfrak{R}_{sj} \Gamma_{ik}^s + \mathfrak{R}_{is} \Gamma_{jk}^s$ при $i = j$, $k = 3$. При остальных значениях индексов либо компоненты тензора Риччи \mathfrak{R}_{ij} , либо их производные, либо Γ_{jk}^i обращаются в нуль. \square

Система уравнений, задающая геодезические метрики (4) при $\lambda = (az+b)^{-1}$, $a, b > 0$, приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{2a}{az+b} \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{2a}{az+b} \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{a}{az+b} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \frac{a}{az+b} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 - \frac{a}{az+b} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Известно [12], что система уравнений (13), задающая геодезические такой метрики, разрешима в квадратурах, а её геодезические представляют собой дуги окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных оси z . Точнее, геодезическая, проходящая через две точки $q_1(x_1, y_1, 0)$, $q_2(x_2, y_2, 0) \in \mathbb{R}_{z+}^3$, представляет собой дугу окружности радиуса r с центром в точке p_0 , лежащей в плоскости $\mathcal{P}_{q_1 q_2}$, где

$$r = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{|q_1 - q_2|^2}{4}}, \quad p_0 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, -b/a \right). \tag{14}$$

Укажем уравнение, которым задаётся плоскость $\mathcal{P}_{q_1q_2}$,

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - (x_1y_2 - x_2y_1) = 0. \quad (15)$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать параметрическое уравнение плоскости,

$$p = p_0 + ue_1 + ve_2v, \quad (16)$$

которое задаёт собственную систему координат OUV на каждой из «вертикальных» плоскостей, содержащих геодезические метрики (13).

Замечание 1. Каждая из таких «вертикальных» плоскостей представляет собой вполне геодезическое подмногообразие топологической размерности 2. Семейства непересекающихся «вертикальных» плоскостей образуют на плоскости $z = 0$ следующие семейства систем наблюдения: фиксируем две параллельные прямые $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ на плоскости $z = 0$, и множество перпендикулярных им «вертикальных» плоскостей. Точка q_1 пробегает конечное множество эквидистантных точек на прямой \mathcal{L}_1 . Соответствующее множество точек q_2 — конечное множество эквидистантных точек на прямой \mathcal{L}_2 — расположено так, что каждой точке q_1 соответствует одна и только одна точка q_2 такая, что отрезок $[q_1, q_2] \perp \mathcal{L}_1$ (\mathcal{L}_2). Вращая построенные семейства (например, вокруг оси z) «вертикальных» параллельных плоскостей, каждое с двумя параллельными прямыми, получаем данные, «почти» соответствующие параллельной схеме наблюдений.

В уравнении (16) точка $p(x, y, z)$ — текущая точка «вертикальной» плоскости, точка p_0 (центр системы координат на плоскости) определена формулой (14). Базисные векторы $e_1 = (q_1 - q_2)/|q_1 - q_2|$, $e_2 = (0, 0, 1)$ коллинеарны плоскости $\mathcal{P}_{q_1q_2}$ и задают на ней ортогональную декартову систему координат с центром в точке p_0 .

Введём следующие обозначения:

$S_{p_0, R}^2$ — сфера радиуса $R > b/a$ с центром в точке $p_0(x_0, y_0, -b/a)$;

$S_{q_0, \rho}^1 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ — окружность радиуса ρ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$;

$B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ — круг радиуса ρ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$.

Справедлива следующая

Лемма 2. Пусть $a, b > 0, R > b/a$. Тогда поверхность $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z+}^3$ есть вполне геодезическая подобласть полупространства \mathbb{R}_{z+}^3 с заданной на нём римановой метрикой (4) при $\lambda(x, y, z) = (az + b)^{-1}$, $a, b > 0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно в качестве центра сферы $S_{p_0, R}^2$ выбрать точку $p_0 = (0, 0, -b/a)$. Пересечение поверхности $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z+}^3$ с плоскостью OXY представляет собой окружность $S_{q, \rho}^1$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ с центром в точке $q = (0, 0, 0)$. Возьмём на окружности $S_{q, \rho}^1$ две произвольные точки $q_1(x_1, y_1, 0)$, $q_2(x_2, y_2, 0)$. Как уже отмечалось, произвольная точка p геодезической метрики (4), проходящей через точки q_1, q_2 , удовлетворяет соотношениям (см. (14), (15)), и, кроме того,

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{|q_2 - q_1|^2}{4}. \quad (17)$$

Нужно показать, что $p \in S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z+}^3$, т. е. что координаты точки $p(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + (z + b/a)^2 = R^2$. Сравнивая последнее соотношение и (17), приходим к выводу, что для этого достаточно проверить справедливость равенства

$$x^2 + y^2 = \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2 + \rho^2 - \frac{|q_2 - q_1|^2}{4}.$$

Элементарные преобразования приводят к соотношению (15), использование которого приводит к соотношению

$$\rho^2 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} ((x_2)^2 + (y_2)^2 - (x_1)^2 - (y_1)^2) = \rho^2,$$

которое в силу свойства $q_1, q_2 \in S_{q,\rho}^1$, т. е. $|q_1| = |q_2| = \rho$, обращается в тождество. Лемма доказана. \square

2.1. Модель 1 метрики в полупространстве

Теорема 1. Пусть $a, b > 0, R > b/a$ фиксированы, $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$. Тогда вполне геодезическая подобласть $S_{\rho_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3$ полупространства $\mathbb{R}_{z^+}^3$ с метрикой (4), $\lambda = (az + b)^{-1}$, изометрична кругу $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z^+}^3$ с заданной на нём 2D римановой метрикой с элементом длины

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2,$$

где компоненты метрического тензора заданы формулами

$$g_{11} = \frac{1}{a^2 r^2} \left(1 + \frac{(x - x_0)^2}{r^2} \right), \quad g_{12} = \frac{1}{a^2 r^2} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{r^2}, \quad g_{22} = \frac{1}{a^2 r^2} \left(1 + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} \right), \quad (18)$$

где через r обозначена величина $\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$. В частности, при $x_0 = y_0 = 0$

$$g_{11} = \frac{1}{a^2 r^2} \left(1 + \frac{x^2}{r^2} \right), \quad g_{12} = \frac{1}{a^2 r^2} \frac{xy}{r^2}, \quad g_{22} = \frac{1}{a^2 r^2} \left(1 + \frac{y^2}{r^2} \right),$$

где $r = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Доказательство. Так как уравнение поверхности $S_{\rho_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3$ можно записать в виде $z = -b/a + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$, $z \geq 0$, то, выражая из этого уравнения дифференциал dz через дифференциалы dx, dy , подставляя $(dz)^2$ в (4) и замечая, что $(az + b)^2 = a^2 r^2$, получим эквивалентное (4) выражение

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{(az + b)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= \frac{r^2 + (x - x_0)^2}{a^2 r^4} dx^2 + 2 \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{a^2 r^4} dx dy + \frac{r^2 + (y - y_0)^2}{a^2 r^4} dy^2 \end{aligned} \quad (19)$$

для элемента длины. В силу взаимной однозначности отображения

$$F : S_{\rho_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3 \rightarrow B_{q_0, \rho}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}, \quad F(x, y, z) = (x, y, 0)$$

и справедливости соотношения (19) приходим к утверждению об изометричности. Изометричность обратного отображения

$$F^{-1} : B_{q_0, \rho}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\} \rightarrow S_{\rho_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3, \quad F^{-1}(x, y, 0) = (x, y, z),$$

где $z = -b/a + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$, $z \geq 0$, также имеет место. \square

Далее без ограничения общности будем полагать параметры x_0, y_0 равными нулю.

Найдём $\det(g_{ij})$, контравариантные компоненты g^{ij} , $i, j = 1, 2$ метрического тензора и символы Кристоффеля Γ_{ij}^k метрики (19). Для определителя $\det(g_{ij}) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ получаем выражение $\det(g_{ij}) = R^2/(a^4 r^6)$. Контравариантные компоненты метрического тензора приобретают вид

$$g^{11} = \frac{a^2 r^2}{R^2} (R^2 - x^2), \quad g^{12} = -\frac{a^2 r^2}{R^2} xy, \quad g^{22} = \frac{a^2 r^2}{R^2} (R^2 - y^2). \quad (20)$$

Символы Кристоффеля вычисляются по формулам (3),

$$\Gamma_{11}^1 = 2\frac{x}{r^2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{y}{r^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{x}{r^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = 2\frac{y}{r^2},$$

где $r^2 = R^2 - x^2 - y^2$. По формулам (10) находим выражения для компонент тензора Риччи,

$$\mathfrak{R}_{11} = -\frac{1}{r^4}(r^2 + x^2), \quad \mathfrak{R}_{12} = -\frac{1}{r^4}(xy), \quad \mathfrak{R}_{22} = -\frac{1}{r^4}(r^2 + y^2).$$

Использование контравариантных компонент (20) метрического тензора (18) и компонент тензора Риччи позволяет получить скалярную кривизну метрики (19).

Лемма 3. *Риманова метрика (19) обладает постоянной отрицательной скалярной кривизной $\mathfrak{R} = -2a^2$ в круге $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial\mathbb{R}_{z^+}^3$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$.*

Замечание 2. Геодезические римановой метрики (19), заданной в круге $B_{q_0, \rho}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ радиуса ρ , представляют собою «отрезки прямых линий» (проекции дуг окружностей на плоскость OXY), но длина таких отрезков вычисляется в соответствии с метрикой (19) и отличается от евклидовой длины того же отрезка. Эта метрика — метрика отрицательной скалярной кривизны.

Замечание 3. Для каждого круга $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial\mathbb{R}_{z^+}^3$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ с центром в точке $q_0(x_0, y_0, 0)$, в зависимости от его радиуса (следовательно, и от радиуса R сферы $S_{p_0, R}^2$), метрика своя, и её компоненты определяются формулами (18). Таким образом, трёхмерная задача, поставленная в полупространстве $\mathbb{R}_{z^+}^3$, сводится к серии двумерных задач, каждая из которых поставлена для круга $B_{q_0, \rho}^2$ своего радиуса.

Система дифференциальных уравнений, решениями которой являются геодезические метрики (19), выглядит следующим образом,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} + 2\frac{x}{r^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2\frac{y}{r^2}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) &= 0, \\ \frac{d^2y}{ds^2} + 2\frac{x}{r^2}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}\right) + 2\frac{y}{r^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

2.2. Модель 2 метрики в полупространстве

Теорема 2. *Пусть вещественное $R > b/a$ фиксировано, $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$. Тогда под областью $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3$ полупространства $\mathbb{R}_{z^+}^3$ с метрикой (4), при $\lambda \equiv 1$, изометрична кругу $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial\mathbb{R}_{z^+}^3$ с заданной на нём римановой метрикой с элементом длины*

$$ds^2 = \left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)(dx^1)^2 + 2\left(\frac{xy}{r^2}\right)dx^1dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right)(dx^2)^2, \quad (21)$$

где через r обозначена величина $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Доказательство. Структура семейств сфер в \mathbb{R}^3 и семейств сечений «вертикальными» плоскостями вполне аналогична участвующим в формулировке теоремы 1. Доказательство поэтому в точности повторяет доказательство указанной теоремы. \square

Найдём $\det(g_{ij})$, контравариантные компоненты g^{ij} , $i, j = 1, 2$, метрического тензора, и символы Кристоффеля Γ_{ij}^k метрики (21). Для определителя $\det(g_{ij})$ получаем выражение $g = \det(g_{ij}) = R^2/r^2$, для контравариантных компонент — выражения

$$g^{11} = \frac{R^2 - x^2}{R^2}, \quad g^{12} = -\frac{xy}{R^2}, \quad g^{22} = \frac{R^2 - y^2}{R^2}. \quad (22)$$

Символы Кристоффеля, вычисленные по формулам (3), приобретают вид

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{x}{R^2 r^2} (R^2 - y^2), & \Gamma_{12}^1 &= \frac{x^2 y}{R^2 r^2}, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{x}{R^2 r^2} (R^2 - x^2), \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{y}{R^2 r^2} (R^2 - y^2), & \Gamma_{12}^2 &= \frac{xy^2}{R^2 r^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{y}{R^2 r^2} (R^2 - x^2).\end{aligned}$$

Компонента $R_{1212} = 1/r^2$ тензора Римана — Кристоффеля вычисляется по формуле (9). Применение формул (10) приводит к следующим выражениям для компонент тензора Риччи метрики (19),

$$\mathfrak{R}_{11} = \frac{R^2 - y^2}{R^2 r^2}, \quad \mathfrak{R}_{12} = \frac{xy}{R^2 r^2}, \quad \mathfrak{R}_{22} = \frac{R^2 - x^2}{R^2 r^2}.$$

Использование контравариантных компонент (22) метрического тензора наряду с ковариантными компонентами (18) и компонентами тензора Риччи, позволяет получить значение скалярной кривизны \mathfrak{R} метрики (21).

Лемма 4. *Риманова метрика (21) обладает постоянной положительной скалярной кривизной $\mathfrak{R} = 2/R^2$.*

Замечание 4. Как и в модели 1, заданной в полупространстве римановой метрики, геодезические модели 2 метрики (21), заданной в круге $B_{q_0, \rho}^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$, представляют собой «отрезки прямых линий» (проекции дуг окружностей на плоскость OXY). Длина такого отрезка отличается от его евклидовой длины, но совпадает с длиной дуги части окружности, на которую он опирается.

Система дифференциальных уравнений, решениями которой являются геодезические метрики (21) (напоминаем, что $x_0 = y_0 = 0$), выглядит следующим образом,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{x(R^2 - y^2)}{R^2 r^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2 \frac{x^2 y}{R^2 r^2} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds}\right) + \frac{x(R^2 - x^2)}{R^2 r^2} \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{y(R^2 - y^2)}{R^2 r^2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2 \frac{xy^2}{R^2 r^2} \left(\frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds}\right) + \frac{y(R^2 - x^2)}{R^2 r^2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 &= 0.\end{aligned}\tag{23}$$

С введением обозначения

$$D(x^1, x^2, s) := (R^2 - y^2) \left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + 2xy \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^2}{ds} + (R^2 - x^2) \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2$$

возможно представление системы (23) в следующем виде:

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \frac{x^k}{R^2 r^2} D(x^1, x^2, s) = 0, \quad k = 1, 2.$$

3. ДЕТАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ В «ВЕРТИКАЛЬНОЙ» ПЛОСКОСТИ

Зафиксируем вполне геодезическую область $S_{p_0, R}^2 \cap \mathbb{R}_{z^+}^3$, при $p_0 = (0, 0, -b/a)$, соответствующий ей круг $B_{q_0, \rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z^+}^3$ радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - (b/a)^2}$ с центром в точке $q_0 = (0, 0, 0)$, лежащий в плоскости OXY , и произвольную «вертикальную» плоскость $\mathcal{P}_{q_1 q_2}$, пересекающую окружность $S_{q_0, \rho}^1 \in \partial \mathbb{R}_{z^+}^3$ в точках $q_1(x_1, y_1, 0)$, $q_2(x_2, y_2, 0)$. На плоскости $\mathbb{R}^2 := \mathcal{P}_{q_1 q_2}$ задаётся ортонормированная прямоугольная декартова система координат OUV с центром в точке $p_0 = (x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2, 0$ и базисными векторами $e_1 = (q_1 - q_2)/|q_1 - q_2|$, $e_2 = (0, 0, 1)$, определяющими оси координат OU, OV , соответственно. Другими словами, ось OU является

следом координатной плоскости OXY на плоскости $\mathcal{P}_{q_1q_2}$, прямая $v = -b/a$ есть след плоскости $z = -b/a$ на плоскости $\mathcal{P}_{q_1q_2}$. Напомним, что радиус r окружности, которой принадлежит дуга, опирающаяся на точки q_1, q_2 , равен $\sqrt{(b^2/a^2 + |q_1 - q_2|^2)/4}$.

На плоскости \mathbb{R}^2 рассматривается полуплоскость $\mathbb{R}_{v+}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \geq 0\}$ и параллельная оси абсцисс OU прямая $v = -b/a$, где $a, b > 0$ — те же константы, что фигурируют в изотермической метрике полупространства. В полуплоскости \mathbb{R}_{v+}^2 задана изотермическая риманова метрика

$$ds^2 = \lambda^2(v)(du^2 + dv^2), \quad \lambda(v) = (av + b)^{-1}, \quad (24)$$

индуцированная метрикой (4), при $\lambda(x, y, z) = (az + b)^{-1}$. Компоненты метрического тензора суть $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$, определитель $\det g = \lambda^4$.

Символы Кристоффеля метрики (24)

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = -\frac{a}{av + b}, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{a}{av + b}, \quad \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{a}{av + b}$$

являются коэффициентами системы уравнений, решения которой — геодезические метрики (24),

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{ds^2} - \frac{2}{v + b/a} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{1}{v + b/a} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 - \frac{1}{v + b/a} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 &= 0, \end{aligned}$$

представляющие собой дуги окружностей O_r радиуса $r \geq b/a$ с центром в точке $(0, -b/a)$ системы координат OUV , точки $(-\tau, 0)$, $(\tau, 0)$ суть точки пересечения окружности O_r с осью OU . Справедливы соотношения $\tau^2 + (b/a)^2 = r^2$, $(b/a) \leq r \leq \sqrt{\rho^2 + (b/a)^2}$.

Исходя из уравнения окружности $u^2 + (v + b/a)^2 = r^2$, стандартно получаем её параметрические уравнения $u = r \cos \alpha$, $v = r \sin \alpha$, при $\alpha \in [0, \pi]$. Сделаем замену переменной $\alpha = \pi/2 - \beta$, тогда промежуток $[0, \pi]$ перейдёт в промежуток $[-\pi/2, \pi/2]$, $\cos \alpha \rightarrow \sin \beta$, $\sin \alpha \rightarrow \cos \beta$, и точка $(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ перейдёт в точку $(r \sin \beta, r \cos \beta)$, причём $\beta \in [\beta_l, \beta_r]$, где $\beta_l = -\pi/2 + \arcsin((b/a)/r)$, $\beta_r = \pi/2 - \arcsin((b/a)/r)$.

Рассмотрим частный случай задания в верхней полуплоскости изотропной метрики (24), когда $\lambda(v) \equiv 1$,

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Обозначим дугу окружности, опирающуюся на точки $(-\tau, b/a)$, $(\tau, b/a)$, через $l_{\mp\tau}$. Параметр s (длина дуги) и угол β связаны соотношениями $s = r(\beta - \beta_l)$, $\beta = s/r + \beta_l$. Напомним, что $r^2 = \tau^2 + (b/a)^2$, $\beta \in [\beta_l, \beta_r]$. Приведём параметрические уравнения дуги $l_{\mp\tau}$ окружности O_r ,

$$u = r \sin \beta = r \sin(s/r + \beta_l), \quad v = -b/a + r \cos \beta = -b/a + r \cos(s/r + \beta_l). \quad (25)$$

Для первых и вторых производных от $u(s)$, $v(s)$ по длине дуги s получаем выражения

$$\frac{du}{ds} = \dot{u} = \cos(s/r + \beta_l), \quad \frac{dv}{ds} = \dot{v} = -\sin(s/r + \beta_l), \quad (26)$$

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \ddot{u} = -\frac{1}{r} \sin(s/r + \beta_l), \quad \frac{d^2v}{ds^2} = \ddot{v} = -\frac{1}{r} \cos(s/r + \beta_l). \quad (27)$$

Геометрически вектор (\dot{u}, \dot{v}) является единичным касательным к кривой $l_{\mp\tau}$ вектором; вектор (\ddot{u}, \ddot{v}) представляет собой нормальный к $l_{\mp\tau}$ вектор, направленный к центру окружности, а его длина совпадает с кривизной.

Вернёмся к случаю, когда в верхней полуплоскости произвольной «вертикальной» плоскости $\mathcal{P}_{q_1q_2}$, задана изотермическая риманова метрика

$$ds^2 = \frac{1}{(av + b)^2} (du^2 + dv^2), \quad v > 0.$$

Так как

$$v = -\frac{b}{a} + \sqrt{r^2 - u^2} \geq 0, \quad dv = -\frac{u}{\sqrt{r^2 - u^2}} du,$$

то

$$ds^2 = \frac{1}{a^2(v + b/a)^2} \left(1 + \frac{u^2}{r^2 - u^2} \right) du^2, \quad ds = \frac{r}{a} \frac{du}{r^2 - u^2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(v + b/a)^2 = r^2 - u^2$. Вычисление первообразной функции $1/(r^2 - u^2)$ (выбор констант интегрирования диктуется граничными условиями на s и u) даёт связь между s и u ,

$$s = \frac{1}{2a} \ln \frac{r + u}{r - u} + C, \quad u = r \frac{\text{sh}(as)}{\text{ch}(as)} + C,$$

откуда находятся первая и вторая производные функции $u = u(s)$ по s ,

$$\frac{du}{ds} = \dot{u} = \frac{ra}{\text{ch}^2(as)}, \quad \frac{d^2u}{ds^2} = \ddot{u} = -\frac{2ra^2 \text{sh}(as)}{\text{ch}^3(as)}. \quad (28)$$

Аналогичные рассуждения приводят к связи параметра s и переменной $v = v(s)$ с точностью до константы

$$s = \frac{1}{2a} \ln \frac{r - \sqrt{r^2 - t^2}}{r + \sqrt{r^2 - t^2}} + C, \quad t = r \text{ch}^{-1}(as) + C,$$

где $t = v + b/2$. Отсюда следуют выражения для производных по s ,

$$\frac{dv}{ds} = \dot{v} = -ra \frac{\text{sh}(as)}{\text{ch}^2(as)}, \quad \frac{d^2v}{ds^2} = \ddot{v} = -ra^2 \frac{1 - \text{sh}^2(as)}{\text{ch}^3(as)}. \quad (29)$$

Соотношения (25)–(29), дающие выражения для производных переменных u, v по параметру s , позволяют указать касательный и нормальный векторы к геодезическим в моделях 1 и 2 метрик, и тем самым перейти к различным вариантам лучевых преобразований векторных и тензорных полей, заданных в полупространстве.

4. СХЕМА АЛГОРИТМА

Мы предлагаем решение задачи рефракционной томографии в полупространстве, состоящее в сведении исходной 3D задачи к серии двумерных, а затем объединении полученных решений 2D задач в решение трёхмерной. Поэтому основным элементом алгоритма является решение задач рефракционной томографии, поставленных в круге. В качестве исходных данных выступают значения геодезического лучевого преобразования искомой функции, зафиксированные на границе круга. Строгая формулировка задачи рефракционной томографии: пусть задан круг $B_{(0,0,0),\rho}^2$ радиуса ρ с границей — окружностью $S_{(0,0,0),\rho}^1 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$. В круге задана функция $f(x, y)$ и известны её геодезические лучевые преобразования

$$Af \equiv \mathcal{P}(\alpha, \beta) = \int_0^{t_+} f(\gamma_{\alpha,\beta}(t)) dt f(\gamma_{\alpha,\beta}(t)) dt \equiv g, \quad (30)$$

определяемые двумя углами $0 \leq \alpha < 2\pi$ и $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$, первый из которых характеризует положение точки на окружности, а второй — направление, в котором выпускается геодезическая (β — угол между нормалью к окружности в точке x и направлением, задаваемым вектором ξ). В формуле (30) $\gamma_{\alpha,\beta} : [0, t_+] \rightarrow S^1_{(0,0,0),\rho}$ — максимальная геодезическая, определяемая начальными условиями $\gamma_{\alpha,\beta}(0) = x = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$, $\dot{\gamma}_{\alpha,\beta}(0) = \xi = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$. Значения $0, t_+$ параметра t таковы, что $\gamma_{\alpha,\beta}(0) = x$, $\gamma_{\alpha,\beta}(t_+) \in S^1_{(0,0,0),\rho} \neq x$.

Формирование синтетических исходных данных задачи приводит к необходимости решения прямой 3D задачи, поставленной в полупространстве. Кроме того, применяемый для решения 2D задач метод наименьших квадратов требует вычисления образов базисных элементов исходного пространства, что также можно трактовать как часть прямой задачи.

Приведём краткое описание алгоритма решения 3D задачи рефракционной томографии, поставленной в полупространстве с заданной в нём римановой метрикой, допускающей наличие вполне геодезических двумерных подмногообразий. Трёхмерная схема сбора данных представляет собой семейство концентрических окружностей $S^1_{(0,0,0),\rho} \in \partial\mathbb{R}^3_{z+}$ с центром в начале координат, на каждой из которых задана веерная система наблюдения, состоящая из множества выпущенных из каждой точки окружности под всевозможными углами геодезических римановой метрики (19) (с непустыми пересечениями с кругом), вдоль которых произведено интегрирование искомой функции. Каждому кругу $B^2_{(0,0,0),\rho}$ радиуса ρ сопоставлена вполне геодезическая подобласть $S^2_{(0,0,-b/a),R} \cap \mathbb{R}^3_{z+}$ полупространства \mathbb{R}^3_{z+} с метрикой (4), $\lambda = (az + b)^{-1}$, $R^2 = \rho^2 + (b/a)^2$. Теоремы 1, 2 устанавливают взаимно однозначное отображение между каждой вполне геодезической подобластью $S^2_{(0,0,-b/a),R} \cap \mathbb{R}^3_{z+}$ полупространства \mathbb{R}^3_{z+} с метрикой (4) при $\lambda = (az + b)^{-1}$, $\lambda \equiv 1$, и кругом $B^2_{(0,0,0),\rho} \in \partial\mathbb{R}^3_{z+}$ с заданными на нём римановыми метриками (19), (21).

Формирование исходных данных. Приведём схему вычисления лучевого преобразования функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ вдоль геодезических заданной римановой метрики. Преобразуя систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1), которой удовлетворяют геодезические, к системе уравнений первого порядка относительно вектора неизвестных $y = (y_1, \dots, y_6)$:

$$\begin{aligned} x^1(s) &= y_1(s), & x^2(s) &= y_2(s), & x^3(s) &= y_3(s), \\ y_{k+3} &= - \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^k y_{i+3} y_{j+3} \equiv f_{k+3}(y), & k &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dy_j}{ds} &= y_{j+3} \equiv f_j(y), & j &= 1, 2, 3, \\ \frac{dy_k}{ds} &= - \sum_{i,j=1}^3 \Gamma_{ij}^{k-3} y_{i+3} y_{j+3} \equiv f_k(y), & k &= 4, 5, 6. \end{aligned}$$

Начальные условия задаются точкой $(y_1(0), y_2(0), y_3(0))$, из которой выпускается геодезическая, и её направляющий вектор, $(y_4(0), y_5(0), y_6(0))$. Параметром выбирается элемент длины дуги геодезической.

Для численного решения полученной системы уравнений первого порядка используем метод Рунге — Кутты четвёртого порядка точности по шагу Δs , а именно его модификацию — схему Мерсона [13], позволяющую оценивать погрешность вычисления правых частей системы на каждом шаге и, в случае необходимости, корректировать алгоритм и, в частности, варьировать величину шага. Интегрирование по лучу производится с помощью квадратурных формул

трапеций и Симпсона (для разрывных и непрерывных функций), или формулы Бode высокой степени точности $O(h^6)$ для функций достаточной степени гладкости.

Другой вариант получения исходных данных пригоден лишь в условиях моделей 1 или 2 метрик, рассматриваемых в разд. 2 данной работы. Для этого необходимо воспользоваться результатами детализации задач, поставленных в «вертикальных» плоскостях (разд. 3). Каждая такая плоскость, связанная со сферой $S_{(0,0,0),R}^2$, содержит в точности одну геодезическую, и вычислить интеграл вдоль неё от тестовой функции $f(x, y, z)$ не представляет сложности. Более того, следует отметить, что результаты разд. 3 позволяют легко формировать исходные данные и для задач рефракционной томографии векторных и тензорных полей, поставленных в полупространстве. Предположим, что найдены геодезические, являющиеся решениями 3D задачи рефракционной томографии, поставленной для сферы $S_{(0,0,0),R}^2$ радиуса $R(\rho)$ (модель 1 или модель 2 метрики), и вычислены геодезические лучевые преобразования некоторой тестовой функции $f(x, y, z)$. Фиксация их значений никаких дополнительных действий не требует, так как след сферы $S_{(0,0,0),R}^2$ на плоскости OXY есть одновременно и окружность $S_{\rho_0,\rho}^1 \in \partial\mathbb{R}_{z+}^3$, в точках которой задаются исходные данные для решения задачи.

Формирование образов базисных элементов в МНК-алгоритме. Метод наименьших квадратов, используемый для обращения геодезического лучевого преобразования, применяется на этапе решения 2D задачи, поставленной в круге.

В качестве базисных элементов исходного функционального пространства могут выступать мономы двух переменных общего вида, ортогональные многочлены, B -сплайны. Особенно эффективны при решении задач рефракционной тензорной томографии оказались локальные базисы, построенные на основе B -сплайнов [2]. На первом этапе алгоритма МНК требуется вычислить геодезическое лучевое преобразование (6) от базисных элементов. Для простоты продемонстрируем эту часть алгоритма на примере мономов двух переменных, представляющих собой полную линейно независимую последовательность

$$\varphi_1 \equiv 1, \varphi_2 \equiv x, \varphi_3 \equiv y, \varphi_4 \equiv x^2, \varphi_5 \equiv xy, \varphi_6 \equiv y^2, \dots, \varphi_N \equiv y^s,$$

где функции φ_k являются мономами $\varphi_k \equiv x^n y^m, n+m \leq s, k = (n+m)(n+m+1)/2 + m + 1, N = (s+1)(s+2)/2$. Дискретизация значений переменных α, β осуществляется в соответствии с требованиями, налагаемыми процедурой двумерного быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Оператор A , определяемый (30), инъективен, поэтому последовательность элементов

$$\psi_1 = A\varphi_1, \psi_2 = A\varphi_2, \dots, \psi_n = A\varphi_n, \dots \quad (31)$$

линейно независима. Фиксируя некоторое натуральное n , положим $g_{\delta n} = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \psi_k$. Коэффициенты $c_k^{(n)}$ находятся из условия минимальности нормы

$$\|g - g_{\delta n}\| \quad (32)$$

в функциональном пространстве K Соболева.

Алгоритм решения 2D задачи в круге. В силу линейности оператора A и способа построения последовательности (31), получим

$$g_{\delta n} = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \psi_k = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} A\varphi_k = A \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \varphi_k = Af_{\delta n}. \quad (33)$$

Известно, что аппроксимация $f_{\delta n}$ сходится к точному решению f уравнения (30) [1, 2]. Задача минимизации нормы (32) решается методом наименьших квадратов, который приводит к известной системе линейных алгебраических уравнений с матрицей Грама. В алгоритме

решения системы сначала последовательность (31) подвергается процессу ортогонализации, в результате которого получаем ортонормированную систему $\{\omega_k\}$, $k = 1, 2, \dots, n$. При этом, если $g_{\delta n} = \sum_{k=1}^n d_k \omega_k$, где $d_k = \langle g_{\delta}, \omega_k \rangle_K$, $k = 1, 2, \dots, n$, — скалярные произведения в соболевском пространстве K образов, то

$$g_{\delta n} = \sum_{k=1}^n d_k \omega_k = \sum_{k=1}^n d_k \left(\sum_{l=1}^k a_{kl} \psi_l \right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=l}^n d_k a_{kl} \right) \psi_l = \sum_{k=1}^n d_k^{(n)} \psi_k.$$

Здесь использовано обозначение $d_k^{(n)} = \sum_{l=k}^n d_l a_{lk}$, где a_{lk} — элементы матрицы Грама для выбранного базиса. Принимая во внимание (33) и соотношение $c_k^{(n)} = d_k^{(n)}$, получаем $f_{\delta n} = \sum_{k=1}^n d_k^{(n)} \varphi_k$ искомую аппроксимацию решения задачи.

Формирование решения 3D задачи по 2D слоям. Предположим, что найдено решение 2D задачи рефракционной томографии, поставленной в круге $B_{(0,0,0),\rho}^2 \in \partial \mathbb{R}_{z+}^3$ радиуса ρ с известной метрикой (модель 1 или модель 2 метрики). Перенос аппроксимации искомой функции из точек круга в точки сферы $S_{(0,0,0),R}^2$ радиуса $R(\rho)$ осуществляется в точном соответствии с положениями Теорем 1, 2. Задавая семейство концентрических кругов радиусов $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_K$, K натуральное, фиксируя соответствующее им семейство сфер, и осуществляя перенос искомой функции из точек каждого круга в точки соответствующей ему сферы, получим трёхмерную аппроксимацию функции в части полупространства, ограниченной частью сферы максимального радиуса R_{\max} .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача рефракционной томографии, поставленная в полупространстве с рефракцией, интерпретируемая как задача интегральной геометрии, в рамках которой рефракция моделируется специальной римановой метрикой, допускающей наличие семейств вполне геодезических подмногообразий топологической размерности два. Предложены варианты послойного решения 3D задачи путём понижения размерности исходной задачи и её сведения к решению серии двумерных задач. Построены 2D метрики в круге, изометричные соответствующим вполне геодезическим подмногообразиям. Установлены геометрические характеристики исходных 3D метрик и порождённых ими 2D метрик. Предложена схема алгоритма послойного решения 3D задачи рефракционной скалярной томографии численными методами.

Планируется продолжение проведённых в статье исследований. Прежде всего, предполагается непосредственное продолжение статьи, а именно алгоритмическая и программная реализация предложенного подхода и его изучение методами вычислительного эксперимента. Представляется интересным распространение подходов послойного решения 3D задач, поставленных в полупространстве и цилиндре, на задачи векторной и тензорной томографии, с целью их изучения на относительно простых 3D и 2D римановых метриках, использованных в настоящей работе. Томографические операторы, действующие на 3D векторные и тензорные поля, обладают непустыми ядрами, и вопросы единственности реконструкции полей или их частей по 3D геодезическим лучевым преобразованиям и по семействам 2D преобразований представляются актуальными. Отметим, что в 3D случае имеется 3 разных варианта геодезических лучевых преобразований векторного поля, и 6 вариантов различных лучевых преобразований симметричного 2-тензорного поля. Установление взаимосвязей между 3D томографическими операторами и соответствующими им семействами 2D геодезических лучевых преобразований — актуальная и нетривиальная задача.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00200). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Derevtsov E.Yu., Kleshchev A.G., Sharafutdinov V.A.* Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction // *Inverse Ill-Posed Probl.* 1999. V. 7, N 1. P. 83–103; DOI: 10.1515/jiip.1999.7.1.83
2. *Svetov I.E., Derevtsov E.Yu., Volkov Yu.S., Schuster T.* A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium // *Math. Comput. Simul.* 2014. V. 97. P. 207–223; DOI: 10.1016/j.matcom.2013.10.002
3. *Кириллов А.А.* Об одной задаче И.М. Гельфанда // *ДАН СССР.* 1961. Т. 137, № 2. С. 276–277.
4. *Тцу Н.К.* An inversion formula for cone-beam reconstruction // *SIAM J. Appl. Math.* 1983. V. 43. P. 546–552; DOI: 10.1137/0143035
5. *Finch D.V.* Cone-beam reconstruction with sources on a curve // *SIAM J. Appl. Math.* 1985. V. 45. P. 665–673; DOI: 10.1137/0145039
6. *Svetov I.E., Maltseva S.V., Louis A.K.* The Method of Approximate Inverse in Slice-by-Slice Vector Tomography Problems // *Lecture Notes Comput. Sci.* 2020. V. 11974. P. 487–494; DOI: 10.1007/978-3-030-40616-5-47
7. *Svetov I.E., Polyakova A.P.* Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor fields // *Inverse Problems.* 2024. V. 40, N 1. Article 015009; DOI: 10.1088/1361-6420/ad0fac
8. *Wensrich C.M., Holman S., Lionheart W.R.B., Courdurier M., Polyakova A., Svetov I., Doubikin T.* General Reconstruction of Elastic Strain Fields from their Longitudinal Ray Transform // *SIAM J. Appl. Math.* 2025. V. 85(2). P. 945–960; DOI: 10.1137/24M1684852
9. *Гольдин С.В.* Введение в геометрическую сейсмологию // Учеб. пособие. Новосибирск: изд. НГУ, 2016.
10. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
11. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
12. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, том IV. М.: ГИИТЛ, 1957.
13. *Ланс Дж.Н.* Численные методы для быстродействующих машин. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

UDC 519.677:514.753

MODELS OF A SLICE-BY-SLICE SOLUTION FOR THE REFRACTIVE TOMOGRAPHY PROBLEM IN A HALF-SPACE© 2025 E. Yu. Derevtsov^{1a}, S. V. Maltseva^{1,2b}¹*Novosibirsk State University,**Pirogov st., 1, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,**Acad. Koptyug pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^aeydert@mail.ru, ^bmaltsevasv@math.nsc.ru

Received 30.09.2025, revised 25.10.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. The problem of refractive tomography is considered, posed in a half-space with refraction interpreted as a problem of integral geometry, within which refraction is modeled by a given Riemannian metric that allows the presence of families of totally geodesic submanifolds of topological dimension two. Variants of slice-by-slice solution to the 3D problem by reduction the dimensionality of the original problem and reducing it to solving a series of two-dimensional problems are proposed. 2D metrics in a disk are constructed, isometric to the corresponding totally geodesic submanifolds. The geometric characteristics of the original 3D metric and the 2D metrics generated by it are established. A scheme of the algorithm for slice-by-slice solution to the 3D problem of refractive tomography by numerical methods is proposed.

Keywords: refractive tomography, integral geometry, Riemannian metric, curvature, totally geodesic submanifold, geodesic ray transform, slice-by-slice reconstruction.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.405

*In memory of Prof. A. K. Louis, an outstanding scientist,
a kind colleague, a good friend*

REFERENCES

1. Derevtsov E.Yu., Kleshchev A.G., Sharafutdinov V.A. Numerical solution of the emission 2D-tomography problem for a medium with absorption and refraction. *Inverse III-Posed Probl.*, 1999, Vol. 7, No. 1, pp. 83–103; DOI: 10.1515/jiip.1999.7.1.83
2. Svetov I.E., Derevtsov E.Yu., Volkov Yu.S., Schuster T. A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium. *Math. Comput. Simul.*, 2014, Vol. 97, pp. 207–223; DOI: 10.1016/j.matcom.2013.10.002
3. Kirillov A.A. Ob odnoi zadache I. M. Gel'fanda [About one problem by I. M. Gelfand]. *DAN USSR*, 1961, Vol. 137, No. 2, pp. 276–277 (in Russian).
4. Tuy H.K. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM J. Appl. Math.*, 1983. Vol. 43, pp. 546–552; DOI: 10.1137/0143035
5. Finch D.V. Cone-beam reconstruction with sources on a curve. *SIAM J. Appl. Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 665–673; DOI: 10.1137/0145039
6. Svetov I.E., Maltseva S.V., Louis A.K. The Method of Approximate Inverse in Slice-by-Slice Vector Tomography Problems. *Lecture Notes Comput. Sci.*, 2020, Vol. 11974, pp. 487–494; DOI: 10.1007/978-3-030-40616-5-47

7. Svetov I.E., Polyakova A.P. Inversion of generalized Radon transforms acting on 3D vector and symmetric tensor fields. *Inverse Problems*, 2024, Vol. 40, No. 1. Article 015009; DOI: 10.1088/1361-6420/ad0fac
8. Wensrich C.M., Holman S., Lionheart W.R.B., Courdurier M, Polyakova A., Svetov I., Doubikin T. General Reconstruction of Elastic Strain Fields from their Longitudinal Ray Transform. *SIAM J. Appl. Math.*, 2025, Vol. 85, No. 2, pp. 945–960; DOI: 10.1137/24M1684852
9. Goldin S.V. Vvedenie v geometricheskuyu seismiku. Ucheb. posobie [Introduction to geometric seismics. Study guide]. Novosibirsk: Publ. NSU, 2016 (in Russian).
10. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]. Moscow: Nauka, 1980 (in Russian).
11. Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Sovremennaya geometriya [Modern Geometry]. Moscow: Nauka, 1979 (in Russian).
12. Smirnov V.I. Kurs vysshei matematiki [Higher Mathematics Course]. Moscow: GITTL, 1957 (in Russian).
13. Lance J.N. Chislennye metody dlya bystrodeistvuyushchikh mashin [Numerical Methods for High-Speed Machines]. Moscow: Foreign Lang. Publ., 1962 (in Russian).

УДК 531.36

ОБ ОСОБЫХ РЕШЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ ШАРА С МНОГОСВЯЗНОЙ ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2025 В. Д. Иртегов^a, Т. Н. Титоренко^b

*Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, г. Иркутск 664033, Россия*

E-mails: ^airtegov@icc.ru, ^btitor@icc.ru

Поступила в редакцию 30.07.2024 г.; после доработки 04.11.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Исследуются дифференциальные уравнения, описывающие качение без скольжения уравновешенного динамически несимметричного шара по неподвижной горизонтальной плоскости в поле тяжести. Шар содержит многосвязную полость, целиком заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей безвихревое движение. Методом Рауса — Ляпунова с использованием символьных вычислений находятся особые решения уравнений движения, даётся их механическая интерпретация и исследуется устойчивость. Рассматривается случай, когда механическая система находится под воздействием произвольного линейного потенциального силового поля.

Ключевые слова: неголономная система, особые решения, устойчивость, символьные вычисления

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.406

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задаче о вращении твёрдого тела с неподвижной точкой, содержащего полости, заполненные однородной идеальной жидкостью, посвящено немало работ, начиная с исследований Жуковского [1], Пуанкаре [2], Стеклова [3] и др. Исследования были обусловлены изучением движения Земли, для которой твёрдое тело с жидким наполнением служило моделью. Интерес к этой задаче в различных постановках сохраняется до сих пор [4]–[6]. Твёрдое тело с полостями, наполненными жидкостью, используется как модель для исследования геофизических процессов [7], движения космических аппаратов [8].

В настоящей работе рассматривается некоторое обобщение данной задачи: качение без скольжения шара по неподвижной горизонтальной плоскости в поле тяжести. Шар содержит многосвязную полость, целиком заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей безвихревое движение. Предполагается, что центр масс системы совпадает с геометрическим центром шара. В различных постановках эта задача исследовалась в работах [9], [10]. Для описания движения тела (шар+жидкость) вводится подвижная система координат $Oxyz$, начало которой совпадает с центром масс тела, а её оси Ox , Oy и Oz направлены вдоль его главных осей инерции для точки O . В этой системе координат уравнения

движения тела имеют вид [11]:

$$\begin{aligned}
A_{*1}\dot{\omega}_1 + (A_{*3} - A_{*2})\omega_2\omega_3 + A_{*3}\Omega_3\omega_2 - A_{*2}\Omega_2\omega_3 &= \gamma_1\omega_n, \\
A_{*2}\dot{\omega}_2 + (A_{*1} - A_{*3})\omega_1\omega_3 + A_{*1}\Omega_1\omega_3 - A_{*3}\Omega_3\omega_1 &= \gamma_2\omega_n, \\
A_{*3}\dot{\omega}_3 + (A_{*2} - A_{*1})\omega_1\omega_2 + A_{*2}\Omega_2\omega_1 - A_{*1}\Omega_1\omega_2 &= \gamma_3\omega_n, \\
\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2, \\
\omega_n = \dot{\omega}_1\gamma_1 + \dot{\omega}_2\gamma_2 + \dot{\omega}_3\gamma_3.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $A_{*i} = A_i/(mr^2) + 1$, $\Omega_i = k_i/(A_i + mr^2)$, $i = 1, 2, 3$, m — сумма масс твёрдого тела и жидкости, r — радиус шара, A_i , $i = 1, 2, 3$, — момент инерции тела, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости шара, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор, направленный по вертикали вверх, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ — вектор момента количества циклического движения жидкости.

Система (1) допускает следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned}
V_0 = A_{*1}\omega_1^2 + A_{*2}\omega_2^2 + A_{*3}\omega_3^2 - \tilde{\omega}_n^2 &= \text{const}, \quad \tilde{\omega}_n = \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + \omega_3\gamma_3, \\
V_1 = [A_{*1}(\omega_1 + \Omega_1) - \tilde{\omega}_n\gamma_1]^2 + [A_{*2}(\omega_2 + \Omega_2) - \tilde{\omega}_n\gamma_2]^2 + [A_{*3}(\omega_3 + \Omega_3) - \tilde{\omega}_n\gamma_3]^2 &= \text{const}, \\
V_2 = A_{*1}(\omega_1 + \Omega_1)\gamma_1 + A_{*2}(\omega_2 + \Omega_2)\gamma_2 + A_{*3}(\omega_3 + \Omega_3)\gamma_3 - \tilde{\omega}_n &= \text{const}, \\
V_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1
\end{aligned} \tag{2}$$

и является вполне интегрируемой.

Рассматривается также случай, когда механическая система находится под воздействием силового поля с потенциалом $U = b_1\delta_1 + b_2\delta_2 + b_3\delta_3$, $b_i = \text{const}$, где $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ — направляющий вектор этого поля. Это может быть, например, постоянное магнитное или электрическое поле [12]. Исследуется частный случай задачи, когда векторы $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\delta}$ параллельны или противоположно направлены. Уравнения движения записываются в виде

$$\begin{aligned}
A_{*1}\dot{\omega}_1 + (A_{*3} - A_{*2})\omega_2\omega_3 + A_{*3}\Omega_3\omega_2 - A_{*2}\Omega_2\omega_3 &= \gamma_1\omega_n + M_{Q1}, \\
A_{*2}\dot{\omega}_2 + (A_{*1} - A_{*3})\omega_1\omega_3 + A_{*1}\Omega_1\omega_3 - A_{*3}\Omega_3\omega_1 &= \gamma_2\omega_n + M_{Q2}, \\
A_{*3}\dot{\omega}_3 + (A_{*2} - A_{*1})\omega_1\omega_2 + A_{*2}\Omega_2\omega_1 - A_{*1}\Omega_1\omega_2 &= \gamma_3\omega_n + M_{Q3}, \\
\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\mathbf{M}_Q = \boldsymbol{\gamma} \times \partial U / \partial \boldsymbol{\gamma}$ — вектор момента сил.

Первые интегралы уравнений (3):

$$\begin{aligned}
2\tilde{V}_0 = A_{*1}\omega_1^2 + A_{*2}\omega_2^2 + A_{*3}\omega_3^2 - \tilde{\omega}_n^2 + 2U &= \text{const}, \\
\tilde{V}_1 = A_{*1}(\omega_1 + \Omega_1)\gamma_1 + A_{*2}(\omega_2 + \Omega_2)\gamma_2 + A_{*3}(\omega_3 + \Omega_3)\gamma_3 - \tilde{\omega}_n &= \text{const}, \\
\tilde{V}_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1.
\end{aligned}$$

В общем случае система (3) неинтегрируема. Интегрируемость задачи о качении шара в различных постановках обсуждается в [13].

Уравнения (1) по форме совпадают с дифференциальными уравнениями, описывающими качение уравновешенного динамически несимметричного шара с ротором по неподвижной горизонтальной плоскости [14]. Эквивалентность уравнений движения в этих задачах отмечена ещё Жуковским. Задачи о качении шара с ротором возникают, например, в робототехнике [15]. Аналогия уравнений позволяет переносить результаты исследования одних механических систем на другие при соответствующей их интерпретации. В [11] доказана интегрируемость уравнений (1). Данный результат использован в [14] для анализа уравнений движения шара с ротором на основе подхода, изложенного в [16], [17].

В настоящей работе для анализа уравнений (1), (3) применяется метод Рауса — Ляпунова и его обобщения [18]–[20], а также система аналитических вычислений. Находятся особые решения указанных уравнений, в качестве которых рассматриваются инвариантные множества, удовлетворяющие необходимым условиям экстремума первых интегралов задачи. Такие множества называются стационарными. Обладающие указанным свойством нульмерные множества традиционно называют стационарными решениями, множества положительной размерности — стационарными инвариантными многообразиями (ИМ). Найденные решения исследуются на устойчивость по Ляпунову. Дается их механическая интерпретация.

1. СТАЦИОНАРНЫЕ МНОЖЕСТВА ПРИ НАЛИЧИИ ПОЛЯ ТЯЖЕСТИ

Перманентные вращения. Под перманентными вращениями в данной задаче будем понимать движения тела вида [21]. Найдём стационарные множества, соответствующие таким движениям. Для этого в дифференциальных уравнениях (1) положим $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$ и построим для получившейся системы лексикографический базис Грёбнера [22] относительно $\omega_2 > \omega_3 > \gamma_2 > \gamma_3$:

$$\begin{aligned} ((A_1 - A_3)\omega_1 + k_1)\gamma_3 - k_3\gamma_1 &= 0, & ((A_1 - A_2)\omega_1 + k_1)\gamma_2 - k_2\gamma_1 &= 0, \\ ((A_1 - A_3)\omega_1 + k_1)\omega_3 - k_3\omega_1 &= 0, & ((A_2 - A_1)\omega_1 - k_1)\omega_2 + k_2\omega_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) совместно с интегралом $V_3 = 1$ определяют одномерное ИМ уравнений движения (1), что можно проверить прямым вычислением по определению ИМ: производная, вычисленная от указанных выражений в силу уравнений (1), обращается тождественно в нуль на данных выражениях. Дифференциальное уравнение $\dot{\omega}_1 = 0$ на этом ИМ имеет семейство решений

$$\omega_1 = \omega_1^0 = \text{const}. \quad (5)$$

В исходном фазовом пространстве решениям (5) соответствуют два однопараметрических семейства решений дифференциальных уравнений (1):

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_1^0, \omega_2 &= \frac{k_2\omega_1^0}{k_1 + (A_1 - A_2)\omega_1^0}, & \omega_3 &= \frac{k_3\omega_1^0}{k_1 + (A_1 - A_3)\omega_1^0}, \\ \gamma_1 &= \pm(k_1 + (A_1 - A_2)\omega_1^0)(k_1 + (A_1 - A_3)\omega_1^0)^{-1/2}, \\ \gamma_2 &= \pm k_2(k_1 + (A_1 - A_3)\omega_1^0)^{-1/2}, & \gamma_3 &= \pm k_3(k_1 + (A_1 - A_2)\omega_1^0)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы их получить, нужно подставить (5) в уравнения ИМ. Здесь

$$\rho_1 = k_3^2 z_1^2 + k_2^2 z_2^2 + z_1^2 z_2^2, \quad z_1 = k_1 + (A_1 - A_2)\omega_1^0, \quad z_2 = k_1 + (A_1 - A_3)\omega_1^0,$$

ω_1^0 — параметр семейств.

С механической точки зрения, элементам семейств решений (6) соответствуют перманентные вращения тела исследуемой системы. Вращение происходит вокруг оси, расположенной в теле, с угловой скоростью $\omega^2 = (k_2^2 z_1^{-2} + k_3^2 z_2^{-2} + 1)\omega_1^0$. Ось вращения проходит через точку касания шара с плоскостью и перпендикулярна этой плоскости.

При $k_2 = k_3 = 0$ решения (6) принимают вид

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \pm 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = 0$$

и описывают вращение тела относительно одной из главных его осей инерции (оси Ox) с угловой скоростью ω_1^0 .

Получим семейства интегралов, которые принимают стационарное значение на найденных решениях. Для этого образуем из первых интегралов задачи (2) их полную линейную комбинацию

$$2K = 2\lambda_0 V_0 - \lambda_1 V_1 - 2\lambda_2 V_2 - \lambda_3 V_3, \quad (7)$$

где $\lambda_j = \text{const}$, $j = 0, \dots, 3$, — параметры семейства интегралов K , и запишем необходимые условия экстремума K по фазовым переменным

$$\frac{\partial K}{\partial \omega_i} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial \gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Из уравнений (8) найдём ограничения на λ_j , при которых решения (6) удовлетворяют этим уравнениям. Подставив полученные выражения в (7), будем иметь

$$2K_{1,2} = 2 \left(V_0 \mp \frac{2z_4 \omega_1^0}{z_1 z_2} V_2 + \frac{\omega_1^0 (k_1 + (A_1 + mr^2) \omega_1^0) z_3}{mr^2 z_1^2 z_2^2} V_3 \right) \lambda_0 + \left(-V_1 \pm \frac{2z_4 (k_1 + A_1 \omega_1^0)}{mr^2 z_1 z_2} V_2 - \frac{(k_1 + A_1 \omega_1^0) (k_1 + (A_1 + 2mr^2) \omega_1^0) z_3}{m^2 r^4 z_1^2 z_2^2} V_3 \right) \lambda_1. \quad (9)$$

Здесь

$$z_3 = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) [k_1^2 + 2k_1(2A_1 - A_2 - A_3)\omega_1^0] - 2k_1 [(A_1 - A_2)k_2^2 + (A_1 - A_3)k_3^2] \omega_1^0 + \{ [6A_1^2 + A_2^2 + 4A_2 A_3 + A_3^2 - 6A_1(A_2 + A_3)] (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - (A_1 - A_2)(5A_1 - A_2 - 4A_3)k_2^2 - (A_1 - A_3)(5A_1 - 4A_2 - A_3)k_3^2 \omega_1^{0^2} + 2(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(2A_1 - A_2 - A_3)k_1 \omega_1^3 + (A_1 - A_2)^2 (A_1 - A_3)^2 \} \omega_1^{0^4},$$

$$z_4 = (k_3^2 z_1^2 + k_2^2 z_2^2 + z_1^2 z_2^2)^{1/2}.$$

Семейство интегралов $K_{1,2}$ распадается на два подсемейства (коэффициенты при λ_0, λ_1). Как само семейство, так и каждое из его подсемейств, принимает стационарное значение на элементах семейств решений (6).

Замечание. Если построить лексикографический базис относительно $\omega_1 > \omega_3 > \gamma_1 > \gamma_3$ или $\omega_1 > \omega_2 > \gamma_1 > \gamma_2$, то, следуя описанному выше способу, получим ещё четыре однопараметрических семейства решений уравнений движения (1):

$$\omega_1 = \frac{k_1 \omega_2^0}{k_2 + (A_2 - A_1) \omega_2^0}, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_3 = \frac{k_3 \omega_2^0}{k_2 + (A_2 - A_3) \omega_2^0},$$

$$\gamma_1 = \pm k_1 (k_2 + (A_2 - A_3) \omega_2^0) \rho_2^{-1/2}, \quad (10)$$

$$\gamma_2 = \pm (k_2 + (A_2 - A_1) \omega_2^0) (k_2 + (A_2 - A_3) \omega_2^0) \rho_2^{-1/2},$$

$$\gamma_3 = \pm k_3 (k_2 + (A_2 - A_1) \omega_2^0) \rho_2^{-1/2}$$

и

$$\omega_1 = \frac{k_1 \omega_3^0}{k_3 + (A_3 - A_1) \omega_3^0}, \quad \omega_2 = \frac{k_2 \omega_3^0}{k_3 + (A_3 - A_2) \omega_3^0}, \quad \omega_3 = \omega_3^0,$$

$$\gamma_1 = \pm k_1 (k_3 + (A_3 - A_2) \omega_3^0) \rho_3^{-1/2}, \quad \gamma_2 = \pm k_2 (k_3 + (A_3 - A_1) \omega_3^0) \rho_3^{-1/2}, \quad (11)$$

$$\gamma_3 = \pm (k_3 + (A_3 - A_1) \omega_3^0) (k_3 + (A_3 - A_2) \omega_3^0) \rho_3^{-1/2}.$$

Здесь

$$\rho_2 = k_1^2 \tilde{z}_1^2 + k_3^2 \tilde{z}_2^2 + \tilde{z}_1^2 \tilde{z}_2^2, \quad \rho_3 = k_1^2 \hat{z}_1^2 + k_2^2 \hat{z}_2^2 + \hat{z}_1^2 \hat{z}_2^2, \quad \tilde{z}_1 = k_2 + (A_2 - A_3) \omega_2^0,$$

$$\tilde{z}_2 = k_2 + (A_2 - A_1)\omega_2^0, \quad \hat{z}_1 = k_3 + (A_3 - A_2)\omega_3^0, \quad \hat{z}_2 = k_3 + (A_3 - A_1)\omega_3^0, \\ \omega_2^0, \quad \omega_3^0 - \text{параметры семейств.}$$

При $k_1 = k_3 = 0$ решения (10) и $k_1 = k_2 = 0$ решения (11) соответственно принимают вид

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \pm 1, \quad \gamma_3 = 0, \\ \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_3^0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1$$

и описывают вращение тела относительно его главных осей инерции.

Положения равновесия. Найдём стационарные множества, соответствующие положениям равновесия тела.

Очевидно, уравнения (1) имеют решение $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$. Последние соотношения совместно с интегралом $V_3 = 1$ определяют ИМ коразмерности 4 этих уравнений. Уравнения ИМ:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (12)$$

Дифференциальные уравнения $\dot{\gamma}_2 = 0, \dot{\gamma}_3 = 0$ на ИМ (12) имеют семейство решений:

$$\gamma_2 = \gamma_2^0 = \text{const}, \quad \gamma_3 = \gamma_3^0 = \text{const}. \quad (13)$$

Решениям (13) в исходном фазовом пространстве соответствуют два двухпараметрических семейства решений дифференциальных уравнений (1):

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \pm(1 - \gamma_2^{02} - \gamma_3^{02})^{1/2}, \quad \gamma_2 = \gamma_2^0, \quad \gamma_3 = \gamma_3^0, \quad (14)$$

здесь γ_2^0, γ_3^0 — параметры семейств.

С механической точки зрения, элементы семейств решений (14) представляют собой положения равновесия исследуемой механической системы.

Как и в предыдущем случае, используя уравнения стационарности (8), найдём, что интеграл V_0 принимает стационарное значение на ИМ (12) и элементах семейств решений (14).

2. СТАЦИОНАРНЫЕ МНОЖЕСТВА В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Положения равновесия. В рассматриваемом случае существует только два положения равновесия тела. Для их нахождения можно использовать уравнения стационарности интеграла $2W = 2(\lambda_0\tilde{V}_0 - \lambda_1\tilde{V}_1) - \lambda_2\tilde{V}_2$:

$$\frac{\partial W}{\partial \omega_i} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Полагая в (15) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ и разрешая получившиеся уравнения относительно $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda_1, \lambda_2$, будем иметь

$$\gamma_3 = \pm b_3 \rho^{-1}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \pm \rho \lambda_0, \\ \rho = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{1/2}. \quad (16)$$

Первые три соотношения (16) совместно с $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ определяют два решения дифференциальных уравнений (3):

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \pm b_1 \rho^{-1}, \quad \gamma_2 = \pm b_2 \rho^{-1}, \quad \gamma_3 = \pm b_3 \rho^{-1}. \quad (17)$$

С механической точки зрения, эти решения соответствуют положениям равновесия тела.

Подставив значения λ_1, λ_2 (16) в выражения для W , получим интегралы, принимающие стационарное значение на решениях (17):

$$W_{1,2} = (2\tilde{V}_0 \mp \rho\tilde{V}_2)\lambda_0. \quad (18)$$

Маятниковые движения. При следующих ограничениях на параметры задачи $k_1 = k_3 = b_2 = 0$ соотношения $\omega_1 = 0, \omega_3 = 0, \gamma_2 = 0$ определяют ИМ коразмерности 3 уравнений движения (3), что можно проверить, продифференцировав данные соотношения в силу указанных уравнений.

Дифференциальные уравнения на этом ИМ имеют вид

$$\dot{\omega}_2 = \frac{mr^2(b_1\gamma_3 - b_3\gamma_1)}{A_2 + mr^2}, \quad \dot{\gamma}_1 = -\gamma_3\omega_2, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2$$

и описывают маятниковоподобные колебания тела относительно его неподвижной оси Oy . Такие движения возможны, в частности, когда ось параллельна плоскости.

Ещё два ИМ подобного вида существуют при $k_2 = k_3 = b_1 = 0$ и $k_1 = k_2 = b_3 = 0$. Дифференциальные уравнения на этих ИМ описывают маятниковые движения тела соответственно относительно его неподвижной оси Ox и Oz . Интеграл $W_3 = \tilde{V}_1^2$ принимает стационарное значение на этих ИМ.

3. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ И ИМ

3.1. При наличии поля тяжести

Перманентные вращения. Исследуем устойчивость элементов семейств решений (6). Для уменьшения объёма вычислений ограничимся случаем $\lambda_1 = 0, k_1 = 0, A_1 = 2A_3, A_2 = 3/2A_3$. Семейство интегралов $K_{1,2}$ (9) будем использовать для получения достаточных условий. При указанных ограничениях на параметры семейства решений и интегралы примут вид

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \frac{2k_2}{A_3}, \quad \omega_3 = \frac{k_3}{A_3}, \quad \gamma_1 = \pm A_3\omega_1^0\varrho_1^{-1}, \quad \gamma_2 = \pm 2k_2\varrho_1^{-1}, \quad \gamma_3 = \pm k_3\varrho_1^{-1}, \quad (19)$$

$$\tilde{K}_{1,2} = V_0 \mp \frac{\varrho_1}{A_3}V_2 + \frac{(2A_3 + mr^2)\varrho_1^2}{mr^2A_3^2}V_3,$$

здесь $\varrho_1 = (4k_2^2 + k_3^2 + A_3^2\omega_1^0)^{1/2}$.

Введём отклонения от невозмущённого решения:

$$y_1 = \gamma_1 \mp A_3\omega_1^0\varrho_1^{-1}, \quad y_2 = \gamma_2 \mp 2k_2\varrho_1^{-1}, \quad y_3 = \gamma_3 = \pm k_3\varrho_1^{-1}, \\ y_4 = \omega_1 - \omega_1^0, \quad y_5 = \omega_2 - \frac{2k_2}{A_3}, \quad y_6 = \omega_3 - \frac{k_3}{A_3}.$$

Вторая вариация $\tilde{K}_{1,2}$ в отклонениях на множестве, определяемом первыми вариациями условных интегралов

$$\delta V_2 = \frac{1}{mr^2} \left(2(A_3\omega_1^0 y_1 + 2k_2 y_2 + k_3 y_3) \pm A_3(2A_3\omega_1^0 y_4 + 3k_2 y_5 + k_3 y_6)\varrho_1^{-1} \right) = 0, \\ \delta V_3 = \pm 2(A_3\omega_1^0 y_1 + 2k_2 y_2 + k_3 y_3)\varrho_1^{-1} = 0,$$

записывается следующим образом:

$$\delta^2 \tilde{K}_{1,2} = \frac{\varrho_1^2 \varrho_2}{A_3^2 k_3^2 m r^2} \left((k_3^2 + A_3^2 \omega_1^0) y_1^2 + 4k_2 A_3 \omega_1^0 y_1 y_2 + (4k_2^2 + k_3^2) y_2^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \left(\frac{6A_3}{mr^2} + \frac{9k_2^2 \varrho_2}{A_3^2 mr^2 \omega_1^2} - \frac{k_2^2}{\varrho_1^2} + 4 \right) y_5^2 + \frac{1}{2} k_2 k_3 \left(\frac{3\varrho_2}{A_3^2 mr^2 \omega_1^2} - \frac{1}{\varrho_1^2} \right) y_5 y_6 \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{4A_3}{mr^2} + \frac{k_3^2 \varrho_2}{A_3^2 mr^2 \omega_1^2} - \frac{k_3^2}{\varrho_1^2} + 4 \right) y_6^2 \pm \frac{\varrho_1}{A_3 mr^2} \left(\frac{3k_2 \varrho_2}{A_3 \omega_1^0} y_1 y_5 - (3A_3 + 2mr^2) y_2 y_5 \right. \\
& \quad \left. + \frac{4k_2(A_3 + mr^2)}{k_3} y_2 y_6 + \frac{k_3^2 \varrho_2 + 2A_3^2(A_3 + mr^2) \omega_1^0}{A_3 k_3 \omega_1^0} y_1 y_6 \right),
\end{aligned}$$

где $\varrho_2 = 2A_3 + mr^2$.

Условия положительной определённости квадратичных форм $\delta^2 \tilde{K}_{1,2}$ будут достаточными для устойчивости решений (19). В форме неравенств Сильвестра они имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{\varrho_1^2 \varrho_2 (k_3^2 + A_3^2 \omega_1^0)}{A_3^2 k_3^2 mr^2} > 0, \quad \Delta_2 = \frac{\varrho_1^6 \varrho_2^2}{A_3^4 k_3^2 m^2 r^4} > 0, \\
\Delta_3 &= \frac{\varrho_1^4 \varrho_2 (3\varrho_1^2 \varrho_2 + mr^2 (k_3^2 + A_3^2 \omega_1^0))}{A_3^3 k_3^2 m^3 r^6} > 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\Delta_4 = \frac{\varrho_1^4}{A_3^2 k_3^2 m^4 r^8} \left((3A_3 + 2mr^2) \varrho_1^2 \varrho_2 + mr^2 [4k_2^2 \varrho_2 + A_3^2 (3A_3 + 2mr^2) \omega_1^0] \right) > 0.$$

Неравенства (20) выполняются в силу положительности A_3, m, r и $k_3 \neq 0$. Последнее условие имеет простую механическую интерпретацию. При устойчивом вращении вектор \mathbf{k} не лежит в плоскости Oxy эллипсоида инерции тела.

Сопоставим достаточные условия с необходимыми. Запишем уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \frac{1}{A_3} (k_3 y_2 - 2k_2 y_3) \mp \frac{k_3}{\varrho_1} (k_3 y_5 - 2k_2 y_6), \quad \dot{y}_2 = -\frac{k_3}{A_3} y_1 + \omega_1^0 y_3 \pm \frac{1}{\varrho_1} (k_3 y_4 - A_3 \omega_1^0 y_6), \\
\dot{y}_3 &= \frac{2k_2}{A_3} y_1 - \omega_1^0 y_2 \mp \frac{1}{\varrho_1} (2k_2 y_4 - A_3 \omega_1^0 y_5), \\
2\dot{y}_4 &= \frac{1}{\varrho_3} \left(4k_2 (3(A_3 + mr^2) \varrho_1^2 - k_3^2 mr^2) y_6 - k_3 [3(A_3 + mr^2) \varrho_1^2 - mr^2 (k_3^2 + A_3^2 \omega_1^0)] y_5 \right), \\
\dot{y}_5 &= \frac{2A_3 \omega_1^0}{\varrho_3} \left([k_3^2 mr^2 - 2(A_3 + mr^2) \varrho_1^2] y_6 + k_2 k_3 mr^2 y_5 \right), \\
\dot{y}_6 &= \frac{A_3 \omega_1^0}{\varrho_3} \left([3\varrho_1^2 \varrho_2 + mr^2 (k_3^2 + A_3^2 \omega_1^0)] y_5 - 4k_2 k_3 mr^2 y_6 \right),
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\varrho_3 = [3A_3 (4k_2^2 + k_3^2) + 2(6k_2^2 + k_3^2) mr^2] \varrho_2 + 2A_3^2 (A_3 + mr^2) (3A_3 + 2mr^2) \omega_1^0.$$

Характеристическое уравнение системы (21) имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2}{A_3^2 \varrho_3} (A_3^2 \lambda^2 + 4k_2^2 + k_3^2 + A_3^2 \omega_1^0) \{ [(2A_3 + mr^2) (3A_3 (4k_2^2 + k_3^2) + 2(6k_2^2 + k_3^2) mr^2) \\
+ 2A_3^2 (A_3 + mr^2) (3A_3 + 2mr^2) \omega_1^0] \lambda^2 + 2A_3^2 \omega_1^0 (4k_2^2 + k_3^2 + A_3^2 \omega_1^0) \} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Очевидно, уравнение (22) имеет только нулевые и чисто мнимые корни с простыми элементарными делителями в силу положительности A_3, m, r и условия задачи $k_2 \neq 0$ ($k_3 \neq 0$). Таким образом, достаточные условия близки к необходимым.

Положения равновесия. Доказана неустойчивость в линейном приближении семейств решений (14), принадлежащих ИМ (12).

Введём отклонения от невозмущённого движения:

$$y_1 = \omega_1, y_2 = \omega_2, y_3 = \omega_3, y_4 = \gamma_1 \mp \chi_1, y_5 = \gamma_2 - \gamma_2^0, y_6 = \gamma_3 - \gamma_3^0,$$

где $\chi_1 = (1 - \gamma_2^{02} - \gamma_3^{02})^{1/2}$, и запишем уравнения первого приближения:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & \frac{1}{\chi_2} \left(\pm mr^2 \chi_1 [k_3(A_3 + mr^2)\gamma_2^0 - k_2(A_2 + mr^2)\gamma_3^0] y_1 \right. \\ & + [mr^2 \gamma_3^0 (A_2 + mr^2) (k_3 \gamma_3^0 \pm k_1 \chi_1) + k_3 (A_3 + mr^2) (\gamma_2^{02} mr^2 - (A_2 + mr^2))] y_2 \\ & \left. + (k_2 (A_2 + mr^2) ((A_3 + mr^2) - \gamma_3^{02} mr^2) \mp mr^2 (A_3 + mr^2) (k_1 \chi_1 \gamma_2^0 \pm k_2 \gamma_2^{02})) y_3 \right), \\ \dot{y}_2 = & \frac{1}{\chi_2} \left(\{ \gamma_3^0 mr^2 [(A_3 - A_1) k_3 \gamma_3^0 - k_2 (A_1 + mr^2) \gamma_2^0] + k_3 (A_3 + mr^2) (A_1 + \gamma_2^{02} mr^2) \} y_1 \right. \\ & \mp \gamma_2^0 mr^2 [k_3 \chi_1 (A_3 + mr^2) \mp k_1 (A_1 + mr^2) \gamma_3^0] y_2 + \{ \pm mr^2 (A_3 + mr^2) \gamma_2^0 (k_2 \chi_1 \mp k_1 \gamma_2^0) \\ & \left. + k_1 [(A_1 - A_3) \gamma_3^{02} mr^2 - A_1 (A_3 + mr^2)] \} y_3 \right), \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 = & \frac{1}{\chi_2} \left(\{ \gamma_2^0 mr^2 [(A_1 - A_2) k_2 \gamma_2^0 + k_3 (A_1 + mr^2) \gamma_3^0] - k_2 (A_2 + mr^2) (A_1 + \gamma_3^{02} mr^2) \} y_1 \right. \\ & + \{ k_1 [(A_2 - A_1) \gamma_2^{02} mr^2 + A_1 (A_2 + mr^2)] + (A_2 + mr^2) \gamma_3^0 mr^2 (k_1 \gamma_3^0 \mp k_3 \chi_1) \} y_2 \\ & \left. - \gamma_3^0 mr^2 [(A_1 + mr^2) \gamma_2^0 k_1 \mp \chi_1 (A_2 + mr^2) k_2] y_3 \right), \end{aligned}$$

$$\dot{y}_4 = -\gamma_3^0 y_2 + \gamma_2^0 y_3, \quad \dot{y}_5 = \gamma_3^0 y_1 \mp \chi_1 y_3, \quad \dot{y}_6 = -\gamma_2^0 y_1 \pm \chi_1 y_2.$$

Здесь

$$\chi_2 = A_1 (A_2 + mr^2) (A_3 + mr^2) - [(A_1 - A_2) (A_3 + mr^2) \gamma_2^{02} + (A_1 - A_3) (A_2 + mr^2) \gamma_3^{02}] mr^2.$$

Характеристическое уравнение системы (23) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^4}{\chi_2} \left(\{ A_1 A_2 A_3 + [A_2 A_3 (\gamma_2^{02} + \gamma_3^{02}) + A_1 (A_2 + A_3 - A_3 \gamma_2^{02} - A_2 \gamma_3^{02})] \} mr^2 \right. \\ \left. + (A_1 \chi_1^2 + A_2 \gamma_2^{02} + A_3 \gamma_3^{02}) m^2 r^4 \right) \lambda^2 + A_1 k_1^2 + A_2 k_2^2 + A_3 k_3^2 \\ + \{ k_2^2 + k_3^2 + \gamma_2^{02} (k_1^2 - k_2^2) + \gamma_3^{02} (k_1^2 - k_3^2) \mp 2 [k_1 \chi_1 (k_2 \gamma_2^0 + k_3 \gamma_3^0) \pm k_2 k_3 \gamma_2^0 \gamma_3^0] \} mr^2 = 0. \quad (24) \end{aligned}$$

Неустойчивость в линейном приближении элементов семейств решений (14) была установлена, исходя из анализа нулевых корней характеристического уравнения (24).

Корень $\lambda = 0$ имеет кратность 4. Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих этому корню, равно 3 (ранг матрицы $A - \lambda E$, вычисленный при $\lambda = 0$, равен 3, A — матрица системы (23)). Таким образом, жорданова форма матрицы системы (23) недиагональная. Откуда следует неустойчивость элементов исследуемых семейств решений в линейном приближении.

Для ИМ (12) доказана устойчивость по части переменных. Исследование проводилось в картах

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \pm \kappa$$

на данном ИМ. Здесь $\kappa = (1 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2)^{1/2}$.

Введём отклонения от невозмущённого решения

$$y_1 = \omega_1, \quad y_2 = \omega_2, \quad y_3 = \omega_3, \quad y_4 = \gamma_1 \mp \kappa$$

и запишем вариацию интеграла V_0 в окрестности исследуемого решения:

$$\begin{aligned} \Delta V_0 = & \left(1 + \frac{A_1}{mr^2} - 3(y_4 \pm \kappa)^2\right) y_1^2 + \left(1 + \frac{A_2}{mr^2} - 3\gamma_2^2\right) y_2^2 + \left(1 + \frac{A_3}{mr^2} - 3\gamma_3^2\right) y_3^2 \\ & + (\gamma_2 y_2 - \gamma_3 y_3)^2 + (\gamma_2 y_2 - y_1(y_4 \pm \kappa))^2 + (\gamma_3 y_3 - y_1(y_4 \pm \kappa))^2. \end{aligned}$$

Исходя из решений (13) дифференциальных уравнений на исследуемом ИМ, его можно рассматривать как семейство ИМ, где γ_2^0, γ_3^0 — параметры семейства. В новых переменных

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \left(1 + \frac{A_1}{mr^2} - 3(y_4 \pm \hat{\kappa})^2\right)^{1/2} y_1, & \phi_2 &= \left(1 + \frac{A_2}{mr^2} - 3\gamma_2^{0^2}\right)^{1/2} y_2, \\ \phi_3 &= \left(1 + \frac{A_3}{mr^2} - 3\gamma_3^{0^2}\right)^{1/2} y_3, & \phi_4 &= -\gamma_2^0 y_2 + y_1(y_4 \pm \hat{\kappa}), \\ \hat{\kappa} &= (1 - \gamma_2^{0^2} - \gamma_3^{0^2})^{1/2}, \end{aligned}$$

ΔV_0 можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta V_0 = & \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 + \left(\gamma_2^0 \left(1 + \frac{A_2}{mr^2} - 3\gamma_2^{0^2}\right)^{-1/2} \phi_2 - \gamma_3^0 \left(1 + \frac{A_3}{mr^2} - 3\gamma_3^{0^2}\right)^{-1/2} \phi_3\right)^2 \\ & + \left(\gamma_2^0 \left(1 + \frac{A_2}{mr^2} - 3\gamma_2^{0^2}\right)^{-1/2} \phi_2 - \gamma_3^0 \left(1 + \frac{A_3}{mr^2} - 3\gamma_3^{0^2}\right)^{-1/2} \phi_3 + \phi_4\right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку квадратичная форма ΔV_0 знакоопределена по переменным $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ при ограничениях на параметры

$$\begin{aligned} & \left((A_2 \leq 2mr^2 \wedge -\sigma_1 < \gamma_2^0 < \sigma_1) \vee (A_2 > 2mr^2 \wedge -1 \leq \gamma_2^0 \leq 1) \right) \\ & \wedge \left((A_3 \leq 2mr^2 \wedge -\sigma_2 < \gamma_3^0 < \sigma_2) \vee (A_3 > 2mr^2 \wedge -1 \leq \gamma_3^0 \leq 1) \right), \end{aligned}$$

то исследуемое семейство ИМ устойчиво по переменным

$$\begin{aligned} & (3(\gamma_2^{0^2} + \gamma_3^{0^2}) + A_1/(mr^2) - 2)^{1/2} \omega_1, \quad (1 + A_2/(mr^2) - 3\gamma_2^{0^2})^{1/2} \omega_2, \\ & (1 + A_3/(mr^2) - 3\gamma_3^{0^2})^{1/2} \omega_3, \quad V(1 - \gamma_2^{0^2} - \gamma_3^{0^2})^{1/2} \omega_1 - \gamma_2^0 \omega_2 \end{aligned}$$

при указанных условиях. Здесь $\sigma_1 = ((A_2 + mr^2)/(3mr^2))^{1/2}$, $\sigma_2 = ((A_3 + mr^2)/(3mr^2))^{1/2}$.

3.2. Случай произвольного линейного силового поля

Положения равновесия. Для решения

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = -b_1\rho^{-1}, \quad \gamma_2 = -b_2\rho^{-1}, \quad \gamma_3 = -b_3\rho^{-1},$$

$$\rho = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{1/2}$$

с использованием интеграла $W_2 = 2\tilde{V}_0 + \rho\tilde{V}_2$ получены достаточные условия устойчивости. Исследование проведено для случая $A_1 = 2A_3, A_2 = 3/2A_3, k_2 = k_3 = 0$.

Введём отклонения от невозмущённого движения:

$$y_1 = \omega_1, \quad y_2 = \omega_2, \quad y_3 = \omega_3, \quad y_4 = \gamma_1 + b_1\rho^{-1}, \quad y_5 = \gamma_2 + b_2\rho^{-1}, \quad y_6 = \gamma_3 + b_3\rho^{-1}.$$

Вторая вариация интеграла W_2 в отклонениях на множестве

$$\delta V_2 = -2(b_1y_4 + b_2y_5 + b_3y_6) \rho^{-1} = 0$$

при указанных ограничениях на параметры имеет вид $\delta^2 W_2 = Q_1 + Q_2$, где

$$2Q_1 = \frac{A_3}{mr^2} \left(y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2 \right) + \frac{1}{2\rho^2} [(b_2y_1 - b_1y_2)^2 + (b_3y_1 - b_1y_3)^2 + (b_3y_2 - b_2y_3)^2],$$

$$2Q_2 = \rho \left((y_4^2 + y_5^2) + \frac{(b_1y_4 + b_2y_5)^2}{b_3^2} \right).$$

Условия знакоопределенности квадратичной формы $\delta^2 W_2$ являются достаточными для устойчивости исследуемого решения. Очевидно, квадратичные формы Q_1, Q_2 положительно определены: Q_1 — в силу положительности параметров A_3, m, r ; Q_2 — при $b_3 \neq 0$. Таким образом, устойчивому положению равновесия соответствует потенциал внешних сил $U = b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3$ ($b_3 \neq 0$).

Сопоставим достаточные условия с необходимыми. Для этого запишем уравнения первого приближения:

$$\dot{y}_1 = \frac{mr^2}{A_3 D} \left(b_1 k_1 [b_3 D_1 y_2 - 2b_2 (A_3 + mr^2) y_3] \right. \\ \left. + A_3 \{ b_3 (D_1 \rho^2 + b_2^2 mr^2) y_5 + b_2 [b_1 b_3 mr^2 y_4 - (D_1 \rho^2 + (b_1^2 + b_2^2) mr^2) y_6] \} \right),$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{A_3 D} \left(b_2 b_3 [2k_1 D_2 y_2 - 2A_3 b_1 mr^2 y_5] mr^2 - 2k_1 \{ A_3 [(b_1^2 + 2b_2^2) mr^2 + D_2 \rho^2] + b_2^2 m^2 r^4 \} y_3 \right. \\ \left. - 2A_3 b_3 mr^2 (D_2 \rho^2 + b_1^2 mr^2) y_4 + 2A_3 b_1 mr^2 [D_2 \rho^2 + (b_1^2 + b_2^2) mr^2] y_6 \right), \quad (25)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{1}{A_3 D} \left(k_1 mr^2 [A_3 (b_1^2 + 4b_3^2) + 2b_3^2 mr^2] y_2 + k_1 D_2 (3A_3 \rho^2 y_2 - 2b_2 b_3 mr^2 y_3) \right. \\ \left. + A_3 mr^2 \{ b_2 (3D_2 \rho^2 + b_1^2 mr^2) y_4 - b_1 [3D_2 \rho^2 + (b_1^2 + b_3^2) mr^2] y_5 + b_1 b_2 b_3 mr^2 y_6 \} \right),$$

$$\dot{y}_4 = (b_3 y_2 - b_2 y_3) \rho^{-1}, \quad \dot{y}_5 = (b_1 y_3 - b_3 y_1) \rho^{-1}, \quad \dot{y}_6 = (b_2 y_1 - b_1 y_2) \rho^{-1}.$$

Здесь

$$D = 6A_3^2 \rho^2 + [A_3 (b_1^2 + b_2^2 + 5\rho^2) + (A_3 + mr^2) (2b_1^2 + b_2^2 + 2\rho^2)] mr^2,$$

$$D_1 = 3A_3 + 2mr^2, \quad D_2 = (2A_3 + mr^2).$$

Характеристическое уравнение системы (25)

$$\lambda^2(a_0\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_2) = 0 \quad (26)$$

имеет только нулевые и чисто мнимые корни с простыми элементарными делителями при выполнении условий

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0,$$

$$\begin{aligned} a_1^2 - 4a_0a_2 = & A_3^3mr^2\rho^2 \{ A_3mr^2[4b_1^2(b_1^2 + 3b_2^2 - b_3^2) + (3b_2^2 + b_3^2)^2] + 8k_1^2\rho(10b_1^2 + 3b_2^2 + b_3^2) \} \\ & + 4k_1^2 \{ k_1^2mr^2(b_2^2 + b_3^2)[(b_2^2 + b_3^2)mr^2 + 4A_3\rho^2] \\ & + A_3^2[(2b_1^2(b_1^2 + 2b_2^2 + 7\rho^2) + (b_2^2 + b_3^2)(3b_2^2 + b_3^2))m^2r^4\rho + 4k_1^2\rho^4] \} > 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0 = & A_3 \{ [A_3(b_1^2 + b_2^2 + 5\rho^2) + (2b_1^2 + b_2^2 + 2\rho^2)(A_3 + mr^2)]mr^2 + 6A_3^2\rho^2 \}, \\ a_1 = & [2(b_2^2 + b_3^2)mr^2 + 4A_3\rho^2]k_1^2 + [A_3(2b_1^2 + b_2^2 + 2\rho^2)(A_3 + 2mr^2) + A_3^2(b_1^2 + b_2^2 + 5\rho^2)]mr^2\rho, \\ a_2 = & mr^2[2(b_2^2 + b_3^2)k_1^2\rho + A_3(2b_1^2 + b_2^2 + 2\rho^2)mr^2\rho^2]. \end{aligned}$$

Очевидно, выражения (27) содержат только положительные слагаемые, в частности, при $0 < |b_3| \leq \sqrt{b_1^2 + 3b_2^2}$. Сопоставляя последний результат с полученными достаточными условиями, можно заключить, что достаточные условия близки к необходимым.

Для второго положения равновесия (14) доказана неустойчивость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом Рауса — Ляпунова проведён анализ особых решений уравнений движения уравновешенного динамически несимметричного шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью. Шар катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости при наличии поля тяжести. В качестве особых рассматривались решения, на которых первые интегралы задачи (или их комбинации) принимают стационарное значение. Найдены решения, обладающие указанным свойством, среди них перманентные вращения и положения равновесия тела. Проведён анализ их устойчивости по Ляпунову. Интегралы, принимающие стационарное значение на найденных решениях, использовались для получения достаточных условий их устойчивости. Для перманентных вращений достаточные условия получены в виде ограничений на компоненты вектора момента количества циклического движения жидкости. Для положений равновесия доказана неустойчивость в линейном приближении. Доказана устойчивость по части переменных ИМ, которому эти положения равновесия принадлежат. Рассмотрен также случай, когда механическая система находится под воздействием произвольного линейного потенциального силового поля. Здесь найдены положения равновесия и маятниковые ИМ. Для положений равновесия получены необходимые и достаточные условия устойчивости в виде ограничений на коэффициенты потенциала силового поля.

Как отмечалось во Введении, в [14] проведён анализ уравнений движения шара Чаплыгина с ротором, эквивалентных рассматриваемым в настоящей работе в интегрируемом случае. Дано описание особых решений уравнений в зависимости от значений констант первых интегралов задачи, исследована их устойчивость топологическими методами. В настоящей работе все найденные решения представлены в виде выражений от параметров, характеризующих исследуемую механическую систему (масса, радиус, моменты инерции, компоненты вектора момента количества циклического движения жидкости), что позволяет проводить дальнейший анализ решений в пространстве указанных параметров, давать более детальную механическую интерпретацию этим решениям.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института динамики систем и теории управления СО РАН (код научной темы № 121041300056-7). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н.К. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
2. Пуанкаре А. Пуанкаре А. Последние работы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. С. 74–111.
3. Стеклов В.А. О движении твёрдого тела, имеющего полость эллипсоидальной формы, заполненную несжимаемой жидкостью, и об изменении широт // Работы по механике 1902–1909гг: Переводы с французского. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. С. 283–408.
4. Пивоваров М.Л., Черноусько Ф.Л. Колебания твёрдого тела с тороидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью // Прикл. матем. мех. 1990. Т. 54, № 2. С. 201–206.
5. Ольшанский В.Ю. Полурегулярная прецессия несимметричного твёрдого тела с жидким наполнением // Прикл. матем. мех. 2021. Т. 85, № 5. С. 547–564; DOI: 10.31857/S0032823521040111
6. Темнов А.Н., Ян Наинг У. Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей криогенную жидкость // Электронный журнал «Труды МАИ». Механика. 2023. № 133; <https://trudymai.ru/>
7. Stewartson K., Roberts P.H. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body // J. Fluid Mech. 1963. V. 17, N 1. P. 1–20.
8. Алексеев А.В. Движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости // Известия Самарского научного центра РАН. Механика и машиностроение. 2007. Т. 9, № 3. С. 671–676.
9. Карапетян А.В., Проконина О.В. Об устойчивости равномерных вращений волчка с полостью, заполненной жидкостью, на плоскости с трением // Прикл. матем. мех. 2000. Т. 64, № 1. С. 85–91.
10. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика шара Чаплыгина с полостью, заполненной жидкостью // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 1. С. 103–111.
11. Маркеев А.П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1986. Т. 21, № 1. С. 64–65.
12. Богоявленский О.И. Два интегрируемых случая динамики твёрдого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 1359–1363.
13. Борисов А.В., Мамаев И.С. Неголономные динамические системы. Интегрируемость, хаос, странные аттракторы. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
14. Москвин А.Ю. Шар Чаплыгина с ротором: особые решения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 3. С. 345–356.
15. Karavaev Y.L. Spherical Robots: An Up-to-Date Overview of Designs and Features // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2022. V. 18, N 4. P. 709–750; DOI: 10.20537/nd221207
16. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.
17. Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, № 2(392). С.71–132; DOI: 10.4213/rm9346
18. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. 6 Edition. London: MacMillan and Co., 1905.

19. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твёрдого тела в жидкости. Соб. соч. М.: АН СССР, 1954. Т. 1. С. 276–319.
20. *Сальвадори Л.* Об устойчивости движения // *Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей.* 1970. Т. 124, № 6. С. 3–19.
21. *Bizyaev I.A., Mamaev I.S.* Permanent Rotations in Nonholonomic Mechanics. Omnirotational Ellipsoid // *Regul. Chaot. Dyn.* 2022. V. 27, N 6. P. 587–612; DOI: 10.1134/S1560354722060016
22. *Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д.* Идеалы, многообразия и алгоритмы. М.: Мир, 2000.

UDC 531.36

**ON SINGULAR SOLUTIONS IN THE PROBLEM OF ROLLING
OF A BALL WITH A MULTIPLY CONNECTED CAVITY FILLED
WITH AN IDEAL FLUID**

© 2025 V. D. Irtegov,^a T. N. Titorenko^b

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
Lermontov st., 134, Irkutsk 664033, Russia*

E-mails: ^airtegov@icc.ru, ^btitor@icc.ru

Received 30.07.2024, revised 04.11.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. The differential equations describing the rolling without slipping of a balanced, dynamically asymmetric ball on an unmoving horizontal plane in a gravitational field are studied. The ball contains a multiply connected cavity completely filled with a homogeneous incompressible ideal fluid moving vortex free. Using the Routh-Lyapunov method and symbolic computations, singular solutions of the equations of motion are found, their mechanical interpretation is given, and their stability is analyzed. The case is considered when the mechanical system is acted by a linear potential force field.

Keywords: nonholonomic system, singular solutions, stability, symbolic computations.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.406

REFERENCES

1. Zhukovskij N.K. O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoj kapel'noj zhidkost'yu [On the motion of a rigid body having cavities filled with a homogeneous droplet liquid]. Moscow: MGTU im. N. E. Baumana Press, 2017 (in Russian).
2. Poincaré H. Sur la précession des corps déformables. *Bull. Astr.*, 1910, Vol. 27, pp. 321–356.
3. Stekloff V. A. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 1909, Vol. 1, No. 3, pp. 145–256.
4. Pivovarov M. L., Chernousko F. L. Kolebaniya tverdogo tela s toroidal'noj polost'yu, zapolnennoj vyazkoj zhidkost'yu [The oscillations of a rigid body having a toroidal cavity filled with viscous liquid]. *Prikl. Matem. Mekh.*, 1990, Vol. 54, No. 2, pp. 201–206 (in Russian).
5. Ol'shanskii V. Yu. Semi-regular precession of an asymmetrical rigid solid body filled with a liquid. *Mech. Solids*, 2021, Vol. 56, No. 8, pp. 1500–1513; DOI: 10.3103/S0025654421080148]
6. Temnov A. N., Yan Naing U. Ob ustojchivosti statsionarnogo vrashcheniya tverdogo tela s polost'yu, sodержashchej kriogennuyu zhidkost' [On the stability of steady rotation of a rigid body having a cavity with a cryogenic liquid]. *Elektronnyj zhurn. "Trudy MAI". Mekhanika*, 2023, No. 133 (in Russian); <https://trudymai.ru/>
7. Stewartson K., Roberts P.H. On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. *J. Fluid Mech.*, 1963, Vol. 17, No. 1, pp. 1–20.
8. Alekseev A.V. Dvizhenie sputnika-girostata, sodержashchego polost' s zhidkost'yu bol'shoj vyazkosti [The motion of a satellite-gyrostata containing a cavity with a high-viscosity liquid] *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN. Mekhanika i Mashinostroenie*, 2007, Vol. 9, No 3, pp. 671–676 (in Russian).

9. Karapetyan A.V., Prokonina O.V. The stability of permanent rotations of a top with a cavity filled with liquid on a plane with friction. *J. Appl. Math. Mech.*, 2000, Vol. 64, No. 1, pp. 81–86; DOI: 10.1016/S0021-8928(00)00028-9
10. Borisov A.V., Mamaev I.S. Dinamika shara Chaplygina s polost'yu, zapolnennoj zhidkost'yu [The dynamics of the Chaplygin ball with a fluid-filled cavity]. *Nelinejnaya dinamika*, 2012, Vol. 8, No. 1, pp. 103–111 (in Russian).
11. Markeev A.P. Ob integriruемости zadachi o kachenii shara s mnogosvyaznoj polost'yu, zapolnennoj ideal'noj zhidkost'yu [Integrability of the problem of rolling of a ball with a multiply connected cavity filled with an ideal fluid] *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1986, Vol. 21, No. 1, pp. 64–65 (in Russian).
12. Bogoyavlenskij O.I. Dva integriruemykh sluchaya dinamiki tverdogo tela v silovom pole [Two integrable cases of rigid body dynamics in a force field]. *Dokl. AN SSSR*, 1984, Vol. 275, No. 6, pp. 1359–1363 (in Russian).
13. Borisov A.V., Mamaev I.S. Negolonomnye dinamicheskie sistemy. Integriruemost', kaos, strannye attraktory / Sbornik statej [Nonholonomic dynamical systems. Integrability, chaos, strange attractors / Collect. papers]. Moscow–Izhevsk: Inst. Komp'Yuter. Issled., 2002 (in Russian).
14. Moskvina A.Yu. Shar Chaplygina s girostatom: osobyje resheniya [Chaplygin's ball with a gyrostat: singular solutions]. *Nelinejnaya dinamika*, 2009, Vol. 5, No. 3, pp. 345–356 (in Russian).
15. Karavaev Y. L. Spherical Robots: An Up-to-Date Overview of Designs and Features. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2022, Vol. 18, No. 4, pp. 709–750; DOI: 10.20537/nd221207
16. Bolsinov A.V., Fomenko A.T. Integrable Hamiltonian Systems. Geometry, Topology, Classification. Chapman & Hall/CRC, 2004.
17. Bolsinov A.V., Borisov A.V., Mamaev I.S. Topology and stability of integrable systems. *Russian Math. Surveys*, 2010, Vol. 65, No. 2, pp. 259–318; DOI: 10.1070/RM2010v065n02ABEH004672
18. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. 6 Edition. London: MacMillan and Co., 1905.
19. Lyapunov A.M. O postoyannykh vintovykh dvizheniyakh tverdogo tela v zhidkosti. Sobr. soch. [On permanent helical motions of a rigid body in fluid. Collected Works] Moscow: AN SSSR, 1954, Vol. 1, pp. 276–319 (in Russian).
20. Salvadori L. Sulla stabilità del movimento. *Matematiche*, 1969, No 24, pp. 218–238.
21. Bizyaev I.A., Mamaev I.S. Permanent Rotations in Nonholonomic Mechanics. Omnirotational Ellipsoid. *Regul. Chaot. Dyn.*, 2022, Vol. 27, No. 6, pp. 587–612; DOI: 10.1134/S1560354722060016
22. Cox D., Little J., O'Shea D. Ideals, Varieties, and Algorithms. N. Y.: Springer, 1998

УДК 517.9:541.121:541.126

**ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ И ЯВНОЕ ЗАДАНИЯ МЕДЛЕННЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ДВУХ ЗАДАЧАХ
ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ**

© 2025 Л. И. Кононенко

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: larak@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 09.01.2024 г.; после доработки 30.06.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

При использовании метода интегральных многообразий для решения конкретных задач центральным становится вопрос о вычислении функции, описывающей интегральное многообразие. Одним из способов приближённого вычисления функции является использование асимптотического разложения её по степеням малого параметра. При этом функцию можно задать или явно, или параметрически, или неявным образом. В работе приведены примеры двух моделей, взятых из химической кинетики, в сингулярно возмущённых системах которых интегральные многообразия задаются явно и параметрически.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, сингулярно возмущённые системы, интегральные многообразия, листы медленной поверхности, малый параметр, химическая кинетика.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.407

ВВЕДЕНИЕ

Теория сингулярно возмущённых систем дифференциальных уравнений традиционно связывалась с проблемами нелинейной механики. Системы с малым параметром естественным образом возникают при моделировании и исследовании объектов, характерной особенностью которых является наличие процессов, имеющих существенно различающиеся скорости, например, в задачах химической кинетики. Для качественного анализа динамических характеристик моделей химической кинетики целесообразно использовать метод интегральных многообразий, который позволяет свести качественный анализ полной системы к исследованию интегрального многообразия медленных движений и качественному анализу системы меньшей размерности на интегральном многообразии (см. [1]–[6]). Заметим также, что очень полезна книга [7], состоящая из двух частей, в которых рассматриваются методы качественной теории в нелинейной динамике. Эта книга посвящена качественной теории многомерных систем дифференциальных уравнений (необязательно с малым параметром) как с простой, так и со сложной динамикой. Подобные вопросы также рассматривались в [8]–[12]. Качественный анализ системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром сводится к исследованию системы по схеме, которую мы вкратце опишем далее в разд. 1 работы (см. [3]).

При использовании метода интегральных многообразий для решения конкретных задач центральным становится вопрос о вычислении функции, описывающей интегральное многообразие. Одним из способов приближённого вычисления функции является использование асимптотического разложения её по степеням малого параметра.

Напомним способы задания функции (см. [13]): явное задание $y = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$; параметрическое $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$; неявное $F(x, y) = 0$.

Например, окружность можно задать тремя способами:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = R^2 & \text{ — неявное задание; } x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi \text{ — параметрическое;} \\ y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y = -\sqrt{R^2 - x^2} & \text{ — явное.} \end{aligned}$$

В данной работе разд. 1 и 2 посвящены явному заданию интегрального многообразия; разд. 3, 4 — параметрическому заданию.

1. ЯВНОЕ ЗАДАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Рассматривается сингулярно возмущённая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t, \varepsilon), \quad \varepsilon \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t, \varepsilon) \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$ — медленные, $y \in \mathbb{R}^n$ — быстрые переменные, f, g — достаточно гладкие функции, $t \in \mathbb{R}$, ε — положительный малый параметр.

Под интегральным многообразием системы (1) понимается некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, состоящее из интегральных кривых этой системы.

Если в системе (1) положить $\varepsilon = 0$, то получим порождающую или вырожденную систему

$$\dot{x} = f(x, y, t, 0), \quad 0 = g(x, y, t, 0). \quad (2)$$

Уравнение $g(x, y, t, 0) = 0$ задаёт медленную поверхность. Это уравнение медленной поверхности может иметь одно или несколько решений, каждое из которых задаёт лист медленной поверхности.

Далее выполняем следующие шаги.

Шаг I. Описание листов интегрального многообразия. Интегральное многообразие в нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) задаётся уравнением $g(x(t), y(t), t, 0) = 0$, называемым уравнением медленной поверхности. Оно может иметь несколько решений $y = \varphi_i(x, t)$, $i = 1, \dots, l$, задающих листы медленной поверхности.

Шаг II. Нахождение границ листов медленной поверхности. Граница листа находится как пересечение медленной поверхности $g(x(t), y(t), t, 0) = 0$ с поверхностью, заданной уравнением

$$\det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t), t, 0) \right) = 0.$$

Шаг III. Выяснение характера устойчивости листов медленной поверхности. Для листа $y = \varphi_i(x, t)$ характер устойчивости зависит от знака собственных чисел матрицы

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x(t), \varphi_i(x, t), t, 0), \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Лист устойчив, если действительные числа всех собственных чисел отрицательны. Лист неустойчив, если действительные части всех собственных чисел положительны. Лист условно устойчив, если среди действительных чисел имеются и положительные, и отрицательные (но нет нулевых). В случае нулевых действительных частей собственных чисел необходимо рассматривать первое приближение по ε медленной поверхности.

Шаг IV. Качественный анализ динамики медленной подсистемы на каждом из листов медленной поверхности с выяснением следующих основных особенностей динамики: нахождение стационарных состояний, их типа, условий множественности, колебаний разных видов, в том числе, релаксационных, решений-уток. Если траектория содержит постоянно чередующиеся медленные и быстрые участки, она описывает релаксационные колебания. Решения-утки —

это траектории, переходящие с притягивающего участка медленной кривой на отталкивающий участок. Подробно решения-утки и релаксационные колебания описываются в [14]–[18].

Шаг V. Качественный анализ системы в целом. Учитываем тот факт, что близость решений полной и вырожденной систем может быть только на конечном промежутке $[0, T]$.

Во многих задачах невозможно найти корень уравнения $0 = g(x, y, t, 0)$ в явном виде $y = h_0(x, t)$, поскольку это уравнение оказывается либо трансцендентным, либо полиномом высокой степени относительно y . Неявная форма задания обладает очевидными недостатками по сравнению с явной. Зачастую решение уравнения удаётся записать в параметрической форме.

Листы интегрального многообразия медленных движений (или медленного интегрального многообразия системы (1)) являются уточнением при учёте малого параметра ε листов медленной поверхности и получаются из них с помощью асимптотического разложения по степеням ε ([3]):

$$h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \dots + \varepsilon^k h_k(x, t) + \dots, \quad (3)$$

где коэффициенты разложения $h_k(x, t)$ вычисляются по следующей рекуррентной формуле

$$h_k = -B^{-1} \left[g^{(k)} - \frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\partial h_p}{\partial x} f^{(k-1-p)} \right], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

здесь $B = \det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0) \right) \neq 0$.

Рассмотрим систему (1) при выполнении следующих условий.

I. Уравнение $g(x, y, t, 0) = 0$ имеет изолированное решение $y = h_0(x, t)$ при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^m$.

II. В области

$$\Omega_0 = \{(x, y, t, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^m, \|y - h_0(x, t)\| < \rho, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$$

функции f, g и h_0 равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по переменным до $(k+2)$ -го порядка включительно ($k \geq 0$).

III. Собственные значения $\lambda_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, n$) матрицы $\frac{\partial g}{\partial y}(x, h_0(x, t), t, 0)$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re} \lambda_i(x, t) \leq -2\gamma < 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1 [3]. Пусть выполняются условия I–III. Тогда существует такое ε_1 ($0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$), что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ система (1) имеет интегральное многообразие медленных движений $y = h(x, t, \varepsilon)$, представленное формулой (3) с коэффициентами (4), движение по которому описывается уравнением $\dot{x} = f(x, h(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon)$.

2. ПРИМЕР 1

2.1. Описание модели

Рассматривается детальный механизм с бимолекулярной реакцией на поверхности катализатора [3]. Учитываются два возможных механизма реакции: реакция на поверхности катализатора между адсорбированными веществами (адсорбционный механизм) и реакция между адсорбированным веществом и веществом, находящимся в газовой фазе (ударный механизм). Предполагается, что реакция идёт при постоянном давлении.

Кинетической схеме модели соответствует система дифференциальных уравнений с безразмерными переменными

$$\dot{x}_1 = a - x_1 - \alpha[\omega_1 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_1], \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = b - x_2 - \alpha[\omega_2 + \omega_4 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_2], \quad (6)$$

$$\dot{y}_1 = \beta(2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4), \quad (7)$$

$$\dot{y}_2 = \beta(\omega_2 - \omega_3). \quad (8)$$

Переменными

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \kappa_1 x_1 (1 - y_1 - \kappa_1 y_2)^2 - \kappa_{-1} y_1^2, \\ \omega_2 &= \kappa_2 x_2 (1 - y_1 - y_2) - \kappa_{-2} y_2, \quad \omega_3 = y_1 y_2, \quad \omega_4 = \kappa_4 x_2 y_1 \end{aligned}$$

обозначены обезразмеренные скорости четырёх стадий.

Область изменения переменных имеет вид

$$W = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b, 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, y_1 + y_2 \leq 1\}.$$

Скорость реакции на поверхности катализатора существенно выше, чем скорости адсорбции. Предполагается, что основным механизмом реакции является адсорбционный, а ударный механизм учитывается как дополнительный. Поэтому мы используем при анализе модели следующую иерархию параметров:

$$\kappa_{-2}, \kappa_{-1}, \kappa_4 \ll \kappa_1, \kappa_2 \ll 1.$$

Константы десорбции предполагаются малыми сравнительно с константами адсорбции. Кроме того, $\alpha \ll \beta$. Нас будет интересовать ситуация, в которой $\varepsilon = 1/\beta \ll \kappa_{-2}, \kappa_{-1}, \kappa_4$.

Эти предположения о параметрах системы позволяют считать, что

$$\kappa_{-1} = \mu \kappa_{-1}^0, \quad \kappa_{-2} = \mu \kappa_{-2}^0, \quad \kappa_4 = \mu \kappa_4^0,$$

где μ – малый параметр, а $\kappa_{-1}^0, \kappa_{-2}^0, \kappa_4^0$ – величины порядка $o(1)$.

2.2. Медленная поверхность

Систему (5)–(8) перепишем в следующей форме

$$\dot{x} = f(x, y, \nu, \mu), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y, \nu, \mu),$$

где

$$x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2), \quad \nu = (a, b, \alpha, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{-1}^0, \kappa_{-2}^0, \kappa_4^0), \quad f = (f_1, f_2), \quad g = (g_1, g_2),$$

а ε, μ – независимые малые параметры (заметим, что в системе может быть несколько малых параметров [19]). Функции f_1, f_2, g_1, g_2 имеют вид

$$\begin{aligned} f_1 &= a - x_1 - \alpha(\omega_1 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_1), \\ f_2 &= b - x_2 - \alpha(\omega_2 + \omega_4 + (\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)x_2), \\ g_1 &= 2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4, \quad g_2 = \omega_2 - \omega_3. \end{aligned}$$

Интегральное многообразие в нулевом приближении $\varepsilon = 0$, или медленная поверхность, задаётся уравнением $g(x, y, \nu, \mu) = 0$. Как было показано выше, оно может иметь одно или несколько

решений, каждое из которых задаёт лист медленной поверхности. Во всех внутренних точках листа медленной поверхности выполняется условие

$$\det \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, \nu, \mu) \right) \neq 0.$$

Уравнения медленной поверхности для системы (5)–(8) имеют вид $2\omega_1 - \omega_3 - \omega_4 = 0$, $\omega_2 - \omega_3 = 0$ или, более подробно

$$\begin{aligned} 2[\kappa_1 x_1(1 - y_1 - y_2)^2 - \mu \kappa_{-1}^0 y_1^2] - y_1 y_2 - \mu \kappa_4^0 x_2 y_1 &= 0, \\ \kappa_1 x_2(1 - y_1 - y_2)^2 - \mu \kappa_{-2}^0 y_2 - y_1 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$z_1 = 1 - y_1 - y_2, \quad z_2 = y_1 y_2, \quad \omega_1 = \kappa_1 x_1, \quad \omega_2 = \kappa_2 x_2.$$

В этих обозначениях уравнения медленной поверхности при $\mu = 0$ имеют вид

$$2\omega_1 z_1^2 - z_2 = 0, \quad \omega_2 z_1 - z_2 = 0.$$

Эта система уравнений имеет два решения

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0; \tag{9}$$

$$z_1 = \frac{\omega_2}{2\omega_1}, \quad z_2 = \frac{\omega_2^2}{2\omega_1}. \tag{10}$$

Первое решение задаёт две поверхности

$$\begin{aligned} y_1 = 0, \quad y_2 = 1; \\ y_1 = 1, \quad y_2 = 0. \end{aligned}$$

Второе решение также определяет две поверхности. Они задаются системой уравнений

$$z_1 = 1 - y_1 - y_2 = \frac{\omega_2}{2\omega_1}, \quad z_2 = y_1 y_2 = \frac{\omega_2^2}{2\omega_1}, \tag{11}$$

т. е.

$$\omega_1 = \frac{y_1 y_2}{2(1 - y_1 - y_2)^2}, \quad \omega_2 = \frac{y_1 y_2}{1 - y_1 - y_2}.$$

В [4] было показано, что медленная поверхность системы (5)–(8), задаваемая уравнениями (9)–(10) и (11), состоит из 10 листов; при $\kappa_{-1} \neq 0$, $\kappa_4 \neq 0$ в физической области W лежат только три листа медленной поверхности, а при $\kappa_{-1} = \kappa_4 = 0$ только четыре листа (в этом случае лист $y_1 = 1$, $y_2 = 0$ лежит на границе области W), причём мы видим, что все они задаются явным образом.

3. ПАРАМЕТРИЗОВАННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ

Рассмотрим дифференциальные уравнения из [2]:

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, t, \varepsilon), \tag{12}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n+m}$, $t \in \mathbb{R}$ — переменная, имеющая смысл времени, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, \dot{x} — производная по времени, вектор-функция f является $(m+n)$ -мерной достаточно гладкой в интересующей области изменения переменных.

Под интегральным многообразием системы (12) понимается некоторое множество в пространстве $\mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}$, состоящее из интегральных кривых этой системы.

В [4] приведён алгоритм построения асимптотического разложения интегрального многообразия в параметрическом виде. Медленное интегральное многообразие и уравнение движения по нему ищем в параметрическом виде

$$x = P(s, t, \varepsilon), \quad \dot{s} = S(s, t, \varepsilon).$$

Функции P и S находим в виде асимптотических рядов по степеням ε :

$$\begin{aligned} x = P(s, t, \varepsilon) &= \varphi(s, t) + \varepsilon P_1(s, t) + \dots + \varepsilon^k P_k(s, t) + \dots, \\ \dot{s} = S(s, t, \varepsilon) &= S_0(s, t) + \varepsilon S_1(s, t) + \dots + \varepsilon^k S_k(s, t) + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\varphi(s, t)$ является решением уравнения $f(x, t, 0) = 0$.

Мы не будем подробно описывать этот алгоритм, а лишь перечислим шаги. Дифференцируя x по t и подставляя в равенство (12), раскладывая правую часть в ряд Тейлора с центром разложения в точке $(\varphi(s, t), t, 0)$, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , найдём сначала коэффициент $P_1(s, t)$ асимптотики порядка ε для интегрального многообразия $x = P(s, t, \varepsilon)$ и член $S_0(s, t)$ асимптотики нулевого порядка для $\dot{s} = S(s, t, \varepsilon)$, а затем и следующие члены разложения $P_2, S_1, P_3, S_2, \dots$, которые вычисляются аналогичным образом. Поскольку вычисление коэффициентов $P_{i+1}, S_i, i = 1, 2, \dots$, достаточно громоздко, а для конкретных систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы химической кинетики, достаточно знать лишь главные члены разложений, мы не будем выписывать их выражения.

Условия, при которых будет построена асимптотика решения системы (12), следующие.

I. Пусть функция $f(x, t, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируема в области $\mathcal{D}(x, t, \varepsilon) = \mathcal{D}(x, t) \times (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0)$, где $\mathcal{D}(x, t)$ – некоторая область в пространстве переменных (x, t) , ε_0 – некоторая постоянная.

II. Пусть вырожденное уравнение $f(x, t, 0) = 0$ имеет для всех $t \in \mathbb{R}$ решение, которое может быть записано в параметрическом виде $x = \varphi(s, t)$, где $s \in \mathbb{R}^m$ – параметр, а для функции $\varphi(s, t)$ в некоторой области пространства переменных $\mathcal{D}(s, t) = \mathcal{D}(s) \times (-\infty < t < \infty)$, где $\mathcal{D}(s)$ – некоторая область пространства параметров, должны быть выполнены следующие условия:

1) функция $\varphi(s, t)$ достаточно гладкая,

2) ранг матрицы $\varphi_s(s, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t)$ равен m , т. е. числу параметров.

III. Пусть кратность собственного значения $\lambda = 0$ равна m , а остальные n собственных значений $\lambda_i(s, t)$ матрицы $A(s, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(s, t), t, 0)$ удовлетворяют в $\mathcal{D}(s, t)$ условию

$$\operatorname{Re} \lambda_i(s, t) < 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$\operatorname{rank} A(s, t) = n$, и m -кратному нулевому собственному значению соответствует m линейно независимых собственных векторов.

Теорема 2 [20]. Пусть в области $\Omega = \{(s, t, \varepsilon) \mid s \in \mathbb{R}^m, t \in \mathbb{R}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ выполняются условия I, II, III. Тогда существует такое ε_1 , что $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ и для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ уравнение (12) имеет интегральное многообразие медленных движений $x = P(s, t, \varepsilon)$, представленное в параметрическом виде с параметром $s \in \mathbb{R}^m$, оно единственно, и движение по нему описывается уравнением $\dot{s} = S(s, t, \varepsilon)$.

4. ПРИМЕР 2

Рассмотрим пример системы обыкновенных дифференциальных уравнений, взятой из конкретной задачи химической кинетики, который показывает, что постановка задачи, рассмотренной в пункте 3, не надуманная.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_7^2 - b_2x_6x_1 - b_8x_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= b_4x_7 - b_5x_2 - b_8x_1x_2 - b_9x_2x_3 - b_{12}x_2x_4, \\ \dot{x}_3 &= b_2x_6x_1 - 2b_3x_3^2 - b_6x_3 + b_2x_5 - b_9x_2x_3 + 2b_{10}x_4x_5 + b_{12}x_2x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_3^2 - b_{10}x_4x_5 - b_{12}x_2x_4, \\ \dot{x}_5 &= b_6x_3 - b_7x_5 - b_{10}x_4x_5 - b_{11}x_5, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$x_6 = 1 - x_3 - x_4 - x_5, \quad x_7 = 1 - \sum_{i=1}^5 x_i.$$

Область изменения переменных имеет вид

$$W = \left\{ (x_1, \dots, x_5) \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 5, \sum_{i=1}^5 x_i \leq 1 \right\}.$$

Эта система соответствует некоторой модели реакции каталитического окисления. Подробный её анализ дан в [4]. При анализе модели использована следующая иерархия параметров:

$$b_{10} > b_8 \gg b_7 > b_1, b_2, b_3, b_4, b_6, b_{11}, b_{12} \gg b_5, b_9,$$

где коэффициенты b_{10}, b_8 на несколько порядков больше остальных. Обозначая $\varepsilon = \frac{1}{b_{10}}, \mu = \frac{1}{b_8}$, перепишем систему (14) в виде $\varepsilon \dot{x} = f(x, \varepsilon)$. Функция f является полиномом, следовательно, условие I выполнено. Полагая $\varepsilon = 0, \mu = 0$, имеем систему

$$\begin{cases} 0 = -x_1x_2, \\ 0 = -x_1x_2, \\ 0 = 2x_4x_5, \\ 0 = -x_4x_5, \\ 0 = -x_4x_5. \end{cases}$$

Матрица Якоби для правых частей вырожденной системы есть

$$A_0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} -x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_5 & 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -x_5 & -x_4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A_0 равен 2. Для того чтобы выполнялось условие II, необходимо ввести параметр $s \in \mathbb{R}^3$.

Запараметризуем решение уравнения $f(x, 0) = 0$ следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -s_1, \\ x_3 = s_1 + s_2, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = -s_3. \end{cases}$$

В терминах постановки задачи это означает, что

$$\varphi_1(s) = 0, \quad \varphi_2(s) = -s_1, \quad \varphi_3(s) = s_2 + s_3, \quad \varphi_4(s) = 0, \quad \varphi_5(s) = -s_3,$$

где $s = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ ($m = 3$). Матрица Якоби для правых частей системы есть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $\text{rank} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 3$. Таким образом, выполнены условия I и II.

Осталось проверить условие III. Будем искать собственные числа матрицы $A(s)$, полученной из матрицы $A_0(x)$ посредством линейной замены

$$A(s) = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\text{rank} A(s) = 2$ и кратность собственного числа $\lambda = 0$ равна 3 (т.е. числу параметров, $m = 3$), а остальные 2 собственных числа удовлетворяют условию:

$$\text{Re} \lambda_1 = s_1 < 0, \quad \text{Re} \lambda_2 = s_3 < 0, \quad \text{т. к. } x_i > 0, \quad i = 1, \dots, 5,$$

(рассматриваем x_i , не принадлежащие границе множества).

Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за время, потраченное на прочтение работы, за очень полезные замечания, которые подталкивают к изучению более трудных вопросов качественной теории дифференциальных уравнений. Автор также выражает особую благодарность Я. А. Копылову и А. Б. Кутбаеву за помощь в работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были подробно рассмотрены два способа задания интегральных многообразий для сингулярно возмущённых систем, возникающих в задачах химической кинетики: явный и параметрический.

На основе проведённого анализа можно сделать следующие выводы:

а) явное задание интегральных многообразий является удобным и интуитивно понятным методом, однако не всегда применимо из-за сложности или невозможности нахождения аналитических решений;

б) параметрическое задание многообразий представляет более гибкий и универсальный подход, особенно в случаях, когда уравнения имеют сложную структуру;

в) асимптотический метод разложения функций по малым параметрам доказал свою эффективность для приближённого описания медленных поверхностей и их уточнений. Приведённые примеры из химической кинетики демонстрируют практическую применимость рассмотренных методов. Работа вносит вклад в развитие подходов к решению задач, связанных с многоуровневой динамикой, и может быть полезна при исследовании математических моделей процессов с разномасштабными переменными.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0026). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. Москва: Наука, 1963.
2. Васильева А.В., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущённые уравнения в критических случаях. Москва: Изд-во МГУ, 1978.
3. Гольдштейн В.М., Соболев В.А. Качественный анализ сингулярно возмущённых систем. Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР, 1988.
4. Кононенко Л.И. О гладкости медленных поверхностей сингулярно возмущённых систем // Сиб. журн. индустр. матем. 2002. Т. 5, № 2. С. 109–125.
5. Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущённых систем. Москва: Физматлит, 2009.
6. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сборник. 1948. Т. 22, № 2. С. 193–204.
7. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, Ч. 1, 2004. Ч. 2, 2009.
8. Elboughdiri N., Sultan F., Ishaq M. S., Elmasry Y., Iqbal A. Novel reduction schemes for a dissipative dynamical system: A study on slow invariant manifolds in chemical kinetics // Ain Shams Engrg. J. 2024. V. 15, N 6. Article number 102751.
9. Bykov V., Cherkinsky Y., Gol'dshtein V., Krapivnik N., Maas U. Fast–slow vector fields of reaction–diffusion systems // IMA J. Appl. Math. 2020. V. 85, N 1. P. 67–86.
10. Chumakov G. A., Chumakova N. A., Lashina E. A. Modeling the complex dynamics of heterogeneous catalytic reactions with fast, intermediate, and slow variables // Chem. Engrg. J. 2015. V. 282, P. 11–19.
11. Bykov V., Goldshtein V. Fast and slow invariant manifolds in chemical kinetics // Comput. Math. Appl. 2013. V. 65, N 10. P. 1502–1515.
12. Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications. In: Lect. Notes in Math., Vol. 2114. Cham–Berlin–Heidelberg–London: Springer. 2014.
13. Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Института Математики, Ч. 1, Кн. 2. 1999. Ч. 2, Кн. 1. 2000.
14. Звонкин А.К., Шубин М.А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН, 1984. Т. 39, № 2(236). С. 77–127.
15. Арнольд В.И. и др. Теория бифуркаций. В кн.: Современные Проблемы Математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1986.
16. Chumakov G.A., Chumakova N.A. Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards // Chem. Engrg. J. 2003. V. 91, N 2–3. P. 151–158
17. Соболев В.А., Щепакина Е.А. Траектории-утки в одной задаче теории горения // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1175–1184.
18. Кононенко Л.И., Волокитин Е.П. Качественный анализ одной сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений с малым параметром // Математические заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 3, С. 15–27.

19. *Воропаева Н.В.* Понижение размерности моделей многотемповых динамических систем // Известия РАН, Сер. МММИУ. 1999. Т. 3, № 2. С. 70-102.
20. *Кононенко Л.И.* Параметризованные интегральные многообразия сингулярно возмущённых систем в критическом случае для задач химической кинетики // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1640–1653; <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.115>

UDC 517.9:541.121:541.126

**PARAMETRIC AND EXPLICIT REPRESENTATIONS
OF SLOW INTEGRAL MANIFOLDS IN TWO PROBLEMS
OF CHEMICAL KINETICS**

© 2025 L. I. Kononenko

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Acad. Koptyug pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: larak@math.nsc.ru

Received 09.01.2024, revised 30.06.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. When using the method of integral manifolds to solve specific problems, the central issue becomes the computation of the function describing the integral manifold. One approach to approximate the function is by employing its asymptotic expansion in terms of powers of a small parameter. The function can then be defined explicitly, parametrically, or implicitly. This paper presents examples of two models from chemical kinetics in singularly perturbed systems where integral manifolds are defined explicitly and parametrically.

Keywords: ordinary differential equations, singularly perturbed systems, integral manifolds, sheets of the slow surface, small parameter, chemical kinetics.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.407

REFERENCES

1. Mitropol'skii Yu.A., Lykova O.B. Integral'nye mnogoobraziya v nelineinoy mekhanike [Integral manifolds in nonlinear mechanics]. Moscow: Nauka, 1963 (in Russian).
2. Vasil'eva A.V., Butuzov V.F. Singuliarno vozmushchennyye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh [Singularly perturbed equations in critical cases]. Moscow: MSU, 1978 (in Russian).
3. Gol'dshtein V.M., Sobolev V.A. Kachestvennyi analiz singuliarno-vozmushchennykh sistem [A qualitative analysis of singularly perturbed systems]. Novosibirsk: IM Academy Sciences SSSR, 1988 (in Russian).
4. Kononenko L.I. O gladkosti medlennykh poverkhnostei singuliarno vozmushchennykh sistem [On the smoothness of slow surfaces of singularly perturbed systems] *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2002, Vol. 5, No. 2, pp. 109–125 (in Russian).
5. Voropaeva N.V., Sobolev V.A. Geometricheskaya dekompozitsiya singuliarno vozmushchennykh sistem [Geometric decomposition of singularly perturbed systems]. Moscow: Fizmatlit, 2009 (in Russian).
6. Tikhonov A.N. O zavisimosti reshenii differentsial'nykh uravnenii ot malogo parametra [On the dependence of the solutions of differential equations on a small parameter]. *Mat. Sbornik N. S.*, 1948, Vol. 22, No. 2, pp. 193–204 (in Russian).
7. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Singapore: World Scientific. Part I, 1998. Part II, 2001.
8. Elboughdiri N., Sultan F., Ishaq M. S., Elmasry Y., Iqbal A. Novel reduction schemes for a dissipative dynamical system: A study on slow invariant manifolds in chemical kinetics. *Ain Shams Engrg. J.*, 2024, Vol. 15, No. 6, 102751.
9. Bykov V., Cherkinsky Y., Gol'dshtein V., Krapivnik N., Maas U. Fast–slow vector fields of reaction–diffusion systems. *IMA J. Appl. Math.*, 2020, Vol. 85, No. 1, pp. 67–86.

10. Chumakov G.A., Chumakova N.A., Lashina E.A. Modeling the complex dynamics of heterogeneous catalytic reactions with fast, intermediate, and slow variables. *Chem. Engrg. J. V.*, 2015, Vol. 282, pp. 11–19.
11. Bykov V., Goldshtein V. Fast and slow invariant manifolds in chemical kinetics. *Comput. Math. Appl.*, 2013, Vol. 65(10), pp. 1502–1515.
12. Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications. In: *Lect. Notes in Math.*, Vol. 2114. Cham–Berlin–Heidelberg–London: Springer, 2014.
13. Reshetnyak Yu.G. Kus matematicheskogo analiza [A course in mathematical analysis]. Novosibirsk: IM SO RAN Press. Part 1, Book 2, 1999. Part 2, Book 1, 2000.
14. Zvonkin A.K., Shubin M.A. Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Russ. Math. Surv.*, 1984, Vol. 39, No. 2, pp. 69–131.
15. Arnold V.I. et al. Teoriya bifurkatsii [Bifurcation theory]. In: *Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya*. Moscow: VINITI, 1986 (in Russian).
16. Chumakov G.A., Chumakova N.A. Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards. *Chem. Engrg. J.*, 2003, Vol. 91, No. 2–3, pp. 151–158.
17. Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Duck trajectories in a problem of combustion theory *Differ. Equations*. 1996, Vol. 32, No. 9, pp. 1177–1186.
18. Kononenko L.I., Volokitin E.P. Kachestvennyi analiz odnoi singuliarno vozmushchennoi systemy differentsial'nykh uravnenii s malym parametrom [Qualitative analysis of one singularly perturbed system of differential equations with a small parameter]. *Mat. Zamet. SVFU*, 2024, Vol. 31, No. 3, pp. 15–27 (in Russian).
19. Voropaeva N.V. Ponizhenie razmernosti modelei mnogotempovykh dinamicheskikh sistem [Reduction of dimension in the models of multitempo dynamical systems]. *Izv., Ross. Akad. Estestv. Nauk, Mat. Mat. Model. Inform. Upr.*, 1999, Vol. 3, No. 2, pp. 70–103 (in Russian).
20. Kononenko L.I. Parametrized integral manifolds of singularly perturbed systems in the critical case for problems of chemical kinetics. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, Vol. 16, pp. 1640–1653.

УДК 519.876.5

ИНДИВИДУУМ-ОРИЕНТИРОВАННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИЧЕСКИХ ОРВИ В ГОРОДАХ РФ: МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ И ОЦЕНКИ ПРИМЕНИМОСТИ

© 2025 А. И. Корзин^{1,a}, Н. А. Чичкова^{1,b}, Т. И. Капарулин^{1,c},
В. Н. Леоненко^{1,2,d}

¹ Университет ИТМО,

Кронверкский просп., 49, лит. А., г. Санкт-Петербург 197101, Россия,

² НИИ гриппа им. Смородиной Минздрава РФ,

ул. проф. Попова, 15/17, г. Санкт-Петербург 197022, Россия

E-mails: ^acorzin.an@gmail.com, ^bnachichkova@itmo.ru, ^ckaparulinti@mail.ru,
^dvnleonenko@itmo.ru

Поступила в редакцию 28.03.2024 г.; после доработки 30.10.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Индивидуум-ориентированные модели эпидемических вспышек завоевали широкую популярность среди исследователей общественного здравоохранения благодаря их способности описывать эпидемический процесс с высокой детализацией. Основным недостатком таких моделей является необходимость подготовки большого количества детализированных данных в качестве входа модели, а также выделения мощных вычислительных ресурсов для выполнения расчётов. Как следствие, из-за недостаточности данных и больших временных затрат при идентификации таких моделей их объяснительная и предсказательная сила может быть поставлена под вопрос. В настоящем исследовании предлагается метод разработки индивидуум-ориентированных моделей эпидемических вспышек ОРВИ, которые могут быть удовлетворительно откалиброваны на имеющиеся данные демографической и эпидемической статистики в городах РФ и позволяют получить результаты моделирования за разумное время за счёт применения процедуры сэмпинга. Прозрачность модельной структуры, применение модульного принципа на уровне алгоритма (разделение демографической и эпидемической составляющих), а также открытость кода программы позволяет обеспечить принцип воспроизводимости результатов моделирования, независимую проверку результатов и потенциальное их переиспользование со стороны исследователей коллективов, занимающихся смежными темами. Оценка применимости метода произведена на примере моделирования вспышек гриппа в Самаре и Челябинске.

Ключевые слова: синтетические популяции, индивидуум-ориентированные модели, эпидемиология, грипп, COVID-19.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.408

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Постановка проблемы

Ежегодные всплески заболеваемости острыми респираторными инфекциями, такими как грипп и COVID-19, являются серьёзной социально-экономической проблемой, поскольку они приводят к повышению смертности населения и финансовым потерям из-за временной нетрудоспособности заболевших. Помимо этого, как показала пандемия коронавируса SARS-CoV-2, отдельные вспышки заболеваемости большой интенсивности могут приводить к перегруженности больниц и нарушению привычного рабочего графика и образа жизни людей. Эти последствия крайне негативны для экономики и здоровья населения. Для оценки эффективности

мер борьбы с эпидемическими вспышками органами здравоохранения используются математические и статистические модели, с помощью которых производится ретроспективный анализ и прогнозирование динамики острых респираторных вирусных инфекций.

Проблемами моделирования распространения эпидемических ОРВИ занимается большое количество научных коллективов по всему миру, с концентрацией большинства центров исследований в США и в Европе. Количество исследований по моделированию ОРВИ ощутимо растёт каждый раз при начале циркуляции в человеческих популяциях новых штаммов пандемического гриппа, например, A(H1N1)pdm09, а также других ОРВИ, таких как различные варианты SARS-CoV. Одним из старейших и наиболее распространённых типов математических моделей являются компартментальные модели, основанные на системах разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений (SIR-модели и их модификации, логистическое уравнение). Основным плюсом компартментальных моделей является их простота и, как следствие, высокая скорость получения результатов моделирования и лёгкость их интерпретации. Между тем, ряд задач, связанных с детальным анализом эпидемических вспышек (на уровне контактов отдельных индивидов) не может быть решён с помощью компартментальных моделей. В силу этого, а также вследствие увеличения доступных компьютерных мощностей, с начала 2000-х гг. всё большую популярность приобретают стохастические мультиагентные (индивидуум-ориентированные) модели. Обзор по пространственным подходам к моделированию COVID-19 может быть найдён в [1], мультиагентные модели для широкого класса инфекций рассмотрены в [2].

Достоинством мультиагентных моделей является возможность получить динамическую картину пространственного распространения эпидемии, а также отслеживать динамику вспышки эпидемии с точностью до одного индивида, отвечая на вопрос «кто кого инфицировал и когда». Все это позволяет обнаружить неочевидные зависимости между характером течения эпидемии и демографическими параметрами. В частности, индивидуум-ориентированные модели дают возможность детального воспроизведения сети контактов населения города, которая оказывает значительное влияние на динамику заболеваемости. Структура контактов отдельного индивида зависит от количества людей, которых он встречает за день, и мест, которые он посещает. Построение точной сети контактов для каждого конкретного города позволяет количественно оценить связь между структурой мобильности людей и темпами роста числа случаев заболевания во время вспышки эпидемии.

Несмотря на то что в теории мультиагентные модели дают исследователям почти неограниченные возможности в плане детализации моделирования, на практике их применение сталкивается с множественными ограничениями, такими как недоступность данных для калибровки, повышенная неопределённость результатов моделирования из-за слишком большого количества параметров, значительные временные затраты для вычислительных экспериментов по сравнению с SIR-моделями (как следствие, затруднение в проведении анализа чувствительности и полноценной калибровки — в целом, решения любых задач, связанных с множественным повторным запуском моделей). В частности, большинство реальных практически значимых результатов, связанных с моделированием динамики COVID-19, были получены с помощью SIR-моделей [3], [4] или даже более простых моделей, таких как дифференциальные уравнения типа Ферхюльста — Пирла, несмотря на наличие у многих коллективов готовых решений на основе высокопроизводительных мультиагентных модельных комплексов, в частности, готовившихся для ответа на пандемии новых штаммов гриппа [5].

Пандемия COVID-19 и опыт использования мультиагентных моделей для прогнозирования динамики этого заболевания привела к широкой дискуссии в научной среде на тему, возможно ли в принципе опираться на результаты таких моделей для планирования мер сдерживания заболеваемости. В частности, исследователями в дискуссии [6] отмечалось, что детализированные модели, основанные на плохих данных, могут демонстрировать некорректные результаты, при этом вызывая доверие за счёт большого количества якобы учтённых

в них факторов. При этом некорректность результатов будет сложно обнаружить при отсутствии кода модели в открытом доступе или хотя бы детального описания алгоритма модели, что является частым случаем. Отечественными исследователями отмечается, что недостатком мультиагентных моделей «может стать избыточная подробность, которая усложняет общую задачу моделирования и приводит к созданию чрезмерно сложных моделей с избыточными параметрами, которые не вносят существенного вклада в результаты моделирования», а также тот факт, что «в большинстве случаев нет возможности критически осмыслить модель ввиду наличия общего, часто поверхностного описания её устройства, приводимого в публикации, и отсутствия доступа к исходному коду модели» [2]. Таким образом, несмотря на наличие большого количества мультиагентных моделей, описанных в научных публикациях, лишь немногие из них могут быть использованы для решения задач реального эпидемиологического надзора.

1.2. Существующие решения

Анализ публикаций, посвящённых проблеме, позволяет сформулировать следующие требования к мультиагентным моделям, результаты работы которых призваны использоваться в принятии решений органами здравоохранения [7]:

— Допущения, сделанные в модели, а также лежащие в её основе механизмы, должны быть детально изложены.

— Должна быть обеспечена максимальная прозрачность модели путём предоставления более подробной информации о базовых механизмах модели и сделанных предположениях, оптимально — благодаря использованию стандартного протокола (например, ODD), а также путём предоставления кода моделирующей программы для загрузки.

— Модель должна быть валидирована, при этом сама процедура валидации должна быть подробно описана. Даже при отсутствии необходимых данных валидация может быть проведена — в виде систематического тестирования модели, сравнения её с другими моделями или экспертной оценки.

— Отдельное внимание должно быть уделено структуре имитируемой популяции. В случае если характеристики или поведение искусственной популяции не отражают характеристики или поведение реальной популяции адекватным образом, это приведёт к ограниченной применимости результатов моделирования к изучению реальной популяции.

В табл. 1 приведён ряд комплексов для мультиагентного моделирования эпидемиологических ОРВИ, получивших наиболее широкое распространение и доступных для использования.

Основным препятствием к использованию указанных моделей для городов РФ является необходимость обеспечения для них входных статистических данных заданных форматов. В исследовании по динамике гриппа в Нью-Йорке авторы создают синтетическую популяцию в масштабе города, объединяя данные микропереписи (PUMS Microsurvey) и отраслевые реестры — это исследование одним из первых опиралось на синтетические популяции стандарта RTI. Данные популяции созданы для всей территории США, ряда стран Европы и Юго-Восточной Азии и предоставлены желающим в открытом доступе. В частности, они являются стандартным видом входных данных для модельного комплекса FRED. Опыт работы авторов с FRED показал его применимость к задачам моделирования динамики гриппа в Санкт-Петербурге [15] — при условии подготовки популяций в формате RTI. В то же время критической проблемой оказалось закрытие доступа к новым версиям комплекса и документации к ней, что не позволило продолжить применение модели для моделирования динамики ОРВИ в городах РФ. OpenABM создаёт свои синтетические домохозяйства и возрастные структуры на основе таблиц панельных исследований, которые в случае РФ могут быть конвертированы из ранее собранных популяций стандарта RTI или сгенерированы заново из данных Росстата. MATSIM+EPISIM опираются на чрезвычайно подробные модели поведения населения города, которые требуют большого количества данных, по большей части недоступных для РФ,

Таблица 1

Комплексы мультиагентного моделирования ОРВИ

Модель	Описание	Население	Социальная структура
FRED (Framework for Reconstructing Epidemic Dynamics, 2013) [8]	Открытая агентная модель для США на основе синтетической популяции. Создана на базе моделей гриппа MIDAS (Университет Питтсбурга и Университет Карнеги – Меллона).	Синтетические популяции для всех округов США (~300 млн агентов), пространственные регионы (сетка 1 км ²).	Домохозяйства, школы (в т. ч. классы), рабочие места (офисы), жилые районы; шаг 1 день; SEIR с поддержкой нескольких штаммов ОРВИ.
Модель динамики гриппа в синтетических популяциях [9]	Количественная оценка роли поездок в метро Нью-Йорка в распространении гриппа; сравнение мер, ориентированных на транспорт, с менее конкретными мерами контроля.	7,85 млн синтетических агентов (пять районов города).	Домохозяйства, школы, рабочие места, локальные сообщества, стагус пользования общественным транспортом (да/нет); калибровка по гриппу 1957–1958 гг.
Covasim (2021) [10]	Высокопроизводительная агентная модель для сравнения стратегий сдерживания COVID-19	Обычно 100 тыс.–1 млн агентов; демография стран (данные ООН) или синтетические сети SynthPops.	Многослойные сети (домохозяйства, школы, рабочие места, локальные сообщества, госпитали); возрастная структура; инфекционность на основе вирусной нагрузки.
OpenABM–Covid19 (2021)[11]	Британская агентная модель для оценки мер сдерживания и отслеживания контактов (contact tracing).	По умолчанию 1 млн городских агентов; метапопуляции масштабируются до десятков миллионов индивидов.	Три сети: домохозяйства («малый мир»), профессия (работа/школа), случайные ежедневные контакты; возраст по десятилетиям.
MATSIM+EPISIM [12]	Интегрирует поведение в транспорте (MATSIM) и распространение эпидемии (EPISIM [13]) для количественной оценки риска COVID-19 по видам активности применительно к Монреалю.	~1 млн агентов (25% сэмплирование); пространственно явные ежедневные поездки и активности.	Контакты реконструируются по совместному расположению в общественных местах и транспорте; вероятность заражения пропорциональна длительности контакта и трансмиссивности вируса; учёт сезонности.
REINA (2020) [14]	Финская национальная АБМ для сравнения контрольных мер по сдерживанию COVID-19.	1,6 млн агентов (регион Хельсинки) с возрастной структурой и учётом максимальной нагрузки больниц.	Случайные контакты, зависящие от возраста; ведётся история контактов для отслеживания.

и значительного времени на их предобработку. REINA использует агрегированные демографические данные (возрастное распределение) без синтеза домохозяйств, что делает эту модель наиболее приспособленной для быстрого развёртывания, но ограничивает детальность генерируемых ей выходных данных. Вторым после REINA по скорости применения для данных РФ можно считать Covasim, который допускает генерацию синтетических сети контактов на основе уже существующих общедоступных источников (данные ООН, SynthPops) и позволяет с минимальными модификациями производить моделирование в предположении регулярных структур контактов населения (сети Барабаши — Альберта или Уотса — Строгаца). Однако эксперименты с этим модельным комплексом применительно к популяции Санкт-Петербурга показали, что использование стандартных топологий контактов ухудшает результаты моделирования по сравнению с синтетической популяцией. В то же время использование собственных синтетических популяций в Covasim вместо сгенерированных контактных сетей на основе вышеупомянутых стандартных моделей значительно замедляет время выполнения экспериментов и уменьшает вероятность получения качественной калибровки на данные заболеваемости [16].

1.3. Задачи исследования

Целью настоящей работы является разработка и демонстрация метода индивидуум-ориентированного моделирования эпидемий ОРВИ, направленного на практическое использование в эпидемическом надзоре РФ и в максимальной степени опирающегося на вышеуказанные принципы. В задачи работы входит:

- 1) Разработка метода генерации данных для модели для произвольного города РФ,
- 2) Разработка алгоритмов численного моделирования на основе методов Монте-Карло,
- 3) Разработка алгоритма калибровки модели и оценка его эффективности,
- 4) Иллюстрация разработанных методов на примере моделирования сезонного гриппа в Челябинске и Самаре.

Решаемые задачи являются частью более общей проблемы в области создания и использования синтетических популяций и мультиагентных моделей, которая заключается в поиске оптимальных методов параметризации моделей и баланса между детализацией и интерпретируемостью моделей для достижения максимальной точности и достоверности результатов [2]. Прозрачность модельной структуры, применение модульного принципа на уровне алгоритма (разделение демографической и эпидемической составляющих), использование открытых демографических данных, а также доступность кода программы для скачивания (репозиторий с кодом доступен по приведённой ссылке: [17]) позволяет обеспечить принцип воспроизводимости результатов моделирования, независимую проверку результатов и потенциальное их переиспользование со стороны исследовательских коллективов, занимающихся смежными темами.

Для обеспечения соответствия озвученным принципам предложенный модельный подход реализован согласно следующим требованиям:

— Максимальное использование готовых решений, как в части моделей и программ, так и в части стандартов данных. При генерации синтетических популяций авторы опираются на стандарт компании RTI [18], который даёт возможность использовать любые открытые и проприетарные модели, совместимые с этим стандартом.

— Ускоренная подготовка данных на основе стандартизированной информации, имеющейся для городов РФ, в противовес «штучному» сбору данных для каждого конкретного модельного случая, который практиковался в более ранних работах [19]. Для этого внедрено максимальное использование открытых данных (таких, как данные карт OSM, переписи населения, статистика Росстата, сервис Яндекс.Аудитории) и верифицированных алгоритмов для их обработки, включая алгоритмы распределения индивидов по домохозяйствам [20].

— Ускорение работы моделирующей программы. Одна из возможностей – использование моделей с разумно достаточным уровнем детализации. Для достижения этой цели в используемых моделях, в частности, отсутствует реализация динамических контактов (нет расчёта вероятности встреч индивидов в реальном времени согласно графикам перемещения), не различаются выходные и будние дни при оценке вероятностей заражения в различных местах, ограничено число мест заражения.

2. МЕТОДЫ

2.1. Генерация данных для моделирования

В качестве входных демографических данных для мультиагентной модели используется синтетическая популяция — это искусственно созданная популяция, которая по своим агрегированным характеристикам статистически приближена к реальной. Генерация синтетических популяций может быть выполнена в автоматическом и ручном режиме. В то время как ручная генерация данных обладает большей точностью, автоматический сбор информации ускоряет процесс подготовки данных к моделированию. Популяция составляется из записей индивидов с данными о возрасте, поле, месте жительства и месте работы/обучения. Для подачи на вход моделирующей программе необходимо сгенерировать эти данные и скомпоновать в виде нескольких входных файлов. В настоящей работе процесс подготовки синтетической популяции Санкт-Петербурга 2010 года, продемонстрированный ранее в [19], был изменён и обобщён для применения к произвольному городу. По умолчанию генерация входных демографических данных для модели производится в автоматическом режиме с использованием открытой платформы «Цифровая урбанистика» [21] — в этом случае алгоритм моделирования популяции города сокращается до получения данных о домах, объектах инфраструктуры из платформы и моделировании рабочих мест. Такой подход, однако, доступен лишь при наличии уже загруженных данных о городе на платформе. Платформа позволяет получать данные о половозрастном составе жителей домов, геолоцированные данные с объектами инфраструктуры с восстановленными значениями вместимости школ, а также геолоцированными данными о жилых домах городов, представленных на платформе. Данные о половозрастном составе жителей домов моделируются с помощью библиотеки с открытым исходным кодом «Population-restorator» [22], используя метод расселения жителей по жилым домам в городах, имея данные об общем количестве жителей в городе и половозрастное распределение людей в регионе [20]. Также на платформе возможно моделирование численности и половозрастного состава населения с использованием данных о миграции и исторических данных о численности населения [23]. Модель реализована в виде библиотеки с открытым исходным кодом ITMO-2 [24]. В случае недоступности данных на платформе возможна их ручная генерация с последующим сохранением для дальнейшего переиспользования в рамках «Цифровой урбанистики» (в том числе и для задач, не связанных с анализом распространения эпидемических вспышек). Описание шагов алгоритма ручной генерации приведено ниже.

Получение набора данных со всеми зданиями в городе.

Для создания базы данных жилых домов в городе был использован сервис Open Street Map (OSM), который предоставляет географические данные в открытом доступе. Для получения набора данных из OSM используется сервис Overpass-Turbo, выбранный в силу своей популярности. Данный инструмент позволяет выгружать наборы данных в формате .geojson, что удобно для дальнейшей работы с пространственными данными. Процесс получения данных из OSM происходит с помощью комбинации ключа и тега для идентификации объектов.

Проверка атрибута назначения здания.

В полученный набор зданий добавляется атрибут `is_living`, характеризующий тип здания (жилое или нежилое). Для его создания и корректировки используется программное обеспечение QGIS [25], предназначенное для работы с геопространственными данными. Атрибут

принимает значение `true`, если тип здания в поле `building` указан как один из следующих: общежитие, многоквартирный дом, частный дом. Для каждого города необходима ручная проверка и выставление значений данного атрибута.

Проверка атрибута этажности для каждого жилого дома.

Для корректного расселения людей по жилым домам необходима проверка атрибута `floors`, отвечающего за количество этажей в доме. Это значение используется в вычислении жилой площади здания. Для его проверки используется программное обеспечение QGIS и сравнение набора данных с данными сервисов 2GIS [26] и «Яндекс.Карты» [27], а также ручное внесение атрибута для каждого здания. Такая проверка требует больших временных затрат. Для города с населением в миллион человек проверка занимает до 80 человеко-часов.

Добавление пропущенных зданий.

Недостающие жилые здания добавляются при помощи ручной проверки с наложением карт географических сервисов поверх карты с полученными ранее домами. Для новых домов вручную заполняются атрибуты `is_living` и `floors`. Время ручной обработки данных зависит от качества исходных данных сервиса OSM, а также от общего количества жилых домов. Подготовка дополненного набора данных с недостающими зданиями для города населением миллион человек занимает до 120 человеко-часов.

Расселение людей по жилым зданиям.

Половозрастная структура населения формируется согласно данным Росстата. При расселении используется подход, описанный в работе [20]. Алгоритм распределяет заданное количество жителей в городе по зданиям пропорционально величине жилой площади. Для каждого жилого здания определяется координата центроида для дальнейшего использования в качестве координаты всех домохозяйств популяции, находящихся в этом доме.

Получение данных о школах.

Для получения данных о школах используется сервис OSM с запросом по соответствующим ключам и тегам. Проблема со сбором информации о школах заключается в том, что под понятие «школа» попадают сразу несколько типов заведений: языковая школа, автошкола и другие подобные учреждения. В силу этого для повышения адекватности данных предпочтительна их дополнительная ручная корректировка.

Данные о рабочих местах.

Данные о рабочих местах для синтетической популяции были получены при помощи открытого сервиса «Яндекс.Аудитории», позволяющего получать количество рабочих мест на заданном ограниченном участке площади в городе. Для удобства сбора данных территория города была разделена на ячейки в виде шестиугольников. Для каждой из ячеек были получены значения количества рабочих мест. В большинстве случаев при выгрузке данных из данного сервиса оценка количества рабочих мест превышает официальное количество трудозанятых, поэтому после получения данных из сервиса количество рабочих мест нормируется, исходя из количества трудозанятых в городе согласно данным Росстата. Нормировочный коэффициент рассчитывается по формуле

$$k_{\text{norm}} = \frac{N_{\text{wp}}^{(\text{of})}}{N_{\text{wp}}},$$

где $N_{\text{wp}}^{(\text{of})}$ — количество трудозанятых согласно данным Росстата, N_{wp} — суммарное количество рабочих мест по городу, полученное при помощи сервиса «Яндекс.Аудитории». Тогда итоговый размер рабочего места n_{wp_i} вычисляется по формуле

$$n_{\text{wp}_i} = k_{\text{norm}} \cdot n_{\text{wp}_i}^{(0)},$$

где $n_{\text{wp}_i}^{(0)}$ — размер i -го рабочего места согласно [28].

Разделение домов на квартиры.

Население каждого дома предполагается разделённым на квартиры. Количество жильцов в каждой квартире генерируется случайным образом согласно распределению Пуассона (см. использование такого подхода в [29]) с функцией вероятности $p(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$, где k — итоговое количество людей в квартире, μ — параметр распределения. Значение параметра $\mu = 2.57$ выбиралось согласно [19] и соответствует предполагаемому среднему размеру домохозяйства. Суммарное число людей во всех квартирах совпадает с предполагаемым числом жителей дома.

Присваивание рабочих мест и школ.

Следующим этапом добавляются рабочие места. Предполагается, что все индивиды в возрасте от 7 до 17 лет ежедневно посещают школу, а взрослые трудоспособного возраста (с 18 до 60 для мужчин и с 18 до 55 для женщин) ежедневно посещают рабочие места. Выбор школы и места работы зависит от расстояния до места жительства человека. В данной работе максимальное расстояние до школы и работы было задано 5 км и 15 км соответственно. Если свободного места в школе (на работе) в заданном радиусе не находилось, то присваивалось ближайшее доступное место, невзирая на расстояние. Результатом работы данного этапа алгоритма является список индивидов, где каждой записи приписан пол, возраст, идентификатор домохозяйства, идентификатор школы и координата рабочего места без привязки к конкретному офису.

Разделение рабочих мест на офисы.

Рабочие места, координаты которых соответствуют центрам шестиугольников, полученных из сервиса «Яндекс.Аудитории», разделяются на более мелкие части — офисы. Размер рабочего места, т. е. максимальное количество работников, генерируется случайным образом согласно распределению Пуассона с параметром $\mu = 8.5$.

2.2. Сэмплинг данных синтетической популяции

Мультиагентное моделирование трудозатратно и занимает много времени по сравнению с компарментальными моделями. Возможным решением проблемы является использование вместо полноразмерной синтетической популяции её масштабной копии. Такой подход в научной литературе называется сэмплингом (масштабированием) или разукрупнением (downscaling). К примеру, в работе [30] авторы запускают мультиагентную модель распространения COVID-19 для популяции в округе Форд, штат Канзас, США, производят таким образом оценку параметров, и в дальнейшем эти параметры используются для проведения всех экспериментов для уменьшенной версии Нью-Йорка, США. Моделирование города Нью-Йорка на период 120 дней выполнено при предположении численности населения в 10 000 человек; при этом входные параметры, специфичные для Нью-Йорка, приспособлены для меньшей численности населения, чтобы обеспечить соответствующее масштабирование.

Хотя даунскейлинг (разукрупнение) стал обычной практикой, лишь в ограниченном числе исследований изучалось его влияние на результаты моделирования [31]. Например, в работе [32], посвящённой транспортному моделированию, указывается: «В примере для агломерации Мюнхена 5% агентов и 50 итераций воспроизвели вероятностное распределение путевого времени аналогично полученному при 100% агентов и 500 итераций (но в 50 раз быстрее). Соответственно, в данном случае масштабные коэффициенты около 5% кажутся разумными. Однако требования конкретных сценариев мер контроля могут повлиять на наиболее подходящий масштабный коэффициент и необходимую плотность транспортной сети в подвыборке для каждого приложения. При тестировании сценариев, где результаты анализируются только на высокоагрегированном уровне, меньшие коэффициенты масштабирования могут быть приемлемыми. Однако анализ транспортных потоков по одному конкретному транспортному коридору вероятно, потребует 100% выборки». В случае подготовки сэмплированной популяции

для моделирования распространения заболеваемости аналогично важно сохранять структуру исходных связей агентов, которая в нашем случае соответствует сети контактов индивидов.

2.3. Мультиагентная модель

Для моделирования динамики эпидемии в настоящей работе была использована актуальная версия мультиагентной модели, впервые представленной в [19]:

Описание.

Модель предназначена для моделирования динамики изменения состояний индивидов синтетической популяции в течение заданного периода времени. Время модели дискретное с шагом в один день. Генерация переходов между состояниями производится имитационным моделированием с помощью методов Монте-Карло. Входными данными являются параметры заболевания и синтетическая популяция, задаваемая согласно стандарту RTI [18]. Выходными данными является количество индивидов синтетической популяции в каждом из состояний, относящихся к заболеванию, в момент времени $t \in \overline{0, T}$, а также списки индексов индивидов, заражённых определённым штаммом вируса в момент времени t . Поскольку каждому индивиду сопоставлена координата домохозяйства, на основе этих данных возможно построение карт распространения заболеваемости в городе и их отображение в геоинформационных системах.

Население.

Население представляется синтетической популяцией, состоящей из нескольких текстовых файлов. Файл представляет собой список, каждая строка которого представляет собой отдельную запись, соответствующую определённой сущности – человеку, домохозяйству, месту работы или школе:

- households.txt. Местоположение и описательные характеристики каждого домохозяйства. Записи о домохозяйствах в файле «households.txt» ссылаются на записи об отдельных лицах в таблице «people.txt».

- people.txt. Записи о каждом человеке с указанием его возраста и пола, принадлежности к школе и рабочему месту. Эти синтетические записи о человеке связаны с файлом «households.txt» через поле `sp_hh_id`, содержащее индекс домохозяйства.

- schools.txt. Записи по каждой школе, включая её почтовый индекс, максимальную вместимость и координаты.

- workplaces.txt. Записи по каждому рабочему месту с указанием его координат и размера.

Характерные размеры популяций составляют от нескольких сот тысяч до нескольких миллионов индивидов.

Инициализация модели.

Перед началом моделирования в популяции случайным образом выбираются восприимчивые индивиды в количестве

$$S(0) = [\alpha \cdot N(0)],$$

где $\alpha \in [0, 1]$ — доля восприимчивых в популяции на момент начала моделирования, $N(0)$ — общее количество людей в популяции в начальный момент времени. Поскольку при моделировании краткосрочных эпидемий демографическими и миграционными процессами можно пренебречь, полагаем $N(t) \equiv N(0)$. Затем среди общего списка восприимчивых индивидов выбирается фиксированное начальное количество инфицированных I_0 , т. е. происходит случайный выбор их порядковых номеров.

Модель контактов.

Каждый агент в модели может взаимодействовать с заранее определённым количеством людей с заданной вероятностью контакта. Согласно модели, индивиды могут взаимодействовать и передавать инфекцию внутри домохозяйств, на рабочих местах или в школах. Для

каждого индивида в синтетической популяции моделью добавляется три индикатора, относящихся к его инфекционному статусу:

- *isImmune* — индикатор, показывающий, имеет ли индивид иммунитет к данной инфекции (с учётом штамма в мультиштабном варианте моделирования);
- *isSick* — индикатор, показывающий, болеет ли человек в текущий день моделирования (с учётом штамма);
- *infectionDay* — число, равное количеству дней, прошедших с начала заболевания.

Для каждого индивида возможно нахождение в одном из трёх состояний: восприимчивый (S), инфицированный (I), выздоровевший (R), что соответствует нотации классической компартментальной SIR-модели. Для каждого дня моделирования определяются места встреч восприимчивых и инфицированных индивидов. Вероятность заражения человека вычисляется по формуле

$$p_{\text{inf}}^{(\text{pl})} = 1 - \prod_{i=1}^{N^{(\text{pl})}-1} (1 - \lambda \cdot p_{\text{cnt}}^{(\text{pl})} \cdot g(\tau_i)),$$

где λ — трансмиссивность, $p_{\text{cnt}}^{(\text{pl})}$ — вероятность события, что человек встретит случайно выбранного человека в общем месте их пребывания, $g(\tau_i)$ — функция доли инфекционных в зависимости от времени τ_i , прошедшего с начала инфицирования (*infectionDay*) для конкретного индивида (отвечает за изменение заразности индивида с течением времени после момента инфицирования). Верхний индекс (pl) указывает на рассмотрение процесса заражения в конкретном месте (школа, дом или рабочее место). Сумма вероятности заражения индивида в заданном месте pl и вероятности того, что он не будет заражён, составляет единицу, что отражено в формуле. Внутри оператора произведения каждый множитель отражает вероятность отсутствия заражения рассматриваемого индивида в результате эффективного контакта с любым из индивидов $i \in 1, N^{(\text{pl})} - 1$, находящихся в данном месте. Вероятность $p_{\text{cnt}}^{(\text{pl})}$ вычисляется по следующей формуле:

$$p_{\text{cnt}}^{(\text{pl})} = \min \left\{ \frac{c^{(\text{pl})}}{N^{(\text{pl})}(t) - 1}, 1 \right\},$$

где $c^{(\text{pl})}$ — среднее число контактов в месте пребывания индивида (отдельно для дома, школы и офиса), $N^{(\text{pl})}(t)$ — общее количество людей в таком месте.

Количество инфицированных в месте pl людей определяется согласно биномиальному распределению:

$$n_{\text{inf}}^{(\text{pl})} \sim \text{Bin}(S(t), p_{\text{inf}}^{(\text{pl})}),$$

Процесс заражения инициируется последовательно в домах, на рабочих местах и в школах. После окончания расчёта всех переходов индивидов между состояниями номер текущего дня увеличивается на единицу и процессы заражения повторяются снова.

Модель протекания заболевания.

Для модельного комплекса реализовано две модели протекания заболевания:

- Детерминированная модель, связанная с функцией $g(\tau_i)$ доли инфекционных в зависимости от времени τ_i , прошедшего с начала инфицирования (*infectionDay*). С помощью этой функции задаётся длина периода инфекционности, длина периода, когда индивид не заразен, и момент наступления выздоровления (в двух последних случаях $g(\tau_i) = 0$). Функция считается одинаковой для всех индивидов.

- Стохастическая модель, связанная с генерацией длины инкубационного τ_{inc} и инфекционного периода τ_{inf} индивидуально для каждого заражённого. Данная модель, в отличие от предыдущей, не позволяет использовать в явном виде функции инфекционности, зависящие от времени. Её преимуществом является включение стохастического эффекта протекания заболевания и возможность учёта влияния индивидуальных характеристик (например, пола

и возраста) на длину инкубационного периода и периода инфекционности. Пример калибровки мультиагентной модели со стохастической моделью протекания заболевания на данные заболеваемости COVID-19 приведён в [16].

В экспериментах данной работы использовалась детерминированная модель.

Контрольные меры.

Карантинные меры в модели имитируются уменьшением среднего числа контактов $c^{(pl)}$ в разных категориях мест. Использование индивидуальных средств защиты моделируется путём изменения значения параметра трансмиссивности вирусов λ . Вакцинация имитируется присвоением статуса *isImmune* перед началом моделирования индивидам синтетической популяции. Количество защищённых индивидов фиксированной возрастной группы a вычисляется по следующей формуле:

$$N_{\text{immune}}^{(a)} = VE(a) \cdot VR(a) \cdot N_{\text{total}}^{(a)},$$

где $N_{\text{total}}^{(a)}$ — общая численность возрастной группы, $VR(a)$ — охват вакцинацией возрастной группы, $VE(a)$ — вакцинная эффективность для данной группы.

Пример применения модели для оценки эффективности вакцинации с разным охватом групп риска приведён в [33].

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Программа, реализующая мультиагентную модель, написана на языке Python. Моделирование выполнялось с использованием параллельных вычислений на основе библиотеки `multiprocessing`. Результатами моделирования является количество восприимчивых, заболевших и выздоровевших индивидов в каждый из дней моделирования, а также списки идентификаторов заражённых индивидов и мест заражения, что позволяет восстанавливать пространственную картину распространения инфекции. Значения параметров модели указаны в табл. 2.

Таблица 2

Параметры модели

Параметр модели	Описание	Значение
α	Доля восприимчивого населения	0.78
λ	Трансмиссивность	0.15
I_0	Начальное количество инфицированных	10
T_{mod}	Количество дней моделирования	120
N_{runs}	Количество запусков	10

3.1. Сравнение динамики эпидемического процесса в разных городах РФ

В качестве исследуемых городов были рассмотрены два близких по населению города: Самара и Челябинск. При помощи вышеописанного алгоритма генерации синтетических популяций были подготовлены входные данные для моделирования. Результаты работы алгоритма по оценке количества жилых зданий на каждом из этапов обработки данных приведены в табл. 2. Разница в итоговом количестве заселённых зданий предположительно связана с различием в процентном соотношении многоэтажных жилых зданий и частного сектора в рассматриваемых городах, что влияет на результаты работы алгоритма расселения [20]. В табл. 3 приведены основные количественные характеристики синтетических популяций для Самары и Челябинска.

Таблица 3

Оценки количества жилых зданий в процессе генерации

Город	Самара	Челябинск
OSM, общее количество зданий	61305	73367
OSM, кол-во жилых зданий	8880	29972
Фонд развития территорий, общее кол-во	11613	6775
После корректировки, общее кол-во	61305	74176
После корректировки, кол-во жилых зданий	40552	40421
Количество заселённых зданий	32932	23478

Таблица 4

Основные характеристики синтетической популяции Самары и Челябинска

Город	Население	Жилые дома	Школы	Уровень занятости
Самара	1158000	32931	219	61.9%
Челябинск	1189000	23478	113	64.07%

В качестве исходной информации для анализа эпидпроцессов в исследуемых городах рассматривались данные о заболеваемости эпидемических сезонов с 2010 по 2021 годы, предоставленные ФГБУ «НИИ гриппа им. А. А. Смородинцева» Минздрава России. На рис. 1 приведены графики количества новых случаев инфицирования ОРВИ и гриппом в Челябинске и Самаре за вычетом сезонных уровней ОРВИ.

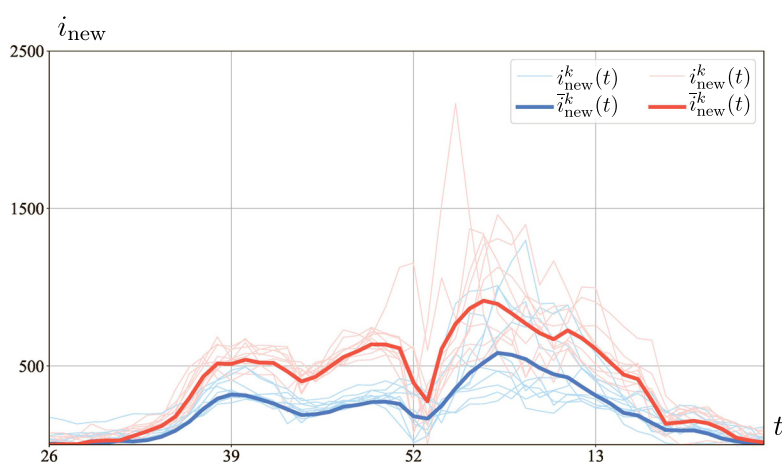


Рис. 1. Количество случаев инфицирования ОРВИ и гриппом для Самары (синий цвет) и Челябинска (красный цвет) с 2010 по 2021 годы; $i_{\text{new}}^k(t)$ — количество новых случаев инфицирования за вычетом сезонных уровней ОРВИ в эпидемический сезон k на неделю t , $\bar{i}_{\text{new}}^k(t)$ — среднее значение $i_{\text{new}}^k(t)$ по всем приведенным эпидемическим сезонам

Корректировка по сезонным уровням вводилась с целью точнее оценить эпидемическую заболеваемость гриппом без использования данных лабораторной диагностики (см. [34]). Как видно из графиков, для Челябинска наблюдается превышение числа заболевших в большинстве эпидемических сезонов по сравнению с аналогичными показателями для Самары. Это различие может быть вызвано рядом отдельных факторов или их сочетанием, такими как

особенности структуры сети контактов, климатические факторы, особенности работы городских систем учёта заболеваемости.

Результатом каждого запуска модели является динамика заболеваемости гриппом в течение 150 дней с изначальным количеством инфицированных в 10 человек. Значение параметра трансмиссивности λ равно 0.15. График относительного количества заболеваемости приведён на рис. 2.

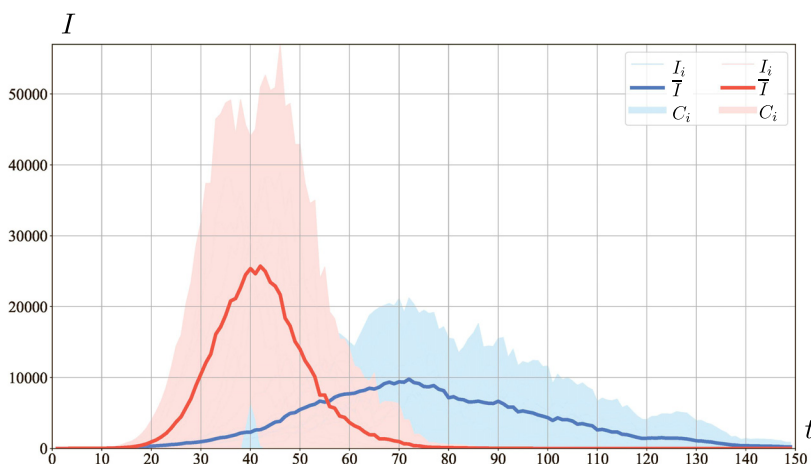


Рис. 2. Количество инфицированных гриппом индивидов для Самары (синий цвет) и Челябинска (красный цвет) согласно результатам моделирования; на горизонтальной оси t отложены дни; доверительные интервалы C_i рассчитаны по правилу 3σ

Для каждого из дней моделирования вычислено усреднённое значение заболеваемости $\bar{I}(t)$:

$$\bar{I}(t) = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} I_i(t),$$

где $I_i(t)$ — значение количества инфицированных на 100 тысяч человек в день моделирования t для i -го номера запуска моделирования, N_l — количество запусков моделирования.

Как видно из рис. 2, формы кривых заболеваемости гриппом для Самары и Челябинска существенно отличаются друг от друга. В сравнении с кривой заболеваемости для Самары, кривая для Челябинска демонстрирует более резкий рост и большую высоту пика, что свидетельствует о более интенсивном протекании эпидемии. Эпидемические параметры модели для двух городов были заданы одинаковыми, в силу этого различие в кривых заболеваемости, очевидно, связано с различиями в структуре сетей контактов, определяемой синтетическими популяциями.

3.2. Моделирование на сэмплированных данных

В данной серии численных экспериментов производилась оценка качества результатов работы модели на сэмплированных данных. Параметром алгоритма сэмплирования является процент r сохранённых домохозяйств по отношению к исходной популяции. Алгоритмом производится случайный выбор r (%) квартир в каждом из районов и формируется популяция на основе людей, проживающих в этих квартирах. Поскольку распределение населения по рабочим местам и школам остаётся аналогичным изначальной популяции, такой подход может привести к понижению плотности людей в этих местах и как следствие уменьшению числа контактов. При малых значениях r возможно полное отсутствие людей в некоторых офисах и

школах и увеличение кластеризации сети контактов. Поэтому важным является оценка доли населения, которая позволяет проводить моделирование с достаточной достоверностью.

Для мегаполисов с населением свыше миллиона человек расчётный эксперимент с использованием мультиагентной модели занимает до нескольких часов, поэтому в качестве входных данных логично использовать сэмплированные популяции вместо полноразмерных. На рис. 3 приведены результаты моделирования на синтетических популяциях для Самары и Челябинска.

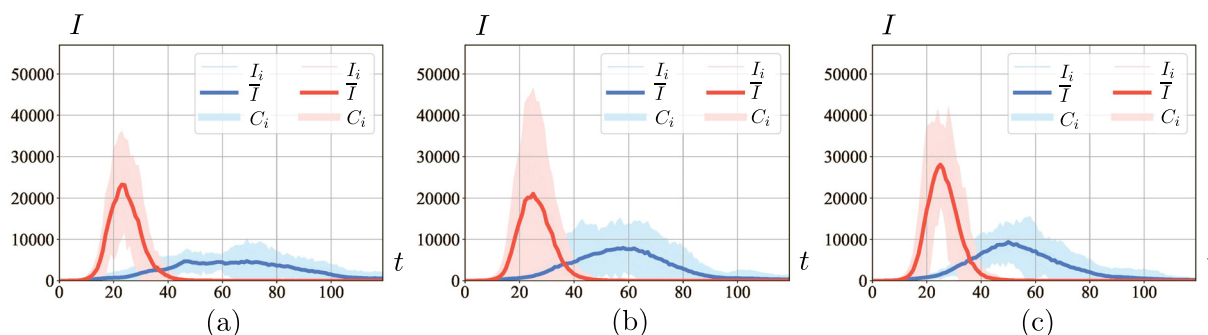


Рис. 3. Количество инфицированных индивидов в сэмплированных популяциях Самары (синий цвет) и Челябинска (красный цвет): (a) $r = 25\%$, (b) 50% , (c) 75% ; на горизонтальной оси t отложены дни; доверительные интервалы C_i рассчитаны по правилу 3σ

При помощи алгоритма сэмплинга были составлены синтетические популяции с параметром $r = 25; 50; 75\%$. На каждой выборке была запущена программа моделирования с десятью параллельно вычисляемыми реализациями. Время расчётов, а также пиковые значения в относительных величинах для различных экспериментов приведены в табл. 5 и на рис. 4.

Таблица 5

Сравнение времени моделирования и средних пиковых значений в относительных величинах.

$r, \%$	Самара		Челябинск	
	$\tau(r)/\tau(100)$	$\bar{I}_{\max}(r)/\bar{I}_{\max}(100)$	$\tau(r)/\tau(100)$	$\bar{I}_{\max}(r)/\bar{I}_{\max}(100) \cdot 0.2$
25	0.24	0.67	0.2	0.86
50	0.42	0.98	0.32	0.9
75	0.89	1.1	0.41	1.02
100	1 (17 889 с.)	1 (9 627 чел.)	1 (27 937 с.)	1 (29 014 чел.)

Полное время моделирование для Самары и Челябинска ($\tau(r)$ при $r = 100\%$) составило 17 889 и 27 937 секунд соответственно. Значение \bar{I}_{\max} было усреднено по пиковым значениям отдельных запусков и для полных популяций Самары и Челябинска составило 9 627 и 29 014 человек.

По приведённым результатам видно, что использование сэмплированных популяций в мультиагентной модели позволило сократить время моделирования. Для $r = 25\%$ моделирование каждого из городов не превосходит двух часов. Кривые заболеваемости для сэмплированных популяций, приведённые на рис. 4, сохраняют своё расположение друг относительно друга, а пиковые значения и вид кривой заболеваемости варьируются в зависимости от параметра r по-разному для каждого города.

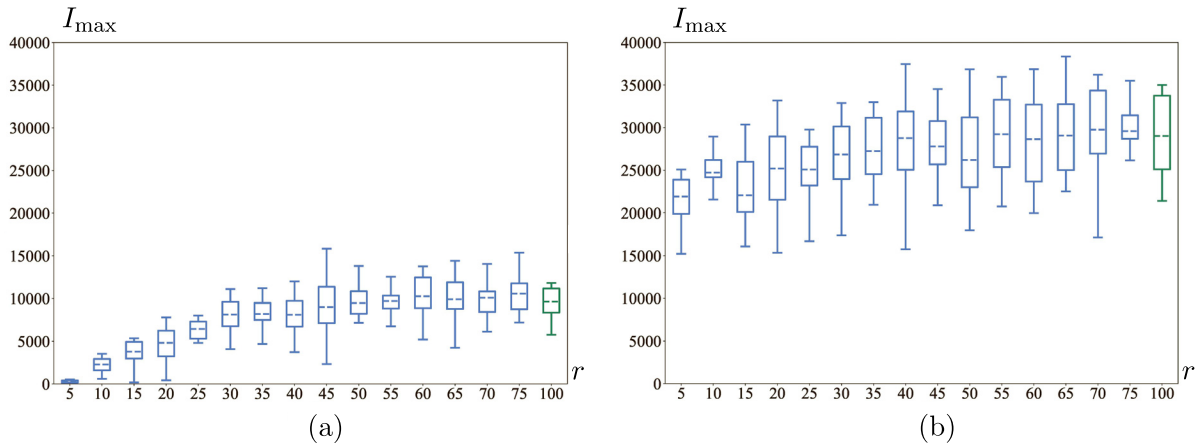


Рис. 4. Распределение значений пиковой заболеваемости для различного процента r сэмплинга населения: Самара (а) и Челябинск (б)

3.3. Калибровка моделей на данные

Подбор модельных кривых, соответствующих данным, выполняется полным перебором значений параметров доли изначально восприимчивых α и трансмиссивности инфекции λ с фиксированным шагом (так называемый grid search или parameter sweep). Наиболее близкие к данным заболеваемости модельные кривые определяются подсчётом значения R^2 .

Пример поиска модельных кривых, соответствующих данным заболеваемости гриппом в Самаре, приведён на рис. 5.

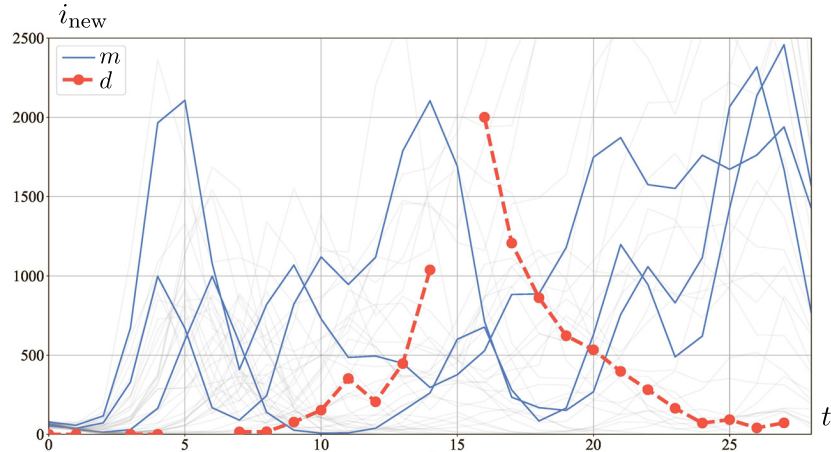


Рис. 5. Сопоставление модельных кривых с данными заболеваемости гриппом А(Н3N1) в Самаре в 2023–2024 гг.; m — модельные кривые, d — данные заболеваемости

Использовались следующие значения параметров: $\alpha_{\min} = 0.8$, $\alpha_{\max} = 0.92$, $\alpha_{\text{step}} = 0.02$, $\lambda_{\min} = 0.05$, $\lambda_{\max} = 0.15$, $\lambda_{\text{step}} = 0.01$. Пример использования авторами данного алгоритма также приведён в работе [16] для прогнозирования COVID-19 в синтетической популяции Санкт-Петербурга.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе авторами приведён набор методов, позволяющий оперативно подготовить данные и произвести мультиагентное моделирование процессов распространения заболеваемости в городах РФ. Целью настоящей работы была демонстрация принципиальной

возможности применения детализированного моделирования динамики инфекций в практических целях. В то время как в большинстве публикуемых исследований упор делается на описание реализации и применения конкретной мультиагентной модели, авторам представляется более существенным акцентировать внимание на решение проблемы оперативного сбора и обработки детальных демографических данных программным путём в автоматическом и полуавтоматическом режиме, а также обеспечения удовлетворительной скорости получения результатов работы модели при множественных запусках, без которых реалистичное прогнозирование детальными моделями невозможно. Представленные в настоящем исследовании результаты, в частности, методы генерации синтетических популяций на основе данных открытой инструментальной платформы [21] и методы масштабирования популяций, значительно ускоряют получение результатов моделирования и дают возможность использовать мультиагентное моделирование в составе реальных систем поддержки принятия решений. Основным предполагаемым примером применения является поддержка принятия решений в экстремальных ситуациях (таких, как пандемии вирусов нового типа), в которых ключевым фактором является учёт стохастичности процесса и индивидуальное поведение отдельных агентов системы (например, суперраспространителей).

Рассмотренный метод разработки и реализации моделей имеет следующие ограничения:

— Несовершенство автоматического алгоритма генерации синтетических популяций на основе платформы [21]. Одной из особенностей представляемого подхода является максимальное переиспользование существующих данных, и этот момент имеет недостатки, связанные с неполным соответствием свойств имеющихся данных задачам моделирования эпидемических вспышек. В частности, в случае городов с платформы [21] уровень детализации популяций соответствует решаемым урбанистическим задачам, но недостаточен для формирования достоверных сетей контактов населения, например, в части разделения домов на квартиры, которое в ходе данного исследования пришлось реализовывать дополнительно. Данная проблема решается адаптацией платформы под задачи эпидемиологии либо ручной доработкой популяций — в зависимости от наличия финансовых и временных ресурсов.

— Данные о рабочих местах слишком общие (нет деления по отраслям), требуют дополнительных вычислений (не являются частью открытой инструментальной платформы) и ограничены списком городов, для которых есть информация «Яндекс.Аудитории».

— Отсутствие в модели реализации заражения в транспорте, которое может является весомым фактором передачи респираторных инфекций. Хотя согласно ряду оценок (например, в [9]) контакты в транспорте имеют незначительное влияние на процесс распространения гриппа, в случае коронавирусной инфекции есть результаты, подтверждающие значимость роли транспорта [35]. Данное упрощение модели вызвано историческими причинами (использование модельных гипотез из комплекса FRED, где передача инфекции в транспорте также не реализована), а также отсутствием доступных стандартизованных наборов данных по использованию общественного транспорта в городах РФ, на основе которых можно было бы оценить соответствующие параметры модели. При необходимости предполагается быстрая реализация модели заражения в транспорте с помощью добавления дополнительного источника инфицирования индивидов по принципу спонтанной активации инфекции (переход восприимчивого индивида в инфицированные с вероятностью, зависящей от общего числа инфицированных в популяции) или путём образования дальних связей между парами индивидов (генерация определённого количества случайных индивидов в качестве «соседей» данного выбранного индивида в качестве нового типа общественного места «транспорт»), которая позволит учесть этот фактор без значительного усложнения модели.

— Неточности в популяциях, возникающие после процедуры сэмплирования и более подробно описанные ранее. Для уменьшения неточностей планируется введение оптимизационного алгоритма с оценкой оптимального процента сэмплирования, аналогично ранее прово-

дившемуся подобному анализу для гибридной модели [36]. Сам гибридный метод моделирования также предполагается принять для практического использования, что даёт два варианта ускорения работы модели: через использование сэмпированных популяций (уровень данных) и применение гибридного подхода (уровень модельного комплекса).

— На данный момент нет адекватной оценки количества запусков модели, требуемых для получения репрезентативных траекторий распространённости. Планируется проведение такой оценки в случае для разной структуры контактов (т. е. для разных городов) на основе известных методов [37].

— Ограниченная валидация результатов моделирования, что является общей проблемой подхода [38].

— Неясно, даёт ли использование столь детальных контактных сетей преимущество в объясняющей и предсказательной силе моделей по сравнению с менее детальными моделями. Погрешности в данных и большая неопределённость, вызванная отсутствием валидации корректности расселения людей и назначения рабочих мест, может сводить на нет потенциальные эффекты от детализации.

В качестве дальнейшего направления работ предполагается изучить использование упрощённых сетей контактов на основе стандартных топологий вместо индивидуальной генерации связей между индивидами в результате их распределения по местам контактов. Такое упрощение модели, по оценкам авторов, позволит значительно ускорить работу моделирующей программы и тем самым ещё более упростить все задачи, связанные с многократным запуском модели. Между тем, вопрос, будут ли упрощённые сети контактов адекватно воспроизводить динамику контактов реального населения и передачу инфекции в результате этих контактов, требует дополнительного исследования.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-71-10067). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang P., Zheng X., Liu H. Simulation and forecasting models of COVID-19 taking into account spatio-temporal dynamic characteristics // Review. *Frontiers in Public Health*. 2022, V. 10. Article number 1033432.
2. Маслова И.И., Манолов А.И., Глущенко О.Е., Козлов И.Е., Цуркис В.И., Попов Н.С., Самойлов А.Е., Лукашев А.Н., Ильина Е.Н. Ограничения в создании искусственных популяций в агентном моделировании эпидемий: систематический обзор // *Журн. микробиологии, эпидемиологии и иммунобиологии*. 2024. Т. 101, No 4. С. 4.
3. Friedman J., Liu P., Troeger C.E. et al. Predictive performance of international COVID-19 mortality forecasting models // *Nature Communications*. 2021. V. 12, N 1. P. 2609.
4. Ioannidis J. P., Cripps S., Tanner M. Forecasting for COVID-19 has failed // *Intern. J. Forecasting*. 2022. V. 38, N 2. P. 423–438.
5. Stroud P., Del Valle S., Sydoriak S. et al. Spatial dynamics of pandemic influenza in a massive artificial society // *J. Artificial Societies and Social Simulation*. 2007. V. 10, N 4. P. 9.
6. JASSS-Covid19-Thread // Review of Artificial Societies and Social Simulation; <https://rofasss.org/tag/JASSS-Covid19-Thread/>

7. Lorig F., Johansson E., Davidsson P. Agent-based social simulation of the covid-19 pandemic: A systematic review // *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* 2021. 24(3); DOI: 10.18564/jasss.4601
8. Grefenstette J.J., Brown S.T., Rosenfeld R. et al. FRED (A Framework for Reconstructing Epidemic Dynamics): An open-source software system for modeling infectious diseases and control strategies using census-based populations // *BMC Public Health.* 2013. V. 13, N 1. P. 940.
9. Cooley P., Brown S., Cajka J. et al. The role of subway travel in an influenza epidemic: a New York City simulation // *J. Urban Health.* 2011. V. 88. P. 982–995.
10. Kerr C.C., Stuart R.M., Mistry D., Abeysuriya R.G., Rosenfeld K., Hart G.R., Nunez R.C., Cohen J.A., Selvaraj P., Hagedorn B., George L. Covasim: an agent-based model of COVID-19 dynamics and interventions // *PLOS Computational Biology.* 2021. V. 17, N 7. Article number e1009149.
11. Hinch R., Probert W.J., Nurtay A., Kendall M., Wymant C., Hall M., Lythgoe K., Bulas Cruz A., Zhao L., Stewart A., Ferretti L. OpenABM-Covid19—An agent-based model for non-pharmaceutical interventions against COVID-19 including contact tracing // *PLoS Computational Biology.* 2021. V. 17, N 7. Article number e1009146.
12. Manout O., Ciari F. Assessing the role of daily activities and mobility in the spread of COVID-19 in Montreal with an agent-based approach // *Frontiers in Built Environment.* 2021. V. 7. Article number 654279.
13. Mniszewski S.M., Del Valle S.Y., Stroud P.D., Riese J.M., Sydoriak S.J. EpiSimS simulation of a multi-component strategy for pandemic influenza // *Proceed. of the 2008 Spring Simulation Multiconf.* 2008, April. 2008. P. 556–563.
14. Tuomisto J.T., Yrjola J., Kolehmainen M., Bonsdorff J., Pekkanen J., Tikkanen T. An agent-based epidemic model REINA for COVID-19 to identify destructive policies // *MedRxiv.* P. 2020-04; DOI:10.1101/2020.04.09.20047498
15. Leonenko V., Lobachev A., Bobashev G. Spatial modeling of influenza outbreaks in Saint Petersburg using synthetic populations // *InInternat. Conf. Comput. Sci., 2019 Jun 8.* Cham: Springer International Publishing, 2019. P. 492–505.
16. Korzin A.I., Kaparulin T.I., Leonenko V.N. Assessing the Applicability of the Multiagent Modeling Approach to the Epidemic Surveillance of COVID-19 in Russian Cities // *IEEE Internat. Multi-Conf. Engrg., Computer and Information Sci. (SIBIRCON), 2024, September.* 2004. P. 237–242. IEEE.
17. URL: https://github.com/vnleonenko/Multiagent_ARI
18. Wheaton W.D., Cajka J.C., Chasteen B.M. et al. Synthesized population databases: A US geospatial database for agent-based models // *Methods report (RTI Press).* 2009. V. 2009, N 10. P. 905.
19. Leonenko V., Arzamastsev S., Bobashev G. Contact patterns and influenza outbreaks in Russian cities: A proof-of-concept study via agent-based modeling // *J. Comput. Sci.* 2020. V. 44. Article number 101156.
20. Kontsevich G., Sokol A., Bogomolov Y. et al. Modeling the citizens' settlement in residential buildings // *Procedia Comput. Sci.* 2022. V. 212. P. 51–63.
21. Платформа «Цифровая урбанистика»; URL: <https://dc.idu.actcognitive.org/>
22. Библиотека «population-restorator»; URL: <https://github.com/kanootoko/population-restorator/>
23. Zakharov K.; Aghajanyan A.; Kovantsev A., Boukhanovsky A. Forecasting Population Migration in Small Settlements Using Generative Models under Conditions of Data Scarcity // *Smart Cities.* 2024. V. 7. P. 2495–2513; <https://doi.org/10.3390/smartcities7050097>
24. Библиотека «ITMO-2» // URL: <https://github.com/aghajanyan/ITMO-2/>
25. Геоинформационная система QGIS // URL: <https://qgis.org/ru/site/>
26. Электронный справочник карт городов 2GIS // URL: <https://2gis.ru>
27. Яндекс.Карты // <https://yandex.ru/maps>
28. Яндекс.Аудитории // URL: <https://audience.yandex.ru/>
29. Jennings V., Lloyd-Smith B., Ironmonger D. Household size and the Poisson distribution // *J. Australian Population Association.* 1999. V. 16. N 1. P. 65–84.

30. *Shamil M.S., Farheen F., Ibtehad N. et al.* An agent-based modeling of COVID-19: validation, analysis, and recommendations // *Cognitive Computation*. 2021. P. 1–12.
31. *Kagho G.O., Meli J., Walser D., Balac M.* Effects of population sampling on agent-based transport simulation of on-demand services // *Procedia Comput. Sci.* 2022. V. 201. P. 305–312.
32. *Llorca C., Moeckel R.* Effects of scaling down the population for agent-based traffic simulations // *Procedia Comput. Sci.* 2019. N 151. P. 782–787.
33. *Korzin A.I., Kaparulin T.I., Leonenko V.N.* Assessing the Effect of Influenza Vaccination Strategies Using Multi-agent Modeling // In *2024 IEEE 3rd International Conference on Problems of Informatics, Electronics and Radio Engineering (PIERE)*, 2024, November. IEEE. 2024. P. 1000–1003.
34. *Leonenko V.N., Ivanov S.V.* Fitting the SEIR model of seasonal influenza outbreak to the incidence data for Russian cities // *Russian J. Numerical Analysis and Math. Modelling*. 2016. V. 31. N 5. P. 267–279.
35. *Harris J.E.* Critical role of the subways in the initial spread of SARS-CoV-2 in New York City // *Frontiers in Public Health*. 2021. V. 9. Article number 754767.
36. *Leonenko V.* A Hybrid Modeling Framework for City-Scale Dynamics of Multi-strain Influenza Epidemics // *Proc. Internat. Conf. Comput. Sci.* 2022. V. 13352. P. 164–177; DOI: 10.1007/978-3-031-08757-8_16
37. *Lee J.S., Filatova T., Ligmann-Zielinska A., Hassani-Mahmooei B., Stonedahl F., Lorscheid I., Voinov A., Polhill J.G., Sun Z., Parker D.C.* The complexities of agent-based modeling output analysis // *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* 2015. 18(4); DOI:10.18564/jasss.2897
38. *Castro B.M., Reis M.D.M., Salles R.M.* Multi-agent simulation model updating and forecasting for the evaluation of COVID-19 transmission // *Scientific Reports*. 2022. V. 12, N 1. Article number 22091.

UDC 519.876.5

**INDIVIDUAL-ORIENTED MODELING OF EPIDEMIC ARI IN CITIES
OF THE RUSSIAN FEDERATION: METHODS OF IMPLEMENTATION
AND APPLICABILITY ASSESSMENT****© 2025 A. I. Korzin^{1a}, N. A. Chichkova^{1b}, T. I. Kaparulin^{1c},
V. N. Leonenko^{1,2d}**

¹*ITMO University,
Kronverkskii pr., 49, lit. A., Sankt-Peterburg 197101, Russia,*
²*Smorodintsev Research Institute Institute of Influenza
Ministry of Health of the Russian Federation,
Prof. Popov st., 15/17, Sankt-Peterburg 197022, Russia*

E-mails: ^acorzin.an@gmail.com, ^bnachichkova@itmo.ru, ^ckaparulinti@mail.ru,
^dvnleonenko@itmo.ru

Received 28.03.2024, revised 30.10.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. Individual-based models of epidemic outbreaks have gained wide popularity among public health researchers due to their ability to describe the epidemic process with high detail. The main disadvantage of such models is the need to prepare a large amount of detailed data as an input to the model, as well as to allocate powerful computing resources to perform calculations. As a consequence, due to the lack of data and difficulties in performing the identification procedure of such models, their explanatory and predictive power can be called into question. In this study, a method is proposed for developing individual-based models of ARVI epidemic outbreaks that can be satisfactorily calibrated on the available demographic and epidemic statistics data in the cities of the Russian Federation in a reasonable time, taking into account the actual availability of data and the degree of detail of the infection transmission patterns in a heterogeneous population at the level of individuals. By using the sampling procedure, an increase in the speed of the modeling program is achieved. The transparency of the model structure, the use of the modular principle at the algorithm level (separation of the demographic and epidemic components), and the openness of the program code allow us to ensure the principle of reproducibility of the modeling results, independent verification of the results, and their potential reuse by research teams working on related topics. The applicability of the methods is assessed using the example of modeling influenza outbreaks in Samara and Chelyabinsk.

Keywords: synthetic populations, individual-based models, epidemiology, influenza, COVID-19.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.408

REFERENCES

1. Wang P., Zheng X., Liu H. Simulation and forecasting models of COVID-19 taking into account spatio-temporal dynamic characteristics. *Review. Frontiers in Public Health*, 2022, Vol. 10, Article number 1033432.
2. Maslova I.I., Manolov A.I., Glushchenko O.E., Kozlov I.E., Tsurkis V.I., Popov N.S., Samoilov A.E., Lukashov A.N., Il'ina E.N. Ogranicheniya v sozdanii iskusstvennykh populyatsii v agentnom modelirovanii epidemii: sistemicheskii obzor [Limitations in the creation of artificial populations in agent-based epidemic modeling: a systematic review]. *Zhurn. mikrobiologii, epidemiologii i immunobiologii* [J. Microbiology, Epidemiology and Immunobiology], 2024, Vol. 101, No. 4, pp. 4.

3. Friedman J., Liu P., Troeger C.E. et al. Predictive performance of international COVID-19 mortality forecasting models. *Nature Communications*, 2021, Vol. 12, No. 1, pp. 2609.
4. Ioannidis J. P., Cripps S., Tanner M. Forecasting for COVID-19 has failed. *Intern. J. Forecasting*, 2022, Vol. 38, No. 2, pp. 423–438.
5. Stroud P., Del Valle S., Sydoriak S. et al. Spatial dynamics of pandemic influenza in a massive artificial society. *J. Artificial Societies and Social Simulation*, 2007, Vol. 10, No. 4, pp. 9.
6. JASSS-Covid19-Thread // Review of Artificial Societies and Social Simulation;
<https://rofasss.org/tag/JASSS-Covid19-Thread/>
7. Lorig F., Johansson E., Davidsson P. Agent-based social simulation of the covid-19 pandemic: A systematic review // *J. Artif. Soc. Soc. Simul.*, 2021, Vol. 24, No. 3, Article number 5;
DOI: 10.18564/jasss.4601
8. Grefenstette J.J., Brown S.T., Rosenfeld R. et al. FRED (A Framework for Reconstructing Epidemic Dynamics): An open-source software system for modeling infectious diseases and control strategies using census-based populations. *BMC Public Health*, 2013, Vol. 13, No. 1, pp. 940.
9. Cooley P., Brown S., Cajka J. et al. The role of subway travel in an influenza epidemic: a New York City simulation. *J. Urban Health*, 2011, Vol. 88, pp. 982–995.
10. Kerr C.C., Stuart R.M., Mistry D., Abeyseriya R.G., Rosenfeld K., Hart G.R., Nunez R.C., Cohen J.A., Selvaraj P., Hagedorn B., George L. Covasim: an agent-based model of COVID-19 dynamics and interventions. *PLoS Computational Biology*, 2021, Vol. 17, No. 7, Article number e1009149.
11. Hinch R., Probert W.J., Nurtay A., Kendall M., Wymant C., Hall M., Lythgoe K., Bulas Cruz A., Zhao L., Stewart A., Ferretti L. OpenABM-Covid19—An agent-based model for non-pharmaceutical interventions against COVID-19 including contact tracing. *PLoS Computational Biology*, 2021, Vol. 17, No. 7, Article number e1009146.
12. Manout O., Ciari F. Assessing the role of daily activities and mobility in the spread of COVID-19 in Montreal with an agent-based approach. *Frontiers in Built Environment* 2021, Vol. 7, Article number 654279.
13. Mniszewski S.M., Del Valle S.Y., Stroud P.D., Riese J.M., Sydoriak S.J. EpiSimS simulation of a multi-component strategy for pandemic influenza. *Proceed. of the 2008 Spring Simulation Multiconf.*, 2008, April, pp. 556–563.
14. Tuomisto J.T., Yrjola J., Kolehmainen M., Bonsdorff J., Pekkanen J., Tikkanen T. An agent-based epidemic model REINA for COVID-19 to identify destructive policies. *MedRxiv.*, pp.2020-04; DOI:10.1101/2020.04.09.20047498
15. Leonenko V, Lobachev A, Bobashev G. Spatial modeling of influenza outbreaks in Saint Petersburg using synthetic populations. *In Internat. Conf. Comput. Sci.*, 2019 Jun 8, Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 492–505.
16. Korzin A.I., Kaparulin T.I., Leonenko V.N. Assessing the Applicability of the Multiagent Modeling Approach to the Epidemic Surveillance of COVID-19 in Russian Cities. *IEEE Internat. Multi-Conf. Engrg., Computer and Information Sci. (SIBIRCON)*, 2024, September, pp. 237–242.
17. URL: https://github.com/vnleonenko/Multiagent_ARI
18. Wheaton W.D., Cajka J.C., Chasteen B.M. et al. Synthesized population databases: A US geospatial database for agent-based models. *Methods report*, 2009, Vol. 2009, No. 10, pp. 905.
19. Leonenko V., Arzamastsev S., Bobashev G. Contact patterns and influenza outbreaks in Russian cities: A proof-of-concept study via agent-based modeling. *J. Comput. Sci.*, 2020, Vol. 44. Article number 101156.
20. Kontsevich G., Sokol A., Bogomolov Y. et al. Modeling the citizens' settlement in residential buildings. *Procedia Comput. Sci.* 2022, Vol. 212, pp. 51–63.
21. Platforma «Tsifrovaya urbanistika» [The «Digital Urbanism» platform];
URL: <https://dc.idu.actcognitive.org/>
22. Biblioteka «population-restorator» [Library «population-restorator»];
URL: <https://github.com/kanootoko/population-restorator/>

23. Zakharov K.; Aghajanyan A.; Kovantsev A., Boukhanovsky A. Forecasting Population Migration in Small Settlements Using Generative Models under Conditions of Data Scarcity. *Smart Cities*, 2024, Vol. 7, pp. 2495–2513; <https://doi.org/10.3390/smartcities7050097>
24. Biblioteka «ITMO-2» [Library «ITMO-2»]; URL: <https://github.com/aghajanyan/ITMO-2/>
25. Geoinformatsionnaya sistema QGIS [Geographic information system QGIS]; URL: <https://qgis.org/ru/site/>
26. Elektronnyi spravochnik kart gorodov 2GIS [Electronic directory of city maps 2GIS]; URL: <https://2gis.ru>
27. Yandex.Karty [Yandex.Maps]; <https://yandex.ru/maps>
28. Yandex.Auditorii [Yandex.Audiences]; URL: <https://audience.yandex.ru/>
29. Jennings V., Lloyd-Smith B., Ironmonger D. Household size and the Poisson distribution. *J. Australian Population Association*, 1999, Vol. 16, No. 1, pp. 65–84.
30. Shamil M.S., Farheen F., Ibtehad N. et al. An agent-based modeling of COVID-19: validation, analysis, and recommendations. *Cognitive Computation*, 2021, pp. 1–12.
31. Kagho G.O., Meli J., Walser D., Balac M. Effects of population sampling on agent-based transport simulation of on-demand services. *Procedia Comput. Sci.*, 2022, Vol. 201, pp. 305–312.
32. Llorca C., Moeckel R. Effects of scaling down the population for agent-based traffic simulations. *Procedia Comput. Sci.*, 2019, No. 151, pp. 782–787.
33. Korzin A.I., Kaparulin T.I., Leonenko V.N. Assessing the Effect of Influenza Vaccination Strategies Using Multi-agent Modeling. IEEE 3rd International Conference on Problems of Informatics, Electronics and Radio Engineering (PIERE), 2024, November, 2024, pp. 1000–1003.
34. Leonenko V.N., Ivanov S.V. Fitting the SEIR model of seasonal influenza outbreak to the incidence data for Russian cities. *Russian J. Numerical Analysis and Math. Modelling.*, 2016, Vol. 31, No. 5, pp. 267–279.
35. Harris J.E. Critical role of the subways in the initial spread of SARS-CoV-2 in New York City. *Frontiers in Public Health*, 2021, Vol. 9, Article number 754767.
36. Leonenko V. A Hybrid Modeling Framework for City-Scale Dynamics of Multi-strain Influenza Epidemics. *Proc. Internat. Conf. Comput. Sci.*, 2022, Vol. 13352, pp. 164–177; DOI: 10.1007/978-3-031-08757-8_16
37. Lee J.S., Filatova T., Ligmann-Zielinska A., Hassani-Mahmoei B., Stonedahl F., Lorscheid I., Voinov A., Polhill J.G., Sun Z., Parker D.C. The complexities of agent-based modeling output analysis. *J. Artif. Soc. Soc. Simul.*, 2015, 18(4); DOI:10.18564/jasss.2897
38. Castro B.M., Reis M.D.M., Salles R.M. Multi-agent simulation model updating and forecasting for the evaluation of COVID-19 transmission. *Scientific Reports*, 2022, Vol. 12, No. 1, Article number 22091.

УДК 531.36

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛИУВИЛЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ В СЛУЧАЕ ГЕССА ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЁЛОГО ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

© 2025 А. С. Кулешов^{a,b}, А. Д. Скрипкин^c

¹*Механико – математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, главное здание МГУ, Москва 119234, Россия*

E-mails: ^akuleshov@mech.math.msu.su, ^balexander.kuleshov@math.msu.ru,
^cantohaskripkin@gmail.com

Поступила в редакцию 20.03.2025 г.; после доработки 02.10.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Рассматривается задача о движении гиростата с неподвижной точкой при одновременном действии силы тяжести и гироскопических сил в случае, аналогичном случаю Гесса в задаче о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Показано, что решение задачи описания движения гиростата в этом случае сводится к нахождению общего решения некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. При помощи алгоритма Ковачича получены условия на параметры задачи, при выполнении которых соответствующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка допускает явное решение, выражающееся в лиувиллевых функциях. Показано, что при выполнении полученных условий уравнения движения гиростата могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Ключевые слова: тяжёлый гиростат, гироскопические силы, случай Гесса, линейное дифференциальное уравнение второго порядка, алгоритм Ковачича, лиувиллевы решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.409

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] указан новый частный случай интегрируемости уравнений Эйлера — Пуассона движения тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой. Вскоре после открытия этого интегрируемого случая появились первые работы, в которых проводилось качественное описание движения тяжёлого твёрдого тела в случае Гесса. Детальное аналитическое исследование случая Гесса было выполнено в работах [2, 3], где задача приведена к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с двоякопериодическими комплексными коэффициентами и показано, что решения в случае Гесса являются, вообще говоря, неоднозначными. Исследованы аналитические свойства полученного линейного дифференциального уравнения и выявлены основные свойства траекторий на сфере Пуассона. Также в работах [2, 3] было показано, что при выполнении условий Гесса и при дополнительном условии ортогональности кинетического момента тела и вектора восходящей вертикали уравнения Эйлера — Пуассона интегрируются в эллиптических функциях.

В работе [4] показано, что частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса, будет существовать и в задаче о движении гиростата — твёрдого тела с неподвижной точкой, в котором расположен вращающийся однородный маховик. В работе [5] было показано, что задача о движении тяжёлого гиростата при условиях Гесса — Сретенского приводит к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка

с переменными коэффициентами. В дальнейшем были предложены многочисленные аналоги случая Гесса, имеющие место в различных задачах. В работах [6]–[8] были указаны аналоги случая Гесса в задаче о качении тяжёлого твёрдого тела по абсолютно гладкой плоскости [6], в задаче о движении тела на струне [7] и в задаче о движении тела в потоке частиц [8]. В работах [9, 10] были указаны аналоги случая Гесса в задаче о движении гироскопа в кардановом подвесе и в задаче о падении твёрдого тела в жидкости. В работах [11, 12] при помощи алгоритма Ковачича был исследован вопрос об условиях интегрируемости в квадратурах задачи о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Гесса. В работе [13] было показано, что исследование задачи о качении неоднородного шара по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости при условиях Гесса приводится к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, причём если кинетический момент шара относительно его центра масс ортогонален вектору восходящей вертикали, то задача интегрируется в квадратурах. Наиболее общие условия, при выполнении которых в задаче о движении гиростата под действием потенциальных, гироскопических и циркулярно — гироскопических сил существует частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса, были указаны в работе [14].

В данной работе рассматривается задача о движении гиростата, находящегося под действием силы тяжести и гироскопических сил. Показано, что при выполнении условий Гесса — Сретенского, а также дополнительных условий на гироскопические силы, указанных в работе [14], решение задачи о движении тяжёлого гиростата под действием гироскопических сил приводится к интегрированию некоторого линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Причём коэффициенты полученного уравнения являются рациональными функциями независимой переменной. При помощи алгоритма Ковачича [15, 16] в работе решается вопрос о существовании лиувиллевых решений у соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка. Получены условия на параметры задачи, при выполнении которых общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка записывается в явном виде. Показано, как используя явный вид общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, получить решение уравнений движения гиростата в квадратурах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА И ИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим движение в однородном поле тяжести механической системы S , состоящей из двух твёрдых тел, соединённых между собой. Первое тело S_0 (носитель) представляет собой тяжёлое твёрдое тело с неподвижной точкой O . Допустим, что с этим телом связана некоторая ось, вокруг которой может вращаться маховик S_1 — геометрически и динамически симметричное твёрдое тело, осью симметрии которого является указанная ось. Центр масс O_1 маховика также расположен на оси динамической симметрии. Обозначим через e единичный вектор, определяющий положение оси вращения маховика относительно тела-носителя S_0 . Поскольку маховик S_1 является динамически симметричным твёрдым телом, то его вращение не изменяет положения центра масс механической системы S , состоящей из тела-носителя S_0 и маховика S_1 . Также вращение маховика не изменяет распределения масс в системе S . Такую систему (тело — носитель с маховиком) принято называть гиростатом.

Введём подвижную систему координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела S_0 для точки O . Обозначим через e_1, e_2, e_3 единичные базисные векторы системы координат $Ox_1x_2x_3$. Пусть $\mathbb{J}_O = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ — матрица тензора инерции тела S_0 относительно главных осей $Ox_1x_2x_3$. Обозначим через $\omega = \omega_1e_1 + \omega_2e_2 + \omega_3e_3$ угловую скорость твёрдого тела, $\gamma = \gamma_1e_1 + \gamma_2e_2 + \gamma_3e_3$ — единичный вектор восходящей вертикали и $r_0 = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ радиус-вектор центра масс системы S относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$. Пусть \mathbb{I} — матрица тензора инерции маховика относительно системы координат

$O_1x_1y_1z_1$, жёстко связанной с маховиком. Ось O_1z_1 данной системы направлена вдоль оси динамической симметрии маховика. Предположим, что вращение маховика происходит с постоянной угловой скоростью Ω . Тогда кинетический момент рассматриваемой системы может быть записан следующим образом (см. [17]):

$$\mathbf{K} = \mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \Omega\mathbb{I}\mathbf{e}. \quad (1)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (1) называется гиростатическим моментом. Обозначим его через \mathbf{s} . Гиростатический момент \mathbf{s} — это кинетический момент маховика S_1 относительно тела — носителя S_0 . Следовательно, мы можем переписать выражение (1) в виде

$$\mathbf{K} = \mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}.$$

Выведем теперь уравнения движения рассматриваемой системы. Пусть M — масса системы, g — величина ускорения свободного падения. Тогда $\mathbf{P} = -Mg\boldsymbol{\gamma}$ — сила тяжести, направленная вертикально вниз и приложенная к центру масс системы. Будем считать, что система S движется под действием момента силы тяжести $Mg[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0]$ и момента гироскопических сил $[\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}]$. Здесь $\mathbb{G} = \mathbb{G}^T$ — некоторая симметричная матрица с постоянными коэффициентами. Отметим, что момент подобного вида возникает вследствие действия силы Лоренца при вращении заряженного твёрдого тела, помещённое в однородное магнитное поле с неизменным вектором напряжённости [14]. Тогда закон изменения кинетического момента системы S , записанный в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$, даёт векторное уравнение

$$\dot{\mathbf{K}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}] = Mg[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0] + [\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}].$$

Поскольку гиростатический момент является постоянным в процессе движения, $\dot{\mathbf{s}} = 0$, то данное уравнение может быть представлено в виде

$$\mathbb{J}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \mathbf{s})] = Mg[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{r}_0] + [\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (2)$$

Векторное уравнение (2), рассматриваемое совместно с уравнением Пуассона

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}], \quad (3)$$

образует замкнутую систему шести дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих движение гиростата. При произвольных значениях параметров задачи система уравнений (2), (3) имеет три первых интеграла

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega}) + Mg(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}_0) = E, \quad K = ((\mathbb{J}_O\boldsymbol{\omega} + \mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \frac{1}{2}(\mathbb{G}\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = k, \quad (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 1.$$

В работе [14] были получены условия, при выполнении которых у системы уравнений (2), (3) существует частный случай интегрируемости, аналогичный случаю Гесса. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для системы уравнений (2), (3) выполняются следующие условия:

$$A_2(A_3 - A_1)x_2^2 = A_1(A_2 - A_3)x_1^2, \quad x_3 = 0, \quad s_3 = 0, \quad A_2 > A_3 > A_1, \quad (4)$$

а матрица \mathbb{G} имеет вид:

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причём для компонент g_{11} , g_{12} , g_{22} справедливы условия

$$g_{11}x_2 - g_{12}x_1 = 0, \quad g_{12}x_2 - g_{22}x_1 = 0. \quad (5)$$

Тогда система уравнений (2), (3) обладает частным интегралом Гесса — Сретенского, который имеет вид

$$A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 + \frac{A_1x_1(s_2x_1 - s_1x_2)}{(A_3 - A_1)x_2} = 0. \quad (6)$$

Проанализируем условия (5). На три компоненты матрицы \mathbb{G} мы имеем два условия. Следовательно, вводя вспомогательный параметр λ , мы без ограничения общности можем написать, что

$$g_{11} = \lambda x_1^2, \quad g_{12} = \lambda x_1x_2, \quad g_{22} = \lambda x_2^2.$$

Таким образом, при выполнении условий (4), (5) система уравнений (2), (3) в скалярной форме записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 - s_2\omega_3 &= -Mg x_2\gamma_3 + \lambda x_2\omega_3(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2), \\ A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 + s_1\omega_3 &= Mg x_1\gamma_3 - \lambda x_1\omega_3(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2), \end{aligned} \quad (7)$$

$$A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 + s_2\omega_1 - s_1\omega_2 = Mg(x_2\gamma_1 - x_1\gamma_2) + \lambda(x_1\omega_2 - x_2\omega_1)(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2),$$

$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2. \quad (8)$$

Первые интегралы системы уравнений (7), (8) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + Mg(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2) &= E, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \\ (A_1\omega_1 + s_1)\gamma_1 + (A_2\omega_2 + s_2)\gamma_2 + A_3\omega_3\gamma_3 + \frac{\lambda}{2}(x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2)^2 &= k. \end{aligned}$$

Покажем, что при выполнении условий (4), (5) система уравнений (7), (8) допускает четвёртый частный интеграл (6). Для этого умножим первое уравнение системы (7) на x_1 , а второе — на x_2 , и складывая их, получим

$$\frac{d}{dt}(A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2) = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3x_2 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3x_1 + \omega_3(s_2x_1 - s_1x_2). \quad (9)$$

Правая часть соотношения (9) с учётом условий (4) может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3x_2 + (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3x_1 + \omega_3(s_2x_1 - s_1x_2) \\ = \frac{\omega_3(A_2 - A_3)x_1}{A_2x_2} \left(A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2 + \frac{A_1x_1(s_2x_1 - s_1x_2)}{(A_3 - A_1)x_2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому с учётом соотношения (10) из уравнения (9) следует вывод, что если в начальный момент времени выполняется условие (6), то это условие справедливо во все время движения гиростата. Следовательно, при выполнении условий (4), (5) система уравнений (7), (8) допускает первый интеграл (6).

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Перепишем систему уравнений (7), (8) в других переменных. Для этого введём обозначения

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{A_1\omega_1x_1 + A_2\omega_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_2 &= \frac{A_2\omega_2x_1 - A_1\omega_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & L_3 &= A_3\omega_3, \\ \nu_1 &= \frac{\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_2 &= \frac{\gamma_2x_1 - \gamma_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \nu_3 &= \gamma_3, & k_1 &= \frac{s_1x_1 + s_2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \\ k_2 &= \frac{s_2x_1 - s_1x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, & \Gamma &= Mg\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & \Lambda &= \lambda(x_1^2 + x_2^2), \\ a &= \frac{A_2x_1^2 + A_1x_2^2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & b &= \frac{(A_1 - A_2)x_1x_2}{A_1A_2(x_1^2 + x_2^2)}, & c &= \frac{1}{A_3}. \end{aligned}$$

Тогда в переменных $L_1, L_2, L_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ система уравнений (7), (8) переписывается следующим образом:

$$\dot{L}_1 = -bL_3\left(L_1 - \frac{ck_2}{b}\right), \quad \dot{L}_2 = (a - c)L_1L_3 + bL_2L_3 - ck_1L_3 - \Lambda c\nu_1L_3 + \Gamma\nu_3,$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 &= -(a - c)L_1L_2 + bL_1^2 - bL_2^2 + (k_1b - k_2a)L_1 + (k_1c - k_2b)L_2 \\ &\quad + \Lambda(bL_1 + cL_2)\nu_1 - \Gamma\nu_2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - (cL_2 + bL_1)\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= (aL_1 + bL_2)\nu_3 - cL_3\nu_1, \\ \dot{\nu}_3 &= -(aL_1 + bL_2)\nu_2 + (cL_2 + bL_1)\nu_1. \end{aligned}$$

Из первого уравнения системы уравнений (11) следует частный интеграл Гесса — Сретенского (6), который имеет вид

$$L_1 \equiv \frac{ck_2}{b}. \quad (12)$$

Инвариантное многообразие (12) (или, в других обозначениях, (6)) вместе с условиями (4), (5) и определяет интегрируемый случай Гесса — Сретенского в задаче о движении тяжёлого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических сил. При выполнении условий (4), (5) на уровне частного интеграла Гесса — Сретенского (12) уравнения (11) заметно упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{L}}_2 &= b\bar{L}_2L_3 + (F - Gc)L_3 - \Lambda c\nu_1L_3 + \Gamma\nu_3, & \dot{\bar{L}}_3 &= -b\bar{L}_2^2 - (F - Gc)\bar{L}_2 + \Lambda c\bar{L}_2\nu_1 - \Gamma\nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - c\bar{L}_2\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= -cL_3\nu_1 + b\bar{L}_2\nu_3 + F\nu_3, & \dot{\nu}_3 &= c\bar{L}_2\nu_1 - b\bar{L}_2\nu_2 - F\nu_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{L}_2 = L_2 + k_2, \quad F = \frac{(ac - b^2)k_2}{b}, \quad G = \frac{ck_2}{b} + k_1.$$

Система уравнений (13) допускает следующие первые интегралы:

$$\frac{c}{2}(\bar{L}_2^2 + L_3^2) + \Gamma\nu_1 = E; \quad \bar{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 + G\nu_1 + \frac{\Lambda}{2}\nu_1^2 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (14)$$

3. ОБЕЗРАЗМЕРИВАНИЕ УРАВНЕНИЙ. ПРИВЕДЕНИЕ К ОДНОМУ УРАВНЕНИЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Обезразмерим теперь систему уравнений (13) и первые интегралы (14). Для этого введём безразмерные переменные y и z по формулам

$$y = \bar{L}_2 \sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad z = L_3 \sqrt{\frac{c}{\Gamma}},$$

а также безразмерное время $\tau = t\sqrt{\Gamma c}$ и безразмерные параметры

$$d_1 = \frac{b}{c}, \quad Q = \Lambda \sqrt{\frac{c}{\Gamma}}, \quad A = \frac{F}{\sqrt{\Gamma c}}, \quad B = G \sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

Введём также безразмерные постоянные первых интегралов

$$h = \frac{E}{\Gamma}, \quad p_1 = k \sqrt{\frac{c}{\Gamma}}.$$

Тогда в безразмерной форме уравнения движения гиростата запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1 y z + (A - B)z - Q \nu_1 z + \nu_3, & \frac{dz}{d\tau} &= -d_1 y^2 - (A - B)y + Q \nu_1 y - \nu_2, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z \nu_2 - y \nu_3, & \frac{d\nu_2}{d\tau} &= d_1 y \nu_3 - z \nu_1 + A \nu_3, & \frac{d\nu_3}{d\tau} &= -d_1 y \nu_2 + y \nu_1 - A \nu_2, \end{aligned} \quad (15)$$

Система уравнений движения гиростата (15) обладает первыми интегралами

$$\frac{y^2 + z^2}{2} + \nu_1 = h, \quad y \nu_2 + z \nu_3 + B \nu_1 + \frac{Q}{2} \nu_1^2 = p_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (16)$$

Из системы уравнений (15) с использованием первых интегралов (16) получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка, к нахождению общего решения которого сводится решение данной задачи. Умножая первое уравнение системы (15) на y , а второе — на z и складывая, получим

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) = y \nu_3 - z \nu_2. \quad (17)$$

Из первого из интегралов (16) находим, что

$$\nu_1 = h - \frac{y^2 + z^2}{2},$$

откуда следуют соотношения

$$\begin{aligned} \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1 - \nu_1^2 = 1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2, \\ y \nu_2 + z \nu_3 &= p_1 + B \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right) - \frac{Q}{2} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2. \end{aligned}$$

Используя очевидное тождество

$$(y^2 + z^2)(\nu_2^2 + \nu_3^2) = (y \nu_2 + z \nu_3)^2 + (y \nu_3 - z \nu_2)^2, \quad (18)$$

получаем

$$(y\nu_3 - z\nu_2)^2 = (y^2 + z^2) \left(1 - \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2 \right) - \left(p_1 + B \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right) - \frac{Q}{2} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} - h \right)^2 \right)^2 = \frac{P_4(y^2 + z^2)}{64},$$

где $P_4(y^2 + z^2)$ — многочлен четвёртой степени относительно $y^2 + z^2$ с постоянными коэффициентами. В явном виде многочлен $P_4(y^2 + z^2)$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} P_4(y^2 + z^2) = & -Q^2(y^2 + z^2)^4 + 8(BQ + Q^2h - 2)(y^2 + z^2)^3 \\ & + 8(8h - 2B^2 - 6BQh - 3Q^2h^2 + 2p_1Q)(y^2 + z^2)^2 - 16(Qh^2 + 2Bh - 2p_1)^2 \\ & + 32(2 - 2h^2 - 2p_1B - 2p_1Qh + 2B^2h + 3QBh^2 + Q^2h^3)(y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Будем считать, что

$$y\nu_3 - z\nu_2 = -\frac{\sqrt{P_4(y^2 + z^2)}}{8}, \quad (19)$$

(знак перед корнем выражения, стоящего в правой части равенства (19), может быть выбран любым). С учётом равенства (19) уравнение (17) принимает вид:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) = -\frac{\sqrt{P_4(y^2 + z^2)}}{8}.$$

Умножим теперь первое уравнение системы (8) на z , а второе — на y и вычтем из второго уравнения первое. Получим:

$$\begin{aligned} y \frac{dz}{d\tau} - z \frac{dy}{d\tau} = & -d_1y(y^2 + z^2) - (A - B)(y^2 + z^2) + Q\nu_1(y^2 + z^2) - (y\nu_2 + z\nu_3) \\ = & -d_1y(y^2 + z^2) - \frac{3Q}{8}(y^2 + z^2)^2 + \frac{1}{2}(Qh + B - 2A)(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(Qh^2 + 2Bh - 2p_1). \end{aligned}$$

Введём теперь новые переменные x и φ («полярные координаты») по формулам

$$y = x \cos \varphi, \quad z = x \sin \varphi. \quad (20)$$

Тогда для определения переменных x и φ мы получаем следующую систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{d\tau} = & -\frac{\sqrt{P_8(x)}}{8}, \\ x^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = & -d_1x^3 \cos \varphi - \frac{3Q}{8}x^4 + \frac{1}{2}(Qh + B - 2A)x^2 - \frac{1}{2}(Qh^2 + 2Bh - 2p_1), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} P_8(x) = & -Q^2x^8 + 8(BQ + Q^2h - 2)x^6 + 8(8h - 2B^2 - 6BQh - 3Q^2h^2 + 2p_1Q)x^4 \\ & + 32(2 - 2h^2 - 2p_1B - 2p_1Qh + 2B^2h + 3QBh^2 + Q^2h^3)x^2 - 16(Qh^2 + 2Bh - 2p_1)^2. \end{aligned}$$

Из системы уравнений (21), разделив одно уравнение на другое, получаем зависимость $\varphi = \varphi(x)$, которая определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{8d_1x^2}{\sqrt{P_8(x)}} \cos \varphi + \frac{3Qx^4 - 4(Qh + B - 2A)x^2 + 4(2p_1 - Qh^2 - 2Bh)}{x\sqrt{P_8(x)}}. \quad (22)$$

Уравнение (22) имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dx} = a_0 \cos \varphi + b_0,$$

тогда замена переменной по формуле

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

приводит данное уравнение к уравнению Риккати:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{b_0 - a_0}{2} w^2 + \frac{b_0 + a_0}{2} = f_2 w^2 + f_0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{3Qx^4 - 8d_1x^3 + 4(2A - B - Qh)x^2 + 4(2p_1 - Qh^2 - 2Bh)}{2x\sqrt{P_8(x)}}, \\ f_0 &= \frac{3Qx^4 + 8d_1x^3 + 4(2A - B - Qh)x^2 + 4(2p_1 - Qh^2 - 2Bh)}{2x\sqrt{P_8(x)}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из общей теории дифференциальных уравнений известно (см. [18]), что если общее уравнение Риккати имеет вид (23), то замена переменных

$$u(x) = \exp \left(- \int f_2(x)w(x) dx \right) \quad (25)$$

приводит общее уравнение Риккати к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + a(x)\frac{du}{dx} + b(x)u = 0, \quad a(x) = -\frac{1}{f_2} \frac{df_2}{dx}, \quad b(x) = f_0 f_2. \quad (26)$$

Учитывая, что функции f_2 и f_0 имеют вид (24), можно сделать вывод, что коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка (26) являются рациональными функциями независимой переменной x . Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Решение задачи о движении тяжёлого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических сил сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка (25) с рациональными коэффициентами.*

Действительно, если удаётся записать в явном виде общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (25)

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x),$$

то, используя это решение, можно получить зависимость $\varphi = \varphi(x)$, используя которую по формулам (20) получим явные выражения $y = y(x)$ и $z = z(x)$. Теперь из системы уравнений

$$\begin{aligned} y(x)\nu_2 + z(x)\nu_3 &= k_1 + B \left(\frac{x^2}{2} - h \right) - \frac{Q}{2} \left(\frac{x^2}{2} - h \right)^2, \\ y(x)\nu_3 - z(x)\nu_2 &= -\frac{\sqrt{P_8(x)}}{8}, \end{aligned}$$

определяем зависимости $\nu_2 = \nu_2(x)$ и $\nu_3 = \nu_3(x)$. Зависимость $\nu_1 = \nu_1(x)$ определяется из первого интеграла (16)

$$\nu_1 = h - \frac{x^2}{2},$$

а зависимость $x = x(\tau)$ определяется из первого уравнения системы (21).

Таким образом, решение задачи о движении тяжёлого гиростата с неподвижной точкой под действием гироскопических сил в случае Гесса — Сретенского сводится к нахождению общего решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (26), коэффициенты которого имеют вид рациональных функций. Следовательно, в этом случае представляет интерес вопрос о том, при каких значениях параметров задачи общее решение уравнения (26) выражается через лиувиллевы функции. Лиувиллевы функции — это функции, которые строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределённого интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения [15, 16]. Необходимые и достаточные условия существования решения линейного дифференциального уравнения второго порядка, выражающегося через лиувиллевы функции, даёт так называемый алгоритм Ковачича [15, 16]. Применение алгоритма Ковачича к линейному дифференциальному уравнению второго порядка (26) приводит к следующему результату.

Теорема 3. Пусть $Q \neq 0$ (гироскопические силы присутствуют) и $d_1 \neq 0$ (распределение масс в твёрдом теле не соответствует случаю Лагранжа). Тогда линейное дифференциальное уравнение второго порядка (26) допускает общее решение, выражающееся через лиувиллевы функции при выполнении условия

$$A = \frac{(d_1^2 + 1)}{Q}. \quad (27)$$

Действительно, при выполнении условия (27) общее решение линейного дифференциального уравнения (26) принимает вид:

$$u(x) = \sqrt{\frac{\Pi_4(x)}{x}} (C_1 \cos \Phi(x) + C_2 \sin \Phi(x)), \quad \Phi(x) = 8\sqrt{D} \int \frac{x f_2^* dx}{\Pi_4(x)},$$

$$\begin{aligned} \Pi_4(x) = & d_1 Q^3 x^4 - 4d_1^2 Q^2 x^3 - 4d_1 Q(Q^2 h + BQ - 2 - 2d_1^2)x^2 \\ & + 8(d_1^2 Q^2 h + (d_1^2 + 1)BQ - (d_1^2 + 1)^2)x + 4d_1 Q^2(Q^2 h + 2Bg - 2p_1), \end{aligned}$$

$$D = (d_1^2 + 1)^2 (BQ - d_1^2 - 1)^2 + 2d_1^2 Q^2 (d_1^2 + 1)(p_1 Q - d_1^2 h - h) - Q^4 d_1^2, \quad f_2^* = f_2|_{(27)}.$$

Следствие. Если параметры задачи удовлетворяют условиям

$$A = \frac{d_1^2 + 1}{Q}, \quad B = \frac{1}{Q}, \quad h = \frac{Q^4 + (d_1^2 + 1)^2}{2Q^2(d_1^2 + 1)}, \quad p_1 = \frac{Q^4 + (d_1^2 + 1)^2}{2Q^3(d_1^2 + 1)} + \frac{Q}{2},$$

то общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка упрощается и записывается в виде

$$u(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_1(x) \int \frac{f_2 dx}{u_1^2(x)}, \quad u_1(x) = \frac{Q^4 - (d_1^2 + 1)((Qx - d_1)^2 + 1)}{\sqrt{x}}.$$

Таким образом, условие, при котором удаётся найти в явном виде общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка (26) имеет вид (27).

4. ДВИЖЕНИЕ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЛЬКО ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Вернёмся к системе уравнений (13) и рассмотрим частный случай, когда на гиростат действуют только гироскопические силы ($\Gamma = 0$). В этом случае система уравнений (13) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{L}}_2 &= b\bar{L}_2L_3 + (F - Gc)L_3 - \Lambda c\nu_1L_3, & \dot{L}_3 &= -b\bar{L}_2^2 - (F - Gc)\bar{L}_2 + \Lambda c\bar{L}_2\nu_1, \\ \dot{\nu}_1 &= cL_3\nu_2 - c\bar{L}_2\nu_3, & \dot{\nu}_2 &= -cL_3\nu_1 + b\bar{L}_2\nu_3 + F\nu_3, & \dot{\nu}_3 &= c\bar{L}_2\nu_1 - b\bar{L}_2\nu_2 - F\nu_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Система уравнений (28) допускает первые интегралы

$$\bar{L}_2^2 + L_3^2 = E; \quad \bar{L}_2\nu_2 + L_3\nu_3 + G\nu_1 + \frac{\Lambda}{2}\nu_1^2 = k; \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (29)$$

Запишем систему уравнений (28) и первые интегралы (29) в безразмерной форме. В отсутствие силы тяжести произведём обезразмеривание иначе, чем в системе уравнений (13). А именно, введём безразмерные компоненты y и z кинетического момента по формулам

$$\bar{L}_2 = y\Lambda, \quad L_3 = z\Lambda.$$

Введём также безразмерное время τ по формуле $\tau = \Lambda ct$, а также безразмерные параметры и безразмерные постоянные интегралов

$$A = \frac{F}{c\Lambda}, \quad B = \frac{G}{\Lambda}, \quad h^2 = \frac{E}{\Lambda^2}, \quad p_1 = \frac{k}{\Lambda}.$$

Тогда система уравнений (28) переписется в безразмерном виде следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= d_1yz + (A - B)z - \nu_1z, & \frac{dz}{d\tau} &= -d_1y^2 - (A - B)y + \nu_1y, \\ \frac{d\nu_1}{d\tau} &= z\nu_2 - y\nu_3, & \frac{d\nu_2}{d\tau} &= d_1y\nu_3 - z\nu_1 + A\nu_3, & \frac{d\nu_3}{d\tau} &= -d_1y\nu_2 + y\nu_1 - A\nu_2, \end{aligned} \quad (30)$$

Система уравнений (30) допускает первые интегралы

$$y^2 + z^2 = h^2, \quad y\nu_2 + z\nu_3 + B\nu_1 + \frac{\nu_1^2}{2} = p_1, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \quad (31)$$

Из системы уравнений (30) с использованием первых интегралов (31) получим линейное уравнение второго порядка, к нахождению общего решения которого сводится решение данной задачи. Воспользуемся тождеством (18). Перепишем данное тождество следующим образом:

$$h^2(1 - \nu_1^2) = \left(p_1 - B\nu_1 - \frac{\nu_1^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{d\nu_1}{d\tau}\right)^2.$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{d\nu_1}{d\tau}\right)^2 = \frac{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}{4}.$$

Извлекая корень из обеих частей данного уравнения, получим:

$$\frac{d\nu_1}{d\tau} = \pm \frac{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}{2}. \quad (32)$$

Таким образом, зависимость $\nu_1 = \nu_1(\tau)$ определяется из уравнения (32) при помощи квадратур.

Из уравнения (32) следует, что

$$z\nu_2 - y\nu_3 = \pm \frac{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}{2}. \quad (33)$$

Выберем для определённости знак « $-$ » перед корнем в правой части соотношения (33) (выбор этого знака не влияет на окончательный вид линейного дифференциального уравнения второго порядка, к интегрированию которого приводится решение задачи). Введём новую переменную φ по формуле

$$y = h \cos \varphi, \quad z = h \sin \varphi$$

и будем считать, что $\varphi = \varphi(\nu_1)$. Тогда

$$\frac{dz}{d\tau} = h \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} = h \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\nu_1} \frac{d\nu_1}{d\tau}.$$

В результате из системы уравнений (30) мы получаем для φ следующее дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\nu_1} = & \frac{2d_1 h \cos \varphi}{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}} \\ & + \frac{2(A - B - \nu_1)}{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1\nu_1 + 4(p_1 - h^2 - B^2)\nu_1^2 - 4B\nu_1^3 - \nu_1^4}}. \end{aligned} \quad (34)$$

В дальнейшем для сокращения выкладок будем обозначать ν_1 через x . При помощи замены переменной

$$w = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

уравнение (34) приводится к уравнению Риккати:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= f_2 w^2 + f_0, \quad (35) \\ f_2 &= \frac{A - d_1 h - B - x}{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1 x + 4(p_1 - h^2 - B^2)x^2 - 4Bx^3 - x^4}}, \\ f_0 &= \frac{A + d_1 h - B - x}{\sqrt{4(h^2 - p_1^2) + 8Bp_1 x + 4(p_1 - h^2 - B^2)x^2 - 4Bx^3 - x^4}}. \end{aligned}$$

Уравнение Риккати (35) при помощи замены (25) приводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + a(x) \frac{du}{dx} + b(x)u = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{P_4(x)}{(x + d_1 h + B - A)(x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p_1)x^2 - 8Bp_1 x + 4(p_1^2 - h^2))}, \\ b(x) &= -\frac{(A + d_1 h - B - x)(A - d_1 h - B - x)}{(x^4 + 4Bx^3 + 4(B^2 + h^2 - p_1)x^2 - 8Bp_1 x + 4(p_1^2 - h^2))}, \end{aligned}$$

$$P_4(x) = x^4 + 2(2B - A + d_1h)x^3 + 6B(B - A + d_1h)x^2 + 4[(B - A + d_1h)(B^2 + h^2) + p_1(A - d_1h)]x + 4(h^2 - p_1^2 - Bp_1(B - A + d_1h)).$$

Применение алгоритма Ковачича к линейному дифференциальному уравнению (36) приводит к следующему результату.

Теорема 4. *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (36) допускает общее решение, выражающееся через лиувиллевы функции, при выполнении условия $A = 0$, то есть в случае, когда кинетический момент маховика коллинеарен радиусу – вектору из неподвижной точки в центр масс гиростата.*

Действительно, при $A = 0$ общее решение линейного дифференциального уравнения (36) принимает вид

$$u(x) = \sqrt{\Pi_2(x)} (C_1 \cos \Phi(x) + C_2 \sin \Phi(x)), \quad \Phi(x) = 2h\sqrt{D} \int \frac{f_2^* dx}{\Pi_2(x)},$$

$$\Pi_2(x) = d_1(x + B + d_1h)^2 + 2hB + d_1(h^2d_1^2 + 2h^2 - B^2 - 2p_1),$$

$$D = (B^2 - d_1^2h^2)(d_1^2 + 1)^2 + 2d_1^2(d_1^2 + 1)k_1 - d_1^2, \quad f_2^* = f_2|_{A=0}.$$

Следствие. При выполнении условий

$$A = 0, \quad h = \pm \frac{1}{\sqrt{d_1^2 + 1}} - \frac{B}{d_1}, \quad p_1 = \frac{1}{2}(d_1^2h^2 - B^2) + h^2 + \frac{Bh}{d_1}, \quad (37)$$

общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка упрощается и записывается в виде:

$$u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) \int \frac{f_2^* dx}{u_1^2(x)}, \quad u_1(x) = x\sqrt{d_1^2 + 1} + d_1, \quad f_2^* = f_2|_{(37)}.$$

Таким образом, уравнения движения гиростата под действием только гироскопических сил в случае Гесса — Сретенского интегрируются в квадратурах при условии $A = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена задача о движении гиростата с неподвижной точкой под действием силы тяжести и гироскопических сил в случае Гесса — Сретенского. Показано, что задача описания движения гиростата приводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с рациональными коэффициентами. При помощи алгоритма Ковачича получены условия на параметры задачи, при выполнении которых общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка выражается через лиувиллевы функции. В этом случае уравнения движения гиростата могут быть проинтегрированы в квадратурах. В частности, показано, что если гиростат движется только под действием гироскопических сил, его уравнения движения могут быть проинтегрированы в квадратурах если кинетический момент маховика коллинеарен радиусу – вектору из неподвижной точки в центр масс гиростата.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-11-20009). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hess W. Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // *Mathematische Annalen*. 1890. V. 37, N 2. P. 153–181; DOI: 10.1007/BF01200234
2. Некрасов П.А. К задаче о движении тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки // *Математический сборник*. 1892. Т. 16, № 3. С. 508–517.
3. Некрасов П.А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки // *Мат. сб.* 1896. Т. 18, № 2. С. 161–274.
4. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата // *Доклады АН СССР*. 1963. Т. 149, № 2. С. 292–294.
5. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях движения тяжёлого твёрдого тела с гироскопом // *Вестн. Московского ун-та. Математика, механика*. 1963. № 3. С. 60–71.
6. Буров А.А. О частных интегралах уравнений движения твёрдого тела по гладкой горизонтальной плоскости // *Известия АН СССР. Механика твёрдого тела*. 1986. № 5. С. 72–73.
7. Буров А.А. О частных интегралах в задаче о движении тела на струне // *Известия АН СССР. Механика твёрдого тела*. 1987. № 2. С. 84.
8. Буров А.А., Карапетян А.В. О движении твёрдого тела в потоке частиц // *Прикл. математика и механика*. 1993. Т. 57, № 2. С. 77–81.
9. Борисов А.В., Мамаев И.И. *Динамика твёрдого тела*. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
10. Борисов А. В., Мамаев И. С. Случай Гесса в динамике твёрдого тела // *Прикладная математика и механика*. 2003. Т. 67, № 2. С. 256–265.
11. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Применение алгоритма Ковачича для исследования случая Гесса в задаче о движении тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой // *Динамические системы*. 2020. Т. 10, № 2. С. 197–204.
12. Bardin B.S., Kuleshov A.S. Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case // *ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2022. V. 102, N 11; DOI: 10.1002/ZAMM.202100036
13. Кулешов А.С., Лобанова Е.В. Анализ интегрируемого случая Гесса в задаче о движении шара по гладкой горизонтальной плоскости // *Труды МАИ*. 2024. № 135; <https://trudymai.ru/published.php?ID=179675>
14. Косов А.А. Об аналогах случая Гесса для гиростата при действии момента гироскопических и циркулярных сил // *Прикл. математика и механика*. 2022. Т. 86, № 6. С. 839–856.
15. Kovacic J.J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // *J. Symbolic Computation*. 1986. V. 2, N 1. P. 3–43; DOI: 10.1016/S0747-7171(86)80010-4
16. Бардин Б.С., Кулешов А.С. Алгоритм Ковачича и его применение в задачах классической механики. М.: Издательство МАИ, 2020.
17. Yehia H.M. *Rigid Body Dynamics: A Lagrangian Approach*. Basel: Birkhauser, 2022.
18. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М.: Физматлит, 2001.

UDC 531.36

**EXISTENCE OF LIOUVILLIAN SOLUTIONS IN THE PROBLEM OF
MOTION OF A HEAVY GYROSTAT UNDER THE ACTION OF
GYROSCOPIC FORCES IN THE HESS CASE**

© 2025 A. S. Kuleshov^{a,b}, A. D. Skripkin^c

*Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory, Main building of MSU, Moscow 119234, Russia*

E-mails: ^akuleshov@mech.math.msu.su, ^balexander.kuleshov@math.msu.ru,
^cantohaskripkin@gmail.com

Received 20.03.2025, revised 02.10.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. The problem of the motion of a gyrost at with a fixed point under the simultaneous action of gravity and gyroscopic forces is considered in the case similar to the Hess case in the problem of the motion of a heavy rigid body with a fixed point. It is shown that the solution of the problem is reduced to solving the second order linear differential equation with rational coefficients. Using the Kovacic algorithm, conditions on the problem parameters are obtained for which the corresponding second – order linear differential equation admits an explicit solution expressed in Liouvillian functions. It is shown that, when the obtained conditions are satisfied, the equations of motion of the gyrost at can be integrated by quadratures.

Keywords: heavy gyrost at, Gyroscopic forces, Hess case, Linear second order differential equation, Kovacic algorithm, Liouvillian solutions.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.409

REFERENCES

1. Hess W. Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punk. *Mathematische Annalen*, 1890, V. 37, No. 2, pp. 153–181; DOI: 10.1007/BF01200234
2. Nekrasov P. A. K zadache o dvizhenii tyazhelogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoi tochki [On the problem of motion of a heavy rigid body about a fixed point]. *Mat. Sbornik*, 1892, Vol. 16, No. 3, pp. 508–517 (in Russian).
3. Nekrasov P. A. Analiticheskoe issledovanie odnogo sluchaya dvizheniya tyazhelogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoi tochki [Analytical investigation of the case of the motion of a heavy rigid body about a fixed point]. *Mat. Sbornik*, 1896, Vol. 18, No. 2, pp. 161–274 (in Russian).
4. Sretenskii L. N. O nekotorykh sluchayakh integriruемости uravnenii dvizheniya girostata [Some Integrability Cases for the Equations of Gyrost at Motion]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, Vol. 149, No. 2, pp. 292–294 (in Russian).
5. Sretenskii L. N. O nekotorykh sluchayakh dvizheniya tyazhelogo tverdogo tela s giroskopom [On Some Cases of Motion of a Heavy Rigid Body with a Gyroscope]. *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat., Mekh.*, 1963, No. 3, pp. 60–71 (in Russian).
6. Burov A. A. O chastnykh integralakh uravnenii dvizheniya tverdogo tela po gladkoi gorizont al'noi ploskosti [Particular Integrals of the Equations of Motion of a Rigid Body over a Smooth Horizontal Plane]. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1986, No. 5, pp. 72–73 (in Russian).

7. Burov A. A. O chastnykh integralakh v zadache o dvizhenii tela na strune [Partial Integrals in the Problem of the Motion of a Body Suspended from a String]. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1987, No. 2, pp. 84 (in Russian).
8. Burov A. A., Karapetyan A. V. On the Motion of a Rigid Body in a Particle Flow. *J. Appl. Math. Mech.*, 1993, Vol. 57, No. 2, pp. 295–299; DOI: 10.1016/0021-8928(93)90057-5
9. Borisov A. V., Mamaev I. S. Rigid Body Dynamics. de Gruyter Studies in Mathematical Physics. Vol. 52. Walter de Gruyter GmbH, 2019; DOI: 10.1515/9783110544442
10. Borisov A. V., Mamaev I. S. The Hess case in Rigid – Body Dynamics. *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, Vol. 67, No. 2, pp. 227–235; DOI: 10.1016/S0021-8928(03)90009-8
11. Bardin B. S., Kuleshov A. S. Primenenie algoritma Kovachicha dlya issledovaniya sluchaya Gessa v zadache o dvizhenii tyazhelogo tverdogo tela s nepodvizhnoi tochkoj [Application of the Kovacic algorithm for the Investigation of Motion of a Heavy Rigid Body with a Fixed Point in the Hess Case]. *Dinam. Syst.*, 2020, Vol. 10, No. 2, pp. 197–204 (in Russian).
12. Bardin B. S., Kuleshov A. S. Application of the Kovacic algorithm for the investigation of motion of a heavy rigid body with a fixed point in the Hess case. *ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2022, Vol. 102, No. 11; DOI: 10.1002/ZAMM.202100036
13. Kuleshov A. S., Lobanova E. V. Analiz integriruemogo sluchaya Gessa v zadache o dvizhenii shara po gladkoi gorizontāl'noi ploskosti [Analysis of the Hess integrable case in the Problem of Motion of a Ball on a Smooth Plane], *Trudy MAI*, 2024, No. 135 (in Russian); <https://trudymai.ru/published.php?ID=179675>
14. Kosov A. A. On Analogues of the Hess Case for a Gyrostat under the action of the Moment of Gyroscopic and Circular Forces. *Mech. Solids*, Vol. 57, No. 6, pp. 1848–1861; DOI: 10.3103/S0025654422080192
15. Kovacic J. J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. *J. Symb. Comput.*, 1986, Vol. 2, No. 1, pp. 3–43; DOI: 10.1016/S0747-7171(86)80010-4
16. Bardin B. S., Kuleshov A. S. Algoritm Kovachicha i ego primenenie v zadachakh klassicheskoi mekhaniki [The Kovacic algorithm and its application to the problems of classical mechanics]. Moscow: MAI Publishing, 2020 (in Russian).
17. Yehia H. M. Rigid Body Dynamics: A Lagrangian Approach. Basel: Birkhauser, 2022; DOI: 10.1007/978-3-030-96336-1
18. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. Boca-Raton – New York: CRC Press, 2003; DOI: 10.1201/9781420035339

УДК 539.371:519.632

**БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧИ ИЗГИБА КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОПОРАХ**© 2025 В. М. Садовский^{1,a}, А. А. Коянкин^{2,b}, В. В. Садовский^{2,c}¹*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия*²*Инженерно-строительный институт СФУ,
просп. Свободный, 82, г. Красноярск 660041, Россия*E-mails: ^asadov@icm.krasn.ru, ^bkoyankinaa@mail.ru,
^cvsadovskiy-sb23@stud.sfu-kras.ruПоступила в редакцию 06.03.2025 г.; после доработки 17.10.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Для расчёта прогиба круговой пластины, подпертой в конечном числе точек, под действием распределённой внешней нагрузки предлагается прямой вычислительный алгоритм, основанный на многократном применении быстрого преобразования Фурье и метода пятиточечной прогонки. При учёте ограничений на прогиб в произвольной системе точек строится фундаментальная система решений, с помощью которой решается задача о контакте пластины с подагтивными опорами. Приводятся результаты методических расчётов, демонстрирующие высокую эффективность алгоритма.

Ключевые слова: уравнение Софи Жермен, контактная задача, разностная схема, метод пятиточечной прогонки, быстрое преобразование Фурье.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.410

ВВЕДЕНИЕ

Задача изгиба пластин относится к классическим задачам теории упругости. Её решение для разных вариантов сосредоточенной и распределённой поверхностной нагрузки при различных условиях на контуре (жёсткая заделка, шарнирное опирание, свободный край) можно найти в трудах С. Жермен, Г. Кирхгофа, Р. Герца, А. Лява, С. П. Тимошенко, В. З. Власова, А. С. Вольмира, А. Л. Гольденвейзера и других известных авторов. Теория пластин широко применяется в строительной механике для анализа напряжений и деформаций в тонкостенных элементах конструкций из однородных и армированных материалов, композитов, слоистых и блочных структур.

Современные здания в строительстве достигают в высоту полкилометра и более, а пролёты сооружений могут быть порядка километра. Такие размеры стали возможными за счёт применения инновационных конструктивных систем. При этом для экстремально больших зданий и сооружений отсутствуют нормативные параметры нагрузок и воздействий, что приводит к необходимости проведения дополнительных расчётов. Усложняющими факторами являются нелинейность (физическая, конструктивная, геометрическая, генетическая) [1], многослойность несущих конструкций (сборно-монолитные конструкции, усиление и восстановление) [2], а также неравномерность осадки фундаментов. При учёте этих факторов возрастает трудоёмкость выполнения расчётов, что неизбежно приводит к увеличению времени вычислений, необходимости использования высокопроизводительной компьютерной техники и быстрых вычислительных алгоритмов. Особую роль расчётные методы играют при строительстве зданий

и сооружений в условиях вечной мерзлоты [3, 4], поскольку на стадии проектирования необходимо учитывать изменения условий эксплуатации в период потепления и таяния грунта [5, 6]. Таким образом, современное развитие строительной индустрии требует разработки математического аппарата, способного максимально быстро и с требуемой точностью решать задачи, возникающие при анализе прочности элементов строительных конструкций.

Разработанный нами быстрый алгоритм предназначен для численного исследования частной задачи изгиба, с помощью которой можно моделировать влияние осадки опор на напряжённо-деформированное состояние круговой пластины. Алгоритм основан на разложении искомой сеточной функции прогиба при решении конечно-разностного аналога уравнения изгиба по окружной переменной на сумму по собственным функциям одномерного разностного оператора Лапласа (см., например, [7]). К решению возникающей при этом серии независимых одномерных систем уравнений по радиальной переменной применяется экономичный метод прогонки (в данном случае, пятиточечной). Альтернативный подход к решению задач изгиба — метод коллокаций и наименьших квадратов, обладающий высокой эффективностью, предложен в работах [8, 9]. Экстремальные по точности алгоритмы без насыщения для численного решения задач изгиба пластин разработаны в [10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассматривается круговая пластина радиуса R , подпёртая в $n \geq 3$ точках с полярными координатами r_k, θ_k на плоскости ($r_k < R, k = 1, 2, \dots, n$). Положения точек контакта пластины с опорными стержнями по высоте относительно её плоскости задаются смещениями δ_i . Требуется определить прогиб и основные характеристики статического напряжённо-деформированного состояния пластины (кривизны, моменты и перерезывающие усилия) под действием приложенной к ней распределённой системы сил $q(r, \theta)$.

В соответствии с гипотезами Кирхгофа — Лява радиальное u_r и окружное u_θ перемещения точек при чистом изгибе выражаются через производные от прогиба $w(r, \theta)$ по радиусу r и полярному углу θ :

$$u_r = -z \frac{\partial w}{\partial r}, \quad u_\theta = -z \frac{\partial w}{r \partial \theta},$$

где z — вертикальная координата точки пластины относительно нейтральной (срединной) плоскости. Отличные от нуля компоненты тензора деформаций находятся по формулам

$$\varepsilon_r = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = -\frac{z}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right).$$

Кривизны координатных линий и кручение вычисляются следующим образом:

$$\varkappa_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \varkappa_\theta = \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r}, \quad \varkappa_{r\theta} = \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta}.$$

Компоненты тензора напряжений связаны с деформациями уравнениями закона Гука:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \quad \sigma_{r\theta} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{r\theta}.$$

Изгибающие и скручивающий моменты связаны с кривизнами и кручением уравнениями, которые также следуют из закона Гука:

$$M_r = -D(\varkappa_r + \nu \varkappa_\theta), \quad M_\theta = -D(\varkappa_\theta + \nu \varkappa_r), \quad M_{r\theta} = (1 - \nu)D \varkappa_{r\theta}.$$

Здесь $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ — изгибная (цилиндрическая) жёсткость, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластины. Перерезывающие усилия равны

$$Q_r = \frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial r}, \quad Q_\theta = -\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial M_\theta}{r \partial \theta} = -D \frac{\partial \Delta w}{r \partial \theta},$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа: $\Delta w = \frac{\partial}{r \partial r} \left(\frac{r \partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2}$.

В вариационной формулировке задача сводится к минимизации квадратичного функционала упругой энергии

$$J(w) = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (M_r \varepsilon_r + M_\theta \varepsilon_\theta + M_{r\theta} \varepsilon_{r\theta} - 2qw) r \, d\theta dr$$

на множестве функций $w(r, \theta)$ из пространства Соболева W_2^2 в круге радиуса R , удовлетворяющих ограничениям

$$w(r_k, \theta_k) = \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

В задачах теории пластин произвольного очертания с контактными граничными условиями — ограничениями более общего вида, в том числе с условиями одностороннего контакта в терминах вариационных неравенств, доказаны теоремы существования и единственности решений [11], которые естественным образом распространяются на рассматриваемый случай. Очень важно отметить, что постановка задачи с точечными ограничениями в рамках уравнений пространственной теории упругости, например, для пластины как кругового диска малой толщины, математически некорректна. В этом случае функции, описывающие поле перемещений, принадлежат пространству обобщенных функций W_2^1 , для которых значения в точках, вообще говоря, не определены. Таким образом, строго говоря, невозможно выполнить расчёты напряжённо-деформированного состояния пространственных элементов конструкций при наличии точечных опор с помощью метода конечных элементов. Для корректности постановки требуется учитывать площадь поперечного сечения опорных стержней (свай).

При наличии дискретных ограничений (1) в точках контакта на пластину действуют сосредоточенные силы q_1, q_2, \dots, q_n . Если эти силы уже определены, то вариационная задача преобразуется в задачу безусловной минимизации лагранжиана

$$L(w) = J(w) - \sum_{k=1}^n q_k w(r_k, \theta_k),$$

решение которой неединственно — оно определяется с точностью до перемещения пластины (параллельного переноса и поворота) как абсолютно жёсткого целого

$$w_{\text{abs}}(r, \theta) = ar \cos \theta + br \sin \theta + c$$

с произвольными коэффициентами a , b и c .

Подставляя выражения для моментов и кривизн в $L(w)$ после вычисления и приравнявая к нулю вариации функционала, получим уравнение Софи Жермен, учитывающее систему сосредоточенных сил:

$$D\Delta^2 w = q + \sum_{k=1}^n q_k \delta(r - r_k) \delta(\theta - \theta_k), \quad (2)$$

где $\delta(r)$ и $\delta(\theta)$ — дельта-функции Дирака, и граничные условия свободного края при $r = R$:

$$M_r = 0, \quad Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} = 0,$$

которые в терминах прогиба принимают следующий вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial r} + (1 - \nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (3)$$

Если требуется учесть мембранные усилия в плоскости пластины, возникающие за счёт отклонения опорных стержней от вертикального положения, то к функционалу упругой энергии необходимо добавить квадратичное слагаемое, которое зависит от первых производных радиального и окружного перемещений точек срединной плоскости и характеризует потенциальную энергию плоского напряжённого состояния. Это приводит к вариационной задаче с тремя варьируемыми функциями. Однако такая задача выходит за рамки данной статьи.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Численное решение строится на основе разностной схемы, аппроксимирующей уравнение (2) и граничные условия (3) со вторым порядком точности. Вводится равномерная полярная сетка, согласованная с ограничивающей пластину окружностью, с двумя законтурными узлами, которые необходимы для корректной аппроксимации граничных условий:

$$\rho_j = (j - 1/2)h_r, \quad \vartheta_l = lh_\theta, \quad 1 \leq j \leq n_r + 2, \quad 1 \leq l \leq n_\theta,$$

с шагами $h_r = R/n_r$ и $h_\theta = 2\pi/n_\theta$. Оператор Лапласа во внутренних узлах сетки аппроксимируется разностным отношением

$$\frac{j(w_{j+1,l} - w_{j,l}) - (j-1)(w_{j,l} - w_{j-1,l})}{\rho_j h_r} + \frac{w_{j,l+1} - 2w_{j,l} + w_{j,l-1}}{\rho_j^2 h_\theta^2}.$$

При реализации вычислительного алгоритма существенно используются дискретное преобразование Фурье и соответствующее обратное преобразование:

$$w_{j,l} = \sum_{s=1}^{n_\theta} W_{j,s} e^{-islh_\theta}, \quad W_{j,s} = \frac{1}{n_\theta} \sum_{l=1}^{n_\theta} w_{j,l} e^{islh_\theta} \quad (i - \text{мнимая единица}). \quad (4)$$

В терминах коэффициентов дискретного преобразования $W_{j,s}$ разностный аналог оператора Лапласа приводится к виду:

$$\sum_{l=1}^{n_\theta} \Delta_{j,s}^{(1)} e^{-islh_\theta}, \quad \Delta_{j,s}^{(1)} = \frac{j(W_{j+1,s} - W_{j,s}) - (j-1)(W_{j,s} - W_{j-1,s})}{\rho_j h_r} + \lambda_s \frac{W_{j,s}}{\rho_j^2}.$$

Здесь λ_s — собственные значения оператора разностного дифференцирования второго порядка:

$$\lambda_s = -\frac{4}{h_\theta^2} \sin^2 \left(\frac{sh_\theta}{2} \right).$$

Коэффициенты дискретного преобразования Фурье для бигармонического оператора выражаются через коэффициенты оператора Лапласа

$$\Delta_{j,s}^{(1)} = a_{j,s} W_{j+1,s} + c_{j,s} W_{j,s} + b_{j,s} W_{j-1,s}$$

по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Delta_{j,s}^{(2)} = & a_{j,s} a_{j+1,s} W_{j+2,s} + a_{j,s} (c_{j,s} + c_{j+1,s}) W_{j+1,s} + (a_{j,s} b_{j+1,s} + c_{j,s}^2 + b_{j,s} a_{j-1,s}) W_{j,s} \\ & + b_{j,s} (c_{j,s} + c_{j-1,s}) W_{j-1,s} + b_{j,s} b_{j-1,s} W_{j-2,s}. \end{aligned}$$

С помощью этих формул разностная схема приводится к серии из n_θ не связанных между собой систем линейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье с пятидиагональными матрицами размерности $(n_r + 2) \times (n_r + 2)$ и со столбцами свободных членов,

составленными из коэффициентов обратного преобразования правой части (2). Последние два уравнения в системах аппроксимируют граничные условия (3):

$$\frac{\Delta_{n_r+1,s}^{(1)} - \Delta_{n_r,s}^{(1)}}{h_r} + (1 - \nu)\lambda_s \left(\frac{W_{n_r+1,s} - W_{n_r,s}}{R^2 h_r} - \frac{W_{n_r+1,s} + W_{n_r,s}}{2R^3} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\Omega_{n_r+1,s} + \Omega_{n_r,s} = 0,$$

где для краткости введено обозначение

$$\Omega_{j,s} = \frac{W_{j+1,s} - 2W_{j,s} + W_{j-1,s}}{h_r^2} + \nu \left(\frac{W_{j+1,s} - W_{j-1,s}}{2\rho_j h_r} + \lambda_s \frac{W_{j,s}}{\rho_j^2} \right).$$

Система уравнений, соответствующая $s = n_\theta$, оказывается вырожденной, так как $\lambda_{n_\theta} = 0$. Это следствие неединственности решения задачи изгиба, когда граничные условия на всём контуре пластины формулируются в терминах самоуравновешенных изгибающих моментов и перерезывающих усилий. Для исключения произвола вместо (5) в этой системе ставятся граничные условия

$$\Delta_{n_r+1,n_\theta}^{(1)} + \Delta_{n_r,n_\theta}^{(1)} = 0 \quad \text{и} \quad W_{n_r+1,n_\theta} + W_{n_r,n_\theta} = 0.$$

Используемая здесь аппроксимация граничных условий обеспечивает второй порядок точности схемы на гладких решениях, но при этом в последних строках матриц для $s < m$ появляется «лишний» элемент, нарушающий пятидиагональную структуру. Тем не менее метод пятиточечной прогонки, с помощью которого решаются полученные системы, легко приспособить к этой ситуации за счёт эквивалентных преобразований со строками. По окончании решения систем сеточные значения прогиба пластины вычисляются по формулам (4).

В рассматриваемой общей задаче с n опорами описанный алгоритм применяется $n-2$ раза. Таким образом строится фундаментальная система решений, линейная комбинация которых даёт искомое решение.

Сначала из n опор выбираются три базовые опоры, образующие треугольник. Такой выбор, вообще говоря, неоднозначен. Эти три опоры не должны лежать на одной прямой и по возможности должны располагаться на максимальном расстоянии друг от друга. Затем все опоры заменяются соответствующими их действию на пластину сосредоточенными силами q_1, q_2, \dots, q_n . При построении частных решений $w_0(r, \theta), w_1(r, \theta), \dots, w_{n-3}(r, \theta)$, образующих фундаментальную систему, величины q_k выбираются построчно по таблице, которая составлена так, чтобы обеспечить линейную независимость строк.

Т а б л и ц а

Сосредоточенные силы для частных решений

$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	0,	0,	0,	...	0,	0
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	$q_0,$	0,	0,	0,	...	0,	0
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	$q_0,$	0,	0,	...	0,	0
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	0,	$q_0,$	0,	...	0,	0
...
...
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	0,	0,	0,	...	$q_0,$	0
$q_1,$	$q_2,$	$q_3,$	0,	0,	0,	0,	...	0,	q_0

В этой таблице первые три столбца относятся к базовым опорам, а столбцы, начиная с четвёртого, к оставшимся $(n-3)$ -м. Величины q_1, q_2 и q_3 для каждого частного решения по

строкам таблицы определяются из системы уравнений равновесия сил и моментов сил относительно декартовых координатных осей в плоскости пластины:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n q_k &= \int_0^R \int_0^{2\pi} q(r, \theta) r \, d\theta dr, & \sum_{k=1}^n q_k r_k \cos \theta_k &= \int_0^R \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \cos \theta r^2 \, d\theta dr, \\ \sum_{k=1}^n q_k r_k \sin \theta_k &= \int_0^R \int_0^{2\pi} q(r, \theta) \sin \theta r^2 \, d\theta dr. \end{aligned} \quad (6)$$

Величина $q_0 \neq 0$ при реализации алгоритма задаётся. Она может быть взята произвольной, однако, во избежание потери точности арифметических операций при счёте, её значение по порядку величин должно соответствовать максимальному по модулю значению действующей нагрузки $q(r, \theta)$, умноженному на площадь пластины.

В технической механике имеется прямой метод решения систем типа (6), исходя из уравнений равновесия для моментов сил. При таком способе оси, относительно которых записываются уравнения равновесия моментов, выбираются так, чтобы они проходили попеременно через точки контакта пластины с двумя из трёх базовых опор. В результате система уравнений равновесия преобразуется к трём независимым уравнениям для q_1 , q_2 и q_3 , соответственно.

Искомое решение задачи с n опорами принимает вид

$$w = w_{\text{abs}}(r, \theta) + \sum_{k=0}^{n-3} \mu_k w_k(r, \theta).$$

Неопределённые множители μ_k , в том числе входящие в w_{abs} коэффициенты a , b и c , находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n-3} \mu_k = 1, \quad ar_i \cos \theta_i + br_i \sin \theta_i + c + \sum_{k=0}^{n-3} \mu_k w_k(r_i, \theta_i) = \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Эта система включает в себя $n + 1$ уравнение и $n + 1$ неизвестную величину. Первое уравнение в (7) гарантирует выполнение разностного аналога уравнения (2) с требуемой правой частью, а остальные уравнения служат для удовлетворения контактными граничными условиям. Является ли система (7) невырожденной, легко проверяется апостериорно с помощью процедуры вычисления определителя матрицы. Теоретическое обоснование этого вопроса оставим пока открытым.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МЕТОДИЧЕСКИХ РАСЧЁТОВ

Численные расчёты задач на основе разработанного алгоритма проводились с помощью авторской программы, составленной на алгоритмическом языке Python с применением библиотечных процедур для решения систем линейных алгебраических уравнений и вычисления быстрого преобразования Фурье. Следует отметить высокую эффективность алгоритма – для расчёта задачи с 10-ю опорами на сетке из 120×720 узлов требуется менее двух секунд процессорного времени.

Для иллюстрации работоспособности алгоритма и программы на рис. 1 приведены поля линий уровня прогиба пластины диаметром 25 м на опорах (число опор варьируется) под действием давления $q = 27.5$ кПа. Опоры находятся на одном уровне и расположены равномерно вдоль окружности радиуса $R_1 = 10$ м. Материал – бетон класса В25. Параметры упругости материала: модуль Юнга $E = 30$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$.

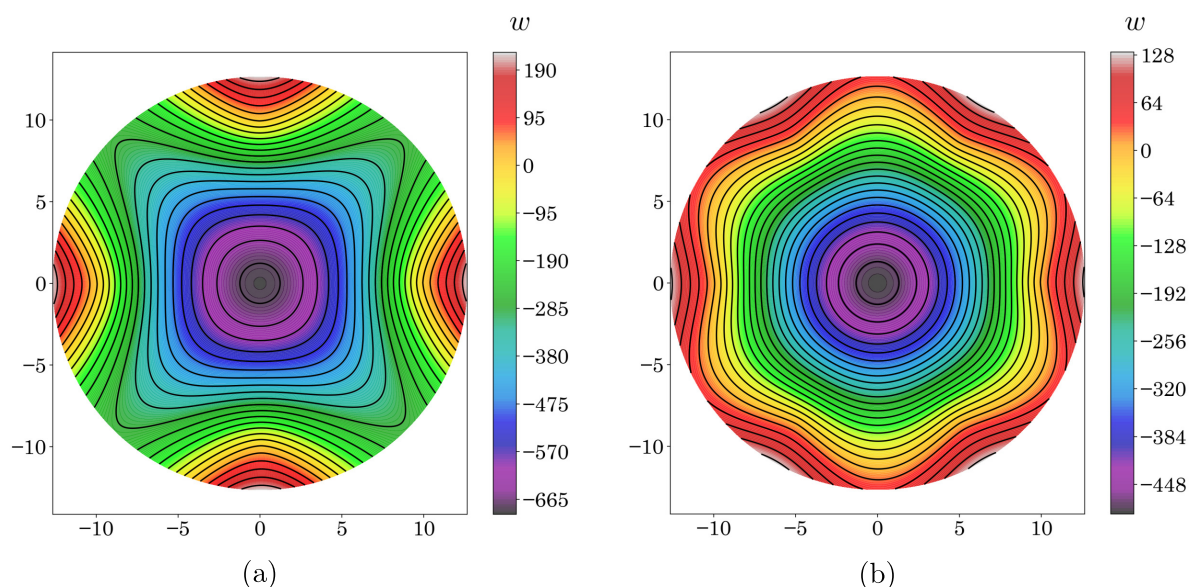


Рис. 1. Поля линий уровня прогиба пластины (w , мм) диаметром 25 м с четырьмя опорами (а) и шестью опорами (б) по внешнему периметру ($R_1 = 10$ м)

На рис. 2 представлены результаты расчётов аналогичной задачи при равномерном расположении опор под пластиной вдоль двух окружностей с радиусами $R_1 = 10$ м и $R_2 = 5$ м. Число опор по внутреннему периметру равно 4, число опор по внешнему периметру — 8 и 10, соответственно. Расчёты показывают, что при увеличении числа внешних опор прогиб пластины в центре возрастает, а по краям — уменьшается.

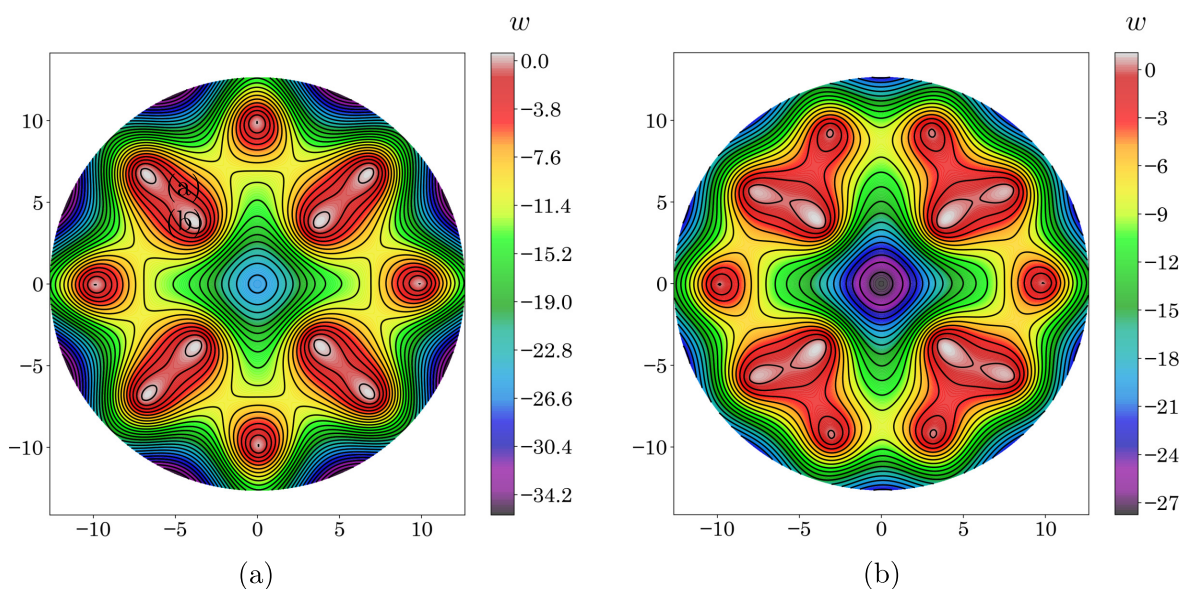


Рис. 2. Поля линий уровня прогиба пластины (w , мм) с четырьмя опорами по внутреннему периметру (радиус их расположения — 5 м) и различным числом опор: (а) восемь и (б) десять — по внешнему периметру (радиус их расположения — 10 м)

На рис. 3 число опор по внутреннему периметру равно пяти, по внешнему периметру — десяти, а радиус их расположения варьируется: $R_1 = 10$ м и $R_1 = 12$ м. Судя по расчётам, удаление внешних опор от центра приводит к провисанию пластины между внутренним

и внешним периметрами.

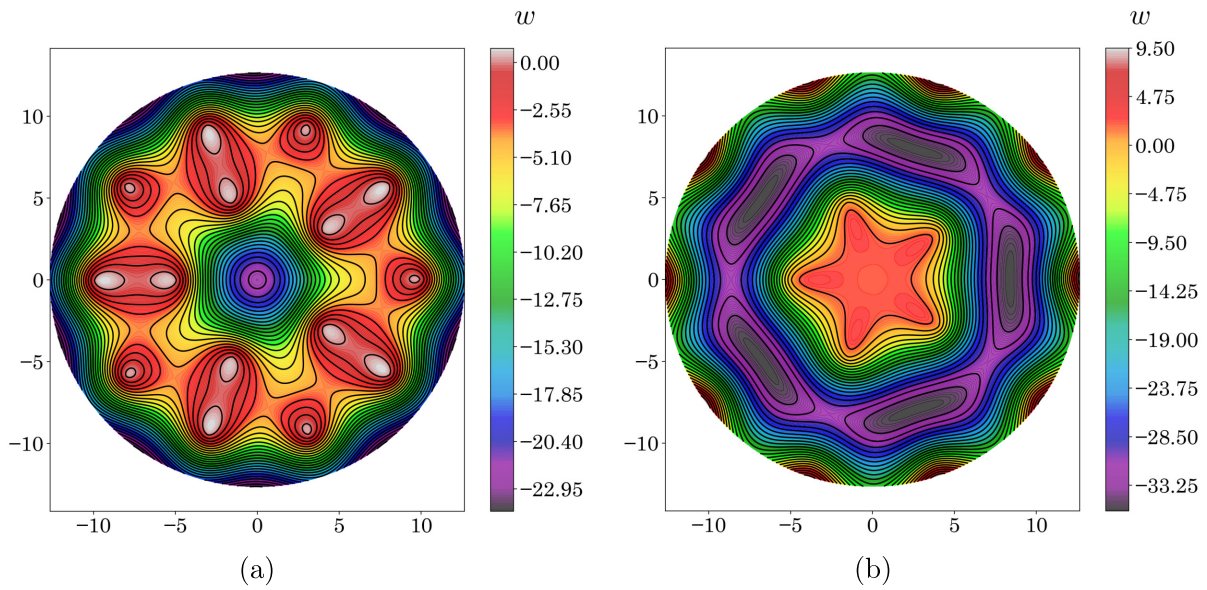


Рис. 3. Поля линий уровня прогиба пластины (w , мм) с десятью опорами по внешнему периметру и пятью опорами по внутреннему периметру;
 $R_1 = 10$ м (а) и $R_1 = 12$ м (б); $R_2 = 5$ м

Результаты на рис. 4 получены при разных значениях внутреннего радиуса: $R_2 = 4$ м и $R_2 = 6$ м. По внешнему периметру расположено 8 опор, по внутреннему — 4 опоры. Сравнение показывает, что если опоры перемещаются дальше от центра, то пластина в центре прогибается вниз.

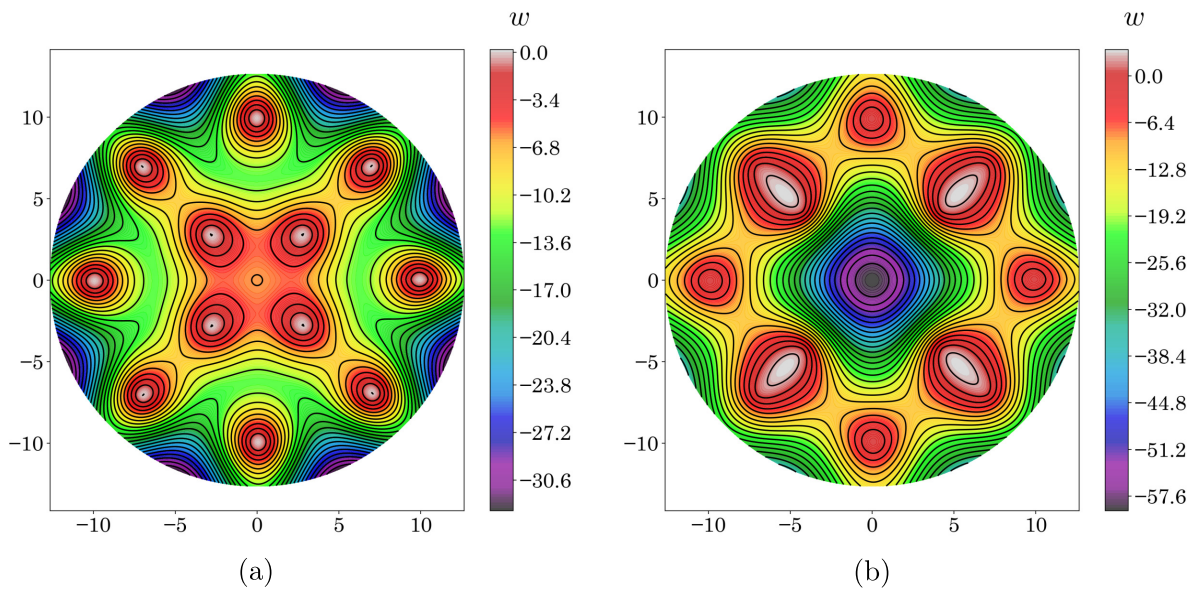


Рис. 4. Поля линий уровня прогиба пластины (w , мм) с восемью опорами по внешнему периметру ($R_1 = 10$ м) и четырьмя опорами по внутреннему периметру;
 $R_2 = 4$ м (а) и $R_2 = 6$ м (б)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный алгоритм обладает исключительно высокой эффективностью, поэтому его можно использовать в качестве базового алгоритма при решении итерационными методами прикладных задач изгиба армированных круговых плит, плит переменной толщины и оболочечных конструкций (куполов). Используемая в процессе его построения методика решения задач изгиба на основе разложения функции прогиба по собственным функциям одномерного разностного оператора второй производной допускает обобщение на задачи изгиба пластин прямоугольного очертания, а также на задачи статической теории упругости плоского напряжённого и плоского деформированного состояний для бигармонического уравнения, записанного относительно функции напряжений Эри.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института вычислительного моделирования СО РАН (проект FWES-2024-0025) и при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных научно-образовательных математических центров (Соглашение 075-02-2025-1606). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Перельмутер А.В.* Беседы о строительной механике. М.: Изд-во SCAD Soft, Изд-во АСВ, 2014.
2. *Коянкин А.А., Митасов В.М.* Напряжённо-деформированное состояние сборно-монолитного элемента с учётом загрузки сборной части // Вестн. Томск. гос. арх.-строит. ун-та. 2021. Т. 23, № 3. С. 129–142; DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-3-129-142
3. *Streletskiy D.A., Suter L.J., Shiklomanov N.I., Porfiriev B.N., Eliseev D.O.* Assessment of climate change impacts on buildings, structures and infrastructure in the Russian regions on permafrost // Environ. Res. Lett. 2019. V. 14, N 2. Article number 025003; DOI: 10.1088/1748-9326/aaf5e6
4. *Faki A., Sushama L., Doré G.* Regional-scale investigation of pile bearing capacity for Canadian permafrost regions in a warmer climate // Cold Reg. Sci. Technol. 2022. V. 201. Article number 103624; DOI: 10.1016/j.coldregions.2022.103624
5. *Filimonov M.Yu., Kamnev Ya.K., Shein A.N., Vaganova N.A.* Modeling the temperature field in frozen soil under buildings in the city of Salekhard taking into account temperature monitoring // Land. 2022. V. 11, N 7. Article number 1102; DOI: 10.3390/land11071102
6. *Filimonov M.Yu., Vaganova N.A.* Computer modelling of thermal interaction in the pile foundation system of a railway bridge support structure in permafrost // Appl. Math., Model. Comput. Simulation. Ser. ATDE. 2023. P. 1057–1062; DOI: 10.3233/ATDE231047
7. *Ильин В.П.* Математическое моделирование. Часть I. Непрерывные и дискретные модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017.
8. *Шапеев В.П., Беляев В.А.* Решение с повышенной точностью бигармонического уравнения в нерегулярных областях методом коллокации и наименьших квадратов // Вычисл. методы и программирование. 2018. Т. 19, вып. 4. С. 340–355; DOI: 10.26089/NumMet.v19r431
9. *Golushko S.K., Shapeev V.P., Belyaev V.A., Bryndin L.S., Boltaev A.I., and Gorynin A.G.* The least-squares collocation method in the mechanics of deformable solids // J. Phys.: Conf. Ser. IOP Publ. 2021. V. 1715. Article number 012029; DOI: 10.1088/1742-6596/1715/1/012029
10. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. М.: Изд-во URSS, 2019.
11. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

UDC 539.371:519.632

FAST ALGORITHM FOR NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF BENDING OF A CIRCULAR PLATE ON SUPPORTS© 2025 V. M. Sadovskii^{1,a}, A. A. Koyankin^{2,b}, V. V. Sadovskii^{2,c}

¹*Institute of Computational Modelling SB RAS,
Akademgorodok, 50/44, Krasnoyarsk 660036, Russia,*
²*Civil Engineering Institute, Siberian Federal University,
Svobodnyi pr., 82, Krasnoyarsk 660041, Russia*

E-mails: ^asadov@icm.krasn.ru, ^bkoyankinaa@mail.ru,
^cvsadovskiy-sb23@stud.sfu-kras.ru

Received 06.03.2025, revised 17.10.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. To calculate the deflection of a circular plate supported at a finite number of points under the action of a distributed external load, a direct computational algorithm is proposed based on the repeated application of the fast Fourier transform and the five-point sweep method. Taking into account the constraints on the deflection in an arbitrary system of points, a fundamental system of solutions is constructed, with the help of which the problem of contact of the plate with pliable supports is solved. The results of methodological computations, demonstrating the high efficiency of the algorithm, are presented.

Keywords: Sophie Germain equation, contact problem, difference scheme, five-point sweep method, fast Fourier transform.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.410

REFERENCES

1. Perelmuter A.V. Besedy o stroitel'noj mekhanike [Conversations about building mechanics]. Moscow: SCAD Soft Publ., ASV Publ., 2014 (in Russian).
2. Koyankin A.A., Mitasov V.M. Stress-strain state of cast-in-place and precast structure with loaded cast-in-place element. *J. Construct. Architect.*, 2021, Vol. 23, No. 3, pp. 129–142; <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2021-23-3-129-142>
3. Streletskiy D.A., Suter L.J., Shiklomanov N.I., Porfiriev B.N., Eliseev D.O. Assessment of climate change impacts on buildings, structures and infrastructure in the Russian regions on permafrost. *Environ. Res. Lett.*, 2019, Vol. 14, No. 2, Artical number 025003; <https://doi.org/10.1088/1748-9326/aaf5e6>
4. Faki A., Sushama L., Doré G. Regional-scale investigation of pile bearing capacity for Canadian permafrost regions in a warmer climate. *Cold Reg. Sci. Technol.*, 2022, Vol. 201, Artical number 103624; <https://doi.org/10.1016/j.coldregions.2022.103624>
5. Filimonov M.Yu., Kamnev Ya.K., Shein A.N., Vaganova N.A. Modeling the temperature field in frozen soil under buildings in the city of Salekhard taking into account temperature monitoring. *Land*, 2022, Vol. 11, No. 7, Artical number 1102; <https://doi.org/10.3390/land11071102>
6. Filimonov M.Yu., Vaganova N.A. Computer modelling of thermal interaction in the pile foundation system of a railway bridge support structure in permafrost. *Appl. Math., Model. Comput. Simulation.*, Ser. ATDE, 2023, Vol. 42, pp. 1057–1062; <https://doi.org/10.3233/ATDE231047>
7. Il'in V.P. Matematicheskoe modelirovanie. Ch. I. Nepreryvnye i diskretnye modeli [Mathematical modeling. Part 1: Continuous and discrete models]. Novosibirsk: SB RAS Publ., 2017 (in Russian).

8. Shapeev V.P., Belyaev V.A. Solving the biharmonic equation with high order accuracy in irregular domains by the least squares collocation method. *Vychisl. Metody Programm.* [Numer. Meth. Programm.], 2018, Vol. 19, No. 4, P. 340–355; <https://doi.org/10.26089/NumMet.v19r431>
9. Golushko S.K., Shapeev V.P., Belyaev V.A., Bryndin L.S., Boltaev A.I., Gorynin A.G. The least-squares collocation method in the mechanics of deformable solids. *J. Phys. Conf. Ser. IOP Publ.*, 2021, Vol. 1715, Artical number 012029; <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1715/1/012029>
10. Algazin S.D. Chislennye algoritmy bez nasyshcheniya v klassicheskikh zadachakh matematicheskoi fiziki [Numerical algorithms without saturation in classical tasks mathematical physics]. Moscow: URSS Publ., 2019 (in Russian).
11. Khludnev A.M. Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastiakh [Elasticity problems in non-smooth domains]. Moscow: Fizmatlit, 2010 (in Russian).

УДК 66.011

**ВЯЗКОСТНОЕ ПАЛЬЦЕОБРАЗОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ
СВЕРХКРИТИЧЕСКОЙ ФЛЮИДНОЙ ЭКСТРАКЦИИ:
ПОЛИДИСПЕРСНЫЙ ЗЕРНИСТЫЙ СЛОЙ**© 2025 А. А. Саламатин^{1,2a}, А. С. Халиуллина^{2b}, Р. З. Даутов^{2c}

¹*Институт механики и машиностроения ФИЦ
Казанский научный центр РАН,
ул. Лобачевского, 2/31, г. Казань 420111, Россия,*
²*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлёвская, 18, г. Казань 420008, Россия*

E-mails: ^aarthur.salamatin2@gmail.com, ^banela_90@mail.ru,
^crafail.dautov@gmail.com

Поступила в редакцию 29.04.2025 г.; после доработки 19.10.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Исследуется возможность образования промытых каналов (процесс пальцеобразования) при фильтрации раствора в условиях сверхкритической флюидной экстракции (СФЭ) из частиц молотого высокомасличного растительного сырья (семена). Фильтрация подчиняется закону Дарси при постоянной проницаемости. Вязкость раствора изменяется экспоненциально с концентрацией. Учитывается переменный во времени и пространстве межфазный массообмен, характерный для СФЭ. Он определяет изменение локальной концентрации раствора в поровом пространстве засыпки наряду с фильтрационным переносом. Рассмотрены типичные для реализованных технологий СФЭ времена, когда полного истощения сырья ещё не наблюдается. С применением методов замороженных коэффициентов, разделения переменных и нормальных мод показано, что для полидисперсного зернистого слоя процесс СФЭ является устойчивым к малым возмущениям, и образование пальцев маловероятно. В то же время идентифицировано сочетание параметров, при котором решение задачи перестаёт быть устойчивым. Однако такие режимы СФЭ не осуществляются на практике.

Ключевые слова: сверхкритическая флюидная экстракция; модель сжимающегося ядра; гидродинамическая устойчивость; пальцеобразование; закон Дарси; метод нормальных мод; метод замороженных коэффициентов; полидисперсность.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.411

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается процесс сверхкритической флюидной экстракции (СФЭ) природных соединений из высокомасличного растительного сырья. Динамика СФЭ определяется главным образом процессами фильтрации и межфазного массообмена в полидисперсном зернистом слое. Технология реализуется следующим образом [1, 2]. Молотое растительное сырьё помещается в аппарат цилиндрической формы, в котором формируется стационарный пористый зернистый слой. В экстрактор нагнетается растворитель (как правило, это CO_2) до тех пор, пока в системе не установится температура и давление процесса, превышающие критические параметры экстрагента. Растворитель пропитывает сырьё, растворяет в себе масло до предельной концентрации (плотности) насыщения θ_* . Масло движется против градиента концентрации к поверхности частиц и попадает в поровое пространство аппарата. После

установления термодинамических параметров чистый экстрагент прокачивается через аппарат с известным расходом, вытесняя насыщенный раствор.

Таким образом, в масштабах зернистого слоя происходит фильтрация смешивающихся жидкостей. Вниз по течению расположен насыщенный раствор в равновесии с маслосодержащим сырьём. Вверх по течению движение разбавленного раствора сопровождается межфазным массообменом. В пространстве две области разделены фронтом – поверхностью раздела, на которой концентрация раствора достигает насыщения. Фронт остаётся плоским при устойчивом развитии процесса. В противном случае малые возмущения приводят к существенной деформации поверхности [3]–[6]. Такая ситуация характерна для фильтрации, сопровождающейся градиентом вязкости [7, 8]. Тогда течение теряет осевую и радиальную симметрию с образованием промытых каналов. По каналам осуществляется преимущественное движение замещающей жидкости. В остальных областях — застойных зонах — скорость движения заметно меньше. Неравномерная промывка аппарата негативно влияет на эффективность экстракции.

Механизмы образования пальцев довольно хорошо изучены для фильтрации несжимаемых жидкостей в инертных пористых средах. В этих условиях массоперенос в масштабах аппарата описывается уравнением конвективной диффузии [4, 8, 9]. Задача замыкается законом Дарси.

Многообразие наблюдаемой динамики вытеснения обусловлено существенно нелинейным механизмом массообмена между сырьём и фильтрующимся растворителем. Математически он выражается «реакционным» слагаемым — источниковым членом — в уравнении переноса концентрации [10]–[13]. В условиях СФЭ необходимо учитывать дисперсный состав частиц [14], формирующих зернистый слой, постепенное истощение сырья и уменьшение активной удельной поверхности зернистого слоя, а также микромасштабные процессы массопереноса на уровне индивидуальной частицы сырья.

Один из подходов к описанию СФЭ предполагает, что зернистый слой является полидисперсным [14]–[16]. Ансамбль частиц представлен двумя фракциями с сильно различающимися представительными размерами $\bar{a}_0 \ll \bar{a}_1$. Плотность функции распределения характеризуется двумя выраженными модами, отвечающими размерам \bar{a}_0 и \bar{a}_1 соответственно. Такие зернистые слои принято называть бимодальными. В результате стремления дисперсии каждой фракции к нулю предельным переходом получается подкласс бидисперсных зернистых слоёв. Они являются смесью двух монодисперсных фракций. Мелкодисперсная фракция размера \bar{a}_0 называется «пылевой», крупнодисперсная фракция размера \bar{a}_1 — основной.

Статья организована следующим образом. В первом разделе формулируется математическая модель процесса, анализируются характерные масштабы экстракции. В следующем разделе применяются линейная теория устойчивости, подход замороженных коэффициентов и метод разделения переменных к анализу условий потери радиальной симметрии гидродинамическим потоком. Статья завершается обсуждением полученных результатов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Уравнения фильтрации в пористом слое

В работе исследуется начальный этап экстракции, на котором формируется фронт бегущей волны. Период времени наблюдений в лабораторных опытах по СФЭ, как правило, соответствует именно рассматриваемому — первому — этапу. Он завершается в момент отрыва фронта от входного сечения аппарата, когда начинается второй этап СФЭ. Устойчивость процессов фильтрации на втором этапе рассматривалась ранее [15].

Формирование фронта происходит в окрестности входного сечения аппарата. В условиях пренебрежимо малой дисперсии [17] фильтрующегося потока этот процесс не подвержен влиянию граничных условий у выходного сечения аппарата. Поэтому примем высоту аппарата и зернистого слоя, заполняющего его цилиндрическую колонку, достаточно большой.

Аппараты для СФЭ имеют круговое сечение. Обозначим внутренний радиус через r_0 . Будем рассматривать задачу в осесимметричной постановке, считая, что все характеристики процесса зависят от продольной $z > 0$ и радиальной $0 < r < r_0$ координаты. Обозначим через t – время. Потеря процессом осевой симметрии в работе не рассматривается.

Примем, что частицы, формирующие слой, являются плоскими с полутолщиной a , нормированной на характерный размер a_{sc} , $\bar{a}_i = a_{sc}a_i$, $i = 1, 2$. Характерный размер частиц будет определён позже. Плотность $f(a)$ функции объёмного распределения частиц по размерам для бидисперсного слоя выражается линейной комбинацией дельта-функций Дирака δ

$$f(a) = \alpha\delta(a - a_0) + (1 - \alpha)\delta(a - a_1), \quad (1)$$

где α – объёмная доля пылевой фракции. Фильтрация растворителя через зернистый слой сопровождается массообменом, и в поровом пространстве устанавливается концентрация $0 \leq c(t, r, z) \leq 1$, нормированная на предельное, равновесное значение θ_* плотности растворённых соединений в экстрагенте, а также поле давления $p(t, r, z)$ и векторное поле скорости фильтрации

$$\mathbf{V}(t, r, z) = (V_r, V_z) = (V, W).$$

При постоянном расходе растворителя свойства флюида слабо меняются со временем, что позволяет ограничиться моделью несжимаемой жидкости

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (2)$$

Примем, что фильтрация подчиняется закону Дарси

$$\nabla p = -\mu(c)\mathbf{V}. \quad (3)$$

Здесь $\mu = \mu(c) = \mu(t, r, z)$ – гидравлическое сопротивление – комплекс, равный отношению локальной вязкости фильтрующегося раствора к проницаемости пористого слоя. Проницаемость считается постоянной величиной. Для вязкости принимается экспоненциальная зависимость от концентрации [4, 5, 6, 8]. Таким образом, для комплекса μ справедливо выражение

$$\mu(c) = \mu(0) \exp(Rc), \quad R = \text{const}. \quad (4)$$

Именно комплекс μ определяет динамику СФЭ и условия потери устойчивости, а не вязкость и проницаемость по отдельности.

Определим пористость m зернистого слоя и плотность θ_0 начального распределения масла по объёму сырья. Рассматриваемая в работе экстракция из высокомасличного сырья характеризуется малыми значениями параметра $\Theta = \theta_*/\theta_0 \ll 1$ [18, 19]. Таким образом, характерное время истощения индивидуальной частицы сырья становится большим по сравнению с характерным временем движения раствора через зернистый слой. Другими словами, ёмкость межзернового пространства пренебрежимо мала по сравнению с ёмкостью частиц, формирующих слой. Это позволяет рассматривать распределение концентрации масла в движущемся растворе в квазистационарном приближении. Для условий СФЭ также характерны высокие значения числа Пекле $\sim 10^4$. Следовательно, в уравнении баланса массы целевых извлекаемых соединений в поровом объёме слоя

$$\theta_* \mathbf{V} \cdot \nabla c = \theta_0(1 - m) \frac{\partial G}{\partial t} \quad (5)$$

основным слагаемым является конвективный перенос [16, 17], который уравнивается межфазным массообменом – источником в правой части. Функция G нормирована на начальное содержание $(1 - m)\theta_0$ масла в единице объёма зернистого слоя и определяет количество экстракта, выделенное из сырья в данной точке пространства (r, z) к текущему моменту времени t .

Конкретный вид функции G зависит от дисперсного состава частиц, их удельной поверхности и модели массопереноса в масштабах частицы и определён ниже. Именно изменение функции G определяет нестационарный характер развития процесса.

1.2. Массоперенос в частице

Изначально извлекаемое масло запасено в клетках растительного сырья. Вначале экстракции растворитель пропитывает сырьё и растворяет в себе масло до наступления в системе материального равновесия. В результате низкой растворимости целевых соединений, $\theta_* \ll \theta_0$ [20], в условиях СФЭ на уровне растительного сырья наблюдается двухфазное распределение масла: насыщенный раствор в окружающей клетки системе транспортных каналов и масло, насыщенное молекулами растворителя, в растительных клетках.

В ходе экстракции масло диффундирует через клеточные мембраны в транспортные каналы (клеточные стенки и межклеточное пространство) и далее по транспортным каналам — к поверхности частицы. Один из подходов [16, 18, 20] к описанию процессов на микроуровне предполагает, что диффузионное сопротивление мембран мало по сравнению с сопротивлением транспортных каналов. При этом считается, что диффузия подчиняется закону Фика с соответствующим эффективным коэффициентом диффузии D_{eff} .

Асимптотический анализ полного уравнения материального баланса в частице показывает [20], что динамика двухфазного распределения масла при сформулированных выше допущениях описывается задачей Стефана. В центре частицы — в маслосодержащем ядре — наблюдается двухфазное распределение извлекаемых соединений, у поверхности частицы — в транспортной зоне — масло полностью растворено в экстрагенте и диффундирует против градиента концентрации по закону Фика. Две области разделены зоной, при переходе через которую текущее содержание масла падает от θ_0 на границе с ядром до θ_* на границе с транспортной зоной. Ширина переходной зоны стремится к нулю при $\Theta \rightarrow 0$. В пределе она вырождается в поверхность, которую будем называть фронтом истощения, разделяющим внутреннее ядро и внешнюю транспортную зону. Соответствующая предельная модель в литературе называется подходом сужающегося ядра (SC — shrinking core) [14, 20, 21] и записывается относительно неизвестной глубины $x > 0$ проникновения фронта вглубь частицы. Здесь глубина нормирована на характерный размер a_{sc} частиц в зернистом слое. В ядре распределение масла постоянно и отвечает равновесному состоянию. В транспортной зоне распределение масла квазистационарно и определяется по известным аналитическим формулам [21] для мгновенного значения x .

В случае плоских частиц динамика положения фронта описывается следующим уравнением [21]

$$a_{sc} \frac{\partial x}{\partial t} = \Theta \frac{D_{\text{eff}}}{a_{sc}} \frac{1-c}{x}. \quad (6)$$

1.3. Плотность межфазного массообмена. Бидисперсный зернистый слой

По мере увеличения x все больше частиц оказываются выработанными. Для них выполняется $x(t, z, a) > a$. Таким образом, плотность $q(x, c, a)$ потока массы с единицы поверхности индивидуальной частицы в поровое пространство зернистого слоя выражается через функцию Хэвисайда H

$$q(x, c, a) = a_{sc} \theta_0 \frac{\partial x}{\partial t} H(a - x), \quad H(a - x) = \begin{cases} 1, & a > x, \\ 0, & a < x. \end{cases} \quad (7)$$

Функция H гарантирует, что истощённые частицы, для которых справедливо $x > a$, не участвуют в массообмене.

Для нахождения общего потока массы в полидисперсном слое необходимо просуммировать вклад от всех частиц в элементарном физическом объёме

$$q_s = \frac{1-m}{a_{sc}} \left(\alpha \frac{q(a_0)}{a_0} + (1-\alpha) \frac{q(a_1)}{a_1} \right) = (1-m) \theta_0 \frac{\partial x}{\partial t} g(x), \quad (8)$$

где

$$g(x) = \int_x^{\infty} f(a) \frac{da}{a}, \quad G(x) = \int_0^x g(x) dx, \quad \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{f(x)}{x}.$$

Из определения функции $g(x)$ следует, что она равна «активной» удельной поверхности сырья, то есть учитывает только те частицы, которые не достигли полного истощения. Из уравнения (1) для функции $g(x)$ и её первообразной получаются следующие выражения:

$$G(x) = \begin{cases} (g_0 + g_1)x, & 0 \leq x < a_0, \\ \alpha + g_1x, & a_0 \leq x < a_1, \\ 1, & a_1 \leq x. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_0 + g_1, & x < a_0, \\ g_1, & a_0 < x < a_1, \\ g_{\infty}, & a_1 < x, \end{cases} \quad (9)$$

$$g_0 = \frac{\alpha}{a_0}, \quad g_1 = \frac{1 - \alpha}{a_1}, \quad g_{\infty} = 0.$$

1.4. Характерные масштабы, безразмерная постановка

Определим характерные масштабы времени t_{sc} , двух направлений пространства z_{sc} и r_{sc} , размера частиц a_{sc}

$$t_{sc} = \frac{a_{sc}^2 \theta_0}{D_{eff} \theta_*}, \quad z_{sc} = \frac{w_{sc} a_{sc}^2}{D_{eff} (1 - m)}, \quad r_{sc} = r_0, \quad a_{sc} = \bar{a}_1. \quad (10)$$

Также определим безразмерные аналоги характеристик процесса

$$t = \tau t_{sc}, \quad z = \zeta z_{sc}, \quad r = \rho r_{sc}, \quad \bar{a} = a a_{sc}, \quad V = v w_{sc}, \quad W = w w_{sc}$$

и безразмерный комплекс

$$B = \frac{z_{sc}}{r_{sc}} = \frac{w_{sc} a_{sc}^2}{r_0 D_{eff} (1 - m)}.$$

Здесь w_{sc} — средняя по сечению аппарата скорость фильтрации — объёмный расход растворителя, отнесённый к площади сечения аппарата. В принятой нормировке размеров частиц $a_1 = 1$, $a_0 = \bar{a}_0 / \bar{a}_1 \rightarrow 0$.

Масштаб t_{sc} отражает порядок времени экстракции индивидуальной частицы размера a_{sc} , омываемой чистым растворителем, z_{sc} — ширина фронта бегущей волны на втором этапе экстракции — максимальный размер зоны выработки, достигаемый на первом этапе. Характерные значения параметров составляют $D_{eff} \sim 10^{-12} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $\bar{a}_1 \sim 0.4 \text{ мм}$, $\theta_0 / \theta_* \sim 30$, $w_{sc} \sim 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, что отвечает $t_{sc} \sim 20 \text{ сут}$, $z_{sc} \sim 3 \text{ м}$. При этом характерное время лабораторного эксперимента не превосходит 1 дня и составляет, как правило, менее 5 ч [22]. Это отвечает безразмерным временам $\tau \sim 10^{-2} - 10^{-1}$. В то же время радиусы частиц соотносятся как $10^2 < \bar{a}_1^2 / \bar{a}_0^2 < 10^3$ [18], и характерное время экстракции пылевой фракции составляет $\tau(z = 0, x = a_0) \sim 10^{-3}$, что эквивалентно 30 мин.

Характерные значения внутреннего радиуса r_0 аппарата меняются от 1 см для лабораторных установок до 10 см для пилотных и промышленных аппаратов [2]. Таким образом, характерное значение комплекса $B \sim 50 - 500$. Модель содержит ещё один безразмерный комплекс, R , определяющий зависимость вязкости раствора от концентрации c . Его значения для условий СФЭ лежат в диапазоне $0.1 < R < 0.3$ [23, 24]. Для полимерных растворов R приближается к значениям 0.65 [25] и в исключительных случаях может достигать $R = 2$ [26].

Запишем уравнения (5) и (6) в безразмерных величинах

$$Bv \frac{\partial c}{\partial \rho} + w \frac{\partial c}{\partial \zeta} = \frac{\partial G}{\partial \tau}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} = \frac{1-c}{x} \quad (12)$$

при следующих начальном и граничном условиях

$$x(0, \rho, \zeta) = 0, \quad c(\tau, \rho, 0) = 0. \quad (13)$$

1.5. Базовое решение

Рассмотрим базовое, одномерное решение задачи (11)–(13), обладающее как радиальной, так и осевой симметрией

$$x = x_0(\tau, \zeta), \quad c = c_0(\tau, \zeta). \quad (14)$$

Оно отвечает однородному полю скорости фильтрации $v = v_0 = 0, w = w_0 = 1$.

Базовое решение известно в квадратурах для произвольной функции G [16] и изображено на рис. 1 для частного случая бидисперсных сред.

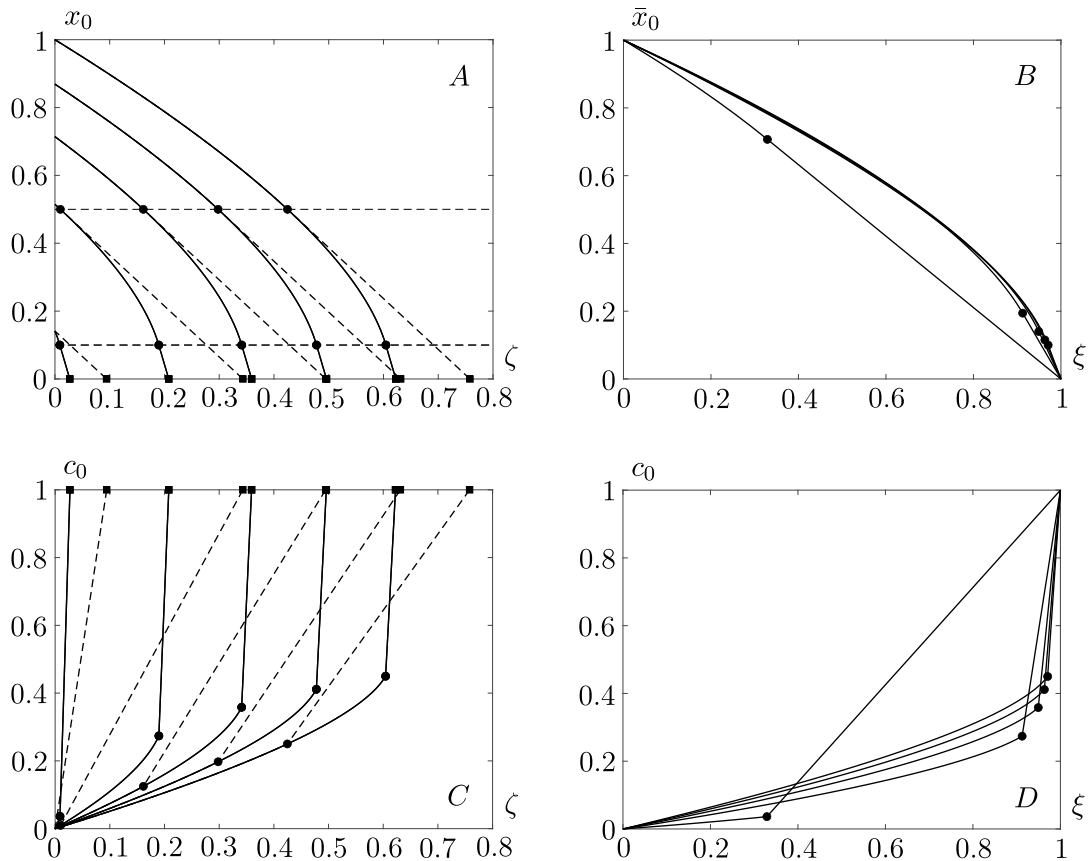


Рис. 1. Распределение (A, B) глубины проникновения фронта x_0 и \bar{x}_0 сужающегося ядра в частицах и (C, D) концентрации c_0 от (A, C) продольной координаты ζ и (B, D) автомодельной переменной ξ на разные моменты времени $\tau = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$.

Круги — положение фронта ζ_0 , квадраты — положение фронта ζ_2 .
 Значения $\alpha = 0.5$ (пунктирные линии); $\alpha = 0.1$ (сплошные линии)

Из уравнения (12) и условий (13) найдём зависимость положения фронта в частицах от времени у входного сечения аппарата $x_0(\tau, 0) = \sqrt{2\tau}$. Далее нас будет интересовать начальный этап экстракции, когда у входного сечения аппарата ещё существуют невыработанные частицы, $\sqrt{2\tau} < a_1 = 1$.

На этом этапе в аппарате движется фронт $\zeta = \zeta_2(\tau)$, разделяющий насыщенную область, расположенную вниз по течению, $\zeta > \zeta_2$, где $c \equiv 1$ и $x \equiv 0$, и зону экстракции, $\zeta < \zeta_2$. Начальный этап экстракции разбивается на два подэтапа, $\sqrt{2\tau} < a_0$, и $\sqrt{2\tau} > a_0$. В течение первой фазы мелкодисперсная фракция частиц не достигает полного истощения нигде в аппарате. В момент её полного истощения у входного сечения аппарата, $\sqrt{2\tau} = a_0$, образуется ещё один подвижный фронт $\zeta = \zeta_0(\tau) < \zeta_2(\tau)$, на котором $x(\zeta_0) \equiv a_0$. Вверх по течению от этого фронта пылевая фракция истощена, $x > a_0$, вниз по течению все частицы ещё содержат масло, $x < a_0 < a_1$.

На начальном этапе в результате несложных математических преобразований [16] из уравнений (11) и (12) получаются представления для $x_0(\tau, \zeta)$ и $c_0(\tau, \zeta)$

$$\zeta = \int_{x_0}^{\sqrt{2\tau}} \frac{\xi d\xi}{G(\xi)}, \quad c_0 = 1 - \frac{G(x_0)}{G(\sqrt{2\tau})}, \quad \sqrt{2\tau} < a_1 = 1 \quad (15)$$

в области экстракции $0 < \zeta < \zeta_2(\tau)$.

Граница области экстракции определяется в результате подстановки условия $x = 0$ в уравнение (15)

$$\zeta_2 = \frac{\min(\sqrt{2\tau}, a_0)}{g_0 + g_1} + \zeta_0(\tau).$$

Аналогично из условия $x = a_0$ получается положение фронта $\zeta_0(\tau)$

$$\zeta_0(\tau) = \begin{cases} 0, & \sqrt{2\tau} < a_0, \\ \frac{1}{1-\alpha} \left(\sqrt{2\tau} - a_0 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \frac{\alpha + (1-\alpha)a_0}{\alpha + (1-\alpha)\sqrt{2\tau}} \right), & a_0 < \sqrt{2\tau} < a_1 = 1, \end{cases}$$

и его скорость

$$\dot{\zeta}_0(\tau) = \begin{cases} 0, & \sqrt{2\tau} < a_0, \\ (\alpha + (1-\alpha)\sqrt{2\tau})^{-1}, & a_0 < \sqrt{2\tau} < a_1. \end{cases}$$

Для дальнейших рассуждений также потребуются безразмерные комплексы

$$C_1(\tau) = \frac{\sqrt{2\tau}}{\zeta_2(\tau)}, \quad C_2(\tau) = \frac{2\tau\dot{\zeta}_2(\tau)}{\zeta_2(\tau)}.$$

1.6. Автомодельные переменные

Определим переменную ξ и новую искомую функцию \bar{x}

$$\xi = \zeta/\zeta_2(\tau), \quad x = \bar{x}\sqrt{2\tau} \quad (16)$$

и назовём их «автомодельными» переменными. Перепишем уравнения (11)–(12) с учётом выполненной замены

$$\bar{x} \left(\bar{x} + 2\tau \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \tau} \Big|_{\xi} - \frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_2} \xi \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} \right) \right) = 1 - c, \quad (17)$$

$$Bv \frac{\partial c}{\partial \rho} + \frac{w}{\zeta_2} \frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial G(x)}{\partial \tau} \Big|_{\xi} - \xi \frac{\dot{\zeta}_2}{\zeta_2} \frac{\partial G(x)}{\partial \xi} = \frac{\partial G(x)}{\partial \tau} \Big|_{\zeta}. \quad (18)$$

Соответственно определим положения фронтов в новых переменных

$$\xi_0 = \frac{\zeta_0}{\zeta_2}, \quad \xi_2 = 1.$$

Далее исследуется устойчивость базового решения (14), (15) задачи (13)–(18) для скорости фильтрации, подчиняющейся закону Дарси (2)–(3). Формулы (15) справедливы на этапе времени $0 < \tau < 1/2$. В принятой нормировке (10) фронт бегущей волны отрывается от входного сечения аппарата в момент времени $\tau = 1/2$, и начинается второй этап экстракции, анализ которого выходит за рамки данной работы.

Уравнение (17) является сингулярным на лучах $\tau = 0$ и $\xi = 0$. В связи с этим вместо начального условия (13) формулируется условие регулярности решения в окрестности $\xi = 0$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} = 0.$$

Перейдём в уравнении (17) к пределу $\xi \rightarrow 0$

$$\xi = 0, \quad \tau > 0: \quad \tau \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial \tau} = 1 - \bar{x}^2$$

и проинтегрируем по времени

$$\tau(1 - \bar{x}^2) = C_0.$$

Далее, переходя к пределу $\tau \rightarrow 0$, находим, что $C_0 = 0$, и

$$\bar{x}(\tau, \rho, 0) = 1. \tag{19}$$

Базовое решение (14), (15) удовлетворяет условию регулярности (19).

2. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

2.1. Задача для малых поправок

Представим решение уравнений (17) и (18) через малые отклонения w_1 , c_1 и \bar{x}_1 от базового решения

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{x}_1(\tau, \rho, \xi), \quad c = c_0 + c_1(\tau, \rho, \xi), \quad w = 1 + w_1(\tau, \rho, \xi). \tag{20}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial c_0}{\partial \rho} = 0, \quad v_0 = 0,$$

а также тождество

$$\frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \tau} \Big|_{\zeta} = \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \tau} \Big|_{\xi} - \xi \frac{\zeta_2}{\zeta_2} \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \xi} \Big|_{\tau},$$

получим следующую задачу для определения малых линейных поправок \bar{x}_1 и c_1

$$\bar{x}_0 \left(2\bar{x}_1 + 2\tau \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \tau} \Big|_{\xi} - C_2(\tau) \xi \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \xi} \right) = - \left(2\tau \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \tau} \Big|_{\zeta} \right) \bar{x}_1 - c_1, \tag{21}$$

$$w_1 \sqrt{2\tau} \frac{\partial c_0}{\partial \zeta} + C_1(\tau) \frac{\partial c_1}{\partial \xi} = g(x_0) \left(\bar{x}_1 + 2\tau \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \tau} \Big|_{\xi} - C_2(\tau) \xi \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \xi} \right) + \bar{x}_1 \frac{dg(x_0)}{dx_0} 2\tau \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \Big|_{\zeta}, \tag{22}$$

$$c_1|_{\xi=0} = 0, \quad \bar{x}_1|_{\xi=0} = 0, \tag{23}$$

Далее, исключая в линеаризованных аналогах уравнений (2)–(3) поперечные компоненты скорости и давление [4, 9], получим уравнение для определения поправки w_1 продольной компоненты скорости

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = -B^2 \frac{\zeta_2^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial (w_1 + Rc_1)}{\partial \rho} \right) - R \frac{\partial c_0}{\partial \xi} \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, \quad (24)$$

при следующих однородных граничных условиях

$$w_1|_{\xi=0} = 0, \quad w_1|_{\xi \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (25)$$

Задачу (21)–(25) будем рассматривать на второй фазе первого этапа, когда частицы пылевой фракции уже выработаны в окрестности входного сечения аппарата, $\sqrt{2\tau} > a_0$, а основная фракция — ещё нет, $\sqrt{2\tau} < a_1 \equiv 1$.

2.2. Разделение переменных. Метод замороженных коэффициентов

Линейная задача (21)–(25) при однородных граничных условиях допускает разделение переменных в следующем виде [27, 28]

$$[w_1, c_1, \bar{x}_1] = [\Phi, \Psi, X](\xi, \tau_0) A(\tau) J_0(\beta r), \quad (26)$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, отвечающая осесимметричным возмущениям, β — нормированная на r_{sc}^{-1} частота возмущений. Функция

$$A(\tau) = \tau^{\sigma(\tau_0)/2}, \quad \sigma = \frac{2\tau}{A} \frac{dA}{d\tau}$$

определяет рост возмущений со временем. Степенная зависимость характерна для отдельных физических процессов и естественным образом возникает для комплекса $\tau \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \tau}$ [29]. Дополнительный аргумент $0 < \tau_0 < 1/2$ означает, что соответствующая величина «заморожена» на момент времени $\tau = \tau_0$, и её изменение предполагается слабым. Последнее предположение составляет суть метода замороженных коэффициентов (QSSA — quasi steady state analysis) [4, 7, 8].

Определим новые функции $Y = \xi X$ и $\Gamma = \Phi'$. Здесь и далее «штрих» означает дифференцирование по ξ . В результате перехода к системе уравнений первого порядка задача для функций Φ , Ψ , Y и Γ примет следующий вид

$$\Phi' = \Gamma, \quad (27)$$

$$C_1(\tau_0)\Psi' + C_2(\tau_0)g(x_0)Y' = -\sqrt{2\tau_0} \frac{\partial c_0}{\partial \zeta} \Phi + (1 + \sigma + C_2(\tau_0)) \frac{g(x_0)}{\xi} Y + Y \frac{1}{\xi} \frac{dg(x_0)}{dx_0} \sqrt{2\tau} \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \Big|_{\zeta}, \quad (28)$$

$$Y' = \frac{1}{\bar{x}_0 C_2(\tau_0)} \Psi + \frac{1}{\xi C_2(\tau_0)} \left(3 + \sigma + \frac{2\tau_0}{\bar{x}_0} \frac{\partial \bar{x}_0}{\partial \tau} \Big|_{\zeta} \right) Y, \quad (29)$$

$$\Gamma' = h^2(\Phi + R\Psi) - R \frac{\partial c_0}{\partial \xi} \Gamma, \quad (30)$$

$$h^2 = \zeta_2^2(\tau_0) B^2 \beta^2 \quad (31)$$

при соответствующих граничных условиях

$$\Phi(0) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad \Gamma(0) = -1, \quad (32)$$

$$\Phi(\xi \rightarrow +\infty) \rightarrow 0 \quad (33)$$

и условия $X(0) = 0$ регулярности решения в окрестности точки $\xi = 0$ для системы сингулярных уравнений (27)–(30). Формально это условие следует из системы уравнений (27)–(30) и

естественного условия регулярности решения. Его нельзя считать независимым граничным условием.

Последнее граничное условие (32) учитывает, что искомые функции Φ , Ψ , Y и Γ являются решением однородной задачи Штурма-Лиувилля (27)–(33) и определены с точностью до постоянного множителя.

Граничное условие (33) служит для определения показателя σ . Для этого важно получить правильную асимптотику функции Φ на бесконечности. В связи с этим рассмотрим поведение решения в окрестности особой точки $\xi = 1$. Здесь производные базового решения терпят разрыв, что неизбежно отражается на функциях Φ , Ψ , Y и Γ . Таким образом, необходимо срастить решения уравнений на интервалах $0 < \xi < 1$ и $\xi > 1$.

2.3. Задача на интервале $\xi > 1$

При $\xi > 1$ фильтрующийся раствор насыщен, и экстракция из частиц не началась. Здесь базовое решение стационарно, и справедливо $\bar{x}_0 = \frac{d\bar{x}_0}{d\xi} = \frac{dc_0}{d\xi} = 0$. Решение уравнений (27)–(30) в области насыщения при граничном условии (33) может быть записано аналитически

$$\Phi = \Phi(1)e^{-h(\xi-1)}, \quad \Psi = 0, \quad Y = 0, \quad \Gamma + h\Phi = 0. \quad (34)$$

Значение $\Phi(1)$ не является свободным и определяется однозначно в результате интегрирования задачи Коши (27)–(32) при заданном σ . Отметим также, что все функции-возмущения — решения задачи Штурма — Лиувилля стремятся к нулю на бесконечности, и последнее условие (34) эквивалентно условию (33).

2.4. Условия в граничной точке $\xi = 1$

Проинтегрируем уравнения (27)–(30) в окрестности точки $\xi = 1$ и получим условия на скачки функций

$$[\Phi] = 0, \quad [\Psi] + g(0)\sqrt{2\tau_0}\dot{\zeta}_2[Y] = -\Phi[c_0] = 0, \quad \bar{x}_0[Y] = 0, \quad \mu_0[\Phi'] = 0. \quad (35)$$

Функция Φ непрерывна вместе со своей производной при переходе через точку $\xi = 1$, так как $\mu_0 \neq 0$. Функции Y и Ψ могут претерпевать разрыв. Величина скачка для них должна отличаться знаком. Однако по абсолютной величине скачки не определены, остаётся одна степень свободы, так как базовое решение $\bar{x}_0 = 0$ в точке скачка.

Объединяя условия (34) и (35), получим, что в точке $\xi = 1 - 0$ должны выполняться следующие условия сопряжения для Ψ и Y

$$\Psi(1) + (g_0 + g_1)\sqrt{2\tau_0}\dot{\zeta}_2 Y(1) = 0 \quad (36)$$

и непрерывных функций Φ и Γ

$$\Gamma(1) + h\Phi(1) = 0. \quad (37)$$

2.5. Задача на отрезке $0 < \xi < 1$

С учётом (34) и (35) краевую задачу (27)–(33) достаточно решать на отрезке $0 < \xi < 1$. Для этого заменим условие (33) на бесконечности условием (37) в конечной точке. Решение уравнений (27)–(30) терпит разрыв в точке $\xi = \xi_0$, так как здесь $x_0 = a_0$, и скачком уменьшается удельная поверхность, через которую осуществляется массообмен. В результате функция g терпит разрыв первого рода, $[g(a_0)] = g_0$. Получим соотношения, связывающие искомые функции по разные стороны скачка во внутренней точке $\xi = \xi_0 < 1$. Для этого в уравнениях (11) и (12) выполним подстановку (20) и проинтегрируем в окрестности фронта $\zeta_0(\tau)$

$$[\Phi] = 0, \quad [X] = 0, \quad [\Gamma] = 0, \quad (38)$$

$$[\Psi] + \dot{\zeta}_0 X g_0 = 0. \quad (39)$$

Таким образом, для определения функций Φ , Ψ , Y и Γ и линейно зависимо от них X , необходимо решать систему линейных дифференциальных уравнений (27)–(30) с условиями разрыва (38) и (39), дополненных граничными условиями (32) и (37). Это позволит определить значения искомых функций в точке $\xi = 1$ при заданных параметрах задачи σ , τ_0 , h и R .

Определение искомого значения параметра $\sigma(\tau_0, h, R)$ для заданной частоты возмущения β , пространственных масштабов процесса B , момента времени τ_0 и физических свойств раствора R предполагает решение нелинейного уравнения относительно σ

$$F[\sigma] \equiv \Psi(1) + (g_0 + g_1)\sqrt{2\tau_0} \zeta_2 Y(1) = 0, \quad (40)$$

которое соответствует условию (36). Дифференциальная задача (27)–(32), (37) решается численно методом конечных разностей [30, 31].

2.6. Параметризация потери устойчивости процесса СФЭ

Из записи задачи (27)–(32), (37) следует, что динамика СФЭ и устойчивость фронта вытеснения определяются следующими безразмерными параметрами: частота возмущений β , отношение пространственных масштабов B , характеристики зернистого слоя (a_0 , α — для бидисперсного слоя), момент времени τ_0 , на который заморожены коэффициенты, и свойства раствора (R). Для дальнейших рассуждений удобно ввести параметр h из уравнения (31), так как величины B и β входят в уравнения в комплексе. Следовательно, одна и та же мода возмущений β может характеризоваться разным значением свойства устойчивости. Несмотря на то, что значение частоты β моды возмущений является дискретным и определяется нулями функции Бесселя, зависимость целевого параметра σ от h является непрерывной.

Таким образом, общее количество параметров, определяющих различные варианты решения линейной задачи для бидисперсного зернистого слоя, сокращается на единицу и равно пяти. Естественно, что $\sigma = \sigma(\tau_0, h, R, a_0, \alpha)$ зависит от всех указанных параметров.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

3.1. Единственность значения σ

Нелинейное уравнение (40) может обладать несколькими корнями при заданных R и h . На рис. 2 представлена чувствительность целевого функционала (40) к параметрам процесса.

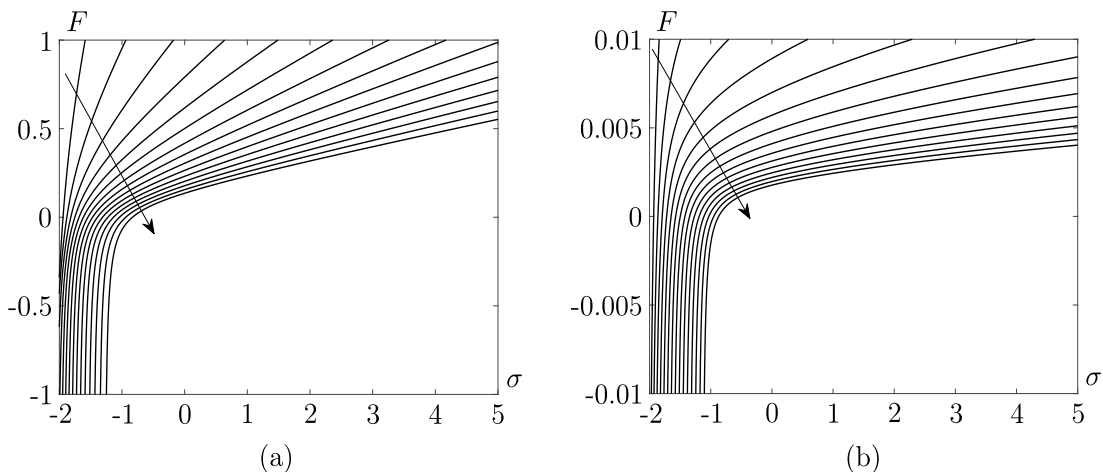


Рис. 2. Зависимость функционала F от σ (а) $h = 5$, (б) $h = 100$. Кривые отвечают изменению $0.1 < R < 1.5$ с шагом 0.1

На интервале $\sigma > -3$ существует особая точка $\sigma = \sigma_\infty$ функционала. При приближении к ней справа значения $F[\sigma] \rightarrow -\infty$. Соответствующее значение σ_∞ зависит от всех пяти

параметров бидисперсного слоя. Справа от этой точки функционал является монотонным и допускает определение единственного решения.

Слева от особой точки расчёт исходной системы дифференциальных уравнений неустойчив. Исследование существования значений $\sigma < \sigma_\infty$, являющихся решением задачи Штурма-Лиувилля, выходит за рамки данной работы. Однако известно, что в задачах фильтрации в пределе больших чисел Пекле возможна многозначность σ [32].

Существование особой точки определяет схему поиска корня уравнения (40). Вначале строится решение задачи (27)–(32), (37), и определяется значение функционала $F[\sigma]$ для значений на отрезке $-5 < \sigma < 5$ на грубой сетке. Далее оценивается значение σ_∞ , при котором $F \rightarrow -\infty$, и идентифицируется интервал монотонности справа от особой точки. Уже на этом интервале итерационно определяется корень уравнения (40). Для этого используется метод `fzero` пакета прикладных программ Matlab.

3.2. Устойчивые режимы экстракции

Зависимость показателя σ роста амплитуды возмущений с изменением R представлена на рис. 3 при значениях $h < 10$.

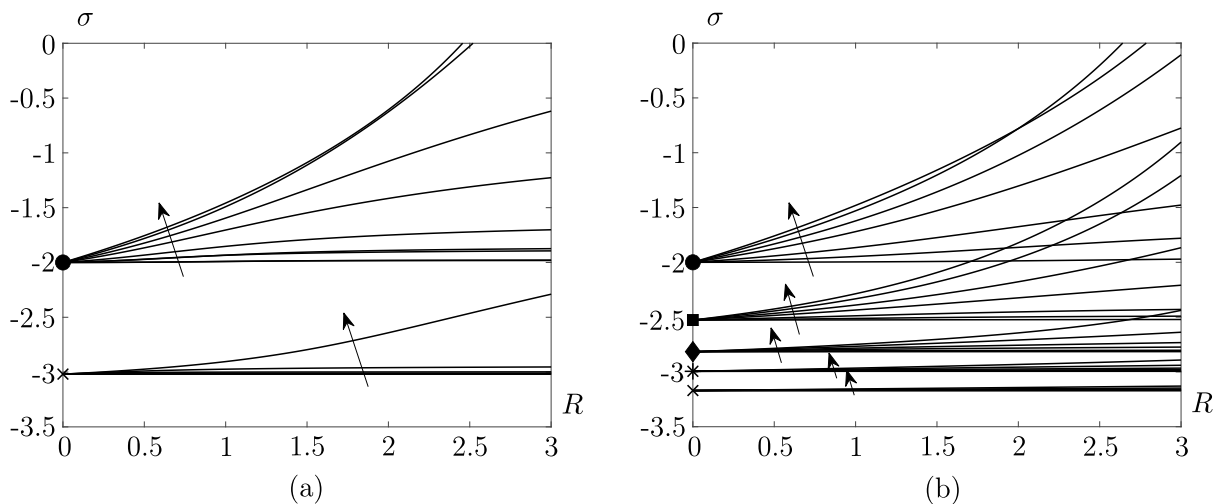


Рис. 3. Зависимость σ от R при $a_0 = 0.2$ и $h = \{0.1, 0.5, 1, 2, 3, 5, 10\}$.

Направление роста h указано стрелками.

Маркеры отмечают значение $\alpha = \{0 (\bullet); 0.1 (\blacksquare); 0.3 (\blacklozenge); 0.5 (*); 0.7 (\times)\}$;

(a) $\tau_0 = 0.03$; (b) $\tau_0 = 0.2$

Значения R , характерные для типичных условий СФЭ растительных масел, лежат в диапазоне $0.1 < R < 0.3$ [23, 24]. Однако с целью обсуждения более общей картины, расчёты представлены для $R < 3$ [4]. Отметим, что значение $\alpha = 0$ отвечает монодисперсному приближению зернистого слоя. Для всех кривых наблюдается монотонное изменение $\sigma(R)$ при различных наборах остальных параметров. В то же время кривые для монодисперсного приближения имеют точку пересечения при $h > 3$, что может быть обусловлено неустойчивостью численной схемы, описанной выше. Для исключения этой ситуации рассмотрим графики на рис. 4.

Здесь изображены значения функционала (40) для двух значений $R = \{0.5, 2.5\}$. При этих значениях выражено изменение относительного расположения кривых, отвечающих $h = \{5, 10\}$ на рис. 3 (кривые отмечены кругами). Аналогичным образом ведёт себя функционал $F[\sigma]$ при соответствующих значениях параметров. Таким образом, графики подтверждают адекватность определения σ .

Отметим также, что значения $\sigma(R)$ перестают существенно зависеть от h при $h > 10$. Это позволяет упростить задачу, выполнив разложение собственных функций в ряд по малому

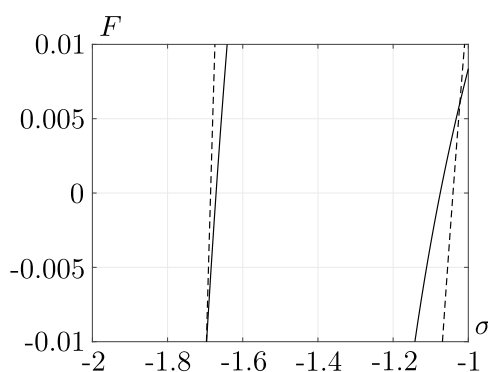


Рис. 4. Зависимости, аналогичные рис. 2, при $R = 0.5$ (левый пучок кривых), при $R = 1.3$ (правый пучок); $h = 5$ (сплошные линии), $h = 10$ (пунктирные линии)

параметру $h^{-2} \rightarrow 0$. Однако соответствующее исследование выходит за рамки данной работы.

Известно, что дисперсия (диффузия) фильтрующегося раствора при постоянном коэффициенте дисперсии является механизмом, стабилизирующим плоский фронт вытеснения насыщенного раствора [4] для высокочастотных возмущений, $\beta \rightarrow \infty$. Текущая постановка и базовое решение получены в пределах больших чисел Пекле. Поэтому любопытно, что показатель σ не только является ограниченным при $h \rightarrow \infty$ для фиксированного R , но и принимает отрицательные значения для реальных значений $R < 2$. Это свидетельствует об устойчивости процесса СФЭ даже в отсутствии дисперсии раствора. Аналогичные выводы были получены в результате экспериментального [33] и теоретического [34] анализа процессов фильтрации без массообмена. Было установлено, что при достаточно медленном изменении концентрации со временем у входного сечения аппарата фильтрация остаётся устойчивой при отсутствии массообмена.

Наибольшие значения $\sigma(R)$ наблюдаются при больших h и $\alpha = 0$. Соответствующие кривые отмечены круговыми маркерами на рис. 3. Из рисунка видно, что потеря устойчивости возможна при $R > 2.5$, т. е. когда возможно изменение концентрации раствора более чем на порядок. Несмотря на то, что эти условия представляют теоретический интерес, они нехарактерны для СФЭ из высокомасличного сырья. Их обсуждение выходит за рамки данной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Процесс сверхкритической флюидной экстракции жирных масел из высокомасличного растительного сырья можно разбить на два последовательных этапа. На первом этапе у входного сечения аппарата формируется зона выработки, в которой масло из сырья поступает в фильтрующийся раствор. Далее, в момент, когда сырьё у входного сечения аппарата истощается, начинается второй этап, и сформировавшиеся на первом этапе профили s и x перемещаются по аппарату в виде бегущей волны [16].

Для сочетания характерных времён выработки сырья и технологических условий реализации процесса именно первый этап СФЭ наблюдается на практике. В связи с этим исследование возможности пальцеобразования именно на первом этапе представляет особый интерес для идентификации эффективных условий экстракционного цикла.

В работе показано, что в условиях СФЭ из бидисперсного зернистого слоя, начальный этап экстракции является устойчивым к малым возмущениям. Характерные для растительных экстрактов изменения вязкости раствора в сверхкритическом CO_2 оказываются не столь существенными. Таким образом, межфазный массообмен и формирование области плавного

изменения концентрации в окрестности входного сечения аппарата могут считаться стабилизирующими факторами. В рамках сформулированных ограничений при сохранении осевой симметрии потерю радиальной симметрии процесса в условиях межфазного массообмена можно ожидать, если вязкость раствора изменяется более, чем на порядок, то есть при $R > 2.5$.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-71-00047). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гумеров Ф.М., Хайрутдинов В.Ф., Зарипов З.И. Дополнительное условие эффективности сверхкритического флюидного экстракционного процесса // Теорет. основы хим. технологии. 2021. Т. 55, № 23. С. 273–285; DOI: 10.31857/S0040357121030076
2. *del Valle J.M.* Extraction of natural compounds using supercritical CO₂: Going from the laboratory to the industrial application // J. Supercrit. Fluids. 2015. V. 96. P. 180–199; DOI: 10.1016/j.supflu.2014.10.001
3. Гилев П.В., Панин А.А. Фильтрация двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в тонком пороупругом слое // Сиб. журн. индустр. математики. 2024. Т. 27, № 2. С. 20–33; DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.202
4. *Tan C.T., Homsy G.M.* Stability of miscible displacements in porous media: Rectilinear flow // Phys. Fluids. 1986. V. 29. P. 3549–3556; DOI: 10.1063/1.865832
5. *Tan C.T., Homsy G.M.* Stability of miscible displacements in porous media: Radial source flow // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 1239–1245; DOI: 10.1063/1.866289
6. *Tan C.T., Homsy G.M.* Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement // Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 1330–1338; DOI: 10.1063/1.866726
7. *Hill S.* Channeling in packed columns // Chem. Eng. Sci. 1952. V. 1. P. 247–253; DOI: 10.1016/0009-2509(52)87017-4
8. *Homsy G.M.* Viscous fingering in porous media // Annu. Rev. Fluid Mech. 1987. V. 19. P. 271–311; DOI: 10.1146/ANNUREV.FL.19.010187.001415
9. *Kim M.C., Pramanik S.* Miscible viscous fingering in a packed cylindrical column: Theory and numerics // Phys. Rev. Fluids. 2023. V. 8. Paper 013901; DOI: 10.1103/PHYSREVFLUIDS.8.013901
10. *Ladd A.J.C., Szymczak P.* Reactive flows in porous media: Challenges in theoretical and numerical methods // Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng. 2021. V. 12. P. 543–571; DOI: 10.1146/annurev-chembioeng-092920-102703
11. *Szymczak P., Ladd A.J.C.* The initial stages of cave formation: Beyond the one-dimensional paradigm // Earth Planet. Sci. Lett. 2011. V. 301. P. 424–432; DOI: 10.1016/J.EPSL.2010.10.026
12. *Hinch E.J., Bhatt B.S.* Stability of an acid front moving through porous rock // J. Fluid Mech. 1990. V. 212. P. 279–288; DOI: 10.1017/S0022112090001963
13. *De Wit A.* Chemo-hydrodynamic patterns and instabilities // Annu. Rev. Fluid Mech. 2020. V. 52. P. 531–555; DOI: 10.1146/ANNUREV-FLUID-010719-060349
14. Егоров А.Г., Саламатин А.А. Оптимизационные задачи в теории сверхкритической флюидной экстракции масла // Изв. вузов. Математика. 2015. Т. 59, № 2. С. 59–69; DOI: 10.3103/S1066369X15020073
15. Саламатин А.А., Халиуллина А.С., Калинина М.В. Вязкостное пальцеобразование в условиях сверхкритической флюидной экстракции // Теорет. основы хим. технологии. 2024. Т. 59. С. 243–255; DOI: 10.31857/S0040357124020135

16. Егоров А.Г., Мазо А.Б., Максудов Р.Н. Экстракция полидисперсного зернистого слоя молотых семян масличных культур сверхкритическим диоксидом углерода // Теорет. основы хим. технологии. 2010. Т. 44, С. 498–506.
17. Саламатин А.А. Оценка влияния конвективной диффузии на кинетику сверхкритической флюидной экстракции из бидисперсных зернистых слоёв // Сверхкритические флюиды: теория и практика. 2016. Т. 11, № 4. С. 41–53.
18. Саламатин А.А., Халиуллина А.С. Оценка параметров модели процесса сверхкритической флюидной экстракции методом Монте-Карло // Теорет. основы хим. технологии. 2022. Т. 56. С. 72–87; DOI: 10.31857/S0040357121060117
19. del Valle J.M., de la Fuente J.C., Uquiche E. A refined equation for predicting the solubility of vegetable oils in high-pressure CO₂ // J. Supercrit. Fluids. 2012. V. 67. P. 60–70; DOI: 10.1016/j.supflu.2012.02.004
20. Саламатин А.А., Егоров А.Г., Халиуллина А.С. Характерные масштабы процесса сверхкритической флюидной экстракции // Теорет. основы хим. технологии. 2022. Т. 56, № 5. С. 615–626; DOI: 10.31857/S0040357122050207
21. Goto M., Roy B.C., Hirose T. Shrinking-core leaching model for supercritical-fluid extraction // J. Supercrit. Fluids. 1996. V. 9. P. 128–133. DOI: 10.1016/S0896-8446(96)90009-1
22. Salgin U., Korkmaz H. A green separation process for recovery of healthy oil from pumpkin seed // J. Supercrit. Fluids. 2011. V. 58. P. 239–248; DOI: 10.1016/j.supflu.2011.06.002
23. Yener M.E., Kashulines P., Rizvi S.S.H., Harriott P. Viscosity measurement and modeling of lipid-supercritical carbon dioxide mixtures // J. Supercrit. Fluids. 1998. V. 11. P. 151–162; DOI: 10.1016/S0896-8446(97)00036-3
24. Tuan D.Q., Zollweg J.A., Harriott P., Rizvi S.S.H. Measurement and modeling of viscosity of supercritical carbon dioxide/biomaterial(s) mixtures // Ind. Eng. Chem. Res. 1999. V. 38. P. 2129–2136; DOI: 10.1021/IE980363W
25. Dindar C., Kiran E. High-pressure viscosity and density of polymer solutions at the critical polymer concentration in near-critical and supercritical fluids // Ind. Eng. Chem. Res. 2002. V. 41. P. 6354–6362; DOI:10.1021/IE0108999
26. Mertsch R., Wolf B.A. Solutions of poly(dimethylsiloxane) in supercritical CO₂: Viscometric and volumetric behavior // Macromolecules. 1994. V. 27. P. 3289–3294; DOI: 10.1021/MA00090A023
27. Al-Gwaiz M.A. Sturm–Liouville theory and its applications. London: Springer London, 2007; DOI: 10.1007/978-1-84628-972-9
28. Ascher U.M., Petzold L.R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998; DOI: 10.1137/1.9781611971392
29. Yortsos Y.C. Stability of displacement processes in porous media in radial flow geometries // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 2928–2935; DOI: 10.1063/1.866070
30. Hammerling R., Koch O., Simon C., Weinmuller E. B. Numerical solution of singular ODE eigenvalue problems in electronic structure computations // Comput. Phys. Commun. 2010. V. 181. P. 1557–1561; DOI: 10.1016/J.CPC.2010.05.006
31. Brabston D.C., Keller H.B. Numerical Method for Singular Two Point Boundary Value Problems // SIAM J. Numerical Analysis. 1977. V. 14, N 5. P. 779–791; DOI: 10.1137/0714054
32. Hickernell F.J., Yortsos Y.C. Linear stability of miscible displacement processes in porous media in the absence of dispersion // Stud. Appl. Math. 1986. V. 74. P. 93–115; DOI: 10.1002/SAPM198674293
33. Kyle C.R., Perrine R.L. Experimental studies of miscible displacement instability // Soc. Pet. Eng. J. 1965. V. 5. P. 188–195; DOI: 10.2118/1113-PA
34. Chang S.H., Slattery J.C. A linear stability analysis for miscible displacements // Transp. Porous Media. 1986. V. 1. P. 179–199; DOI: 10.1007/BF00714691

UDC 66.011

**VISCOUS FINGERING AT SUPERCRITICAL FLUID EXTRACTION
CONDITIONS: POLYDISPERSE PACKED BEDS**© 2025 A. A. Salamatin^{1,2a}, A. S. Khaliullina^{2b}, R. Z. Dautov^{2c}

¹*Institute of Mechanics and Engineering FRC
Kazan Scientific Center RAS,
Lobachevskii st., 2/31, Kazan 420111, Russia,*
²*Kazan Federal University,
Kremlyovskaya st., 18, Kazan 420008, Russia*

E-mails: ^aarthur.salamatin2@gmail.com, ^banela_90@mail.ru,
^crafail.dautov@gmail.com

Received 29.04.2025, revised 19.10.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. The onset of fingering instability under supercritical fluid extraction (SFE) conditions is studied for packed beds of ground raw material with high initial oil content. Filtration under Darcy's law at constant permeability of the packed bed is assumed. Solution viscosity depends on its concentration according to Arrhenius law. Significantly variable in space and time interfacial mass transfer typical for SFE is taken into account. The mass transfer and convective flow both affect local solute concentration in the pores of the packed bed. Characteristic times of industrially implemented SFE processes are considered, when depletion of the raw material does not take place. It is shown through the quasi steady state analysis and using the normal modes approach that the SFE from the polydisperse packed beds is stable to small perturbations. The finger formation should not be expected at time scales of the SFE process. At the same time, the conditions for loss of stability have been determined, which, however, are not typical for the industrially implemented SFE processes.

Keywords: supercritical fluid extraction; shrinking core model; hydrodynamic stability; fingering; Darcy's law; normal modes method; QSSA; polydispersity.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.411

REFERENCES

1. Gumerov F.M., Khairutdinov V.F., Zaripov Z.I. An additional condition of efficiency of the supercritical fluid extraction process. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2021. Vol. 55, No. 23, pp. 348–358; DOI: 10.1134/S0040579521030076
2. del Valle J.M. Extraction of natural compounds using supercritical CO₂: Going from the laboratory to the industrial application. *J. Supercrit. Fluids*, 2015, Vol. 96, pp. 180–199; DOI: 10.1016/j.supflu.2014.10.001
3. Gilev P.V., Panin A.A. Fil'tratsiya dvukh neshmeshivayushchikhsya neshzimaemykh zhidkosti v tonkom porouprugom sloe [Filtration of two immiscible incompressible liquids in a thin poroelastic layer]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2024, Vol. 27, No. 2, pp. 20–33 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2024.27.202
4. Tan C.T., Homsy G.M. Stability of miscible displacements in porous media: Rectilinear flow. *Phys. Fluids*, 1986, Vol. 29, pp. 3549–3556; DOI: 10.1063/1.865832
5. Tan C.T., Homsy G.M. Stability of miscible displacements in porous media: Radial source flow. *Phys. Fluids*, 1987, Vol. 30, pp. 1239–1245; DOI: 10.1063/1.866289
6. Tan C.T., Homsy G.M. Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement. *Phys. Fluids*, 1988, Vol. 31, pp. 1330–1338; DOI: 10.1063/1.866726

7. Hill S. Channeling in packed columns. *Chem. Eng. Sci.*, 1952, Vol. 1, pp. 247–253; DOI: 10.1016/0009-2509(52)87017-4
8. Homsy G.M. Viscous fingering in porous media. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1987, Vol. 19, pp. 271–311; DOI: 10.1146/ANNUREV.FL.19.010187.001415
9. Kim M.C., Pramanik S. Miscible viscous fingering in a packed cylindrical column: Theory and numerics. *Phys. Rev. Fluids*, 2023, Vol. 8, Article number 013901; DOI: 10.1103/PHYSREVFLUIDS.8.013901
10. Ladd A.J.C., Szymczak P. Reactive flows in porous media: Challenges in theoretical and numerical methods. *Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng.*, 2021, Vol. 12, pp. 543–571; DOI: 10.1146/annurev-chembioeng-092920-102703
11. Szymczak P., Ladd A.J.C. The initial stages of cave formation: Beyond the one-dimensional paradigm. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 2011, Vol. 301, pp. 424–432; DOI: 10.1016/J.EPSL.2010.10.026
12. Hinch E.J., Bhatt B.S. Stability of an acid front moving through porous rock. *J. Fluid Mech.*, 1990, Vol. 212, pp. 279–288; DOI: 10.1017/S0022112090001963
13. De Wit A. Chemo-hydrodynamic patterns and instabilities. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2020, Vol. 52, pp. 531–555; DOI: 10.1146/ANNUREV-FLUID-010719-060349
14. Egorov A.G., Salamatin A.A. Optimization problems in a theory of supercritical fluid extraction of oil. *Russ. Math.*, 2015, Vol. 59, pp. 48–56; DOI: 10.3103/S1066369X15020073
15. Salamatin A.A., Haliullina A.S., Kalinina M.V. Viscous fingering in supercritical fluid extraction. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2024, Vol. 58, pp. 1193–1205; DOI: 10.31857/S0040357124020135
16. Egorov A.G., Mazo A.B., Maksudov R.N. Extraction from a polydisperse granular layer of milled oilseeds with supercritical carbon dioxide. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2010, Vol. 44, pp. 642–650; DOI: 10.1134/S0040579510050027
17. Salamatin A.A. Estimation of the axial dispersion effect on supercritical fluid extraction from bidisperse packed beds. *Russ. J. Phys. Chem. B.*, 2017, Vol. 11, pp. 1180–1187; DOI: 10.1134/S1990793117070156
18. Salamatin A.A., Haliullina A.S. Evaluation of supercritical fluid extraction model parameters by Monte-Carlo methods. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2022, Vol. 56, pp. 69–83; DOI: 10.1134/S0040579521060117
19. del Valle J.M., de la Fuente J.C., Uquiche E. A refined equation for predicting the solubility of vegetable oils in high-pressure CO₂. *J. Supercrit. Fluids*, 2012, Vol. 67, pp. 60–70; DOI: 10.1016/j.supflu.2012.02.004
20. Salamatin A.A., Egorov A.G., Haliullina A.S. Characteristic scales of the supercritical fluid extraction process. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2022, Vol. 56, pp. 742–753; DOI: 10.1134/S0040579522050384
21. Goto M., Roy B.C., Hirose T. Shrinking-core leaching model for supercritical-fluid extraction. *J. Supercrit. Fluids*, 1996, Vol. 9, pp. 128–133; DOI: 10.1016/S0896-8446(96)90009-1
22. Salgin U., Korkmaz H. A green separation process for recovery of healthy oil from pumpkin seed. *J. Supercrit. Fluids*, 2011, Vol. 58, pp. 239–248; DOI: 10.1016/j.supflu.2011.06.002
23. Yener M.E., Kashulines P., Rizvi S.S.H., Harriott P. Viscosity measurement and modeling of lipid-supercritical carbon dioxide mixtures. *J. Supercrit. Fluids*, 1998, Vol. 11, pp. 151–162; DOI: 10.1016/S0896-8446(97)00036-3
24. Tuan D.Q., Zollweg J.A., Harriott P., Rizvi S.S.H. Measurement and modeling of viscosity of supercritical carbon dioxide/biomaterial(s) mixtures. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 1999, Vol. 38, pp. 2129–2136; DOI: 10.1021/IE980363W
25. Dindar C., Kiran E. High-pressure viscosity and density of polymer solutions at the critical polymer concentration in near-critical and supercritical fluids. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2002, Vol. 41, pp. 6354–6362; DOI: 10.1021/IE0108999
26. Mertsch R., Wolf B.A. Solutions of poly(dimethylsiloxane) in supercritical CO₂: Viscometric and volumetric behavior. *Macromolecules*, 1994, Vol. 27, pp. 3289–3294; DOI: 10.1021/MA00090A023
27. Al-Gwaiz M.A. Sturm–Liouville theory and its applications. London: Springer London, 2007; DOI: 10.1007/978-1-84628-972-9
28. Ascher U.M., Petzold L.R. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998; DOI: 10.1137/1.9781611971392

29. Yortsos Y.C. Stability of displacement processes in porous media in radial flow geometries. *Phys. Fluids*, 1987, Vol. 30, pp. 2928–2935; DOI: 10.1063/1.866070
30. Hammerling R., Koch O., Simon C., Weinmuller E. B. Numerical solution of singular ODE eigenvalue problems in electronic structure computations. *Comput. Phys. Commun.*, 2010, Vol. 181, pp. 1557–1561; DOI: 10.1016/J.CPC.2010.05.006
31. Brabston D.C., Keller H.B. Numerical Method for Singular Two Point Boundary Value Problems. *SIAM J. Numerical Analysis*, 1977, Vol. 14, No. 5, pp. 779–791; DOI: 10.1137/0714054
32. Hickernell F.J., Yortsos Y.C. Linear stability of miscible displacement processes in porous media in the absence of dispersion. *Stud. Appl. Math.*, 1986, Vol. 74, pp. 93–115; DOI: 10.1002/SAPM198674293
33. Kyle C.R., Perrine R.L. Experimental studies of miscible displacement instability. *Soc. Pet. Eng. J.*, 1965, Vol. 5, pp. 188–195; DOI: 10.2118/1113-PA
34. Chang S.H., Slattery J.C. A linear stability analysis for miscible displacements. *Transp. Porous Media*, 1986, Vol. 1, pp. 179–199; DOI: 10.1007/BF00714691

УДК 517.957:517.958:532.5

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

© 2025 О. Н. Ульянов^a, Л. И. Рубина^b

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16 г. Екатеринбург 620108, Россия*

E-mails: ^asecretary@imm.uran.ru, ^brli@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 09.01.2024 г.; после доработки 30.06.2025 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений с частными производными, полученные ранее А.Ф. Сидоровым для пространственной естественной конвекции вязкой жидкости в приближении Буссинеска в случае течений с линейной зависимостью компонент вектора скорости от части пространственных координат. Методом, развиваемым авторами, они сведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдены некоторые точные частные решения. Изучено, может ли решение уравнений Обербека — Буссинеска, которое линейно зависит от переменной z , описывать безвихревое движение вязкой несжимаемой жидкости

Ключевые слова: уравнения Обербека — Буссинеска, класс Линя — Сидорова — Аристова, редукции к системам ОДУ, точные решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.412

Памяти Учителя — Анатолия Фёдоровича Сидорова

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются системы уравнений, полученные А.Ф. Сидоровым для уравнений нестационарной пространственной естественной конвекции несжимаемой вязкой жидкости в приближении Буссинеска [1]

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{u} - \beta \mathbf{q} T, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) T = \kappa \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости, $p(x_1, x_2, x_3, t)$ — давление, $\rho = \operatorname{const}$ — плотность, $T(x_1, x_2, x_3, t)$ — температура, ν — коэффициент кинематической вязкости, κ — коэффициент теплопроводности, $\mathbf{q} = (0, 0, q)$ — ускорение силы тяжести, β — коэффициент теплового расширения жидкости

В работе [2] рассмотрены решения системы (1) с линейными относительно одной или двух пространственных переменных компонентами вектора скорости. Отметим, что в 80-ые годы А. Ф. Сидоров рассматривал такие решения для ряда моделей сплошной среды (см. [3], стр. 168–204.). Несколько ранее решения такого типа рассматривались в работах [4, 5]. В последующие годы решения с линейной зависимостью поля скоростей от части пространственных координат рассматривались неоднократно для различных моделей сжимаемой и несжимаемой сплошной среды многими исследователями. Были получены соответствующие системы уравнений, найдены и изучены некоторые классы точных решений рассматривавшихся математических моделей с линейными относительно одной или двух пространственных переменных

компонентами вектора скорости (см., например, [6]). В ряде работ рассматривался случай линейной зависимости от двух пространственных переменных. Для этого случая в работе [7] выведено много новых точных решений двумерных и трёхмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса, изучены вопросы нелинейной устойчивости решений, в работе [8] осуществляется точное интегрирование уравнений термодиффузии, в работе [9] построены классы точных решений уравнений Обербека — Буссинеска с учётом диссипативной функции Рэлея. Весьма продуктивно рассмотрение решений с линейной зависимостью от части переменных для модели термокапиллярной и термоконцентрационной конвекции (см., например, [10–12]).

Интерес исследователей к поиску точных решений мотивирован как важностью демонстрации и исследования любых новых примеров таких решений для изучаемых математических моделей сплошной среды, так и потенциально возможным применением конкретных точных решений при численном моделировании процессов в сплошной среде, например, в качестве элемента математической модели или в качестве теста. Существует довольно много подходов к поиску точных решений. Мощным методом поиска является теоретико-групповой подход [13]. Также распространён подход, когда точные решения разыскиваются с использованием того или иного анзаца. При этом решения находятся или в замкнутой форме (см., например, автомодельные решения в [14]), или путём сведения тем или иным образом (в частности, иногда после введения новых неизвестных и преобразования определяющих уравнений) исходной задачи к более простым математическим задачам [15]. Плодотворны метод дифференциальных связей [16] и поиск решений после предположения о виде течения (этот метод можно считать обобщением предыдущего) и получения решения (иногда после анализа совместности получающихся переопределённых систем уравнений) в замкнутой форме или в виде решения, выписанного с помощью функций, удовлетворяющих некоторой системе ОДУ.

А. Ф. Сидоров (см. [2]) для случая естественной конвекции несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска сделал предположение о виде течения — линейность поля скоростей по части пространственных координат, но ограничился в той работе, в основном, получением описывающих их систем уравнений в частных производных. В данной работе для исследования полученных в [2] систем и поиска точных решений уравнений Обербека — Буссинеска используется метод редукции систем уравнений в частных производных (систем УЧП) к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (системам ОДУ), развиваемый авторами (см., например, [17], где, в частности, подробно описаны его общие подходы). Показано как с помощью развиваемого авторами метода можно редуцировать полученные в [2] системы УЧП к системам ОДУ.

Для удобства дальнейшего изложения вместо $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = (u_1, u_2, u_3)$ в системе (1) введём обозначение $\mathbf{U}(x, y, z, t) = (u, v, w)$ для вектора скорости.

1. ЛИНЕЙНОСТЬ ПО ОДНОЙ КООРДИНАТЕ

В этом случае А. Ф. Сидоров предполагал, что $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $w = l(x, y, t)z + r(x, y, t)$, $T = f(x, y, t)z + g(x, y, t)$, $p = h_{11}(t)z^2 + h_1(t)z + h(x, y, t)$, $\rho = \text{const}$. Тогда система (1) сводится к системе семи дифференциальных уравнений в частных производных для семи неизвестных функций u, v, l, r, f, g, h с произвольными функциями h_{11}, h_1 (см. [2])

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \rho[u_t + uu_x + vv_y - \nu(u_{xx} + u_{yy})] = -h_x, \\
 L_2 &= \rho[v_t + uv_x + vv_y - \nu(v_{xx} + v_{yy})] = -h_y, \\
 L_3 &= \rho[r_t + ur_x + vr_y - \nu(r_{xx} + r_{yy})] = -h_1 - \rho\beta qg - \rho lr, \\
 L_4 &= \rho[l_t + ul_x + vl_y - \nu(l_{xx} + l_{yy})] = -2h_{11} - \rho\beta qf - \rho l^2, \\
 L_5 &= g_t + ug_x + vg_y + rf - \kappa(g_{xx} + g_{yy}) = 0, \\
 L_6 &= f_t + uf_x + vf_y + lf - \kappa(f_{xx} + f_{yy}) = 0, \\
 u_x + v_y + l &= 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}(L_3)_x &= -(\rho\beta qg + \rho lr)_x, & (L_3)_y &= -(\rho\beta qg + \rho lr)_y, \\ (L_4)_x &= -(\rho\beta qf + \rho l^2)_x, & (L_4)_y &= -(\rho\beta qf + \rho l^2)_y, \\ (L_3)_t &= -(\rho\beta qg + \rho lr + h_1)_t, & (L_4)_t &= -(\rho\beta qf + \rho l^2 + 2h_{11})_t.\end{aligned}$$

Здесь символ за круглыми скобками обозначает независимую переменную, по которой вычисляется производная от выражения, стоящего в скобке.

1.1. Безвихревое течение

Изучим возможность существования безвихревого течения в рассматриваемом случае. Если течение безвихревое, то (см., например, [18], Глава II. Теория физического поля, пункт 2. Потенциальное векторное поле) существует функция $Q(x, y, z, t)$ такая, что

$$u(x, y, t) = Q_x, \quad v(x, y, t) = Q_y, \quad w = l(x, y, t)z + r(x, y, t) = Q_z.$$

Отсюда потенциал $Q = 0.5l(x, y, t)z^2 + r(x, y, t)z + k(x, y, t)$. Но тогда $u(x, y, t) = Q_x$, $v(x, y, t) = Q_y$, если

$$\begin{aligned}l &= l(t), \quad r = r(t), \quad f = f(t), \quad g = g(t), \\ u(x, y, t) &= k_x(x, y, t), \quad v(x, y, t) = k_y(x, y, t), \\ w &= l(t)z + r(t), \quad T = f(t)z + g(t), \quad p = h_{11}(t)z^2 + h_1(t)z + h(x, y, t).\end{aligned}$$

При этом (см. систему (2)) получаем соотношения для шести неизвестных функций $k = k(x, y, t)$, $f = f(t)$, $l = l(t)$, $r = r(t)$, $g = g(t)$, $h = h(x, y, t)$ с произвольными функциями $h_{11}(t)$, $h_1(t)$, $\mu(t)$

$$k_{xx} + k_{yy} + l(t) = 0, \quad h(x, y, t) = \mu(t) - \rho[k_t + 0.5(k_x^2 + k_y^2) - \nu(k_{xx} + k_{yy})], \quad (3)$$

$$\rho l_t = -2h_{11} - \rho\beta qf - \rho l^2, \quad f_t = -lf, \quad (4)$$

$$\rho r_t = -h_1 - \rho\beta qg - \rho lr, \quad g_t = -rf. \quad (5)$$

Отметим, что в ней уравнения (4)–(5) образуют систему четырёх ОДУ для четырёх неизвестных функций, не включающую функции $k = k(x, y, t)$ и $h = h(x, y, t)$. В этой системе, в свою очередь, уравнения (4) образуют систему ОДУ для определения $f = f(t)$ и $l = l(t)$. Если найдены $f = f(t)$ и $l = l(t)$, то из (5) можно найти $r = r(t)$ и $g = g(t)$. Заметим также, что первое уравнение в (3) после введения новой неизвестной функции $K(x, y, t) = k(x, y, t) + 0.25(x^2 + y^2)l(t)$ сводится к уравнению Лапласа $\Delta K = 0$ для двух независимых переменных, а второе уравнение — после нахождения $K(x, y, t)$, $l(t)$ и, следовательно, $k(x, y, t)$ даёт выражение для $h = h(x, y, t)$.

1.1.1. Частное решение.

Выпишем частное решение системы (2) для потенциального течения (3)–(5) в предположении, что $h_1 = -\rho\beta qg$, $h_{11} = -0.5\rho\beta qf$. Тогда

$$\begin{aligned}l(t) &= 1/(t + t_0), \quad r(t) = r_0/(t + t_0), \quad r_0 = \text{const}, \quad t_0 = \text{const}, \\ f(t) &= f_0/(t + t_0), \quad g(t) = g_0 + r_0 f_0/(t + t_0), \quad f_0 = \text{const}, \quad g_0 = \text{const}.\end{aligned}$$

Положим $k(x, y, t) = -l(t)m(x, y)$, тогда $m_{xx} + m_{yy} = 1$. Получили уравнение Пуассона. Для решения уравнения Пуассона применяются разные подходы (см., например, [19]). Рассмотрим следующий подход. Пусть $m = m(\psi)$, $\psi = \psi(x, y)$. Вычислив производные сложной функции $m = m(\psi(x, y))$ и, подставив эти выражения в уравнение $m_{xx} + m_{yy} = 1$, получаем

$$m''a + m'b = 1, \quad (6)$$

где $a = \psi_x^2 + \psi_y^2$, $b = \psi_{xx} + \psi_{yy}$. Здесь и далее штрих обозначает дифференцирование по ψ . Уравнение (6) сведётся к ОДУ, если найдутся такие функции $a = a(\psi)$, $b = b(\psi)$, при которых система двух уравнений

$$a(\psi) = \psi_x^2 + \psi_y^2, \quad b(\psi) = \psi_{xx} + \psi_{yy} \quad (7)$$

с тремя неизвестными функциями $\psi(x, y)$, $a = a(\psi)$, $b = b(\psi)$ совместна. Ограничимся случаем $a(\psi) \neq 0$. Продифференцировав первое уравнение системы (7) по x и по y , получим $a'\psi_x = 2\psi_x\psi_{xx} + 2\psi_y\psi_{xy}$ и, соответственно, $a'\psi_y = 2\psi_x\psi_{xy} + 2\psi_y\psi_{yy}$. С учётом второго уравнения системы (7) находим

$$\psi_{xx} = \frac{a'(\psi_x^2 - \psi_y^2) + 2\psi_y^2b}{2a}, \quad \psi_{xy} = \frac{\psi_x\psi_y(a' - b)}{a}, \quad \psi_{yy} = \frac{a'(\psi_y^2 - \psi_x^2) + 2\psi_x^2b}{2a}. \quad (8)$$

Выбираем $a(\psi) = \psi_x^2 + \psi_y^2$ в качестве базового уравнения системы (7). Напомним, что используемые методы редукции УЧП или системы УЧП к ОДУ или системе ОДУ опираются на построение характеристик некоего базового уравнения в частных производных первого порядка, которое определённым образом связано с рассматриваемой системой УЧП или УЧП (см. [17]). В данном случае оно входит в систему уравнений (7). Выписываем для базового уравнения систему уравнений характеристик (см. [20] Chapter II. General theory of partial differential equations of the first order. Section 7. General differential equation with n independent variables.)

$$\frac{dx}{ds} = 2\psi_x, \quad \frac{dy}{ds} = 2\psi_y, \quad \frac{d\psi}{ds} = 2a, \quad \frac{d\psi_x}{ds} = a'\psi_x, \quad \frac{d\psi_y}{ds} = a'\psi_y.$$

Выбирая ψ в качестве независимой переменной, изменяющейся вдоль характеристики, получаем

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{\psi_x}{a}, \quad \frac{dy}{d\psi} = \frac{\psi_y}{a}, \quad \frac{d\psi_x}{d\psi} = \frac{a'}{2a}\psi_x, \quad \frac{d\psi_y}{d\psi} = \frac{a'}{2a}\psi_y. \quad (9)$$

Дополним систему уравнений характеристик (9) уравнениями, описывающими изменение вторых производных вдоль характеристик

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{xx}}{d\psi} &= -\psi_{xx} \left(\frac{\psi_x}{a} \right)_x - \psi_{xy} \left(\frac{\psi_y}{a} \right)_x + \left(\frac{a'}{2a}\psi_x \right)_x, \\ \frac{d\psi_{xy}}{d\psi} &= -\psi_{xx} \left(\frac{\psi_x}{a} \right)_y - \psi_{xy} \left(\frac{\psi_y}{a} \right)_y + \left(\frac{a'}{2a}\psi_x \right)_y, \\ \frac{d\psi_{yy}}{d\psi} &= -\psi_{xy} \left(\frac{\psi_x}{a} \right)_y - \psi_{yy} \left(\frac{\psi_y}{a} \right)_y + \left(\frac{a'}{2a}\psi_y \right)_y. \end{aligned}$$

Получили базовую систему уравнений характеристик (см. [17]). Здесь нижние индексы за скобками обозначают независимые переменные, по которым вычисляются производные от выражений в скобках. Добавляем соотношение, которое должно быть первым интегралом расширенной системы уравнений характеристик

$$\begin{aligned} b' &= \frac{d\psi_{xx}}{d\psi} + \frac{d\psi_{yy}}{d\psi} = -\psi_{xx} \left(\frac{\psi_x}{a} \right)_x - \psi_{xy} \left(\frac{\psi_y}{a} \right)_x + \left(\frac{a'}{2a}\psi_x \right)_x - \psi_{xy} \left(\frac{\psi_x}{a} \right)_y - \psi_{yy} \left(\frac{\psi_y}{a} \right)_y + \left(\frac{a'}{2a}\psi_y \right)_y \\ &= -\frac{\psi_{xx}^2 + 2\psi_{xy}^2 + \psi_{yy}^2}{a} + \frac{a'}{a^2}(\psi_x^2\psi_{xx} + 2\psi_x\psi_y\psi_{xy} + \psi_y^2\psi_{yy}) + \left(\frac{a'}{2a} \right)'(\psi_x^2 + \psi_y^2) + \frac{a'}{2a}(\psi_{xx} + \psi_{yy}). \end{aligned}$$

Откуда, учитывая (7) и (8), получаем достаточное условие сведения уравнения (6) к ОДУ

$$b' = b \frac{3a'}{2a} - \frac{1}{a}b^2 + \frac{a''}{2} - \frac{(a')^2}{2a}. \quad (10)$$

Рассмотрим случай $a = \text{const}$. Тогда $b = a/\psi$, $m''a + (a/\psi)m' = 1$, $m' = c_1/\psi + 0.5\psi/a$, $m = c_1 \ln \psi + 0.25\psi^2/a + a_0$, $a_0 = \text{const}$. Изучим некоторые возможности.

(а) Если $\psi = a\sqrt{x^2 + y^2}$, то

$$\psi_x = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \psi_y = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \psi_{xx} = \frac{ay^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\psi_{yy} = \frac{ax^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \text{откуда} \quad b = \frac{a}{\psi}.$$

В этом случае

$$k(x, y, t) = -l(t)m(x, y) = -l(t)[c_1 \ln a\sqrt{x^2 + y^2} + 0.25(x^2 + y^2) + a_0].$$

(б) Если (см. (9)) $\psi_x = c_0 = \text{const}$, $\psi_y = \sqrt{a - c_0^2}$, то $\psi = c_0x + y\sqrt{a - c_0^2} + c_3$. Но если $\psi = c_0x + y\sqrt{a - c_0^2} + c_3$, то $\psi_{xx} = 0$, $\psi_{yy} = 0$, $b = 0$,

$$m'' = \frac{1}{a}, \quad m = \frac{1}{a}(0.5\psi^2 + c_4\psi + c_5), \quad c_j = \text{const}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Тогда

$$k = -l(t)m(x, y) = -l(t)[(1/a)[0.5(c_0x + y\sqrt{a - c_0^2} + c_3)^2 + c_4(c_0x + y\sqrt{a - c_0^2} + c_3) + c_5].$$

И для (а), и для (б) имеем частное решение вида

$$u = -m_x/(t + t_0), \quad v = -m_y/(t + t_0), \quad w = (z + r_0)/(t + t_0), \quad T = g_0 + f_0(z + r_0)/(t + t_0),$$

$$p = -\frac{\rho\beta q f_0 z^2}{2(t + t_0)} - \rho\beta q \left[g_0 + \frac{r_0 f_0}{t + t_0} \right] z + \mu(t) - \rho \left[\frac{m}{(t + t_0)^2} + \frac{m_x^2 + m_y^2}{2(t + t_0)^2} + \frac{\nu}{t + t_0} \right].$$

1.2. О сведениях системы (2) к системе ОДУ

А. Ф. Сидоров в [2] для случая линейности по одной координате получил, в частности, систему шести ОДУ с независимой переменной x для шести неизвестных функций, описывающую при $h_1 = \text{const}$, $h_{11} = \text{const}$ плоскопараллельные стационарные течения. Найдём другую редукцию системы (2) к системе ОДУ.

Систему (2) можно рассматривать как недоопределённую систему (в смысле [16], стр. 22.) семи уравнений для девяти неизвестных функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $l(x, y, t)$, $r(x, y, t)$, $f(x, y, t)$, $g(x, y, t)$, $h(x, y, t)$, $h_{11}(t)$, $h_1(t)$. Для редукции к системе ОДУ обратимся к следствию этой системы, продифференцировав по x третье и четвёртое уравнения системы, содержащие в качестве слагаемых функции от переменной t . Получим определённую ([16], стр.22) систему семи УЧП для семи неизвестных функций

$$\begin{aligned} \rho[u_t + uu_x + vu_y - \nu(u_{xx} + u_{yy})] &= -h_x, \\ \rho[v_t + uv_x + vv_y - \nu(v_{xx} + v_{yy})] &= -h_y, \\ r_{tx} + u_x r_x + u r_{xx} + v r_{yx} + v_x r_y - \nu(r_{xxx} + r_{yyx}) &= -\beta q g_x - (l_x r + l r_x), \\ l_{tx} + ul_{xx} + u_x l_x + vl_{yx} + v_x l_y - \nu(l_{xxx} + l_{yyx}) &= -\beta q f_x - 2ll_x, \\ g_t + ug_x + vg_y + rf - \kappa(g_{xx} + g_{yy}) &= 0, \\ f_t + uf_x + vf_y + lf - \kappa(f_{xx} + f_{yy}) &= 0, \\ u_x + v_y + l &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть в системе (11) $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, $r = r(\psi)$, $l = l(\psi)$, $h = h(\psi)$, $g = g(\psi)$, $f = f(\psi)$. Отметим, что уравнение $\psi(x, y, t) = \text{const}$ задаёт при $t = \text{const}$ линию уровня перечисленных функций. Вычислив производные сложных функций и подставив в (11), получим равенства [3]

$$\begin{aligned}\rho\{[u'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_y - \nu(\psi_{xx} + \psi_{yy}))] - \nu u''(\psi_x^2 + \psi_y^2)\} &= -h'\psi_x, \\ \rho\{[v'(\psi_t + u\psi_x + v\psi_y - \nu(\psi_{xx} + \psi_{yy}))] - \nu v''(\psi_x^2 + \psi_y^2)\} &= -h'\psi_y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r'[\psi_{tx} + u'\psi_x^2 + u\psi_{xx} + v\psi_{yx} + v'\psi_x\psi_y - \nu(\psi_{xxx} + \psi_{yyx})] \\ + r''[\psi_x\psi_t + u\psi_x^2 + v\psi_x\psi_y - \nu(3\psi_x\psi_{xx} + 2\psi_y\psi_{yx} + \psi_x\psi_{yy})] \\ - \nu r'''(\psi_x^3 + \psi_y^2\psi_x) = -\beta qg'\psi_x - (l'r + lr')\psi_x,\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}l'[\psi_{tx} + u'\psi_x^2 + u\psi_{xx} + v\psi_{yx} + v'\psi_x\psi_y - \nu(\psi_{xxx} + \psi_{yyx})] \\ + l''[\psi_x\psi_t + u\psi_x^2 + v\psi_x\psi_y - \nu(3\psi_x\psi_{xx} + 2\psi_y\psi_{yx} + \psi_x\psi_{yy})] - \nu l'''(\psi_x^3 + \psi_y^2\psi_x) = -\beta qf'\psi_x - 2l'l\psi_x,\end{aligned}$$

$$g'[\psi_t + u\psi_x + v\psi_y - \kappa(\psi_{xx} + \psi_{yy})] - \kappa g''(\psi_x^2 + \psi_y^2) = -rf,$$

$$f'[\psi_t + u\psi_x + v\psi_y - \kappa(\psi_{xx} + \psi_{yy})] - \kappa f''(\psi_x^2 + \psi_y^2) = -lf,$$

$$u'\psi_x + v'\psi_y = -l.$$

Равенства (12) сведутся к системе ОДУ, если все производные от функции $\psi(x, y, t)$ в них являются дифференциальными следствиями некоторого базового [17] соотношения $\psi = a(\psi)(t + \alpha x + \mu y)$.

Утверждение 1. Пусть $\psi = a(\psi)(t + \alpha x + \mu y)$, где $\alpha = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $a(\psi) \neq \eta\psi$, $\eta = \text{const}$, $\alpha \neq 0$, $\mu \neq 0$. Тогда равенства (12) сводятся к системе ОДУ.

Доказательство. Так как $t + \alpha x + \mu y = \psi/a(\psi)$, то

$$\psi_t = a/[1 - a'(t + \alpha x + \mu y)] = a^2/(a - \psi a') = k(\psi).$$

Выбираем полученное уравнение $\psi_t = k(\psi)$ в качестве базового.

Аналогично вычисляя другие производные от ψ , получаем

$$\begin{aligned}\psi_x &= \alpha a/[1 - a'(t + \alpha x + \mu y)] = \alpha a^2/(a - \psi a') = k(\psi)\alpha, & \psi_y &= k(\psi)\mu, \\ \psi_{xx} &= k(\psi)k'(\psi)\alpha^2, & \psi_{yy} &= k(\psi)k'(\psi)\mu^2, & \psi_{xy} &= k(\psi)k'(\psi)\alpha\mu, & \psi_{tx} &= k(\psi)k'(\psi)\alpha, \\ \psi_{xxx} &= \alpha^3 k(\psi)[(k'(\psi))^2 + k(\psi)k''(\psi)], & \psi_{yyx} &= \alpha\mu^2 k(\psi)[(k'(\psi))^2 + k(\psi)k''(\psi)].\end{aligned}$$

Таким образом, все производные от функции $\psi(x, y, t)$ из равенства (12) выражаются через функцию $k(\psi)$ и её производные по ψ : k' , k'' . Получаем недоопределённую (см. [16, стр. 22]) систему семи ОДУ для восьми функций

$$\begin{aligned}\rho\{u'[(1 + u\alpha + v\mu) - \nu k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu u''k(\alpha^2 + \mu^2)\} &= -h'\alpha, \\ \rho\{v'[(1 + u\alpha + v\mu) - \nu k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu v''k(\alpha^2 + \mu^2)\} &= -h'\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r'[k' + u'k\alpha + uk'\alpha + vk'\mu + v'k\mu - \nu\alpha(\alpha^2 + \mu^2)(k'^2 + kk'')] \\ + r''k[1 + u\alpha + v\mu - 3\nu k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu r'''k^2(\alpha^2 + \mu^2) = [-\beta qg' - (l'r + lr')],\end{aligned}$$

$$l'[k' + u'k\alpha + uk'\alpha + vk'\mu + v'k\mu - \nu\alpha(\alpha^2 + \mu^2)(k'^2 + kk'')]$$

$$+ l''k[1 + u\alpha + v\mu - 3\nu k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu l'''k^2(\alpha^2 + \mu^2) = -\beta q f' - 2l'l, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} g'k[1 + u\alpha + v\mu - \kappa k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \kappa g''k^2(\alpha^2 + \mu^2) &= -rf, \\ f'k[1 + u\alpha + v\mu - \kappa k'(\alpha^2 + \mu^2)] - \kappa f''k^2(\alpha^2 + \mu^2) &= -lf, \\ k(u'\alpha + v'\mu) &= -l. \end{aligned}$$

□

1.2.1. Частное решение системы (13).

Выпишем частное решение системы (13), положив $k(\psi) = l(\psi) \neq 0$, $r = 0$, $g = g_0 = \text{const}$. Система (13) в этом случае сведётся к виду

$$\begin{aligned} \rho\{u'[(1 + u\alpha + v\mu) - \nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu u''l(\alpha^2 + \mu^2)\} &= -h'\alpha, \\ \rho\{v'[(1 + u\alpha + v\mu) - \nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu v''l(\alpha^2 + \mu^2)\} &= -h'\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l'[l' + u'l\alpha + ul'\alpha + v'l\mu + v'l\mu - \nu\alpha(\alpha^2 + \mu^2)(l'^2 + ll'')] \\ + l''l[1 + u\alpha + v\mu - 3\nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu l'''l^2(\alpha^2 + \mu^2) &= -\beta q f' - 2l'l, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'[1 + u\alpha + v\mu - \kappa l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \kappa f''l(\alpha^2 + \mu^2) &= -f, \\ u'\alpha + v'\mu &= -1. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения системы (14) следует, что $u\alpha + v\mu = -\psi + \psi_0$, $\psi_0 = \text{const}$, $u''\alpha + v''\mu = 0$. Умножив первое уравнение (14) на α , а второе на μ и сложив их, получим

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2}[(1 - \psi + \psi_0) - \nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] &= h', \\ h = h_0 + \frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2}(\psi - 0.5\psi^2 + \psi_0\psi) - \nu\rho l, \\ h_0 &= \text{const}. \end{aligned}$$

Третье и четвёртое уравнения примут вид

$$\begin{aligned} l'[l' + l + l'(-\psi + \psi_0) - \nu\alpha(\alpha^2 + \mu^2)(l'^2 + ll'')] \\ + l''l[1 + (-\psi + \psi_0) - 3\nu l'(\alpha^2 + \mu^2)] - \nu l'''l^2(\alpha^2 + \mu^2) &= -\beta q f', \quad (15) \\ f'[1 + (-\psi + \psi_0)] - \kappa(f'l)'(\alpha^2 + \mu^2) &= -f. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим (см. (14), (15)) к частному решению системы (13)

$$\begin{aligned} l = \psi + B, \quad B = -\beta q c_0 - 1 - \psi_0 + \nu(\alpha^2 + \mu^2), \quad f = c^0[\psi - 1 - \psi_0 + \kappa(\alpha^2 + \mu^2)], \\ u = u_0 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2}\psi, \quad v = -\frac{\psi + \psi_0}{\mu} - \frac{\alpha}{\mu}\left(u_0 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2}\psi\right), \quad u_0 = \text{const}, \\ \psi = \exp(t + \alpha x + \mu y) - B, \quad c_0 = \text{const}, \quad c^0 = \text{const}, \\ h = h_0 + \frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2}(\psi - 0.5\psi^2 + \psi_0\psi) - \nu\rho l, \quad h_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

После подстановки этого частного решения в (2) получаем, что

$$\begin{aligned}
u &= u_0 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2} \psi, & v &= v_0 - \frac{\mu}{\alpha^2 + \mu^2} \psi, & w &= (\psi + B)z, \\
T &= c^0 z [\psi - 1 - \psi_0 + \kappa(\alpha^2 + \mu^2)] + g_0, \\
p &= h_{11} z^2 + h_1 z + h(\psi), \\
h &= h_0 + \frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2} (\psi - 0.5\psi^2 + \psi_0 \psi) - \nu \rho l, & h_0 &= \text{const}, \\
\psi &= \exp(t + \alpha x + \mu y) - B, \\
B &= -\beta q c_0 - 1 - \psi_0 + \nu(\alpha^2 + \mu^2), \\
\rho &= \text{const}, & h_1 &= \text{const}, & h_{11} &= \text{const}, & c_0 &= \text{const}, & c^0 &= \text{const}, \\
u_0 &= \text{const} & v_0 &= \frac{\alpha u_0 - \psi_0}{\mu}, & \psi_0 &= \text{const}, & \mu &\neq 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

является решением системы (2).

1.3. Об одном классе решений уравнений Обербека — Буссинеска

Форма полученного в предыдущем пункте решения приводит к мысли рассмотреть для системы (1) анзац следующего вида:

$$\begin{aligned}
u &= A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1, & v &= B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1, \\
w &= z \exp(t + \alpha x + \mu y), & T &= C_0 z [\exp(t + \alpha x + \mu y) + C_1] + C_2, \\
p &= k_0 [\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 + k_1 \exp(t + \alpha x + \mu y) + k_2 z^2 + k_3 z + k_4(t), \\
k_i &= \text{const}, & i &= 0, 1, 2, 3, & A_0 &= \text{const}, & A_1 &= \text{const}, \\
B_0 &= \text{const}, & B_1 &= \text{const}, & C_i &= \text{const}, & i &= 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Подставляем эти выражения в систему (1). Получаем

$$\begin{aligned}
&\rho \{ A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + [A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1] \alpha A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad + [B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1] \mu A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad - \nu(\alpha^2 + \mu^2) A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \} = - \{ \alpha k_0 [\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 + \alpha k_1 \exp(t + \alpha x + \mu y) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rho \{ B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + [A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1] \alpha B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad + [B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1] \mu B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad - \nu(\alpha^2 + \mu^2) B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) \} = - \{ \mu k_0 [\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 + \mu k_1 \exp(t + \alpha x + \mu y) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rho \{ z \exp(t + \alpha x + \mu y) + [A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1] \alpha z \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad + [B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1] \mu z \exp(t + \alpha x + \mu y) + z [\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 \\
&\quad - \nu(\alpha^2 + \mu^2) z \exp(t + \alpha x + \mu y) \} = - [2k_2 z + k_3] - \rho \beta q \{ C_0 z [\exp(t + \alpha x + \mu y) + C_1] + C_2 \}, \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&C_0 z \exp(t + \alpha x + \mu y) + [A_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + A_1] \alpha C_0 z \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad + [B_0 \exp(t + \alpha x + \mu y) + B_1] \mu C_0 z \exp(t + \alpha x + \mu y) \\
&\quad + z \exp(t + \alpha x + \mu y) C_0 [\exp(t + \alpha x + \mu y) + C_1] - \kappa C_0 (\alpha^2 + \mu^2) z \exp(t + \alpha x + \mu y) = 0,
\end{aligned}$$

$$(A_0\alpha + B_0\mu + 1) \exp(t + \alpha x + \mu y) = 0.$$

Из (17) следует

$$\begin{aligned} A_0\alpha + B_0\mu + 1 &= 0, \\ C_0 + A_1\alpha C_0 + B_1\mu C_0 + C_0 C_1 - \kappa C_0(\alpha^2 + \mu^2), \\ A_0\alpha + B_0\mu + 1 &= 0, \\ \rho[1 + A_1\alpha + B_1\mu - \nu(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0] &= 0, \\ k_3 = -\rho\beta q C_2, \quad 2k_2 + \rho\beta q C_0 C_1 = 0, \quad k_3 + \rho\beta q C_2 = 0, \\ \rho\{A_0 + A_1\alpha A_0 + B_1\mu A_0 - \nu(\alpha^2 + \mu^2)A_0\} + \alpha k_1 &= 0, \\ \rho\{\alpha A_0^2 + \mu A_0 B_0\} + \alpha k_0 &= 0, \\ \rho\{B_0 + A_1\alpha B_0 + B_1\mu B_0 - \nu(\alpha^2 + \mu^2)B_0\} + \mu k_1 &= 0, \\ \rho\{A_0\alpha B_0 + \mu B_0^2\} + \mu k_0 &= 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} A_0 &= -\frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2}, \quad B_0 = -\frac{\mu}{\alpha^2 + \mu^2}, \quad k_0 = -\frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2}, \\ B_1 &= -\frac{1 + A_1\alpha - \nu(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0}{\mu}, \quad C_1 = (\kappa - \nu)(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0, \quad C_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Далее $k_1 = -\rho\beta q C_0/(\alpha^2 + \mu^2)$, $k_2 = -0.5\rho\beta q C_0[(\kappa - \nu)(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0]$.

В итоге находим класс решений уравнений Обербека — Буссинеска, в котором $(A_1, \alpha, \mu, C_0, C_2)$ — произвольные постоянные, $k_4(t)$ — произвольная функция:

$$\begin{aligned} u &= A_1 - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mu^2} \exp(t + \alpha x + \mu y), \\ v &= -\frac{1 + A_1\alpha - \nu(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0}{\mu} - \frac{\mu}{\alpha^2 + \mu^2} \exp(t + \alpha x + \mu y), \\ w &= z \exp(t + \alpha x + \mu y), \\ T &= C_0 z [\exp(t + \alpha x + \mu y) + (\kappa - \nu)(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0] + C_2, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\rho}{\alpha^2 + \mu^2} [\exp(t + \alpha x + \mu y)]^2 - \frac{\rho\beta q C_0}{\alpha^2 + \mu^2} \exp(t + \alpha x + \mu y) \\ &\quad - 0.5\rho\beta q C_0 z^2 [(\kappa - \nu)(\alpha^2 + \mu^2) + \beta q C_0] - \rho\beta q C_2 z + k_4(t). \end{aligned}$$

Класс решений (18) несколько шире, чем решение (16).

2. ЛИНЕЙНОСТЬ ПО ДВУМ КООРДИНАТАМ

Для течений с линейностью по двум пространственным координатам А. Ф. Сидоров полагал (см. [2]), что

$$\begin{aligned} u &= g_1(x, t), \quad v = l_2(x, t)y + f_2(x, t)z + g_2(x, t), \\ w &= l_3(x, t)y + f_3(x, t)z + g_3(x, t), \quad T = l(x, t)y + f(x, t)z + g(x, t), \\ p &= p_{33}(t)z^2 + p_{23}(t)zy + p_{22}(t)y^2 + p_3(t)z + p_2(t)y + p_0(x, t). \end{aligned}$$

Тогда система (1) сводится к системе одиннадцати уравнений для одиннадцати неизвестных функций, где пять функций $p_{33}(t)$, $p_{23}(t)$, $p_{22}(t)$, $p_3(t)$, $p_2(t)$ остаются произвольными

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l_k}{\partial t} + g_1 \frac{\partial l_k}{\partial x} + l_2 l_k + l_3 f_k + (1 + \delta_{2k}) \frac{p_{2k}}{\rho} - \nu \frac{\partial^2 l_k}{\partial x^2} + \beta q l \delta_{3k} &= 0, \quad (k = 2, 3), \\
\frac{\partial f_k}{\partial t} + g_1 \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_2 l_k + f_3 f_k + (1 + \delta_{3k}) \frac{p_{k3}}{\rho} - \nu \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} + \beta q f \delta_{3k} &= 0, \quad (k = 2, 3), \\
\frac{\partial g_k}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_k}{\partial x} + g_2 l_k + g_3 f_k + \frac{p_k}{\rho} - \nu \frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2} + \beta q g \delta_{3k} &= 0, \quad k = (2, 3), \\
\frac{\partial l}{\partial t} + g_1 \frac{\partial l}{\partial x} + l l_2 + l_3 f - \kappa \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial f}{\partial t} + g_1 \frac{\partial f}{\partial x} + l f_2 + f_3 f - \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial g}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g}{\partial x} + l g_2 + g_3 f - \kappa \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial g_1}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial g_1}{\partial x} + l_2 + f_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь δ_{3k} — символ Кронекера.

2.1. О сведении системы (19) к системе ОДУ

А. Ф. Сидоров в [2] для случая линейности по двум координатам получил, в частности, систему одиннадцати ОДУ с независимой переменной x для одиннадцати неизвестных функций, описывающую стационарные пространственные течения. Рассмотрим, применяя развиваемый авторами метод [17], нестационарный случай. Продифференцировав по x первые три уравнения системы (19), обратимся к следствию системы (19) не содержащему членов, зависящих только от времени [4]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 l_k}{\partial t \partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial l_k}{\partial x} + g_1 \frac{\partial^2 l_k}{\partial x^2} + l_2 \frac{\partial l_k}{\partial x} + l_k \frac{\partial l_2}{\partial x} + l_3 \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_k \frac{\partial l_3}{\partial x} \\
- \nu \frac{\partial^3 l_k}{\partial x^3} + \beta q \frac{\partial l}{\partial x} \delta_{3k} &= 0, \quad (k = 2, 3), \\
\frac{\partial^2 f_k}{\partial t \partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial f_k}{\partial x} + g_1 \frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} + f_2 \frac{\partial l_k}{\partial x} + l_k \frac{\partial f_2}{\partial x} + f_3 \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_k \frac{\partial f_3}{\partial x} \\
- \nu \frac{\partial^3 f_k}{\partial x^3} + \beta q \frac{\partial f}{\partial x} \delta_{3k} &= 0, \quad (k = 2, 3), \\
\frac{\partial^2 g_k}{\partial t \partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial g_k}{\partial x} + g_1 \frac{\partial^2 g_k}{\partial x^2} + g_2 \frac{\partial l_k}{\partial x} + l_k \frac{\partial g_2}{\partial x} + g_3 \frac{\partial f_k}{\partial x} + f_k \frac{\partial g_3}{\partial x} \\
- \nu \frac{\partial^3 g_k}{\partial x^3} + \beta q \frac{\partial g}{\partial x} \delta_{3k} &= 0, \quad (k = 2, 3), \tag{20}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 g_1}{\partial x^2} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial t} + g_1 \frac{\partial l}{\partial x} + ll_2 + l_3 f - \kappa \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + g_1 \frac{\partial f}{\partial x} + lf_2 + f_3 f - \kappa \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial t} + g_1 \frac{\partial g}{\partial x} + lg_2 + g_3 f - \kappa \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} + l_2 + f_3 &= 0.\end{aligned}$$

Пусть в системе (20) $g_1 = g_1(\psi)$, $g_k = g_k(\psi)$, $l_k = l_k(\psi)$, $f_k = f_k(\psi)$, ($k = 2, 3$), $l = l(\psi)$, $f = f(\psi)$, $g = g(\psi)$, $p_0 = p_0(\psi)$. Вычислив производные сложных функций и подставив их в систему (20), получим соотношения

$$\begin{aligned}l'_k(\psi_{xt} + g'_1 \psi_x^2 + g_1 \psi_{xx} + l_2 \psi_x - \nu \psi_{xxx}) + l''_k(\psi_x \psi_t + g_1 \psi_x^2 - 3\nu \psi_x \psi_{xx}) \\ - l'''_k \nu \psi_x^3 + (l_k l'_2 + l_3 f'_k + f_k l'_3 + \beta q \delta_{3k} l') \psi_x = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'_k(\psi_{xt} + g'_1 \psi_x^2 + g_1 \psi_{xx} + f_3 \psi_x - \nu \psi_{xxx}) + f''_k(\psi_x \psi_t + g_1 \psi_x^2 - 3\nu \psi_x \psi_{xx}) \\ - f'''_k \nu \psi_x^3 + (l_k f'_2 + f_2 l'_k + f_k f'_3 + \beta q \delta_{3k} f') \psi_x = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'_k(\psi_{xt} + g'_1 \psi_x^2 + g_1 \psi_{xx} - \nu \psi_{xxx}) + g''_k(\psi_x \psi_t + g_1 \psi_x^2 - 3\nu \psi_x \psi_{xx}) \\ - g'''_k \nu \psi_x^3 + (l_k g'_2 + g_2 l'_k + f_k g'_3 + g_3 f'_k + \beta q \delta_{3k} g') \psi_x = 0, \quad (k = 2, 3), \quad (21)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'_1(\psi_t + g_1 \psi_x) - \nu(g''_1 \psi_x^2 + g'_1 \psi_{xx}) + (1/\rho) p'_0 \psi_x = 0, \\ g'_1 \psi_x + l_2 + f_3 = 0,\end{aligned}$$

$$l'(\psi_t + g_1 \psi_x) - \kappa(l'' \psi_x^2 + l' \psi_{xx}) + ll_2 + l_3 f = 0,$$

$$f'(\psi_t + g_1 \psi_x) - \kappa(f'' \psi_x^2 + f' \psi_{xx}) + lf_2 + f_3 f = 0,$$

$$g'(\psi_t + g_1 \psi_x) - \kappa(g'' \psi_x^2 + g' \psi_{xx}) + lg_2 + g_3 f = 0.$$

Из соотношения $g'_1 \psi_x + l_2 + f_3 = 0$ находим $\psi_x = -(l_2 + f_3)/g'_1 = \eta(\psi)$, если $g'_1 \neq 0$.

Утверждение 2. Пусть $\psi_x = \eta(\psi)$ — базовое уравнение и $\psi_t = \alpha \eta(\psi)$, $\alpha = \text{const}$. Тогда соотношения (21) сводятся к системе ОДУ.

Доказательство. Если $\psi_x = \eta(\psi)$, $\psi_t = \alpha \eta(\psi)$, то ψ_t , ψ_x — производные одной и той же функции $\psi(x, t)$, ибо $\psi_{xt} = \psi_{tx} = \alpha \eta \eta'$. При этом $\psi_{xx} = \eta \eta'$, $\psi_{xxx} = \eta'^2 \eta + \eta^2 \eta''$ и (21) сводится к системе одиннадцати ОДУ для одиннадцати неизвестных функций l_k , f_k , g_k , g_1 , p_0 , l , f , g с произвольной функцией $\eta(\psi)$

$$\begin{aligned}l'_k[\alpha \eta' + g'_1 \eta + g_1 \eta' + l_2 - \nu(\eta'^2 + \eta \eta'')] + l''_k \eta(\alpha + g_1 - 3\nu \eta') \\ - l'''_k \nu \eta^2 + (l_k l'_2 + l_3 f'_k + f_k l'_3 + \beta q \delta_{3k} l') = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'_k[\alpha \eta' + g'_1 \eta + g_1 \eta' + f_3 - \nu(\eta'^2 + \eta \eta'')] + f''_k \eta(\alpha + g_1 - 3\nu \eta') \\ - f'''_k \nu \eta^2 + (l_k f'_2 + f_2 l'_k + f_k f'_3 + \beta q \delta_{3k} f') = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g'_k[\alpha\eta' + g'_1\eta + g_1\eta' - \nu(\eta'^2 + \eta\eta'')] + g''_k\eta(\alpha + g_1 - 3\nu\eta') \\
& - g'''_k\nu\eta^2 + (l_k g'_2 + g_2 l'_k + f_k g'_3 + g_3 f'_k + \beta q \delta_{3k} g') = 0, \quad (k = 2, 3), \quad (22) \\
& g'_1(\alpha + g_1) - \nu(g''_1\eta + g'_1\eta') + (1/\rho)p'_0 = 0, \\
& g'_1\eta + l_2 + f_3 = 0, \\
& l'\eta(\alpha + g_1) - \kappa\eta(l''\eta + l'\eta') + ll_2 + l_3 f = 0, \\
& f'\eta(\alpha + g_1) - \kappa\eta(f''\eta + f'\eta') + lf_2 + f_3 f = 0, \\
& g'\eta(\alpha + g_1) - \kappa\eta(g''\eta + g'\eta') + lg_2 + g_3 f = 0.
\end{aligned}$$

Отметим, что условия утверждения немедленно приводят к выводу, что $\psi = \psi(x + \alpha t)$. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для систем уравнений, полученных ранее А. Ф. Сидоровым для случая естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска в предположении линейной зависимости решений от части независимых переменных [2], применены подходы, развиваемые авторами для сведения систем УЧП к системам ОДУ (см., например, [17]). Поиск редукций основан на выделении решений рассматриваемых уравнений, зависящих от одной независимой переменной ψ , и опирается на выбор некоторого базового уравнения в частных производных первого порядка определённым образом связанного с исходной системой УЧП или некоторого базового соотношения. Следует отметить, что в работе не рассмотрены все возможные варианты выбора базового уравнения и, следовательно, не исчерпаны все редукции изучаемых систем уравнений, возможные в рамках применяемого метода. Кроме того, в работе приведены лишь некоторые найденные частные точные решения соответствующих систем.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (код научной темы FUMF-2022-0007). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика. Том VI. М.: Наука, 1986.
2. Сидоров А.Ф. Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Числ. и аналит. решения задач механики сплош. среды. Сб. статей. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. С. 101–117.
3. Сидоров А.Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
4. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. V. 1. P. 391–395; <https://doi.org/10.1007/BF00298016>

5. *Аристов С.Н.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Владивосток: ИАПУ, 1990.
6. *Ульянов О.Н.* Два класса решений нелинейных уравнений механики сплошных сред: дис. ... кандидата физ.-мат. наук. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1991.
7. *Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
8. *Ershkov S.V., Prosviryakov E.Y., Burmasheva N.V., Christianto V.* Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review // Symmetry. 2023. V. 15, N 1825; <https://doi.org/10.3390/sym15101825>
9. *Просвиряков Е.Ю., Горулева Л.С., Альес М.Ю.* Класс точных решений уравнений Обербека — Буссинеска с учётом диссипативной функции Рэлея // Химическая физика и мезоскопия. 2024. Т. 26, № 2. С. 164–178; <https://doi.org/10.62669/17270227.2024.2.15>
10. *Pukhnachev V.V.* Model of viscous layer deformation by thermocapillary forces // Europ. J. Appl. Math. 2002. V. 13, N 2. P. 205–224; <https://doi.org/10.1017/S0956792501004776>
11. *Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Shefer I.A.* Solution of a two-layer flow problem with inhomogeneous evaporation at the thermocapillary interface // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. V. 14, N 4. P. 404–413; <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-4-404-413>
12. *Andreev V.K.* Thermocapillary convection of immiscible liquid in a threedimensional layer at low Marangoni numbers // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2024. V. 17, N 2. P. 195–206.
13. *Pukhnachev V.V.* Group-theoretical methods in convection theory // AIP Conf. Proc. 2011. V. 1404. P.27–38; <https://doi.org/10.1063/1.3659901>
14. *Barna I.F., Matyas L.* Analytic self-similar solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations // Chaos, Solitons and Fractals. 2015. V. 78. P. 249–255; <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.08.002>
15. *Koptev A.V.* Method for solving the Navier — Stokes and Euler equations of motion for incompressible media // J. of Mathematical Sciences. 2020. V. 250, N 1. P. 10–21; <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04992-x>
16. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
17. *Ульянов О.Н., Рубина Л.И.* О некоторых классах свободноконвективных движений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 189–206; <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-2-189-206>
18. *Эйхенвальд А.А.* Теоретическая физика: Теория поля. М.: URSS, 2023.
19. *Шарфарец Б.П., Шарфарец Е.Б.* О выборе методов решения уравнения Пуассона в общем случае распределения объёмной плотности заряда и постановке краевых условий в электрокинетических задачах (обзор) // Научное приборостроение. 2015. Т. 25, № 1. С. 65–75.
20. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. Vol. Partial differential equations. N. Y.: Interscience, 1962.

UDC 517.957:517.958:532.5

**ABOUT ONE APPROACH TO STUDING MATHEMATICAL MODELS
OF NATURAL CONVECTION**© 2025 O. N. Ul'yanov^a, L. I. Rubina^b*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
S. Kovalevskaya st., 16, Ekaterinburg 620108, Russia*E-mails: ^asecretary@imm.uran.ru, ^brli@imm.uran.ru

Received 09.01.2024, revised 30.06.2025, accepted 10.12.2025

Abstract. Systems of partial differential equations obtained earlier by A.F. Sidorov for spatial natural convection of a viscous liquid in the Boussinesq approximation are considered in the case of flows with a linear dependence of the components of the velocity vector on a part of the spatial coordinates. To study these systems the methods of reduction of systems of partial differential equations developed by the authors are used. The systems under consideration are reduced to systems of ordinary differential equations. Some exact partial solutions have been found. It is studied whether the solution of the Oberbeck–Boussinesq equations, which linearly depends on the variable z , can describe the vortex-free motion of a viscous incompressible fluid.

Keywords: Oberbeck–Boussinesq equations, class Lin – Sidorov – Aristov, reductions to ODE systems, exact solutions.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.412

In Memory of Our Teacher – Anatoly Fyodorovich Sidorov

REFERENCES

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics. Fluid Mechanics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1987.
2. Sidorov A.F. Ob odnom klasse resheniy uravneniy gazovoy dinamiki i yestestvennoy konveksii [On a class of solutions of the gas dynamics and natural convection equations]. *Chislen. analitich. resheniya zadach mekhaniki sploshnoy sredy* [Numerical and Analytical Methods for Solving Problems in Continuum Mechanics]. Sverdlovsk: Akad. Nauk SSSR, Ural. Nauchn. Tsentr. 1981, pp. 101–117. (in Russian).
3. Sidorov A.F. Izbrannyye trudy: Matematika. Mekhanika [Selected Works. Mathematics. Mechanics]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2001 (in Russian).
4. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1957. Vol. 1, pp. 391–395.; <https://doi.org/10.1007/BF00298016>
5. Aristov S.N. Vikhrevyye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti [Eddy currents in thin liquid layers]: Dr. Sci. Diss. Vladivostok: IAPU, 1990 (in Russian).
6. Ulianov O.N. Dva klassa resheniy nelineynykh uravneniy mekhaniki sploshnykh sred [Two Classes of Solutions of Nonlinear Equations of Continuum Mechanics]: Ph.D. thesis. Ekaterinburg: Institute of Mathematics and Mechanics, 1992 (in Russian).
7. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyandin A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theor. Found. Chemical Engrg.*, 2009, Vol. 43, No. 5, pp. 642–662; <https://doi.org/10.1134/S0040579509050066>

8. Ershkov S.V., Prosviryakov E.Y., Burmasheva N.V., Christianto V. Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review. *Symmetry*, 2023, Vol. 15, Artical number 1825; <https://doi.org/10.3390/sym15101825>
9. Prosviryakov E.Yu., Goruleva L.S., Alies M.Yu. Klass tochnykh resheniy uravneniy Oberbeka-Bussineska s uchetom dissipativnoy funktsii Releya [A class of exact solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations with the Rayleigh dissipative function]. *Chemical Phys. Mesoscopy*, 2024, Vol. 26, No. 2, pp. 164–178 (in Russian); <https://doi.org/10.62669/17270227.2024.2.15>
10. Pukhnachev V.V. Model of viscous layer deformation by thermocapillary forces. *Europ. J. Appl. Math.*, 2002, Vol. 13, No. 2, pp. 205–224; DOI: 10.1017/S0956792501004776
11. Bekezhanova V.B., Goncharova O.N., Shefer I.A. Solution of a two-layer flow problem with inhomogeneous evaporation at the thermocapillary interface. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021, Vol. 14, No. 4, pp. 404–413; <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-4-404-413>
12. Andreev V.K. Thermocapillary convection of immiscible liquid in a threedimensional layer at low Marangoni numbers. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2024, Vol. 17, No. 2, pp. 195–206
13. Pukhnachev V.V. Group-theoretical methods in convection theory. *AIP Conf. Proc.*, 2011, Vol. 1404, pp. 27–38; <https://doi.org/10.1063/1.3659901>
14. Barna I.F., Matyas L. Analytic self-similar solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2015, Vol. 78, pp. 249–255; <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2015.08.002>
15. Koptev A.V. Method for solving the Navier–Stokes and Euler equations of motion for incompressible media. *J. Math. Sci.*, 2020, Vol. 250, No. 1, pp. 10–21; <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04992-x>
16. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. Metod differentsial'nykh svyazey i yego prilozheniya k gazovoy dinamike [Method of differential relations and its application in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1984 (in Russian).
17. Ul'yanov O.N., Rubina L.I. On some classes of free convection motions. *Proc. Steklov Institute of Mathematics*, 2023, Vol. 321, Suppl. 1. pp. S239–S256; <https://doi.org/10.1134/S0081543823030203>
18. Ejkhenvald A.A. Teoreticheskaya fizika [Theoretical Physics], Moscow: URSS, 2023 (in Russian).
19. Sharfarets B.P., Sharfarets E.B. O vybore metodov resheniya uravneniya Puassona v obshchem sluchaye raspredeleniya ob'yemnoy plotnosti zaryada i o postanovke krayevykh usloviy v elektrokineticheskikh zadachakh (obzor) [About the choice of methods for solving Poisson's equation in the general case of the distribution of the volume charge density and about the formulation of boundary conditions in electrokinetic problems (review)]. *Nauchnoe priborostroenie* [Scientific Instrumentation], 2015, Vol. 25, No. 1, pp. 65–75 (in Russian).
20. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Partial differential equations. N. Y.: Interscience, 1962, Vol. 2.

УДК 539.3:517.9

О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ВКЛЮЧЕНИЕМ И ЖЁСТКИМИ ПЕРЕМЫЧКАМИ: НЕКОЭРЦИТИВНЫЕ ЗАДАЧИ© 2025 А. М. Хлуднев^{1,2a}, Н. П. Лазарев^{3b}¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090, Россия,*²*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия,*³*Научно-исследовательский институт математики
Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова,
ул. Беллинского, 58, г. Якутск 677000, Россия*E-mails: ^akhlud@hydro.nsc.ru, ^bnyurgunlazarev@yandex.ruПоступила в редакцию 14.05.2025 г.; после доработки 06.01.2026 г.;
принята к публикации 20.01.2026 г.

В работе исследуются краевые задачи о равновесии упругой пластины, содержащей объёмное упругое включение и тонкие жёсткие перемычки. Включение отслаивается от пластины, образуя межфазную трещину. Рассматриваемые в работе краевые условия на внешней границе пластины и на границе упругого включения соответствуют некоэрцитивным краевым задачам. Найдены необходимые и достаточные условия существования решения рассматриваемых задач и доказано существование решений. Дано обоснование возможности предельного перехода по параметру жёсткости включения при стремлении параметра к бесконечности и к нулю. Проведён анализ предельных задач, описывающих равновесие пластины с объёмным жёстким включением и с полостью. Анализируются как вариационные, так и дифференциальные постановки рассматриваемых задач.

Ключевые слова: упругая пластина, объёмное включение, жёсткая перемычка, некоэрцитивная краевая задача, существование решений, асимптотика решений.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.413

ВВЕДЕНИЕ

Упругие и неупругие конструкции сложной структуры находят широкое применение в практической деятельности. В частности, конструкции могут включать объекты, которые необходимо описывать в терминах математических моделей для тел разных размерностей. Математическая модель, анализируемая в статье, соответствует упругой конструкции, части которой описываются уравнениями для одномерных и двумерных объектов. Последние десятилетия характеризуются высокой активностью анализа краевых задач для деформируемых конструкций сложной структуры. Это касается и упругих тел с тонкими включениями различной природы, в том числе, при наличии отслоений, т. е. когда между тонкими включениями и окружающим упругим телом имеются трещины. Следует отметить работы [1–13], где исследовались асимптотические свойства решений подобных задач; анализ зависимости решений от формы области, в частности, нахождение производной функционала энергии по длине трещины можно найти в [14–17]; вопросы оптимального управления рассматривались в [18–20]. Анализ напряжённого состояния в упругом теле и приближённые подходы имеются в [21, 22]. Термин «тонкое включение» означает, что размерность включения меньше размерности окру-

жающего упругого тела. Что касается общих подходов к моделированию неоднородных упругих тел, (см. [23, 24]).

В данной работе рассматриваются задачи равновесия упругой пластины при наличии упругого объёмного включения при условии, что тонкие жёсткие перемычки соединяют пластину и включение. Объёмное включение также соответствует упругой пластине; при этом на общей границе для пластины и включения задаются условия свободного края (условия типа Неймана). Основная трудность в задаче связана с тем, что на внешней границе упругой пластины также рассматриваются граничные условия свободного края. Как следствие, для доказательства существования решения рассматриваемых краевых задач подходящее пространство Соболева представляется в виде прямой суммы ортогональных подпространств. При этом решение задач находится в одном из подпространств. Действующие на упругую пластину и включение заданные внешние силы должны удовлетворять подходящим необходимым и достаточным условиям.

Работа структурирована следующим образом. В разд. 1 формулируется краевая задача о равновесии упругой пластины Кирхгофа — Лява с объёмным упругим включением и тонкими жёсткими перемычками, соединяющими пластину и включение. Доказывается разрешимость краевой задачи, найдены необходимые и достаточные условия на заданные внешние нагрузки для разрешимости задачи. Устанавливается эквивалентность дифференциальной и вариационной постановок задачи. Разд. 2 посвящён анализу асимптотики решений при стремлении параметра жёсткости упругого включения к бесконечности. Доказана возможность предельного перехода и проведён анализ предельной задачи. В разд. 3 исследуется разрешимость краевой задачи для рассматриваемой конструкции в случае, когда пластина закреплена в трёх заданных точках. Установлена разрешимость краевой задачи и дано обоснование возможности предельного перехода при стремлении параметра жёсткости упругого включения к нулю.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ , $\omega \subset \Omega$ — подобласть с гладкой границей G , $G \cap \Gamma = \emptyset$; $\gamma_1 = (-1, 1) \times \{0\}$, $\gamma_2 = \{-3/2\} \times (0, 2)$ — кривые, пересекающие G в точках x^0, x^1 , соответственно, $x^0 = (0, 0)$; $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$; $\Omega_0 = \Omega \setminus G$, $\Omega_\gamma = \Omega_0 \setminus \bar{\gamma}$, (см. рис. 1).

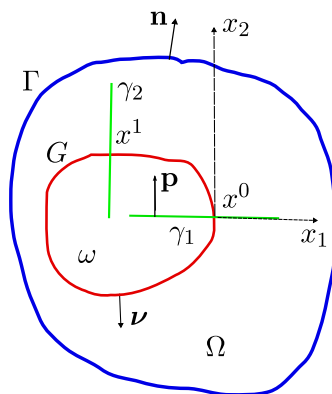


Рис. 1. Упругая пластина с включением ω и жёсткими перемычками γ_i

Обозначим через $n = (n_1, n_2)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $p = (p_1, p_2)$ — единичные нормальные векторы к Γ , G и γ соответственно. Обозначим также $w_n = \frac{\partial w}{\partial n}$. Если $M = \{M_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, то $\nabla \nabla M = M_{ij,ij}$. По повторяющимся индексам производится суммирование. Все величины с двумя нижними индексами в дальнейшем считаются симметричными по этим индексам. Для скалярной функции w положим $\nabla \nabla w = \{w_{,ij}\}$, $i, j = 1, 2$. Области $\Omega \setminus (\bar{\omega} \cup \bar{\gamma})$, ω соответствуют упругой пластине и упругому включению, а γ_i — тонким жёстким перемычкам.

Введём обозначение для изгибающего момента M^n и поперечной силы $T^n = T^n(M)$ на Γ ,

$$M^n = -M_{ij}n_j n_i, \quad T^n = -M_{ij,j}n_i - M_{ij,k}\tau_k \tau_j n_i, \quad (\tau_1, \tau_2) = (-n_2, n_1). \quad (1)$$

Тогда для гладких функций w , $M = \{M_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, справедлива следующая формула Грина [11]

$$-\int_{\Omega} M \cdot \nabla \nabla w = -\int_{\Omega} w \nabla \nabla M + \int_{\Gamma} M^n w_n - \int_{\Gamma} T^n w \mp \int_{G^{\pm}} M^{\nu} w_{\nu} \pm \int_{G^{\pm}} T^{\nu} w. \quad (2)$$

Аналогичная формула может быть выписана и для множества Ω_{γ} с разрезами G и γ ,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_{\gamma}} M \cdot \nabla \nabla w = & -\int_{\Omega_{\gamma}} w \nabla \nabla M - \int_{\gamma} [M^p w_p] + \int_{\gamma} [T^p w] \\ & + \int_{\Gamma} M^n w_n - \int_{\Gamma} T^n w \mp \int_{G^{\pm}} M^{\nu} w_{\nu} \pm \int_{G^{\pm}} T^{\nu} w, \end{aligned}$$

где $[h] = h^+ - h^-$ — скачок функции h на γ ; при этом в (2) и (1) нужно одновременно брать верхние или нижние знаки. Знаки \pm соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормалей p, ν . Величины $M^p, T^p, M^{\nu}, T^{\nu}$ с нормальями p, ν определяются аналогично (1).

Для произвольного множества $S \subset \mathbb{R}^2$ введём пространство инфинитезимальных жёстких перемещений

$$R(S) = \{l \mid l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, \quad x = (x_1, x_2) \in S\}.$$

При определении пространства $R(S)$ постоянные a_i произвольны.

Обозначим через $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$ пространство Соболева,

$$H^{2,\gamma}(\Omega_0) = \{v \in H^2(\Omega_0) \mid v|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2\}.$$

Введём тензор модулей упругости $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, удовлетворяющий условиям симметрии и положительной определённости

$$\begin{aligned} A\xi \cdot \xi & \geq c_0 |\xi|^2 \quad \text{для всех } \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 = \text{const} > 0, \\ a_{ijkl} & = a_{jikl} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \in L^{\infty}(\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2. \end{aligned}$$

Обозначим $M(w) = -A\nabla \nabla w$, или $M_{ij}(w) = -a_{ijkl} w_{,kl}$, $i, j = 1, 2$, и определим билинейную форму $B : H^2(\Omega_0) \times H^2(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$B(w, v) = -\int_{\Omega_0} M_{ij}(w) v_{,ij} = \int_{\Omega_0} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij}.$$

Введём далее скалярное произведение в пространстве $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$,

$$\langle w, v \rangle = \int_{\Omega_0} w \int_{\Omega_0} v + \int_{\Omega_0} \nabla w \nabla v + B(w, v). \quad (3)$$

Ясно, что скалярное произведение (3) индуцирует норму в пространстве $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$, эквивалентную стандартной.

Пусть

$$R^{\perp}(\Omega_0) = \{v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0) \mid \int_{\Omega_0} v = 0, \quad \int_{\Omega_0} v_{,i} = 0, \quad i = 1, 2\}.$$

Предложение 1. Пространство $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств по отношению к скалярному произведению (3):

$$H^{2,\gamma}(\Omega_0) = R(\Omega_0) \oplus R^\perp(\Omega_0).$$

Доказательство. Возьмём произвольные элементы $l \in R(\Omega_0)$, $v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0)$. Пусть $l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. Имеем

$$\langle v, l \rangle = a_i \int_{\Omega_0} v_{,i} + \int_{\Omega_0} v \int_{\Omega_0} (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2). \quad (4)$$

Из (4) следует, что необходимое и достаточное условие для справедливости тождества

$$\langle v, l \rangle = 0 \text{ для всех } l \in R(\Omega_0)$$

имеет вид

$$\int_{\Omega_0} v = 0, \quad \int_{\Omega_0} v_{,i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

т. е. $v \in R^\perp(\Omega_0)$. Предложение 1 доказано. \square

Рассмотрим функционал энергии $\Pi : H^{2,\gamma}(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}B(v, v) - \int_{\Omega_0} fv - \int_{\gamma} gv,$$

где $f \in L^2(\Omega_0)$ — заданная внешняя сила, действующая на пластину и включение, а $g \in L^2(\gamma)$ — заданная внешняя сила, действующая на тонкие перемычки. Считаем, что внешние нагрузки f, g удовлетворяют условию

$$\int_{\Omega_0} fl + \int_{\gamma} gl = 0 \text{ для всех } l \in R(\Omega_0). \quad (5)$$

В этом случае задача минимизации

$$\inf_{v \in R^\perp(\Omega_0)} \Pi(v) \quad (6)$$

имеет единственное решение. Для доказательства разрешимости задачи (6) достаточно проверить коэрцитивность функционала Π на $R^\perp(\Omega_0)$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Существует постоянная $c_1 > 0$, такая что

$$B(v, v) \geq c_1 \|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)}^2 \text{ для всех } v \in R^\perp(\Omega_0). \quad (7)$$

Доказательство. Предположим, что (7) не верно. Тогда существует последовательность $v^k \in R^\perp(\Omega_0)$, такая, что при $k \rightarrow \infty$

$$\|v^k\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)} = 1, \quad B(v^k, v^k) \rightarrow 0. \quad (8)$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно считать, что при $k \rightarrow \infty$

$$v^k \rightarrow v \text{ слабо в } H^{2,\gamma}(\Omega_0), \quad \text{сильно в } H^{1,\gamma}(\Omega_0). \quad (9)$$

Далее имеем

$$0 = \liminf B(v^k, v^k) \geq B(v, v) \geq 0,$$

т. е.

$$B(v, v) = 0. \quad (10)$$

Множество Ω_0 не связное, поэтому отсюда следует ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$):

$$v(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad x \in \omega; \quad v(x) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad x \in \Omega \setminus \bar{\omega}.$$

Однако $v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0)$, следовательно,

$$l_i = v|_{\gamma_i} \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом на кривой γ_1 имеем $[l_1(x^0)] = l_1^+(x^0) - l_1^-(x^0) = 0$, $[l_{1,1}(x^0)] = 0$, где знаки \pm соответствуют значениям функции со стороны $\Omega \setminus \bar{\omega}$ и ω соответственно. Эти равенства дают $a_i = b_i$, $i = 0, 1$. Поскольку $[l_2(x^1)] = 0$, то $a_2 = b_2$. Итак, для предельной функции v имеем

$$v(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_0.$$

Сказанное означает, что $v \in R(\Omega_0) \cap R^\perp(\Omega_0)$, и мы получаем $v \equiv 0$ в Ω_0 . Кроме этого, в силу (8), (9), (10) имеем

$$\|v^k\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)}^2 = \|v^k\|_{H^{1,\gamma}(\Omega_0)}^2 + B(v^k, v^k) \rightarrow \|v\|_{H^{1,\gamma}(\Omega_0)}^2 + B(v, v) = \|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)}^2.$$

Следовательно, $\|v^k\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)} \rightarrow \|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)}$, и в силу (9) заключаем

$$v^k \rightarrow v \text{ сильно в } H^{2,\gamma}(\Omega_0).$$

Тогда из (8) следует, что $\|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)} = 1$, что является противоречием, т. к. $v \equiv 0$ в Ω_0 . Предложение 2 таким образом доказано. \square

В силу Предложения 2 функционал Π коэрцитивен на $R^\perp(\Omega_0)$. Это означает, что задача (6) имеет решение, удовлетворяющее тождеству

$$w \in R^\perp(\Omega_0), \quad (11)$$

$$B(w, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in R^\perp(\Omega_0). \quad (12)$$

В силу (5) задачу (11)–(12) можно переписать в виде

$$w \in R^\perp(\Omega_0),$$

$$B(w, v + l) - \int_{\Omega_0} f(v + l) - \int_{\gamma} g(v + l) = 0 \text{ для всех } v \in R^\perp(\Omega_0), \quad l \in R(\Omega_0),$$

или, учитывая Предложение 1, в таком виде

$$w \in R^\perp(\Omega_0), \quad (13)$$

$$B(w, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0). \quad (14)$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. При выполнении условия (5) существует решение задачи (13)–(14).

Следует отметить, что условие (5) не только достаточно, но и необходимо для разрешимости задачи (13)–(14). Действительно, пусть задача (13)–(14) имеет решение. В качестве тестовой функции в (14) выберем l , где $l \in R(\Omega_0)$. В этом случае из (14) следует (5), что и требовалось.

Приведём теперь дифференциальную формулировку задачи (13)–(14). Требуется найти функции w , $M = \{M_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определённые в Ω_0 и Ω_γ соответственно, а также функции $l^i \in R(\gamma_i)$, такие что

$$\nabla\nabla M + f = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (15)$$

$$M + A\nabla\nabla w = 0 \text{ в } \Omega_\gamma, \quad (16)$$

$$w = l^i, \quad [w_p] = [M^p] = 0 \text{ на } \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$M^n = T^n = 0 \text{ на } \Gamma; \quad M^\nu = T^\nu = 0 \text{ на } G^\pm \setminus (x^0 \cup x^1), \quad (18)$$

$$\int_\gamma gv - \int_\gamma [T^p]v = 0 \text{ для всех } v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0), \quad (19)$$

$$\int_{\Omega_0} w = 0, \quad \int_{\Omega_0} w_{,i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Здесь (15) является уравнением равновесия, а (16) - уравнением состояния. Краевые условия (18) приводят к некоэрцитивности краевой задачи (15)–(19). Условия (20) обеспечивают единственность решения.

Следует отметить, что (19) можно переписать в эквивалентном виде

$$\int_{\gamma_k} g - \int_{\gamma_k} [T^p] = 0, \quad \int_{\gamma_k} gx_i - \int_{\gamma_k} [T^p]x_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2. \quad (21)$$

Согласно (21) главный вектор сил и главный момент, действующие на жёсткие перемычки γ_k , равны нулю.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. На классе гладких решений формулировки (13)–(14) и (15)–(20) эквивалентны.

Доказательство. Пусть задача (15)–(20) имеет гладкое решение. Тогда из (15) следует

$$\int_{\Omega_\gamma} (\nabla\nabla M + f)v = 0 \text{ для всех } v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0).$$

Применяя формулу Грина (1), с учётом того что $[v] = [v_p] = 0$ на γ , имеем отсюда

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\gamma} M\nabla\nabla v - \int_{\Omega_\gamma} fv \pm \int_\gamma gv + \int_\gamma [M^p]v_p - \int_\gamma [T^p]v - \int_\Gamma M^n v_n + \int_\Gamma T^n v \\ + \int_{G^+} M^\nu v_\nu - \int_{G^+} T^\nu v - \int_{G^-} M^\nu v_\nu + \int_{G^-} T^\nu v = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь можно поменять область интегрирования Ω_γ на Ω_0 в интегралах для $M\nabla\nabla v$ и для fv . Учитывая краевые условия (17)–(19), из (22) получим (14). Итак, из (15)–(20) вытекает (13)–(14).

Обратно. Пусть задача (13)–(14) имеет гладкое решение. Подставляя в (14) в качестве тестовых функций $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$, получим уравнение равновесия (15), где $M = -A\nabla\nabla w$. Интегрируя затем по частям в (14) с помощью формулы (1), будем иметь

$$0 = B(w, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = - \int_{\gamma} [M^p] v_p + \int_{\gamma} [T^p] v + \int_{\Gamma} M^n v_n - \int_{\Gamma} T^n v - \int_{G^+} M^\nu v_\nu + \int_{G^+} T^\nu v + \int_{G^-} M^\nu v_\nu - \int_{G^-} T^\nu v - \int_{\gamma} g v.$$

Отсюда следуют все соотношения (17)–(19). Теорема 2 доказана. \square

2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПО ПАРАМЕТРУ ЖЁСТКОСТИ ВКЛЮЧЕНИЯ

В этом разделе будем считать, что тензор модулей упругости в области ω зависит от положительного параметра δ . Пусть

$$A_\delta = \begin{cases} A & \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega} \\ \delta^{-1}A & \text{в } \omega. \end{cases}$$

При каждом $\delta > 0$ можно найти решение задачи вида (15)–(20) с тензором модулей упругости A_δ . Нашей целью будет исследование асимптотики решений, а именно, обоснование возможности предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$. Решение задачи вида (13)–(14) с тензором модулей упругости A_δ удовлетворяет тождеству (см. (13)–(14))

$$w^\delta \in R^\perp(\Omega_0), \tag{23}$$

$$B_\delta(w^\delta, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0), \tag{24}$$

где

$$B_\delta(w, v) = \delta^{-1} \int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij} + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij}.$$

Цель нижеследующих рассуждений — доказать возможность предельного перехода в (23)–(24) при $\delta \rightarrow 0$. На первом этапе получим априорные оценки решения. Из (23)–(24) имеем

$$B_\delta(w^\delta, w^\delta) - \int_{\Omega_0} f w^\delta - \int_{\gamma} g w^\delta = 0. \tag{25}$$

Принимая во внимание неравенство (7), из (25) можно получить оценку, равномерную по $0 < \delta \leq \delta_0$

$$\|w^\delta\|_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq c. \tag{26}$$

Выбирая на основе (26) подпоследовательность, считаем, что при $\delta \rightarrow 0$

$$w^\delta \rightarrow w \text{ слабо в } H^{2,\gamma}(\Omega_0). \tag{27}$$

Кроме того, из (25) получим

$$\int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl}^{\delta} w_{,ij}^{\delta} \leq c\delta.$$

Отсюда и из (27) следует, что для предельной функции w имеем

$$w(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \omega. \quad (28)$$

Введём пространство функций

$$H^{2,\omega}(\Omega_0) = \{v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0) \mid v|_{\omega \cup \gamma} \in R(\omega \cup \gamma)\}.$$

Пусть $v \in H^{2,\omega}(\Omega_0)$ — тестовая функция в (24). Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в (24), получим

$$w \in R^{\perp}(\Omega_0) \cap H^{2,\omega}(\Omega_0), \quad (29)$$

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,ij} v_{,ij} - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \quad \text{для всех } v \in H^{2,\omega}(\Omega_0). \quad (30)$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. При выполнении условия (5) решения задач (24) сходятся в смысле (27)–(28) к решению задачи (29)–(30) при $\delta \rightarrow 0$.

Приведём дифференциальную формулировку задачи (29)–(30). Требуется найти функции $w, M = \{M_{ij}\}$ определённые в Ω_0 и $\Omega_{\gamma} \setminus \bar{\omega}$ соответственно, а также функцию $l^{\infty} \in R(\omega \cup \gamma)$, такие что

$$\nabla \nabla M + f = 0 \quad \text{в } \Omega_{\gamma} \setminus \bar{\omega}, \quad (31)$$

$$M + A \nabla \nabla w = 0 \quad \text{в } \Omega_{\gamma} \setminus \bar{\omega}, \quad (32)$$

$$w = l^{\infty} \quad \text{на } \omega \cup \gamma; \quad [w_p] = [M^p] = 0 \quad \text{на } \gamma \cap (\Omega \setminus \bar{\omega}), \quad (33)$$

$$M^n = T^n = 0 \quad \text{на } \Gamma; \quad M^{\nu} = T^{\nu} = 0 \quad \text{на } G^+ \setminus (x^0 \cup x^1), \quad (34)$$

$$\int_{\omega} f v + \int_{\gamma} g v - \int_{\gamma \cap (\Omega \setminus \bar{\omega})} [T^p] v = 0 \quad \text{для всех } v \in H^{2,\omega}(\Omega_0), \quad (35)$$

$$\int_{\Omega_0} w = 0, \quad \int_{\Omega_0} w_{,i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (36)$$

Задача (31)–(36) описывает равновесие упругой пластины $\Omega_{\gamma} \setminus \bar{\omega}$ с жёстким включением $\omega \cup \gamma$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. Формулировки (29)–(30) и (31)–(36) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.

Доказательство этой теоремы опустим, так как оно аналогично доказательству теоремы 2.

Докажем, что решение предельной задачи (29)–(30) единственно. Предположим, что имеется два различных решения w^1, w^2 . Выбирая в тождестве (30) в качестве тестовой функции $v = w^1 - w^2$ для первого и второго решений, получим следующее соотношение для разности $w = w^1 - w^2$

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl} w_{,ij} = 0.$$

Следовательно,

$$w(x) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \bar{\omega}; \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Поскольку $w \in R^\perp(\Omega_0) \cap H^{2,\omega}(\Omega_0)$, то

$$w(x) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2, \quad x \in \omega.$$

Однако для предельной функции w справедливы соотношения

$$\int_{\Omega_0} w = 0, \quad \int_{\Omega_0} w_{,i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

поэтому $w \equiv 0$ в Ω_0 . Противоречие. Утверждение о единственности решения задачи(29)–(30) доказано.

3. ПЛАСТИНА, ЗАКРЕПЛЁННАЯ В ТРЁХ ТОЧКАХ

В этом разделе рассматривается случай пластины, закреплённой в трёх точках $y^0, y^1, y^2 \in \Omega \setminus \bar{\omega}$, образующих невырожденный треугольник. Например, можно взять

$$y^0 = (0, 1), \quad y^1 = (0, -1), \quad y^2 = (1, 1),$$

(см. рис. 2).

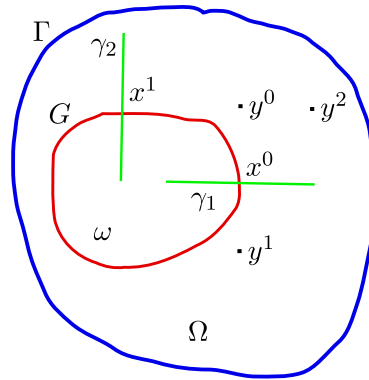


Рис. 2. Пластина, закреплённая в трёх точках

Справедливость условия (5) при этом не предполагается. Обозначим $\Omega_\gamma^0 = \Omega_\gamma \setminus \{y^0 \cup y^1 \cup y^2\}$ и введём пространство функций

$$\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0) = \{v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0) \mid v(y^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2\}.$$

Рассмотрим далее функционал энергии $\pi_\delta : \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\pi_\delta(v) = \frac{1}{2}B^\delta(v, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_\gamma g v, \quad \delta > 0,$$

где

$$B^\delta(w, v) = \delta \int_\omega a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij} + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij}.$$

При каждом фиксированном $\delta > 0$ задача минимизации

$$\inf_{v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)} \pi_\delta(v) \tag{37}$$

будет иметь единственное решение. Для доказательства этого утверждения достаточно проверить коэрцитивность функционала π_δ на пространстве $\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *Существует постоянная $c_2 > 0$, такая что*

$$B(v, v) \geq c_2 \|v\|_{\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)}^2 \text{ для всех } v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0). \quad (38)$$

Доказательство. Доказательство проведём от противного. Предположим, что неравенство (38) не верно. В этом случае существует последовательность $v^k \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)$, такая, что при $k \rightarrow \infty$

$$\|v^k\|_{\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)} = 1, \quad B(v^k, v^k) \rightarrow 0. \quad (39)$$

Выбирая подпоследовательность, будем считать, что при $k \rightarrow \infty$

$$v^k \rightarrow v \text{ слабо в } \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0), \text{ сильно в } H^{1,\gamma}(\Omega_0).$$

Кроме того

$$0 = \liminf B(v^k, v^k) \geq B(v, v) \geq 0.$$

Следовательно,

$$B(v, v) = 0.$$

Повторяя рассуждения из доказательства Предложения 2, для предельной функции v имеем

$$v(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_0; \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Однако $v(y^i) = 0, i = 0, 1, 2$, значит $v \equiv 0$ в Ω_0 . Как и при доказательстве Предложения 2, можно доказать, что

$$v^k \rightarrow v \text{ сильно в } \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0).$$

Тогда из (39) следует, что $\|v\|_{\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)} = 1$, и мы получаем противоречие, т.к. $v \equiv 0$ в Ω_0 . Предложение 3 доказано. \square

Согласно Предложению 3 при каждом фиксированном $\delta > 0$ функционал π_δ будет коэрцитивным. Таким образом, решение задачи (37) существует и удовлетворяет тождеству

$$w^\delta \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0), \quad (40)$$

$$B^\delta(w^\delta, v) - \int_{\Omega_0} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0). \quad (41)$$

Дифференциальная формулировка задачи (40)-(41) имеет следующий вид: найти функции $w^\delta, M = \{M_{ij}\}$ определённые в Ω_0 и Ω_γ^0 соответственно, а также функции $l_i^\delta \in R(\gamma_i)$, такие что

$$\nabla \nabla M + f = 0 \text{ в } \Omega_\gamma^0, \quad (42)$$

$$M + A^\delta \nabla \nabla w^\delta = 0 \text{ в } \Omega_\gamma^0, \quad (43)$$

$$w^\delta = l_i^\delta, \quad [w_p^\delta] = [M^p] = 0 \text{ на } \gamma_i, \quad i = 1, 2, \quad (44)$$

$$M^n = T^n = 0 \text{ на } \Gamma; \quad M^\nu = T^\nu = 0 \text{ на } G^\pm \setminus (x^0 \cup x^1), \quad (45)$$

$$\int_{\gamma} g v - \int_{\gamma} [T^p] v = 0 \text{ для всех } v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0), \quad (46)$$

$$w^\delta(y^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (47)$$

Здесь тензор модулей упругости A^δ имеет вид

$$A^\delta = \begin{cases} A & \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega} \\ \delta A & \text{в } \omega. \end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Формулировки (40)–(41) и (42)–(47) эквивалентны на классе достаточно гладких решений.*

Доказательство этого утверждения приводить не будем, так как соответствующие рассуждения близки к тем, которые использовались при доказательстве Теоремы 2.

Теперь предположим, что внешние нагрузки удовлетворяют условию

$$f \equiv 0 \text{ в } \omega. \quad (48)$$

Цель нижеследующих рассуждений — дать обоснование возможности предельного перехода в задаче (40)–(41) при $\delta \rightarrow 0$. Предельная задача при этом будет описывать равновесие уругой пластины, закреплённой в трёх точках и содержащей полость $\omega \setminus \bar{\gamma}$. Для этого на первом этапе получим априорные оценки решения. Из (40)–(41) следует

$$\delta \int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl}^{\delta} w_{,ij}^{\delta} + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl}^{\delta} w_{,ij}^{\delta} - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f w^{\delta} - \int_{\gamma} g w^{\delta} = 0. \quad (49)$$

Определим для дальнейшего пространство функций W , заданных на $(\Omega \setminus \bar{\omega}) \cup \gamma$,

$$W = \{v \mid v|_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \in H^2(\Omega \setminus \bar{\omega}), v|_{\gamma_k} \in R(\gamma_k), v(y^i) = 0, i = 0, 1, 2; k = 1, 2\}$$

с нормой

$$\|v\|_W^2 = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (v^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla \nabla v|^2).$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 4. *Существует постоянная $c > 0$, такая что*

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} v_{,kl} v_{,ij} \geq c \|v\|_W^2 \text{ для всех } v \in W.$$

Доказательство этого утверждения приводить здесь не будем, так как оно проще, чем доказательство Предложения 2.

Для получения априорных оценок в задаче (40)–(41) нам понадобится ещё одно утверждение.

Предложение 5. *Существует постоянная $c_1 > 0$, такая что*

$$|a_i| \leq c_1 \|v\|_W \text{ для всех } v \in W, \quad i = 0, 1, \quad (50)$$

где $v|_{\gamma_1}(x) = a_0 + a_1 x_1$, $x = (x_1, x_2)$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1$.

Доказательство. В силу теорем вложения для $v \in W$ имеем

$$v|_{\tilde{\gamma}_1} \in H^1(\tilde{\gamma}_1), \quad \tilde{\gamma}_1 = (0, 1) \times \{0\},$$

причём

$$\|v|_{\tilde{\gamma}_1}\|_{H^1(\tilde{\gamma}_1)}^2 \leq c_2 \|v\|_W^2. \quad (51)$$

Поскольку $v(x) = a_0 + a_1 x_1$, $x = (x_1, x_2) \in \tilde{\gamma}_1$, то неравенство (51) можно переписать в виде

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} (a_0 + a_1 x_1)^2 + \int_{\tilde{\gamma}_1} a_1^2 \leq c_2 \|v\|_W^2. \quad (52)$$

Из (52) легко получаем оценки (50). Предложение 5 доказано. \square

Аналогично доказывается, что существует постоянная $c_2 > 0$, такая что

$$|b_i| \leq c_2 \|v\|_W \text{ для всех } v \in W, \quad i = 0, 1, \quad (53)$$

где $v|_{\gamma_2}(x) = b_0 + b_1 x_2$, $x = (x_1, x_2)$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1$.

Из неравенств (50), (53) в частности, вытекает существование постоянной $c > 0$, такой что

$$\|l\|_{L^2(\gamma)} \leq c \|v\|_W \text{ для всех } v \in W, \quad (54)$$

где $l = v|_{\gamma}$. Действительно, пусть

$$l_1(x) = a_0 + a_1 x_1, \quad x = (x_1, x_2) \in \gamma_1.$$

Тогда

$$\|l_1\|_{L^2(\gamma_1)}^2 = \int_{\gamma_1} (a_0 + a_1 x_1)^2 \leq 2 \int_{\gamma_1} (a_0^2 + a_1^2 x_1^2) \leq c \|v\|_W^2.$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для $l_2 = v|_{\gamma_2}$. Таким образом, оценка (54) справедлива.

Пользуясь Предложением 4 и неравенством (54), из (49) получим равномерную по δ оценку

$$\|w^\delta\|_W \leq c. \quad (55)$$

Далее, из (49), (54) равномерно для малых δ имеем

$$\delta \int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl}^\delta w_{,ij}^\delta + \delta \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl}^\delta w_{,ij}^\delta \leq c. \quad (56)$$

Учитывая неравенство вида (38), из (56) следует, что равномерно по $0 < \delta \leq \delta_0$ справедлива оценка

$$\|\sqrt{\delta} w^\delta\|_{\bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0)} \leq c. \quad (57)$$

В силу (55), (57) можно считать, что при $\delta \rightarrow 0$

$$w^\delta \rightarrow w \text{ слабо в } W, \quad (58)$$

$$\sqrt{\delta} w^\delta \rightarrow \tilde{w} \text{ слабо в } \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0). \quad (59)$$

Сходимость (58), (59) позволяет перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в тождестве (см. (40), (41), (48))

$$w^\delta \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0),$$

$$\delta \int_{\omega} a_{ijkl} w_{,kl}^\delta v_{,ij} + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl}^\delta v_{,ij} - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in \bar{H}^{2,\gamma}(\Omega_0).$$

В пределе получим

$$w \in W, \quad (60)$$

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij} - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f v - \int_{\gamma} g v = 0 \text{ для всех } v \in W. \quad (61)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 6. При выполнении условия (48) решения задач (40)–(41) сходятся в смысле (58)–(59) к решению задачи (60)–(61) при $\delta \rightarrow 0$.

Приведём дифференциальную формулировку задачи (60)–(61): требуется найти функции $w, M = \{M_{ij}\}$ определённые на $(\Omega \setminus \bar{\omega}) \cup \gamma$ и $\Omega_\gamma^0 \setminus \bar{\omega}$ соответственно, а также функции $l_i^0 \in R(\gamma_i)$, такие что

$$\nabla \nabla M + f = 0 \text{ в } \Omega_\gamma^0 \setminus \bar{\omega}, \quad (62)$$

$$M + A \nabla \nabla w = 0 \text{ в } \Omega_\gamma^0 \setminus \bar{\omega}, \quad (63)$$

$$w = l_i^0 \text{ на } \gamma_i, \quad i = 1, 2; \quad [w_p] = [M^p] = 0 \text{ на } \gamma \cap (\Omega \setminus \bar{\omega}), \quad (64)$$

$$M^n = T^n = 0 \text{ на } \Gamma; \quad M^\nu = T^\nu = 0 \text{ на } G^+ \setminus (x^0 \cup x^1), \quad (65)$$

$$\int_{\gamma_i} gl - \int_{\gamma_i \cap (\Omega \setminus \bar{\omega})} [T^p]l = 0 \text{ для всех } l \in R(\gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad (66)$$

$$w(y^i) = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (67)$$

Задача (62)–(67) описывает равновесие упругой пластины $\Omega_\gamma^0 \setminus \bar{\omega}$ с тонкими жёсткими включениями γ_i и полостью $\omega \setminus \bar{\gamma}$.

Формулировки (60)–(61) и (62)–(67) эквивалентны на классе достаточно гладких решений. Доказательство этого утверждения приводить здесь не будем, так как оно аналогично доказательству Теоремы 2.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования РФ (разд. 1 и 2) и при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 11.03.2025 № 075-02-2025-1792 (разд. 3). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellieud M., Bouchitte G. Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers // Asymptotic Anal. 2002. V. 32. P. 153–183; DOI: 10.3233/ASY-2002-531
2. El Jarroudi M. Homogenization of an elastic material reinforced with thin rigid von Karman ribbons // Math. Mech. Solids. 2018. V. 24, N 7. P. 1965–1991; DOI: 10.1177/1081286518810757
3. Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G. Multi-materials with strong interface: Variational modelings // Asymptotic Analysis. 2009. V. 61, N 1. P. 1–19; DOI: 10.3233/ASY-2008-0903
4. Rudoy E. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions // Technologies. 2020. V. 8, N 4. Article number 59; DOI: 10.3390/technologies8040059
5. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion // Sib. Electron. Math. Reports. 2022. V. 19, N 2. P. 935–948; DOI: 0.33048/semi.2022.19.078
6. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material // Phil. Trans. R. Soc. A. 2022. V. 380. 20210354; DOI: 10.1098/rsta.2021.0354
7. Gaudiello A, Sili A. Limit models for thin heterogeneous structures with high contrast // J. Diff. Equat. 2021. V. 302. P. 37–63; DOI: 10.1016/j.jde.2021.08.032

8. *De Maio U., Gaudiello A., Sili A.* An uncoupled limit model for a high-contrast problem in a thin multi-structure // *Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni*. 2022. V. 33, N 1. P. 39–64; DOI: 10.4171/RLM/963
9. *Caillerie D., Nedelec J.C.* The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1980. V. 2. P.251–270; DOI: 10.1002/mma.1670020302
10. *Itou H., Kovtunenکو V.A., Rajagopal K.R.* Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress // *Internat. J. Engrg. Sci.* 2019. V. 136. 17-25; DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.12.005
11. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
12. *Khludnev A.M.* Asymptotics of solutions for two elastic plates with thin junction // *Sib. Electron. Math. Reports*. 2022. V. 19, N 2. P. 484–501; DOI: 10.33048/semi.2022.19.041
13. *Khludnev A.M.* On the crossing bridge between two Kirchhoff–Love plates// *Axioms*. 2023. V. 12, N 2. 120; DOI: 10.3390/axioms12020120
14. *Shcherbakov V.V.* Shape derivatives of energy and regularity of minimizers for shallow elastic shells with cohesive cracks // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2022. V. 65, 103505; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2021.103505
15. *Shcherbakov V.V.* The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // *Z. Angew. Math. Mech.* 2016. V. 96. P. 1306–1317; DOI: 10.1002/zamm.201500145
16. *Shcherbakov V.V.* Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions // *Z. Angew. Math. Phys.* 2017. 68:26; DOI: 10.1007/s00033-017-0769-9
17. *Kovtunenکو V.A., Kunisch K.* Shape derivative for penalty-constrained nonsmooth-nonconvex optimization: cohesive crack problem // *J. Opt. Theory Appl.* 2022. V. 194. P. 597–635; DOI: 10.1007/s10957-022-02041-y
18. *Pyatkina E.V.* Optimal control problem for two-layer elastic body with crack // *J. Math. Sci.* 2018. V. 230, N 1. P. 159–166; DOI: 10.1007/s10958-018-3735-y
19. *Lazarev N., Itou H.* Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff-Love plates with a crack // *Math. Mech. Solids*. 2019. V. 24. P. 3743–3752; DOI: 10.1177/1081286519850608
20. *Kovtunenکو V.A., Leugering G.* A shape-topological control problem for nonlinear crack – defect interaction: the anti-plane variational model // *SIAM J. Control Optim.* 2016. V. 54. P. 1329–1351; DOI: 10.1137/151003209
21. *Saccomandi G., Beatty M.F.* Universal relations for fiber-reinforced elastic materials // *Math. Mech. Solids*. 2002. V. 7. P. 99–110; DOI: 10.1177/108128650200700
22. *Rudoy E.M.* On numerical solving a rigid inclusions in 2D elasticity // *Z. Angew. Math. Phys.* 2017. V. 68, N 1. 19; DOI:10.1007/s00033-016-0764-6
23. *Kozlov V.A., Mazya V.G., Movchan A.B.* Asymptotic analysis of fields in a multi-structure. Oxford Math. Monogr. N.-Y.: Oxford University Press, 1999.
24. *Panasenko G.* Multi-Scale Modelling for Structures and Composites. N.-Y.: Springer, 2005.

UDC 539.3:517.9

**ON THE EQUILIBRIUM OF AN ELASTIC PLATE WITH INCLUSION
AND RIGID BRIDGES: NON-COERCIVE PROBLEMS**© 2025 A. M. Khludnev^{1,2a}, N. P. Lazarev^{3b}¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Acad. Lavrentyev prosp., 15, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Novosibirsk State University,**Pirogov st. 1, Novosibirsk 630090, Russia,*³*Ammosov North-Eastern Federal University,
Belinsky St., 58, Yakutsk 677000, Russia*E-mails: ^akhlud@hydro.nsc.ru, ^bnyurgunlazarev@yandex.ru

Received 14.05.2025, revised 06.01.2026, accepted 20.01.2026

Abstract. The paper investigates boundary value problems on the equilibrium of an elastic plate containing a volume elastic inclusion and thin rigid bridges. The inclusion peels off the plate, forming an interfacial crack. The boundary conditions considered in this paper on the outer boundary of the plate and on the boundary of the elastic inclusion correspond to non-coercive boundary value problems. Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to the problems under consideration are found and the existence of solutions is proved. A justification is given for the possibility of a passage to limit in terms of the inclusion stiffness parameter when the parameter tends to infinity and to zero. The analysis of limit problems describing the equilibrium of the plate with a volume rigid inclusion and with a cavity is carried out. Both variational and differential formulations of the problems under consideration are analyzed.

Keywords: elastic plate, volume inclusion, rigid bridge, non-coercive boundary value problem, existence of solutions, asymptotics of solutions.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.413

REFERENCES

1. Bellieud M., Bouchitte G. Homogenization of a soft elastic material reinforced by fibers. *Asymptotic Anal.*, 2002, Vol. 32, pp. 153–183; DOI: 10.3233/ASY-2002-531
2. El Jarroudi M. Homogenization of an elastic material reinforced with thin rigid von Karman ribbons. *Math. Mech. Solids*, 2018, Vol. 24, No. 7, pp. 1965–1991; DOI: 10.1177/1081286518810757
3. Bessoud A.-L., Krasucki F., Michaille G. Multi-materials with strong interface: Variational modelings. *Asymptotic Analysis*, 2009, Vol. 61, No. 1, pp. 1–19; DOI: 10.3233/ASY-2008-0903
4. Rudoy E. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions. *Technologies*, 2020, Vol. 8, No. 4, Article number 59; DOI: 10.3390/technologies8040059
5. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Asymptotic modeling of curvilinear narrow inclusions with rough boundaries in elastic bodies: case of a soft inclusion. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2022, Vol. 19, No. 2, pp. 935–948; DOI: 10.33048/semi.2022.19.078
6. Fankina I.V., Furtsev A.I., Rudoy E.M., Sazhenkov S.A. Multiscale analysis of stationary thermoelastic vibrations of a composite material. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 2022, Vol. 380, 20210354; DOI: 10.1098/rsta.2021.0354

7. Gaudiello A, Sili A. Limit models for thin heterogeneous structures with high contrast. *J. Diff. Equat.*, 2021, Vol. 302, pp. 37–63; DOI: 10.1016/j.jde.2021.08.032
8. De Maio U., Gaudiello A., Sili A. An uncoupled limit model for a high-contrast problem in a thin multi-structure. *Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni*, 2022, Vol. 33, No. 1, pp. 39–64; DOI: 10.4171/RLM/963
9. Caillerie D., Nedelec J.C. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1980, Vol. 2, pp.251–270; DOI: 10.1002/mma.1670020302
10. Itou H., Kovtunenکو V.A., Rajagopal K.R. Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 2019, Vol. 136, 17-25; DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.12.005
11. Khludnev A.M. Zadachi teorii uprugosti v negladkikh oblastyakh [Problems of Elasticity Theory in Non-Smooth Domains]. Moscow: Fizmatlit, 2010.
12. Khludnev A.M. Asymptotics of solutions for two elastic plates with thin junction. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2022, Vol. 19, No. 2, pp. 484–501; DOI: 10.33048/semi.2022.19.041
13. Khludnev A.M. On the crossing bridge between two Kirchhoff–Love plates. *Axioms*, 2023, Vol. 12, No. 2, 120; DOI: 10.3390/axioms12020120
14. Shcherbakov V.V. Shape derivatives of energy and regularity of minimizers for shallow elastic shells with cohesive cracks. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2022, Vol. 65, 103505; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2021.103505
15. Shcherbakov V.V. The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2016, Vol. 96, pp. 1306–1317; DOI: 10.1002/zamm.201500145
16. Shcherbakov V.V. Energy release rates for interfacial cracks in elastic bodies with thin semirigid inclusions. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017, 68:26; DOI: 10.1007/s00033-017-0769-9
17. Kovtunenکو V.A., Kunisch K. Shape derivative for penalty-constrained nonsmooth-nonconvex optimization: cohesive crack problem. *J. Opt. Theory Appl.*, 2022, Vol. 194, pp. 597–635; DOI: 10.1007/s10957-022-02041-y
18. Pyatkina E.V. Optimal control problem for two-layer elastic body with crack. *J. Math. Sci.*, 2018, Vol. 230, No. 1, pp. 159–166; DOI: 10.1007/s10958-018-3735-y
19. Lazarev N., Itou H. Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff-Love plates with a crack. *Math. Mech. Solids*, 2019, Vol. 24, pp. 3743–3752; DOI: 10.1177/1081286519850608
20. Kovtunenکو V.A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack – defect interaction: the anti-plane variational model. *SIAM J. Control Optim.*, 2016, Vol. 54, pp. 1329–1351; DOI: 10.1137/151003209
21. Saccomandi G., Beatty M.F. Universal relations for fiber-reinforced elastic materials. *Math. Mech. Solids*, 2002, Vol. 7, pp. 99–110; DOI: 10.1177/108128650200700
22. Rudoy E.M. On numerical solving a rigid inclusions in 2D elasticity. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2017, Vol. 68, No. 1, 19; DOI:10.1007/s00033-016-0764-6
23. Kozlov V.A., Mazya V.G., Movchan A.B. Asymptotic Analysis of Fields in a Multi-Structure. Oxford Math. Monogr. N.-Y.: Oxford University Press, 1999.
24. Panasenko G. Multi-Scale Modelling for Structures and Composites. N.-Y.: Springer, 2005.

УДК 519.6

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОБЛАСТЕЙ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННЫХ СХЕМ АДАМСА МЕТОДОМ BOUNDARY LOCUS

© 2025 Д. М. Шишкин^{1a}, И. В. Киреев^{2b}, В. Е. Зализняк^{1c}

¹Международный институт экономики и финансов,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Покровский бульвар, 11, г. Москва 109028, Россия,

²Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44, г. Красноярск 660036, Россия,

³Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет,
просп. Свободный, 79, г. Красноярск 660041, Россия

E-mails: ^adenis_shishkin_2015@mail.ru, ^bkiv@icm.krasn.ru,
^cvzalizniak@sfu-kras.ru

Поступила в редакцию 10.04.2025 г.; после доработки 22.01.2026 г.;
принята к публикации 22.01.2026 г.

В статье предложен и реализован базирующийся на методе boundary locus алгоритм визуализации областей абсолютной устойчивости многошаговых методов Адамса 2–15 порядков. Полученная информация необходима для выбора шага дискретизации при численном решении задачи Коши методом Адамса.

Ключевые слова: метод Адамса — Башфорта, метод Адамса — Мулттона, предиктор-корректор; область устойчивости; boundary locus.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.414

ВВЕДЕНИЕ

Многие приложения приводят к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dr}{dt} = f(t, r), r(t_0) = r_0, \quad (1)$$

где f достаточно гладкая функция своих аргументов, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения задачи (1) на некотором отрезке изменения независимой переменной $t \geq t_0$. В ряде случаев [1, 2] значения функции $r(t)$ необходимо вычислить с высокой точностью, для чего применяют многошаговые методы, являющиеся на сегодня стандартной вычислительной технологией решения нежёстких задач.

Общая форма многошаговых методов [3, 4] имеет следующий вид:

$$\sum_{0 \leq j \leq k} \alpha_j r_{n-j} = \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad (2)$$

здесь $k \leq n \in \mathbb{N}$ — натуральное число; $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ — постоянные вещественные числа, определяющие свойства точности и устойчивости схемы (2) и обязательно $\alpha_0 \neq 0$. Через r_n обозначено приближённое значение искомой функции $r(t)$ в точке $t_n = t_0 + n\tau$, где $\tau > 0$ — шаг интегрирования, постоянный на некоторых интервалах изменения аргумента t .

Глобальная ошибка решения задачи Коши (1) многошаговым численным методом (2), как правило, будет меньше, если расчёты осуществлять с переменным шагом. Однако для гибкого управления величиной шага интегрирования при проведении расчётов необходимо знать характеристики её области устойчивости. Для решения последней задачи, в силу её двумерности, естественно использовать методы вычислительной геометрии. Модификациям одного из них — визуализации областей абсолютной устойчивости многошаговых схем методом boundary locus [5, 6] и посвящена данная работа.

1. ОБЛАСТИ ДАЛКВИСТА ДЛЯ МЕТОДОВ АДАМСА

Общий вид представления многошаговых методов Адамса k -го порядка совпадает по форме с соотношением (2), в котором

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_j = 0, \quad j > 1.$$

При этом на точном решении задачи (1) равенство (2) выполняется с k -м порядком точности при $\tau \rightarrow 0+$. Разностные схемы такого типа были предложены во второй половине XIX века астрономом Адамсом (John C. Adams). Вычисления, в основе которых лежат эти методы, позволили обнаружить в 1846 году неизвестную тогда планету Нептун, которая стала первой планетой, открытой благодаря математическим расчётам. Методы Адамса оказались настолько успешными, что они остаются стандартной вычислительной технологией решения нежёстких задач и по сей день [1, 3].

Если $\beta_0 = 0$, то из соотношения (2) непосредственно выражается r_n через ранее вычисленные узловые значения r_{n-1}, \dots, r_{n-k} . Таковы, например, общеизвестные явные методы Адамса — Башфорта, общий вид которых можно представить следующим образом:

$$r_{n+1} - r_n = \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k. \quad (3)$$

Эта вычислительная схема была разработана Адамсом в 1855 г. по просьбе известного английского специалиста по внешней баллистике Башфорта [7].

В случае $\beta_0 \neq 0$ для вычисления r_n из (2) необходимо решить уравнение, как правило нелинейное, и мы приходим к неявным схемам решения задачи Коши (1), известные как методы Адамса — Мултона:

$$r_n - r_{n-1} = \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k. \quad (4)$$

Коэффициенты разностных схем (3, 4) являются рациональными числами, числители и знаменатели которых представлены в [2] в виде таблиц для $k = 2, \dots, 16$. Заметим, что формулу (3) часто приписывают Адамсу и Башфорту, а (4) — Адамсу и Мултону (1926 г.). Однако в [3] утверждается, что в действительности обе формулы принадлежат Адамсу.

Оценка границ области устойчивости разностного метода решения задачи Коши связана с тестовым уравнением Далквиста [8]

$$\frac{dr}{dt} = \lambda r, \quad (5)$$

здесь $\lambda \in \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Для уравнения (5) соотношение (2) принимает вид

$$\sum_{0 \leq j \leq k} \alpha_j r_{n-j} = \zeta \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j r_{n-j}, \quad \zeta = \tau \lambda \in \mathbb{C}, \quad n = k, k+1, k+2, \dots \quad (6)$$

Общее решение последнего разностного уравнения выражается [4, 9] через корни характеристического полинома

$$p_k(z) = \sum_{0 \leq j \leq k} \alpha_j z^{k-j} - \zeta \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j z^{k-j}, \quad (7)$$

коэффициенты которого зависят от комплексного параметра ζ из (6). Напомним [3], что область абсолютной устойчивости схемы (2) это множество значений $\zeta \in \mathbb{C}$, для которых все корни характеристического многочлена (7) лежат внутри единичного круга.

Из теории многошаговых методов [10] следует, что граница такой области содержит комплексное число ноль. Поэтому особый интерес для методов Адамса вызывают связанные открытые подмножества \mathfrak{D}_k области абсолютной устойчивости, граничащие с точкой 0 комплексной плоскости переменной $\zeta \in \mathbb{C}$. Отдавая должное автору работы [8] далее множество \mathfrak{D}_k будем называть областью Далквиста [3, 11] схемы (2). Для визуализации \mathfrak{D}_k воспользуемся методом *boundary locus* [5, 6].

А именно, пусть

$$z_j = \rho_j e^{i\varphi_j} \in \mathbb{C}, \quad \rho_j = |z_j|, \quad i^2 = -1, \quad (8)$$

какой-либо корень полинома $p_k(z)$, определённого в (7). Тогда если $\zeta \in \mathfrak{D}_k$, то обязательно $|z_j(\zeta)| = \rho_j < 1$. Введём многочлены

$$a_k(z) = \sum_{0 \leq j \leq k} \alpha_j z^{k-j}, \quad b_k(z) = \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j z^{k-j}, \quad p_k(z) = a_k(z) - \zeta b_k(z), \quad (9)$$

откуда $p_k(z_j(\zeta)) = 0$ только тогда, когда $\zeta = a_k(z_j)/b_k(z_j)$.

Рассмотрим множество кривых $\{\mathcal{L}_k(\rho)\}$ комплексной ζ -плоскости, зависящее от положительного параметра ρ (модуль комплексного числа z):

$$\mathcal{L}_k(\rho) = \left\{ \zeta = \frac{a_k(\rho e^{i\varphi})}{b_k(\rho e^{i\varphi})} \mid \rho > 0, \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \subset \mathbb{C}. \quad (10)$$

Очевидно, что связная область \mathfrak{D}_k является подмножеством множества $\mathfrak{D}_k^{\mathcal{L}}$, ограниченного замкнутой линией

$$\mathcal{L}_k(1) = \left\{ \zeta = \frac{a_k(e^{i\varphi})}{b_k(e^{i\varphi})}, \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \subset \mathbb{C}.$$

Так как область \mathfrak{D}_k не должна иметь общих точек с любой из кривых $\mathcal{L}_k(\rho)$ при $\rho > 1$, то

$$\mathfrak{D}_k = \mathfrak{D}_k^{\mathcal{L}} \setminus \bigcup_{\rho > 1} \{\mathfrak{D}_k^{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_k(\rho)\}, \quad (11)$$

и мы приходим к следующему алгоритму визуализации области Далквиста для схемы (2):

- отрисовываем на некотором фоне линию $\mathcal{L}_k(1)$ каким-либо, отличным от фона, цветом;
- на том же поле с некоторым шагом по параметру $\rho > 1$ цветом фона прорисовываем линии $\mathcal{L}_k(\rho)$, тем самым удаляя «лишнюю» часть области $\mathfrak{D}_k^{\mathcal{L}}$.

Для многошаговых схем Адамса соотношения, определяющие область Далквиста, упрощаются, поскольку $a_k(z) = z^n - z^{n-1}$ и потому для методов Адамса — Башфорта имеем

$$\mathcal{L}_k(\rho) = \left\{ \zeta = \frac{\rho e^{i\varphi} - 1}{\beta_0 + \beta_1(\rho e^{i\varphi})^{-1} + \dots + \beta_{k-1}(\rho e^{i\varphi})^{-(k-1)} + \beta_k(\rho e^{i\varphi})^{-k}} \mid \rho > 0, \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \subset \mathbb{C},$$

$$r_{n+1} - r_n = \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k.$$

Для методов Адамса — Мултона аналогично получаем:

$$\mathcal{L}_k(\rho) = \left\{ \zeta = \frac{1 - (\rho e^{i\varphi})^{-1}}{\beta_0 + \beta_1(\rho e^{i\varphi})^{-1} + \dots + \beta_{k-1}(\rho e^{i\varphi})^{-(k-1)} + \beta_k(\rho e^{i\varphi})^{-k}} \mid \rho > 0, \varphi \in [0, 2\pi] \right\} \subset \mathbb{C},$$

$$r_n - r_{n-1} = \tau \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k.$$

Рассмотрим теперь алгоритм предиктор-корректор численного решения задачи Коши (1), базирующийся на методах Адамса — Башфорта (предиктор)

$$r_{n+1}^p = r_n + \tau \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p f(t_{n-j}, r_{n-j}), \quad n \geq k, \quad (12)$$

и Адамса — Мултона (корректор)

$$r_{n+1} = r_n + \tau \left[\beta_0^c f(t_{n+1}, r_{n+1}^p) + \sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j^c f(t_{n+1-j}, r_{n+1-j}) \right] \approx r(t_{n+1}), \quad \beta_0^c \neq 0; \quad (13)$$

порядков k и m соответственно. Применяя схему (12)–(13) к тестовому уравнению Далквиста, для $n \geq \max(k, m-1)$ получаем

$$r_{n+1}^p = r_n + \tau \lambda \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p r_{n-j}, \quad r_{n+1} = r_n + \tau \lambda \left(\beta_0^c r_{n+1}^p + \sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j^c r_{n+1-j} \right).$$

Вводя, как и ранее в (6), $\zeta = \tau \lambda \in \mathbb{C}$ приходим к разностному соотношению

$$r_{n+1} = \left(\beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p r_{n-j} \right) \zeta^2 + \left(\beta_0^c r_n + \sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j^c r_{n+1-j} \right) \zeta + r_n;$$

характеристический полином которого равен

$$p_{k,m}(z) = z^{\max(k,m-1)} \left\{ \left[\beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p \left(\frac{1}{z} \right)^j \right] \zeta^2 + \left[\beta_0^c + \beta_1^c + z \sum_{2 \leq j \leq m} \beta_j^c \left(\frac{1}{z} \right)^j \right] \zeta + 1 - z \right\}$$

или

$$p_{k,m}(z) = z^{\max(k,m-1)} [b_{k,m}(z)\zeta^2 - c_{k,m}(z)\zeta - a_{k,m}(z)]; \quad (14)$$

где

$$a_{k,m}(z) = z - 1, \quad b_{k,m}(z) = \beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p z^{-j}, \quad c_{k,m}(z) = (z-1)\beta_0^c - z \sum_{0 \leq j \leq m} \beta_j^c \left(\frac{1}{z} \right)^j,$$

$$a_{k,m}(1) = 0, \quad b_{k,m}(1) = \beta_0^c, \quad c_{k,m}(1) = -1.$$

Пусть $z_j(\zeta) = \rho_j e^{i\varphi_j}$ — какой-либо корень характеристического полинома (14), $0 < j \leq \max(k, m-1)$. Тогда если $\zeta \in \mathfrak{D}_{k,m}$ — область Далквиста схемы (12)–(13), то обязательно $|z_j(\zeta)| = \rho_j < 1$ для всех j . Аналогично вышеизложенному, рассмотрим множество кривых $\{\mathcal{L}_{k,m}(\rho)\}$ комплексной ζ -плоскости, зависящих от положительного параметра ρ :

$$\mathcal{L}_{k,m}(\rho) = \{ \zeta(\varphi) \mid b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})\zeta^2 - c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})\zeta - a_{k,m}(\rho e^{i\varphi}) = 0, \varphi \in [0, 2\pi], \rho > 0 \} \subset \mathbb{C}.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{L}_{k,m}(\rho) = \mathcal{L}_{k,m}^+(\rho) \cup \mathcal{L}_{k,m}^-(\rho), \quad \rho > 0; \quad (15)$$

где

$$\mathcal{L}_{k,m}^+(\rho) = \left\{ \zeta(\varphi) = \frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi}) + d_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{2b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}, \varphi \in [0, 2\pi] \right\};$$

$$\mathcal{L}_{k,m}^-(\rho) = \left\{ \zeta(\varphi) = \frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi}) - d_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{2b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}, \varphi \in [0, 2\pi] \right\};$$

$$a_{k,m}(z) = z - 1, \quad b_{k,m}(z) = \beta_0^c \sum_{j=0}^k \beta_j^p \left(\frac{1}{z}\right)^j, \quad c_{k,m}(z) = (z - 1)\beta_0^c - z \sum_{j=0}^m \beta_j^c \left(\frac{1}{z}\right)^j,$$

$$d_{k,m}(\rho e^{i\varphi}) = \sqrt{c_{k,m}^2(\rho e^{i\varphi}) + 4b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})},$$

$$\frac{d_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{2b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} = \sqrt{\left[\frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{2b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}\right]^2 + \frac{a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}} = \frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} \sqrt{0.25 + \frac{a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{c_{k,m}^2(\rho e^{i\varphi})}},$$

здесь $\sqrt{}$ — арифметическая ветвь квадратного корня. Аналог равенства (11) имеет место и в рассматриваемом случае, а потому для визуализации области $\mathfrak{D}_{k,m}$ схемы предиктор-корректор (12)–(13) можно воспользоваться описанным ранее алгоритмом:

$$\mathfrak{D}_{k,m} = \mathfrak{D}_{k,m}^{\mathcal{L}} \setminus \bigcup_{\rho > 1} \{ \mathfrak{D}_{k,m}^{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_{k,m}(\rho) \}.$$

Соотношения, альтернативные формулам (15), можно представить в виде

$$\mathcal{L}_{k,m}(\rho) = \mathcal{L}_{k,m}^+(\rho) \cup \mathcal{L}_{k,m}^-(\rho), \quad \rho > 0;$$

$$\mathcal{L}_{k,m}^{\pm}(\rho) = \left\{ \zeta(\varphi) = \frac{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} [0.5 \pm \sqrt{f_{k,m}}], \varphi \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$a_{k,m}(z) = z - 1, \quad b_{k,m}(z) = \beta_0^c \sum_{j=0}^k \beta_j^p z^{-j},$$

$$c_{k,m}(z) = -\beta_0^c - \sum_{j=1}^m \beta_j^c \left(\frac{1}{z}\right)^{j-1},$$

$$f_{k,m} = 0.25 + \frac{a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{c_{k,m}^2(\rho e^{i\varphi})} = 0.25 + \frac{a_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} \left[\frac{b_{k,m}(\rho e^{i\varphi})}{c_{k,m}(\rho e^{i\varphi})} \right]^2$$

удобном для численной реализации.

Однако корректно выделить стандартными программными средствами языка C++ арифметическую ветвь квадратного корня $\sqrt{f_{k,m}}$ не удаётся. Поэтому вернёмся к общему уравнению (15) кривых $\mathcal{L}_{k,m}(\rho)$, которое представим в виде квадратного относительно ζ уравнения

$$b_{\rho}(\varphi)\zeta^2 - c_{\rho}(\varphi)\zeta - a_{\rho}(\varphi) = 0,$$

где

$$a_{\rho}(\varphi) = \rho e^{i\varphi} - 1, \quad b_{\rho}(\varphi) = \beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p (\rho e^{i\varphi})^{-j}, \quad c_{\rho}(\varphi) = (\rho e^{i\varphi} - 1)\beta_0^c - \rho e^{i\varphi} \sum_{0 \leq j \leq m} \beta_j^c (\rho e^{i\varphi})^{-j}.$$

Решение $\zeta = \zeta_\rho(\varphi)$ последнего уравнения является дифференцируемой функцией φ , производная которой имеет вид

$$\zeta'(\varphi) = \frac{d\zeta}{d\varphi} = \frac{b'_\rho(\varphi)\zeta^2 - c'_\rho(\varphi)\zeta - a'_\rho(\varphi)}{c_\rho(\varphi) - 2b_\rho(\varphi)\zeta},$$

здесь

$$\begin{aligned} a'_\rho(\varphi) &= i\rho e^{i\varphi}, & b'_\rho(\varphi) &= -i\beta_0^c \sum_{1 \leq j \leq k} j\beta_j^p (\rho e^{i\varphi})^{-j}, \\ c'_\rho(\varphi) &= i\rho e^{i\varphi} \beta_0^c - i\rho e^{i\varphi} \sum_{0 \leq j \leq m} \beta_j^c (\rho e^{i\varphi})^{-j} + i\rho e^{i\varphi} \sum_{1 \leq j \leq m} j\beta_j^c (\rho e^{i\varphi})^{-j}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к комплексной переменной $z = \rho e^{i\varphi}$, получаем

$$\begin{aligned} a'_\rho(\varphi) &= iz, & b'_\rho(\varphi) &= -\frac{i\beta_0^c}{z} \sum_{1 \leq j \leq k} j\beta_j^p \left(\frac{1}{z}\right)^{j-1}, \\ c'_\rho(\varphi) &= \frac{i}{z} \sum_{2 \leq j \leq m} (j-1)\beta_j^c \left(\frac{1}{z}\right)^{j-2}. \end{aligned}$$

Теперь, начиная со значения $\varphi = 0$, при котором

$$\begin{aligned} b_\rho(0)\zeta^2 - c_\rho(0)\zeta - a_\rho(0) &= 0, \\ \zeta_\rho^\pm(0) &= \frac{c_\rho(0)}{b_\rho(0)} \left[0.5 \pm \sqrt{f_\rho(0)} \right], & a_\rho(0) &= \rho - 1, & b_\rho(0) &= \beta_0^c \sum_{0 \leq j \leq k} \beta_j^p \frac{1}{\rho^j}, \\ c_\rho(0) &= (\rho - 1)\beta_0^c - \rho e^{i\varphi} \sum_{0 \leq j \leq m} \beta_j^c \frac{1}{\rho^j}, & f_\rho(0) &= 0.25 + \frac{a_\rho(0)}{b_\rho(0)} \left[\frac{b_\rho(0)}{c_\rho(0)} \right]^2 \end{aligned}$$

можем «предсказать» следующую точку выбранной ветви квадратного корня, основываясь на разложении Тейлора для функции $\zeta(\varphi)$ в последней вычисленной точке. Отправляясь от равномерного по $\varphi \in [0, 2\pi]$ шага Δ_φ , с целью исключить «перескакивание» с одной ветви $\sqrt{}$ на другую, для каждого нового узла $\varphi \rightarrow \varphi + \Delta_\varphi$ при вычислении $\zeta(\varphi + \Delta_\varphi)$ будем выбирать тот знак « \pm » у $\sqrt{f_{k,m}}$, для которого разность

$$\Delta_\zeta = \zeta(\varphi + h_\varphi) - [\zeta(\varphi) + \zeta'(\varphi)\Delta_\varphi]$$

минимальна по модулю. Такой подход позволил визуализировать границы областей Далквиста и для схем предиктор-корректор в обсуждаемом ниже случае $k = m = 2, \dots, 15$. Подобные схемы часто применяются на практике и детально описаны в монографии [2].

2. АНАЛИЗ ОБЛАСТЕЙ ДАЛКВИСТА ДЛЯ МЕТОДОВ АДАМСА

Рассмотренные выше алгоритмы визуализации были реализованы на языке C++ с использованием класса «complex» и скомпилированы с помощью GCC 4.2.2, x64. Все вычисления проводились с точностью «double», а в режиме накопления — «long double». Ниже, для краткости, области абсолютной устойчивости для методов Адамса — Башфорта, Адамса — Мулттона и Адамса — Башфорта — Мулттона порядка $k = 2, \dots, 15$ обозначены через \mathfrak{D}_k^B , \mathfrak{D}_k^M и \mathfrak{D}_k^{BM} соответственно. В силу симметрии множеств \mathfrak{D}_k относительно оси абсцисс, достаточно отрисовывать только «верхнюю» часть областей Далквиста рассмотренных многошаговых методов.

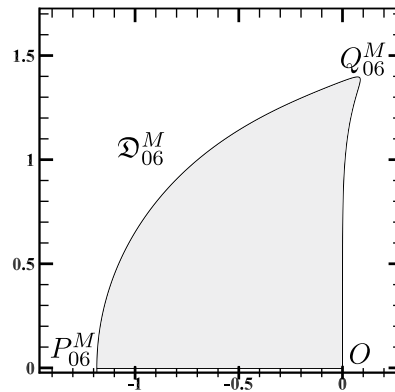


Рис. 1. «Верхняя» часть области \mathfrak{D}_{06}^M

Границы всех \mathfrak{D}_k были построены в интерактивном режиме с помощью линейной интерполяции на последовательности точек $\zeta(\varphi)$ комплексной плоскости с одинаковыми шагами $\Delta_\varphi = \pi/1024$ по параметру $\varphi \in [0, 2\pi]$, введённому в (8). Некоторые из областей \mathfrak{D}_k изображены на рис. 1 и 2, где горизонтальная ось соответствует действительной, а вертикальная — мнимой частям комплексного числа $\zeta = \tau\lambda$, ассоциируемого с тестовым уравнением (5).

Ограниченность объёма данной статьи не позволяет привести здесь изображения всех полученных авторами областей абсолютной устойчивости для методов Адамса. Но вычисления показали, что при заданном $k > 2$ множество \mathfrak{D}_k качественно неплохо характеризуются тремя узловыми точками O, P_k и Q_k ; O — начало комплексной плоскости ζ ; P_k — самая «левая», а Q_k — «наивысшая правая» точки «верхней» части \mathfrak{D}_k . Этот факт иллюстрирует рис. 1, на котором изображена «верхняя» половина множества \mathfrak{D}_{06}^M . Поскольку координаты O и мнимая часть комплексного числа P_k — нулевые, то три вещественных числа $\text{Re}(P_k), \text{Re}(Q_k)$ и $\text{Im}(Q_k)$ удовлетворительно описывают \mathfrak{D}_k .

В табл. 1 и 2 приведены «снятые» с графических образов границ областей \mathfrak{D}_k значения комплексных чисел $P_k^B, Q_k^B, P_k^M, Q_k^M, P_k^{BM}, Q_k^{BM}$, относительная погрешность каждой из приведённых величин по абсолютной величине не превосходит 0.001.

Таблица 1

Узловые точки областей \mathfrak{D}_k^B и $\mathfrak{D}_k^M, k = 2, \dots, 15$

k	P_k^B	Q_k^B	k	P_k^M	Q_k^M
02	-1.0	$-0.34 + i \cdot 0.805$	02	$-\infty$	$i \cdot \infty$
03	-0.545	$0.0974 + i \cdot 0.756$	03	-6.0	$-2.83 + i \cdot 3.19$
04	-0.3	$3.08 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.432$	04	-3.0	$-1.16 + i \cdot 1.88$
05	-0.163	$-3.7 \cdot 10^{-5} + i \cdot 0.224$	05	-1.0	$-1.16 + i \cdot 1.87$
06	$-8.77 \cdot 10^{-2}$	$-2.4 \cdot 10^{-8} + i \cdot 0.114$	06	-1.18	$8.5 \cdot 10^{-2} + i \cdot 1.39$
07	$-4.68 \cdot 10^{-2}$	$6.52 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.0596$	07	-0.769	$9.65 \cdot 10^{-3} + i \cdot 1.07$
08	$-2.44 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 2.93 \cdot 10^{-2}$	08	-0.493	$-3.2 \cdot 10^{-4} + i \cdot 0.697$
09	$-1.27 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 1.5 \cdot 10^{-2}$	09	-0.31	$3.3 \cdot 10^{-7} + i \cdot 0.427$
10	$-6.57 \cdot 10^{-3}$	$i \cdot 7.59 \cdot 10^{-3}$	10	-0.191	$1.35 \cdot 10^{-9} + i \cdot 0.252$
11	$-3.38 \cdot 10^{-3}$	$i \cdot 3.84 \cdot 10^{-3}$	11	-0.115	$i \cdot 0.146$
12	$-1.73 \cdot 10^{-3}$	$i \cdot 1.95 \cdot 10^{-3}$	12	$-6.76 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 8.3 \cdot 10^{-2}$
13	$-8.87 \cdot 10^{-4}$	$i \cdot 9.85 \cdot 10^{-4}$	13	$-3.92 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 4.68 \cdot 10^{-2}$
14	$-4.52 \cdot 10^{-4}$	$i \cdot 4.98 \cdot 10^{-4}$	14	$-2.24 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 2.61 \cdot 10^{-2}$
15	$-2.3 \cdot 10^{-4}$	$i \cdot 2.52 \cdot 10^{-4}$	15	$-1.26 \cdot 10^{-2}$	$i \cdot 1.45 \cdot 10^{-2}$

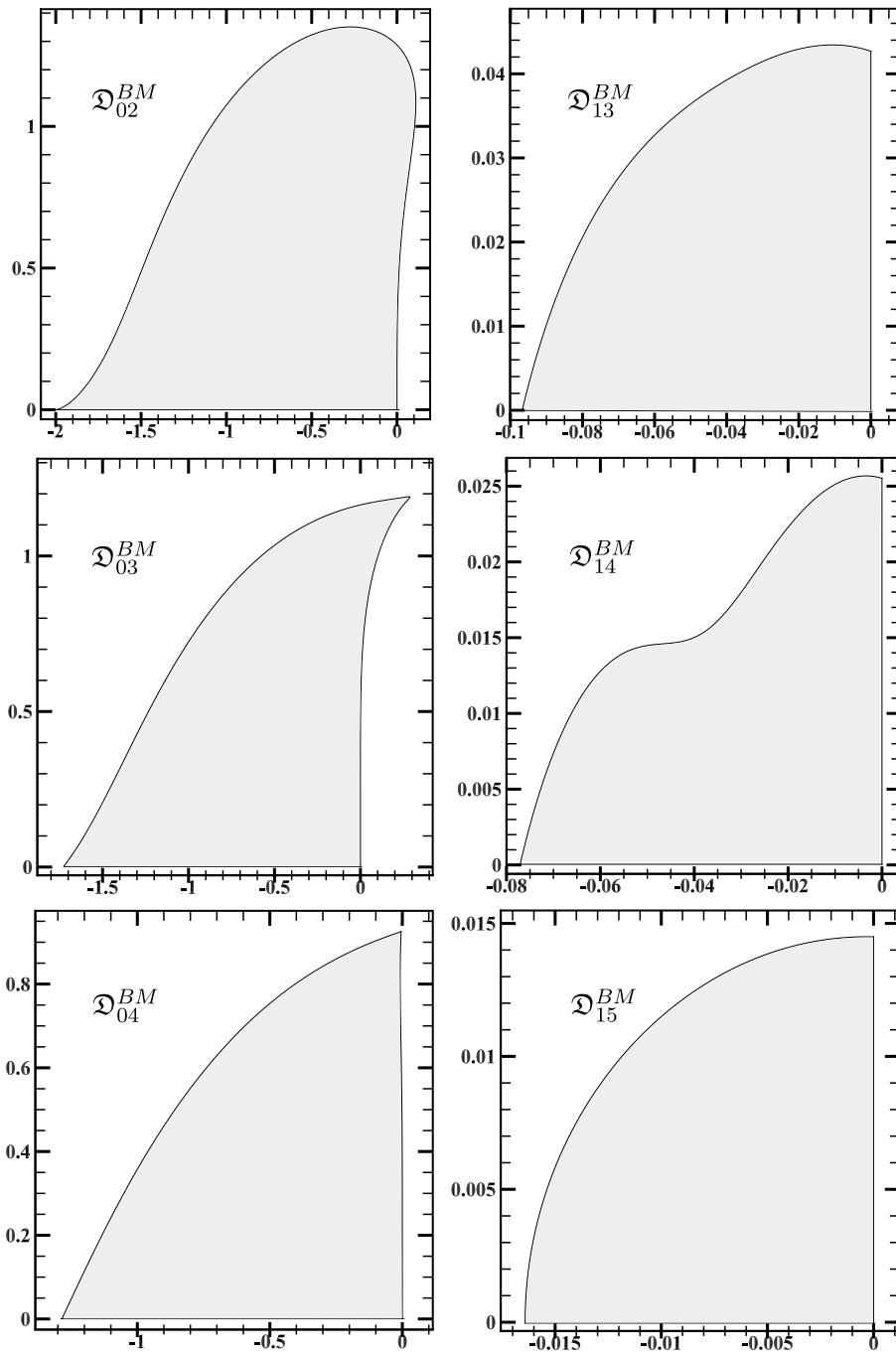


Рис. 2. Характерные типы областей \mathcal{D}_k^{BM}

На практике наиболее часто применяются схемы предиктор-корректор [2] в частном случае $k = m$. Некоторые характерные области абсолютной устойчивости таких численных методов изображены на рис. 2. Отметим, что отсутствующие на последнем рисунке изображения множеств \mathcal{D}_{05}^{BM} и \mathcal{D}_{06}^{BM} визуально схожи с \mathcal{D}_{04}^{BM} , тогда как границы \mathcal{D}_{07}^{BM} и \mathcal{D}_{03}^{BM} внешне мало отличаются друг от друга. Очертание каждой из областей \mathcal{D}_{10}^{BM} , \mathcal{D}_{11}^{BM} и \mathcal{D}_{12}^{BM} качественно близко к \mathcal{D}_{13}^{BM} , а \mathcal{D}_{15}^{BM} имеет много общего как с \mathcal{D}_{08}^{BM} так и с \mathcal{D}_{09}^{BM} . Числовые характеристики всех упомянутых областей приведены в табл. 2.

Таблица 2

Узловые точки областей \mathfrak{D}_k^{BM} , $k = 2, \dots, 15$

k	P_k^{BM}	Q_k^{BM}	k	P_k^{BM}	Q_k^{BM}
02	-2.0	$-0.11 + i \cdot 1.08$	09	-0.284	$i \cdot 0.203$
03	-1.73	$0.288 + i \cdot 1.19$	10	-0.213	$i \cdot 0.144$
04	-1.28	$-4.61 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.925$	11	-0.162	$i \cdot 0.0999$
05	-0.947	$-7.98 \cdot 10^{-3} + i \cdot 0.704$	12	-0.124	$i \cdot 0.067$
06	-0.698	$1.69 \cdot 10^{-4} + i \cdot 0.527$	13	-0.0967	$i \cdot 0.0427$
07	-0.512	$1.2 \cdot 10^{-2} + i \cdot 0.389$	14	-0.0771	$i \cdot 0.0255$
08	-0.382	$i \cdot 0.282$	15	-0.0164	$i \cdot 0.0145$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Со времени своего возникновения метод «boundary locus» для построения областей абсолютной устойчивости [5] практически не претерпел серьёзных изменений. По крайней мере авторам настоящей работы не известны публикации, содержащие информацию такого сорта. В статье предложена модификация этого ставшего классическим метода, позволяющая визуализировать области Далквиста для сложных высокоточных многошаговых алгоритмов численного решения задачи Коши как явных так и неявных, а также для основанных на них вычислительных схемах предиктор-корректор.

Из анализа полученных в результате вычислений данных следует, что при одинаковых порядках точности $k > 2$ линейные характеристики области Далквиста \mathfrak{D}_k^B на порядок меньше размеров \mathfrak{D}_k^M . Но рассмотренный выше частный случай явной схемы Адамса — Башфорта — Мултона (предиктор-корректор) при том же k имеет область устойчивости \mathfrak{D}_k^{BM} , сопоставимую по размерам с \mathfrak{D}_k^M . Это объясняет широкое применение в инженерии схем предиктор-корректор, числовые характеристики областей устойчивости которых для $k = 2, \dots, 15$ приведены в табл. 2, а некоторых из них изображены на рис. 2.

Информация об областях абсолютной устойчивости требуется для выбора шага интегрирования при численном решении задачи Коши. Но важна и «инженерная» точка зрения [5] на область \mathfrak{D}_k : это связное множество точек комплексной плоскости $\zeta = \tau\lambda$, для которых убывающее по модулю решение уравнения Далквиста аппроксимируется невозрастающим решением разностного уравнения (6). Но с «инженерной» точки зрения необходимо, чтобы схема (6) обладала свойством аналогичным абсолютной устойчивости и для возрастающих по модулю решений модельного уравнения (5). Иными словами у вычислительной схемы желательно существование связного множества точек $\zeta = \tau\lambda$ в правой комплексной полуплоскости, для которых аналитическое решение изначальной задачи Коши, возрастающее по абсолютной величине, аппроксимировалось бы неубывающим по модулю решением разностного уравнения (6). Однако ни в одном из рассмотренных авторами случаев обнаружить подобные множества не удалось.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2025-1606). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдюшев В.А.* Численное моделирование орбит небесных тел. Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2015.
2. *Заусаев А.Ф., Романюк М.А.* Численные методы в задачах математического моделирования движения небесных тел в Солнечной системе. Самара: СамГТУ, 2017.
3. *Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.
4. *LeVeque R.J.* Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Steady State and Time Dependent Problems. SIAM, 2007; DOI: 10.1137/1.9780898717839
5. *Lambert J.D.* Computational Methods in Ordinary Differential Equations (Introductory mathematics for scientists & engineers): John Wiley & Sons Ltd. 1973.
6. *Barwell V.K.* Special stability problems for functional differential equations // ВИТ (ВБИТ), Iss. 2Jun 1975. V. 15. P. 130–135.
7. *Толпегин О.А.* Экспериментальная баллистика. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2015.
8. *Dahlquist G.* A special stability problem for linear multistep methods // ВИТ Numerical Mathematics, 1963. V. 3. P. 27–43.
9. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: ЛИБРОКОМ, 2012.
10. *Butcher J.* Numerical Methods for Ordinary Differential Equations: John Wiley & Sons Ltd. 2016.
11. *Киреев И. В., Новиков А. Е., Новиков Е. А.* Построение областей абсолютной устойчивости методом Бернулли // Сиб. журн. вычисл. математики. 2022. № 4. С. 417–428.

UDC 519.6

**VISUALIZATION OF ABSOLUTE STABILITY REGIONS OF THE
ADAMS NUMERICAL SCHEMES BY THE BOUNDARY LOCUS
METHOD**© 2025 D. M. Shishkin^{1a}, I. V. Kireev^{2,3b}, V. E. Zalizniak^{1c}

¹*HSE Institute of Financial Studies,
Pokrovsky Boulevard, 11, Moscow 109028, Russia,*
²*Institute of computational modelling SB RAS,
Akademgorodok, 50/44, Krasnoyarsk 660036, Russia,*
³*School of Mathematics and Computer Science,
Siberian Federal University,
Svobodny prosp., 79, Krasnoyarsk 660041, Russia*

E-mails: ^adenis_shishkin_2015@mail.ru, ^bkiv@icm.krasn.ru,
^cvzalizniak@sfu-kras.ru

Received 10.04.2025, revised 22.01.2026, accepted 22.01.2026

Abstract. An algorithm for visualization of absolute stability regions of multi-step Adams methods of orders 2–15 is proposed in the paper. It is based on the boundary locus method. The obtained results can be used for choosing the discretization step in the numerical solution of the Cauchy problem by the Adams method.

Keywords: Adams — Bashforth method, Adams-Multon method, predictor-corrector; stability region; boundary locus.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.414

REFERENCES

1. Avdyushev V.A. Chislennoe modelirovanie orbit nebesnykh tel [Numerical Modeling of Orbits of Celestial Bodies], Tomsk: TSU Press, 2015 (in Russian).
2. Zausaev A.F., Romanyuk M.A. Chislennyye metody v zadachah matematicheskogo modelirovaniya dvizheniya nebesny'x tel v Solnechnoj sisteme [Numerical methods for mathematical modeling of the motion of celestial bodies in the Solar system]. Samara: SamGTU Press, 2017 (in Russian).
3. Hairer E., Wanner G., Norsett S.P. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. Springer Ser. Comput. Math., Vol. 8, Berlin: Springer, 2008.
4. LeVeque R.J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations, Steady State and Time Dependent Problems. SIAM, 2007.
5. Lambert J.D. Computational Methods in Ordinary Differential Equations (Introductory mathematics for scientists & engineers): John Wiley & Sons Ltd. 1973.
6. Barwell V.K. Special stability problems for functional differential equations. *BIT (BBIT)*, 1975, Vol. 15, Iss. 2Jun 1975, pp. 130–135.
7. Tolpegin O.A. E'ksperimental'naya ballistika [Experimental Ballistics]. St. Petersburg: Baltic State Techn. University Press, 2015 (in Russian).
8. Dahlquist G. A special stability problem for linear multistep methods. *BIT Numer. Math.*, 1963, Vol. 3, pp. 27–43.

9. Gelfond A.O. *Ischislenie konechnykh raznostei* [Calculus of Finite Differences], Moscow: LIBROCOM, 2012 (in Russian).
10. Butcher J. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*: John Wiley & Sons Ltd. 2016.
11. Kireev I.V., Novikov A.E. and Novikov E.A. Stability domains of explicit multistep methods. *Numer. Anal. Appl.*, 2022, Vol. 15, No. 4, pp. 343–352.

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2025. Том 28, № 4

Зав. редакцией Т. В. Бугуева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 10.04.2026 г.
Формат $60 \times 84^{1/8}$. Усл. печ. л. 25,5.
Объем 16 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия