

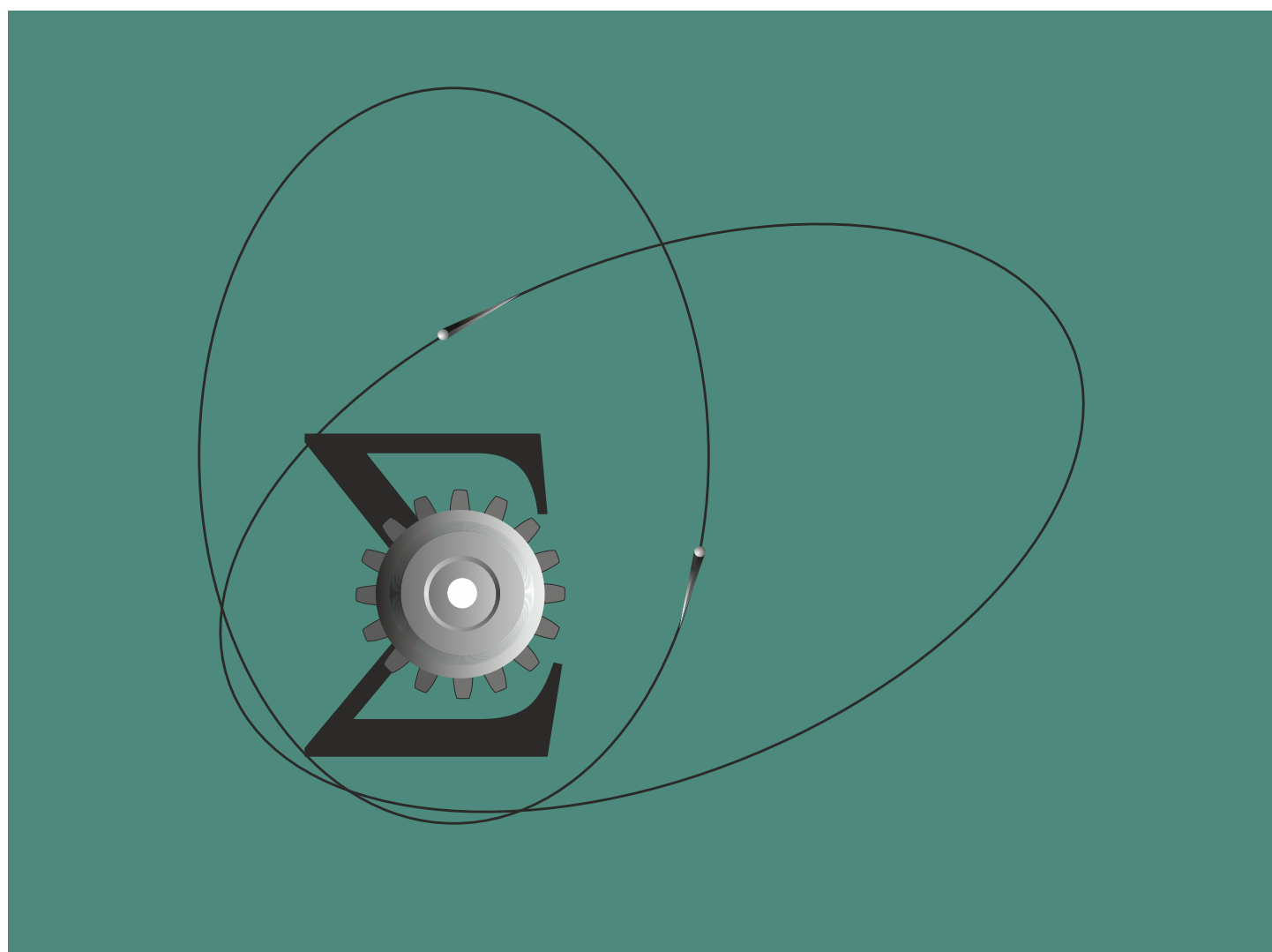
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 29

№ 1

2026



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	С. И. Кабанихин
Зам. главного редактора	В. Л. Береснев М. А. Шишленин
Отв. секретарь	В. А. Дедок

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Б. Д. Аннин	В. Г. Романов
М. А. Гузев	Е. Е. Тыртышников
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
	А. А. Шананин

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	А. С. Козелков	И. Б. Петров
Ф. А. Алиев	Т. К. Козубская	М. И. Протасов
Ж. Бектемесов	О. И. Криворотько	Е. М. Рудой
В. С. Белоносов	С. Н. Лебедев	К. К. Сабельфельд
В. Н. Белых	Д. В. Лукьяненко	Е. Б. Савенков
Ю. С. Волков	Н. И. Макаренко	В. М. Садовский
Г. А. Галкин	И. В. Марчук	И. В. Семенов
В. Н. Глинских	С. Б. Медведев	Д. Н. Сидоров
Е. Жанг	В. С. Михайлов	С. С. Симаков
В. П. Ильин	Р. И. Мулляджанов	А. С. Терсенов
А. Н. Карапетянц	Р. Г. Новиков	В. А. Титарев
М. В. Клибанов	Д. Е. Пальчунов	Д. Л. Ткачев
А. И. Кожанов	А. В. Пененко	

Учредители журнала:

Сибирское отделение РАН
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году

Выходит 4 раза в год

Том 29, № 1(105)

Научный журнал

Январь–март, 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Аммосов А. В. Численное исследование математической модели течения природного газа в коллекторе в разных постановках	5
Белонос В. С., Швец А. Г. Преобразование аналитических функций линейных операторов в банаховых пространствах при распространении этих операторов в более широкие пространства.....	19
Ильин В. П., Бабенко В. Н. О влиянии возмущений в проекционном методе крыловского типа на точность итерационного приближения и формирование критерия останова.....	25
Нестерова А. В., Денисова Н. В. Сравнение двух статистических алгоритмов реконструкции изображений при количественной оценке патологических очагов методом гамма-эмиссионной томографии	39
Нецадим М. В., Часовских Н. С. Преобразования Бэклунда уравнения Паули для движения электрона в электромагнитном поле.....	56
Романов В. Г., Бугуева Т. В. Обратная задача для волнового уравнения с потенциалом, зависящим от пространственной переменной и времени.....	79
Савенко Р. А., Карпов Д. И., Ридель А. В., Коробейников С. М. Особенности численного моделирования электрического разряда в гелиевом пузырьке в жидком диэлектрике.....	94
Умаров Х. Г. Разрушение решения уравнения колебаний стержня с учётом движущейся нагрузки	111

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- математическое моделирование;
- анализ данных;
- искусственный интеллект;
- развитие и анализ вычислительных алгоритмов;
- теория управления;
- математическая экономика;
- дифференциальные уравнения;
- прикладной гармонический анализ

в механике, физике, технике и технологии, химии, биологии, экологии, медицине и т. д.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СибЖИМ
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998

4 issues per year

Vol. 29, No. 1(105)

Scientific journal

January–March, 2025

CONTENTS

Ammosov A. V. Numerical simulation of the mathematical model of natural gas flow in a reservoir in different various.....	5
Belonosov V. S., Shvets A. G. Transformation of analytic functions of linear operators in Banach spaces when these operators are extended to larger spaces	19
Ilyin V. P., Babenko V. N. On the influence of round-off errors on the accuracy of calculating the correction in the Krylov subspace.....	25
Nesterova A. V., Denisova N. V. Comparison of two statistical image reconstruction algorithms for quantitative assessment of pathological lesions in gamma emission tomography.....	39
Neshchadim M. V., Chasovskikh N. S. Backlund transformations of the Pauli equation for the motion of an electron in an electromagnetic field.....	56
Romanov V. G., Bugueva T. V. The inverse problem for a wave equation with a potential depending on spatial variable and time.....	79
Savenko R. A., Karpov D. I., Ridel A. V., Korobeynikov S. M. On the features of numerical simulation of electric discharge in a helium bubble in dielectric liquid	94
Umarov Kh. G. Blow up of the solution to the vibration equation of a rod with a moving load	111

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- mathematical modeling;
- data analysis;
- artificial intelligence;
- development and analysis of computational algorithms;
- control theory;
- mathematical economics;
- differential equations;
- applied harmonic analysis

in mechanics, physics, engineering, chemistry, biology, ecology, medicine, etc.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:

SibJIM

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

prosp. Akad. Koptiyuga 4

Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

УДК 519.633.6

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ПРИРОДНОГО ГАЗА В КОЛЛЕКТОРЕ В РАЗНЫХ ПОСТАНОВКАХ

© 2026 А. В. Аммосов^{1а}

¹ Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Беллинского, 58, г. Якутск, 677000, Россия

E-mail: Albertdobun@gmail.com

Поступила в редакцию 03.06.2025 г.; после доработки 19.03.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Рассматривается одномерная математическая модель неизотермической плоскорадиальной фильтрации природного газа в коллекторе постоянной мощности H . Проведено численное исследование математических моделей, учитывающих конвективный и кондуктивный теплообмены, адиабатическое расширение и эффект Джоуля – Томсона в разных постановках. Проведён анализ результатов численного решения системы уравнений теплопереноса. Даны оценки и проведено сравнение численных результатов для слагаемых уравнения теплопроводности по отдельности и в сочетании. Дискретизация выполнена с помощью неявной разностной схемы.

Ключевые слова: уравнение фильтрации газа, уравнение энергии, конвективный теплообмен, кондуктивный теплообмен, адиабатическое расширение газа, эффект дросселирования, коэффициент сверхсжимаемости природного газа, неявно-разностная схема, метод расщепления по физическим процессам.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.101

ВВЕДЕНИЕ

Газовые и газоконденсатные месторождения России являются ключевой составляющей топливно-энергетического комплекса страны, обеспечивая добычу природного газа и газового конденсата для внутреннего потребления и экспорта. Экстремальные климатические условия северной части России, а также непростые геологические условия месторождений, расположенных в регионах Западной Сибири и в трудноизвлекаемых запасах Арктического шельфа и Восточной Сибири, требуют применения современных технологий разработки и эксплуатации. Эффективное проектирование и управление такими скважинами требует глубокого понимания гидродинамических закономерностей, термодинамических свойств газоконденсатных систем и влияния геолого-технических факторов на добычу.

Дифференциальные уравнения фильтрации газа в пористой среде, используемые для решения прикладных задач подземной гидрогазодинамики, базируются на фундаментальных результатах, полученных в работах [1, 2, 3]. Технологические режимы эксплуатации газовых и газоконденсатных месторождений описаны в работах [4, 5]. Вычислительные исследования методов конечных объёмов, конечных элементов и конечных разностей были представлены в работах [6, 7]. Численная реализация построенной математической модели проводится с использованием метода конечных разностей, изложенного в работе [8].

Уравнение фильтрации газа выводится из уравнения неразрывности газа, закона Дарси и закона сохранения энергии для учёта тепловых процессов внутри месторождения. Система

уравнений неизоэтермической фильтрации газа приводится в работах [9, 10], где учтены фильтрация реального газа, коэффициент сверхсжимаемости z , вычисляемый по формуле Латонова — Гуревича [11], массовый расход газа на забое скважины. Большой интерес представляет уравнение энергии, учитывающее закон сохранения энергии при добыче газа через одиночную скважину, расположенную в центре залежи месторождения, который представляет собой совокупность таких процессов как конвекция, кондукция, адиабатическое расширение и эффект дросселирования.

Уравнение энергии описывает несколько физических процессов первого и второго порядка. Поэтому для построения более эффективных разностных методов используют метод расщепления по физическим процессам, рассмотренных в работах [12, 13]. Согласно методу расщепления по физическим процессам, исходная задача сводится к чередующейся временной последовательности задач, описывающих более простые процессы. Следует заметить, что конвективный теплоперенос (уравнение первого порядка) превышает кондуктивный теплоперенос (уравнение второго порядка). Так в работах [14, 15] делается упор на явном учёте конвективного теплопереноса. В трудах [16, 17, 18] также говорится про значительное преобладание конвективного теплопереноса над кондуктивным теплопереносом.

В работе [9] рассмотрен стационарный приток газа к скважине, в которой на внутренней границе пласта возможны граничные условия с постоянным массовым расходом у забоя и постоянное давление на внешней границе. В работе [19] показано, что процесс изменения давления и температуры происходит на забое скважины. В работе [20] рассматривается один из методов учёта скважин при численном исследовании процессов фильтрации несжимаемой жидкости. Важным фактором северной части России являются климатические и природные условия. Так, в работах [21, 22, 23] из задачи неизоэтермической фильтрации реального газа по полю давления и температуры проведена оценка возможного развития гидратообразования в призабойной зоне скважины. В монографии [24] на основе гидродинамических исследований скважин рассмотрены режимы притока природного газа к забою, в том числе одномерные плоскорадиальные потоки при установившемся движении.

В рамках рассматриваемой системы уравнений фильтрации особое внимание уделено уравнению энергии. В работе исследованы четыре различные постановки этого уравнения, выполнено их численное сравнение, а также проведён отдельный анализ влияния кондуктивного теплообмена и эффекта адиабатического расширения на общую часть уравнения по отдельности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерную задачу неизоэтермической плоскорадиальной фильтрации природного газа в коллекторе постоянной мощности H . Область фильтрации представляет собой интервал $\Omega = (r_c, R_k)$ по радиусу r . Уравнение энергии содержит такие слагаемые, как кондуктивный-конвективный теплообмен, адиабатическое расширение и эффект дросселирования [9, 10]:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + m \left(1 + \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (1)$$

Уравнение неразрывности потока газа с учётом закона Дарси имеет вид [10]:

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (2)$$

где k — коэффициент проницаемости пористой среды, μ_g — динамическая вязкость газа, m — пористость, r — радиус, p — давление и T — температура природного газа, z — коэффициент сверхсжимаемости газа, вычисляемый по формуле Латонова — Гуревича [11]:

$$z(p, T) = \left[0.17376 \ln \left(\frac{T}{T_c} \right) + 0.73 \right]^{p/p_c} + 0.1 \frac{p}{p_c}, \quad (3)$$

где $p_c = 45.8 \cdot 10^5$ Па — критическое значение давления метана, $T_c = 190.5$ К — критическое значение температуры метана.

Начальные и граничные условия:

$$p(r, 0) = p_0, \quad r \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \quad (4)$$

$$T(r, 0) = T_0, \quad r \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad r = R_k, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = R_k, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (7)$$

На забое скважины задаётся условие массового притока газа:

$$2\pi r_c \frac{k}{\mu_g} H \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} = M, \quad r = r_c, \quad t \in (0, \bar{t}] \quad (8)$$

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В РАЗНЫХ ПОСТАНОВКАХ

Наличие конвективного и кондуктивного теплообменов, эффекта дросселирования и адиабатического расширения природного газа вызывает интерес к изучению влияния каждого из этих процессов на систему уравнений. В работе [18] показано, что при высоких скоростях потока флюида, конвективная составляющая уравнения становится доминирующей. Эффект дросселирования приводит к увеличению скорости движения флюида в коллекторе, что, в свою очередь, влияет на соотношение конвективных и кондуктивных процессов. Преобладание конвективного члена в системе уравнений над кондуктивным приводит к снижению влияния диффузии на общую картину процессов. В связи с этим, представляет интерес разработка и сравнение численных методов в различных постановках.

Численное исследование будет проводиться для непрерывного процесса добычи газа, без остановочных интервалов. Наша задача состоит в сравнении численных результатов для различных комбинаторных постановок задачи.

Расчёты проведены в 4 вариантах системы уравнений.

Модель 1. Полная постановка, уравнение (1).

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (9)$$

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + m \left(1 + \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (10)$$

Модель 2. Без кондуктивного теплообмена.

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (11)$$

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = m \left(1 + \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (12)$$

Модель 3. Без адиабатического расширения.

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (13)$$

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (14)$$

Модель 4. Без кондуктивного теплообмена и адиабатического расширения.

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{Tz} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k}{\mu_g} \frac{p}{Tz} r \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}], \quad (15)$$

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = C_p \frac{k}{\mu_g} \frac{p}{RTz} \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2, \quad r \in \Omega, \quad t \in (0, \bar{t}]. \quad (16)$$

Во всех четырёх моделях уравнение энергии включает конвективный теплообмен и эффект дросселирования, которые являются его значительными составляющими. Наибольший интерес представляет влияние кондуктивного теплообмена и адиабатического расширения на общую часть уравнения.

3. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ

В область Ω вводится квазиравномерная пространственно — временная сетка $\omega_{h\tau}$:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \{h_i = q_1 h_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n\}, \quad h_0 = (R_k - r_c)(q_1 - 1)/(q_1^n - 1), \\ \bar{\omega}_\tau &= \{\tau^j = q_2 \tau^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, m\}, \quad \tau_0 = t(q_2 - 1)/(q_2^m - 1). \end{aligned}$$

Численное решение модели 1 для нелинейной системы дифференциальных уравнений с граничными и начальными условиями (1)–(8) методом конечных разностей было проведено в работе [19]. Для моделей 2–4 численное исследование проводим методом конечных разностей. Для линеаризации разностной схемы все нелинейные коэффициенты разностных уравнений берём с нижнего временного слоя.

Дискретный аналог разностной схемы уравнения неразрывности природного газа (2) одинаков для всех моделей и имеет вид

$$\frac{mr_i \bar{h}_i}{\tau \bar{T}_i \bar{z}_i} (p_i - \check{p}_i) = \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\bar{T} \bar{z}} \right)_{i+0.5} \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} - \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\bar{T} \bar{z}} \right)_{i-0.5} \frac{p_i - p_{i-1}}{h_i}, \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

где

$$\bar{h}_i = \begin{cases} h_0/2, & i = 0, \\ (h_{i-1} + h_i)/2, & i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ h_n/2, & i = n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{i-0.5} &= \frac{\left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{i-1} + \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{i+0.5} &= \frac{\left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_i + \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Проведём дискретизацию граничного условия (6) на забое скважины

$$\frac{mr_c \check{h}_0}{\tau \check{T}_0 \check{z}_0} (p_0 - \check{p}_0) = \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{0.5} \frac{p_1 - p_0}{h_1} - \frac{MR}{2\pi H}. \quad (18)$$

Дополним дискретизацию граничного условия (7), а также начальное условие (4) к системе уравнений (9)–(10)

$$\frac{mr_n \check{h}_n}{\tau \check{T}_n \check{z}_n} (p_n - \check{p}_n) = - \left(r \frac{k}{\mu} \frac{\check{p}}{\check{T}\check{z}}\right)_{n-0.5} \frac{p_n - p_{n-1}}{h_n}, \quad (19)$$

$$p(r, 0) = p_0(r), \quad r \in \omega_h. \quad (20)$$

1) Для вычисления дискретного аналога уравнения модели 1 применяется метод расщепления по физическим процессам [9, 10] на вспомогательном слое и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C\rho_i \frac{\bar{T}_i - \check{T}_i}{\tau} &= m \left(1 + \left(\frac{\bar{T}}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \right) \frac{p_i - \check{p}_i}{\tau} + C_p \left(\frac{kp}{\mu R \bar{T} z} \right)_i \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \frac{\bar{T}_{i+1} - \bar{T}_i}{h_{i+1}} \\ &\quad - \left(\frac{k \bar{T}}{\mu z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \right)^2, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0. \quad (21) \end{aligned}$$

$$C\rho_i r_i \check{h}_i \frac{T_i - \bar{T}_i}{\tau} = (r\lambda)_{i+1/2} \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - (r\lambda)_{i-1/2} \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (22)$$

Поскольку параметры уравнения (17) выводятся из граничного условия при $r_n = R_k$, уравнение (18) дополним дискретным аналогом начального условия (5):

$$\bar{T}_n = T_0. \quad (23)$$

Дискретные аналоги граничных условий, условия сопряжения и начального условия имеют следующий вид:

$$T_0 = \bar{T}_0, \quad (24)$$

$$T_n = \bar{T}_n, \quad (25)$$

$$T(r, t) = \bar{T}(r, t), \quad (26)$$

$$T(r, 0) = T_0(r). \quad (27)$$

2) Дискретный аналог модели 2 проводим неявно-разностной схемой с учётом отсутствия кондуктивного теплообмена, тем самым исключая из уравнения дифференциал второго порядка:

$$\begin{aligned} C\rho_i \frac{T_i - \check{T}_i}{\tau} &= m \left(1 + \left(\frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \right) \frac{p_i - \check{p}_i}{\tau} + C_p \left(\frac{kp}{\mu R T z} \right)_i \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} \\ &\quad - \left(\frac{k T}{\mu z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \right)^2, \quad i = n-1, n-2, \dots, 0. \quad (28) \end{aligned}$$

3) В модели 3 так же применяется метод расщепления по физическим процессам [9, 10] на вспомогательном слое, с использованием разностной схемы без учёта адиабатического расширения и имеют вид следующей системы уравнений:

$$C\rho_i \frac{\bar{T}_i - \check{T}_i}{\tau} = C_p \left(\frac{kp}{\mu R \check{T} \check{z}} \right)_i \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \frac{\bar{T}_{i+1} - \bar{T}_i}{h_{i+1}} - \left(\frac{k}{\mu} \frac{\check{T}}{\check{z}} \frac{\partial \check{z}}{\partial \bar{T}} \right)_i \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \right)^2, \quad (29)$$

$$i = n - 1, n - 2, \dots, 0.$$

$$C\rho_i r_i \check{h}_i \frac{T_i - \bar{T}_i}{\tau} = (r\lambda)_{i+1/2} \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - (r\lambda)_{i-1/2} \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (30)$$

Поскольку параметры уравнения (17) исходят из границы $r_n = R_k$, дополним дискретизацию начального условия (5) в уравнение (18):

$$\bar{T}_n = T_0. \quad (31)$$

Дискретный аналог граничного условия, условия сопряжения и начальные условия задаются уравнениями (24)–(27).

4) Для модели 4 дискретизацию проводим неявно-разностной схемой с учётом отсутствия кондуктивного теплообмена и адиабатического расширения:

$$C\rho_i \frac{T_i - \check{T}_i}{\tau} = C_p \left(\frac{kp}{\mu R T z} \right)_i \frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - \left(\frac{k}{\mu} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \right)_i \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{h_{i+1}} \right)^2, \quad (32)$$

$$i = n - 1, n - 2, \dots, 0.$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе представлены численные результаты в четырёх разных постановках задач для задачи неизотермической фильтрации природного газа. Входные данные задаются в международной системе СИ:

$$\begin{aligned} M &= 4 \text{ кг/с}, \quad p_0 = 2.7 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad T_0 = 332 \text{ К}, \\ r_c &= 0.08 \text{ м}, \quad R_k = 4000 \text{ м}, \quad H = 10 \text{ м}, \\ C_p &= 2000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad C\rho = 2.7 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{К)}, \quad \lambda_n = 1.163 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \\ k &= 10^{-14} \text{ м}^2, \quad \mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad m = 0.2, \quad R = 520 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \\ q_1 &= 1.005, \quad q_2 = 1.064, \quad t = 5 \text{ лет}. \end{aligned}$$

здесь q_1, q_2 — знаменатели геометрической прогрессии для квазиравномерных сеток по пространству и времени, t — промежуток времени, взятый для всех моделей одинаковым.

Сравнения результатов расчёта по моделям 1 и 2

На рис. 1 представлены численные результаты распределения температуры, полученные для моделей 1 и 2. Как и ожидалось на призабойной зоне скважины происходит интенсивное охлаждение, за счёт эффекта дросселирования. Так же показана разность температур между моделями 1 и 2, в котором исследовано влияние кондуктивного теплообмена и представлена разность температур, максимальное значение которого равно 0.0347 К, что в процентном соотношении составило 0.0105%.

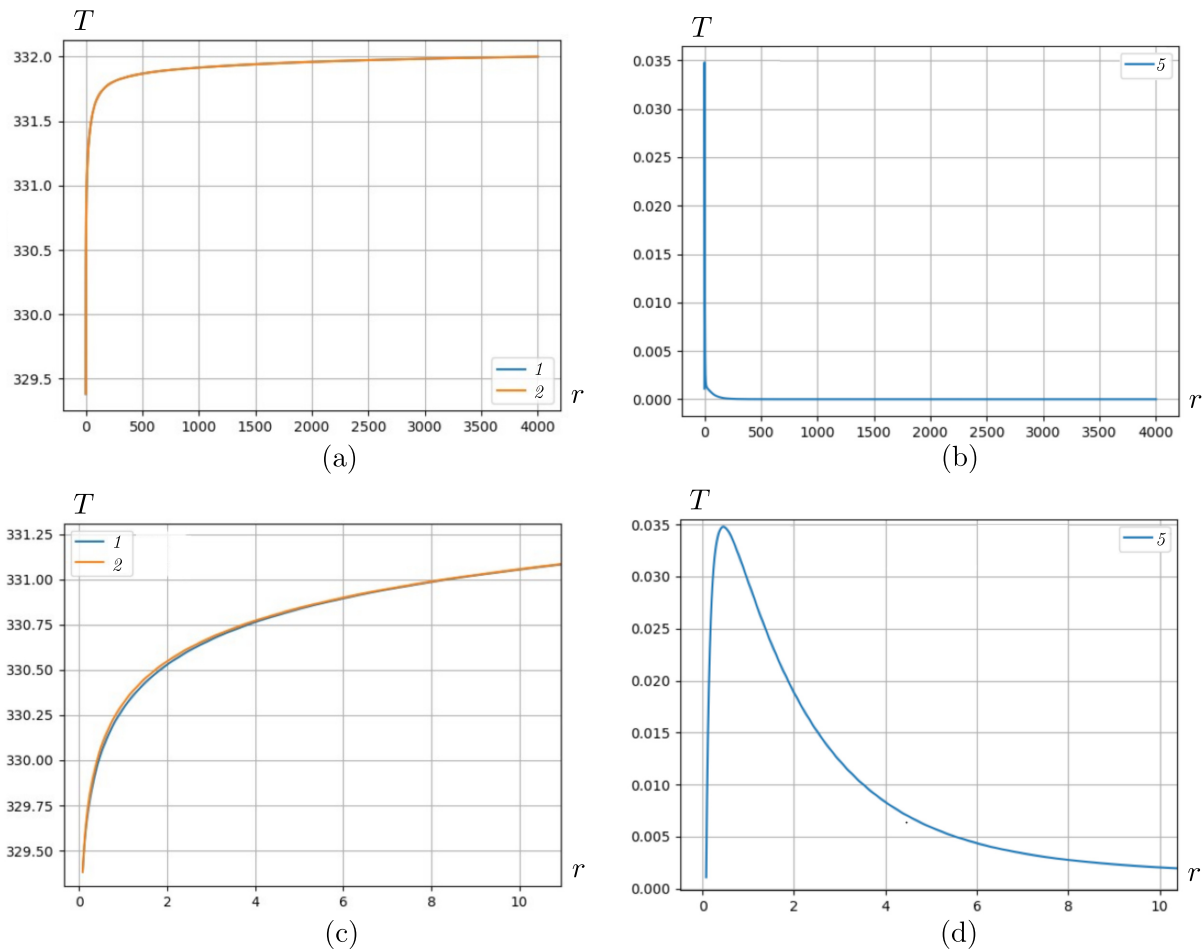


Рис. 1. Кривые 1 и 2 – распределения температур моделей 1 и 2 (а), (с); кривая 5 – разность температур между моделями 1 и 2 (б), (д) в масштабе пласта и до 10 м по радиальной координате через 5 лет после запуска скважины

Следует отметить, что (д) демонстрирует проявление эффекта дросселирования в характерной форме. В левой части расчётной области, согласно (а) и (с), зафиксировано вертикальное преобладание распределения давления, обусловленное наличием в уравнении эффекта дросселирования, которая является уравнением с производной давления второго порядка и имеет вид

$$-\frac{k}{\mu_g} \frac{T}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^2,$$

Также при отдалении от призабойной зоны скважины наблюдается плавный переход к горизонтальному преобладанию.

Сравнения результатов расчёта по моделям 1 и 3

Результаты численных исследований распределения температур для моделей 1 и 3 представлены на рис. 2.

Согласно полученных результатов, при отсутствии адиабатического расширения (модель 3) в призабойной зоне скважины, наблюдается резкий спад температуры, разность температур которой составила 0.2142 К. Так же имеет иной характер распределения температуры на всей протяжённости пласта, что иллюстрирует график (б), показывая разность температур между моделями тянущуюся до границы пласта, что может иметь влияние на окружающие грунты.

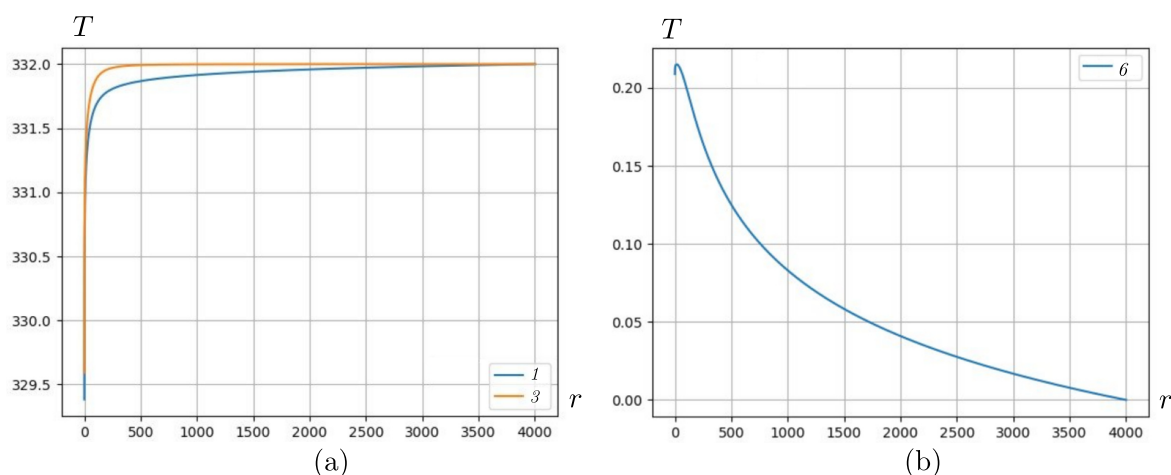


Рис. 2. Кривые 1 и 2 — распределения температур моделей 1 и 3 (а), кривая 6 — разность температур между моделями 1 и 3 (б) по радиальной координате на момент времени через 5 лет

Сравнения результатов расчёта по моделям 1 и 4

Численное сравнение моделей 1 и 4, также подтвердило влияние адиабатического расширения в полную постановка уравнения энергии в совокупности с кондуктивным теплообменом и представило немалую разность температур между моделями 1 и 4 (см. рис. 3).

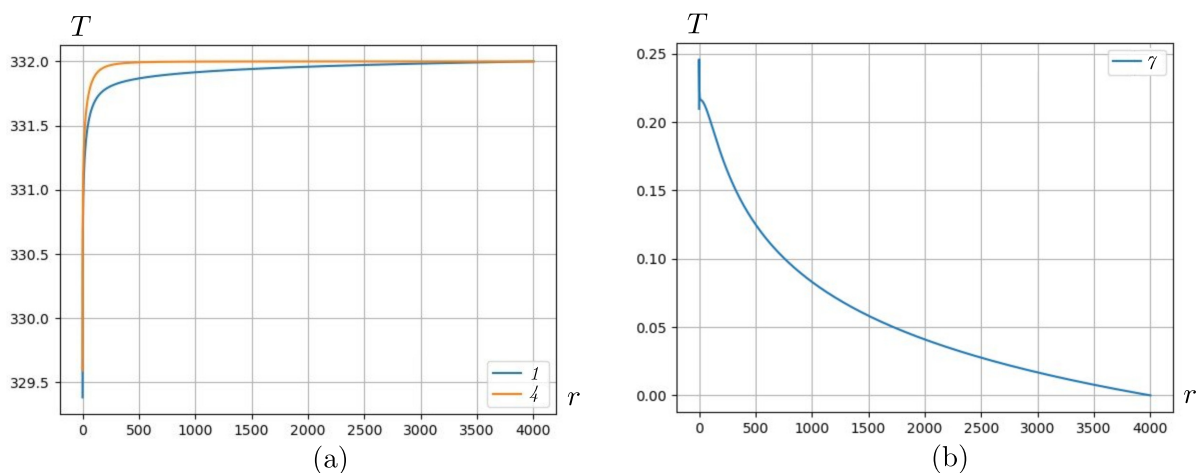


Рис. 3. Кривые 1 и 4 — распределения температур моделей 1 и 4 (а), кривая 7 — разность температур между моделями 1 и 4 (б) по радиальной координате на момент времени через 5 лет

Максимальное значение которого составило 0.247 К, что больше разности температур между моделями 1 и 3.

Сравнения результатов расчёта по моделям 2 и 4

На рис. 4 представлен ещё один вычислительный эксперимент, в котором проверялось отсутствие кондуктивного теплообмена в обоих моделях 2 и 4, а так же отсутствием в модели 4 адиабатического расширения.

Численные исследования показали схожий результат с рис. 2, разность температур между моделями 2 и 4 составило 0.2145 К. Таким образом представив, что адиабатическое расширение имеет значительное влияние на полную постановку уравнения энергии.

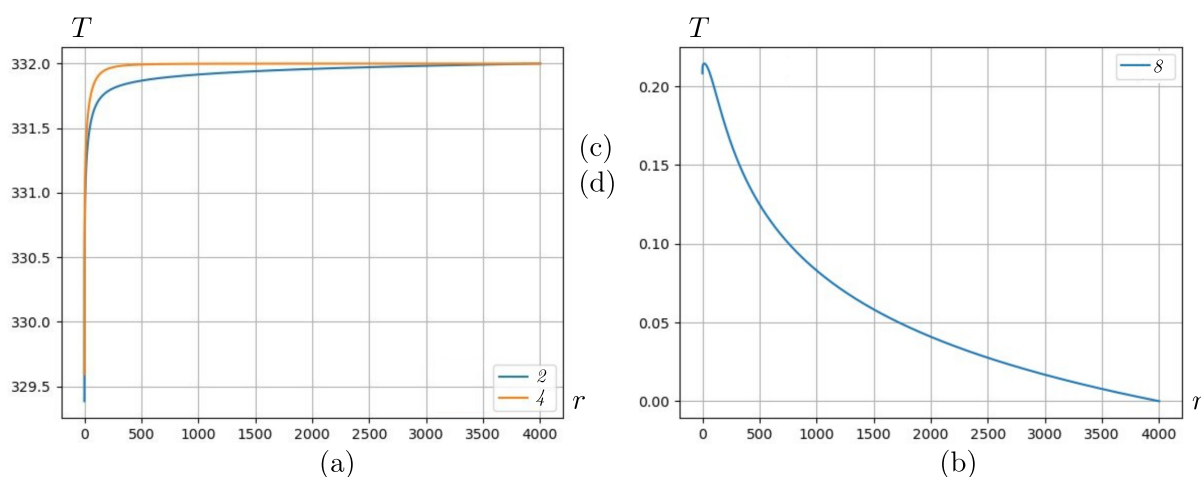


Рис. 4. Кривые 2 и 4 — распределения температур моделей 2 и 4 (а), кривая 8 — разность температур между моделями 2 и 4 (б) по радиальной координате на момент времени через 5 лет

4.1. Сравнение результатов давления всех моделей

Численные результаты, показанные на рис. 5, иллюстрируют поведение уравнения неразрывности в различных системах уравнений, при этом полученные данные свидетельствуют о том, что распределение давления практически не зависит от выбранной системы. Но стоит отметить, что наименьшую разность давлений демонстрирует модель 2.

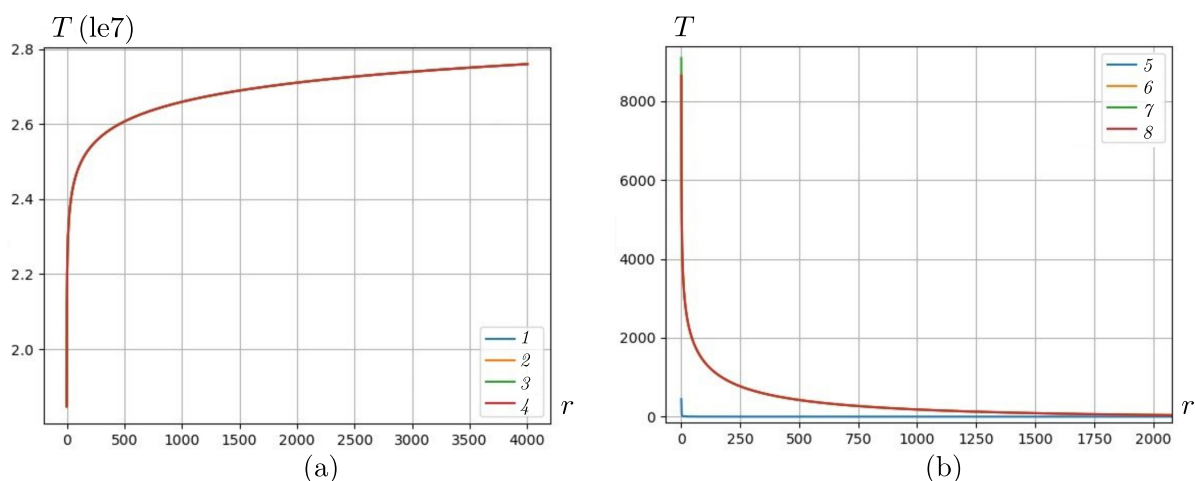


Рис. 5. Кривые 1–4 — распределения температур моделей 1–4 (а), кривые 5–8 — разности температур между моделями 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 2 и 4 соответственно по радиальной координате на момент времени через 5 лет

В результате полученных численных данных можно отметить, что пренебрежение адиабатическим расширением в моделях 3 и 4 влияет на уравнение энергии. Важно подчеркнуть, что при отсутствии адиабатического расширения наблюдается резкий спад температуры в прибойной зоне скважины. В то же время, модель 2, которая показывает наименьшую разницу температур и рассматривается без учёта кондуктивного теплообмена, демонстрирует неплохие численные результаты. Следует отметить, что эта модель упрощает вычислительный процесс, поскольку не требует использования метода расщепления по физическим процессам и поиска прогонных коэффициентов, что положительно сказывается на затратах вычислительного времени.

В таблице представлено время счёта для различных моделей при различных пространственно-временных сетках.

Таблица

Сравнение расчётного времени $t_{сч}$ моделей

модель	N	M	$t_{сч}$, сек	ΔP , %	ΔT , %	N	M	$t_{сч}$, сек	ΔP , %	ΔT , %
модель 1	50	200	0.544	-	-	200	200	0.8398	-	-
модель 2	50	200	0.124	0,00237	0.0104	200	200	0.3978	0.00239	0.0105
модель 3	50	200	0.1082	0.04685	0.0654	200	200	0.3642	0.04688	0.0647
модель 4	50	200	0.137	0.04929	0.0748	200	200	0.4377	0.04934	0.0742
модель 1	500	200	1.5153	-	-	1700	200	4.388	-	-
модель 2	500	200	1.0699	0.00239	0.0105	1700	200	3.445	0.00239	0.0105
модель 3	500	200	0.9093	0.04680	0.0646	1700	200	3.601	0,04674	0.0645
модель 4	500	200	1.0392	0.04926	0.074	1700	200	3.123	0,04912	0.0739

где N , M — количество узлов в пространственной и временной сетках соответственно, $t_{сч}$ — время счёта персонального компьютера, модель 1 считается эталонным решением, ΔP — разность давлений с моделью 1 в процентах, ΔT — разность температур с моделью 1 в процентах.

Из таблицы видно, что разность давлений и температур для модели 2 показали минимальные значения и составили $\Delta P = 0,00237\%$ и $\Delta T = 0,0104\%$ при $N = 50$. Также при увеличении количества узлов до $N = 200$ в пространственно временной сетки наблюдается небольшое изменение до $\Delta P = 0,00239\%$ и $\Delta T = 0,0105\%$ и далее при увеличении до $N = 500, 1700$ остаётся неизменной, что также можно наблюдать на рис. 6. Похожее изменение разности давлений и температур можно наблюдать для моделей 3 и 4, с небольшим изменением при $N = 200, 500, 1700$.

Вычислительные расчёты проводились на персональном компьютере с процессором intel core i7 11800H, ОЗУ 16 GB.

На рис. 6 представлены численные результаты распределения давления и температуры для значений $N = 50, 200, 500, 1700$ в масштабе до 10 метров.

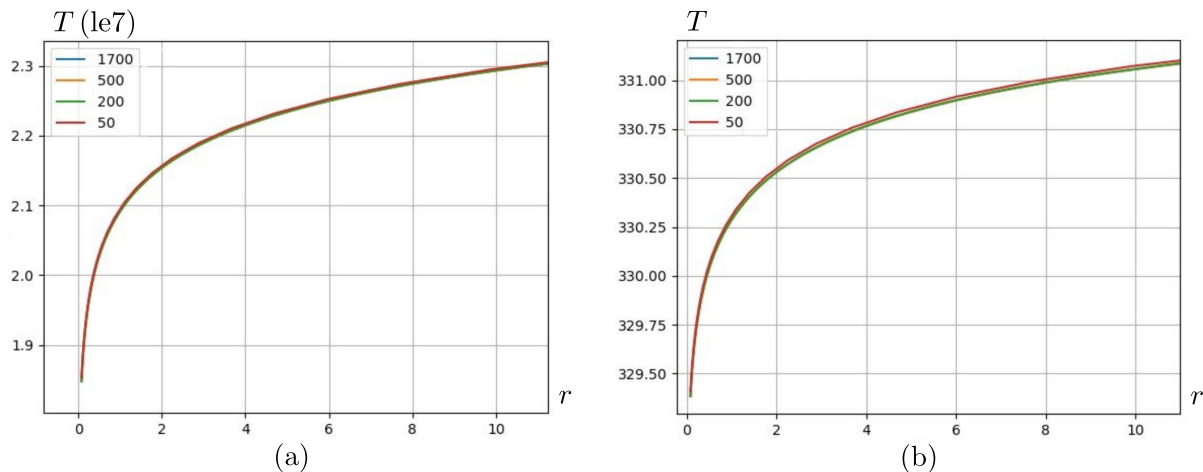


Рис. 6. Распределения давления (а) и температуры (б) по радиальной координате для модели 1 при разных размерах пространственной сетки $N = (1700, 500, 200, 50)$ на момент времени через 5 лет

Разница давлений ΔP_N при $N = 50$ и $N = 200, 500, 1700$ составила соответственно

0.1836%, 0.1824% и 0.1745%. В то время разница давлений при $N = 200$ и $N = 500, 1700$ была равна 0.009% и 0.007%. Разница температур ΔT_N при $N = 50$ и $N = 200, 500, 1700$ достигла значений 0.0077%, 0.0075% и 0.0069%. Аналогично, разницы температур при $N = 200$ и $N = 500, 1700$ составили соответственно 0.0007% и 0.0005%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена полная математическая модель неизотермической фильтрации природного газа к скважине расположенной в центре круговой залежи с радиусом r_c , а также упрощённые модели, касающиеся уравнения энергии. Расчёты проведены в четырёх вариациях: при полной постановке задачи (модель 1), без учёта кондуктивного теплопереноса газа (модель 2), без учёта адиабатического расширения газа (модель 3) и без учёта кондуктивного теплопереноса и адиабатического расширения газа (модель 4). Сравнение численных результатов, показало пренебрежимо малое влияние кондуктивной теплопередачи и адиабатического расширения на уравнения энергии. Численные результаты моделей 1 и 2 показали наименьшую максимальную разность температур в 0.0105%, а численные результаты моделей 3 и 4 показали разность температур с моделью 1 в 0,0645% и 0,0739% соответственно. Следует отметить, что адиабатическое расширение оказывает влияние на забое скважины, в то время как отсутствие только кондуктивного теплообмена имеет минимальное влияние. В процессе численного исследования выявили, что выбор количества узлов пространственной сетки имеет прямое влияние на время счёта. Таким образом, при моделировании одномерной неизотермической плоскорадиальной фильтрации природного газа в коллекторе постоянной мощности H в условиях непрерывной добычи, наиболее целесообразной с точки зрения минимизации погрешности является модель 2 с числом узлов по радиусу $N = 200$ и по времени $M = 200$. Следует отметить, что при изменении геометрических размеров пласта или расчётного времени количество узлов сетки может корректироваться.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор искренне благодарен Васильеву Василию Ивановичу за конструктивные замечания, полезные обсуждения и экспериментальные вычисления.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение от 11.03.2025 № 075-02-2025-1792). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л.С.* Подземная гидрогазодинамика. Собр. трудов. Т.2. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
2. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. М.: Госгортехиздат, 1963.
3. *Beaer J.* Dynamics of Fluids in Porous Media. N. Y.: Elsevier, 1972.
4. *Закиров С.Н., Лапук Б.Б.* Проектирование и разработка газовых месторождений. М.: Недрра, 1974.
5. *Лапук Б.Б.* Теоретические основы разработки месторождений природных газов. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
6. *Aziz K., Settari A.* Petroleum Reservoir Simulation. Society of Petroleum Engineers, 1979.

7. *Abou-Kassem J.H., Islam M.R., Farouq Ali S.M.* Petroleum Reservoir Simulation: The Engineering Approach. Second Edition. Cambridge, MA–Kidlington: Gulf Professional Publishing (Elsevier), 2020.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
9. Бондарев Е.А., Васильев В.И., Воеводин А.Ф. и др. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1988.
10. Васильев В.И., Попов В.В., Тимофеева Т.С. Вычислительные методы в разработке месторождений нефти и газа. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
11. Латонов В.В., Гуревич Г.Р. Расчёт коэффициента сжимаемости природных газов // Газовая промышленность. 1969. Т.2. С. 7–9.
12. Коновалов А.Н. Задача фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1988.
13. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
14. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M. Explicit-implicit schemes for non-isothermal filtration problem: single-temperature model // J. Compu. Appl. Math. 2024. V. 440. Article number 115639; DOI: 10.1016/j.cam.2023.115639.
15. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M. Non-isothermal filtration problem: Two-temperature computational model // J. Comput. Phys. 2025. V. 531. Article number 113941; DOI: 10.1016/j.jcp.2025.113941.
16. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
17. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
18. Зверев В.Г., Гольдин В.Д. Разностная схема для решения конвективно-диффузионных задач теплообмена // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, № 6. С. 24–37.
19. Васильев В.И., Аммосов А.В. Numerical Modeling of Non-Isothermal Filtration of Natural Gas // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2025; DOI: 10.33048/semi.2025.22.A12
20. Иванов М.И., Кремер И.А., Лаевский Ю.М. О моделировании скважин в задачах фильтрации // Сиб. электрон. матем. известия. 2019. Т. 16. С. 1868–1884; DOI: 10.33048/semi.2019.16.133
21. Рожин И.И., Калачева Л.П., Иванова И.К. Исследование гидратообразования для повышения надёжности добычи и транспорта природного газа в условиях криолитозоны // Природные ресурсы арктики и субарктики. 2021. Т. 26, № 1. С. 49–59; DOI: 10.31242/2618-9712-2021-26-1-5
22. Sivtsev A.I., Rozhin I.I. Search for technogenic deposits under the permafrost-hydrate seal within the Vilyui syncline // SOCAR Proceedings, 2022. Special Iss. 1. P. 90–98; DOI: 10.5510/OGP2022SI100666.
23. Borisova N.N., Rozhin I.I., Ivanov G.I. Algorithm for determining the gas flow rate by the half-division method for pressure measurements in hydrate formation in a well // E3S Web of Conference, 2024. V. 592. Internat. Sci. Conf. Energy Management of Municipal Facilities and Environmental Technologies (EMMFT-2024); DOI:10.1051/e3sconf/202459204007.
24. Мангазеев П.В., Панков М.В., Кулагина Т.Е., Камардинов М.Р., Деева Т.А. Гидродинамические исследования скважин // Томск: Изд-во ТПУ, 2004.

UDC 519.633.6

**NUMERICAL SIMULATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF
NATURAL GAS FLOW IN A RESERVOIR IN DIFFERENT VARIOUS**© 2026 A. V. Ammosov^{1a}

¹*M. K. Ammosov North-Eastern Federal University,
Belinsky st., 58, Yakutsk, 677000, Russia*

E-mail: Albertdobun@gmail.com

Received 03.06.2025, revised 19.03.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. The article considers a one-dimensional mathematical model of non-isothermal plane-radial filtration of natural gas in a formation of constant thickness H . A numerical simulation of mathematical models includes convective and conductive heat exchange, adiabatic expansion and the Joule-Thompson effect in different various are carried out. The analysis of the numerical solution results of the system of heat and mass transfer equations has been carried out. Estimates are given and numerical results are compared for the terms of the heat conduction equation separately and in combination. Discretization is performed using an implicit difference scheme.

Keywords: filtration gas equation, heat conductivity equation, convective heat exchange, conductive heat exchange, adiabatic expansion, Joule-Thomson effect, compressibility coefficient, implicit difference scheme.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.101

REFERENCES

1. Leibenzon L.S., Podzemnaya gidrogazodinamika. Sobr. Trudov. [Underground hydrogas dynamics. Collected Works]. Moscow: Izd-vo AN SSSR, V. 2, 1953 (in Russian).
2. Charny I.A., Podzemnaya gidrogazodinamika [Underground hydrogas dynamics]. Moscow: Gostoptekhizdat, 1963 (in Russian).
3. Bear J., Dynamics of Fluids in Porous Media. N. Y.: Elsevier, 1972.
4. Zakirov S.N., Lapuk B.B., Proektirovanie i razrabotka gazovykh mestorozhdeniy [Design and development of gas fields]. Moscow: Nedra, 1974 (in Russian).
5. Lapuk B.B., Teoreticheskie osnovy razrabotki mestorozhdeniy prirodnykh gazov [Theoretical foundations of the development of natural gas deposits]. Moscow–Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2002 (in Russian).
6. Aziz K., Settari A., Petroleum Reservoir Simulation. Society of Petroleum Engineers, 1979.
7. Abou-Kassem J.H., Islam M.R., Farouq Ali S.M., Petroleum Reservoir Simulation: The Engineering Approach. Second Edition. Cambridge, MA–Kidlington: Gulf Professional Publishing (Elsevier), 2020.
8. Samarskiy A.A., Teoriya raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka Publ., 1989 (in Russian).
9. Bondarev E.A., Vasil'ev V.I., Voevodin A.F. i dr., Termogidrodinamika sistem dobychi i transporta gaza [Thermohydrodynamics of gas production and transportation systems]. Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch, 1988 (in Russian).
10. Vasil'ev V.I., Popov V.V., Timofeeva T.S., Vychislitel'nye metody v razrabotke mestorozhdeniy nefi i gaza [Computational methods in the development of oil and gas fields]. Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch, 2000 (in Russian).

11. Latonov V.V., Gurevich G.R., Raschet koeffitsienta szhimaemosti prirodnykh gazov [Calculation of the compressibility coefficient of natural gases]. *Gazovaya Promyshlennost'* [The gas industry], 1969, Vol.2, pp. 7–9 (in Russian).
12. Konovalov A.N., Zadacha fil'tratsii mnogofaznoy neszhimaemoy zhidkosti [The problem of filtration of a multiphase incompressible fluid]. Novosibirsk: Nauka, Siberian Branch, 1988 (in Russian).
13. Yanenko N.N., Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki [Fractional step method for solving multidimensional problems of mathematical physics]. Novosibirsk: Nauka, 1967 (in Russian).
14. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M., Explicit-implicit schemes for non-isothermal filtration problem: single-temperature model. *J. Comput. Appl. Math.*, 2024, Vol. 440, Article number 115639; DOI: 10.1016/j.cam.2023.115639.
15. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M., Non-isothermal filtration problem: Two-temperature computational model. *J. Comput. Phys.*, 2025, Vol. 531, Article number 113941; DOI: 10.1016/j.jcp.2025.113941.
16. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N., Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat transfer]. Moscow: LIBROKOM, 2009 (in Russian).
17. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N., Chislennyye metody resheniya zadach konveksii-diffuzii [Numerical methods for solving convection-diffusion problems]. Moscow: Editorial URSS, 1999 (in Russian).
18. Zverev V.G., Gol'din V.D., Raznostnaya skhema dlya resheniya konvektivno-diffuzionnykh zadach teplomassoobmena [Difference scheme for solving convective-diffusion problems of heat and mass transfer]. *Vychislitel'nye Tekhnologii* [Comput. Technol.], 2002, Vol. 7, No. 6, pp. 24–37 (in Russian).
19. Vasil'ev V.I., Ammosov A.V., Numerical Modeling of Non-Isothermal Filtration of Natural Gas. *Siberian Electronic Math. Reports*, 2025; DOI: 10.33048/semi.2025.22.A12
20. Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M., O modelirovanii skvazhin v zadachakh fil'tratsii [On well modeling in filtration problems]. *Sib. Elektron. Matem. Izvestiya* [Siberian Electronic Math. Reports], 2019, Vol. 16, pp. 1868–1884 (in Russian); DOI: 10.33048/semi.2019.16.133
21. Rozhin I.I., Kalacheva L.P., Ivanova I.K., Issledovanie gidratoobrazovaniya dlya povysheniya nadezhnosti dobychi i transporta prirodnogo gaza v usloviyakh kriolitozony [Investigation of hydrate formation to improve the reliability of natural gas production and transportation in cryolithozone conditions]. *Prirodnye resursy Arktiki i Subarktiki* [Natural resources of the Arctic and Subarctic.], 2021, Vol. 26, No. 1, pp. 49–59 (in Russian); DOI: 10.31242/2618-9712-2021-26-1-5
22. Sivtsev A.I., Rozhin I.I., Search for technogenic deposits under the permafrost-hydrate seal within the Vilyui syncline. *SOCAR Proc.*, 2022. Special Iss. 1, pp. 90–98; DOI: 10.5510/OGP2022SI100666.
23. Borisova N.N., Rozhin I.I., Ivanov G.I., Algorithm for determining the gas flow rate by the half-division method for pressure measurements in hydrate formation in a well. *Internat. Sci. Conf. Energy Management of Municipal Facilities and Environmental Technol. (EMMFT-2024). E3S Web of Conference*, 2024, Vol. 592; DOI:10.1051/e3sconf/202459204007.
24. Mangazeev P.V., Pankov M.V., Kulagina T.E., Kamardinov M.R., Deeva T.A. Hidrodinamicheskie issledovaniya skvazhin [Hydrodynamic studies of wells]. Tomsk: TPU Publ., 2004 (in Russian).

УДК 517.938:517.984

**ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ
ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭТИХ ОПЕРАТОРОВ
В БОЛЕЕ ШИРОКИЕ ПРОСТРАНСТВА**

© 2026 В. С. Белоносов^a, А. Г. Швец^b

*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^abelonosov@academ.org, ^ba.shvets1@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 07.05.2026 г.; после доработки 07.05.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Изучаются фундаментальные свойства широкого класса неограниченных замкнутых линейных операторов в банаховых пространствах, заданных на не всюду плотных множествах. В частности, к этому классу относятся дифференциальные операторы Штурма — Лиувилля с однородными граничными условиями Дирихле, действующие в пространствах непрерывных функций на ограниченных промежутках. С использованием теории обобщённых производных С. Л. Соболева такие операторы могут быть распространены на всюду плотные множества в гильбертовых пространствах. Возникает вопрос о связи значений аналитических функций исходного и распространённого операторов. В работе установлены достаточные условия, при которых аналитические функции распространённых операторов являются соответствующими расширениями тех же функций исходных операторов. Полученный результат уточняет условия согласования резольвентных конструкций при таком переходе между пространствами.

Ключевые слова: аналитические функции линейных операторов в банаховых пространствах, резольвента, распространение операторнозначных функций в более широкие пространства.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.102

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением опубликованной работы [1], мотивированной проблемами параметрического резонанса для абстрактных уравнений Матгё — Хилла:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Bu(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t)). \quad (1)$$

Здесь $u(t)$ — функция вещественного аргумента t со значениями в банаховом пространстве E ; B — замкнутый линейный оператор в E , который может быть ограниченным или неограниченным; ε — малый скалярный параметр; $F(\tau, u)$ — отображение со значениями в E , непрерывное по совокупности аргументов и почти периодическое по переменной τ ; ω — частота возмущения $\varepsilon F(\omega t, u)$.

Классический способ решения проблем параметрического резонанса связан с асимптотическим методом усреднения Крылова — Боголюбова (см. [2]–[10]). Применение этого метода требует предварительного преобразования исходного уравнения к системе первого порядка в так называемой стандартной форме Боголюбова: $v'(t) = \varepsilon f(t, \omega, v)$. Такое преобразование можно осуществить при дополнительных предположениях о свойствах оператора B . Допустим,

что существует квадратный корень \sqrt{B} , который порождает сильно непрерывную операторную экспоненту $\exp(\pm it\sqrt{B})$. Тогда переход к стандартной форме осуществляется обобщённым преобразованием Ван-дер-Поля:

$$v_1(t) = e^{-it\sqrt{B}}[\sqrt{B}u(t) - iu'(t)]/2, \quad v_2(t) = e^{+it\sqrt{B}}[\sqrt{B}u(t) + iu'(t)]/2.$$

При этом для вектора $v = (v_1, v_2)$ получается система:

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= \frac{-i\varepsilon}{2} e^{-it\sqrt{B}} F(\omega t, (\sqrt{B})^{-1}[e^{+it\sqrt{B}}v_1 + e^{-it\sqrt{B}}v_2]), \\ v_2'(t) &= \frac{+i\varepsilon}{2} e^{+it\sqrt{B}} F(\omega t, (\sqrt{B})^{-1}[e^{+it\sqrt{B}}v_1 + e^{-it\sqrt{B}}v_2]). \end{aligned}$$

В настоящее время данный подход реализован для уравнений (1) в гильбертовых пространствах. Например, в работе [4] развита теория параметрического резонанса для широкого класса уравнений Матьё — Хилла с самосопряжёнными и положительными операторами B , имеющими компактные резольвенты. Однако для уравнений в банаховых пространствах с операторами B , не имеющими плотной области определения, соответствующая теория пока не разработана. В частности, таким является дифференциальный оператор Штурма — Лиувилля в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$:

$$w(x) \mapsto -\frac{d^2w(x)}{dx^2} + q(x)w(x), \quad q(x) \in C[a, b], \quad q(x) \geq 0, \quad (2)$$

определённый на дважды гладких функциях $w(x)$, равных нулю на концах промежутка $[a, b]$. В фундаментальной научной литературе эти операторы часто называют «плохими» (например, в книге [8]), и переходят к их распространению в гильбертово пространство L_2 .

Возникает естественный вопрос: почему научное сообщество отказалось изучать свойства «плохих» операторов? В литературе нет утверждений, что такие операторы не имеют квадратных корней, порождающих сильно непрерывные экспоненты $\exp(\pm it\sqrt{B})$. Темой наших исследований является выяснение этого вопроса. В работе [1] установлено существование дробных степеней для широкого класса «плохих» операторов. Настоящая статья дополняет эти результаты и приводит новые свойства соответствующих операторов, определяющие взаимосвязь аналитических функций от исходных операторов и их распространений на более широкие пространства. В дальнейшем эти свойства могут быть использованы при решении проблем существования операторных экспонент $\exp(\pm it\sqrt{B})$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сформулируем итоги работы [1], которые применяются далее для достижения предполагаемых результатов настоящей статьи. При этом используются традиционные обозначения: \mathbb{R} и \mathbb{C} — множества вещественных и комплексных чисел; $\|\cdot\|_X$ — норма элементов банахова пространства X ; $\|\cdot\|_{X \rightarrow Y}$ — норма ограниченных линейных отображений из X в Y .

Пусть r и φ — вещественные числа, причём $r > 0$, $0 < \varphi < \pi/2$. Символом $S(r, \varphi)$ обозначим множество комплексных λ , удовлетворяющих неравенствам $|\lambda| \geq r$, $|\arg \lambda| \leq \varphi$, а символом $\Delta(r, \varphi)$ — дополнение к $S(r, \varphi)$ до полного набора комплексных чисел \mathbb{C} .

Рассмотрим произвольный замкнутый линейный оператор B в банаховом пространстве E , определённый на множестве $D(B)$, которое может не быть всюду плотным в E . Именно таким является оператор Штурма — Лиувилля (2) в пространстве непрерывных функций. Введём необходимый далее класс операторов $K_E(r, \varphi)$.

Определение. Будем говорить, что оператор B принадлежит классу $K_E(r, \varphi)$, если множество $\Delta(r, \varphi)$ состоит из регулярных точек, для которых определена резольвента $R_B(\lambda) = (B - \lambda I)^{-1}$ и выполнено неравенство:

$$\|R_B(\lambda)\|_{E \rightarrow E} \leq M_{r, \varphi} (1 + |\lambda|)^{-1},$$

где $M_{r, \varphi}$ — фиксированная константа для всех $\lambda \in \Delta(r, \varphi)$.

Основным результатом работы [1] является распространение понятия аналитических операторнозначных функций на элементы $B \in K_E(r, \varphi)$. Пусть $f(\lambda)$ — комплекснозначная функция, определённая и аналитическая в области Ω_f , содержащей сектор $S(r_f, \varphi_f)$ с параметрами

$$0 < r_f < r, \quad \varphi < \varphi_f < \pi/2.$$

При этом справедливы включения $\Omega_f \supset S(r_f, \varphi_f) \supset S(r, \varphi)$. Дополнительно предполагается, что $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda^\gamma f(\lambda) = 0$ при каком-нибудь $\gamma > 0$. Тогда

$$f(B) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_B(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где Γ — граница множества $S(\rho, \psi)$ с показателями

$$r_f \leq \rho < r, \quad \varphi < \psi \leq \varphi_f,$$

ориентированная так, чтобы при её обходе множество $S(\rho, \psi)$ оставалось слева. Ввиду аналитичности функций $f(\lambda)$ и $R_B(\lambda)$ на множестве $\Omega_f \cap \Delta(r, \varphi)$, указанный выбор показателей ρ и ψ не влияет на значение интеграла (3).

Теперь перейдём к изучению изменения функций $f(B)$ при замене оператора $B : E \rightarrow E$ его распространениями на более широкие пространства. Необходимое понятие распространения неоднозначно рассматривается в научной литературе, поэтому предварительно сформулируем применяемое далее определение.

Предположим, что H — банахово пространство, содержащее все элементы E , образующие в H векторное подпространство, и при всех $x \in E$ выполнено неравенство $\|x\|_H \leq c \|x\|_E$ (например, $H = L_2[a, b]$, $E = C[a, b]$). Замкнутый линейный оператор $A : H \rightarrow H$ с областью определения $D(A) \subset H$ назовём распространением $B : E \rightarrow E$, если $D(B) \subset D(A)$ в пространстве H , причём $Ax = Bx$ для всех $x \in D(B)$.

Теорема. Пусть B — замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве E , а оператор A — распространение B в более широкое пространство H . Кроме того, $B \in K_E(r, \varphi)$ и $A \in K_H(r, \varphi)$ при общих значениях r и φ . Если аналитическая функция $f(\lambda)$ удовлетворяет приведённым выше условиям в области Ω_f , содержащей множества $S(r_f, \varphi_f) \supset S(r, \varphi)$, то определённая на H операторная функция $f(A)$ будет распространением определённой на E операторной функции $f(B)$.

Доказательство. Функция $f(B)$ определена интегралом (3), абсолютно сходящимся по норме $\|\cdot\|_{E \rightarrow E}$, а функция $f(A)$ — таким же интегралом для оператора A , абсолютно сходящимся по норме $\|\cdot\|_{H \rightarrow H}$. Необходимо установить, что значения этих операторных интегралов на любом элементе $x \in E$ совпадают в пространстве H .

Предварительно отметим, что если оператор B имеет обратный B^{-1} в пространстве E , а оператор A имеет обратный A^{-1} в пространстве H , то A^{-1} будет распространением B^{-1} . Действительно, пусть элемент y принадлежит области определения B^{-1} , тогда $x = B^{-1}y \in D(B)$ и $y = Bx = Ax$ в пространстве H . Следовательно, $B^{-1}y = A^{-1}y$ и A^{-1} является распространением B^{-1} .

Точно так же можно проверить, что если комплексное число λ – регулярное значение для операторов A и B , то $(A - \lambda I)^{-1} = R_A(\lambda)$ будет распространением $(B - \lambda I)^{-1} = R_B(\lambda)$ в пространство H .

Возьмём произвольный элемент $x \in E$ и представим $f(B)x$ в виде интеграла в пространстве E :

$$f(B)x = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_B(\lambda) x d\lambda,$$

Уже отмечалось, что этот интеграл абсолютно сходится не только в E , но и в H . Интерпретируя эту формулу, как интеграл в H , и применяя утверждение о взаимосвязи операторов $R_B(\lambda)$ и $R_A(\lambda)$, получим равенство:

$$f(B)x = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_B(\lambda) x d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) R_A(\lambda) x d\lambda = f(A)x.$$

Таким образом, для любого $x \in E$ выполнено соотношение $f(B)x = f(A)x$. Следовательно, $f(A)$ является распространением $f(B)$, и теорема доказана. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результат этой теоремы может быть использован при изучении свойств сложных операторнозначных аналитических функций с помощью их распространений в более широкие пространства.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках подготовки кандидатской диссертации в аспирантуре Новосибирского национального исследовательского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоносов В. С., Швец А. Г. Фундаментальные свойства дробных степеней неограниченных операторов в банаховых пространствах // Математические труды. 2024. Т. 27, № 3. С. 20–29. DOI: 10.25205/1560-750X-2024-27-3-20-29.
2. Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределённых системах. Л.: Издательство Ленинградского государственного университета, 1982.
3. Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
4. Белоносов В. С. Асимптотический анализ параметрической неустойчивости нелинейных гиперболических уравнений // Математический сборник. 2017. Т. 208, № 8. С. 4–30. DOI: 10.4213/sm8883.
5. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев: Издательство Академии наук Украинской ССР, 1937.
6. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1971.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. М.: Наука, 1974.
8. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
9. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
10. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

UDC 517.938:517.984

**TRANSFORMATION OF ANALYTIC FUNCTIONS OF LINEAR
OPERATORS IN BANACH SPACES WHEN THESE OPERATORS
ARE EXTENDED TO LARGER SPACES**

© 2026 V. S. Belonosov^a, A. G. Shvets^b

*Novosibirsk State University,
Pirogov st., 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: ^abelonosov@academ.org, ^ba.shvets1@g.nsu.ru

Received 07.05.2026, revised 07.05.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. This paper studies the fundamental properties of a broad class of unbounded closed linear operators in Banach spaces with non-dense domains. In particular, this class includes Sturm–Liouville differential operators with homogeneous Dirichlet boundary conditions acting in spaces of continuous functions on bounded intervals. Using S. L. Sobolev’s theory of generalized derivatives, such operators can be extended to densely defined operators in Hilbert spaces. The question then arises of the relationship between analytic functions of the original and extended operators. In this paper, we establish sufficient conditions under which the analytic functions of the extended operators are extensions of the corresponding analytic functions of the original operators. The result obtained refines the conditions for the compatibility of resolvent constructions during such a transition between spaces.

Keywords: spectral properties, resolvents and analytic functions of linear operators in Banach spaces.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.102

REFERENCES

1. Belonosov V.S., Shvets A.G. Fundamental’nye svoystva drobnykh stepenej neogranichennykh operatorov v banahovykh prostranstvakh [Fundamental properties of fractional powers of unbounded operators in Banach spaces], *Matematicheskie Trudy*, 2024, Vol. 27, No. 3, pp. 20–29 (in Russian); DOI: 10.25205/1560-750X-2024-27-3-20-29.
2. Fomin V.N. Matematicheskaya teoriya parametricheskogo rezonansa v lineinykh raspredelennykh sistemakh [Mathematical theory of parametric resonance in linear distributed systems]. Leningrad: Leningrad State University Press, 1982 (in Russian).
3. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. Parametricheskii rezonans v lineinykh sistemakh [Parametric resonance in linear systems]. Moscow: Nauka, 1987 (in Russian).
4. Belonosov V.S. Asymptotic analysis of the parametric instability of nonlinear hyperbolic equations. *Sbornik: Mathematics*, 2017, Vol. 208, No. 8, pp. 1088–1112; DOI: 10.1070/SM8883.
5. Krylov N.M., Bogolyubov N.N. Vvedenie v nelineinuyu mekhaniku [Introduction to nonlinear mechanics]. Kiev: Publ. House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1937 (in Russian).
6. Mitropol’skii Yu.A. Metod usredneniya v nelineinoy mekhanike [The averaging method in nonlinear mechanics]. Kiev: Naukova Dumka, 1971 (in Russian).
7. Bogolyubov N.N., Mitropol’skii Yu.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).

8. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii [Integral operators in spaces of summable functions]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
9. Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin; N. Y.: Springer-Verl., 1966.
10. Krein S.G. Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve [Linear differential equations in Banach spaces]. Moscow: Nauka, 1967 (in Russian).

УДК 519.61

О ВЛИЯНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОЕКЦИОННОМ МЕТОДЕ КРЫЛОВОГО ТИПА НА ТОЧНОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ И ФОРМИРОВАНИЕ КРИТЕРИЯ ОСТАНОВА

© 2026 В. П. Ильин^{1a}, В. Н. Бабенко^{2b}

¹*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, г. Новосибирск 630090, Россия,*
²*Кубанский государственный технологический университет,
ул. Московская, 2, г. Краснодар 350072, Россия*

E-mails: ^ailin@sscc.ru, ^brnibvd@mail.ru

Поступила в редакцию 08.12.2025 г.; после доработки 13.02.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

При осуществлении вычислений на ЭВМ неизбежно возникают погрешности округления. В настоящей работе исследуется вопрос о влиянии указанных погрешностей на точность вычисления очередного приближения в проекционном методе решения СЛАУ с применением проектирования на подпространства Крылова. Получена оценка точности вычисленного приближения, выраженная через возмущения исходных данных. Предложен критерий останова итераций, гарантированно обеспечивающий выбранную приемлемую точность искомого решения.

Ключевые слова: ортопроектор, подпространство Крылова, проекционный метод, СЛАУ большой размерности, погрешности округлений.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.103

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу решения СЛАУ

$$Ax = f. \tag{1}$$

где A — невырожденная матрица порядка N .

Пусть v — произвольный вектор. Векторы $v, Av, \dots, A^{m-1}v$ образуют последовательность Крылова, при этом $K_m(A, v) = \text{span}(v | Av | \dots | A^{m-1}v)$ — подпространство Крылова, порождаемое матрицей A и вектором v .

Суть рассматриваемого метода состоит в следующем (см. [1–3]). Пусть произвольный вектор x^0 — начальное приближение точного решения \bar{x} системы (1), соответственно $r^0 = f - Ax^0$ порождаемая им невязка. Последовательность $\{x^n\}$, $n = 1, 2, \dots$, определяется соотношениями

$$x^n = x^{n-1} + y^{n-1}, \tag{2}$$

где

$$y^{n-1} = V_{n-1} H_{n-1}^{-1} V_{n-1}^* r^{n-1}, \tag{3}$$

$$r^n = f - Ax^n, \tag{4}$$

V_{n-1} — матрица, столбцы которой $v_1^{n-1}, v_2^{n-1}, \dots, v_{m_{n-1}}^{n-1}$ определяются ортогонализацией Грама — Шмидта системы векторов $r^{n-1}, Ar^{n-1}, \dots, A^{m_{n-1}-1}r^{n-1}$ и образуют ортонормированный базис в $K_{m_{n-1}} = \text{span}\{r^{n-1}, Ar^{n-1}, \dots, A^{m_{n-1}-1}r^{n-1}\}$ (другими словами V_{n-1}^* является обратной слева к V_{n-1}), матрица H_{n-1} определяется соотношением

$$AV_{n-1} = V_{n-1}H_{n-1}. \quad (5)$$

При этом последовательность $\{x^n\}$ сходится к точному решению \bar{x} системы (1) (см. [4, 5], а также более современные источники [6, 7]). Здесь m_{n-1} — размерность подпространства Крылова на n -ой итерации.

В связи с тем, что $V_{n-1}^* = V_{n-1}^+$, где матрица V_{n-1}^+ — псевдообратная к V_{n-1} , произведение $V_{n-1}V_{n-1}^*$ представляет собой ортопроектор, поэтому рассматриваемый нами итерационный процесс относят к проекционным методам, интерес к которым не ослабевает уже долгие годы, что подтверждается неуменьшающимся потоком публикаций. Среди них, отметим недавние [8, 9].

Вследствие погрешностей округлений при машинной реализации формул (2)–(5) вместо определяемой ими последовательности $\{x^n\}$ мы получим возмущённую последовательность $\{\tilde{x}^n\}$. Содержанием нашей работы является исследование влияния погрешностей округлений на точность вычисления элементов последовательности $\{\tilde{x}^n\}$. В результате проведённых исследований мы намерены дать рекомендации о повышении точности вычисления финального приближения x^n , а также выработать критерий останова итераций, обеспечивающий оценку гарантированной точности вычисленного решения СЛАУ (1).

Нашей работе предшествовали подобные исследования в [10–12]. Следует также сказать, что исследования, посвящённые определению оценки возмущений матриц V и H , проводились ранее в работах [13–15].

Здесь также мы должны сказать, что представляемое исследование теснейшим образом связано с работой [16] и, по существу, является её продолжением.

Наша работа построена следующим образом. Во втором разделе проводится исследование влияния погрешностей округлений на точность вычисления очередного приближения. Третий раздел посвящён выработке критерия останова итерационного процесса, обеспечивающего приемлемую точность вычисленного результата. Тестовые испытания составляют содержание четвёртого раздела. Наконец, в пятом разделе проводится обсуждение полученных результатов.

1. ВЛИЯНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОКРУГЛЕНИЙ НА ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОЧЕРЕДНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Обращаясь к формулам (2), (4) и (3), мы обнаружим, что проведение очередной итерации сводится к вычислению шести векторов:

$$\begin{aligned} s^{n-1} &= Ax^{n-1}, & r^{n-1} &= f - s^{n-1}, & \hat{w}^{n-1} &= V_{n-1}^* r^{n-1}, & z^{n-1} &= H_{n-1}^{-1} \hat{w}^{n-1}, \\ \hat{y}^{n-1} &= V_{n-1} z^{n-1}, & x^n &= x^{n-1} + \hat{y}^{n-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Вследствие погрешностей округлений при машинной реализации вычислений вместо векторов $s^{n-1}, r^{n-1}, \hat{w}^{n-1}, z^{n-1}, \hat{y}^{n-1}, x^n$ мы получим их возмущённые аналоги.

Замечание 1.1. Каждое последующее приближение x^n строится по предшествующей невязке r^{n-1} , поэтому погрешности, допущенные на предыдущей итерации (при вычислении x^{n-1}) корректируются на последующей, то есть при вычислении x^n .

Свой подход к явлению, описанному в замечании 1.1 мы выразим следующим образом.

Входные данные: A, f — матрица и правая часть системы (1), \tilde{x}^0 — произвольный начальный вектор.

Процесс итераций: $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} x^{n-1} \text{ arrow } \tilde{x}^{n-1}, \\ \tilde{s}^{n-1} = s^{n-1} + \delta s^{n-1}, \quad \tilde{r}^{n-1} = r^{n-1} + \delta r^{n-1}, \quad \tilde{w}^{n-1} = \widehat{w}^{n-1} + \delta \widehat{w}^{n-1}, \\ \tilde{z}^{n-1} = z^{n-1} + \delta z^{n-1}, \quad \tilde{y}^{n-1} = \widehat{y}^{n-1} + \delta \widehat{y}^{n-1}, \quad \tilde{x}^n = x^n + \delta x^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь arrow — операция присваивания. Во втором, третьем и четвёртом соотношениях из последнего списка возмущения δr^{n-1} , $\delta \widehat{w}^{n-1}$ и δz^{n-1} нам удобно представить в виде суммы двух слагаемых: наследственного возмущения и возмущения, моделирующего погрешности округлений, возникающих непосредственно при выполнении машинного вычисления векторов \widehat{w}^{n-1} , z^{n-1} , \widehat{y}^{n-1} . Согласно сказанному, запишем

$$\delta r^{n-1} = \delta r_r^{n-1} + \delta r_{r\widehat{w}}^{n-1}, \quad \delta \widehat{w}^{n-1} = \delta \widehat{w}_w^{n-1} + \delta w_{wz}^{n-1}, \quad \delta z^{n-1} = \delta z_z^{n-1} + \delta z_{zy}^{n-1}. \quad (8)$$

Для описания связей векторов в первом, втором, и шестом равенствах из списка (6) с их возмущёнными аналогами с учётом (8) мы обратимся к следующим моделям:

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{n-1} &= (A + \delta A^{n-1})x^{n-1}, \quad \text{где } \|\delta A^{n-1}\| \leq \alpha_A^{n-1}\|A\|, \quad \alpha_A^{n-1} \leq \alpha_A, \\ r^{n-1} + \delta r_r^{n-1} &= (I + \Delta_{fs}^{n-1})(f - \tilde{s}^{n-1}), \quad \text{где } \Delta_{fs}^{n-1} = \text{diag}\{\delta_{fs,1}^{n-1}, \dots, \delta_{fs,N}^{n-1}\}, \quad |\delta_{fs,i}^{n-1}| < \varepsilon, \\ \tilde{x}^n &= \{I + \Delta_{xy}^{n-1}\}(x^{n-1} + \tilde{y}^{n-1}), \quad \text{где } \Delta_{xy}^{n-1} = \text{diag}\{\delta_{xy,1}^{n-1}, \dots, \delta_{xy,N}^{n-1}\}, \quad |\delta_{xy,i}^{n-1}| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку исследование погрешностей проводится в рамках одной итерации, мы, введя обозначения

$$u = x^n, \quad \tilde{u} = \tilde{x}^n,$$

в используемых ниже соотношения индекс, указывающий на номер итерации, можем опустить. При этом получим более компактные обозначения, в частности последние соотношения примут вид

$$\tilde{s} = (A + \delta A)x, \quad \text{где } \|\delta A\| \leq \alpha_A\|A\|, \quad (9)$$

$$r + \delta r_r = (I + \Delta_{fs})(f - \tilde{s}), \quad \text{где } \Delta_{fs} = \text{diag}\{\delta_{fs,1}, \dots, \delta_{fs,N}\}, \quad |\delta_{fs,i}| < \varepsilon, \quad (10)$$

$$\tilde{u} = \{I + \Delta_{xy}\}(x + \tilde{y}), \quad \text{где } \Delta_{xy} = \text{diag}\{\delta_{xy,1}, \dots, \delta_{xy,N}\}, \quad |\delta_{xy,i}| < \varepsilon. \quad (11)$$

Лемма 1.1. Пусть равенства $s = Ax$ и $\tilde{s} = (A + \delta A)x$ связаны соотношением $\|\delta A\| \leq \alpha_A\|A\|$, тогда выполняется неравенство

$$\|\tilde{s} - s\|/\|s\| \leq c(A)\alpha_A, \quad (12)$$

где $c(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы A .

Доказательство. Рассмотрим разность $\tilde{s} - s$. В соответствии с определением векторов s и \tilde{s} (см. (9)) запишем цепочку равенств

$$\tilde{s} - s = (A + \delta A)x - Ax = \delta Ax = \delta AA^{-1}s.$$

Отсюда благодаря выполнению неравенства, входящего в состав условий леммы, следует:

$$\|\tilde{s} - s\| \leq \|\delta A\|\|A^{-1}\|\|s\| \leq \alpha_A\|A\|\|A^{-1}\|\|s\|.$$

Из последней цепочки отношений вытекает неравенство (12). \square

Неравенство (12) представим в эквивалентном виде

$$\tilde{s} = (I + \Delta_s)s, \text{ где } \|\Delta_s\| \leq c(A)\alpha_A. \quad (13)$$

Ниже следуют сведения из [16], которые мы приведём в виде справки, включая леммы 1.2–1.4 и теорему 1.1.

Обращаясь к списку формул (6), мы можем сказать, что 3-5 формулы эквивалентны решению систем

$$Vw \cong r, \quad Hz \cong w, \quad V^*y \cong z.$$

Вследствие округлений вместо последних трёх систем в соответствии со вторым, третьим и четвёртым соотношениями в (7) и списком формул (8) мы решим возмущённые системы

$$\begin{aligned} (V + X_{Vw})\tilde{w} &\cong r + \delta r_r + \delta r_{r\widehat{w}}, & (H + X_{Hz})\tilde{z} &\cong \widehat{w} + \delta\widehat{w}_{\widehat{w}} + \delta\widehat{w}_{\widehat{w}z}, \\ (V + X_{Vy})^*\tilde{y} &\cong z + \delta z_z + \delta z_{zy}, \end{aligned} \quad (14)$$

при этом X_{Vw} , X_{Hz} , X_{Vy} удовлетворяют равенствам

$$X_{Vw} = X_V + X_w, \quad X_{Hz} = X_H + X_z, \quad X_{Vy} = X_V + X_y, \quad (15)$$

где возмущения X_V и X_H моделируют погрешности, обусловленные неточностью предварительно вычисленных матриц V и H . Соответственно возмущения X_w , X_z и X_y моделируют погрешности, возникающие при непосредственном машинном решении систем уравнений.

Лемма 1.2. Пусть в соотношениях (14) и (15) возмущения X_V , X_w , δr_r и $\delta r_{r\widehat{w}}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_{\widehat{w}}\| \leq \alpha_{\widehat{w}}, \quad \|\delta r_r\| \leq \beta_r\|r\|, \quad \|\delta r_{r\widehat{w}}\| \leq \beta_{r\widehat{w}}\|r\|$$

причём

$$1 - \alpha_V - \alpha_w > 0, \quad \|\tilde{r}\| \leq \gamma\|\widehat{r}\|,$$

где

$$\widehat{r} + \tilde{r} = r, \quad \widehat{r} = VV^+r, \quad \tilde{r} = (I - VV^+)r.$$

Тогда справедлива оценка

$$\|\tilde{w} - \widehat{w}\|/\|\widehat{w}\| \leq \frac{(\alpha_V + \alpha_w)\gamma + (\alpha_V + \alpha_w + (\beta_r + \beta_{r\widehat{w}})\sqrt{1 + \gamma^2})}{1 - \alpha_V - \alpha_w}.$$

Лемма 1.3. Пусть в соотношениях (14) и (15) возмущения X_H , X_z , $\delta\widehat{w}_{\widehat{w}}$ и $\delta\widehat{w}_{\widehat{w}z}$ удовлетворяют неравенствам

$$\|X_H\| \leq \alpha_H\|H\|, \quad \|X_z\| \leq \alpha_z\|H\|, \quad \|\delta\widehat{w}_{\widehat{w}}\| \leq \beta_{\widehat{w}}\|\widehat{w}\|, \quad \|\delta\widehat{w}_{\widehat{w}z}\| \leq \beta_{\widehat{w}z}\|\widehat{w}\|,$$

причём

$$1 - c(H)(\alpha_H + \alpha_z) > 0,$$

где $c(H)$ — число обусловленности матрицы H . Тогда справедлива оценка

$$\|\tilde{z} - z\|/\|z\| \leq \frac{c(H)(\alpha_H + \alpha_z + \beta_{\widehat{w}} + \beta_{\widehat{w}z})}{1 - c(H)(\alpha_H + \alpha_z)}.$$

Лемма 1.4. Пусть в соотношениях (14) и (15) возмущения X_V , X_y , δz_z и δz_{zy} удовлетворяют неравенствам

$$\|X_V\| \leq \alpha_V, \quad \|X_y\| \leq \alpha_y, \quad \|\delta z_z\| \leq \beta_z \|z\|, \quad \|\delta z_{zy}\| \leq \beta_{zy} \|z\|,$$

причём $1 - \alpha_V - \alpha_y > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{y} - \widehat{y}\|}{\|\widehat{y}\|} &\leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2}, \\ \eta_z &= \frac{c(H)(\alpha_H + \alpha_z + \eta_{\widehat{w}} + \beta_{\widehat{w}z})}{1 - c(H)(\alpha_H + \alpha_z)}, \\ \eta_{\widehat{w}} &= \frac{(\alpha_V + \alpha_w)\gamma + (\alpha_V + \alpha_w + (\beta_r + \beta_{r\widehat{w}})\sqrt{1 + \gamma^2})}{1 - \alpha_V - \alpha_w}. \end{aligned}$$

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия лемм 1.2–1.4, тогда справедлива оценка точности вычисления поправки \widehat{y}^n

$$\frac{\|\tilde{y} - \widehat{y}\|}{\|\widehat{y}\|} \leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2},$$

где

$$\eta_z = \frac{c(H)(\alpha_H + \alpha_z + \eta_{\widehat{w}} + \beta_{\widehat{w}z})}{1 - c(H)(\alpha_H + \alpha_z)}, \quad (16)$$

$$\eta_{\widehat{w}} = \frac{(\alpha_V + \alpha_w)\gamma + (\alpha_V + \alpha_w + (\beta_r + \beta_{r\widehat{w}})\sqrt{1 + \gamma^2})}{1 - \alpha_V - \alpha_w}. \quad (17)$$

Замечание 1.2. Последнее неравенство перепишем в эквивалентном виде

$$\tilde{y} = (I + X_y)\widehat{y},$$

где

$$\|X_y\| \leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2}.$$

На основании изложенных сведений справедлива

Теорема 1.2. Пусть выполнены: условия теоремы 1.1 и соотношения (11), тогда справедлива оценка

$$\|\tilde{u} - u\| \leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2} \|\widehat{y}\| + \varepsilon \|u\|. \quad (18)$$

Доказательство. Раскрывая скобки в (11), мы получим

$$\tilde{u} = x + \tilde{y} + \Delta_{xy}(x + \tilde{y}).$$

Обращаясь к теореме 1.1 и первому соотношению в замечании 1.2 к ней, мы можем записать

$$\tilde{u} = x + (I + X_y)\widehat{y} + \Delta_{xy}(x + \tilde{y}) = x + \widehat{y} + X_y\widehat{y} + \Delta_{xy}(x + \tilde{y}).$$

Последнее выражение в соответствии с принятыми обозначениями перепишем в виде

$$\tilde{u} = u + \Delta_{xy}(x + \tilde{y}) + X_y \hat{y}.$$

Отсюда следует

$$\|\tilde{u} - u\| \leq \|\Delta_{xy}(x + \tilde{y})\| + \|X_y \hat{y}\|. \quad (19)$$

В последнем соотношении рассмотрим каждый из его членов, стоящих в правой части неравенства.

Сначала обратимся ко второму слагаемому последнего неравенства. Первый пункт условий теоремы апеллирует к условиям теоремы 1.1, поэтому согласно утвердительной части последней и второму соотношению в замечании 1.2, мы можем записать

$$\|X_y \hat{y}\| \leq \|X_y\| \|\hat{y}\| \leq \left(\left(\frac{(\alpha_V + \alpha_y + \eta_z + \beta_{zy})}{1 - \alpha_V - \alpha_y} \right)^2 + (\alpha_V + \alpha_y)^2 \right)^{1/2} \|\hat{y}\|, \quad (20)$$

где η_z определён в (16), соответственно $\eta_{\tilde{w}}$ — в (17).

Обращаясь теперь к первому слагаемому, мы можем сказать, что для него справедлива следующая цепочка отношений

$$\begin{aligned} \|\Delta_{xy}(x + \tilde{y})\| &= \|\Delta_{xy}(x + (I + X_y)\hat{y})\| = \|\Delta_{xy}(x + \hat{y}) + \Delta_{xy}X_y\hat{y}\| \\ &\leq \|\Delta_{xy}u\| + \|\Delta_{xy}X_y\hat{y}\| \leq \|\Delta_{xy}\| \|u\| + \|\Delta_{xy}X_y\| \|\hat{y}\|. \end{aligned}$$

Пренебрегая множителем $\|\Delta_{xy}X_y\|$ как величиной второго порядка малости, будем считать выполненным неравенство

$$\|\Delta_{xy}(x + \tilde{y})\| \leq \|\Delta_{xy}\| \|u\|.$$

Отсюда благодаря (11) следует

$$\|\Delta_{xy}(x + \tilde{y})\| \leq \varepsilon \|u\|.$$

Наконец, используя последнее соотношение и также (20) в неравенстве (19) получим (18). \square

2. КРИТЕРИЙ ОСТАНОВА ИТЕРАЦИЙ

Приступая к исследованию поставленного вопроса, вынесенного в заголовок настоящего параграфа, мы должны высказать некоторые потребующиеся в дальнейшем положения (соображения). Пусть

- 1) \bar{x} — точное решение системы (1),
- 2) x — приближённое решение системы (1) ($x = x^n$), полученное на n -ой итерации,
- 3) δr_r^n — погрешность, вносимая в результат вычисления невязки r^n .

Согласно сказанному мы можем записать следующие соотношения:

$$A\bar{x} = f, \quad Ax^n = f - r^n, \quad A\tilde{x}^n = f - r^n + \delta r_r^n. \quad (21)$$

Для принятия решения об останове итерационного процесса в условиях безошибочных вычислений невязки можно воспользоваться известным неравенством.

$$\|x^n - \bar{x}\| / \|\bar{x}\| \leq c(A) \|r^n\| / \|f\|, \quad (22)$$

Действительно, получив x^n такое, что $r^n = f - Ax^n$ при некотором достаточно малом κ удовлетворяет неравенству

$$c(A) \|r^n\| / \|f\| \leq \kappa,$$

мы в силу (22) можем записать цепочку неравенств

$$\|x^n - \bar{x}\|/\|\bar{x}\| \leq c(A)\|r^n\|/\|f\| \leq \kappa,$$

из которой следует, что если κ — приемлемая точность приближённого решения системы (1), то, остановив итерационный процесс (2)–(4), x^n можно принять в качестве приближённого решения заданной системы. При этом гарантированно будет обеспечена точность вычисленного решения:

$$\|x^n - \bar{x}\|/\|\bar{x}\| \leq \kappa.$$

Рассмотрим вопрос принятия решения об останове итераций в условиях, когда невязка вычисляется приближённо. Следуя замечанию 1.1 и связанному с ним подходу, высказанному вслед, мы будем иметь: $x^n = \tilde{x}^n$.

Следуя лемме 1.1 (см. (13)), мы можем записать

$$\tilde{s}^n = (A + \delta A^n)x^n, \quad \text{где} \quad \|\delta A^n\| \leq \alpha_A^n \|A\|, \quad \alpha_A^n < \alpha_A,$$

Ниже нам также придётся пользоваться соотношением:

$$\tilde{r}^n = r^n + \delta r_r^n = (I + \Delta_{f_s}^n)(f - \tilde{s}^n), \quad \text{где} \quad \Delta_{f_s}^n = \text{diag}\{\delta_{f_s,1}^n, \dots, \delta_{f_s,N}^n\}, \quad |\delta_{f_s,i}^n| < \varepsilon.$$

Далее нам в изложении удобно опустить индексы, как это делалось нами ранее.

$$\tilde{s} = (A + \delta A)x, \quad \text{где} \quad \|\delta A\| \leq \alpha_A \|A\|, \quad \alpha_A < \alpha, \quad (23)$$

$$\tilde{r} = r + \delta r_r = (I + \Delta_{f_s})(f - \tilde{s}), \quad \text{где} \quad \Delta_{f_s} = \text{diag}\{\delta_{f_s,1}, \dots, \delta_{f_s,N}\}, \quad |\delta_{f_s,i}^n| < \varepsilon, \quad (24)$$

Из первого равенства в цепочке (24) следует равенство

$$r = \tilde{r} - \delta r_r. \quad (25)$$

Обращаясь к (25) а затем ко второму равенству в цепочке (24), мы можем записать

$$r = \tilde{r} - \delta r_r = (I + \Delta_{f_s})(f - \tilde{s}) - \delta r_r = (f - \tilde{s}) + \Delta_{f_s}(f - \tilde{s}) - \delta r_r.$$

Подставив (23) в последнее выражение, будем иметь

$$\begin{aligned} r &= (f - (A + \delta A)x) + \Delta_{f_s}(f - (A + \delta A)x) - \delta r_r \\ &= (f - Ax - \delta Ax) + \Delta_{f_s}(f - x - \delta Ax) - \delta r_r = r - \delta Ax + \Delta_{f_s}(r - \delta Ax) - \delta r_r. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta r_r = -\delta Ax + \Delta_{f_s}(r - \delta Ax).$$

Наконец, осуществив подстановку (25) в последнее равенство, получим

$$\delta r_r = -\delta Ax + \Delta_{f_s}((\tilde{r} - \delta r_r) - \delta Ax).$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} (I + \Delta_{f_s})\delta r_r &= -\delta Ax + \Delta_{f_s}(\tilde{r} - \delta Ax), \\ \delta r_r &= (I + \Delta_{f_s})^{-1}(-\delta Ax + \Delta_{f_s}(\tilde{r} - \delta Ax)). \end{aligned} \quad (26)$$

Обращаясь к матрице $(I + \Delta_{f_s})^{-1}$, взятой из последнего соотношения, и учитывая при этом (24), запишем легко устанавливаемую цепочку неравенств

$$\|(I + \Delta_{f_s})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\Delta_{f_s}\|} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon\|A\|}.$$

С учётом последнего неравенства, а также неравенств (23) и (24) из (26) последует

$$\begin{aligned} \|\delta r_r\| &\leq \|(I + \Delta_{f_s})^{-1}\|(\|\delta Ax\| + \|\Delta_{f_s}\|(\|\tilde{r}\| + \|\delta Ax\|)) \\ &\leq \frac{1}{1 - \varepsilon\|A\|}(\alpha_A\|A\|\|x\| + \varepsilon\|A\|(\|\tilde{r}\| + \alpha_A\|A\|\|x\|)). \end{aligned} \quad (27)$$

Наконец, приступим к оценке близости решений системы (1): точного \bar{x} и приближённо вычисленного x . Следуя первым двум соотношениям из (21) и затем равенству (25), получим

$$Ax - A\bar{x} = f + r - f = r = \tilde{r} - \delta r_r.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} x - \bar{x} &= A^{-1}(\tilde{r} - \delta r_r), \\ \|x - \bar{x}\| &\leq \|A^{-1}\|(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|). \end{aligned} \quad (28)$$

Соответственно из третьего соотношения в списке (21), согласно первому равенству в цепочке (24), будем иметь $A\tilde{x} = f + \tilde{r}$. Отсюда последует

$$\|\tilde{x}\| \geq \min_{z, \|z\|=1} \|A^{-1}z\|(\|f\| - \|\tilde{r}\|) = \frac{1}{\|A\|}(\|f\| - \|\tilde{r}\|).$$

Разделив обе части неравенства (28) на $\|\tilde{x}\|$, с учётом последнего неравенства будем иметь

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{\|\tilde{x}\|}(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|) \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|)}{(\|f\| - \|\tilde{r}\|)} = c(A) \frac{(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|)}{(\|f\| - \|\tilde{r}\|)}. \quad (29)$$

Таким образом, завершением проведённого доказательства справедливости последней цепочки отношений может служить

Теорема 2.1. Пусть $\{x^n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, – последовательность векторов, образованная некоторым итерационным процессом решения системы (1) и

$$\begin{aligned} \tilde{s}^n &= (A + \delta A^n)x^n, \quad \text{где } \|\delta A^n\| \leq \alpha_A^n\|A\|, \quad \alpha_A^n < \alpha_A, \\ \tilde{r}^n &= r^n + \delta r_r^n = (I + \Delta_{f_s}^n)(f - \tilde{s}^n), \quad \text{где } \Delta_{f_s}^n = \text{diag}\{\delta_{f_s,1}^n, \dots, \delta_{f_s,N}^n\}, \quad |\delta_{f_s,i}^n| < \varepsilon, \end{aligned}$$

и пусть для некоторого $\kappa > 0$ число \bar{n} такое, что

$$(A) \frac{(\|\tilde{r}^n\| + \|\delta r_r^n\|)}{(\|f\| - \|\tilde{r}^n\|)} \leq \kappa, \quad (30)$$

где

$$\|\delta r_r^n\| \leq \frac{1}{1 - \varepsilon\|A\|}(\alpha_A\|A\|\|x\| + \varepsilon\|A\|(\|\tilde{r}^n\| + \alpha_A\|A\|\|x\|)),$$

тогда справедлива оценка

$$\frac{\|x^n - \bar{x}\|}{\|\tilde{x}^n\|} \leq \kappa, \quad (31)$$

Таким образом, следуя доказанной теореме, при выполнении неравенства (30) мы можем остановить процесс итераций. При этом для вычисленного приближения x^n гарантированно будет выполнено неравенство (31).

В заключение, мы должны сказать, что при выводе оценок (18), (27) и (29) были использованы известные сведения, которые мы брали из [17, 18]

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Прежде чем приступить к проведению экспериментов выскажем некоторые их обоснования.

В полученных оценках используются два числа обусловленности $c(A)$, и $c(H_{n-1})$. Очевидно, оценкой числа обусловленности матрицы H_{n-1} может служить неравенство $c(H_{n-1}) \leq c(A)$. Нетрудно обнаружить, что равенства выполняются: $c(H_{n-1}(1)) = 1$ при $m = 1$, соответственно $c(H_{n-1}(N)) = c(A)$ при $m = N$. Естественно предположить, что с ростом m величина $c(H_{n-1}(m))$ будет возрастать и достигнет своего наибольшего значения при $m = N$. Встаёт вопрос: как быстро будет возрастать рассматриваемая величина, какое влияние при этом на этот рост будет оказывать вектор $x^{n-1}(r^{n-1})$ и может ли при этом очевидное неравенство $c(H_{n-1}(m)) \leq c(A)$ служить практически значимой оценкой числа обусловленности матрицы $H_{n-1}(m)$.

Для осуществления первоначального знакомства с поведением чисел обусловленности мы провели некоторые вычислительные эксперименты в вычислительной среде приложения Mathcad. Первый эксперимент состоял в следующем. Для СЛАУ (1) с матрицей Гилберта порядка $N = 7$ ($c(A) = 4.754 \cdot 10^8$) и правой частью f , компоненты которой рассчитывались по формуле $f_i = \sum_{k=i}^{N+i-1} 2^{-k+1}$, $i = 1, N$, рассматривался вопрос о поведении чисел обусловленности $c(H_0(m))$ при увеличении m — размерности подпространства Крылова. В качестве приближённого решения были рассмотрены два вектора:

$$1) x^0 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1]^*, \quad 2) x^0 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^*.$$

Результаты представлены в ниже следующей табл. 1 значений чисел обусловленности $c(H_0(m))$.

Таблица 1

Значения чисел обусловленности $c(H_0(m))$ для первого эксперимента

m	2	3	4	5	6
$c(H_0(m))$	6.113	78.171	$1.656 \cdot 10^3$	$7.625 \cdot 10^4$	$4.786 \cdot 10^{19}$
$c(H_0(m))$	6.247	78.026	$1.669 \cdot 10^3$	$2.369 \cdot 10^{10}$	$1.014 \cdot 10^{19}$

Из табл. 1 видно, что для первого x^0 с ростом размерности подпространства Крылова до $m = 5$ наблюдается устойчивый умеренный рост числа обусловленности $c(H_0)$. При $m = 6$ наблюдается так называемый срыв. Для второго вектора наблюдаем ту же тенденцию, однако срыв произошёл уже раньше при $m = 5$.

Обнаруженный срыв обусловлен следующими обстоятельствами. По условиям эксперимента матрица A системы (1) положительно определена. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ — упорядоченный по возрастанию её спектр и p_1, p_2, \dots, p_N — отвечающие указанным собственным значениям собственные векторы. Обратимся к подпространству Крылова, $K_{m_{n-1}}$. Приняв $n = 1$ и введя при этом обозначения $w^1 = r^0, w^2 = Aw^1, \dots, w^m = Aw^{m-1}$, мы обнаружим, что представленная последовательность Крылова совпадает с последовательностью степенного метода, которая сходится по направлению к p_N , соответственно отношение $\frac{(w^m)^* Aw^m}{(w^m)^* w^m}$ — к λ_N . В нашем эксперименте для первого начального приближения x^0 векторы w^5 и w^6 (для второго начального приближения x^0 векторы w^4 и w^5) получились почти коллинеарными с вектором p_N и соответственно почти коллинеарными друг к другу. В условиях машинных вычислений

невозможно вычислить векторы

$$u^6 = w^6 - \frac{(w^5)^* w^6}{(w^5)^* w^5} w^5, \quad u^5 = w^5 - \frac{(w^4)^* w^5}{(w^4)^* w^4} w^4$$

с высокой степенью точности, не прибегая при этом к специализированным алгоритмам и программам, что и показали результаты рассматриваемого эксперимента. Простейший выход из сложившейся ситуации — ограничиться числом $m = 5$ ($m = 4$).

Ту же картину мы наблюдаем в следующей строке до $m = 4$, причём имеются незначительные отличия рассматриваемых последовательностей, полученных для двух разных начальных приближений.

Отметим, что показатель $r = \lambda_{N-1}/\lambda_N$, характеризующий скорость сходимости, в нашем примере равен 0.164. В том случае, когда нет априорной информации о спектре матрицы A , во избежание возникновения рассмотренной ситуации мы рекомендуем воспользоваться методом построения двумерного ортонормированного базиса с гарантированной точностью, изложенным в [19].

Второй эксперимент. Для СЛАУ (1) с матрицей Гилберта порядка $N = 5$, $c(A) = 4.766 \cdot 10^5$ и правой частью $f = [5 \quad -2 \quad 9 \quad -8 \quad 3]^*$ в качестве приближённого решения были рассмотрены три вектора:

$$1) x^0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^*, \quad 2) x^0 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1]^*, \quad 3) x^0 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^*.$$

Для каждого из этих векторов вычислялась последовательность приближений $\{x^n\}$, $n = \overline{1, 5}$. Размерность пространства Крылова m была принята равной четырём. При этом рассматривался вопрос о поведении чисел обусловленности $c(H_{n-1})$. Результаты экспериментов представлены в ниже следующей табл. 2 значений чисел обусловленности $c(H_{n-1})$.

Таблица 2

Значения чисел обусловленности $c(H_{n-1})$ для второго эксперимента

n	1	2	3	4	5
$c(H_{n-1})$	$5.13 \cdot 10^3$	$4.762 \cdot 10^5$	$5.13 \cdot 10^3$	$4.698 \cdot 10^5$	$5.13 \cdot 10^3$
$c(H_{n-1})$	$5.129 \cdot 10^3$	$4.763 \cdot 10^5$	$5.129 \cdot 10^3$	$4.756 \cdot 10^5$	$5.129 \cdot 10^3$
$c(H_{n-1})$	$5.131 \cdot 10^3$	$4.764 \cdot 10^5$	$5.131 \cdot 10^3$	$4.744 \cdot 10^5$	$5.131 \cdot 10^3$

Из сведений, представленных в табл. 2 видно, что при решении одной и той же задачи различными начальными приближениями наблюдается незначительное различие последовательностей чисел обусловленности $c(H_{n-1})$. Однако в каждой последовательности наблюдается существенный разброс значений элементов: $(5.13 \cdot 10^3, 4.762 \cdot 10^5)$, $(5.129 \cdot 10^3, 4.763 \cdot 10^5)$, $(5.13 \cdot 10^3, 4.764 \cdot 10^5)$. Ещё раз обращаясь к последней таблице, мы отметим, что представленные в них значения величин $c(H_2)$ и $c(H_4)$ очень близки к $c(A) = 4.766 \cdot 10^5$.

Замечание 3.1. Организованные вычислительные процессы во всех трёх случаях сошлись уже на четвёртой итерации, при этом величины элементов пар $(\frac{\|x^4 - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}, c(A) \frac{\|\hat{r}^4\|}{\|f\|})$ приняли значения: $(3.987 \cdot 10^{-4}, 1.212 \cdot 10^{-3})$, $(9.663 \cdot 10^{-7}, 0.015)$, $(4.297 \cdot 10^{-4}, 0.019)$ в первом, во втором и третьем случаях соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Следует сказать, что если $m = 1$, то обычно итерационный процесс, описываемый формулами (2)–(5) сходится очень медленно [20], а при $m_0 = N$ потребуется всего лишь один шаг. Действительно,

$$x^1 = x^0 + V_0 H_0^{-1} V_0^* r^0 = x^0 + V_0 V_0^* A^{-1} V_0 V_0^* r^0 = x^0 + A^{-1}(f - Ax^0) = x^0 + A^{-1}f - x^0 = \bar{x}.$$

Отсюда мы можем заключить, что с ростом размерности подпространства Крылова будет повышаться скорость сходимости итерационного процесса.

Препятствием к наращиванию размерности подпространства Крылова является ограниченность оперативной памяти, требующейся для хранения векторов $v_1^{n-1}, v_2^{n-1}, \dots, v_{m_{n-1}}^{n-1}$ (см. [7]).

Благодаря проведённым экспериментам обнаружено второе препятствие для наращивания m_{n-1} — это так называемый срыв построения ортонормированного базиса. Этот срыв может произойти уже при $m_0 = 2$. Действительно, если вектор r^0 почти коллинеарен вектору p_N , где p_N — собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению $\lambda_N(A)$, то вектор $w^2 = Aw^1$ ($w^1 = r^0$) также будет почти коллинеарным вектору w^1 . В этом случае может произойти упомянутый выше срыв. Следует сказать, что поскольку вектор r^0 (x^0) выбирается случайным образом, вероятность указанного события (срыва) ничтожно мала [21]. Тем не менее, обнаруженное явление («сплющивание» базиса подпространства $K_{m_{n-1}} = \text{span}(r^{n-1}|Ar^{n-1}|\dots|A^{m_{n-1}-1}r^{n-1})$ при увеличении m_{n-1}) также является фактором, сдерживающим наращивание размерности подпространства Крылова.

Практическое применение полученной оценки гарантированной точности очередного вычисленного приближения для осуществления останова итераций станет возможным после того, как будут установлены связи величин, моделирующих погрешности округлений с техническими характеристиками используемых ЭВМ: относительной и абсолютной погрешностями выполнения арифметических операций, а также размерами ячеек, используемых для хранения промежуточных результатов вычислений. Установление указанных связей — это следующий этап нашей работы, в котором, частности, будет разрешён вопрос о том является ли полученная оценка завышенной. Однако уже сейчас можно сказать следующее. На заключительной итерации с целью снижения влияния погрешностей на точность полученного x^n при вычислении векторов s^{n-1} , \widehat{w}^{n-1} и z^{n-1} необходимо обращаться к режиму вычислений с повышенной точностью. Причиной этому согласно леммам 1.1, 1.3 и 1.4 является усиление ошибок, допущенных при реализации формул $s^{n-1} = Ax^{n-1}$, $\widehat{w}^{n-1} = V_{n-1}^* r^{n-1}$, $z^{n-1} = H_{n-1}^{-1} \widehat{w}^{n-1}$ (см. (6)), числами обусловленности $c(A)$ и $c(H_{n-1})$. С той же целью при определении вектора r^n для проверки критерия останова итераций $c(A) \frac{(\|\tilde{r}\| + \|\delta r_r\|)}{(\|f\| - \|\tilde{r}\|)} \leq \kappa$ по аналогичной причине при вычислении вектора s^n следует обращаться к режиму вычислений с повышенной точностью.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследования выполнены в рамках государственного задания Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (проект FWNM-2025-0001). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.
2. Greenbaum A. Iterative Metuloids of Solving Linear Systems // *Frontiers in Applied Mathematics*, 1997; DOI:10.1137/1.9781611970937.
3. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2002.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.

5. Saad J. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Boston: EPS, 1996.
6. Olshanskii M.A., Tyrtshnikov E.E. Iterative methods for linear systems: theory and applications, SIAM (Philadelphia, PA, United States), 2014.
7. Ильин В.П. Итерационные предобусловленные методы в подпространствах Крылова: тенденции XXI века // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2021. Т. 61, № 11. С. 1786–1813; DOI: 10.31857/S0044466921110090
8. Ильин В.П. О проекционных методах в подпространствах Крылова // Записки научных семинаров ПОМИ. 2018. Т. 472. С. 103–119; //ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/zns/v472/p103.pdf
9. Киреев И.В. Ортогональные проекторы и системы линейных алгебраических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики. 2020. Т. 23, № 3. С. 315–324.
10. Arioli M., Fassino C. Truncation error analysis of algorithms based on Krylov subspace methods // BIT. 1996. V. 36, N 2. P. 189–206.
11. Arioli M., Fassino C. Generalized Golub-Kahan Bidiagonalization and Stopping Criteria // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2013. V. 34, N 2. P. 57–592.
12. Greenbaum A. Estimating the Attainable Accuracy of Recursively Computed Residual Methods // SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1997.
13. Capraux J.-F., Godunov S.K., Kuznetsov S.V. Condition number of the Krylov bases and subspaces // Linear Algebra Appl. 1996. V. 248, N 1–3. P. 136–160.
14. Kuznetsov S.V. Perturbation of the Krylov bases and associated Hessenberg Forms // Linear Algebra Appl. 1997. V. 265, N 1–3. P. 1–28.
15. Мальшев А.Н., Sadkane M. Теория возмущений по первому приближению для симметричного алгоритма Ланцоша // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2005. Т. 45, № 3. С. 391–399.
16. Ильин В.П., Бабенко В.Н. О влиянии возмущений на точность вычисления поправки в подпространстве Крылова // Сиб. журн. индустр. математики. 2025. Т. 28, № 1. С. 5–14; DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.101
17. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.
18. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1988.
19. Бабенко В.Н., Ивановский О.Я. Аспекты машинного решения систем линейных уравнений. Краснодар: Экоинвест, 2020.
20. Баладин М.Ю., Шурина Э.П. Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000.
21. Икрамов Х.Д. Несимметричная проблема собственных значений. – Москва: Наука, 1991.

UDC 519.61

ON THE INFLUENCE OF ROUND-OFF ERRORS ON THE ACCURACY OF CALCULATING THE CORRECTION IN THE KRYLOV SUBSPACE© 2026 V. P. Ilyin^{1a}, V. N. Babenko^{2b}¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
Akad. Lavrentyev pr., 6, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Kuban State Technological University,
Moskovskaya st., 2, Krasnodar 350072, Russia*E-mails: ^ailin@sscc.ru, ^brnibvd@mail.ru

Received 08.12.2025, revised 13.02.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. Roundoff errors inevitably arise when performing computer calculations. This paper examines the impact of these errors on the accuracy of calculating the next approximation in a projection method for solving linear equations using projection onto Krylov subspaces. An estimate of the accuracy of the calculated approximation is obtained, expressed in terms of perturbations of the initial data. A termination criterion is proposed that guarantees the chosen acceptable accuracy of the desired solution.

Keywords: orthoprojector, Krylov subspace, projection method, large-dimensional SLAE, rounding errors.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.103

REFERENCES

1. S. Pissanetsky, *Sparse Matrix Technology*. N. Y.: Academic Press, 1984.
2. Greenbaum A. Iterative Metuloids of Solving Linear Systems. *Frontiers Appl. Math.*, 1997; DOI:10.1137/1.9781611970937.
3. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. *Vychislitel'nye metody linejnoy algebry* [Computational methods of linear Algebra]. St. Petersburg: Lan', 2002 (in Russian).
4. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations* Baltimore: J. Hopkins Univ. Publ., 1996
5. Saad J. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Boston: EPS, 1996.
6. Olshanskii M.A., Tyrtyshnikov E.E. *Iterative methods for linear systems: theory and applications*, SIAM (Philadelphia, PA, United States), 2014.
7. Il'in V.P. Iterative preconditioned methods in Krylov spaces: Trends of the 21st century. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, Vol. 61, No. 1), pp. 1750–1775; <https://doi.org/10.1134/S0965542521110099>
8. Il'in V.P. O proekcionnykh metodah v podprostranstvah Krylova [On projection methods in Krylov subspaces]. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* [Notes of Scientific Seminars in Moscow], 2018, Vol. 472, pp. 103–119 (in Russian); [//ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/zns/v472/p103.pdf](http://ftp.pdmi.ras.ru/pub/publicat/zns/v472/p103.pdf)
9. Kireev I.V. Orthogonal projectors and systems of linear algebraic equations,. *Numer. Anal. Appl.*, 2020, Vol. 13, No. 3, pp. 262–270.
10. Arioli M., Fassino C. Troundoff error analysis of algorithms based on Krylov subspace methods. *BIT*, 1996, Vol. 36, No. 2, pp. 189–206.
11. Arioli M., Fassino C. Generalized Golub-Kahan Bidiagonalization and Stopping Criteria. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2013, Vol. 34, No. 2, pp. 57–592.

12. Greenbaum A. Estimating the Attainable Accuracy of Recursively Computed Residual Methods. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 1997.
13. Capraux J.-F., Godunov S.K., Kuznetsov S.V. Condition number of the Krylov bases and subspaces. *Linear Algebra Appl.*, 1996, Vol. 248, No. 1–3, pp. 136–160.
14. Kuznetsov S.V. Perturbation of the Krylov bases and associated Hessenberg Forms. *Linear Algebra Appl.*, 1997, Vol. 265, No. 1–3, pp. 1–28.
15. Malyshev A.N., Sadkane M. Teoriya vozmushchenij po pervomu priblizheniyu dlya simmetrichnogo algoritma Lancosha [First approximation perturbation theory for the symmetric Lanczos algorithm]. *Zhurn. Vychisl. Mat. Mat. Fiziki*[J. Calcul. Math. Math. Phys.], 2005, Vol. 45, No 3, pp. 391–399 (in Russian).
16. Ilyin V.P., Babenko V.N. On the Influence of Disturbances on the Accuracy of Computing Corrections in the Krylov Subspace. *JAIM*, 2025, Vol. 19, No. 1, pp. 51–58; DOI: 10.1134/S1990478925010053
17. Godunov S.K. Reshenie sistem linejnyh uravnenij [Solving systems of linear equations]. Novosibirsk: Nauka, 1980 (in Russian).
18. Godunov S.K., Antonov A.G., Kirilyuk O.P., Kostin V.I. Garantirovannaya tochnost' resheniya sistem linejnyh uravnenij v evklidovyh prostranstvah [Guaranteed accuracy of solving systems of linear equations in Euclidean spaces]. Novosibirsk: Nauka, 1988 (in Russian).
19. Babenko V.N., Ivanovskij O.Ya. Aspekty mashinnogo resheniya sistem linejnyh uravnenij [Aspects of solving systems of linear equations by machine]. Krasnodar: Ehkoinvest, 2020 (in Russian).
20. Balandin M.Yu., Shurina E.P. Metody resheniya SLAU bol'shoj razmernosti [Methods for solving large-dimensional SLAUs]. Novosibirsk: NSTU Pub., 2000 (in Russian).
21. Ikramov H.D. Nesimmetrichnaya problema sobstvennyh znachenij [The Asymmetric Eigenvalue Problem]. Moscow: Nauka, 1991 (in Russian).

УДК 51-76

СРАВНЕНИЕ ДВУХ СТАТИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ РЕКОНСТРУКЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКЕ ПАТОЛОГИЧЕСКИХ ОЧАГОВ МЕТОДОМ ГАММА-ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

© 2026 А. В. Нестерова^{1а}, Н. В. Денисова^{2б}¹*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*²*Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН,
ул. Институтская, 4/1, г. Новосибирск 630090, Россия*E-mails: ^аa.nesterova@alumni.nsu.ru, ^бnvdenisova2011@mail.ruПоступила в редакцию 11.02.2026 г.; после доработки 22.04.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Проведён сравнительный анализ двух статистических подходов к реконструкции изображений при обследовании пациентов методом однофотонной эмиссионной компьютерной томографии (ОФЭКТ). Выполнено сравнение алгоритма Ordered Subset Expectation Maximization (OSEM), используемого в большинстве современных ОФЭКТ-систем, и алгоритма нового поколения Maximum a Posteriori с априорной информацией на основе энтропийного функционала (MAP-Ent) при количественной оценке накопления радиофармпрепарата в патологических очагах. Исследования выполнены методом имитационного компьютерного моделирования с использованием цифрового двойника стандартизованного вещественного фантома NEMA IEC, включающего шесть сфер различного размера, имитирующих очаги поражения. Точность реконструкции оценивалась с использованием максимального коэффициента восстановления RC_{\max} , определяемого как отношение реконструированной накопленной активности в максимуме к её истинному значению. Показано, что алгоритм OSEM характеризуется неустойчивостью итерационного процесса, появлением шума и краевых артефактов. Применение постфильтрации стабилизирует решение и обеспечивает сходимость, однако приводит к занижению оценки активности в очагах малого размера и возможной потере малых очагов. Алгоритм MAP-Ent обеспечивает устойчивую сходимость и высокую количественную точность без необходимости постфильтрации, сохраняя контрастность малых очагов. Вместе с тем точность реконструкции существенно зависит от выбора глобального параметра регуляризации, что ограничивает оптимальную реконструкцию очагов различного размера и указывает на необходимость применения локальной регуляризации.

Ключевые слова: однофотонная эмиссионная компьютерная томография, OSEM, MAP-Ent, регуляризация.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.104

ВВЕДЕНИЕ

Однофотонная эмиссионная компьютерная томография (ОФЭКТ) является диагностическим методом ядерной медицины. При обследовании пациенту вводят радионуклидный фармацевтический препарат (РФП), который обычно состоит из двух составляющих: несущей (таргетной) молекулы и радионуклида. Несущая молекула подбирается таким образом, чтобы РФП накапливался в патологических очагах. При этом радионуклид служит «меткой», испускающей гамма-кванты. Гамма-излучение регистрируется из разных положений вращающейся

вокруг пациента гамма-камеры. На основе измеренных данных осуществляется решение обратной задачи реконструкции пространственного распределения РФП в организме — источника испускания гамма-квантов.

Полученные ОФЭКТ-изображения существенно отличаются от изображений магнитно-резонансной томографии (МРТ) и рентгеновской компьютерной томографии (КТ), отражающих морфологические свойства различных анатомических структур пациента. ОФЭКТ визуализирует распределение РФП, которое соответствует нормальным или патологическим метаболическим процессам, протекающим в организме человека на клеточном и молекулярном уровнях. ОФЭКТ имеет относительно низкое пространственное разрешение по сравнению с МРТ и КТ изображениями, однако основным преимуществом этого метода является высокая контрастность изображений патологических очагов, что делает метод незаменимым для выявления онкологических заболеваний.

Диагностическая точность метода ОФЭКТ существенно зависит от подхода к решению задачи реконструкции пространственного распределения источников излучения по измеренным данным. Радиационный распад радионуклида описывается пуассоновским процессом, соответственно, зарегистрированные данные подчиняются пуассоновскому распределению. С математической точки зрения, проблема реконструкции ОФЭКТ-изображений относится к классу обратных и некорректных задач с пуассоновскими данными и должна решаться с применением статистической регуляризации [1, 2].

Первым статистическим подходом к реконструкции ОФЭКТ-изображений стал вариационный метод максимизации функции правдоподобия для пуассоновского распределения, реализованный в алгоритме Maximum Likelihood Expectation Maximization (MLEM) [3]. В настоящее время большинство функционирующих в мире ОФЭКТ-установок оснащены его ускоренной версией — итерационным алгоритмом реконструкции Ordered Subset Expectation Maximization (OSEM) [4]. Однако подход на основе максимизации функции правдоподобия не является регуляризованным, поэтому поведение алгоритма OSEM характеризуется неустойчивостью: с ростом числа итераций решение сильно «запумляется» и страдает от появления краевых артефактов на высококонтрастных границах очагов поражений [5]. Чтобы исключить эти неблагоприятные эффекты, применяют итерационную регуляризацию — остановку решения после определённого числа итераций, когда ожидается достижение оптимального решения. Однако критерий достижения оптимального решения не определён, поэтому номер останова итерационного процесса выбирают на основе рекомендаций производителя оборудования или практического опыта. Это приводит к тому, что в различных медицинских центрах используют изображения, полученные при разном числе итераций, что значительно снижает воспроизводимость и возможность анализа многоцентровых исследований. Кроме того, прерывание итерационного процесса не снимает полностью влияние «шума» и краевых артефактов. Дополнительным регуляризирующим фактором является постфильтрация реконструированного решения. В результате применения постфильтрации осуществляется сглаживание решения и уменьшение влияния «шума» и краевых артефактов, однако при этом значительно занижается количественное решение в очагах поражений малого размера [6].

Для уменьшения ошибок, вызванных влиянием шума, необходимо использовать регуляризованные алгоритмы. В литературе высказывалось мнение, что краевые артефакты можно смягчить с помощью применения регуляризованных алгоритмов реконструкции на основе байесовского подхода Maximum a Posteriori (MAP) с априорной информацией, способствующей сглаживанию решения [7]. В данной работе выполнены исследования алгоритма MAP с заданием априорной информации на основе функционала энтропии (MAP-Ent). Проведён сравнительный анализ алгоритмов OSEM и MAP-Ent в решении задачи получения точной количественной оценки накопленной активности в патологических очагах.

Решение проблемы получения точных количественных оценок накопленной активности в очагах поражений является чрезвычайно актуальной задачей на современном уровне разви-

тия ядерной медицины, поскольку эти оценки определяют персонализированную поглощённую дозу и эффективность радионуклидной терапии. Используемые на клинических ОФЭКТ системах алгоритмы OSEM не позволяют получать точные решения, поэтому в руководстве Европейской Ассоциации по Ядерной Медицине (EANM) [8, 9] рекомендуется использовать эмпирические поправки к полученному решению. Эти поправки называются «коэффициент восстановления (Recovery Coefficient, RC)» и определяются отношением реконструированного значения активности к истинной активности РФП в очагах. В клинической практике значения RC получают с помощью экспериментальных измерений с применением стандартизированных вещественных фантомов NEMA IEC (National Electrical Manufacturers Association International Electrotechnical Commission), включающих сферические вставки, имитирующие очаги разного диаметра [10, 11, 12]. Затем полученные величины RC используются в качестве поправки к реконструированным значениям активности в очагах. Однако проведение широких клинических исследований с подобными фантомами ограничено из-за лучевой нагрузки на исследователей и высокой стоимости радиофармпрепаратов. Современной альтернативой является математическое имитационное моделирование и численные эксперименты с использованием цифровых двойников фантомов и сканеров. В данной работе этот метод применяется для сравнительной оценки двух статистических алгоритмов OSEM и MAP-Ent в решении проблемы получения точной количественной реконструкции активности в очагах поражений.

Настоящая работа является логическим продолжением предыдущего исследования [6], в котором была продемонстрирована ограниченность стандартного алгоритма OSEM в достижении точной количественной оценки патологических очагов. Основным выводом работы [6] заключался в необходимости разработки и анализа новых методов реконструкции на основе байесовского подхода MAP с применением статистической регуляризации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В работе проведено компьютерное имитационное моделирование клинической процедуры ОФЭКТ/КТ исследования вещественного стандартизированного фантома NEMA IEC для оценки точности реконструированных изображений патологических очагов и определения поправочных коэффициентов (Recovery Coefficient, RC). Целью работы является сравнительный анализ двух алгоритмов: OSEM и MAP-Ent – в точности количественной оценки накопленной активности в очагах поражений. Моделирование проводилось в приближении к реальным клиническим условиям: учитывались параметры сканирования, физические процессы регистрации гамма-квантов и влияние алгоритмов реконструкции на количественные характеристики изображений. В качестве моделируемого радионуклида использовался технеций-99m (^{99m}Tc), наиболее широко применяемый в клинической практике изотоп с энергией излучения 140 кэВ.

1.1. Физико-математическая модель

Физические основы модели.

— Радиоактивный распад описывается законом:

$$n(t) = n(0) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $n(t) = \{n_j(t) : j = 1, \dots, J\}$ — распределение концентрации РФП в трёхмерном объекте в момент времени t , J — общее число вокселей, на которое разбит объект; $n(0)$ — начальное распределение РФП; τ — среднее время жизни радиоактивного изотопа. Для ^{99m}Tc среднее время жизни составляет около 6 часов, тогда как продолжительность стандартного сбора проекционных данных методом ОФЭКТ Δt обычно составляет около 20–30 минут.

— Поскольку испускание гамма-квантов носит случайный характер и концентрация РФП низкая, число испущенных гамма-квантов во всех направлениях в единицу времени описывается случайным полем $f = \{f_j \mid j = 1, \dots, J\}$. При условии $\Delta t \ll \tau$ среднее значение гамма-квантов, испускаемых из единичного объёма, считается постоянным за время наблюдения и пропорциональным локальной активности РФП: $\bar{f} \approx n(0)$.

— При прохождении в средах различной плотности гамма-квант может пройти до детектора без взаимодействия либо быть рассеянным или поглощённым. Основными видами взаимодействия являются комптоновское рассеяние и фотоэффект.

— Для реконструкции 3D-распределения активности по проекционным данным необходимо знать направление прилетевших на детектор гамма-квантов. В модели ОФЭКТ для этого используется коллиматор. Теоретический идеальный коллиматор обеспечивает точное изображение точечного источника, однако реальные коллиматоры формируют размытое изображение: размер получаемого пятна возрастает с удалением источника от поверхности коллиматора. Этот эффект описывается функцией рассеяния точечного источника (ФРТ).

При численном моделировании дискретное представление исследуемого объекта задаётся на трёхмерной сетке вокселей. Поток гамма-квантов, проходящий через ткани пациента и фиксируемый детекторами, формирует двумерные проекционные данные для каждого угла обзора $g = \{g_i \mid i = 1, \dots, I\}$, где I — общее число пикселей (пиксели детектора \times ракурсы съёма).

Связь между распределением активности РФП и проекционными данными задаётся уравнением:

$$\sum_j a_{ij} f_j = g_i \quad \text{или} \quad Af = g,$$

где a_{ij} — это случайный оператор, который описывает, какая часть гамма-квантов, испускаемых из j -го вокселя, обнаруживается i -м пикселем детектора. Здесь f_j — это ненаблюдаемые пуассоновские случайные величины с неизвестными средними значениями \bar{f}_j , а g_i — наблюдаемые данные, пуассоновские случайные величины с неизвестными средними значениями \bar{g}_i . Эти средние значения связаны системой линейных уравнений

$$\sum_j \bar{a}_{ij} \bar{f}_j = \bar{g}_i,$$

где \bar{a}_{ij} — это вероятность того, что гамма-квант, испущенный j -м вокселем, будет зарегистрирован i -м пикселем детектора. Вероятности \bar{a}_{ij} образуют системную матрицу, которая считается известной и учитывает эффекты ослабления излучения P_{jk}^{att} и прохождения через систему коллиматор-детектор $P_{ki}^{\text{col-det}}$:

$$\bar{a}_{ij} = P_{jk}^{\text{att}} \cdot P_{ki}^{\text{col-det}}.$$

Таким образом, задача ОФЭКТ-реконструкции состоит в восстановлении неизвестных интенсивностей \bar{f}_j по измеренным проекционным данным \bar{g}_i и известной матрице \bar{a}_{ij} . Данная задача является обратной некорректной задачей с пуассоновскими данными.

1.2. Методы моделирования

Моделирование выполнялось с использованием программного комплекса «Виртуальная платформа для имитационных испытаний метода ОФЭКТ/КТ» [13, 14], включающего последовательные этапы: задание распределения активности РФП в математическом фантоме, генерацию проекционных данных, реконструкцию изображений и оценку качества реконструкции.

Распределение активности РФП моделировалось с использованием цифрового двойника фантома NEMA IES. Фотография реального фантома приведена на рис. 1(а). Он содержит шесть сфер различного диаметра (37, 28, 22, 17, 13, 10 мм), имитирующих патологические очаги с повышенным накоплением РФП, а также цилиндрическую лёгочную вставку диаметром 51 мм, расположенную в центре. Для удобства анализа изображений все центры сфер расположены в одной плоскости.

При клинических измерениях фантом заполнялся водным раствором РФП с разной концентрацией в сферах и основной ёмкости. Цифровой двойник фантома задавался в декартовой системе координат $\{x, y, z\}$ в области, разделённой на $128 \times 128 \times 92$ воксела. Трёхмерная модель распределения активности ^{99m}Tc по вокселям фантома, называемая картой активности, представлена на рис. 1(b). Поперечное сечение этой карты, проходящее через центр всех сфер, показано на рис. 1(c).

Отношение активности сфера/фон (контраст) было установлено равным 10:1. В клинических исследованиях это отношение может быть варьируемым. В нашей предыдущей работе [6] показано, что значения коэффициента восстановления РС изменяются лишь незначительно при отношениях 5:1, 10:1, 20:1, 30:1. Случаи низкой накопленной активности в очагах, например, при отношении 2:1, требуют отдельного исследования.

Активность задавалась в относительных единицах: фон — 10, лёгочная вставка — 0, очаги — 100. По смоделированным проекциям рассчитывалось общее число зарегистрированных квантов. Затем все значения масштабировались с использованием коэффициента, связывающего общее число насчитанных квантов в модельных исследованиях с измеренными клиническими данными (общее число импульсов). Это позволяло переводить активности \bar{f}_j , заданные в относительных единицах, в единицы «импульс/воксель», используемые при реконструкции. В данной работе изображения представлены именно в этих единицах.

Кроме карты активности, для цифрового фантома NEMA IEC была создана карта ослабления, описывающая коэффициенты ослабления воды и воздуха для гамма-квантов с энергией 140 кэВ, испускаемых радионуклидом ^{99m}Tc .

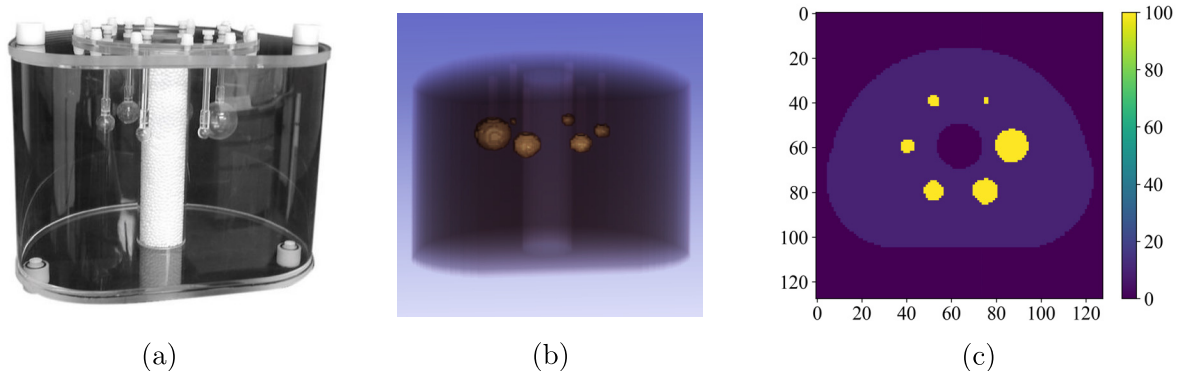


Рис. 1. Сравнение физического фантома NEMA IEC и его цифровой модели:
(а) фотография физического фантома; (б) трёхмерное изображение цифрового двойника фантома; (с) его поперечное сечение, проходящее через центр всех сфер

Генерация проекционных данных выполнялась с учётом основных физических эффектов, включая ослабление гамма-излучения, а также влияние пространственного разрешения коллиматора. Расчёты проводились для 120 позиций гамма-камеры для круговой орбиты в 360° с шагом 3° и общим числом регистрируемых импульсов ~ 5 млн.

В рамках программного комплекса «Виртуальная платформа для имитационных испытаний метода ОФЭКТ/КТ» расчёт проекционных данных может осуществляться двумя способами: методом Монте-Карло и расчётом дискретизированных уравнений переноса гамма-излучения. Второй подход даёт «точные проекции», в которые затем добавляется «пуассоновский шум» с помощью метода исключения Неймана. Оба подхода были верифицированы в предыдущих исследованиях путём сравнения с клиническими данными и тестовыми измерениями [15, 16].

В данной работе использовался второй подход, поскольку большое число углов сбора данных (120), высокая статистика (~ 5 млн импульсов) и большое число различных вариантов

расчётов потребовали бы огромных компьютерных ресурсов и времени при использовании метода Монте-Карло.

1.3. Алгоритмы реконструкции

Исследовались два статистических алгоритма реконструкции изображений OSEM и MAP-Ent. Математической основой для этих алгоритмов является предположение о пуассоновском распределении проекционных данных. В рамках метода максимального правдоподобия (MLEM) решение находится путём максимизации функции правдоподобия, которая для пуассоновской модели имеет вид:

$$P(g|\bar{f}) = \prod_i \exp\left(-\sum_j \bar{a}_{ij}\bar{f}_j\right) \frac{\left(\sum_j \bar{a}_{ij}\bar{f}_j\right)^{g_i}}{g_i!}.$$

На практике максимизируют её логарифм, что приводит к итерационной формуле алгоритма MLEM:

$$\bar{f}_j^{(n+1)} = \frac{\bar{f}_j^{(n)}}{\sum_i \bar{a}_{ij}} \sum_i \frac{g_i \bar{a}_{ij}}{\sum_k \bar{a}_{ik} \bar{f}_k^{(n)}}.$$

Алгоритм OSEM является стандартизированным алгоритмом реконструкции ОФЭКТ и ПЭТ изображений и представляет собой модификацию метода MLEM, ускоряющую сходимость за счёт обновления решения по подмножествам проекционных данных (subsets) S_b :

$$\bar{f}_j^{(n+1)} = \frac{\bar{f}_j^{(n)}}{\sum_{i \in S_b} \bar{a}_{ij}} \sum_{i \in S_b} \frac{g_i \bar{a}_{ij}}{\sum_k \bar{a}_{ik} \bar{f}_k^{(n)}}.$$

Для характеристики вычислительной работы алгоритма OSEM и сравнения различных протоколов реконструкции руководство EANM [8] рекомендует использовать универсальный параметр: «число обновлений» (number of updates), определяемый как произведение количества подмножеств на количество итераций. В данной работе реконструкция проводилась с 10 подмножествами, а число итераций для алгоритма OSEM варьировалось в пределах от 1 до 4-х. Соответственно, число обновлений составляло от 10 до 40.

Байесовский подход (MAP) состоит в максимизации апостериорной вероятности $P(\bar{f}|g)$, которая, согласно теореме Байеса, пропорциональна произведению функции правдоподобия и априорной вероятности:

$$P(\bar{f}|g) \sim P(g|\bar{f}) \cdot P(\bar{f}).$$

Максимизация логарифма апостериорной вероятности приводит к уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{f}_j} [\ln P(g|\bar{f}) + \ln P(\bar{f})] = 0.$$

Развитие байесовского подхода на основе принципа энтропии для решения обратных и некорректных задач со стохастическими данными было выполнено в работах [17, 18, 19]. В работе [19] функционал энтропии, который используется для задания плотности априорной вероятности, был получен в логарифмическом виде:

$$\ln P(\bar{f}) = \ln P(m) = -\beta \sum_j \left(\bar{f}_j \ln \frac{\bar{f}_j}{m_j} - \bar{f}_j + m_j \right),$$

где коэффициент β является параметром регуляризации, m_j описывает априорную информацию до проведения измерений. Разработка и применение этого подхода для реконструкции

ОФЭКТ изображений представлены в работе [20]. Подстановка данного априорного распределения и функции правдоподобия для пуассоновского распределения $P(g|\bar{f})$ в уравнение максимизации и его решение приводит к выводу итерационной формулы MAP-Ent алгоритма. В качестве априорной информации m на каждом шаге использовалось решение предыдущей итерации $\bar{f}^{(n-1)}$:

$$\bar{f}_j^{(n+1)} = \bar{f}_j^{(n)} \exp \left[\gamma \sum_i \left(g_i \frac{\bar{a}_{ij}}{\sum_k \bar{a}_{ik} \bar{f}_k^{(n)}} - \bar{a}_{ij} \right) \right],$$

где параметр $\gamma = \frac{1}{\beta} > 0$ контролирует соотношение между вкладом априорной вероятности (функционал энтропии) и измеренными пуассоновскими данными (функционал правдоподобия).

1.4. Поправочный коэффициент к количественной оценке реконструкции активности в очагах поражений

Для количественной оценки ОФЭКТ изображений очагов рассчитывался коэффициент восстановления (Recovery Coefficient, RC):

$$RC_{\max} = \frac{\max_{j \in \text{ROI}} \bar{f}_j^{(n)}}{\max_{j \in \text{ROI}} \bar{f}_j},$$

где $\max_{j \in \text{ROI}} \bar{f}_j^{(n)}$ — максимальное значение активности в реконструированном очаге, а $\max_{j \in \text{ROI}} \bar{f}_j$ — истинное значение активности в очаге. В качестве ROI использовались области, соответствующие очагам в цифровом фантоме. Каждая ROI определялась как множество вокселей, принадлежащих соответствующей сфере с заданным радиусом и центром. Для реконструированных изображений использовались те же ROI, что и для истинного распределения активности.

Значения RC_{\max} , близкие к 1, соответствуют точному восстановлению активности в максимуме. RC_{\max} меньше 1 означает недооценку, а RC_{\max} больше 1 — переоценку активности. Следует заметить, что оценка качества реконструкции по одному вокселю (с максимальной интенсивностью) вызывает немало вопросов, однако она используется в клинических исследованиях, поскольку для расчёта среднего значения по очагу RC_{mean} требуется определить контур очага, что существенно усложняет оценку и может приводить к ошибкам.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Количественный анализ алгоритма OSEM

Вычислительные эксперименты проводились с применением алгоритма реконструкции OSEM как без постфильтрации, так и с постфильтрацией фильтром Баттерворта с параметрами, используемыми в клинической практике. На рис. 2 представлены соответствующие реконструированные поперечные сечения, проходящие через центры сфер, полученные с 1-ой по 4-ю итерацию. Ниже представлены профили активности для сфер 13 и 10 мм (верхний ряд), 17 и 37 мм (средний ряд) и 22 и 28 мм (нижний ряд). Результаты без постфильтрации характеризуются выраженным шумовым искажением и краевыми артефактами. Это связано с отсутствием регуляризации в алгоритме OSEM, что при увеличении числа итераций усиливает шумовую составляющую [6]. Краевые артефакты проявляются в виде ложных пиков активности.

Применение постфильтрации стабилизирует решение, однако контрастность изображений малых очагов (13, 17 мм) значительно снижается, что может приводить к неопределённости в диагностике либо полной потере этих очагов на изображениях.

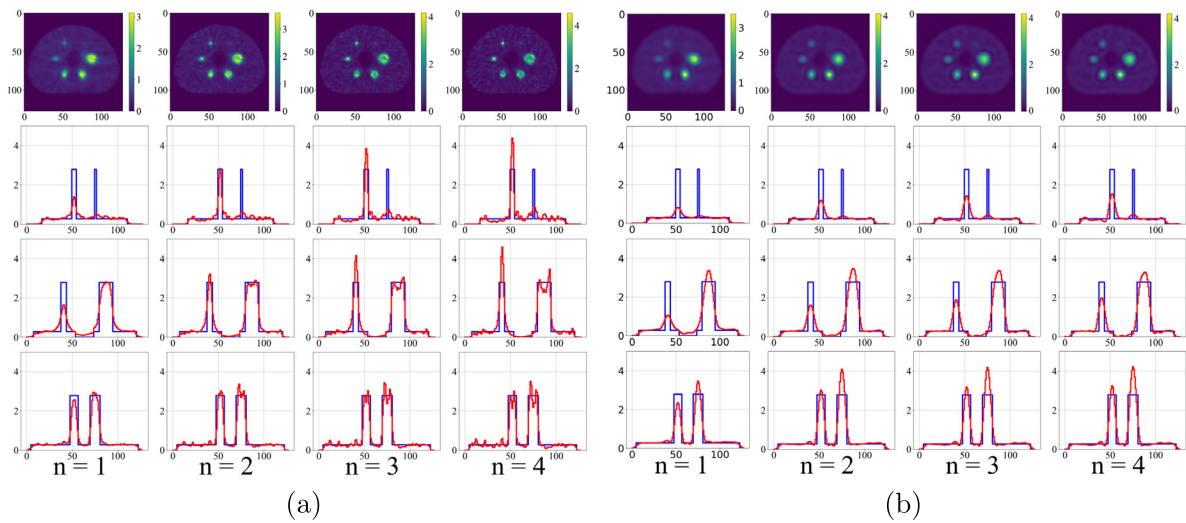


Рис. 2. Поперечные сечения (верхний ряд) и соответствующие горизонтальные профили активности (нижние ряды), реконструированные алгоритмом OSEM.

Сравнение проведено при числе итераций $n = 1-4$ без постфильтрации (а) и с ней (б).

Красная кривая — профиль, полученный после реконструкции;
синяя — исходный профиль цифровой модели.

Профили построены по линиям, проходящим через центры верхних (10 и 13 мм),
средних (17 и 37 мм) и нижних (22 и 28 мм) сфер.

По осям графиков профилей: горизонтальная ось — индекс вокселя;
вертикальная ось — значение активности в условных единицах

Для изображений, реконструированных алгоритмом OSEM с постфильтрацией и без неё, был рассчитан коэффициент восстановления RC_{\max} . На рис. 3 представлены кривые RC_{\max} в зависимости от диаметра сфер для различных значений числа итераций.

Анализ кривых RC_{\max} , полученных для изображений без фильтрации, показывает, что при увеличении числа итераций разброс между кривыми сохраняется или усиливается. Это свидетельствует о высокой чувствительности решения OSEM без постфильтрации к числу итераций и делает невозможным формирование надёжной оценки поправочного коэффициента RC_{\max} для очагов разных диаметров.

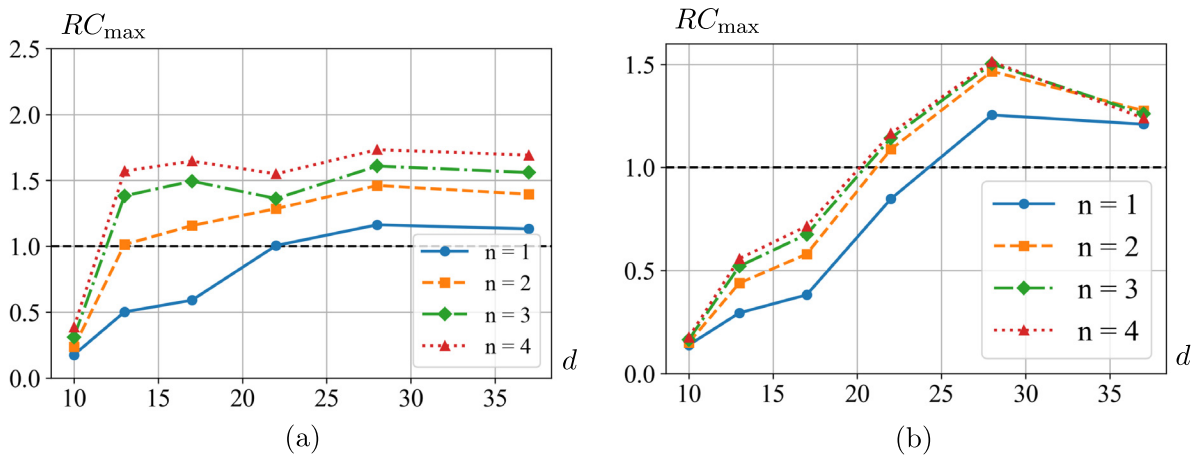


Рис. 3. Значения коэффициента восстановления RC_{\max} реконструированной активности алгоритмом OSEM в зависимости от диаметра d сфер.

Показаны данные для итераций $n = 1-4$

Введение постфильтрации, напротив, приводит решение к сходимости, что позволяет останавливать алгоритм после определённого фиксированного числа итераций. Однако, как было указано выше, корректнее использовать не просто число итераций, а число обновлений. Следует отметить, что применение постфильтрации сопровождается снижением точности реконструкции малых очагов (13 и 17 мм): их профили сильно занижены, а $RC_{\max} < 1$, что указывает на недооценку интенсивности в очаге поражения.

Было исследовано влияние соседства больших очагов на оценку RC_{\max} для малых очагов. В численных экспериментах рассматривались фантомы с тремя очагами диаметром 10, 13 и 17 мм. Полученные значения RC_{\max} , рассчитанные для изображений с постфильтрацией, практически совпали с аналогичными значениями для фантома с шестью очагами. Таким образом, наличие крупных очагов не оказывает заметного влияния на оценку RC_{\max} для малых очагов при установленных расстояниях между сферами в фантоме NEMA IEC.

Следует отметить, что количественные оценки накопленной активности в очагах на изображениях без фильтрации ненадёжны, поскольку изображения и, соответственно, поправочные коэффициенты RC_{\max} подвержены влиянию шума и краевых артефактов. Для практической количественной оценки очаговых поражений необходимо использовать поправочные коэффициенты RC_{\max} , рассчитанные для изображений, полученных с применением постфильтрации. Однако на реконструированных изображениях с постфильтрацией малые очаги могут вызывать неуверенность или полностью исчезать.

Таким образом, несмотря на то что применение постфильтрации позволяет получать более устойчивые количественные оценки, данный подход сопровождается риском потери информации о малых очагах. В связи с этим остаётся актуальным поиск альтернативных методов, которые обеспечивали бы надёжность количественной оценки без существенного ухудшения визуализации. В литературе одним из перспективных направлений является использование теоретически рассчитанных поправок, независимых от алгоритма реконструкции. К таким подходам относятся разработка универсальных уравнений для прогнозирования RC [21] и фундаментальных моделей коррекции эффекта частичного объёма (краевых артефактов), учитывающих форму патологического очага и разрешение системы [22].

2.2. Количественный анализ алгоритма MAP-Ent

В алгоритме MAP-Ent используется параметр γ . Он умножает слагаемое, соответствующее функции правдоподобия. Таким образом, при больших значениях γ метод приближается к алгоритму OSEM, что приводит к усилению шума и краевых артефактов. В настоящем исследовании использовались фиксированные значения $\gamma = 0.01$ и $\gamma = 0.1$.

На рис. 4 представлены результаты реконструкции для $\gamma = 0.01$ и $\gamma = 0.1$ при различных значениях числа итераций n . Параметр γ можно интерпретировать как аналог «шага по времени» в итерационном процессе: при одинаковых значениях $\gamma \cdot n$ получаем одинаковые решения.

На рис. 5 представлена зависимость коэффициента восстановления RC_{\max} для $\gamma = 0.01$ и $\gamma = 0.1$ при разных значениях числа итераций. Видно, что при $\gamma = 0.1$ значения $RC_{\max} \approx 1$ достигаются практически для всех сфер, кроме самой маленькой, но при разном числе итераций. В клинической практике количество метастатических очагов разных размеров у одного пациента может достигать нескольких десятков и получение точных количественных оценок накопленной активности в каждом очаге, используя изображения после разного числа итераций, является проблематичным.

Более эффективным является подход с использованием разных значений γ , что соответствует идее локальной регуляризации. Сравнение реконструкций при $\gamma = 0.01$ и $\gamma = 0.1$ (рис. 4 и 5) показывает, что при одинаковых значениях произведения ($\gamma \cdot n$) решения практически совпадают. Это означает, что подбор значений γ для очагов разного размера позволяет

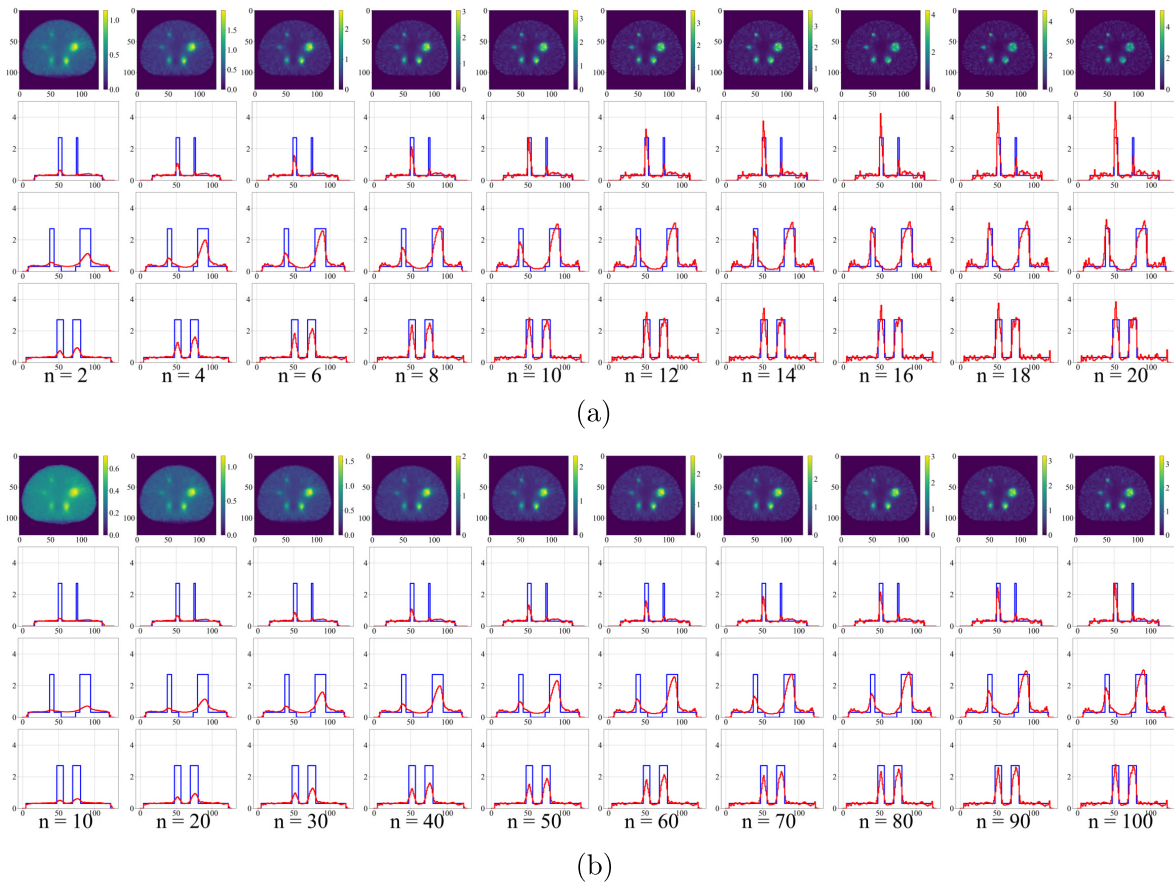


Рис. 4. Реконструированные алгоритмом MAP-Ent поперечные сечения (верхний ряд) и соответствующие горизонтальные профили активности (нижние ряды).

Сравнение проведено для $\gamma = 0.1$ (а) и $\gamma = 0.01$ (б) при числе итераций $n = 1-10$ и $n = 1-100$.

Красная кривая — профиль, полученный после реконструкции, синяя — исходный профиль из цифровой модели.

Профили построены по линиям, проходящим через центр верхних (10 и 13 мм), средних (17 и 37 мм) и нижних (22 и 28 мм) сфер.

По осям графиков профилей: горизонтальная ось — индекс вокселя; вертикальная ось — значение активности в условных единицах

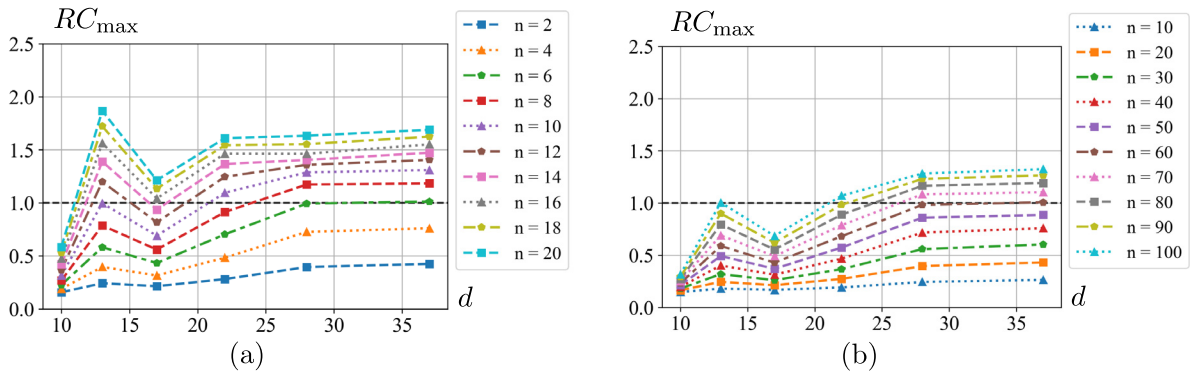


Рис. 5. Значения коэффициента восстановления (RC_{\max}) реконструированной активности алгоритмом MAP-Ent для значений параметра $\gamma = 0.1$ (а) и $\gamma = 0.01$ (б) в зависимости от диаметра d сфер. Показаны данные для итераций $n = 1-100$ и $1-20$

получать оптимальное решение и коэффициенты восстановления $RC_{\max} \approx 1$ на одной и той же итерации.

В качестве примера рассчитаем локальные значения γ такие, чтобы RC_{\max} достигала значения, близкого к 1 на одной и той же итерации для всех очагов. Из рис. 5 видно, что при $\gamma = 0.1$ значение $RC_{\max} \approx 1$ достигается для очагов 37 и 28 мм на 6-й итерации, для сферы 22 — на 9-й, для сферы 17 мм — 15-й итерации. Следовательно, если для сферы 22 мм использовать $\gamma = \left(\frac{9}{6}\right) \cdot 0.1 = 0.15$ и для сферы 17 мм использовать $\gamma = \left(\frac{15}{6}\right) \cdot 0.1 = 0.25$, то следует ожидать достижения $RC_{\max} \approx 1$ одновременно для всех сфер уже на 6-й итерации. На рис. 6 представлены результаты реконструкции.

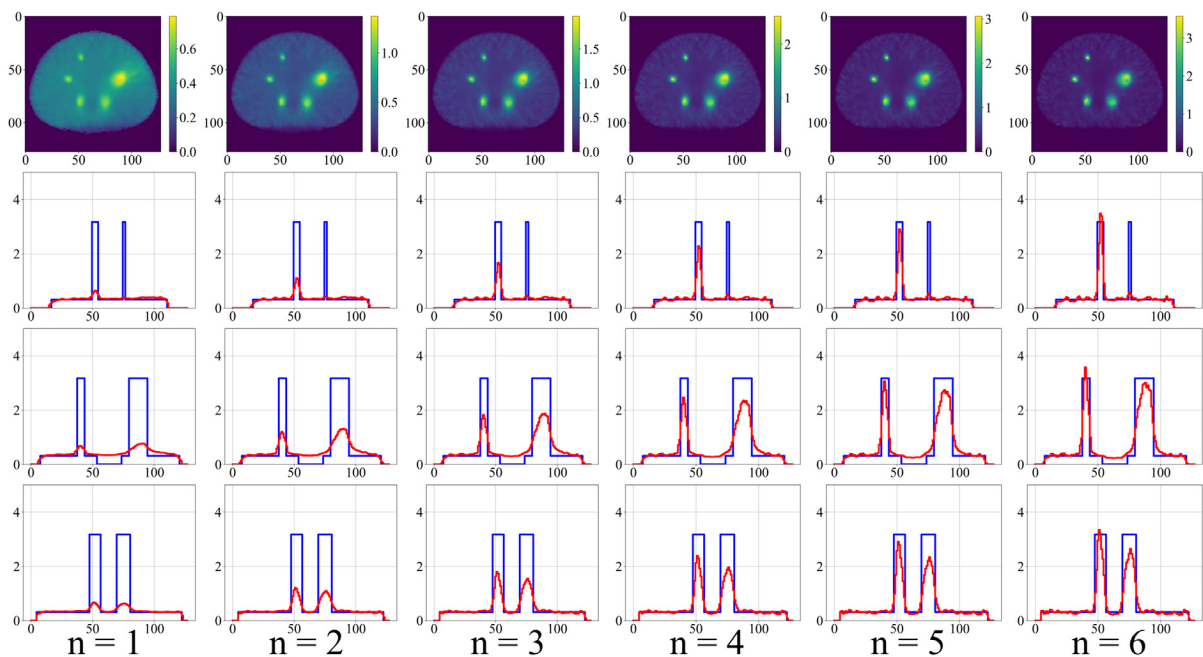


Рис. 6. Реконструированные алгоритмом MAP-Ent поперечные сечения (верхний ряд) и соответствующие горизонтальные профили активности (нижние ряды).

Сравнение выполнено для различных значений итераций $n = 1-10$ и $n = 1-100$.

Красная кривая — профиль, полученный после реконструкции,
синяя — исходный профиль из цифровой модели.

Профили построены по линиям, проходящим через центр верхних (10 и 13 мм),
средних (17 и 37 мм) и нижних (22 и 28 мм) сфер.

По осям графиков профилей: горизонтальная ось — индекс вокселя;
вертикальная ось — значение активности в условных единицах

На рис. 7 представлены результаты расчёта параметра RC_{\max} при использовании локальных значений параметра γ .

Такой подход обеспечивает точную количественную оценку накопленной активности в очагах и потенциально может поднять процедуру ОФЭКТ на более высокий уровень достоверности, поэтому идея применения локальной регуляризации требует дальнейшего развития.

2.3. Сравнительная оценка и перспективы развития

Сравнение показывает, что алгоритм MAP-Ent превосходит OSEM по устойчивости к шуму и количественной точности без необходимости в постфильтрации. Использование MAP-Ent позволяет более точно реконструировать распределение активности в очагах без этапа постобработки, обеспечивая количественную достоверность, необходимую для планирования радионуклидной терапии. Алгоритм OSEM, в свою очередь, может эффективно применяться

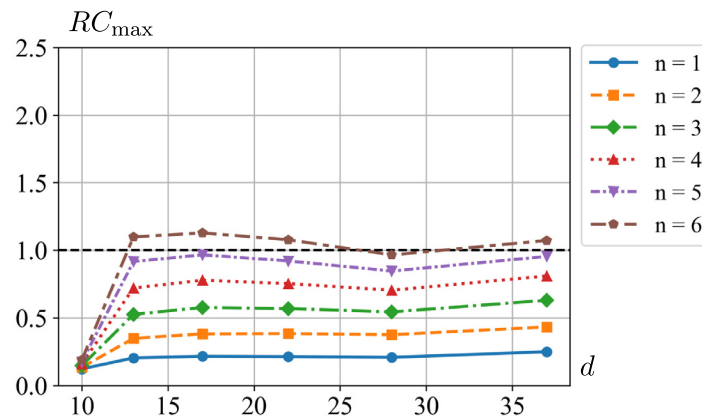


Рис. 7. Значения коэффициента восстановления (RC_{\max}) реконструированной активности алгоритмом MAP-Ent в зависимости от диаметра d сфер. Показаны данные для итераций $n = 1-6$

для рутинной диагностики, но требует аккуратной настройки параметров и использования постфильтрации для достижения приемлемого качества изображений.

Следует отметить, что для регуляризированных алгоритмов на основе байесовского подхода Maximum a Posteriori в литературе отсутствует критерий выбора параметра регуляризации (в нашем случае параметр γ), и его подбор осуществляется эмпирически. В предыдущей работе одного из авторов [20] был продемонстрирован эффект от использования локальной регуляризации для точной реконструкции очагов поражений с разной интенсивностью накопленной активности. Результаты настоящих исследований продемонстрировали необходимость локальной регуляризации при одинаковой активности, но разных размеров очагов. Такой подход потребует сегментации изображения, что может быть реализовано на основе предварительной реконструкции с использованием OSEM. Необходимы дальнейшие исследования этой проблемы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получение достоверных количественных оценок накопленной активности в очагах поражений является одной из самых актуальных задач современной диагностической ядерной медицины. Для обеспечения точности таких оценок при исследованиях методом ОФЭКТ в алгоритмах реконструкции необходимо учитывать эффекты, влияющие на формирование изображений.

Одним из важных эффектов является размытие изображения точечного источника, что требует учёта ФРТ. Это позволяет улучшить визуализацию и повысить возможность обнаружения небольших патологических очагов. Однако на практике учёт ФРТ сопровождается появлением краевых артефактов, что приводит к переоценке активности в очагах поражений малого размера. Исследователи-клиницисты пришли к выводу о необходимости постсглаживания изображений для уменьшения таких ошибок реконструкции [23]. В своём комментарии к работе [23] известный специалист в области разработки алгоритмов реконструкции ОФЭКТ и ПЭТ изображений Йохан Нуйтс отметил: «Этот вывод несколько противоречит здравому смыслу, поскольку постсглаживание ухудшает разрешение, в то время как изначально модель учёта ФРТ была направлена именно на его улучшение» [7]. Чтобы «смягчить» влияние краевых артефактов в работе [7] было предложено развивать регуляризированные алгоритмы реконструкции на основе байесовского подхода MAP с априорными распределениями, сглаживающими решения.

Результаты моделирования, проведённого в настоящей работе, позволили уточнить выводы клиницистов о необходимости постсглаживания (постфильтрации). Действительно, при

использовании алгоритма OSEM количественные оценки активности без фильтрации оказываются ненадёжными, поскольку изображения и, соответственно, поправочные коэффициенты RC_{\max} подвержены влиянию краевых артефактов. Для практического использования необходимо рассчитывать поправочные коэффициенты RC_{\max} именно по изображениям с постфильтрацией. С другой стороны, в численных экспериментах получены результаты, показывающие противоречивость применения фильтрации, на что указывал Нуйтс: небольшой очаг диаметром 13 мм, отчётливо различимый на изображении без фильтрации, практически исчез после применения фильтра (см. рис. 2).

Вторая часть данной работы посвящена исследованию регуляризованного метода MAP-Ent. Проведённое исследование показало, что алгоритм MAP-Ent обеспечивает устойчивую сходимость и точные количественные оценки активности для очагов различного диаметра. В отличие от стандартного алгоритма OSEM, MAP-Ent не требует постфильтрации и сохраняет точность даже при высоком контрасте отношения очаг/фон.

Исследования также показали, что поведение решения MAP-Ent в итерационном процессе определяется величиной, равной произведению числа итераций и параметра γ . Это позволяет сделать вывод о возможности использования локального параметра γ для достижения точного решения одновременно для всех очагов. Такой подход соответствует методу локальной регуляризации. Применение локальной регуляризации с адаптивным выбором параметра γ для опухолевых очагов представляется перспективным направлением, однако критерии оптимального подбора γ в настоящее время не существуют, что определяет направление дальнейших исследований.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа А.В. Нестеровой выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002 «Обратные некорректные задачи и машинное обучение в биологических, социально-экономических и экологических процессах».

Работа Н.В. Денисовой выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН (номер гос. регистрации: 124021400036-7). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Турчин В.Ф., Козлов В.П., Малькевич М.С. Применение методов математической статистики при решении некорректно поставленных задач // Успехи физических наук. 1971. Т. 13. С. 681–703.
2. Bertero M., Boccacci P., Ruggiero V. Inverse Imaging with Poisson Data: From Cells to Galaxies. Bristol: IOP Publishing, 2018; DOI: 978-0-7503-1437-4
3. Shepp L. A., Vardi Y. Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography // IEEE Transactions on Medical Imaging. 1983. V. 1. P. 113–122.
4. Hudson H.M., Larkin R.S. Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data // IEEE Transactions on Medical Imaging. 1994. V. 13, № 4. P. 601–609.
5. Нестерова А.В., Денисова Н.В. «Подводные камни» на пути количественной оценки тяжести онкологических поражений в диагностической ядерной медицине // Журн. техн. физики. 2022. Т. 92, № 7. С. 1018–1027; DOI: 10.21883/JTF.2022.07.52659.331-21
6. Нестерова А.В., Денисова Н.В., Минин С.М., Анашбаев Ж.Ж., Усов В.Ю. Определение поправочных коэффициентов при количественной оценке костных патологических очагов методом гамма-эмиссионной томографии // Компьютерные исследования и моделирование. 2025. Т. 17, № 4. С. 677–696; DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-4-677-696

7. Nuyts J. Unconstrained image reconstruction with resolution modelling does not have a unique solution // *EJNMMI Physics*. 2014. V. 1. Article number 98; DOI: 10.1186/s40658-014-0098-4
8. Dickson J.C., Armstrong I.S., Gabina P.M., Denis-Bacelar A.M., Krizsan A.K., Gear J.M., Van den Wyngaert T., de Geus-Oei L.F., Herrmann K. EANM practice guideline for quantitative SPECT-CT // *European J. Nuclear Medicine and Molecular Imaging*. 2023. V. 50. P. 980–995; DOI: 10.1007/s00259-022-06028-9
9. Van den Wyngaert T., Strobel K., Kampen W.U., Kuwert T., van der Bruggen W., Mohan H.K., Gnanasegaran G., Delgado-Bolton R., Weber W.A., Beheshti M., Langsteger W., Giammarile F., Mottaghy F.M., Paycha F.; EANM Bone & Joint Committee and the Oncology Committee The EANM practice guidelines for bone scintigraphy // *European J. Nuclear Medicine and Molecular Imaging*. 2016. V. 43. P. 1723–1738; DOI: 10.1007/s00259-016-3415-4
10. Gnesin S., Leite Ferreira P., Malterre J., Laub P., Prior J.O., Verdun F.R. Phantom Validation of Tc-99m Absolute Quantification in a SPECT/CT Commercial Device // *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2016. Article number 4360371; DOI: 10.1155/2016/4360371
11. Peters S. M. B., van der Werf N. R., Segbers M., van Velden F. H. P., Wierds R., Blokland K. J. A. K., Konijnenberg M. W., Lazarenko S. V., Visser E. P., Gotthardt M. Towards standardization of absolute SPECT/CT quantification: a multi-center and multi-vendor phantom study // *EJNMMI Physics*. 2019. V. 6, № 1. Article number 29; DOI: 10.1186/s40658-019-0268-5
12. Piwowarska-Bilska H., Supinska A., Birkenfeld B. What validation tests can be done by the clinical medical physicist while waiting for the standardization of quantitative SPECT/CT imaging? // *EJNMMI Physics*. 2022. V. 9, N 1. Article number 8; DOI: 10.1186/s40658-022-00434-6
13. Денисова Н.В., Гурко М.А., Колинко И.П., Аншелес А.А., Сергиенко В.Б. Виртуальная платформа для имитационного компьютерного моделирования радионуклидной визуализации в ядерной кардиологии. Сравнение с клиническими данными // *Digital Diagnostics*. 2023. Т. 4, № 3. С. 492–508; DOI: 10.17816/DD595696
14. Денисова Н.В. Математическое имитационное моделирование в ядерной медицине для оптимизации диагностической точности метода ОФЭКТ/КТ // *Медицинская физика*. 2023. № 3. С. 45–62; DOI: 10.52775/1810-200X-2023-99-3-45-62
15. Денисова Н.В., Терехов И.Н. Математическое моделирование процедуры обследования пациентов методом ОФЭКТ в кардиологии: расчёт планарных изображений // *Медицинская физика*. 2015. № 3. С. 32–39.
16. Гурко М.А., Денисова Н.В. Моделирование сбора «сырых» проекционных данных в однофотонной эмиссионной компьютерной томографии // *Журнал технической физики*. 2022. Т. 92, № 5. С. 747–757; DOI: 10.21883/JTF.2022.05.52381.264-21
17. Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // *Physical Review*. 1957. V. 106. N 4. P. 620–630.
18. Jaynes E.T. Prior Probabilities // *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*. 1968. V. 4, N 3. P. 227–241.
19. Skilling J. The Axioms of Maximum Entropy // In: *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Science and Engineering*. Dordrecht: Springer, 1988. P. 173–187.
20. Denisova N. Bayesian Maximum-A-Posteriori Approach with Global and Local Regularization to Image Reconstruction Problem in Medical Emission Tomography // *Entropy*. 2019. V. 21. Article number 1108; DOI: 10.3390/e21111108
21. de Nijs R. A novel model-based equation for size dependent mean recovery coefficients for spheres and other shapes // *Physica Medica*. 2025. V. 116. Article number 103174; DOI: 10.1016/j.ejmp.2023.103174
22. Marquis H., Schmidtlein C. R., de Nijs R., Minguez Gabina G., Gustafsson J., Kayal G., Ocampo Ramos J.C., Carter L.M., Bailey D.L., Kesner A.L. MIRD Pamphlet N 32: A MIRD Recovery Coefficient Model for Resolution Characterization and Shape-Specific Partial-Volume Correction // *J. Nuclear Medicine*. 2025. V. 66, N 3. P. 457–465; DOI: 10.2967/jnumed.124.268520
23. Armstrong I.S., Kelly M.D., Williams H.A., Matthews J.C. Impact of point spread function modelling and time-of-flight on FDG uptake measurements in lung lesions using alternative filtering strategies // *EJNMMI Physics*. 2014. V. 1, N 1. Article number 16.

UDC 51-76

COMPARISON OF TWO STATISTICAL IMAGE RECONSTRUCTION ALGORITHMS FOR QUANTITATIVE ASSESSMENT OF PATHOLOGICAL LESIONS IN GAMMA EMISSION TOMOGRAPHY© 2026 A. V. Nesterova^{1a}, N. V. Denisova^{2b}¹*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Acad. Koptug pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS,
Institutskaya st., 4/1, Novosibirsk, Russia*E-mails: ^aa.nesterova@alumni.nsu.ru, ^bnvdenisova2011@mail.ru

Received 11.02.2026, revised 22.04.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. A comparative analysis of two statistical approaches to image reconstruction in single-photon emission computed tomography (SPECT) was performed. The widely used Ordered Subset Expectation Maximization (OSEM) algorithm, implemented in most modern SPECT systems, was compared with a next-generation Maximum a Posteriori algorithm incorporating entropy-based prior information (MAP-Ent) for the quantitative assessment of radiopharmaceutical uptake in pathological lesions. The study was conducted using computer-based simulation with a digital twin of the standardized physical NEMA IEC phantom, comprising six spheres of different sizes simulating lesions. Reconstruction accuracy was evaluated using the maximum recovery coefficient, RC_{\max} , defined as the ratio of the reconstructed activity concentration at the voxel maximum to its true value. It was shown that the OSEM algorithm exhibits instability of the iterative process, as well as increased noise and edge artifacts. Post-filtering stabilizes the solution and ensures convergence; however, it leads to underestimation of activity in small lesions and may result in the loss of small lesions. In contrast, the MAP-Ent algorithm provides stable convergence and high quantitative accuracy without the need for post-filtering, while preserving the contrast of small lesions. At the same time, reconstruction accuracy strongly depends on the choice of the global regularization parameter, which limits optimal reconstruction across lesions of different sizes and indicates the need for local regularization.

Keywords: single-photon emission computed tomography, OSEM, MAP-Ent, regularization.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.104

REFERENCES

1. Turchin V.F., Kozlov V.P., Malkevich M.S. Primenenie metodov matematicheskoy statistiki pri reshenii nekorrektno postavlennykh zadach [Application of mathematical statistics methods in solving ill-posed problems]. *Uspehi Fizicheskikh Nauk* [Adv. Phys. Sci.], 1971. Vol. 13, pp. 681–703 (in Russian).
2. Bertero M., Boccacci P., Ruggiero V. Inverse Imaging with Poisson Data: From Cells to Galaxies. Bristol: IOP Publishing, 2018; DOI: 978-0-7503-1437-4
3. Shepp L. A., Vardi Y. Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1983, Vol. 1, pp. 113–122.
4. Hudson H. M., Larkin R. S. Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1994, Vol. 13, No. 4, pp. 601–609.

5. Nesterova A.V., Denisova N.V. Pitfalls in the Path of Quantitative Assessment of the Severity of Oncological Lesions in Diagnostic Nuclear Medicine. *Techn. Phys.*, 2022, Vol. 67, No. 6, pp. 401–410; DOI: 10.1134/S1063784222060056
6. Nesterova A. V., Denisova N. V., Minin S. M., Anashbaev Zh. Zh., Usov V. Yu. Opredelenie popravochnyh koeficientov pri kolichestvennoj ocenke kostnyh patologicheskikh ochagov metodom gamma-ehmissionnoj tomografii [Determination of correction factors in the quantitative assessment of bone pathological foci by gamma-emission tomography]. *Komp'yuternye Issledovaniya i Modelirovaniye*[Comput. Research and Modeling], 2025, Vol. 17, No. 4, pp. 677–696 (in Russian); DOI: 10.20537/2076-7633-2025-17-4-677-696
7. Nuyts J. Unconstrained image reconstruction with resolution modelling does not have a unique solution. *EJNMMI Physics* 2014, Vol. 1. Article number 98; DOI: 10.1186/s40658-014-0098-4
8. Dickson J.C., Armstrong I.S., Gabina P.M., Denis-Bacelar A.M., Krizsan A.K., Gear J.M., Van den Wyngaert T., de Geus-Oei L.F., Herrmann K. EANM practice guideline for quantitative SPECT-CT. *European J. Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, 2023, Vol. 50, pp. 980–995; DOI: 10.1007/s00259-022-06028-9
9. Van den Wyngaert T., Strobel K., Kampen W.U., Kuwert T., van der Bruggen W., Mohan H.K., Gnanasegaran G., Delgado-Bolton R., Weber W.A., Beheshti M., Langsteger W., Giammarile F., Mottaghy F.M., Paycha F.; EANM Bone & Joint Committee and the Oncology Committee The EANM practice guidelines for bone scintigraphy. *European J. Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, 2016, Vol. 43, pp. 1723–1738; DOI: 10.1007/s00259-016-3415-4
10. Gnesin S., Leite Ferreira P., Malterre J., Laub P., Prior J.O., Verdun F.R. Phantom Validation of Tc-99m Absolute Quantification in a SPECT/CT Commercial Device. *Comput. Math. Methods in Medicine*, 2016, Article number 4360371; DOI: 10.1155/2016/4360371
11. Peters S.M.B., van der Werf N.R., Segbers M., van Velden F.H.P., Wierds R., Blokland K.J.A.K., Konijnenberg M.W., Lazarenko S.V., Visser E. P., Gotthardt M. Towards standardization of absolute SPECT/CT quantification: a multi-center and multi-vendor phantom study. *EJNMMI Physics*, 2019, Vol. 6, No. 1, Article number 29; DOI: 10.1186/s40658-019-0268-5
12. Piwowarska-Bilska H., Supinska A., Birkenfeld B. What validation tests can be done by the clinical medical physicist while waiting for the standardization of quantitative SPECT/CT imaging? *EJNMMI Physics*, 2022, Vol. 9, No. 1, Article number 8; DOI: 10.1186/s40658-022-00434-6
13. Denisova N.V., Gurko M.A., Kolinko I.P., Ansheles A.A., Sergienko V.B. Virtual'naya platforma dlya imitacionnogo komp'yuternogo modelirovaniya radionuklidnoj vizualizacii v yadernoj kardiologii. Sravnenie s klinicheskimi dannymi [Virtual platform for simulation computer modeling of radionuclide imaging in nuclear cardiology. Comparison with clinical data]. *Digital Diagnostics*, 2023, Vol. 4, No. 3, pp. 492–508 (in Russian); DOI: 10.17816/DD595696
14. Denisova N. V. Matematicheskoe imitacionnoe modelirovanie v yadernoj medicine dlya optimizacii diagnosticheskoy tochnosti metoda OFEHKT/KT [Mathematical simulation modeling in nuclear medicine for optimizing the diagnostic accuracy of the SPECT/CT method]. *Medicinskaya Fizika* [Medical Physics], 2023, No. 3, pp. 45–62 (in Russian); DOI: 10.52775/1810-200X-2023-99-3-45-62
15. Denisova N. V., Terekhov I. N. Matematicheskoe modelirovanie procedury obsledovaniya pacientov metodom OFEHKT v kardiologii: raschyot planarnyh izobrazhenij [Mathematical modeling of the procedure for examining patients using SPECT in cardiology: calculation of planar images]. *Medicinskaya Fizika* [Medical Physics], 2015, No. 3, pp. 32–39 (in Russian).
16. Gurko M.A., Denisova N.V. The modelling of the acquiring of «raw» projection data in single-photon emission computed tomography. *Techn. Phys.*, 2022, Vol. 92, No. 5, pp. 634; DOI: 10.21883/TP.2022.05.53682.264-21
17. Jaynes E. T. Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 1957, Vol. 106, No. 4, pp. 620–630.
18. Jaynes E. T. Prior probabilities. *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics*, 1968, Vol. 4, No. 3, pp. 227–241.
19. Skilling J. The axioms of maximum entropy. In: *Maximum-Entropy and Bayesian Methods in Science and Engineering*. Dordrecht: Springer, 1988, pp. 173–187.

20. Denisova N. Bayesian maximum-a-posteriori approach with global and local regularization to image reconstruction problem in medical emission tomography. *Entropy*, 2019, Vol. 21, Article number 1108; DOI: 10.3390/e21111108
21. de Nijs R. A novel model-based equation for size dependent mean recovery coefficients for spheres and other shapes. *Physica Medica*, 2025, Vol. 116, Article number 103174; DOI: 10.1016/j.ejmp.2023.103174
22. Marquis H., Schmidlein C. R., de Nijs R., Minguez Gabina G., Gustafsson J., Kayal G., Ocampo Ramos J. C., Carter L. M., Bailey D. L., Kesner A. L. MIRDPamphlet No. 32: A MIRDP Recovery Coefficient Model for Resolution Characterization and Shape-Specific Partial-Volume Correction. *J. Nuclear Medicine*, 2025, Vol. 66, No. 3, pp. 457–465; DOI: 10.2967/jnumed.124.268520
23. Armstrong I.S., Kelly M.D., Williams H.A., Matthews J.C. Impact of point spread function modelling and time-of-flight on FDG uptake measurements in lung lesions using alternative filtering strategies. *EJNMMI Physics*, 2014, Vol. 1, No. 1, Article number 16.

УДК 517.9

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА УРАВНЕНИЯ ПАУЛИ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ© 2026 М. В. Нецадим^{1a}, Н. С. Часовских^{2b}¹*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Академика Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*²*Горно-алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, 1, г. Горно-Алтайск 659700, Россия*E-mails: ^aneshch@math.nsc.ru, ^bnikolayaltay@rambler.ruПоступила в редакцию 30.05.2024 г.; после доработки 30.05.2024 г.;
принята к публикации 10.12.2025 г.

Исследуется система уравнений, которая получена на основе уравнения Паули и связывает функции скалярного и векторного потенциалов, амплитуды, фазы. Методами теории совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных находятся вполне интегрируемые системы, связывающие только три функции из указанных четырёх. Найденные системы связаны преобразованиями Бэклунда.

Ключевые слова: уравнение Паули, преобразования Бэклунда, условия совместности.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.105

ВВЕДЕНИЕ

Для построения точных решений дифференциальных уравнений, исследования их симметричных свойств, поисков законов сохранения используются методы группового анализа дифференциальных уравнений [1, 2, 3, 4, 5], метод дифференциальных подстановок [6] и, более общим образом, метод преобразований Ли-Бэклунда [7, 8] в пространстве джетов продолженного уравнения [9, 10]. На практике, как правило, встречаются более частные случаи преобразований Ли — Бэклунда — дифференциальные соответствия между двумя системами дифференциальных уравнений, получившие название преобразований Бэклунда [11, 12, 13]. Такие соответствия представляют собой дифференциальную связь между двумя системами дифференциальных уравнений, позволяющую по известному решению одной системы конструктивно находить решение второй системы. Преобразования Бэклунда для определённых уравнений имеют как правило именное название: каскадный метод Лапласа, преобразование Эйлера — Дарбу, преобразование Бианки, преобразование Мутара, метод билинейных уравнений Хироты и др. [3, 4, 5, 14, 15]. Так, например, преобразование Коула — Хопфа связывает уравнение теплопроводности и уравнение Бюргерса [16]. Преобразование Миуры связывает мКдФ и КдФ [17]. Отметим, что прямое и обратное преобразования Бэклунда, как правило, имеют разные качественные свойства. Так, например, дифференциальная подстановка Коула — Хопфа $u = 2v_x/v$ переводит уравнение теплопроводности $v_t = v_{xx}$ в уравнение Бюргерса $u_t = uu_x + u_{xx}$, а обратный переход связан с нелокальным разрешением $v = \exp(-\frac{1}{2} \int u dx)$. На преобразовании Коула — Хопфа основан метод прогонки [18]. С помощью этой замены были найдены общие решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений второго порядка для горизонтально-слоистых сред [19, 20, 21, 22]. Преобразования Бэклунда используются при построении солитонных решений нелинейных уравнений, изучении симметрий и законов сохранения, а также являются важнейшим инструментом при изу-

чении уравнений в частных производных и представляют собой отображения, связывающие разные решения этих уравнений [14]. Ранние исследования таких отображений для нелинейного уравнения Шредингера можно найти в [23, 24, 25, 33]. Интерес к преобразованиям Бэклунда обусловлен также обнаруженными связями с квантовыми интегрируемыми системами и феноменом разделения переменных [26, 27]. Нахождение соответствий Бэклунда для актуальных уравнений математической физики есть трудоёмкая самостоятельная задача. Примеры преобразований Бэклунда и их применение можно найти в [14, 15, 28].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается уравнением Паули

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\mu} \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - eV + U + \frac{e\hbar}{2\mu c} (\vec{\sigma} \vec{H}) \right) \Psi,$$

которое описывает динамику движения электрона в электромагнитном поле с учётом спина электрона (см. [1], с. 240).

Находятся одномерные варианты уравнением Паули, в предположении, что векторный потенциал \vec{A} имеет одну ненулевую компоненту и уравнение зависит от одной пространственной координаты. Итогом этих вычислений являются девять вариантов одномерного уравнения Паули.

Далее, для одномерного уравнения Паули

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \Psi,$$

которое получается в предположении, что векторный потенциал \vec{A} имеет вид $\vec{A} = (A, 0, 0)$ и все функции зависят от одной пространственной переменной x рассматривается задача исключения из уравнения Паули одной из функций $w = U - eV$, A , R , S . Такие преобразования являются частью общей теории переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных. Отметим, что аналогичная задача была рассмотрена в работе [29] для классического уравнения Шредингера и в работе [30] для релятивистского уравнения Шредингера (уравнения Клейна-Гордона).

Получены дифференциальные соотношения $[A, R, S]$, $[w, R, S]$, $[w, A, S]$, $[w, A, R]$, в которых отсутствует одна из функций w , A , R , S и которые фактически являются условиями совместности для определения отсутствующей функции. Основная цель данной работы найти эти условия совместности. В качестве следствия получаются вполне интегрируемые системы, решение которых даёт точное решение уравнения Паули. При этом мы пользуемся алгоритмом теории совместности [31, 32] приведения в инволюцию переопределённой системы. Переходы между системами соотношений $[A, R, S]$, $[w, R, S]$, $[w, A, S]$, $[w, A, R]$ осуществляется введением дифференциальных соотношений для отсутствующей функции и представляет собой преобразования Бэклунда [11].

Все рассматриваемые функции предполагаются аналитическими.

2. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ И ЕГО ОДНОМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ

Динамика движения электрона в электромагнитном поле с учётом спина электрона описывается уравнением Паули, которое имеет вид ([1], с. 240)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\mu} \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - eV + U + \frac{e\hbar}{2\mu c} (\vec{\sigma} \vec{H}) \right) \Psi, \quad (1)$$

где $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ — двухкомпонентная волновая функция электрона (T — значок транспонирования); \hbar — постоянная Планка; $-e$ — заряд электрона; c — скорость света; μ — масса электрона; $\vec{P} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ — вектор импульса; $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ — векторный потенциал электромагнитного поля; V — скалярный потенциал электромагнитного поля; U — силовой потенциал; $\vec{\sigma} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ — матрицы Паули; $\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$.

В общем случае предполагается, что все функции зависят от переменных (x, y, z, t) .

Если в правой части уравнения (1) в слагаемом $\left(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$ раскрыть скобки, то уравнение (1) переписется в виде

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2\mu}\vec{P}^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c}\text{div}\vec{A} + \frac{e}{\mu c}(\vec{A}\vec{P}) + \frac{e^2}{2\mu c^2}\vec{A}^2 - eV + U + \frac{e\hbar}{2\mu c}(\vec{\sigma}\vec{H})\right)\Psi, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{P}^2 &= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right), \\ (\vec{A}\vec{P}) &= -i\hbar\left(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y} + A_3\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ \text{div}\vec{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}, \\ \vec{A}^2 &= A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \end{aligned}$$

Отметим также, что скалярное произведение $(\vec{\sigma}\vec{H})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right).$$

Далее рассмотрим частные случаи уравнения Паули, когда векторный потенциал \vec{A} имеет одну ненулевую компоненту и все функции, входящие в уравнение Паули, зависят от одной пространственной координаты.

2.1. Векторный потенциал имеет вид $(A, 0, 0)$

Пусть векторный потенциал \vec{A} имеет вид $\vec{A} = (A, 0, 0)$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) \\ &+ \frac{i\hbar e}{2\mu c}\frac{\partial A}{\partial x}\Psi - \frac{i\hbar e}{\mu c}A\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{e^2}{2\mu c^2}A^2\Psi - eV\Psi + U\Psi \\ &+ \frac{e\hbar}{2\mu c}\left\{\frac{\partial A}{\partial z}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial A}{\partial y}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}\Psi. \quad (3) \end{aligned}$$

2.1.1. Функция A зависит только от переменных (x, t) .

Тогда (3) принимает вид

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) - \frac{i\hbar e}{\mu c}A\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \left(U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2}A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c}\frac{\partial A}{\partial x}\right)\Psi. \quad (4)$$

То есть полностью исчезает слагаемое, отвечающее за спинорную часть уравнения, и (4) представляет собой систему двух одинаковых уравнений на компоненты вектор-функции $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$.

Если дополнительно, предположить, что функция Ψ зависит только от переменных (x, t) , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \Psi, \quad (5)$$

которое слагаемым $-\frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ отличается от одномерного уравнения Шредингера, рассмотренного в работе [29].

2.1.2. Функция A зависит только от переменных (y, t) .

Тогда (3) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi$$

распадается на два независимых уравнения на функции ψ_1 и ψ_2 , которые отличаются только знаком последнего слагаемого.

Если дополнительно, предположить, что функция Ψ зависит только от переменных (y, t) , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi,$$

которое запишем его как систему

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \psi_1 - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_1, \quad (6)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \psi_2 + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_2. \quad (7)$$

Каждое из этих уравнений является стандартным уравнением Шредингера.

Нетрудно проверить, что имеют место формулы

$$\psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = (\psi_1 \psi_2) \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right), \quad \psi_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - \psi_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left((\psi_1 \psi_2) \frac{\partial}{\partial y} \ln \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right) \right).$$

Поэтому, домножая уравнение (6) на ψ_2 , уравнение (7) на ψ_1 и вычитая их, получим соотношение

$$i\hbar (\psi_1 \psi_2) \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left((\psi_1 \psi_2) \frac{\partial}{\partial y} \ln \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right) \right) - \frac{e\hbar}{\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} (\psi_1 \psi_2). \quad (8)$$

Из соотношения (8) очевидно получаем следующее следствие.

Следствие 1. 1) Если решения ψ_1 и ψ_2 системы (6), (7) удовлетворяют соотношению $\psi_1 \psi_2 = C = \text{const}$, то функция $w = \ln \left(\frac{\psi_1}{\psi_2} \right)$ является решением уравнения

$$i\hbar \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - C \frac{e\hbar}{\mu c} \frac{\partial A}{\partial y}.$$

2) Если решения ψ_1 и ψ_2 системы (6), (7) удовлетворяют соотношению $\psi_1/\psi_2 = \text{const}$, то $\frac{\partial A}{\partial y} = 0$.

2.1.3. Функция A зависит только от переменных (z, t) .

Тогда (3) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Psi$$

и представляет собой систему уравнений на функции ψ_1 и ψ_2 , которые «сплетены» за счёт последнего слагаемого.

Если дополнительно, предположить, что функция Ψ зависит только от переменных (z, t) , то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Psi,$$

или, в развёрнутом виде,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \psi_1 - \frac{i e \hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \psi_2, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \psi_2 + \frac{i e \hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \psi_1. \end{aligned}$$

Домножив первое уравнение на ψ_1 , второе на ψ_2 и сложив, получим соотношение

$$\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1^2 + \psi_2^2) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \psi_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) (\psi_1^2 + \psi_2^2).$$

Так как

$$2 \left(\psi_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \psi_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\psi_1^2 + \psi_2^2) - \left(\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)^2 \right),$$

то это уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1^2 + \psi_2^2) &= -\frac{\hbar^2}{4\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{4\mu} \left(\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)^2 \right) + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) (\psi_1^2 + \psi_2^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Замечание 1. Если

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad (10)$$

то уравнение (9) принимает вид

$$\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{4\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) w$$

— уравнение Шредингера для функции $w = \psi_1^2 + \psi_2^2$.

Очевидно, что соотношение (10) равносильно условиям

$$\frac{\partial}{\partial z} (\psi_1 + i\psi_2) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial z} (\psi_1 - i\psi_2) = 0.$$

Замечание 2. Если

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = q\psi_1, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = q\psi_2,$$

где q — некоторая константа, то

$$\psi_1 = \tau_1(t) \exp(qz), \quad \psi_2 = \tau_2(t) \exp(qz)$$

где $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ — некоторые функции переменной t и

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right)^2 = q^2(\psi_1^2 + \psi_2^2).$$

Следовательно,

$$w = \psi_1^2 + \psi_2^2 = \exp(2qz)(\tau_1^2(t) + \tau_2^2(t)) = \exp(2qz)T(t)$$

и уравнение (9) принимает вид

$$\frac{i\hbar}{2} \frac{\partial T}{\partial t} = \left(-\frac{3\hbar^2}{2\mu} q^2 + 2\left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U\right) \right) T.$$

Отсюда, в частности, следует, что выражение $\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U$ является функцией только переменной t .

2.2. Векторный потенциал имеет вид $(0, A, 0)$

Пусть векторный потенциал \vec{A} имеет вид $\vec{A} = (0, A, 0)$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \Psi - eV \Psi + U \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \left\{ \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Psi. \quad (11)$$

2.2.1. Функция A зависит только от переменных (x, t) .

Тогда (11) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi$$

и распадается на два независимых уравнения на функции ψ_1 и ψ_2 , которые отличаются только знаком последнего слагаемого.

Если $\Psi = \Psi(x, t)$, то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi.$$

2.2.2. Функция A зависит только от переменных (y, t) .

Тогда (11) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left(U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \Psi$$

и представляет собой систему двух одинаковых уравнений на компоненты вектор-функции $\Psi = (\psi_1, \psi_2)^T$.

Если $\Psi = \Psi(y, t)$, то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left(U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \Psi.$$

2.2.3. Функция A зависит только от переменных (z, t) .

Тогда (11) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi$$

и представляет собой систему уравнений на функции ψ_1 и ψ_2 , которые «сплетены» за счёт последнего слагаемого.

Если $\Psi = \Psi(z, t)$, то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

2.3. Векторный потенциал имеет вид $(0, 0, A)$

Пусть векторный потенциал \vec{A} имеет вид $\vec{A} = (0, 0, A)$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \Psi - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \Psi - eV \Psi + U \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \left\{ \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\} \Psi. \quad (12)$$

2.3.1. Функция A зависит только от переменных (x, t) .

Тогда (12) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

Если $\Psi = \Psi(x, t)$, то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi - \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

2.3.2. Функция A зависит только от переменных (y, t) .

Тогда (12) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

Если $\Psi = \Psi(y, t)$, то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi + \frac{e\hbar}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

2.3.3. Функция A зависит только от переменных (z, t) .

Тогда (12) принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \Psi - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U \right) \Psi.$$

Если $\Psi = \Psi(z, t)$, то получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \left(\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - eV + U + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial z} \right) \Psi.$$

3. ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ И ЕГО УПРОЩЕНИЕ

Рассмотрим уравнение (5):

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{i\hbar e}{\mu c} A \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{i\hbar e}{2\mu c} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \psi. \quad (5)$$

Сделаем замену переменных $t = \hbar\tau$, $x = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}}\xi$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, & \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}, & \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \frac{\partial A}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

После подстановки в уравнение (5) получаем

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{i2e}{c\sqrt{2\mu}} A \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left(U - eV + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 + \frac{ie}{c\sqrt{2\mu}} \frac{\partial A}{\partial \xi} \right) \psi.$$

Введём обозначение $\tilde{A} = \frac{e}{c\sqrt{2\mu}} A$. Тогда уравнение примет вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2i\tilde{A} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \left(U - eV + \tilde{A}^2 + i \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \xi} \right) \psi.$$

Переобозначим $\tau = t$, $\xi = x$, $\tilde{A} = A$, $w = U - eV$. Окончательно, уравнение принимает вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2iA \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(w + A^2 + i \frac{\partial A}{\partial x} \right) \psi. \quad (13)$$

Напомним, что функции A , w вещественнозначные, а функция ψ комплекснозначная. Представим её в виде

$$\psi = Re^{iS},$$

где $R = R(t, x)$, $S = S(t, x)$ — вещественнозначные функции (амплитуда и фаза, соответственно). Далее перейдём от комплексного уравнения (13) к системе вещественных уравнений. Для этого найдём производные функции ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial t} e^{iS} + iR \frac{\partial S}{\partial t} e^{iS}, & \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial x} e^{iS} + iR \frac{\partial S}{\partial x} e^{iS}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} e^{iS} + 2i \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} e^{iS} + iR \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} e^{iS} - R \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 e^{iS}. \end{aligned}$$

Подставим найденные производные в уравнение (13) и сократим на экспоненту e^{iS} . Далее для сокращения записи частные производные будем обозначать соответствующим индексом внизу, например, $\frac{\partial S}{\partial x} = S_x$. Имеем

$$i \left(R_t + iRS_t \right) = - \left(R_{xx} + 2iR_x S_x + iRS_{xx} - RS_x^2 \right) - 2iA \left(R_x + iRS_x \right) + \left(w + A^2 + iA_x \right) R.$$

Выделяем вещественную и мнимую части:

$$-RS_t = -R_{xx} + RS_x^2 + 2ARS_x + \left(w + A^2\right)R, \quad (14)$$

$$R_t = -2R_xS_x - RS_{xx} - 2AR_x + A_xR. \quad (15)$$

Далее работаем с этой системой.

4. ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ A

Перепишем уравнения (14), (15) в виде

$$\frac{R_{xx}}{R} - (S_t + S_x^2) - w = A^2 + 2AS_x, \quad \frac{R_t}{R} + 2\frac{R_x}{R}S_x + S_{xx} = A_x - 2A\frac{R_x}{R}.$$

Введём обозначение

$$\rho = \ln R. \quad (16)$$

Тогда

$$\rho_t = \frac{R_t}{R}, \quad \rho_x = \frac{R_x}{R}, \quad \rho_{xx} = \frac{R_{xx}}{R} - \left(\frac{R_x}{R}\right)^2,$$

и

$$\frac{R_{xx}}{R} = \rho_{xx} + \rho_x^2.$$

Поэтому система уравнений принимает вид

$$A^2 + 2AS_x = \rho_{xx} + \rho_x^2 - (S_t + S_x^2) - w, \quad A_x - 2A\rho_x = \rho_t + 2\rho_xS_x + S_{xx}.$$

Введём обозначения

$$B = \rho_{xx} + \rho_x^2 - (S_t + S_x^2) - w, \quad C = \rho_t + 2\rho_xS_x + S_{xx}. \quad (17)$$

Тогда система уравнений принимает вид

$$A^2 + 2AS_x = B, \quad A_x = C + 2A\rho_x. \quad (18)$$

Далее из системы (18) найдём функцию A .

Дифференцируем первое уравнение системы (18) по переменной x :

$$2AA_x + 2A_xS_x + 2AS_{xx} = B_x.$$

В силу второго соотношения (18) оно принимает вид

$$2A(C + 2A\rho_x) + 2S_x(C + 2A\rho_x) + 2AS_{xx} = B_x$$

или

$$4A^2\rho_x + 2A(C + S_{xx} + 2\rho_xS_x) = B_x - 2CS_x.$$

Итак, на функцию A имеем систему двух квадратных уравнений

$$A^2 + 2AS_x = B, \quad 4A^2\rho_x + 2A(C + S_{xx} + 2\rho_xS_x) = B_x - 2CS_x. \quad (19)$$

Отсюда находим функцию A (исключая квадратичное слагаемое):

$$\begin{aligned} 4\rho_x(B - 2AS_x) + 2A(C + S_{xx} + 2\rho_xS_x) &= B_x - 2CS_x, \\ 2A(C + S_{xx} + 2\rho_xS_x - 4\rho_xS_x) &= B_x - 2CS_x - 4B\rho_x, \\ A &= \frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(C + S_{xx} - 2\rho_xS_x)}. \end{aligned}$$

В силу второго соотношения системы (17):

$$C + S_{xx} - 2\rho_x S_x = \rho_t + 2\rho_x S_x + S_{xx} + S_{xx} - 2\rho_x S_x = \rho_t + 2S_{xx}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(\rho_t + 2S_{xx})}. \quad (20)$$

Остаётся подставить (20) в одно из соотношений (19) для того, чтобы получить условия совместности этой системы. (Отметим, что (19) — система двух квадратичных уравнений и её условие совместности заключается в том, что её дискриминант обращается в нуль.) Подставим (20) в первое соотношение (19)

$$\left(\frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(\rho_t + 2S_{xx})} \right)^2 + 2S_x \frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(\rho_t + 2S_{xx})} = B$$

или

$$\left(B_x - 2CS_x - 4B\rho_x \right)^2 - 4B(\rho_t + 2S_{xx})^2 + 4S_x(\rho_t + 2S_{xx}) \left(B_x - 2CS_x - 4B\rho_x \right) = 0. \quad (21)$$

Соотношение (21) и есть условие совместности системы (19).

Теорема 1. *Если*

1) *функции* $R = R(t, x)$, $S = S(t, x)$, $w = w(t, x)$ *удовлетворяют соотношению* (21)

$$\left(B_x - 2CS_x - 4B\rho_x \right)^2 - 4B(\rho_t + 2S_{xx})^2 + 4S_x(\rho_t + 2S_{xx}) \left(B_x - 2CS_x - 4B\rho_x \right) = 0,$$

где

$$B = \rho_{xx} + \rho_x^2 - (S_t + S_x^2) - w, \quad C = \rho_t + 2\rho_x S_x + S_{xx}, \quad \rho = \ln R,$$

2) *функция* $A = A(t, x)$ *определена формулой* (20)

$$A = \frac{B_x - 2CS_x - 4B\rho_x}{2(\rho_t + 2S_{xx})},$$

то функции A , w , R , S удовлетворяют системе уравнений (14), (15) и, соответственно, функция $\psi = Re^{iS}$ — решение уравнения Паули (13).

5. ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ R

Перепишем систему (14), (15) в виде

$$R_{xx} = R(w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x), \quad R_t = -2R_x(A + S_x) + R(A_x - S_{xx}).$$

Введём обозначения

$$B = w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x, \quad C = -2(A + S_x), \quad D = A_x - S_{xx}. \quad (22)$$

Тогда система принимает вид

$$R_{xx} = BR, \quad R_t = CR_x + DR. \quad (23)$$

Составляем условия совместности $(R_{xx})_t = (R_t)_{xx}$.

Имеем

$$(R_{xx})_t = B_t R + B R_t = \text{в силу (23)} = B_t R + B(CR_x + DR) = BCR_x + R(B_t + BD), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} (R_t)_x &= C_x R_x + C R_{xx} + D_x R + D R_x = \text{в силу (23)} \\ &= C_x R_x + CBR + D_x R + D R_x = R_x(D + C_x) + R(BC + D_x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R_t)_{xx} &= R_{xx}(D + C_x) + R_x(D_x + C_{xx}) + R_x(BC + D_x) + R(B_x C + BC_x + D_{xx}) = \text{в силу (23)} \\ &= BR(D + C_x) + R_x(BC + 2D_x + C_{xx}) + R(B_x C + BC_x + D_{xx}) \\ &= R_x(BC + 2D_x + C_{xx}) + R(BD + B_x C + 2BC_x + D_{xx}). \quad (25) \end{aligned}$$

Приравнивая (24) и (25) получаем

$$R_x(2D_x + C_{xx}) = -R(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t).$$

В силу (22)

$$2D_x + C_{xx} = 2(A_{xx} - S_{xxx}) - 2(A_{xx} + S_{xxx}) = -4S_{xxx}.$$

Итак, условие совместности $(R_{xx})_t = (R_t)_{xx}$ принимает вид

$$4S_{xxx}R_x = R(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t).$$

Отметим, что если $S_{xxx} = 0$, то

$$B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t = 0$$

и система (23) совместна (находится в инволюции).

Если $S_{xxx} \neq 0$, то

$$R_x = R \frac{(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t)}{4S_{xxx}}.$$

Введём обозначение

$$E = \frac{(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t)}{4S_{xxx}}. \quad (26)$$

Тогда

$$R_x = ER$$

и на функцию R имеем систему соотношений

$$R_x = ER, \quad R_t = R(D + CE). \quad (27)$$

Кроме того, имеем соотношение

$$(ER)_x = BR,$$

которое в силу (27) принимает вид

$$E_x R + E^2 R = BR,$$

т. е.

$$E_x = B - E^2. \quad (28)$$

Составляем условие совместности $(R_x)_t = (R_t)_x$:

$$R_x(D + CE) + R(D + CE)_x = E_t R + ER_t.$$

В силу (27)

$$\begin{aligned} ER(D + CE) + R(D + CE)_x &= E_t R + ER(D + CE), \\ R(E_t - (D + CE)_x) &= 0. \end{aligned}$$

Итак, условие совместности $(R_x)_t = (R_t)_x$ принимает вид

$$E_t = (D + CE)_x.$$

или в силу (28)

$$E_t = D_x + BC + EC_x - E^2 C. \quad (29)$$

Далее напишем условие совместности $(E_x)_t = (E_t)_x$ системы (28), (29). Имеем

$$E_{xt} = B_t - 2EE_t =$$

в силу (29)

$$= B_t - 2E(D_x + BC + EC_x - E^2 C) = B_t - 2E(D_x + BC) - 2E^2 C_x + 2E^3 C,$$

$$E_{tx} = D_{xx} + B_x C + BC_x + E_x C_x + EC_{xx} - 2EE_x C - E^2 C_x =$$

в силу (28)

$$\begin{aligned} &= D_{xx} + B_x C + BC_x + (B - E^2)C_x + EC_{xx} - 2EC(B - E^2) - E^2 C_x = \\ &= (D_{xx} + B_x C + 2BC_x) + E(C_{xx} - 2BC) - 2E^2 C_x + 2E^3 C. \end{aligned}$$

Итак, условие совместности $(E_x)_t = (E_t)_x$ системы (28), (29) принимает вид

$$B_t - 2E(D_x + BC) = (D_{xx} + B_x C + 2BC_x) + E(C_{xx} - 2BC)$$

или

$$E(2D_x + C_{xx}) = B_t - D_{xx} - B_x C - 2BC_x.$$

Так как $2D_x + C_{xx} = -4S_{xxx}$, то

$$E = \frac{(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t)}{4S_{xxx}},$$

что совпадает с (26). Следовательно, система (28), (29) совместна.

Итак, при условии $S_{xxx} \neq 0$ доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функции $B(t, x)$, $C(t, x)$, $D(t, x)$, $E(t, x)$ определяются через функции $w(t, x)$, $A(t, x)$, $S(t, x)$, где $S_{xxx} \neq 0$, формулами:

$$B = w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x, \quad C = -2(A + S_x), \quad D = A_x - S_{xx}.$$

$$E = \frac{(B_x C + 2BC_x + D_{xx} - B_t)}{4S_{xxx}}.$$

Тогда

1) система

$$E_x = B - E^2, \quad E_t = D_x + BC + EC_x - E^2 C$$

находится в инволюции,

2) система

$$R_{xx} = R(w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x), \quad R_t = -2R_x(A + S_x) + R(A_x - S_{xx})$$

эквивалентна системе (27)

$$R_x = ER, \quad R_t = R(D + CE),$$

условия совместности, которой имеют вид 1).

Так определённые функции w , A , S , R удовлетворяют системе (14), (15) и, следовательно, функция $\psi = Re^{iS}$ является решением уравнения Паули (13).

Замечание 3. Функции R, S, w в условиях теоремы 1 определяются функциями A и E . Действительно, пусть A и E — заданные функции. Тогда

1) Функция B определяется из равенства (28):

$$B = E_x + E^2.$$

2) Запишем (29) в виде

$$D_x = E_t - (B - E^2)C - EC_x = E_t - (EC)_x.$$

Подставим $D = A_x - S_{xx}$:

$$A_{xx} - S_{xxx} = E_t - (EC)_x,$$

$$S_{xxx} = A_{xx} - E_t + (EC)_x.$$

Подставим $C = -2(A + S_x)$:

$$S_{xxx} = A_{xx} - E_t - 2(E(A + S_x))_x.$$

Итак, функция S определяется функциями A и E .

3) Потенциал w находится по формуле

$$w = B - (A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x).$$

4) Функция R находится из вполне интегрируемой системы

$$R_x = ER, \quad R_t = R(D + CE).$$

Рассмотрим случай $S_{xxx} = 0$. Имеем

$$S = x^2a(t) + xb(t) + c(t)$$

для некоторых функций a, b, c переменной t . Тогда

$$C = -2(A + S_x) = -2A - 4xa(t) - 2b(t),$$

$$D = A_x - S_{xx} = A_x - 2a(t),$$

$$B = w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x =$$

$$= w + A^2 + x^2a'(t) + xb'(t) + c'(t) + (2xa(t) + b(t))^2 + 2A(2xa(t) + b(t)).$$

Следовательно, справедливо предложение.

Предложение 1. Пусть функции $B(t, x), C(t, x), D(t, x)$ определяются через функции $w(t, x), A(t, x), S(t, x)$ формулами:

$$B = w + A^2 + S_t + S_x^2 + 2AS_x, \quad C = -2(A + S_x), \quad D = A_x - S_{xx}.$$

Если $S_{xxx} = 0$ и $B_xC + 2BC_x + D_{xx} - B_t = 0$, то функция $R(t, x)$ определяется из совместной системы

$$R_{xx} = BR, \quad R_t = CR_x + DR.$$

Так определённые функции w, A, S, R удовлетворяют системе (14), (15) и, следовательно, функция $\psi = Re^{iS}$ является решением уравнения Паули (13).

6. ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ S

Перепишем систему (14), (15) в виде

$$S_t = \frac{R_{xx}}{R} - S_x^2 - 2AS_x - w - A^2, \quad (30)$$

$$S_{xx} = -\frac{R_t}{R} - 2\frac{R_x}{R}S_x - 2A\frac{R_x}{R} + A_x. \quad (31)$$

Введём обозначения

$$B = \frac{R_{xx}}{R} - w - A^2, \quad C = A_x - \frac{R_t}{R} - 2A\frac{R_x}{R}, \quad D = 2\frac{R_x}{R}. \quad (32)$$

Тогда система (30), (31) принимает вид

$$S_t = B - S_x^2 - 2AS_x, \quad (33)$$

$$S_{xx} = C - DS_x. \quad (34)$$

Составим условие совместности $(S_t)_{xx} = (S_{xx})_t$ системы (33), (34).

Из соотношения (33) находим

$$S_{tx} = B_x - 2S_x S_{xx} - 2A_x S_x - 2AS_{xx}.$$

В силу (34)

$$S_{tx} = B_x - 2S_x(C - DS_x) - 2A_x S_x - 2A(C - DS_x) = (B_x - 2AC) + 2DS_x^2 + 2(AD - C - A_x)S_x.$$

Итак,

$$S_{tx} = E_1 + 2DS_x^2 + E_2 S_x, \quad (35)$$

где

$$E_1 = B_x - 2AC, \quad E_2 = 2(AD - C - A_x). \quad (36)$$

Далее из (35) находим

$$S_{txx} = E_{1x} + 2D_x S_x^2 + 4DS_x S_{xx} + E_{2x} S_x + E_2 S_{xx}.$$

В силу (34)

$$\begin{aligned} S_{txx} &= E_{1x} + 2D_x S_x^2 + 4DS_x(C - DS_x) + E_{2x} S_x + E_2(C - DS_x) \\ &= (E_{1x} + CE_2) + 2(D_x - 2D^2)S_x^2 + (4DC + E_{2x} - DE_2)S_x. \end{aligned}$$

Итак,

$$S_{txx} = F_1 + F_2 S_x^2 + F_3 S_x, \quad (37)$$

где

$$F_1 = E_{1x} + CE_2, \quad F_2 = 2(D_x - 2D^2), \quad F_3 = 4DC + E_{2x} - DE_2. \quad (38)$$

Из соотношения (34) находим

$$S_{xxt} = C_t - D_t S_x - DS_{xt}.$$

В силу (35)

$$S_{xxt} = C_t - D_t S_x - D(E_1 + 2DS_x^2 + E_2 S_x) = (C_t - DE_1) - 2D^2 S_x^2 - (D_t + DE_2)S_x.$$

Итак,

$$S_{xxt} = H_1 - 2D^2S_x^2 - H_2S_x, \quad (39)$$

где

$$H_1 = C_t - DE_1, \quad H_2 = D_t + DE_2. \quad (40)$$

Следовательно, условие совместности $(S_t)_{xx} = (S_{xx})_t$ системы (33), (34) в силу (37) и (39) имеют вид:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2S_x^2 + F_3S_x &= H_1 - 2D^2S_x^2 - H_2S_x, \\ (F_2 + 2D^2)S_x^2 + (F_3 + H_2)S_x + F_1 - H_1 &= 0. \end{aligned}$$

Так как

$$F_2 + 2D^2 = 2(D_x - D^2), \quad F_3 + H_2 = 4DC + E_{2x} + D_t,$$

то

$$2(D_x - D^2)S_x^2 + (4DC + E_{2x} + D_t)S_x + F_1 - H_1 = 0.$$

Итак,

$$P_0S_x^2 + P_1S_x + P_2 = 0, \quad (41)$$

где

$$P_0 = 2(D_x - D^2), \quad P_1 = 4DC + E_{2x} + D_t, \quad P_2 = F_1 - H_1. \quad (42)$$

Далее рассмотрим условия совместности системы (33), (41).

Из (33) и (41) находим

$$S_t = T, \quad S_x = X, \quad (43)$$

где

$$X = \frac{1}{2P_0} \left(\sqrt{P_1^2 - 4P_0P_2} - P_1 \right), \quad T = B + \left(\frac{P_1}{P_0} - 2A \right) X + \frac{P_2}{P_0}. \quad (44)$$

Тогда соотношение

$$T_x = X_t$$

и есть искомое соотношение на функции R, A, w .

Итак, доказана следующая

Теорема 3. Пусть функции $w(t, x), A(t, x), R(t, x)$ связаны единственным соотношением

$$T_x = X_t,$$

где функции $T = T(t, x), X = X(t, x)$ определяются через w, A, R следующей последовательностью равенств:

$$\begin{aligned} B &= \frac{R_{xx}}{R} - w - A^2, \quad C = A_x - \frac{R_t}{R} - 2A \frac{R_x}{R}, \quad D = 2 \frac{R_x}{R}, \\ E_1 &= B_x - 2AC, \quad E_2 = 2(AD - C - A_x), \\ F_1 &= E_{1x} + CE_2, \quad F_2 = 2(D_x - 2D^2), \quad F_3 = 4DC + E_{2x} - DE_2, \\ H_1 &= C_t - DE_1, \quad H_2 = D_t + DE_2, \\ P_0 &= 2(D_x - D^2), \quad P_1 = 4DC + E_{2x} + D_t, \quad P_2 = F_1 - H_1, \\ X &= \frac{1}{2P_0} \left(\sqrt{P_1^2 - 4P_0P_2} - P_1 \right), \quad T = B + \left(\frac{P_1}{P_0} - 2A \right) X + \frac{P_2}{P_0}. \end{aligned}$$

Тогда система

$$S_t = \frac{R_{xx}}{R} - S_x^2 - 2AS_x - w - A^2, \quad S_{xx} = -\frac{R_t}{R} - 2 \frac{R_x}{R} S_x - 2A \frac{R_x}{R} + A_x$$

равносильна системе

$$S_t = T, \quad S_x = X,$$

которая находится в инволюции и, следовательно, функция $\psi = Re^{iS}$ является решением уравнения Паули (13).

7. ИСКЛЮЧЕНИЕ ФУНКЦИИ w

Из соотношения (14) находим функцию w :

$$w = -S_t + \frac{R_{xx}}{R} - S_x^2 - 2AS_x - A^2.$$

Соотношение (15) остаётся свободным. Положим

$$A = S_x.$$

Тогда (15) примет вид

$$R_t = -4R_x S_x,$$

а для функции w имеем представление

$$w = -S_t + \frac{R_{xx}}{R} - 4S_x^2.$$

Итак, при $A = S_x$ имеем систему

$$R_t = -4R_x S_x, \quad w = -S_t + \frac{R_{xx}}{R} - 4S_x^2.$$

Исключим из этой системы функцию S . Из первого соотношения находим

$$S_x = -\frac{R_t}{4R_x}$$

и подставляем во второе соотношение

$$S_t = -w + \frac{R_{xx}}{R} - \frac{R_t^2}{4R_x^2}.$$

Составляем условие совместности $S_{xt} = S_{tx}$:

$$-\frac{R_{tt}R_x - R_{tx}R_t}{4R_x^2} = -w_x + \frac{R_{xxx}R - R_x R_{xx}}{R^2} - \frac{R_t R_{tx} R_x^2 - R_x R_{xx} R_t^2}{2R_x^4}$$

Итак, справедливо следующее предложение.

Предложение 2. Пусть

1) функции $w(t, x)$, $R(t, x)$ связаны соотношением

$$-\frac{R_{tt}R_x - R_{tx}R_t}{4R_x^2} = -w_x + \frac{R_{xxx}R - R_x R_{xx}}{R^2} - \frac{R_t R_{tx} R_x^2 - R_x R_{xx} R_t^2}{2R_x^4},$$

2) функция $S(t, x)$ определяется из системы

$$S_x = -\frac{R_t}{4R_x}, \quad S_t = -w + \frac{R_{xx}}{R} - \frac{R_t^2}{4R_x^2},$$

совместной в силу 1),

3) функция $A(t, x)$ определяется формулой $A = -\frac{R_t}{4R_x}$.

Тогда функция $\psi = Re^{iS}$ является решением уравнения Паули (13).

Далее рассмотрим некоторые частные случаи представления функции w .

Пусть

$$w = \frac{R_{xx}}{R} - \frac{R_t^2}{4R_x^2},$$

то есть $S_t = 0$. Тогда

$$S_x = -\frac{R_t}{4R_x}$$

— функция переменной x , то есть $S_x = f(x)$, $S = \int f(x) dx$ и

$$R_t + 4R_x f(x) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$R = r \left(4t - \int \frac{dx}{f(x)} \right),$$

где $r(p)$ — произвольная функция одной переменной. Далее $A = S_x = f(x)$. Остаётся найти функцию w . Имеем

$$w = \frac{R_{xx}}{R} - \frac{R_t^2}{4R_x^2} = \frac{r'' + r'f''}{rf^2} - 4f^2.$$

Итак, справедливо

Предложение 3. Функции

$$A = f(x), \quad S = \int f(x) dx, \quad R = r \left(4t - \int \frac{dx}{f(x)} \right), \quad w = \frac{r'' + r'f''}{rf^2} - 4f^2,$$

где $f(x)$, $r(p)$ — произвольные функции одного аргумента и $p = 4t - \int \frac{dx}{f(x)}$ являются решением системы (14), (15) и, следовательно, функция $\psi = Re^{iS}$ является решением уравнения Паули (13).

Пусть

$$w = \frac{R_{xx}}{R} + \frac{1}{4}H \left(\frac{R_t}{R_x} \right),$$

где $H(\cdot)$ — некоторая функция одной переменной. Тогда

$$S_x = -\frac{R_t}{4R_x}, \quad S_t = -\frac{R_t^2}{4R_x^2} - \frac{1}{4}H \left(\frac{R_t}{R_x} \right).$$

Введём обозначение

$$B = \frac{R_t}{R_x}.$$

Тогда

$$S_x = -\frac{1}{4}B, \quad S_t = -\frac{1}{4}(B^2 + H(B)).$$

Условие совместности $S_{xt} = S_{tx}$ примет вид

$$B_t = (2B + H'(B))B_x.$$

Отсюда находим

$$(2B + H'(B))t + x = h(B),$$

где $h(\cdot)$ — произвольная функция одной переменной.

Функция R находится из уравнения

$$R_t - BR_x = 0,$$

а функция $A = S_x = -\frac{1}{4}B$.

Итак, справедливо следующее предложение.

Предложение 4. Пусть

1) функция $B = B(t, x)$ — решение неявного уравнения

$$(2B + H'(B))t + x = h(B),$$

где $h(\cdot)$, $H(\cdot)$ — произвольные функции одной переменной,

2) функция $R = R(t, x)$ — решение уравнения

$$R_t - BR_x = 0,$$

3) функция $S = S(t, x)$ — решение системы

$$S_x = -\frac{1}{4}B, \quad S_t = -\frac{1}{4}(B^2 + H(B)),$$

совместной в силу выбора функции B .

Тогда функции

$$A = -\frac{1}{4}B, \quad w = \frac{R_{xx}}{R} + \frac{1}{4}H\left(\frac{R_t}{R_x}\right), \quad \psi = Re^{iS}$$

являются решением уравнения Паули (13).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представляется интересным провести аналогичный анализ уравнений, связывающих функции амплитуды, фазы, потенциала и векторного потенциала для многомерного уравнения Паули, а также применить полученные результаты к нелинейным уравнениям Паули, когда потенциал является функцией от амплитуды. (Например, как для кубического уравнения Шредингера [14, 33].) Отметим также, что некоторые результаты, связанные с конструктивным подходом исследования уравнений математической физики и применением их к поиску коэффициентов и решений можно найти в работах [16, 17, 33, 34, 35, 36, 37].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2026-0029). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976 г., 664 с.
2. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
4. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
5. *Виноградов А.М.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. М.: Факториал, 1997.
6. *Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н.* Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
7. *Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли-Бэклунда. Функцион. анализ и его прилож. 1980, Т. 14, вып. 1, с. 25–36.
8. *Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* О бесконечных алгебрах Ли — Бэклунда // Функцион. анализ и его прилож. 1980. Т. 14, вып. 4. С. 79–80.
9. *Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
10. *Виноградов А.М.* Когомологический анализ уравнений с частными производными и вторичное исчисление. М.: МЦНМО, 2021.
11. *Miura R.M.* Backlund transformations // Lect. Notes Math. 1976. V. 515.
12. *Жаринов В.В.* О соответствии Бэклунда // Мат. сб. 1988. Т. 136, № 2. С. 274–291.
13. *Жаринов В.В.* О соответствии Бэклунда для эволюционных уравнений в многомерном пространстве // Теор. и мат. физика. 2006. Т. 147, № 1. С. 3–13.
14. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987 г.
15. *Капцов О.В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
16. *Аниконов Ю.Е., Нецадим М.В.* Обобщённое преобразование Коула — Хопфа // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 3(75). С. 18–25; DOI 10.17377/sibjim.2018.21.302
17. *Аниконов Ю.Е., Нецадим М.В.* Метод дифференциальных связей и нелинейные обратные задачи // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 36–47.
18. *Гельфанд И.М., Локуцкий О.В.* Метод «прогонки» для решения разностных уравнений. В книге: Годунов С.К., Рябенький В.С., Введение в теорию разностных схем. М.: Физ.-мат. лит., 1962.
19. *Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И.* Метод расчёта поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1984. Т. 24, № 2. С. 272–286.
20. *Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г.* Метод расчёта нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Доклады РАН. 1988. Т. 301, № 4. С. 834–839.
21. *Карчевский А.Л.* Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и Геофизика. 2007. Т. 48, № 8. С. 889–898.
22. *Карчевский А.Л.* Аналитические решения дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для краевых условий любого вида // Сиб. журн. индустр. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 48–68.
23. *Konopelchenko B.G.* The group structure of Backlund transformations // Phys. Lett. A. 1979. V. 74. P. 189–192.
24. *Sasaki R.* Canonical structure of Backlund transformations // Phys. Lett. A. 1980. V. 78. P. 7–10.
25. *Konopelchenko B.G.* Elementary Backlund transformations, nonlinear superposition principle and solution of the integrable equations // Phys. Lett. A. 1982. V. 87. P. 445–448.
26. *Kuznetsov V.B., Sklyanin E.K.* On Backlund transformations for many-body systems // J. Physics A. 1998. V. 31. P. 2241–2251.

27. Белоусов Н.М. Преобразование Бэклунда для нелинейного уравнения Шредингера // Записки научных семинаров ПОМИ. 2020. Т. 494. С. 6–22.
28. Мива Т., Джимбо М., Датэ Э. Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечномерные алгебры. М.: МЦНМО, 2005.
29. Нешадим М.В. Преобразования Бэклунда для одномерного уравнения Шредингера // Сиб. журн. индустр. математики. 2021. Т. 24, № 2. С. 116–125; DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.209
30. Нешадим М.В., Симонов А.А. Преобразования Бэклунда релятивистского уравнения Шредингера. Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26, № 4. С. 109–124; DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.408
31. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана, М.–Л.: ГИИТЛ, 1948.
32. Поммаре Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. М.: Мир, 1983 г.
33. Нешадим М.В., Чупахин А.П. Частично-инвариантные решения кубического уравнения Шредингера // Вестн. Удмурт. ун-та. 2009. Вып. 3. С. 35–41.
34. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Algebraic-Analytic Methods for Constructing Solutions to Differential Equations and Inverse Problems // J. Math. Sci. 2016. June 14, 2016. V. 215, Iss. 4. P. 444–459.
35. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Representations for the solutions and coefficients of second-order differential equations // J. Appl. Indust. Math. 2013. V. 7, N 1. P. 1–7.
36. Аниконов Ю.Е., Нешадим М.В. Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 2. С. 40–49.
37. Нешадим М.В. Обратная задача теории совместности и функционально-инвариантные решения волнового уравнения в двумерном пространстве // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2012. V. 40, вып. 14. С. 87–95.

UDC 517.9

**BACKLUND TRANSFORMATIONS OF THE PAULI EQUATION FOR
THE MOTION OF AN ELECTRON IN AN ELECTROMAGNETIC FIELD**© 2026 M. V. Neshchadim^{1a}, N. S. Chasovskikh^{2b}¹*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Acad. Koptuyug pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia,*²*Gorno-Altaysk State University,
Lenin st., 1, Gorno-Altaysk 659700, Russia*E-mails: ^aneshch@math.nsc.ru, ^bnikolayaltay@rambler.ru

Received 30.05.2024, revised 30.05.2024, accepted 10.12.2025

Abstract. We study the system of equations that is obtained based on the Pauli equation and connects the functions of scalar and vector potentials, amplitude, phase. Methods of the theory of compatibility systems of partial differential equations are found completely integrable systems that connect only three of the four functions. The found systems are related by Backlund transformations.

Keywords: Pauli equation, Backlund transformations, compatibility conditions.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.105

REFERENCES

1. Blokhintsev D.I. *Osnovy kvantovoi mekhaniki [Fundamentals of Quantum Mechanics]*. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
2. Ovsyannikov L.V. *Group Analysis of Differential Equations*. N. Y.: Academic Press, 1982
3. Ibragimov N.Kh. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*. Dordrecht-Boston-Lancaster: Reidel Publishing Company, 1985.
4. Olver P.J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. N. Y.: Springer-Verl., 1986.
5. Krasilshchik I.S., Vinogradov A.M. *Symmetries and Conservation Laws for Differential Equations of Mathematical Physics*. Providence: AMS, 1999.
6. Sidorov A.F., Shapeev V.P., Yanenko N.N. *Metod differentsial'nykh svyazei i ego prilozhenie v gazovoi dinamike [Method of Differential Constraints and Its Applications in Gas Dynamics]*. Novosibirsk: Nauka, 1984 (in Russian).
7. Ibragimov N.Kh., Shabat A.B. Evolutionary Equations with a Nontrivial Lie-Bäcklund Group. *Function. Anal. and Its Appl.*, 1980, Vol. 14, No. 1, pp. 25–36.
8. Ibragimov N.Kh., Shabat A.B. Infinite Lie–Bäcklund Algebras. *Function. Anal. and Its Appl.*, 1980, Vol. 14, No. 1, pp. 313.
9. Vinogradov A.M., Krasilshchik I.S., Lychagin V.V. *Vvedenie v geometriyu nelineinykh differentsial'nykh uravnenii [Introduction to the Geometry of Nonlinear Differential Equations]*. Moscow: Nauka, 1983 (in Russian).
10. Vinogradov A.M. *Cohomological Analysis of Partial Differential Equations and Secondary Calculus*. Providence: AMS, 2001.
11. Miura R.M. Backlund transformations. *Lect. Notes Math.*, 1976, Vol. 515.

12. Zharinov V.V. On Bäcklund correspondences. *Math. USSR-Sb.*, 1989, Vol. 64, No. 1, pp. 277–293.
13. Zharinov V.V. Bäcklund Correspondences for Evolution Equations in a Multidimensional Space. *Theoret. Math. Phys.*, 2006, Vol. 147, No. 1, pp. 449–459.
14. Ablowitz M.J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
15. Kaptsov O.V. Metody integrirvaniya uravnenii s chastnymi proizvodnymi [Integration Methods for Partial Differential Equations]. Moscow: Fizmatlit, 2009 (in Russian).
16. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Generalized Cole-Hopf Transformation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 409–416; DOI: 10.1134/S199047891803002X
17. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Metod differentsial'nykh svyazei i nelineinye obratnye zadachi [The method of differential relations and nonlinear inverse problems]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2015, Vol. 18, No. 2, pp. 36–47 (in Russian).
18. Gel'fand I.M., Lokutsievskii O.V. Metod «progonki» dlya resheniya raznostnykh uravnenii. V kniige: Godunov S.K., Ryaben'kii V.S., Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem. [The «sweep» method for solving difference equations, in Introduction to the Theory of Difference Schemes]. Moscow: Fizmatlit, 1962, pp. 283–309 (in Russian).
19. Akkuratov G.V., Dmitriev V.I. Method for calculating the field of steady elastic vibrations in a layered medium. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1984, Vol. 24, No. 1, pp. 166–176.
20. Fat'yanov A.G., Mikhailenko B.G. Metod rascheta nestatsionarnykh volnovykh polei v neuprugikh sloisto-neodnorodnykh sredakh [Method for calculating unsteady wave fields in inelastic layered inhomogeneous media]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1988, Vol. 301, No. 4, pp. 834–839 (in Russian).
21. Karchevsky A.L. Analytical solution of Maxwell's equations in the frequency domain for horizontally layered anisotropic media. *Geol. Geophys.*, 2007, Vol. 48, No. 8, pp. 889–898.
22. Karchevsky A.L. Analytical solutions to the differential equation of transverse vibrations of a piecewise homogeneous beam in the frequency domain for the boundary conditions of various types. *J. Appl. Industrial. Math.*, 2020, Vol. 14, No. 4, pp. 648–665.
23. Konopelchenko B.G. The group structure of Backlund transformations. *Phys. Lett. A*, 1979, Vol. 74, pp. 189–192.
24. Sasaki R. Canonical structure of Backlund transformations. *Phys. Lett. A*, 1980, Vol. 78, pp. 7–10.
25. Konopelchenko B.G. Elementary Backlund transformations, nonlinear superposition principle and solution of the integrable equations. *Phys. Lett. A*, 1982, Vol. 87, pp. 445–448.
26. Kuznetsov V.B., Sklyanin E.K. On Backlund transformations for many-body systems. *J. Physics A*, 1998, Vol. 31, pp. 2241–2251.
27. Belousov N.M. Preobrazovanie Beklunda dlya nelineinogo uravneniya Schrödinger [Bäcklund transformation for the nonlinear Schrödinger equation]. *Zap. Nauchn. Semin. POMI*, 2020, Vol. 494, pp. 6–22 (in Russian).
28. Miwa T., Jimbo M., Date E. Solitons: Differential Equations, Symmetries and Infinite Dimensional Algebras. Cambridge Univ. Press, 2000.
29. Neshchadim M.V. Bäcklund transformations for the one-dimensional Schrödinger Equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2021, Vol. 15, No. 2, pp. 307–314; DOI: 10.1134/S1990478921020125
30. Neshchadim M.V., Simonov A.A. Bäcklund Transformations of the Relativistic Schrödinger Equation. *J. Appl. Indust. Math.*, 2023, Vol. 17, No. 4, pp. 828–841; DOI: 10.1134/S1990478923040129
31. Finikov S.P. Metod vneshnikh form Kartana [Cartan's Method of Exterior Forms]. Moscow: Gostekhizdat, 1948 (in Russian).
32. Pommaret J. Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups. Routledge, 1978.
33. Neshchadim M.V., Chupakhin A.P. Partially invariant solutions to the cubic Schrödinger equation. *Vestnik Udmurt. Univ.*, 2009, No. 3, pp. 35–41.
34. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Algebraic-Analytic Methods for Constructing Solutions to Differential Equations and Inverse Problems. *J. Math. Sci.*, 2016, June 14, 2016, Vol. 215, Iss. 4, pp. 444–459.

35. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Representations for the solutions and coefficients of second-order differential equations. *J. Appl. Indust. Math.*, 2013, Vol. 7, No. 1, pp. 1–7.
36. Anikonov Yu.E., Neshchadim M.V. Representations for the solutions and coefficients of evolution equations. *J. Appl. Ind. Math.*, 2013, Vol. 7, Vo. 3, pp. 326–334.
37. Neshchadim M.V. Obratnaya zadacha teorii sovместnosti i funktsional'no-invariantnye resheniya volnovogo uravneniya v dvumernom prostranstve [Inverse problem of consistency theory and functionally invariant solutions of the wave equation in two-dimensional space]. *Vestn. Yuzhno-Ural'skogo gos. un-ta. Ser. Mat. Model. Program.*, 2012, Vol. 40, Iss. 14, pp. 87–95 (in Russian).

УДК 517.958

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ВРЕМЕНИ

© 2026 В. Г. Романов^{1a}, Т. В. Бугуева^{1,2b}

¹*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
просп. Акад. Коптюга, 4, г. Новосибирск 630090, Россия,*

²*Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 05.01.2025 г.; после доработки 11.02.2026 г.;
принята к публикации 25.02.2026 г.

Рассматривается обратная задача определения коэффициента $q(x, t)$ волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} + q(x, t)u = 0$, когда $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T]$. Изучены свойства решения прямой задачи. Доказана теорема существования и единственности решения прямой задачи. Для обратной задачи доказана теорема о локальном существовании её решения и получена глобальная оценка устойчивости её решения.

Ключевые слова: обратная задача, локальное существование, глобальная устойчивость, потенциал, зависящий от времени.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.106

ВВЕДЕНИЕ

Обратные задачи для дифференциальных уравнений об определении коэффициентов зависящих от временной и пространственных переменных мало изучены и рассматривались ранее в сравнительно небольшом количестве публикаций.

В работе [1] доказывается теорема единственности решения обратной задачи для волнового уравнения $u_{tt} - \Delta u + q(t, \mathbf{x})u = 0$, где $t \in R$, $\mathbf{x} \in R^n$, n — нечётное, $n \geq 3$. В работах [2], [3] рассматриваются различные постановки обратных задач определения коэффициента $q(t, x)$, входящего в волновое уравнение $u_{tt} - \Delta u + q(t, \mathbf{x})u = 0$ при $(t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega$, где Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $T > 0$. Доказаны теоремы единственности. В работе [3] получена оценка устойчивости при $n = 2$. В работах [4] и [5] изучались вопросы единственности решения обратных задач в предположении, что задано отображение, переводящее данные Дирихле краевой задачи в данные Неймана. Подобные обратные задачи естественным образом возникают для движущихся сред. В работах [6] и [7] изучаются вопросы визуализации движущихся объектов в случайных средах. Близкими к этому направлению являются также работы [8], [9] для движущихся турбулентных сред. В работе [10] в трёхмерном случае рассматривается обратная задача определения коэффициента $a(\mathbf{x}, t)$, входящего в волновое уравнение $u_{tt} = \Delta u + a(\mathbf{x}, t)u + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, для неё построен глобально сходящийся численный метод Клибанова, под названием «convexification» и приведены результаты численных экспериментов.

В настоящей работе изучается новая постановка обратной задачи, в которой данные обратной задачи зависят от переменного параметра s , определяющего момент приложения точечного источника. В разд. 2 изучается прямая задача, свойства гладкости её решения. Затем, в разд. 3 рассматривается обратная задача, устанавливается её однозначная локальная разрешимость и находится глобальная оценка устойчивости решения.

Нам не известны другие работы по определению потенциала, зависящего от времени, когда пространственная переменная является одномерной.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть T — фиксированное положительное число.

Прямая задача. При фиксированном $s \in [0, T]$ найти функцию $u(x, t, s)$, удовлетворяющую соотношениям

$$u_{tt} - u_{xx} - q(x, t)u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T], \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = \delta(t - s), \quad (3)$$

где $q(x, t)$ — непрерывная функция аргументов x и t ; $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Замечание. При $s = 0$ в граничном условии (2) следует положить $s = +0$.

Обратная задача. Пусть $f(t, s)$ — заданная функция для $(t, s) \in D(T)$, $D(T) = \{(t, s) \mid 0 \leq s \leq t \leq T\}$. Требуется найти функцию $q(x, t)$ в области $G(T) = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$ по заданной информации о решении задачи (1)–(3)

$$u_x(0, t, s) = f(t, s), \quad (t, s) \in D(T). \quad (4)$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Очевидно, что $u(x, t, s) = 0$ в области $\{(x, t) \mid x \geq 0, t < s + x\}$. Решение прямой задачи эквивалентно решению уравнения

$$u(x, t, s) = \delta(t - s - x) + \frac{1}{2} \iint_{D(x, t, s)} q(\xi, \tau) u(\xi, \tau, s) d\xi d\tau, \quad (5)$$

где $D(x, t, s)$ —прямоугольник, ограниченный прямыми:

$$\tau + \xi = x + t, \quad \tau + \xi = t - x, \quad \tau - \xi = t - x, \quad \tau - \xi = s.$$

Определим новую функцию

$$v(x, t, s) = u(x, t, s) - \delta(t - s - x). \quad (6)$$

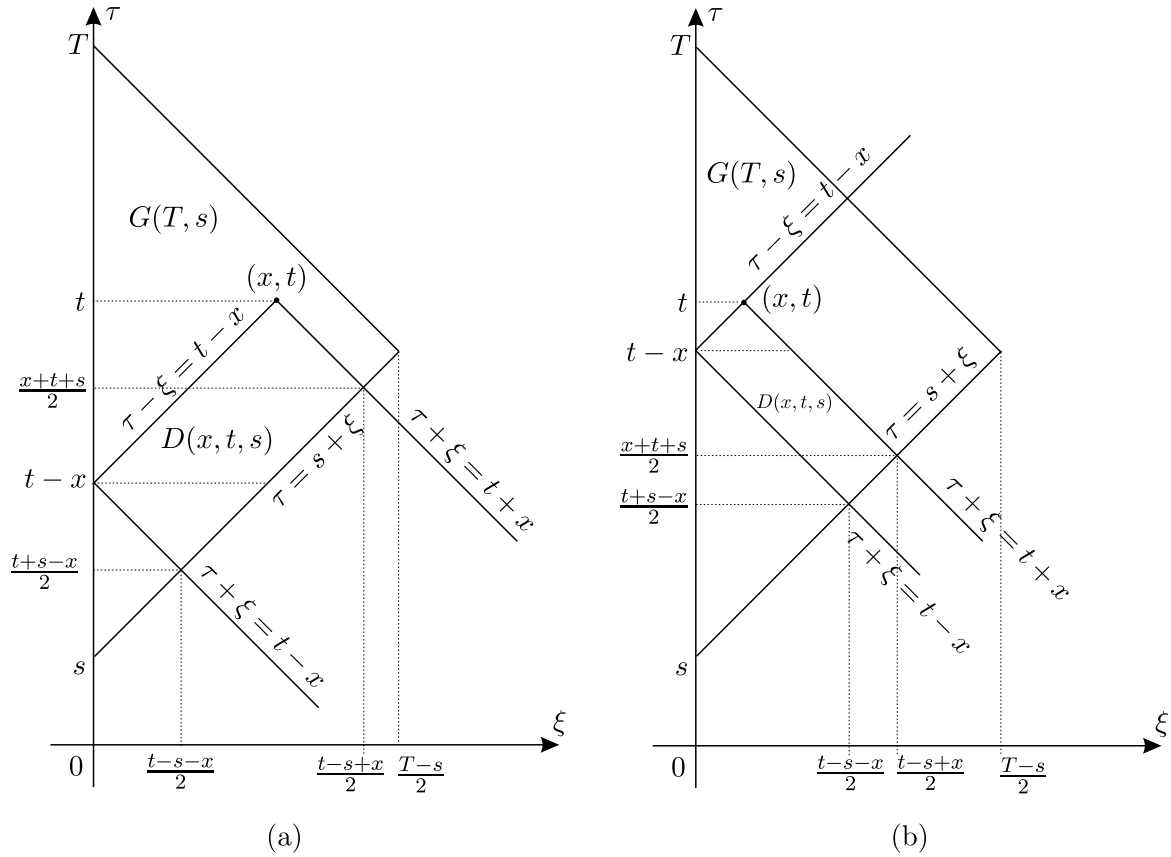
В силу (6) уравнение (5) примет вид

$$\begin{aligned} v(x, t, s) &= \frac{1}{2} \iint_{D(x, t, s)} q(\xi, \tau) [v(\xi, \tau, s) + \delta(\tau - s - \xi)] d\xi d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \iint_{D(x, t, s)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим область $G(T, s) = \{(x, t) \mid s + x \leq t \leq T - x\}$. Пусть $(x, t) \in G(T, s)$. Обозначим $S(\tau, x, t) = \{\xi \mid (\xi, \tau) \in D(x, t, s), \tau = \text{const}\}$ — сечение области $G(T, s)$ прямой $\tau = \text{const}$, $(t + s - x)/2 \leq \tau \leq t$; $\text{meas}_\xi S(\tau, x, t)$ — длины отрезков, пересекающих область $D(x, t, s)$ при фиксированных τ . Тогда следующая оценка:

$$\max \left\{ \text{meas}_\xi S(\tau, x, t) \right\} = \frac{t - s + x}{2} \leq \frac{T - s}{2} \leq \frac{T}{2} \quad (8)$$

справедлива для обоих случаев $t - x \leq (t + x + s)/2$ и $(t + x + s)/2 \leq t - x$ (см. рис. 1).


 Рис. 1. Область $D(x, t, s)$:

 (a) — случай: $t - x \leq (t + x + s)/2$; (b) — случай: $(t + x + s)/2 \leq t - x$

Запишем уравнение (7) следующим образом:

$$v(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\tau + \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\xi. \quad (9)$$

 Определим последовательность функций $v_n(x, t, s)$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$v_0(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi, \quad (10)$$

 а функции $v_n(x, t, s)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$v_n(x, t, s) = v_0(x, t, s) + \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) v_{n-1}(\xi, \tau, s) d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Лемма 1. Последовательность $\{v_n(x, t, s)\}$ равномерно сходится в области $G(T, s)$ и определяет в этой области непрерывную предельную функцию $v(x, t, s)$, которая является решением уравнения (9).

Доказательство. Введём в рассмотрение разности

$$w_n(x, t, s) = v_n(x, t, s) - v_{n-1}(x, t, s), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из формулы (9) следуют равенства

$$\begin{aligned} w_1(x, t, s) &= v_1(x, t, s) - v_0(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) v_0(\xi, \tau, s) d\xi, \\ w_n(x, t, s) &= v_n(x, t, s) - v_{n-1}(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) w_{n-1}(\xi, \tau, s) d\xi, \\ n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим $Q = \|q\|_{C(G(T, s))}$, тогда для $(x, t) \in G(T, s)$, в силу (10), имеем

$$|v_0(x, t, s)| \leq \frac{T}{4} Q, \quad (13)$$

а, в силу (12), можем написать

$$\begin{aligned} |w_1(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) v_0(\xi, \tau, s)| d\xi \leq \frac{TQ}{4} \frac{Q}{2} \int_s^t \frac{T}{2} d\tau = \left(\frac{TQ}{4}\right)^2 \frac{(t-s)}{1!}. \\ |w_2(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) w_1(\xi, \tau, s)| d\xi \\ &\leq \left(\frac{TQ}{4}\right)^2 \frac{Q}{2} \int_s^t \frac{T}{2} \frac{(\tau-s)}{1!} d\tau = \left(\frac{TQ}{4}\right)^3 \frac{(t-s)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$|w_k(x, t, s)| \leq \left(\frac{TQ}{4}\right)^{k+1} \frac{(t-s)^k}{k!}.$$

тогда в силу формул (12) получим

$$\begin{aligned} |w_{k+1}(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau) w_k(\xi, \tau, s)| d\xi \\ &\leq \left(\frac{TQ}{4}\right)^{k+1} \frac{Q}{2} \int_s^t \frac{T}{2} \frac{(\tau-s)^k}{k!} d\tau = \left(\frac{TQ}{4}\right)^{k+2} \frac{(t-s)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу метода математической индукции, следует справедливость оценки

$$|w_n(x, t, s)| \leq \left(\frac{TQ}{4}\right)^{n+1} \frac{(t-s)^n}{n!}, \quad (x, t) \in G(T, s), \quad (14)$$

при любом целом n .

Из оценки (14) следует равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t, s)$ в области $G(T, s)$, что доказывает равномерную сходимость последовательности $v_n(x, t, s)$ в этой же области. Так как очевидно, что все $v_n(x, t, s)$ непрерывны в этой области, то и предел этой последовательности определяет непрерывную в области $G(T, s)$ функцию, которая является решением уравнения (9). \square

Лемма 2. В области $G(T, s)$ уравнение (9) имеет единственное непрерывное решение.

Доказательство. Предположим, что в области $G(T, s)$ существуют два решения $v_k(x, t, s)$, $k = 1, 2$, уравнения (9), которые являются непрерывными функциями, ограниченными некоторой постоянной A . Обозначим $\tilde{v}(x, t, s) = v_1(x, t, s) - v_2(x, t, s)$, тогда имеет место оценка

$$|\tilde{v}(x, t, s)| \leq |v_1(x, t, s)| + |v_2(x, t, s)| \leq 2A \quad (15)$$

и справедливо равенство

$$\tilde{v}(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} q(\xi, \tau) \tilde{v}(\xi, \tau, s) d\xi. \quad (16)$$

Отсюда в силу (15) получим оценку

$$|\tilde{v}(x, t, s)| \leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau)| |\tilde{v}(\xi, \tau, s)| d\xi \leq \frac{1}{2} \int_s^t \frac{T}{2} 2AQ d\tau = A \frac{TQ}{2} \frac{(t-s)}{1!}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в неравенство (16), получим оценку

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau)| |\tilde{v}(\xi, \tau, s)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} \int_s^t \frac{T}{2} QA \frac{TQ}{2} \frac{(\tau-s)}{1!} d\tau = \frac{A}{2} \left(\frac{TQ}{2} \right)^2 \frac{(t-s)^2}{2!} < A \left(\frac{TQ}{2} \right)^2 \frac{(t-s)^2}{2!}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в неравенство (16), получим новую оценку

$$\begin{aligned} |\tilde{v}(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t+s-x)/2}^t d\tau \int_{S(\tau, x, t)} |q(\xi, \tau)| |\tilde{v}(\xi, \tau, s)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} \int_s^t A \frac{T}{2} Q \left(\frac{TQ}{2} \right)^2 \frac{(\tau-s)^2}{2!} d\tau = \frac{A}{2} \left(\frac{TQ}{2} \right)^3 \frac{(t-s)^3}{3!} < A \left(\frac{TQ}{2} \right)^3 \frac{(t-s)^3}{3!}. \end{aligned} \quad (19)$$

Повторяя это процесс итераций n раз, приходим к оценке

$$|\tilde{v}(x, t, s)| \leq A \left(\frac{TQ}{2} \right)^n \frac{(t-s)^n}{n!}. \quad (20)$$

Так как правая часть неравенства (20) равномерно стремится к нулю в области $G(T, s)$ при $n \rightarrow \infty$, то $\tilde{v}(x, t, s) = 0$ в области $G(T, s)$, т. е. $v_1(x, t, s) = v_2(x, t, s)$ для всех $(x, t) \in G(T, s)$. \square

Лемма 3. *Решение уравнения (7) является функцией класса $C^1(G(T, s))$.*

Доказательство. Пусть $(x, t) \in G(T, s)$. Запишем уравнение (7) в виде суммы повторных интегралов.

Вначале рассмотрим случай $t - x \leq (t + x + s)/2$, в этом случае уравнение (7) примет вид (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} v(x, t, s) = & \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} d\tau \int_{t-x-\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{(t+x+s)/2} d\tau \int_{x-t+\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

А теперь рассмотрим случай $(t + x + s)/2 \leq t - x$, в этом случае уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} v(x, t, s) = & \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{(t+x+s)/2} d\tau \int_{t-x-\tau}^{\tau-s} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^{t-x} d\tau \int_{t-x-\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{t+x-\tau} q(\xi, \tau)v(\xi, \tau, s) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

При дифференцировании каждого из уравнений (21) и (22) по переменным x и t получим один и тот же результат:

$$\begin{aligned} v_t(x, t, s) = & \frac{1}{4}q\left(\frac{t-s+x}{2}, \frac{t+s+x}{2}\right) - \frac{1}{4}q\left(\frac{t-s-x}{2}, \frac{t+s-x}{2}\right) \\ & - \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} q(t-x-\tau, \tau)v(t-x-\tau, \tau, s) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(x-t+\tau, \tau)v(x-t+\tau, \tau, s) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t q(t+x-\tau, \tau)v(t+x-\tau, \tau, s) d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} v_x(x, t, s) = & \frac{1}{4}q\left(\frac{t-s+x}{2}, \frac{t+s+x}{2}\right) + \frac{1}{4}q\left(\frac{t-s-x}{2}, \frac{t+s-x}{2}\right) \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t-x+s)/2}^{t-x} q(t-x-\tau, \tau)v(t-x-\tau, \tau, s) d\tau - \frac{1}{2} \int_{t-x}^t q(x-t+\tau, \tau)v(x-t+\tau, \tau, s) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t+x+s)/2}^t q(t+x-\tau, \tau)v(t+x-\tau, \tau, s) d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

Равенства (23) и (24) определяют непрерывные в $G(T, s)$ функции $v_t(x, t, s)$ и $v_x(x, t, s)$. \square

3. Исследование обратной задачи

Вернёмся к уравнению (7) и запишем его в виде суммы повторных интегралов, изменив порядок интегрирования (см. рис. 2).

В случае $t - x \leq (t + x + s)/2$ уравнение (7) примет вид

$$\begin{aligned} v(x, t, s) = & \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x-s)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{(t-x-s)/2}^x d\xi \int_{s+\xi}^{t-x+\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau + \frac{1}{2} \int_x^{(t+x-s)/2} d\xi \int_{s+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau, \end{aligned} \quad (25)$$

а в случае $(t + x + s)/2 \leq t - x$ имеем

$$\begin{aligned} v(x, t, s) = & \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{t-x-\xi}^{t-x+\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_x^{(t-x-s)/2} d\xi \int_{t-x-\xi}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau + \frac{1}{2} \int_{(t-x-s)/2}^{(t+x-s)/2} d\xi \int_{s+\xi}^{t+x-\xi} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Так же как в разд. 2 при дифференцировании каждого из уравнений (25) и (26) по переменной x получим один и тот же результат:

$$\begin{aligned} v_x(x, t, s) = & \frac{1}{4} q\left(\frac{t-s+x}{2}, \frac{t+s+x}{2}\right) + \frac{1}{4} q\left(\frac{t-s-x}{2}, \frac{t+s-x}{2}\right) \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{(t-x-s)/2} q(\xi, t-x-\xi) v(\xi, t-x-\xi, s) d\xi + \frac{1}{2} \int_x^{(t-s+x)/2} q(\xi, t+x-\xi) v(\xi, t+x-\xi, s) d\xi \\ & - \frac{1}{2} \int_0^x q(\xi, t-x+\xi) v(\xi, t-x+\xi, s) d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$G_0(T) = \{(x, t, s) \mid (x, t) \in G(T, s), 0 \leq s \leq T\}.$$

Положим в (27) $x = 0$ и воспользуемся равенством (4), в результате получим уравнение для функции q :

$$f(t, s) = \frac{1}{2} q\left(\frac{t-s}{2}, \frac{t+s}{2}\right) + \int_0^{(t-s)/2} q(\xi, t-\xi) v(\xi, t-\xi, s) d\xi, \quad (t, s) \in D(T). \quad (28)$$

Заметим, что точка $((t-s)/2, (t+s)/2)$ при изменении t и s в $D(T)$ пробегает все точки области $G(T) = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq t \leq T - x\}$.

Положим $\frac{t-s}{2} = x$, $\frac{t+s}{2} = t'$, тогда $t = x + t'$, $s = t' - x$ и уравнение (28) примет вид

$$f(x + t', t' - x) = \frac{1}{2} q(x, t') + \int_0^x q(\xi, x + t' - \xi) v(\xi, x + t' - \xi, t' - x) d\xi.$$

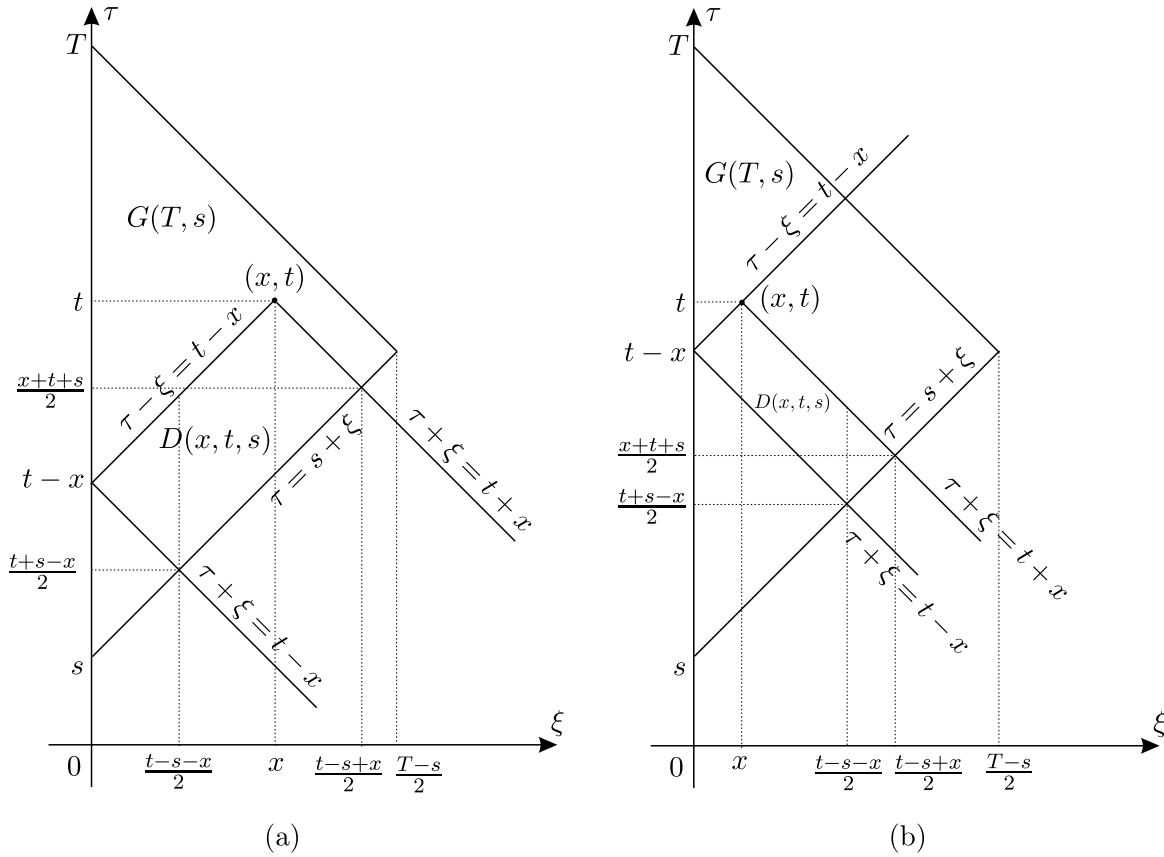


Рис. 2. Область $D(x, t, s)$:

(a) — случай: $t - x \leq (t + x + s)/2$; (b) — случай: $(t + x + s)/2 \leq t - x$

Обозначая

$$q_0(x, t') = 2f(x + t', t' - x), \quad (29)$$

верхнее равенство можем записать следующим образом:

$$q(x, t') = q_0(x, t') - 2 \int_0^x q(\xi, x + t' - \xi) v(\xi, x + t' - \xi, t' - x) d\xi, \quad (x, t') \in G(T), \quad (30)$$

Для дальнейшего удобно заменить t' на t . Тогда уравнение (30) примет вид

$$q(x, t) = q_0(x, t) + 2 \int_0^x q(\xi, x + t - \xi) v(\xi, x + t - \xi, t - x) d\xi, \quad (x, t) \in G(T). \quad (31)$$

Вводя новые функции

$$\tau_1(\xi, x, t) = \frac{t - x + s}{2} + \left| \xi - \frac{t - x - s}{2} \right|, \quad \tau_2(\xi, x, t) = t - |\xi - x|, \quad (32)$$

уравнения (25), (26) можем записать в виде одного уравнения (преобразованного уравнения (7)):

$$v(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q(\xi, s+\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} d\xi \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau, \quad (x, t, s) \in G_0(T). \quad (33)$$

Запишем уравнение (33) в виде

$$v(x, t, s) = v_0(x, t, s) + \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} [q(\xi, s + \xi) - q_0(\xi, s + \xi)] d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} d\xi \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau, \quad (x, t, s) \in G_0(T), \quad (34)$$

в котором

$$v_0(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} q_0(\xi, s + \xi) d\xi. \quad (35)$$

Уравнения (31) и (34) образуют замкнутую систему интегральных уравнений обратной задачи. Для анализа её используем метод сжатых отображений.

Рассмотрим класс функций $f(t, s)$:

$$\mathcal{F} = \{f \in C(D(T)) \mid |f(t, s)| \leq F\}.$$

Тогда, в силу (29), (35), находим, что

$$|q_0(x, t)| \leq 2F, \quad |v_0(x, t, s)| \leq Fx \leq \frac{FT}{2}, \quad (36)$$

$$|q_0(x, t)| \leq M(F, T), \quad |v_0(x, t, s)| \leq M(F, T), \quad M(F, T) := F \max\{2, T/2\}.$$

Из (32) имеем

$$\tau_2(\xi, x, t) - \tau_1(\xi, x, t) \leq \frac{T}{2}. \quad (37)$$

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда существует положительное число $T_0 \leq T$ и единственная функция $q(x, t) \in C(G(T))$, такие, что решение задачи (1)–(3) удовлетворяет условию (4) при $(t, s) \in D(T_0)$.

Доказательство. Запишем уравнения (31), (34) в операторном виде

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}(\mathbf{g}), \quad (38)$$

где

$$\mathbf{g}(x, t, s) = (q(x, t), v(x, t, s)), \quad \mathbf{g}_0 = (q_0(x, t), v_0(x, t, s)).$$

Операторы $A_1(\mathbf{g})$, $A_2(\mathbf{g})$ определяются следующим образом:

$$A_1(\mathbf{g}) = q_0(x, t) + 2 \int_0^x q(\xi, x + t - \xi) v(\xi, x + t - \xi, t - x) d\xi, \quad (x, t) \in G(T). \quad (39)$$

$$A_2(\mathbf{g}) = v_0(x, t, s) + \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} [q(\xi, s + \xi) - q_0(\xi, s + \xi)] d\xi \\ + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T). \quad (40)$$

Обозначим $\mathbf{C}(G_0(T))$ — пространство непрерывных вектор-функций с нормой

$$\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_0(T))} = \max \{ \|q\|_{C(G(T))}, \|v\|_{C(G_0(T))} \}.$$

В силу (36), можем написать

$$\|\mathbf{g}_0\|_{\mathbf{C}(G_0(T))} \leq M(F, T). \quad (41)$$

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathbf{C}(G_0(T))$ замкнутое множество

$$\mathcal{M}(T, F) := \{ \mathbf{g} \in \mathbf{C}(G_0(T)) \mid \|q - q_0\|_{C(G(T))} \leq M(F, T), \|v - v_0\|_{C(G_0(T))} \leq M(F, T) \}. \quad (42)$$

На этом множестве справедливы оценки

$$\|q\|_{C(G(T))} \leq 2M(F, T), \quad \|v\|_{C(G_0(T))} \leq 2M(F, T). \quad (43)$$

Из равенств (39), (40) имеем

$$A_1(\mathbf{g}) - q_0(x, t) = 2 \int_0^x q(\xi, x + t - \xi) v(\xi, x + t - \xi, t - x) d\xi, \quad (x, t) \in G_0(T), \quad (44)$$

$$\begin{aligned} A_2(\mathbf{g}) - v_0(x, t, s) &= \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} [q(\xi, s + \xi) - q_0(\xi, s + \xi)] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \quad (x, t) \in G_0(T). \end{aligned} \quad (45)$$

Учитывая (43), можем написать

$$\begin{aligned} |A_1(\mathbf{g}) - q_0(x, t)| &\leq 2 \int_0^x |q(\xi, x + t - \xi) v(\xi, x + t - \xi, t - x)| d\xi \\ &\leq 8M^2(F, T)x \leq 4TM^2(F, T), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} |A_2(\mathbf{g}) - v_0(x, t, s)| &\leq \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} |q(\xi, s + \xi) - q_0(\xi, s + \xi)| d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} |q(\xi, \tau) v(\xi, \tau, s)| d\tau d\xi \\ &\leq \frac{1}{2} M(F, T)x + TM^2(F, T) \frac{t-s+x}{2} \leq \frac{M(F, T)T + 2T^2M^2(F, T)}{4}. \end{aligned} \quad (47)$$

Выберем число T_1 как наименьший из положительных корней уравнений

$$4TM(F, T) = 1, \quad T + 2T^2M(F, T) = 4.$$

Тогда при $T \leq T_1$ оператор \mathbf{A} , определённый равенствами (39), (40) переводит множество $\mathcal{M}(T, F)$ в себя.

В дальнейшем будем полагать, что $T \leq T_1$.

Пусть $\mathbf{g}_k \in \mathbf{C}(G_0(T))$, $k = 1, 2$, где

$$\mathbf{g}_k(x, t, s) = (q_k(x, t), v_k(x, t, s)).$$

Обозначим

$$\bar{q}(x, t) = q_1(x, t) - q_2(x, t), \quad \bar{v}(x, t, s) = v_1(x, t, s) - v_2(x, t, s).$$

Воспользуемся равенствами (39), (40) и рассмотрим разности

$$|A_1(\mathbf{g}_1) - A_1(\mathbf{g}_2)| \leq 2 \int_0^x [\bar{q}(\xi, x + t - \xi)v_1(\xi, x + t - \xi, t - x) + q_2(\xi, x + t - \xi)\bar{v}(\xi, x + t - \xi, t - x)] d\xi, \quad (48)$$

$$|A_2(\mathbf{g}_1) - A_2(\mathbf{g}_2)| \leq \frac{1}{2} \int_{(t-s-x)/2}^{(t-s+x)/2} \bar{q}(\xi, s + \xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{(t-s+x)/2} \int_{\tau_1(\xi, x, t)}^{\tau_2(\xi, x, t)} [\bar{q}(\xi, \tau)v_1(\xi, \tau, s) + q_2(\xi, \tau)\bar{v}(\xi, \tau, s)] d\tau d\xi. \quad (49)$$

Используя неравенства (43), получим оценки для (48), (49). Для краткости записи обозначим $\|\mathbf{g}\| := \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{C}(G_0(T))}$. Выполняя вычисления, находим, что

$$|A_1(\mathbf{g}_1) - A_1(\mathbf{g}_2)| \leq 2x4M(F, T)\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\| \leq 4M(F, T)T\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|, \quad (50)$$

$$|A_2(\mathbf{g}_1) - A_2(\mathbf{g}_2)| \leq M(F, T)x\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\| + T\frac{t-s+x}{2}M(F, T)\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\| \leq \frac{1}{2}T(1+T)M(F, T)\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|. \quad (51)$$

Пусть $\rho \in (0, 1)$. Выберем $T_0 \in (0, T_1]$ из условий

$$4M(F, T_0)T_0 \leq \rho, \quad \frac{1}{2}T_0(1+T_0)M(F, T_0) \leq \rho.$$

Тогда

$$|\mathbf{A}(\mathbf{g}_1) - \mathbf{A}(\mathbf{g}_2)| \leq \rho\|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|.$$

Таким образом, отображение \mathbf{A} является сжимающим на множестве $\mathcal{M}(T_0, F)$. В силу принципа сжимающих отображений, на $\mathcal{M}(T_0, F)$ существует единственное решение операторного уравнения (38). Теорема 1 доказана. \square

Теорема 2. Пусть функции $q^k(x, t) \in C(G(T))$, $k = 1, 2$, являются решениями обратной задачи (1)–(4) с данным $f_k \in C(D(T))$, $k = 1, 2$. Тогда существует положительное число $C = C(T)$ такое, что справедлива оценка

$$\|q^1 - q^2\|_{C(G(T))} \leq C\|f_1 - f_2\|_{C(D(T))}. \quad (52)$$

Доказательство. Решение обратной задачи (1)–(4) с данными $f_k(t, s)$, $k = 1, 2$, обозначим $q^k(x, t)$, $v^k(x, t, s)$, $k = 1, 2$.

Запишем соответствующие им уравнения. Уравнения для функций $q^k(x, t)$, согласно (31) имеют вид

$$q^k(x, t) = q_0^k(x, t) + 2 \int_0^x q^k(\xi, x + t - \xi) v^k(\xi, x + t - \xi, t - x) d\xi, \quad (x, t) \in G(T), \quad k = 1, 2, \quad (53)$$

в котором

$$q_0^k(x, t) = 2f_k(x + t, t - x), \quad k = 1, 2.$$

Вместо уравнения (34) для функций $v^k(x, t, s)$ удобно использовать другую форму уравнений, а именно, воспользоваться данными Коши при $x = 0$:

$$v^k|_{x=0} = 0, \quad v_x^k|_{x=0} = f_k(t, s), \quad s \leq t \leq T - s,$$

и формулой Даламбера. Тогда мы получим уравнения

$$v^k(x, t, s) = v_0^k(x, t, s) - \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} q^k(\xi, \tau) v^k(\xi, \tau, s) d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T), \quad (54)$$

в которых

$$v_0^k(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} f_k(\tau, s) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Пусть

$$|q^k(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in G(T); \quad |v^k(x, t, s)| \leq M, \quad (x, t, s) \in G_0(T).$$

Рассмотрим разности

$$\tilde{q}(x, t) = q^1(x, t) - q^2(x, t), \quad \tilde{v}(x, t, s) = v^1(x, t, s) - v^2(x, t, s), \quad \tilde{f}(t, s) = f_1(t, s) - f_2(t, s).$$

Для разностей справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, t) = 2\tilde{f}(x + t, t - x) + 2 \int_0^x [\tilde{q}(\xi, x + t - \xi) v^1(\xi, x + t - \xi, t - x) \\ + q^2(\xi, x + t - \xi) \tilde{v}(\xi, x + t - \xi, t - x)] d\xi, \quad (x, t) \in G(T), \quad (55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t, s) = \frac{1}{2} \int_{(t-x)/2}^{(t+x)/2} \tilde{f}(\tau, s) d\tau \\ - \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi+t-x}^{t+x-\xi} [q^1(\xi, \tau) \tilde{v}(\xi, \tau, s) + \tilde{q}(\xi, \tau) v^2(\xi, \tau, s)] d\tau d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T). \quad (56) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{z}(x) = \max \left\{ \max_{t \in [x, T-x]} |\tilde{q}(x, t)|, \max_{0 < s \leq t \leq T} |\tilde{v}(x, t, s)| \right\}, \quad x \in [0, T/2].$$

Тогда из равенств (55), (56) получаем оценки

$$|\tilde{q}(x, t)| \leq 2\|\tilde{f}\|_{C(D(T))} + 4M \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in G(T), \quad (57)$$

$$|\tilde{v}(x, t, s)| = T\|\tilde{f}\|_{C(D(T))} + TM \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad (x, t, s) \in G_0(T). \quad (58)$$

Обозначая

$$C_0 = \max\{2, T\}, \quad C_1 = \max\{4M, TM\},$$

из (57), (58) получим неравенство

$$\tilde{z}(x) \leq C_0\|\tilde{f}\|_{C(D(T))} + C_1 \int_0^x \tilde{z}(\xi) d\xi, \quad x \in [0, T/2].$$

Используя неравенство Гронуолла — Беллмана [11], получаем оценку (52) с постоянной

$$C = C_0 \exp\{C_1 T/2\}.$$

Теорема 2 доказана. □

Следствие. Если решение обратной задачи существует для $q \in G(T)$, то оно единственно и устойчиво по данным обратной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучена новая постановка обратной задачи определения потенциала $q(x, t)$ в волновом уравнении, когда $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T]$, а данные обратной задачи зависят от переменного параметра s , определяющего момент приложения точечного источника. Исследованы свойства решения прямой задачи. Доказана теорема существования и единственности решения прямой задачи. Для обратной задачи доказана теорема о локальном существовании её решения и получена глобальная оценка устойчивости её решения. Все полученные результаты являются новыми.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН (проект FWNF-2026-0029). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stefanov P.D.* Uniqueness of the inverse scattering problem for the wave equation with a potential depending on time // *Inverse Problems*. 1988. V. 4. P. 913–920.
2. *Hu G., Kian Ya.* Determination of singular time-dependent coefficients for wave equations from full and partial data // *Inverse Problems and Imaging*. 2018. V. 12, N 3. P. 745–772; DOI: 10.3934/ipi.2018032

3. *Ben Aicha I.* Stability estimate for hyperbolic inverse problem with time-dependent coefficient // *Inverse Problems*, 2015. V. 31. Article number 125010; arXiv:1506.01935v1 [math.AP] 5 Jun 2015
4. *Feizmohammad A., Kian Y.* Recovery of nonsmooth coefficients appearing in anisotropic wave equations // *SIAM J. Mathematical Analysis*. 2019. V. 51, Iss. 6. P. 4953–4976; <https://doi.org/10.1137/19M1251394>
5. *Feizmohammad A.* An inverse boundary value problem for isotropic nonautonomous heat flows // *Mathematische Annalen*. 2024. V. 388. P. 1569–1607; DOI: 10.1007/s00208-022-02559-6
6. *Borcea L., Garnier J., Solna K.* Sound propagation in a weakly turbulent flow waveguide // *SIAM J. Applied Mathematics*. 2019. V. 79, N 6. P. 2663–2687.
7. *Borcea L., Garnier J., Solna K.* Wave propagation and imaging in moving random media, *Multiscale // Modeling and Simulations*. 2019. V. 17. P. 31–67.
8. *Borcea L., Callaghan T., Papanicolaou G.* Motion estimation and imaging of complex scenes with synthetic aperture radar // *Inverse Problems*. 2013. V. 29. Article number 054011.
9. *Martorella M., Gelli S., Bacci A.* Ground moving target imaging via SDAP-ISAR processing: review and new trends // *Sensors*. 2021. V. 21. Article number 2391; <https://doi.org/10.3390/s21072391>
10. *Klibanov M.V., Li J., Romanov V.G., Yang Z.* Carleman Numerical Method for Imaging of Moving Targets // arXiv: 2512.18361, 2025.
11. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.

UDC 517.958

**THE INVERSE PROBLEM FOR A WAVE EQUATION
WITH A POTENTIAL
DEPENDING ON SPATIAL VARIABLE AND TIME**

© 2026 V. G. Romanov^{1a}, T. V. Bugueva^{1,2b}

¹*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Acad. Lavrentyev pr., 4, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Novosibirsk State University,
Pirogov st., 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mails: ^aromanov@math.nsc.ru, ^bbugueva@math.nsc.ru

Received 05.01.2025, revised 11.02.2026, accepted 25.02.2026

Abstract. The inverse problem of determining the coefficient $q(x, t)$ of the wave equation $u_{tt} - u_{xx} + q(x, t)u = 0$ is considered when $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times (0, T]$. The properties of a solution of a direct problem are studied and an existence and uniqueness theorem is proved. For the inverse problem a local existence theorem is stated and a global stability estimate is found.

Keywords: inverse problem, local existence, global stability, time-dependent potential.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.106

REFERENCES

1. Stefanov P.D. Uniqueness of the inverse scattering problem for the wave equation with a potential depending on time. *Inverse Problems*, 1988, Vol. 4, pp. 913–920.
2. Hu G., Kian Ya. Determination of singular time-dependent coefficients for wave equations from full and partial data. *Inverse Problems and Imaging*, 2018, Vol. 12, No. 3, pp. 745–772; DOI: 10.3934/ipi.2018032
3. Ben Aicha I. Stability estimate for hyperbolic inverse problem with time-dependent coefficient. *Inverse Problems*, 2015, Vol. 31, Article number 125010; arXiv:1506.01935v1 [math.AP] 5 Jun 2015
4. Feizmohammad A., Kian Y. Recovery of nonsmooth coefficients appearing in anisotropic wave equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 2019, Vol. 51, Iss. 6, pp. 4953–4976; <https://doi.org/10.1137/19M1251394>
5. Feizmohammad A. An inverse boundary value problem for isotropic nonautonomous heat flows. *Mathematische Annalen*, 2024, Vol. 388, pp. 1569–1607; DOI: 10.1007/s00208-022-02559-6
6. Borcea L., Garnier J., Solna K. Sound propagation in a weakly turbulent flow waveguide // *SIAM J. Applied Mathematics*. 2019. V. 79, N 6. P. 2663–2687.
7. Borcea L., Garnier J., Solna K. Wave propagation and imaging in moving random media, *Multiscale. Modeling and Simulations*, 2019, Vol. 17, pp. 31–67.
8. Borcea L., Callaghan T., Papanicolaou G. Motion estimation and imaging of complex scenes with synthetic aperture radar. *Inverse Problems*, 2013, Vol. 29. Article number 054011.
9. Martorella M., Gelli S., Bacci A. Ground moving target imaging via SDAP-ISAR processing: review and new trends. *Sensors*, 2021, Vol. 21. Article number 2391; <https://doi.org/10.3390/s21072391>
10. Klivanov M.V., Li J., Romanov V.G., Yang Z. Carleman Numerical Method for Imaging of Moving Targets. arXiv: 2512.18361, 2025.
11. Bellman R. *Stability Theory of Differential Equations*. N. Y., McGraw-Hill Book Company, 1953.

УДК 537.52:519.63

ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ГЕЛИЕВОМ ПУЗЫРЬКЕ В ЖИДКОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

© 2026 Р. А. Савенко^{1,2a}, Д. И. Карпов^{1,2b}, А. В. Ридель^{2c},
С. М. Коробейников^{2d}

¹*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия,*

²*Новосибирский государственный технический университет,
просп. К. Маркса, 20, г. Новосибирск 630073, Россия*

E-mails: ^asavenko@hydro.nsc.ru, ^bkarpov@hydro.nsc.ru, ^cridel@corp.nstu.ru,
^dkorobeynikov@corp.nstu.ru

Поступила в редакцию 30.10.2025 г.; после доработки 14.04.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Модель, разработанная ранее для трёхмерного моделирования частичного разряда в пузырьке гелия, погружённом в диэлектрическую жидкость, была исследована на численную устойчивость. Отдельно обсуждается влияние коэффициента рекомбинации на устойчивость счёта. Было выполнено моделирование разряда от начала процесса до заключительной стадии постепенной релаксации заряда. Были смоделированы два разных случая. В первом случае начальная небольшая область ионизированного газа (затравка) располагалась на оси пузырька вблизи его полюса. Во втором случае затравка располагалась вдали от оси системы вблизи стенки пузырька. Была рассчитана эволюция трёхмерных плотностей ионов гелия и электронов в пузырьке. Наблюдались сложные формы фронта положительных зарядов. Получены трёхмерные распределения электрического поля в межэлектродном промежутке для различных моментов времени.

Ключевые слова: частичный разряд, газовый разряд, «истинный» заряд, 3D моделирование, рекомбинация.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.107

ВВЕДЕНИЕ

Электрическая прочность жидких диэлектриков существенно влияет на срок службы и надёжность современного высоковольтного оборудования. В свою очередь, она сильно зависит от наличия твёрдых и жидких примесей и пузырьков газа в жидкости. Известно, что наличие газовых пузырьков приводит к резкому снижению электрической прочности. В газовом пузырьке в диэлектрической жидкости при низком напряжении может возникать электрический разряд, который называется частичным разрядом (ЧР). Частичный разряд поляризует пузырёк, часто создавая благоприятные условия для дальнейшего электрического пробоя всей изоляции.

На текущем этапе развития экспериментальных методик регистрации электрических разрядов можно регистрировать интегральные характеристики ЧР: ток во внешней цепи, суммарный электрический заряд, протекающий в цепи, слабое свечение плазмы в пузырьке во время ЧР, напряжение, при котором происходит ЧР, и деформацию пузырька после ЧР [1]. Регистрация характеристик плазмы разряда в пузырьке чрезвычайно сложна, прежде всего потому, что процесс протекает быстро (типичное время от начала до конца разряда составляет 30–50 нс),

наблюдение возможно только на расстоянии (через толщу жидкости, в которой происходит преломление, поглощение и рассеяние света, что сильно снижает возможности регистрации), а наиболее интересная стадия разряда, включающая начальные процессы ионизации, сопровождается очень слабым свечением. Поэтому теоретическое изучение этого явления, в частности, компьютерное моделирование процессов развития электрического разряда в пузырьке, приобретает самостоятельное значение.

Компьютерное моделирование газовых разрядов выполняется давно и на эту тему существует огромное количество публикаций. Например, в работах [2]–[5] авторы выполняли расчёты развития стримеров в воздухе и диэлектрических газах и их смесях с учётом целого ряда процессов, таких как химические реакции между электронами и молекулами газа, фотоионизация, возбуждения атомных уровней и других. В перечисленных работах, как и во многих других, расчёт ограничивается двумерной или квазитрёхмерной цилиндрически-симметричной постановкой.

В работе [6] выполнено сравнение результатов моделирования развития стримерного разряда в газах методами частиц и методами, основанными на решении уравнений механики сплошных сред, в двумерных, квазитрёхмерных и трёхмерных постановках. Авторы пришли к выводу, что при правильной постановке задачи и корректном выборе численного метода физические результаты расчётов практически идентичны. В нашей работе мы сделали выбор в пользу конечно-разностных методов на неподвижных сетках, чтобы сэкономить аппаратные ресурсы, что, на наш взгляд, позволит увеличить размеры сеток, на которых выполняются расчёты. Кроме того, в перечисленных работах использовались готовые программные пакеты, такие как COMSOL и *afivo-streamer* [7]. Заметим, что, несмотря на наличие готовых пакетов, расчётов в трёхмерном случае довольно мало.

Также прямой перенос результатов расчётов, выполненных в этих работах, на случай пузырька гелия в трансформаторном масле невозможен в силу разной физической постановки задач. Наиболее близкой по физической постановке является работа [8], в которой выполнено моделирование развития разряда в цепочках воздушных пузырьков в трансформаторном масле. Недостатком этих расчётов, на наш взгляд, является использование двумерной модели.

В нашей работе мы ставили перед собой задачу создать собственное программное обеспечение для моделирования электрических разрядов в газовых пузырьках, которое бы не только давало возможность выполнять параллельные вычисления на графических ускорителях, но и в дальнейшем позволило бы гибко модифицировать код, например, с целью применения разностных схем повышенной точности и монотонных схем.

В предыдущей работе [9] мы выполнили трёхмерные расчёты начальной стадии развития разряда в пузырьке гелия в диэлектрической жидкости (предполагалось, что это трансформаторное масло) до момента, когда волна электронов достигнет границы пузырька. Расчёты были выполнены в диффузионно-дрейфовом приближении. В этом случае процессы ионизации, рекомбинации, диффузии и дрейфа описывались следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} - \nabla(\mu_e n_e \mathbf{E}) &= \nabla(D_e \nabla n_e) + \alpha |\mu_e n_e \mathbf{E} + D_e \nabla n_e| - \beta_r n_+ n_e - \beta_3 n_+ n_e^2, \\ \frac{\partial n_+}{\partial t} + \nabla(\mu_+ n_+ \mathbf{E}) &= \nabla(D_+ \nabla n_+) + \alpha |\mu_e n_e \mathbf{E} + D_e \nabla n_e| - \beta_r n_+ n_e - \beta_3 n_+ n_e^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где n_+ — концентрация положительно заряженных ионов, n_e — концентрация электронов, μ_+ — подвижность положительных ионов, μ_e — подвижность электронов, \mathbf{E} — локальное электрическое поле, D_+ — коэффициент диффузии положительных ионов, D_e — коэффициент диффузии электронов, α — коэффициент ударной ионизации электронами, β_r — коэффициент двухчастичной рекомбинации (подразумевается радиационная рекомбинация), β_3 — коэффициент трехчастичной рекомбинации. Три коэффициента модели, а именно α , μ_e и D_e , считаются нелинейными функциями локального электрического поля \mathbf{E} . Значение коэффициента ионизации было взято из [10].

На каждом временном шаге электрическое поле пересчитывалось в соответствии с теоремой Гаусса

$$\nabla(\varepsilon_0\varepsilon\nabla\varphi) = -|e|(n_+ - n_e), \quad \nabla\varphi = -\mathbf{E}, \quad (2)$$

где ε — относительная диэлектрическая проницаемость вещества ($\varepsilon = 1$ в газе), ε_0 — электрическая постоянная, φ — потенциал электрического поля, e — элементарный заряд.

Начальным условием для решения системы (1)-(2) было распределение электрического поля в зазоре между плоскими параллельными электродами, заполненном диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2.2$ (соответствует трансформаторному маслу), в центре которого находится сферический пузырёк с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$. Экспериментальные данные, взятые из [11]–[15], были использованы для определения коэффициентов диффузии, подвижности электронов и ионов, а также как коэффициенты ионизации и рекомбинации.

Расчёты, приведённые в [9], были выполнены вплоть до времени около 0.4 нс с момента начала ионизации в пузырьке. К этому моменту электронная волна достигла стенки пузырька, обращённой к аноду. В то же время в объёме пузырька образовалась медленная волна положительных ионов. Перед и за фронтом этой волны образовались области градиентов поля, увеличивающихся со временем, что привело к нарушению устойчивости конечно-разностной схемы. Для обеспечения стабильности схемы был реализован алгоритм масштабирования временного шага в зависимости от градиента поля. Однако при градиентах поля, равных $\partial E_x/\partial x \sim 8.4 \text{ МВ/см}^2$, временной шаг уменьшился с начального значения $\sim 2 \cdot 10^{-13}$ с до значений $4 \cdot 10^{-16}$ с, в результате чего оценка времени одного полного расчёта стала неприемлемо большой (месяцы).

Настоящая работа в основном посвящена исследованию использования численного алгоритма, описанного в [9], для моделирования процесса развития разряда в пузырьке с момента появления начальной небольшой области ионизации (затравки) до окончания первичной зарядки стенок пузырька волнами положительного и отрицательного заряда, после чего наблюдается медленная релаксация заряда в пузырьке за счёт проводимости образующейся плазмы (время разряда 2.5 нс и более). По существу, трёхмерная постановка позволила смоделировать развитие волны ионизации при различных положениях затравки в пузырьке. Моделирование проводилось, когда затравка располагалась на оси пузырька вблизи его стенки, обращённой к катоду, и на значительном расстоянии от оси пузырька вблизи боковой стенки.

1. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА И ТЕСТОВЫЕ РАСЧЁТЫ

Модель была реализована в виде параллельного компьютерного кода для расчётов на графических ускорителях. Распараллеливание диффузионной части и части, связанной с переносом зарядов, технически гораздо более громоздко для неявных методов, чем для явных, а выигрыш в производительности при этом ожидается заметно меньше. В связи с этим при разработке алгоритма расчёта динамики концентраций (1) выбор был сделан в пользу явных методов.

Краткое описание численного метода и его применение для решения системы (1)-(15) были даны в [9]. Здесь приведём более подробное описание конечно-разностных уравнений.

Правая часть первого уравнения (1) для электронов включает в себя слагаемое с переносом электронов в электрическом поле за счёт подвижности и диффузионный перенос. Рассмотрим их численную реализацию отдельно. Для переноса под действием электрического поля использовались уравнения

$$\text{div}(\mu_e n_e \mathbf{E}) \approx \frac{F_{x,i+1/2,j,k}^{Me} - F_{x,i-1/2,j,k}^{Me}}{h} + \frac{F_{y,i,j+1/2,k}^{Me} - F_{y,i,j-1/2,k}^{Me}}{h} + \frac{F_{z,i,j,k+1/2}^{Me} - F_{z,i,j,k-1/2}^{Me}}{h}, \quad (3)$$

при этом поток вдоль оси x вычисляется по формуле

$$F_{x,i+1/2,j,k}^{Me} = \begin{cases} n_{e,i+1,j,k} \cdot E_{x,i+1/2,j,k} \cdot \mu_{e,i+1/2,j,k}, & E_{x,i+1/2,j,k} > 0, \\ n_{e,i,j,k} \cdot E_{x,i+1/2,j,k} \cdot \mu_{e,i+1/2,j,k}, & E_{x,i+1/2,j,k} < 0. \end{cases} \quad (4)$$

аналогичным образом вычисляются потоки в части переноса $F_{y,i,j+1/2,k}^{Me}$ и $F_{z,i,j,k+1/2}^{Me}$ вдоль осей y и z , соответственно.

Перенос электронов вследствие диффузии вычислялся согласно

$$\nabla(D_e \nabla n_e) \approx \frac{F_{x,i+1/2,j,k}^{De} - F_{x,i-1/2,j,k}^{De}}{h} + \frac{F_{y,i,j+1/2,k}^{De} - F_{y,i,j-1/2,k}^{De}}{h} + \frac{F_{z,i,j,k+1/2}^{De} - F_{z,i,j,k-1/2}^{De}}{h}. \quad (5)$$

Здесь поток вдоль оси x равен

$$F_{x,i+1/2,j,k}^{De} = D_{e,i+1/2,j,k} \cdot \frac{n_{e,i+1,j,k} - n_{e,i,j,k}}{h}. \quad (6)$$

Аналогичные формулы использовались для потоков диффузии вдоль осей y и z .

Поскольку коэффициенты подвижности и диффузии положительных ионов считались постоянными, разностные формулы, описывающие перенос и диффузию ионов, были проще, чем в случае электронов, а именно

$$\operatorname{div}(\mu_+ n_+ \mathbf{E}_+) \approx \mu_+ \cdot \left(\frac{F_{x,i+1/2,j,k}^{M+} - F_{x,i-1/2,j,k}^{M+}}{h} + \frac{F_{x,i,j+1/2,k}^{M+} - F_{x,i,j-1/2,k}^{M+}}{h} + \frac{F_{x,i,j,k+1/2}^{M+} - F_{x,i,j,k-1/2}^{M+}}{h} \right). \quad (7)$$

Здесь поток, описывающий перенос положительных ионов в электрическом поле, равен

$$F_{x,i+1/2,j,k}^{M+} = \begin{cases} n_{+,i,j,k} \cdot E_{x,i+1/2,j,k}, & E_{x,i+1/2,j,k} > 0, \\ n_{+,i+1,j,k} \cdot E_{x,i+1/2,j,k}, & E_{x,i+1/2,j,k} < 0. \end{cases} \quad (8)$$

вдоль оси x и аналогичные вычисления делаются вдоль y и z .

Диффузионное слагаемое в (1) вычислялось так

$$\nabla(D_+ \nabla n_+) \approx D_+ \left(\frac{n_{+,i+1,j,k} + n_{+,i-1,j,k} - 2n_{+,i,j,k}}{h^2} + \frac{n_{+,i,j+1,k} + n_{+,i,j-1,k} - 2n_{+,i,j,k}}{h^2} + \frac{n_{+,i,j,k+1} + n_{+,i,j,k-1} - 2n_{+,i,j,k}}{h^2} \right). \quad (9)$$

В формулах (1) коэффициент ударной ионизации умножается на модуль полного потока $|\mathbf{F}|$, который вычисляется через потоки, приходящие в узел (i, j, k) . Так, поток вдоль оси x , обеспечивающий рост концентрации частиц за счёт ионизации, вычислялся по формуле

$$F_x^e = \theta(-\operatorname{sgn}(F_{x,i+1/2,j,k}^{Me})) F_{x,i+1/2,j,k}^{Me} + \theta(\operatorname{sgn}(F_{x,i-1/2,j,k}^{Me})) F_{x,i-1/2,j,k}^{Me} + \theta(-\operatorname{sgn}(F_{x,i+1/2,j,k}^{De})) F_{x,i+1/2,j,k}^{De} + \theta(\operatorname{sgn}(F_{x,i-1/2,j,k}^{De})) F_{x,i-1/2,j,k}^{De}. \quad (10)$$

Здесь $\operatorname{sgn}(x)$ означает знак x и $\theta(x)$ — функция Хэвисайда. Таким образом, считалось, что ионизацию в данном объёме вокруг узла (i, j, k) создаёт только входящий поток электронов,

что согласуется с физическим представлением о характере процесса. С использованием (10) расчёт вклада ионизации в (1) выполнялся по формуле

$$\alpha|\mu_e n_e \mathbf{E} + D_e \nabla n_e| = \alpha_{i,j,k} \sqrt{(F_x^e)^2 + (F_y^e)^2 + (F_z^e)^2}, \quad (11)$$

где коэффициент ионизации вычисляется для значения напряжённости электрического поля в узле (i, j, k)

$$E_{i,j,k} = \sqrt{\left(\frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j-1,k}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k-1}}{2h}\right)^2}. \quad (12)$$

Уравнение для потенциала (2) решалось явно методом простых итераций с начальными условиями в виде значений потенциала с предыдущего шага по времени. Вычисление поля как правило занимало от 97% до 99.5% от общего времени моделирования.

Параллельные алгоритмы для решения уравнений задачи были реализованы в виде компьютерных программ на языке C++ с применением технологии CUDA. Алгоритмы были протестированы на нескольких видеокартах, поддерживающих эту технологию. Для систематических расчётов использовалась видеокарта с 2880 вычислительными ядрами CUDA с максимальной частотой 980 МГц и 6 гигабайтами памяти. В тестовых расчётах один расчёт на сетке $256 \times 256 \times 256$ узлов, в котором выполнялось 1000–1200 шагов по времени, занимал ~ 1 минуты или менее. Точное время не измерялось, так как ясно, что полное время вычислений будет определяться временем расчёта электрического потенциала.

Описанная выше разностная схема тестировалась по частям. Для тестирования диффузионной части схемы на одномерной, двумерной квадратной и трёхмерной кубической сетках решалась тестовая задача об эволюции концентраций нейтральных частиц с начальным гауссовым распределением по каждой оси координат. Электрическое поле в этих тестах отсутствовало. Коэффициент диффузии ионов гелия на 4 порядка меньше коэффициента диффузии электронов, поэтому наиболее критичным с точки зрения устойчивости является диффузия электронов. Максимальное значение D_+ в наших расчётах частичного разряда в пузырьке не превышало $4.8 \text{ м}^2/\text{с}$, а тестовые расчёты выполнялись для коэффициентов от $2.7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ до $100 \text{ м}^2/\text{с}$. В каждом расчёте коэффициент диффузии был постоянным. В наших физических расчётах при шаге по времени 10^{-13} с и менее условие устойчивости схемы выполняется с запасом. В тестах исследовалось «расплывание» гауссовского распределения при численном решении уравнения диффузии по сравнению с точным решением для разных начальных амплитуд. При расчётах на трёхмерных кубических сетках в течение 1200 шагов по времени и более было зарегистрировано максимальное отклонение в 7% максимума численного решения от максимума точного решения, которое становилось все меньше при росте количества шагов по времени. В дальнейшем считалось, что влияние схемной диффузии такого типа мало влияет на результат физических расчётов.

Отдельно выполнялись тесты для проверки устойчивости части схемы, моделирующей перенос электронов в электрическом поле. Тесты проводились в одномерной, двумерной и трёхмерной постановке. В трёхмерной постановке расчёты выполнялись на сетках с шагом $h = 0.01, 0.001, 0.00001 \text{ м}$ при значениях коэффициента переноса в диапазоне от $0.1 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ до $1 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. При этом в наших физических расчётах максимальное значение коэффициента подвижности не превышало $0.8 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ для электронов (для ионов – почти на 3 порядка меньше). В тестах в каждом расчёте коэффициент подвижности был постоянным. В постоянном электрическом поле задавалось распределение концентраций частиц в виде ступеньки или трапеции по каждому направлению в кубической области с гранями, параллельными граням области моделирования. Направление электрического поля на кубической сетке устанавливалось как вдоль одного из рёбер, так и по коротким диагоналям, что позволило оценить

изотропность схемы. Вычисления выполнялись при значениях напряжённости электрического поля 40 и 80 кВ/см, при этом влияние собственного электрического поля частиц не учитывалось. Шаг по времени выбирался так, чтобы выполнялось условие $\mu|\mathbf{E}|\delta t/h < 0.5$. Так, в тестах при $|\mathbf{E}| = 40$ кВ/см, шаге сетки $h = 0.001$ м и $\mu = 1$ м²/В·с шаг по времени был равен 0.1 нс и расчёт выполнялся вплоть до времён 120 нс.

Для оценки влияния схемной диффузии через заданное количество шагов по времени сравнивались текущие профили концентраций с начальным прямоугольным распределением при переносе в электрическом поле, направленном вдоль ребра куба. Сравнение проводилось по значению интеграла по объёму от концентрации частиц, оставшихся внутри первоначального куба, отнесённому к начальному числу частиц. Получено, что через 1000 шагов по времени число частиц в первоначальном объёме составляет не менее 65% от начального. При этом наблюдается «расплывание» переднего и заднего фронта примерно в равной мере. В тестах на изотропность схемы также рассматривалась начальная область, занятая частицами, в форме куба с гранями, параллельными граням всей области моделирования. Таким образом, перенос происходил вдоль диагонали грани куба, параллельной линиям электрического поля. Наблюдалось некоторое вытягивание куба вдоль этой диагонали (менее чем на 10%) с сохранением поперечных к направлению поля размеров.

При моделировании физической задачи о развитии разряда в газовом пузырьке шаг по времени выбирался с учётом проведённых тестов, то есть использовался универсальный критерий, включающий в себя условия устойчивости с учётом диффузии и дрейфа. На каждом шаге по времени выполнялся расчёт максимального электрического поля и коэффициентов переноса по всех узлах сетки и проверялось выполнение критериев устойчивости схемы. Однако, в отличие от тестовых расчётов, поскольку значение электрического поля могло меняться достаточно быстро, шаг по времени для следующего шага брался с коэффициентом 0.3 на начальных этапах вычислений (когда концентрации зарядов не превышали значений 10^{18} м⁻³) и с коэффициентом 0.05 при более высоких концентрациях (см. следующий раздел).

2. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Моделирование задачи о развитии разряда в пузырьке проводилось в кубической области размером $3 \times 3 \times 3$ мм ($298 \times 298 \times 298$ узлов сетки). В центр области была помещена сферическая полость, имитирующая пузырёк, размером 1.8 мм. Процесс начинается из небольшого объёма внутри этой полости, содержащего 7 узлов (один центральный узел и шесть ближайших к нему узлов-соседей), в которых были заданы исходные идентичные значения концентраций ионов и электронов. Начальные значения концентраций в этих узлах были установлены в диапазоне от 10^8 до 10^{12} м⁻³ в различных запусках расчёта при одних и тех же начальных и граничных условиях. Граничные условия для системы (1) на стенке пузырька были следующими:

$$J_{+n} = ((\mu_+ n_+ \mathbf{E} - D_+ \nabla n_+), \mathbf{n}) = 0, \quad J_{en} = ((-\mu_e n_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e), \mathbf{n}) = 0. \quad (13)$$

Здесь \mathbf{n} – внешний вектор нормали к поверхности пузырька, \mathbf{J}_+ – общий поток положительных ионов и \mathbf{J}_e – общий поток электронов. Для простоты предполагалось, что заряды оседают на стенках пузырька без каких-либо взаимодействий (химических реакций, ионизации и т. д.) с молекулами диэлектрической жидкости.

Граничные условия для уравнения (2) были следующими:

$$\varepsilon(\nabla\varphi)_{n2} - (\nabla\varphi)_{n1} = -|e|(n_{s+} - n_{se})/\varepsilon_0, \quad (\nabla\varphi)_{\tau2} = (\nabla\varphi)_{\tau1}, \quad (14)$$

$$\varphi = V_0 \text{ (анод)}, \quad \varphi = 0 \text{ (катод)}. \quad (15)$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся к газовому пузырьку и диэлектрической жидкости соответственно, n_{s+} и n_{se} – это поверхностные плотности положительных ионов и электронов на

стенке пузырька. Индекс n обозначает составляющую электрического поля вдоль вектора \mathbf{n} , представляющего собой нормаль к границе, а τ обозначает проекцию вектора электрического поля на касательную плоскость к границе между различными веществами. V_0 — приложенное напряжение. На боковых стенках области моделирования во время расчёта поддерживалось линейное изменение электрического потенциала от 0 до V_0 .

Начальные условия были описаны выше во введении.

В течение временного интервала примерно 0.3 нс после начала процесса ионизации происходило взрывное увеличение концентраций электронов и ионов. За этот промежуток времени концентрация увеличилась до значений 10^{18} м^{-3} . За время от 0.3 нс до 0.4 нс (для случая, когда затравка расположена в центральной части пузырька) фронт электронной волны достигает поверхности пузырька. Когда затравка была расположена на оси пузырька, мы наблюдали образование волны положительных ионов на расстоянии 0.3–0.35 мм от первоначального расположения затравки по направлению к аноду (см. рис. 1).

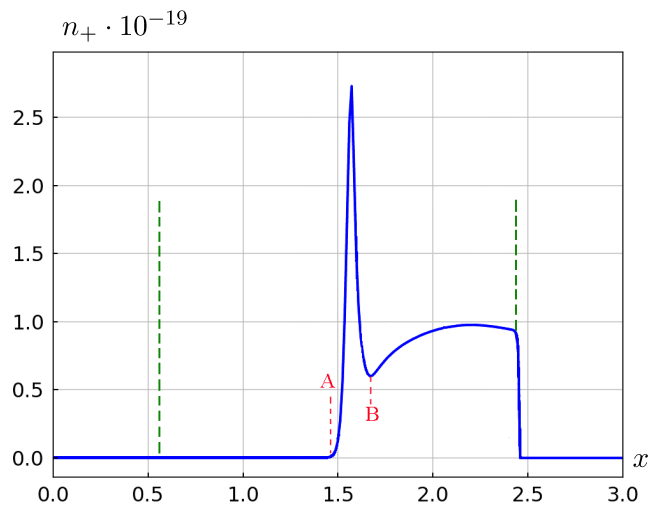


Рис. 1. Пик концентрации положительных ионов, возле которого наблюдаются высокие градиенты электрического поля (область АВ) непосредственно перед развитием численной неустойчивости. Вертикальные пунктирные линии показывают границу пузырька

Максимальная концентрация ионов гелия в пике этой волны превышает максимальную концентрацию электронов в волне в 2–3 раза в один и тот же момент времени. Распределение компоненты электрического поля вдоль оси пузырька соответствует распределению суммарного заряда. Следовательно, максимальный пик поля наблюдается в области волны положительных зарядов. Эта область очень медленно (со скоростью примерно в 20 раз меньшей, чем скорость электронной волны) приближалась к стенке пузырька в сторону катода.

Поскольку коэффициенты модели (1)–(2) нелинейно зависят от локального электрического поля, очень проблематично сформулировать единый критерий устойчивости для всей сетки. Основываясь на классических критериях устойчивости для схем с постоянными коэффициентами, мы провели множество численных экспериментов, чтобы определить диапазон стабильности вычислений. Устойчивость решения определялась стабильностью той части конечно-разностной схемы, которая описывает перенос заряда. Поэтому временной шаг был выбран из условия

$$\tau = \frac{q \cdot h}{\mu_{e \max} \cdot E_{\max}},$$

где h — шаг сетки, E_{\max} — модуль максимального значения электрического поля в области присутствия заряда, а q — коэффициент. В рассматриваемом здесь случае $h = 10^{-5}$ м и подвижность электронов $\mu_{e \max} \sim 1 \text{ м}^2/\text{В} \cdot \text{с}$. Коэффициент q был добавлен, чтобы обеспечить

максимальную скорость моделирования, а оптимальное значение $q = 0.05$ было выбрано эмпирически для приведённого выше моделирования. Оказалось невозможным выбрать постоянный временной шаг для всего интервала времени расчёта. Итак, для начальных значений поля в пузырьке $E_{\max 0} \sim 5 \cdot 10^5$ В/м шаг по времени должен составлять $\tau_0 = 8 \cdot 10^{-12}$ с. Однако уже на начальных этапах моделирования (времена от 0.2 до 0.3 нс) вблизи пика поля в области волны положительных зарядов (рис. 1) градиенты поля становятся неприемлемо большими для сохранения устойчивости схемы. В результате при временном шаге $\tau > 3 \cdot 10^{-16}$ с наблюдалась неустойчивость в этой области. При выборе меньшего временного шага вычисления сильно замедляются, и время, необходимое для одного полного расчёта, оценивалось в несколько месяцев, как отмечалось во введении.

Поэтому было протестировано несколько эмпирических критериев с переменными шагами. Было установлено, что наиболее эффективным критерием является тот, при котором временной шаг масштабируется в соответствии с соотношением

$$\tau = \tau_0 \cdot (E_{\max 0}/E_{\max})^{1.1}.$$

Схема, отвечающая этому критерию, была устойчивой с решением, которое плавно изменялось в пространстве и во времени, сохраняя монотонность и без колебаний, характерных для неустойчивости. Однако по мере увеличения концентрации положительных ионов и появления пика поля в области волны ионов гелия временной шаг продолжал уменьшаться с начальных значений $\tau = 8 \cdot 10^{-12}$ с до $\tau \sim 10^{-16}$ с, и время расчёта снова стало неприемлемым.

Было рассмотрено несколько способов стабилизации схемы с шагом по времени $\tau \sim 10^{-13} - 10^{-14}$ с при развитии неустойчивости в области больших градиентов поля. Поскольку коэффициент диффузии ионов считался постоянным и, согласно [15], был выбран равным $D_{+0} = 2.4 \cdot 10^{-5}$ м²/с, была предпринята попытка стабилизировать схему, увеличив коэффициент диффузии ионов гелия. Расчёты проводились с коэффициентом диффузии ионов D_+ , увеличенным в 2, 5 и 10 раз по сравнению с D_{+0} . Увеличение D_+ привело к незначительному дополнительному расплыванию волны положительных зарядов, однако возможное снижение пиковой концентрации было компенсировано ионизацией, и устойчивость была потеряна примерно в то же время ($t \approx 0.37$ нс).

Также подвергался варьированию коэффициент подвижности ионов. Моделирование проводилось с коэффициентом μ_+ , увеличенным в 2, 5, 10 раз. С увеличением коэффициента подвижности ионов время расчёта до момента развития неустойчивости увеличилось с 0.375 нс до 0.384 нс. При двукратном увеличении μ_+ область в пространстве, в которой возникает неустойчивость, смещается в сторону стенки пузырька, обращённой к катоду. При увеличении μ_+ на 5 и 10 % неустойчивость начиналась вблизи стенки пузырька, которой достигала электронная волна, а затем в области положительной волны. Таким образом, расчёт в целом оставался стабильным ещё некоторое время (на 0.01 нс), но затем он терял устойчивость по тому же сценарию. Заметим, что изменение коэффициентов подвижности и диффузии на порядок не только не привело к стабилизации расчёта, но и выглядит физически мало оправданным.

Оказалось, что расчётная схема наиболее чувствительна с точки зрения устойчивости к значению коэффициента рекомбинации. Физически корректный учёт процессов рекомбинации требует особого рассмотрения, поэтому мы остановимся на нем более подробно.

3. ВЫБОР КОЭФФИЦИЕНТА РЕКОМБИНАЦИИ

В условиях развития разряда в газовом пузырьке возможно несколько типов рекомбинации: радиационная рекомбинация, при которой столкновение иона гелия и электрона приводит к образованию нейтрального атома и кванта электромагнитного излучения, трехчастичная рекомбинация электрон-ион-нейтральный атом, при которой избыточная энергия столкновения иона гелия и электрона уносится атомом гелия, участвующим в столкновении, трехчастичная

электрон-ион-электронная рекомбинация, при которой избыточная энергия уносится вторым электроном [16], [17], [18], [19].

Уменьшение количества электронов (и ионов) в плазме вследствие рекомбинации излучения описывается соотношением

$$\frac{dn_e}{dt} = -\beta_r n_e n_+.$$

Коэффициент β_r зависит от температуры электронного газа и, согласно [16], [17], изменяется в диапазоне от $\beta_r \approx 4.8 \cdot 10^{-18} \text{ м}^3/\text{с}$ (250 К) до $\beta_r \approx 4.17 \cdot 10^{-19} \text{ м}^3/\text{с}$ (10000 К). Можно считать, что в широком диапазоне температур (по крайней мере, от 500 до 64 000 К) и при низких концентрациях электронов (до 10^{14} м^{-3}) коэффициент рекомбинации излучения изменяется незначительно или даже остаётся приблизительно постоянным [16]. Однако с увеличением концентрации электронов коэффициент рекомбинации излучения заметно возрастает и при $n_e \sim 10^{19} \text{ м}^3$ достигает значений $\beta_r \sim 10^{-13} \text{ м}^3/\text{с}$ ($T = 500 \text{ К}$).

Коэффициенты рекомбинации с участием третьей частицы (электрона или атома) β_3 определяются соотношением

$$\frac{dn_e}{dt} = -\beta_3 n_e n_+ n_0,$$

где n_0 — концентрация третьих частиц в виде нейтральных атомов n_a или электронов. Расчёты коэффициента трехчастичной рекомбинации в гелии для плотной низкотемпературной неизотермической плазмы были выполнены в [19] для соотношений концентраций электронов и атомов $(n_e/n_a) = 10^{-6}$ и $(n_e/n_a) = 10^{-5}$. Для температуры $T = 300 \text{ К}$ были получены оценки $\beta_3 = (3 - 6) \cdot 10^{-31} \text{ м}^6/\text{с}$.

Фактически, в модели используется некоторый интегральный коэффициент рекомбинации

$$\beta = \beta_r/n_e + \beta_{ea+} + \beta_{ee+},$$

который учитывает трехчастичную рекомбинацию электрон-ион-нейтральный атом с коэффициентом β_{ea+} и электрон-ион-электрон с коэффициентом β_{ee+} . В первом приближении предполагается, что этот интегральный коэффициент остаётся постоянным на протяжении всего расчёта. Было обнаружено, что при значениях $\beta \sim 10^{-31} \text{ м}^6/\text{с}$ и менее схема становится неустойчивой в области пика положительного заряда. Когда коэффициент рекомбинации увеличивается до значений $\beta \sim 10^{-30} \text{ м}^6/\text{с}$, можно вести расчёт задачи до тех пор, пока волна положительных ионов не достигнет границы (время $\sim 1.5 - 2 \text{ нс}$, в зависимости от положения затравки) и далее. В то же время максимальная концентрация положительных ионов в области максимальной концентрации положительного заряда снижается очень умеренно (с $n_+^{max} = 4.59 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ при $\beta \sim 10^{-34} \text{ м}^6/\text{с}$ до $n_+^{max} = 3.42 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ при $\beta \sim 10^{-30} \text{ м}^6/\text{с}$). После того, как положительные ионы достигли границы пузырька, проблем с устойчивостью дальнейших расчётов не возникало вплоть до времени $\sim 5 \text{ нс}$, когда моделирование прекратилось. В течение более длительных периодов времени схема, по-видимому, также остаётся устойчивой, поскольку к этому моменту основные распределения частиц почти достигли своих стационарных профилей, и затем происходит только медленная релаксация зарядов в пузырьке.

Заметим, что расчёт при $\beta \sim 10^{-30} \text{ м}^6/\text{с}$ балансирует на грани устойчивости. Значения x -компоненты (вдоль оси симметрии пузырька) электрического поля в области вблизи волны положительных ионов меняют знак в течение определённого интервала времени в небольшой области вблизи стенки пузырька, достигая 10% по модулю от среднего значения поля в промежутке, что, по-видимому, физически неверно. Однако значения концентрации остаются положительными по всей области, и упомянутые ошибки расчётов электрического поля со временем исчезают.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Были выполнены расчёты для случая развития волны ионизации в сферическом пузырьке, заполненном гелием, в конденсированном диэлектрике при приложенном напряжении $V_0 = 12.2$ кВ до момента времени 3 нс и далее для двух начальных положений.

На рис. 2 и 3 представлены результаты моделирования развития разряда при положении затравки на оси пузырька на расстоянии 0.07 мм от полюса пузырька, ближайшего к катоду (левая граница пузырька на рисунке).

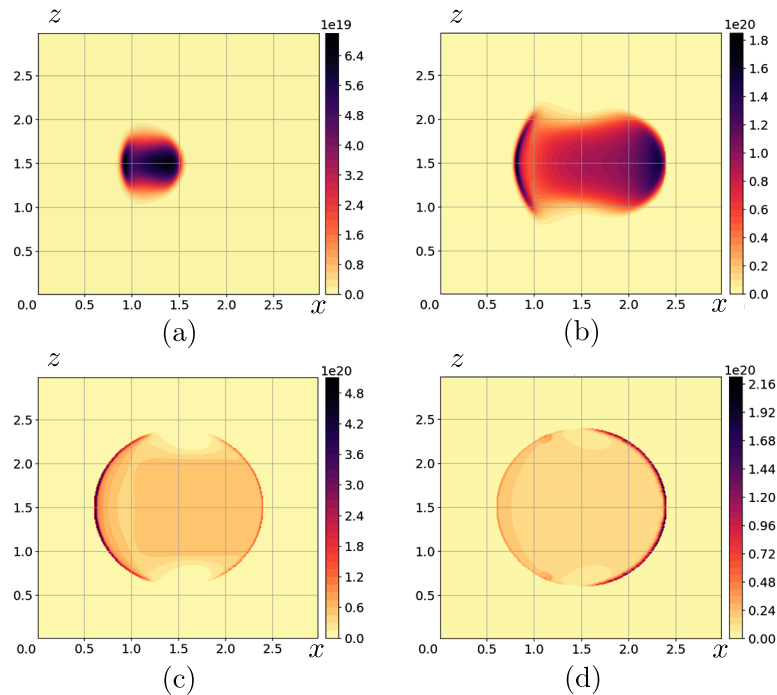


Рис. 2. Распределение электронной плотности в центральном сечении пузырька при положении затравки на оси пузырька слева (вблизи стенки пузырька, обращённой к катоду).
 Время с момента появления затравки: 0.3 нс (а), 0.4 нс (б), 0.6 нс (с), 2.0 нс (д)

На рис. 2 показано распределение концентрации электронов в центральном сечении разрядного промежутка в разные моменты времени. В течение 0.3 нс концентрация зарядов увеличивается на 6–7 порядков, и образуется волна электронов, движущихся к аноду (справа), и волна положительных ионов. Волна положительных ионов формируется, как правило, на расстоянии ~ 0.35 мм справа от позиции затравки. На фронте электронной волны можно различить «ядро», которое имеет диаметр 0.8 мм, когда достигает стенки пузырька (тёмная область справа на рис. 2(b)). Максимальная концентрация электронов в «ядре» достигает значений $n_e \sim 10^{20} \text{ м}^{-3}$. Волна положительного заряда по форме напоминает линзу – тонкую и широкую по фронту — с концентрацией выше, чем в волне электронов. На рис. 2(a), 2(b) наблюдаются два максимума плотности электронов. Максимум слева возникает из-за того, что значительная часть электронов «задерживается» в волне положительных ионов. Между двумя максимумами образуется осесимметричная область квазинейтральной плазмы с плотностью заряженных частиц $(5 - 8) \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$. На рис. 2(c), 2(d) показаны плотности электронов сразу после того, как волна положительных зарядов достигла левой границы пузырька, и через 1.4 нс после этого момента соответственно. Можно видеть, что плотность электронов на левой границе изначально выше, чем плотность на правой границе, но затем, из-за рекомбинации, боковой диффузии и переноса заряда, она становится ниже плотности на правой границе. Заметим,

что общий заряд того же знака на поверхности пузырька составляет 200 пКл, что согласуется с нашим предыдущим расчётом с использованием модели постоянной проводимости пузырька [20], [21].

На рис. 3 показаны распределения горизонтальной составляющей электрического поля в центральном сечении разрядного промежутка в разные моменты времени. Вдоль оси наблюдается формирование цилиндрической симметричной области со слабым электрическим полем, соответствующей области плазмы. Со временем область низкого поля распространяется на весь пузырёк.

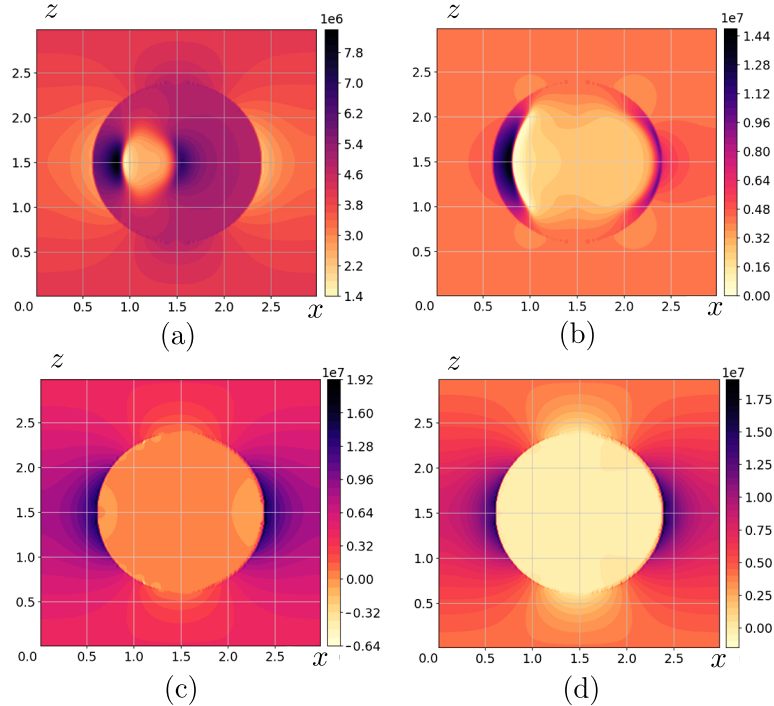


Рис. 3. Распределение горизонтальной составляющей вектора электрического поля в центральном сечении пузырька.
Время с момента появления затравки: 0.3 нс (а), 0.4 нс (b), 0.9 нс (c), 2.0 нс (d)

На рис. 4 показаны результаты моделирования развития разряда с асимметричным расположением затравки. Затравка располагалась в стороне от оси пузырька на расстоянии 0.2 мм от его боковой стенки. Видно, что фронт волны положительного заряда имел сложную пространственную структуру. В частности, после того, как волна достигла стенки, на фронте волны положительных зарядов образовались два максимума плотности заряда (рис. 4(c)). Даже при длительности более 1.7 нс все ещё наблюдались различия в распределении заряда по объёму пузырька (см. рис. 4(d)).

На рис. 5 показано распределение горизонтальной составляющей электрического поля в случае появления затравки вдали от оси пузырька. В отличие от случая с симметрично расположенной затравкой, здесь мы наблюдаем, что область слабого поля будет распространяться по объёму пузырька более широким фронтом, а не вдоль выбранного направления.

Для количественного сравнения параметров разряда в разные моменты времени на рис. 6 приведены графики концентрации электронов и горизонтальной составляющей поля вдоль оси симметрии пузырька для случая расположения затравки на оси. Видно, что начиная с момента 0.3 нс после начала процесса ионизации и до момента, когда электроны достигают стенки пузырька, эти распределения имеют сходную форму. В этом случае электрическое поле на фронте волны превышает среднее поле в 1.4–2 раза, а за фронтом волны электронов оно падает до значений, меньших среднего поля примерно в 2 раза.

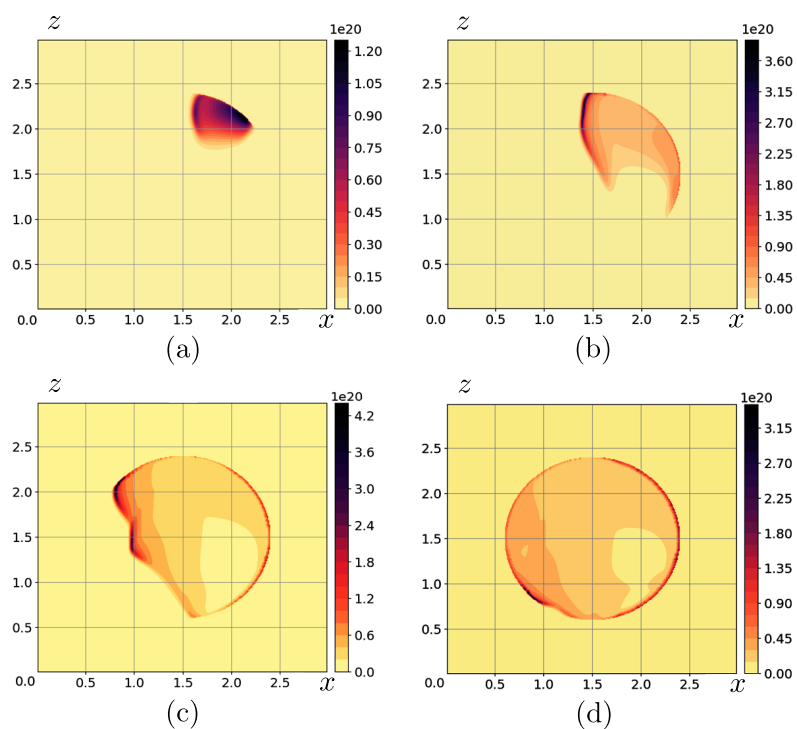


Рис. 4. Распределение плотности электронов в центральном сечении пузырька при положении затравки вдали от оси пузырька (вблизи его боковой стенки).
 Время с момента появления затравки: 0.3 нс (а), 0.6 нс (b), 1.2 нс (c), 1.7 нс (d)

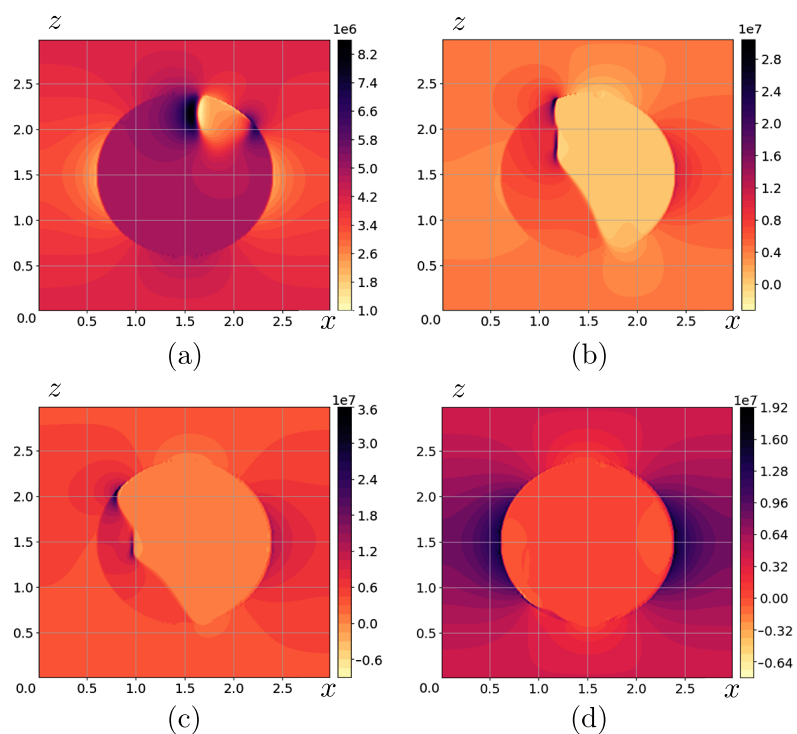


Рис. 5. Распределение горизонтальной составляющей вектора электрического поля в центральном сечении пузырька.
 Время с момента появления затравки: 0.3 нс (а), 0.9 нс (b), 1.2 нс (c), 1.7 нс (d)

В течение времени 10^{-14} с наблюдались выбросы значений напряжённости электрического поля в область отрицательных значений, что физически неверно (см. рис. 6(b) кривая 5).

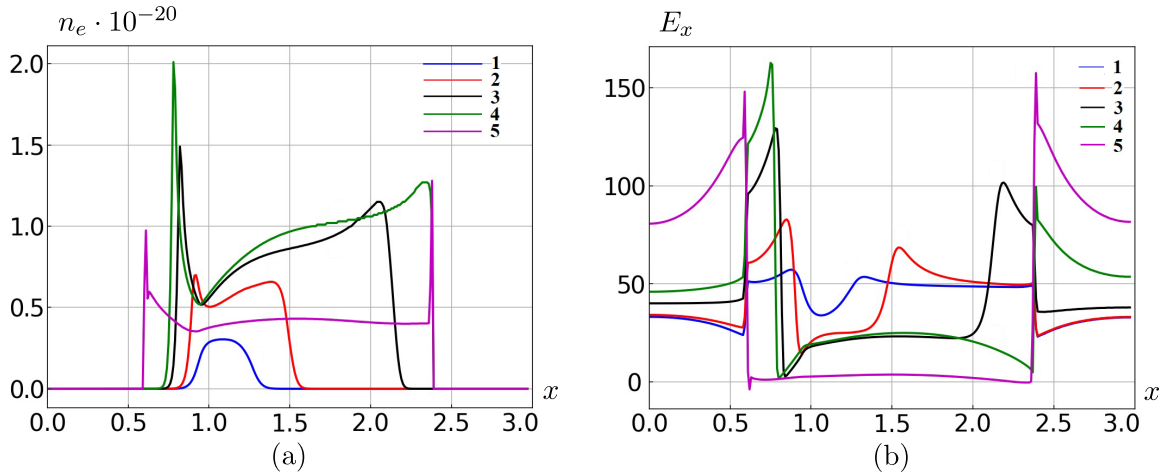


Рис. 6. Динамика концентрации электронов (а) и компоненты электрического поля вдоль оси пузырька (б).

Расположение затравки на оси. Моменты времени: 0.26 нс (1), 0.3 нс (2), 0.38 нс (3), 0.42 нс (4), 0.7 нс (5)

При этом сами концентрации остаются положительными. Это явление наблюдалось в приграничных узлах пузырька в области излома границы и не приводило к развитию численной неустойчивости. Высота выбросов по модулю величины могла составлять до 15% от максимального поля в промежутке, которое наблюдалось в соседних ячейках. По-нашему мнению, эти эффекты связаны как с дискретностью задания границы пузырька, так и с немонотонностью использованной нами схемы переноса для носителей заряда. Эти эффекты имели место в моменты выхода волн положительных и отрицательных зарядов на границу «пузырёк — конденсированный диэлектрик» и релаксировали практически до значений поля, близких к нулю, за время $\sim 5 \cdot 10^{-14}$ с по мере дальнейшей зарядки границы. Таким образом, мы считаем, что эти эффекты не оказывают в целом существенного влияния на результаты моделирования.

Сравнение кривых 4 и 5 на рис. 6 показывает, что поле в разрядном промежутке достигало своих максимальных значений на полюсах пузырька сразу после того, как волны заряда достигли стенки пузырька. Позже максимальные значения поля могут уменьшаться, что объясняется совокупным эффектом рекомбинации зарядов и бокового переноса за счёт диффузии и подвижности.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для ранее разработанной конечно-разностной схемы исследованы условия, при которых схема может быть устойчивой. В приближении постоянства коэффициента трехчастичной рекомбинации получено пороговое значение коэффициента, при котором схема все ещё позволяет проводить трёхмерные расчёты развития газового разряда без развития неустойчивости. Возникающие в результате ошибки при расчёте электрического поля носят локальный характер и со временем быстро исчезают, практически не влияя на результаты моделирования. Были проведены расчёты развития разряда в пузырьке гелия в конденсированном диэлектрике до того момента, когда пузырь становится в основном проводящим, стенки пузырька в основном заряжаются, а затем следует стадия медленной релаксации заряда. Были получены распределения зарядов и полей в пузырьке в разные моменты времени. Моделирование проводилось для двух случаев: для случая, когда затравка находится на оси

пузырька, и для случая, когда затравка находится сбоку. Трёхмерное моделирование показало, что фронт волны заряда в пузырьке может иметь очень сложную форму. Показано, что величина максимального поля на поверхности пузырька может быть наибольшей в тот момент, когда волна заряда достигает стенки пузырька, а затем она может уменьшаться. Суммарное значение заряда того же знака на поверхности пузырька (так называемый «истинный» заряд) согласуется с оценками, полученными в результате предыдущих расчётов в рамках более простой модели и экспериментальными данными [1], [20], [21].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-10198-П). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Korobeynikov S., Ovsyannikov A., Ridel A., Karpov D., Lyutikova M., Kuznetsova Yu., Yassinskiy V. Study of partial discharges in liquids // J. Electrostatics. 2020. V. 103. Article number 103412; DOI: 10.1016/j.elstat.2019.103412
2. Guo B., Li X., Ebert U., Teunissen J. A computational study of accelerating, steady and fading negative streamers in ambient air // Plasma Sources Sci. Technol. 2022. V. 31, N 9. Article number 095011; DOI:10.1088/1361-6595/ac8e2e
3. Qi B., Wang H., Liu C., Teng F., Yu D., Liang Y., Wang F. Numerical Simulation of Streaming Discharge Characteristics of Free Metal Particles in SF₆/CF₄ Gas Mixtures Under Highly Heterogeneous Electric Field // Sensors. 2025. V. 5. P. 3847; DOI: 10.3390/s25133847
4. Yan X., Zhou X., Li Z., Qian Y., Sheng G. Numerical simulation of streamer discharge with different electrode shapes in C₄F₇N // AIP Advances. 2023. V. 13. Article number 035238; DOI: 10.1063/5.0134509
5. Wei Y., Zhang L., Liu J., Li Zh., Zhao C. Numerical simulation and analysis of streamer discharge of SF₆/N₂ mixed gas under high-pressure, low-temperature conditions // The Proceedings of the 11th Frontier Academic Forum of Electrical Engineering (FAFEE2024). Springer, 2025. V. VII. P. 1–13.
6. Wang Zh., Sun A., Teunissen J. A comparison of particle and fluid models for positive streamer discharges in air // Plasma Sources Sci. Technol. 2022. V. 31, N 1. Article number 015012; DOI 10.1088/1361-6595/ac417b
7. <https://gitlab.com/MD-CWI-NL/afivo-streamer>
8. Babaeva N.Y., Tereshonok D.V., Naidis G.V., Smirnov B.M. Initiation of breakdown in strings of bubbles immersed in transformer oil and water: string orientation and proximity of bubbles // J. Phys. D: Appl. Phys. 2016. V. 49, N 2. Article number 025202; DOI:10.1088/0022-3727/49/2/025202
9. Savenko R.A., Karpov D.I., Ridel A.V., Korobeynikov S.M. Simulation of gas discharge in a helium bubble in liquid dielectric // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2025. V. 13, N 1. P. 108–117.
10. Курбанисмаилов В.С., Омаров О.А., Рагимханов Г.Б., Терешонок Д.В. Особенности формирования и развития ионизационных фронтов в предварительно ионизированной газовой среде // Письма в Журн. техн. физики. 2017. Т. 43, № 17. С. 73–81; DOI: 10.21883/PJTF.2017.18.45036.16844.
11. Биберман Л.М., Воробьёв В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1982.
12. Davies D.K., Jones F.L., Morgan C.G. Primary ionization coefficient of helium // Proc. Phys. Soc. 1962. V. 80, N 4. P. 898–908; DOI: 10.1088/0370-1328/80/4/312

13. *Ran J., Luo H., Yue Y., Wang X.* Measurement of the first Townsend ionization coefficients in helium, air, and nitrogen at atmospheric pressure // *J. Phys. Soc. Japan.* 2014. V. 83. Article number 074503; DOI: 10.7566/JPSJ.83.074503
14. *Lakshminarasimha C.S., Lucas J.* The ratio of radial diffusion coefficient to mobility for electrons in helium, argon, air, methane and nitric oxide // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1977. V. 10. P. 313–321; DOI: 10.1088/0022-3727/10/3/011
15. *Смирнов Б.М.* Свойства газоразрядной плазмы. СПб: Изд-во Политехнического ун-та, 2010.
16. *Drawin H. W., Emard F.* Collisional-radiative volume recombination and ionization coefficients for quasi-stationary helium plasmas // *Z. Physik.* 1972. V. 243. P. 326–340; DOI: 10.1007/BF01395918
17. *Бейтс Д., Далгарно А.* Электрон-ионная рекомбинация // *Атомные и молекулярные процессы.* М.: Мир, 1964.
18. *Hinnov E., Hirschberg J.G.* Electron-ion recombination in dense plasmas // *Phys.Rev.* 1962. V. 125, N 3. P. 795–801.
19. *Кудрявцев А.А., Никитин А.Г.* Кинетика рекомбинации атомарных ионов в плотной низкотемпературной неизотермической плазме // *Теплофизика высоких температур.* 1991. Т. 29, № 4. С. 625–632.
20. *Korobeynikov S.M., Ridel A.V., Medvedev D.A., Karpov D.I., Ovsyannikov A.G., Meredova M.B.* // Registration and simulation of partial discharges in free bubbles at AC voltage // *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation.* 2019. V. 26, N 4. P. 1035–1042; DOI: 10.1109/TDEI.2019.007808
21. *Korobeynikov S., Ridel A., Karpov D., Ovsyannikov A., Meredova M.* Mechanism of partial discharges in free helium bubbles in transformer oil // *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation.* 2019. V. 26, N 5. P. 1605–1611; DOI: 10.1109/TDEI.2019.008199

UDC 537.52:519.63

ON THE FEATURES OF NUMERICAL SIMULATION OF ELECTRIC DISCHARGE IN A HELIUM BUBBLE IN DIELECTRIC LIQUID

© 2026 R. A. Savenko^{1,2a}, D. I. Karpov^{1,2b}, A. V. Ridel^{2c},
S. M. Korobeynikov^{2d}

¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS,
Lavrentyev pr., 15, Novosibirsk 630090, Russia,*

²*Novosibirsk State Technical University,
K. Marx pr., 20, Novosibirsk 630073, Russia*

E-mails: ^asavenko@hydro.nsc.ru, ^bkarpov@hydro.nsc.ru, ^cridel@corp.nstu.ru,
^dkorobeynikov@corp.nstu.ru

Received 30.10.2025, revised 14.04.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. A model developed earlier for three-dimensional simulation of partial discharge in a helium bubble immersed in a dielectric liquid has been investigated for numerical stability. The effect of the recombination coefficient on the numerical stability of calculations is specifically discussed. The discharge was simulated from the beginning of the process to the final stage of gradual charge relaxation. Two different cases were simulated. In the first case, the initial small region of ionized gas (the seed) was located on the axis of the bubble near its pole. In the second case, the seed was located away from the axis of the system near the bubble wall. The three-dimensional evolution of the number densities of helium ions and electrons in a bubble was calculated. Positive charge fronts with characteristic features were observed in different cases. Three-dimensional distributions of the electric field in the interelectrode gap for different time points are obtained.

Keywords: partial discharge, gas discharge, «true» charge, 3D simulation, recombination.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.107

REFERENCES

1. Korobeynikov S., Ovsyannikov A., Ridel A., Karpov D., Lyutikova M., Kuznetsova Yu., Yassinskiy V. Study of partial discharges in liquids. *J. Electrostatics*, 2020, Vol. 103, Article number 103412; DOI: 10.1016/j.elstat.2019.103412
2. Guo B., Li X., Ebert U., Teunissen J. A computational study of accelerating, steady and fading negative streamers in ambient air. *Plasma Sources Sci. Technol.*, 2022, Vol. 31, No. 9, Article number 095011; DOI: 10.1088/1361-6595/ac8e2e
3. Qi B., Wang H., Liu C., Teng F., Yu D., Liang Y., Wang F. Numerical Simulation of Streaming Discharge Characteristics of Free Metal Particles in SF₆/CF₄ Gas Mixtures Under Highly Heterogeneous Electric Field. *Sensors*, 2025, Vol. 25, Article number 3847; DOI: 10.3390/s25133847
4. Yan X., Zhou X., Li Z., Qian Y., Sheng G. Numerical simulation of streamer discharge with different electrode shapes in C₄F₇N. *AIP Advances*, 2023, Vol. 13, Article number 035238; DOI: 10.1063/5.0134509
5. Wei Y., Zhang L., Liu J., Li Zh., Zhao C. Numerical simulation and analysis of streamer discharge of SF₆/N₂ mixed gas under high-pressure, low-temperature conditions. *Lecture Notes in Electrical Engineering 1293. The Proceedings of the 11th Frontier Academic Forum of Electrical Engineering (FAFEE2024)*. Beijing Paiké Culture Commu. Co., Ltd. 2025. Springer. 2025, Vol. VII. pp. 1–13.

6. Wang Zh., Sun A., Teunissen J. A comparison of particle and fluid models for positive streamer discharges in air. *Plasma Sources Sci. Technol.*, 2022. Vol. 31, No. 1, Article 015012; DOI: 10.1088/1361-6595/ac417b
7. <https://gitlab.com/MD-CWI-NL/afivo-streamer>
8. Babaeva N.Y., Tereshonok D.V., Naidis G.V., Smirnov B.M. Initiation of breakdown in strings of bubbles immersed in transformer oil and water: string orientation and proximity of bubbles. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2016, Vol. 49, No. 2, Article number 025202; DOI: 10.1088/0022-3727/49/2/025202
9. Savenko R.A., Karpov D.I., Ridel A.V., Korobeynikov S.M. Simulation of gas discharge in a helium bubble in liquid dielectric. *Euras. J. Math. Comput. Appl.*, 2025, Vol. 13, No. 1, pp. 108–117.
10. Kurbanismailov V.S., Omarov O.A., Ragimkhanov G.B., Tereshonok D.V. Peculiarities of the formation and development of ionization fronts in a pre-ionized gas medium. *Tech. Phys. Lett.*, 2017, Vol. 43, No. 17, pp. 853–856; DOI: 10.1134/S1063785017090206.
11. Biberman L.M., Vorobyev V.S., Yakubov I.T. *Kinetika neravnovesnoj nizkoterperaturnoj plazmy [Kinetics of non-equilibrium low-temperature plasma]*. Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
12. Davies D.K., Jones F.L., Morgan C.G. Primary ionization coefficient of helium. *Proc. Phys. Soc.*, 1962, Vol. 80, No. 4, pp. 898–908; DOI: 10.1088/0370-1328/80/4/312
13. Ran J., Luo H., Yue Y., Wang X. Measurement of the first Townsend ionization coefficients in helium, air, and nitrogen at atmospheric pressure. *J. Phys. Soc. Japan*, 2014, Vol. 83, Article number 074503; DOI: 10.7566/JPSJ.83.074503
14. Lakshminarasimha C.S., Lucas J. The ratio of radial diffusion coefficient to mobility for electrons in helium, argon, air, methane and nitric oxide. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1977, Vol. 10, pp. 313–321; DOI: 10.1088/0022-3727/10/3/011
15. Smirnov B.M. *Physics of ionized gases*. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
16. Drawin H.W., Emard F. Collisional-radiative volume recombination and ionization coefficients for quasi-stationary helium plasmas. *Z. Physik*, 1972, Vol. 243, pp. 326–340; DOI: 10.1007/BF01395918
17. Bates D.R., Dalgarno A. *Electron-ion recombination in Atomic and Molecular Processes*. N. Y., London, Academic Press, 1962.
18. Hinnov E., Hirschberg J.G. Electron-ion recombination in dense plasmas. *Phys.Rev.*, 1962, Vol. 125, No. 3, pp. 795–801.
19. Kudryavtsev A.A., Nikitin A.G. Recombination kinetics of atomic ions in dense low-temperature nonisothermal plasmas. *High Temperature*, 1991, Vol. 29, No. 4, pp. 483–489.
20. Korobeynikov S.M., Ridel A.V., Medvedev D.A., Karpov D.I., Ovsyannikov A.G., Meredova M.B. Registration and simulation of partial discharges in free bubbles at AC voltage. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 2019, Vol. 26, No. 4, pp. 1035–1042; DOI: 10.1109/TDEI.2019.007808
21. Korobeynikov S., Ridel A., Karpov D., Ovsyannikov A., Meredova M. Mechanism of partial discharges in free helium bubbles in transformer oil. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, 2019, Vol. 26, No. 5, pp. 1605–1611; DOI: 10.1109/TDEI.2019.008199

УДК 517.955:517.958

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С УЧЁТОМ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

© 2026 Х. Г. Умаров^{1,2}

¹Академия наук Чеченской Республики,
ул. В. Алиева, 19а, г. Грозный 364043, Россия,

²Чеченский государственный педагогический университет,
ул. С. Кишиевой, 33, г. Грозный 364068, Россия

E-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 25.09.2025 г.; после доработки 09.04.2026 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа (уравнения не разрешённые относительно старшей временной производной), обобщающего уравнение колебаний стержня с учётом движущейся нагрузки, исследуется задача Коши в пространстве непрерывных функций, заданных на всей числовой оси, и для которых существуют пределы на бесконечности. Найдено в явном виде классическое решение соответствующего линейного однородного уравнения и получены оценки норм операторнозначных функций, представляющих это решение. Получена оценка нормы решения задачи Коши для линейного однородного уравнения. Установлен временной отрезок существования и единственности классического решения вспомогательной задачи Коши, связанной с исходной и приведена оценка нормы этого локального решения. Найдены условия, обеспечивающие связь между классическими решениями исходной и вспомогательной задач Коши на определённом временном отрезке. Рассмотрены условия разрушения классического решения задачи Коши на конечном временном отрезке.

Ключевые слова: колебания стержня с учётом движущейся нагрузки, нелинейное уравнение соболевского типа, разрушение решения.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.108

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial x^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, штрих в уравнении обозначает дифференцирование по $u_x = \partial_x u = \partial u / \partial x$, коэффициенты α, β, γ — положительные постоянные, а нелинейность $f(\cdot)$ — заданная функция. Основная цель — получение условий существования локального $t \in [0, t_1]$ классического решения задачи Коши, оценка его нормы при $t \in [0, t_1]$ и условий разрушения решения на некотором конечном временном отрезке.

В случае $f(\cdot) \equiv 0$ уравнение (1) описывает колебания стержня с учётом движущейся нагрузки и моделирует колебания рельса на участке железнодорожного пути, который можно рассматривать как стержень, лежащий на упругом основании, при движении по нему состава бесконечной длины (см. [1, гл. 6, § 6.3, (6.103)]).

Уравнения вида (1) входят в класс псевдогиперболических уравнений, определённых в монографии [2, гл. 2], в которой содержатся первые теоремы о разрешимости задачи Коши для

линейных уравнений этого класса. В литературе уравнения вида (1) часто называют уравнениями соболевского типа, поскольку работы академика С. Л. Соболева, который вывел и исследовал уравнение малых колебаний вращающейся жидкости, были первыми глубокими исследованиями уравнений в частных производных, не разрешённых относительно старшей временной производной и послужили началом для нового направления в теории дифференциальных уравнений. Уравнения соболевского типа — важный инструмент в математическом моделировании сложных динамических систем и имеется большое количество работ, посвящённых изучению различных задач для таких уравнений (см., например, [3] и обширную библиографию, приведённую там). Не разрешённое относительно старшей временной производной уравнение (1), является уравнением соболевского типа с младшими (в обобщённом смысле [2]) членами уравнения. Параметры α, β, γ являются коэффициентами при младших членах уравнения, при этом, как отмечается в работе [4], в отличие от гиперболических и параболических уравнений равенство нулю некоторых из этих параметров (т. е. добавление или отбрасывание младших членов в уравнении, не разрешённом относительно старшей производной) может существенно повлиять на разрешимость задачи Коши.

Задача Коши для уравнения (1) рассматривается в пространстве $C(\mathbb{R})$ [5, гл. VIII, § 1] непрерывных функций $g = g(x)$, с нормой $\|g\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$, для которых существуют оба предела при $x \rightarrow \pm\infty$. Полагаем, что начальные функции

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

и искомое классическое решение $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \bar{R}_+ \times R$, $\bar{R}_+ = [0, +\infty)$, вместе с частными производными входящими в уравнение (1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат $C(\mathbb{R})$. (Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка, и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.)

Через $C^{(k)}(\mathbb{R}) = \{g(x) \in C(\mathbb{R}) \mid g'(x), \dots, g^{(k)}(x) \in C(\mathbb{R})\}$, $k \in \mathbb{N}$, обозначаются подмножества дифференцируемых функций в $C(\mathbb{R})$.

В уравнении (1) нелинейная функция $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема, $x \in \mathbb{R}$, модуль $|f(r)|$ является неубывающей функцией, $r \geq 0$, причём $|f(r)| > 0$ при $r > 0$, и справедливы оценки

$$\begin{aligned} \sup_{x \in R} |f^{(i)}(g(x))| &\leq |f^{(i)}(\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|)|, \quad i = \overline{0, 1}, \quad \text{для всех } g(x) \in C(\mathbb{R}), \\ |f(\xi r)| &\leq \chi(\xi) |f(r)|, \quad \xi > 0, \quad r \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\chi(\xi)$ — непрерывная функция при $\xi \geq 0$ (простейший пример функции $f(x)$ — степенная функция, другие нетривиальные примеры в [6]).

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать и уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial t \partial x^3} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma v = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(v), \quad (4)$$

получающееся из (1) после дифференцирования обеих частей по x и последующей замены $v = u_x$ (левые части уравнений (1) и (4) совпадают). Для уравнения (4) соответствующие начальные условия примут вид

$$v|_{t=0} = \varphi'(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi'(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Исследование задачи Коши (1), (2) проведём по следующему плану: прежде чем приступить к установлению основного результата статьи убедимся, что постановка задачи Коши (1), (2) корректна и локальное по времени классическое решение её существует.

С этой целью для соответствующего (1) линейного уравнения:

$$(I - \partial_x^2)u_{tt} - (\partial_x^3 - \alpha\partial_x)u_t + (\partial_x^4 + \beta\partial_x^2 + \gamma I)u = 0, \quad (6)$$

найдем решение задачи Коши, используя методы теории сильно непрерывных полугрупп операторов и косинус оператор-функций и получим, используемые в дальнейшем, оценки норм операторнозначных функций, представляющих это решение.

Далее, для вспомогательной задачи Коши (4), (5) найдем временной отрезок $[0, t_1]$ существования и единственности классического решения и оценим норму этого локального решения в $C(\mathbb{R})$. Затем, установим связь между решениями уравнений (1) и (4). В заключительной части статьи найдем условия разрушения решения задачи Коши (1), (2) на конечном временном отрезке.

2. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ (6)

Напомним, что в пространстве $C(\mathbb{R})$ (см. [5, гл. VIII, § 1] и [7, § 2]) дифференциальные операторы ∂_x , с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}(\mathbb{R})$, и ∂_x^2 , $D(\partial_x^2) = C^{(2)}(\mathbb{R})$, являются соответственно производящими операторами сильно непрерывных сжимающих группы:

$$U(\tau; \partial_x)g(x) = g(x + \tau), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

и полугруппы:

$$U(t; \partial_x^2)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x + \xi) d\xi, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Полуось $\lambda > 0$ принадлежит резольвентным множествам операторов ∂_x и ∂_x^2 и для соответствующих резольвент

$$\begin{aligned} (\lambda I - \partial_x)^{-1}g(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} g(x + s) ds, \\ (\lambda I - \partial_x^2)^{-1}g(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{\lambda}|s|} g(x + s) ds \end{aligned}$$

справедливы оценки норм

$$\|(\lambda I - \partial_x)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}, \quad \|(\lambda I - \partial_x^2)^{-1}\| \leq \lambda^{-1},$$

где I — тождественный оператор, причём эти резольвенты коммутируют между собой.

Введём в уравнение (6) новую неизвестную функцию

$$v(t, x) = u(t, x) - u_{xx}(t, x), \quad (7)$$

полагая, что частные производные u_{xx} , u_{txx} непрерывны при $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Из замены (7) при условии, что начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $C^{(2)}(\mathbb{R})$, можно единственным образом определить начальные значения функции $v = v(t, x)$:

$$v|_{t=0} = v_0(x) = \varphi(x) - \varphi''(x), \quad v_t|_{t=0} = v_1(x) = \psi(x) - \psi''(x),$$

и, используя принадлежность положительной полуоси резольвентному множеству дифференциального оператора ∂_x^2 , выразить решение $u(t, x)$ уравнения (6) через новую неизвестную функцию $v(t, x)$:

$$u(t, x) = (I - \partial_x^2)^{-1}v(t, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} v(t, x + s) ds. \quad (8)$$

В результате замены (7) получим эквивалентное (6) интегро-дифференциальное уравнение

$$v_{tt} + A_1 v_t + A_2 v = 0, \quad (9)$$

в котором операторные коэффициенты определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= \partial_x + (\alpha - 1)[(I - \partial_x)^{-1} - (I - \partial_x^2)^{-1}], & D(A_1) &= C^{(1)}(\mathbb{R}), \\ A_2 &= -\partial_x^2 - (\beta + 1)I + (\beta + \gamma + 1)(I - \partial_x^2)^{-1}, & D(A_2) &= C^{(2)}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Оператор A_1 получен возмущением производящего оператора ∂_x группы левых сдвигов ограниченным оператором

$$A_{12} = (\alpha - 1)[(I - \partial_x)^{-1} - (I - \partial_x^2)^{-1}],$$

который порождает равномерно непрерывную группу $U(\tau; A_{12})$, $\tau \in \mathbb{R}$, представляющуюся степенным рядом

$$U(\tau; A_{12}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau^n}{n!} A_{12}^n,$$

сходящимся равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ на каждом конечном отрезке. Возмущение ограниченным оператором сохраняет свойство оператора быть производящим оператором, поэтому оператор A_1 является производящим оператором сильно непрерывной группы, для которой справедливы представление

$$U(\tau; A_1)g(x) = U(\tau; A_{12})g(x + \tau), \quad \text{для любых } g(x) \in C(\mathbb{R}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

и оценка нормы

$$\|U(t; A_1)\| \leq e^{\|A_{12}\|t} \leq e^{2|\alpha-1|t}, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (10)$$

В уравнении (9) произведём замену неизвестной функции

$$w(t, x) = U(t/2; A_1)v(t, x), \quad (11)$$

тогда можно единственным образом определить начальные значения функции $w(t, x)$:

$$w|_{t=0} = w_0(x) = v_0(x),$$

$$\begin{aligned} w_t|_{t=0} = w_1(x) &= v_1(x) + A_1 v_0(x)/2 = v_1(x) + (v_0(x))'/2 \\ &+ \frac{\alpha - 1}{4} \left(2 \int_0^{+\infty} e^{-r} v_0(x + r) dr - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} v_0(x + s) ds \right). \end{aligned}$$

Используя равенство $U(-t/2; A_1) = (U(t/2; A_1))^{-1}$, выразим решение $v(t, x)$ уравнения (9) через новую неизвестную функцию $w(t, x)$:

$$v(t, x) = U(-t/2; A_1)w(t, x). \quad (12)$$

В результате замены (11) получим эквивалентное (9) интегро-дифференциальное уравнение

$$w_{tt} = Bw, \quad (13)$$

в котором операторный коэффициент

$$B = \frac{1}{4}A_1^2 - A_2 = B_1^2 + B_2,$$

где

$$B_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \partial_x, \quad D(B_1) = C^{(1)}(\mathbb{R}),$$

является производящим оператором сильно непрерывной группы сдвигов

$$U(\tau; B_1)g(x) = g(x + \tau\sqrt{5}/2), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

а ограниченный оператор B_2 определяется следующим образом:

$$B_2 = \delta I - (\gamma + \delta)(I - \partial_x^2)^{-1} + \frac{1}{4}A_{12}^2, \quad D(B_2) = C(\mathbb{R}),$$

здесь $\delta = \beta + 1 - (\alpha - 1)/2$.

Уравнение (13) можно переписать в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$W_{tt} = (B_1^2 + B_2)W, \quad (14)$$

где $W = W(t) : t \rightarrow w(t, x)$ — искомая вектор-функция, определённая для $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и со значениями в пространстве $C(\mathbb{R})$.

Начальные условия для уравнения (14) в $C(\mathbb{R})$ переписутся в виде

$$W|_{t=0} = W_0, \quad W_t|_{t=0} = W_1, \quad (15)$$

где $W_0 = w_0(x)$, $W_1 = w_1(x)$ — элементы пространства $C(\mathbb{R})$.

Оператор B_1^2 является (см. [7, § 1.5]) производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; B_1^2)$, $\tau \in \mathbb{R}$, для которой справедливо представление

$$C(\tau; B_1^2)g(x) = \frac{1}{2}[U(\tau; B_1) + U(-\tau; B_1)]g(x) = \frac{1}{2}\left[g\left(x + \tau\frac{\sqrt{5}}{2}\right) + g\left(x - \tau\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

и оценка нормы

$$\|C(t; B_1^2)\| \leq 1, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Ограниченный оператор B_2 порождает (см. [7, § 4.2]) косинус оператор-функцию $C(\tau; B_2)$, $\tau \in \mathbb{R}$, для которой справедливо представление

$$C(\tau; B_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} B_2^n,$$

в котором степенной ряд сходится равномерно по $\tau \in \mathbb{R}$ на каждом конечном отрезке, и оценка нормы

$$\|C(t; B_2)\| \leq \text{ch}(k_1 t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

где $k_1^2 = (\alpha - 1)^2 + |\delta| + |\gamma + \delta|$.

Возмущение ограниченным оператором B_2 сохраняет способность оператора B_1^2 порождать косинус оператор-функцию (см. [7, § 8.2]), поэтому оператор $B = B_1^2 + B_2$ является производящим оператором косинус оператор-функции, для которой на элементах $g(x) \in D(B) = C^{(2)}(\mathbb{R})$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$ справедливо представление

$$C(\tau; B)g(x) = C(\tau; B_1^2)g(x) + \frac{\tau^2}{2} \int_0^1 j_1(\tau\sqrt{1-s^2}, B_1^2)C(\tau s; B_1)g(x) ds, \quad (16)$$

где

$$j_1(\tau, B_1^2)g(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-s^2} C(\tau s; B_1^2)g(x) ds, \quad \|j_1(\tau, B_1^2)\| \leq 1,$$

и оценка нормы

$$\|C(t; B)\| \leq 1 + \frac{t}{2k_1} \text{sh}(k_1 t) = h_1(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (17)$$

С косинус оператор-функцией (16) связана [7, § 1.4] синус оператор-функция:

$$S(\tau; B)g(x) = \int_0^\tau C(s; B)g(x)ds, \quad g(x) \in C(\mathbb{R}), \quad (18)$$

и линейное многообразие

$$C_1(\mathbb{R}) = \{g(x) \in C(\mathbb{R}) \mid C(\tau; B)g(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}, C(\mathbb{R}))\},$$

т.е. подмножество $C_1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ состоит из тех функций из $C(\mathbb{R})$, для которых функция $C(\tau; B)g(x) : \mathbb{R} \rightarrow C(\mathbb{R})$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной τ . Очевидно, что $D(B) \subset C_1(\mathbb{R})$.

Из соотношений (17) и (18) выводим оценку нормы синус оператор-функции:

$$\|S(t; B)\| \leq t + \frac{t}{2k_1^2} \text{ch}(k_1 t) = h_2(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (19)$$

Задача Коши (14), (15) равномерно корректна (см. [7, § 1.4]) только тогда, когда оператор B является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; B)$, $\tau \in \mathbb{R}$, при этом классическое решение абстрактной задачи Коши (14), (15) даётся формулой

$$W(t) = C(t; B)W_0 + S(t; B)W_1, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

для любых $W_0 \in D(B)$ и $W_1 \in C_1(\mathbb{R})$.

Теперь, производя обратные замены (8) и (12), находим решение задачи Коши для уравнения (6):

$$u(t, x) = U(-\frac{t}{2}; A_1) \left\{ C(t; B)\varphi(x) + S(t; B) \left[\psi(x) + \frac{1}{2}A_1\varphi(x) \right] \right\}. \quad (20)$$

Таким образом, имеет место утверждение:

Лемма 1. Пусть начальные функции подчинены условиям $\varphi(x) \in C^{(4)}(\mathbb{R})$ и $\psi(x) \in C^{(3)}(\mathbb{R})$, тогда задача Коши для линейного уравнения (6) равномерно корректна, классическое решение даётся формулой (20) и для него в пространстве $C(\mathbb{R})$ при $t \in \mathbb{R}_+$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t, x)| \leq e^{|\alpha-1|t} \left[h_1(t) \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| + h_2(t) \left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)| + |\alpha-1| \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| + \frac{1}{2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x)| \right) \right]$$

в которой функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ из (17) и (19) соответственно.

Замечание 1. Классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (14), (15) принадлежит $C^{(2)}(\overline{\mathbb{R}}_+, C(\mathbb{R}))$ и для него $BW(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+, C(\mathbb{R}))$, поэтому решение $u(t, x) = (I - \partial_x^2)^{-1} U(-t/2; A_1)w(t, x)$ уравнения (6) принадлежит $C^{2,4}(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R})$.

3. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ (4)

Поддействуем на обе части уравнения (4) линейным ограниченным оператором $(I - \partial_x^2)^{-1}$, тогда получим эквивалентное (4) нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$v_{tt} + A_1 v_t + A_2 v = [(I - \partial_x^2)^{-1} - I]f(v), \quad (21)$$

в котором операторные коэффициенты A_1 и A_2 такие же, как и в уравнении (9).

Уравнение (21) в результате замены $v(t, x) = U(-t/2; A_1)w(t, x)$ примет вид

$$U(-t/2; A_1)[w_{tt}(t, x) - Bw(t, x)] = [(I - \partial_x^2)^{-1} - I]f(U(-t/2; A_1)w(t, x)),$$

но $U(t; A_1)$ — группа и, значит, действуя на обе части последнего уравнения оператором $U(t/2; A_1) = U^{-1}(-t/2; A_1)$, получим в пространстве $C(\mathbb{R})$ абстрактное полулинейное уравнение

$$W_{tt} = BW + F(t, U(-t/2; A_1)W), \quad (22)$$

здесь оператор B такой же, как и в уравнении (13), а $F(t, \cdot)$ — нелинейный оператор

$$F(t, g(x)) = [(I - \partial_x^2)^{-1} - I]U(t/2; A_1)f(g(x)),$$

где $f(\cdot)$ — оператор суперпозиции: $f(g) = f(g(x))$, $g(x) \in C(\mathbb{R})$.

Используя неравенство (10), выводим оценку нормы в пространстве $C[R]$ оператора F при $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\|F(t, g)\|_C \leq 2e^{|\alpha-1|t}|f(\|g\|_C)|. \quad (23)$$

Для уравнения (22) рассмотрим абстрактную задачу Коши записав начальные условия в виде

$$W|_{t=0} = W'_0, \quad W_t|_{t=0} = W'_1, \quad (24)$$

где $W'_0 = (w_0(x))'$ и $W'_1 = (w_1(x))'$ — элементы пространства $C(\mathbb{R})$.

Из непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции $f(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций (см. [8, гл. 5, § 20.1]) и ограниченности линейных операторов $(I - \partial_x^2)^{-1}$ и $U(\tau/2; A_1)$, $\tau \in \mathbb{R}$, следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(t, \cdot)$ в пространстве $C(\mathbb{R})$ и, значит, найдётся промежуток $[0, t_0)$, в котором абстрактная задача Коши (22), (24) для любых $W'_0 \in D(B)$ и $W'_1 \in C_1(\mathbb{R})$ имеет (см. [9, § 3]) единственное классическое решение $W = W(t)$, которое удовлетворяет абстрактному интегральному уравнению

$$W(t) = C(t; B)W'_0 + S(t; B)W'_1 + \int_0^t S(t-s; B)F(s, U(-s/2; A_1)W(s)) ds. \quad (25)$$

Оценивая норму левой части равенства (25) через норму правой и применяя неравенства (17), (19) и (23), имеем

$$\|W(t)\|_C \leq h_1(t)\|W'_0\|_C + h_2(t)\|W'_1\|_C + 2 \int_0^t h_2(t-s)e^{|\alpha-1|s}|f(\|U(-s/2; A_1)W(s)\|_C)| ds. \quad (26)$$

Из неравенства (26), используя оценки (10), (3) и

$$|f(\|U(-s/2; A_1)W(s)\|_C)| \leq |f(e^{|\alpha-1|s}\|W(s)\|_C)| \leq \chi(e^{|\alpha-1|s})|f(\|W(s)\|_C)|,$$

обозначая

$$h_3(t) = h_1(t)\|W_0'\|_C + h_2(t)\|W_1'\|_C \quad \text{и} \quad h_4(t) = 2e^{|\alpha-1|t}\chi(e^{|\alpha-1|t})$$

и применяя очевидное неравенство $h_2(t-s) \leq h_2(t)$, $s \in [0, t]$, получаем интегральное неравенство

$$\|W(t)\|_C \leq h_3(t) + h_2(t) \int_0^t h_4(s)|f(\|W(s)\|_C)|ds.$$

Откуда выводим [6] оценку нормы классического решения $W(t)$ абстрактной задачи Коши (22), (24) на отрезке $t \in [0, t_1]$:

$$\|W(t)\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(t, x)| \leq h_3(t)\Omega^{-1}(\Omega(1) + h_2(t)h_5(t)) = h_6(t),$$

в которой мажоранта $h_6(t)$ определяется функциями

$$\Omega(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{ds}{|f(s)|}, \quad \xi \geq \xi_0 > 0, \quad h_5(t) = \int_0^t h_4(s) \frac{\chi(h_3(s))}{h_3(s)} ds,$$

здесь $\Omega^{-1}(\cdot)$ — функция обратная к $\Omega(\cdot)$, а временной отрезок $[0, t_1] \subset [0, t_0]$ определяется теми значениями t , для которых значения функции $\Omega(1) + h_2(t)h_5(t)$ принадлежат области существования обратной функции $\Omega^{-1}(\cdot)$: $\Omega(1) + h_2(t)h_5(t) \in \text{Dom}(\Omega^{-1})$.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Пусть нелинейность уравнения (1) — функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условию (3), а начальные функции $\varphi(x) \in C^{(5)}(\mathbb{R})$ и $\psi(x) \in C^{(4)}(\mathbb{R})$, тогда на отрезке $t \in [0, t_1]$ существует единственное классическое решение $v(t, x) = u_x(t, x) = U(-t/2; A_1)w(t, x)$, задачи Коши (4), (5), для которого справедлива оценка нормы

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |v(t, x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_x(t, x)| \leq e^{|\alpha-1|t} \sup_{x \in \mathbb{R}} |w(t, x)| \leq e^{|\alpha-1|t} h_6(t) = h_7(t). \quad (27)$$

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ (1) И (4)

Предположим, что классическое решение $v = v(t, x) = u_x(t, x)$ вспомогательной задачи Коши (4), (5), его частные производные $v_{tt}(t, x)$, $v_{ttxx}(t, x)$, $v_{txxx}(t, x)$, $v_{xxxx}(t, x)$, $v_{tx}(t, x)$, $v_{xx}(t, x)$ и функции $v_x^2(t, x) \cdot f''(v(t, x))$ и $v_{xx}(t, x) \cdot f'(v(t, x))$ для всех значений временной переменной $t \in [0, t_1]$ по переменной x принадлежат пересечению пространства $C(\mathbb{R})$ с пространством $L_1(\mathbb{R})$ функций $g(x)$ абсолютно суммируемых на \mathbb{R} , т. е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < \infty$. Все эти требования выполнены если на временном отрезке $t \in [0, t_1]$ справедливы условия

$$u_x, u_{ttx}, u_{ttxx}, u_{txxx}, u_{xxxx}, u_{xxxxx}, u_{ttx}, u_{xxx}, u_{xx}^2 f''(u_x), u_{xxx} f'(u_x) \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}). \quad (28)$$

Заметим, что из принадлежности $g(x) \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, т. е. из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < \infty$ и существования пределов $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$ следует (см. [10, гл. 2, § 29.1]), что эти пределы равны нулю: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$.

Лемма 2. Из существования локального классического решения $v = v(t, x)$, $t \in [0, t_1]$, задачи Коши (4), (5) следует существование соответствующего решения

$$u = u(t, x) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \int_{x_0}^x u_s(t, s) ds = \int_{-\infty}^x v(t, s) ds \quad (29)$$

задачи Коши (1), (2) на том же временном отрезке $[0, t_1]$, при выполнении условий (28) и предельных соотношений

$$u_{tt}, u_{ttxx}, u_{txxx}, u_{xxxx}, u_{tx}, u_{xx}, u \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty, \quad t \in [0, t_1]. \quad (30)$$

Доказательство. Пусть $v = v(t, x) = u_x(t, x)$ — классическое решение уравнения (4), $t \in [0, t_1]$, тогда, используя предельные соотношения (30), имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \partial_s^2 f(v(t, s)) ds &= \int_{-\infty}^x [u_{ss}^2(t, s) f''(u_s(t, s)) + u_{sss}(t, s) f'(u_s(t, s))] ds \\ &= u_{xx}(t, x) f'(u_x(t, x)) - \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} u_{xx}(t, x_0) f'(u_x(t, x_0)) = u_{xx}(t, x) f'(u_x(t, x)). \end{aligned}$$

Теперь, подставляя функцию (29) в уравнение (1) и используя вышеприведённое представление, получаем тождественное равенство на отрезке $[0, t_1]$, откуда следует, что функция (29) является решением уравнения (1). \square

5. РАЗРУШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (1), (2)

В дальнейших рассмотрениях предполагается, что классическое решение $u = u(t, x)$, $(t, x) \in [0, t_1] \times \mathbb{R}$, задачи Коши (1), (2) принадлежит вместе с частными производными входящими в уравнение (1) пересечению пространства $C[R]$ с пространством $L_2(\mathbb{R})$ функций с интегрируемым квадратом, т. е. $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$. Все эти требования выполнены если на временном отрезке $t \in [0, t_1]$ справедливы условия

$$\partial_t^n \partial_x^m u(t, x) \in C(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}), \quad n + m \leq 4, \quad n = \overline{0, 2}, \quad m = \overline{0, 4}, \quad (31)$$

Отметим, что из условий (31) следуют предельные соотношения

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \partial_t^n \partial_x^m u(t, x) = 0, \quad n + m \leq 4, \quad n = \overline{0, 2}, \quad m = \overline{0, 4}, \quad t \in [0, t_1]. \quad (32)$$

Напомним, что скалярное произведение (φ, ψ) и норма $\|\varphi\|_2$ в $L_2(\mathbb{R})$ определяются формулами

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \psi(x) dx, \quad \|\varphi\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx$$

соответственно.

На временном отрезке $t \in [0, t_1]$ существования классического решения $u = u(t, x)$ задачи Коши (1), (2) введём в рассмотрение функционал

$$y(t) = (u, u) + (u_x, u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx = \|u\|_{W_2^1}^2, \quad t \in [0, t_1], \quad (33)$$

где $\|u\|_{W_2^1}^2$ — норма в пространстве Соболева $W_2^1(\mathbb{R})$ состоящем из функций из $L_2(\mathbb{R})$ обобщённая производная которых также принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

Применяя к значению производной $y'(t) = 2((u, u_t) + (u_x, u_{tx}))$ функционала (33) неравенство Коши — Буняковского и обозначая через

$$z(t) = (u_t, u_t) + (u_{tx}, u_{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{tx}^2) dx = \|u_t\|_{W_2^1}^2, \quad t \in [0, t_1], \quad (34)$$

ещё один функционал, связанный с уравнением (1), выводим вспомогательную оценку

$$(y'(t))^2 \leq 4y(t)z(t). \quad (35)$$

Найдём достаточные условия разрушения решения задачи Коши (1), (2), понимая под этим условия возникновения разрыва второго рода для функционала $y(t)$ на отрезке $[0, t_2] \subseteq [0, t_1]$, который выбираем так, чтобы на нем выполнялись неравенства $y(t) > 0$ и $y'(t) \geq 0$ вытекающие из соответствующих начальных условий $y(0) = \|\varphi\|_2^2 + \|\varphi'\|_2^2 > 0$ и $y'(0)/2 = (\varphi, \psi) + (\varphi', \psi') > 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (31), требования леммы 2 и теоремы 1 и пусть параметры α, β, γ , начальные функции $\varphi(x), \psi(x)$ и нелинейность $f(\cdot)$ обеспечивают выполнение условий

$$sf(s) \leq q_0 \Phi(s), \text{ для всех } s \in \mathbb{R}, \text{ где } \Phi(s) = \int_0^s f(r) dr, \text{ причём } \Phi(\varphi'(x)) \in L_1(\mathbb{R}),$$

$$\|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0, \quad (\varphi, \psi) + (\varphi', \psi') > 0,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi''\|_2^2 + \gamma \|\varphi\|_2^2 \geq \beta \|\varphi'\|_2^2 - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\varphi'(x)) dx,$$

$$[(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi')]^2 > \left(\frac{k_6 + \alpha}{q_0 - \alpha - 3} \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \frac{q_0 E_0}{q_0 - \alpha - 1} \right) \|\varphi\|_{W_2^1}^2,$$

тогда классическое решение задачи Коши (1), (2) разрушается за время T_∞ , для которого имеет место оценка сверху:

$$T_\infty \leq \frac{1}{k_7 \|\varphi\|_{W_2^1}^{(q_0 - \alpha - 3)/2}},$$

причём для функционала $y(t) = \|u(t, \cdot)\|_{W_2^1}^2$ справедлива оценка снизу

$$y(t) \geq \frac{1}{(\|\varphi\|_{W_2^1}^{(3+\alpha-q_0)/2} - k_7 t)^{4/(q_0 - \alpha - 3)}},$$

и предельное равенство

$$\lim_{t \uparrow T_\infty} y(t) = +\infty.$$

Замечание 2. Фигурирующие в формулировке теоремы постоянные q_0, k_j, E_0 определяются в ходе доказательства теоремы и зависят от параметров α, β, γ , начальных функций $\varphi(x), \psi(x)$ и нелинейности $f(\cdot)$.

Доказательство. Вычислим производную второго порядка функционала (33) и выразим её значение через функционал (34):

$$\frac{1}{2} y''(t) + (u_{xx}, u_{tt}) - (u, u_{tt}) = z(t). \quad (36)$$

Умножим обе части уравнения (1) на функцию $u = u(t, x)$ и проинтегрируем полученное равенство по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, применяя формулу интегрирования по частям и учитывая предельные соотношения (32), т. е. равенство нулю внеинтегральных слагаемых при $x \rightarrow \pm\infty$, получим

$$(u_{xx}, u_{tt}) - (u, u_{tt}) = \|u_{xx}\|_2^2 - \beta \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u\|_2^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} u_x f(u_x) dx - (u_{xx}, u_{tx}) - \alpha (u_x, u_t). \quad (37)$$

Аналогично, умножая обе части уравнения (1) на $u_t = u_t(t, x)$ и обозначая через $\Phi(\cdot)$ – функционал, определяемый нелинейностью $f(\cdot)$ формулой $\Phi(s) = \int_0^s f(r) dr$, с учётом равенств

$$(u_{tx}, u_{txx}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x(u_{tx}^2) dx = \frac{1}{2} u_{tx}^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

$$(u_t, u_{tx}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x(u_t^2) dx = \frac{1}{2} u_t^2 \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\|u_t\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 - \beta \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_x) dx \right) = 0. \quad (38)$$

Введём в рассмотрение ещё один функционал $E(\cdot)$, связанный с уравнением (1):

$$E(t) = z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 - \beta \|u_x\|_2^2 + \gamma \|u\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_x) dx.$$

Из равенства (38) следует, что производная функционала $E(t)$ равна нулю, следовательно, $E(t)$ не зависит от времени и поэтому справедливо равенство

$$E(t) = E(0) = E_0, \quad (39)$$

в котором начальное значение E_0 определяется формулой

$$E_0 = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi''\|_2^2 - \beta \|\varphi'\|_2^2 + \gamma \|\varphi\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\varphi'(x)) dx$$

и постулируется неотрицательным: $E_0 \geq 0$.

Используя представление уравнения (1) в эквивалентном виде

$$u_{tt} = (I - \partial_x^2)^{-1} u_{xx} f'(u_x) - A_1 u_t - A_2 u, \quad (40)$$

которое получено действием на обе части уравнения (1) линейным ограниченным оператором $(I - \partial_x^2)^{-1}$, выведем оценку квадрата нормы частной производной u_{tt} . С этой целью получим вспомогательные оценки. Применяя неравенства (3), (27), $\|u\|_2^2 \leq y(t)$ и $\|u_{tx}\|_2^2 \leq z(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \|u_{xx} f'(u_x)\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f'(u_x))^2 u_{xx}^2 dx \\ &\leq (f'(\sup_{x \in R} |u_x|))^2 \|u_{xx}\|_2^2 \leq (f'(h_7(t)))^2 \|u_{xx}\|_2^2 = h_8^2(t) \|u_{xx}\|_2^2, \quad (*) \end{aligned}$$

где $h_8(t) = |f'(h_7(t))|$ – непрерывная функция на отрезке $[0, t_1]$;

$$\|A_1 u_t\|_2^2 \leq (\|u_{tx}\|_2 + 2|\alpha - 1| \|u\|_2)^2 \leq 2(\|u_{tx}\|_2^2 + 4(\alpha - 1)^2 \|u\|_2^2) \leq 2(z(t) + 4(\alpha - 1)^2 y(t)); \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \|A_2 u\|_2^2 &\leq (\|u_{xx}\|_2 + (\beta + 1)\|u\|_2 + (\beta + \gamma + 1)\|u\|_2)^2 \\ &\leq 2(\|u_{xx}\|_2^2 + (2\beta + \gamma + 2)^2\|u\|_2^2) \leq 2(\|u_{xx}\|_2^2 + (2\beta + \gamma + 2)^2 y(t)). \quad (***) \end{aligned}$$

Оценивая нормы обеих частей уравнения (40) и применяя выше полученные вспомогательные оценки (*)–(***) , рассмотрим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \|u_{tt}\|_2^2 &\leq (\|I - \partial_x^2\| \|u_{xx} f'(u_x)\|_2 + \|A_1 u_t\|_2 + \|A_2 u\|_2)^2 \\ &\leq 3 \left(h_8^2(t) \|u_{xx}\|_2^2 + 2(z(t) + 4(\alpha - 1)^2 y(t)) + 2(\|u_{xx}\|_2^2 + (2\beta + \gamma + 2)^2 y(t)) \right) \\ &= 6z(t) + 6(4(\alpha - 1)^2 + (2\beta + \gamma + 2)^2) y(t) + 3(2 + h_8^2(t)) \|u_{xx}\|_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом получаем оценку

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leq 6z(t) + k_2 y(t) + k_4 \|u_{xx}\|_2^2, \quad t \in [0, t_2], \quad (41)$$

где $k_2 = 6(4(\alpha - 1)^2 + (2\beta + \gamma + 2)^2)$, $k_3 = \max_{t \in [0, t_1]} h_8^2(t)$ и $k_4 = 3(2 + k_3)$.

Предположим, что выполняется условие

$$sf(s) \leq q\Phi(s) \quad \text{для любого } s \in \mathbb{R}, \quad (42)$$

где $q > 2$ – пока неопределённое достаточно большое положительное число.

Сравнивая равенства (37) и (39) и применяя условие (42), получим неравенство

$$\begin{aligned} qz(t) + (q - 2)\|u_{xx}\|_2^2 &\leq qE_0 + (q - 2)(\beta\|u_{xx}\|_2^2 - \gamma\|u\|_2^2) \\ &\quad + 2(u, u_{tt}) - 2(u_{xx}, u_{tx}) - 2\alpha(u_x, u_t) - 2(u_{xx}, u_{tt}). \quad (43) \end{aligned}$$

Учитывая, что $\|u_x\|_2^2 \leq y(t)$ и применяя неравенство (41) и следующие оценки:

$$\begin{aligned} 2(u, u_{tt}) &\leq \|u\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leq 6z(t) + (1 + k_2)y(t) + k_4\|u_{xx}\|_2^2, \\ 2(u_{xx}, u_{tx}) &\leq \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 \leq z(t) + \|u_{xx}\|_2^2, \\ 2(u_x, u_t) &\leq \|u_x\|_2^2 + \|u_t\|_2^2 \leq y(t) + z(t), \\ 2(u_{xx}, u_{tt}) &\leq \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leq 6z(t) + k_2 y(t) + (1 + k_4)\|u_{xx}\|_2^2, \end{aligned}$$

увеличим правую часть неравенства (43):

$$(q - \alpha - 13)z(t) + (q - 2k_4 - 4)\|u_{xx}\|_2^2 \leq qE_0 + [(q - 2)(\beta + \gamma) + 2k_2 + \alpha + 1]y(t). \quad (44)$$

Полагая одновременное выполнение неравенств $q - \alpha - 13 \geq 1$ и $q - 2k_4 - 4 \geq 1$, а для этого достаточно, чтобы параметр q удовлетворял условию

$$q = q_0 \geq \max\{\alpha + 14; 6k_3 + 17\}, \quad (45)$$

и уменьшая левую часть неравенства (44), получим неравенство

$$z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 \leq qE_0 + k_5 y(t), \quad (46)$$

где $k_5 = (q - 2)(\beta + \gamma) + 2k_2 + \alpha + 1$.

Из неравенства (46) выводим оценки

$$\|u_{xx}\|_2^2, z(t) \leq qE_0 + k_5 y(t), \quad t \in [0, t_2]. \quad (47)$$

Подставляя значение левой части равенства (37) в формулу (36), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x f(u_x) dx = z(t) - \frac{1}{2}y''(t) + \beta\|u_x\|_2^2 - \gamma\|u\|_2^2 - \|u_{xx}\|_2^2 + (u_{xx}, u_{tx}) + \alpha(u_x, u_t). \quad (48)$$

Сравнивая равенство (48) с соотношением, вытекающим из равенства (39):

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_x) dx = E_0 - z(t) - \|u_{xx}\|_2^2 + \beta\|u_x\|_2^2 - \gamma\|u\|_2^2,$$

и учитывая неравенство (42), в котором полагаем $q = q_0$, получим

$$(q_0 + 2)z(t) + (q_0 - 2)\|u_{xx}\|_2^2 \leq q_0 E_0 + y''(t) + (q_0 - 2)(\beta\|u_x\|_2^2 - \gamma\|u\|_2^2) + \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 + \alpha(\|u_t\|_2^2 + \|u_x\|_2^2). \quad (49)$$

Учитывая то, что $q_0 > 3$, и применяя оценки (47), уменьшим левую и увеличим правую части неравенства (49), в результате получим

$$y''(t) + (k_6 + \alpha)y(t) + q_0 E_0 \geq (q_0 - \alpha + 1)z(t), \quad (50)$$

где $k_6 = (q_0 - 2) \max\{\beta, \gamma\}$.

Теперь, используя оценку (35), уменьшим правую часть неравенства (50), в итоге получим

$$y(t)y''(t) - \frac{q_0 - \alpha + 1}{4}(y'(t))^2 + q_0 E_0 y(t) + (k_6 + \alpha)y^2(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_2]. \quad (51)$$

В силу выбора (45) значения параметра q_0 коэффициент в неравенстве (51) при квадрате производной функционала $y(t)$ будет больше единицы.

Сравнивая неравенство (51) с одним из основных обыкновенных дифференциальных неравенств, подробно исследованных в монографии [11, Приложение, § 2, (2.38)] заключаем, что если выполнены начальные условия

$$(y'(0))^2 > 4 \left(\frac{k_6 + \alpha}{q_0 - \alpha - 3} y(0) + \frac{q_0 E_0}{q_0 - \alpha - 1} \right) y(0),$$

тогда время T_∞ существования решения задачи Коши (1), (2) не может быть сколь угодно большим, а именно имеет место оценка сверху:

$$T_\infty \leq k_7^{-1} (y(0))^{(3+\alpha-q_0)/4},$$

где

$$k_7^2 = \frac{(q_0 - \alpha - 3)^2}{16} (y(0))^{-(q_0 - \alpha + 1)/2} ((y'(0))^2 - \frac{4(k_6 + \alpha)}{q_0 - \alpha - 3} y^2(0) - \frac{4q_0 E_0}{q_0 - \alpha - 1} y(0)),$$

причём для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу:

$$y(t) \geq \left((y(0))^{(3+\alpha-q_0)/4} - k_7 t \right)^{4/(3+\alpha-q_0)}. \quad (52)$$

Из оценки (52) следует, что классическое решение задачи Коши (1), (2) разрушается за конечное время: $\lim_{t \uparrow T_\infty} y(t) = +\infty$. \square

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Академии наук Чеченской Республики и Чеченского государственного педагогического университета. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Светлицкий В.А. Строительная механика машин. Механика стержней. Т. 2. Динамика. М.: Физматлит, 2009.
2. Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешённые относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
4. Демиденко Г.В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
5. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Danna F.M. Integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1985. V. 108, N 1. P. 151–164.
7. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Серия Матем. анализ. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1990.
8. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций М.: Наука, 1966.
9. Travis C.C., Webb G.F. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.
10. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1. М.: Дрофа, 2006.
11. Корпусов М.О., Свешников А.Г., Юшков Е.В. Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2014.

UDC 517.955:517.958

**BLOW UP OF THE SOLUTION TO THE VIBRATION EQUATION
OF A ROD WITH A MOVING LOAD**© 2026 Kh. G. Umarov^{1,2}¹*Academy of Sciences of the Chechen Republic,
V. Aliev st., 19 a, Grozny 364043, Russia,*²*Chechen State Pedagogical University,
S. Kishieva st., 33, Grozny 364068, Russia*

E-mail: umarov50@mail.ru

Received 25.09.2025, revised 09.04.2026, accepted 13.05.2026

Abstract. For a nonlinear partial differential equation of Sobolev type (equations not solved with respect to the highest time derivative) generalizing the equation of rod oscillations taking into account a moving load, we study the Cauchy problem in the space of continuous functions defined on the entire number axis and for which limits at infinity exist. An explicit classical solution of the corresponding linear homogeneous equation is found and estimates of the norms of the operator-valued functions representing this solution are obtained. An estimate of the norm of a solution to the Cauchy problem for a linear equation is obtained. The time interval of existence and uniqueness of the classical solution to the auxiliary Cauchy problem related to the original one is established and an estimate of the norm of this local solution is given. Conditions are found that ensure a connection between the classical solutions of the original and auxiliary Cauchy problems on a certain time interval. Conditions for the blow up of the classical solution to the Cauchy problem on a finite time interval are considered.

Keywords: vibrations of a rod taking into account a moving load, nonlinear Sobolev-type equation, blow up of the solution.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.108

REFERENCES

1. Svetlickij V.A. Stroitel'naya mehanika mashin. Mehanika sterzhnej. V. 2. Dinamika [Structural mechanics of machines. Mechanics of rods. Vol. 2. Dynamics]. Moscow: FIZMATLIT, 2009 (in Russian).
2. Demidenko G.V., Uspenskij S.V. Uravneniya i sistemy, ne razreshyonnye otnositel'no starshej proizvodnoj [Equations and systems not resolved with respect to the highest derivative]. Novosibirsk: Nauch. kniga, 1998 (in Russian).
3. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. Linejnye i nelinejnye uravneniya sobolevskogo tipa [Linear and nonlinear equations of Sobolev type]. Moscow: Fizmatlit, 2007 (in Russian).
4. Demidenko G.V. Usloviya razreshimosti zadachi Koshi dlya psevdogiperbolicheskikh uravnenij [Solvability conditions for the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations]. *Sib. Matem. Zhurn.* [Sib. Math. J.], 2015, Vol. 56, No. 6, pp. 1289–1303 (in Russian).
5. Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators. Part I: General Theory. N. Y.: Interscience, 1958.
6. Dannan F.M. Integral inequalities of Gronwall–Bellman–Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1985, Vol. 108, No. 1, pp. 151–164.

7. Vasil'ev V.V., Krejn S.G., Piskarev S.I. Polugruppy operatorov, kosinus operator-funkcii i linejnye differencial'nye uravneniya [Operator Semigroups, Cosine Operator Functions, and Linear Differential Equations]. *Itogi Nauki i Tehniki. Seriya Matem. Analiz. VINITI* [Results of Science and Technology. Series Mat. Analysis. VINITI], 1990, Vol. 28 (in Russian).
8. Krasnosel'skij M.A., Zabrejko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskij P.E. Integral'nye operatory v prostranstvah summiruemyh funkcij [Integral Operators in Spaces of Summable Functions]. Moscow: Nauka, 1966 (in Russian).
9. Travis C.C., Webb G.F. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, 1978, Vol. 32, pp. 75–96.
10. Kudryavcev L.D. Kurs matematicheskogo analiza. V. 1. [The course of mathematical analysis.]. Moscow: Drofa, 2006 (in Russian).
11. Korpusov M.O., Sveshnikov A.G., Yushkov E.V. Metody teorii razrusheniya reshenij nelinejnyh uravnenij matematicheskoy fiziki [Methods of blow-up theory of solutions of nonlinear equations of mathematical physics]. Moscow: MGU Press, 2014 (in Russian).

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2026. Том 29, № 1

Зав. редакцией Т. В. Бугуева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 01.07.2026 г.
Формат 60 × 84 1/8. Усл. печ. л. 14,6.
Объём 9,6 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия