

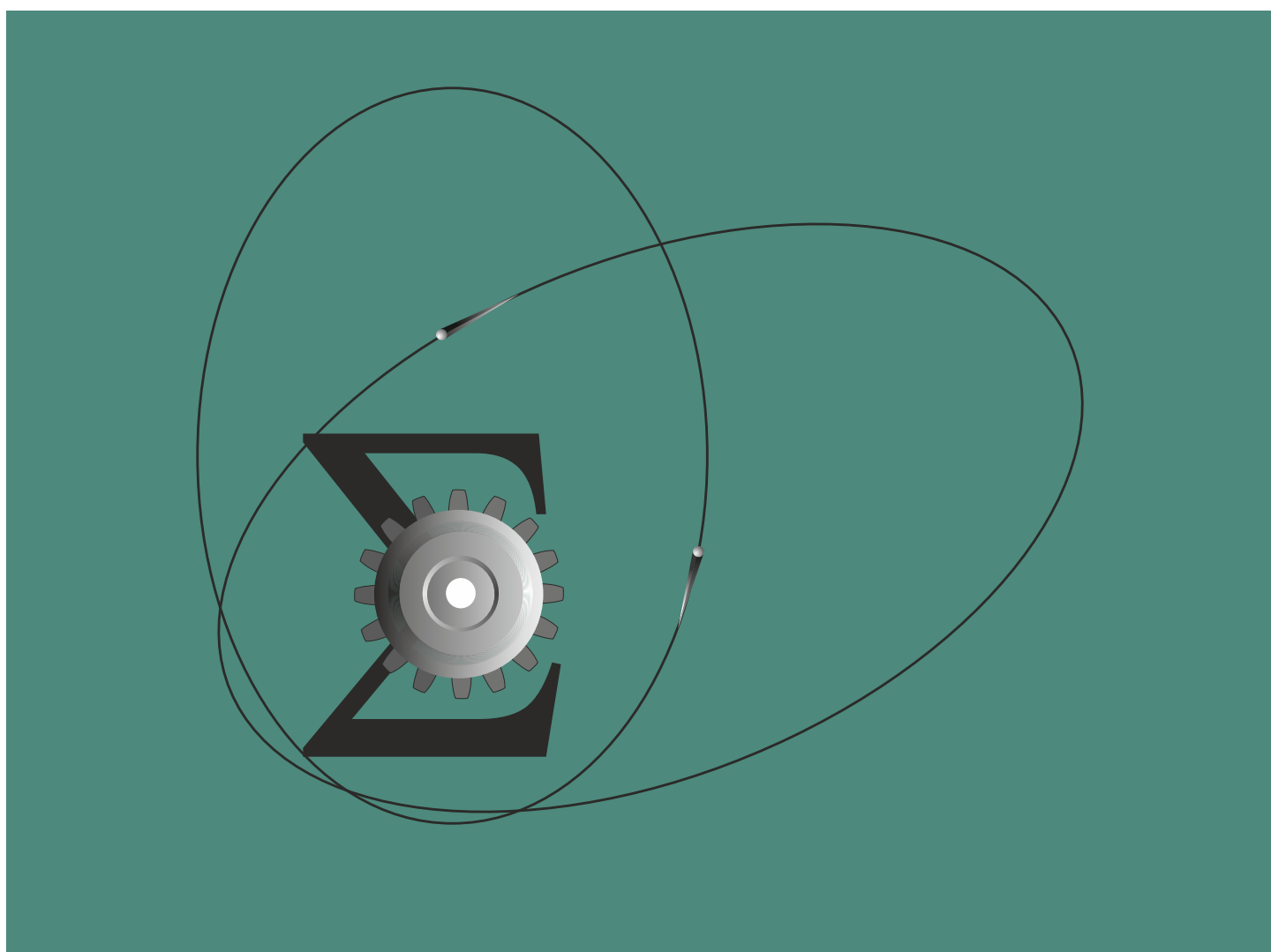
ISSN 2949-6284

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ 29

№ 2

2026



НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	С. И. Кабанихин
Зам. главного редактора	В. Л. Береснев М. А. Шишленин
Отв. секретарь	В. А. Дедок

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Б. Д. Аннин	В. Г. Романов
М. А. Гузев	Е. Е. Тыртышников
В. А. Левин	В. В. Шайдуров
	А. А. Шананин

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ

Г. В. Алексеев	А. С. Козелков	И. Б. Петров
Ф. А. Алиев	Т. К. Козубская	М. И. Протасов
Ж. Бектемесов	О. И. Криворотько	Е. М. Рудой
В. С. Белоносов	С. Н. Лебедев	К. К. Сабельфельд
В. Н. Белых	Д. В. Лукьяненко	Е. Б. Савенков
Ю. С. Волков	Н. И. Макаренко	В. М. Садовский
Г. А. Галкин	И. В. Марчук	И. В. Семенов
В. Н. Глинских	С. Б. Медведев	Д. Н. Сидоров
Е. Жанг	В. С. Михайлов	С. С. Симаков
В. П. Ильин	Р. И. Мулладжанов	А. С. Терсенов
А. Н. Карапетянц	Р. Г. Новиков	В. А. Титарев
М. В. Клибанов	Д. Е. Пальчунов	Д. Л. Ткачев
А. И. Кожанов	А. В. Пененко	

Учредители журнала:

Сибирское отделение РАН

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г.
в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics.

Журнал включен в базу Russian Science Citation Index (RSCI)
на платформе Web of Science.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основан в 1998 году

Выходит 4 раза в год

Том 29, № 2(106)

Научный журнал

Апрель–июнь, 2026 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Алексеев Г. В., Рогозина Ю. Э. Разрешимость неоднородной краевой задачи для стационарной модели тепломассопереноса с переменными коэффициентами, зависящими от двух диффузионных компонент.....	5
Будянский А. В. Численно–аналитическое исследование модели двух эпидемий с учётом миграционных эффектов.....	25
Жаглова А. Э., Индруцкий И. М. Асимптотика одного решения задачи об эллиптическом притоке к трещине для горизонтальной скважины с МГРП.....	40
Лукьянов А. А., Вожаков И. С., Мулладжанов Р. И. Численное исследование динамики каверны при ударе капли воды о слой масла.....	56
Остросаблин Н. И. Общие решения и приведение системы уравнений моментной линейной теории упругости изотропного псевдоконтинуума Коссера к диагональному виду	65
Посудневская А. О. Баланс энергии в течении Колмогорова	80
Тарасов С. К. Катящиеся волны в придонном плотностном течении.....	89
Швец А. Г. Комбинационный параметрический резонанс для нелинейного уравнения Матьё — Хилла в гильбертовом пространстве.....	103

НОВОСИБИРСК

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

Журнал публикует оригинальные работы и обзоры по актуальным проблемам прикладной и индустриальной математики. Тематика журнала охватывает следующие разделы:

- теория и численные методы решения уравнений в частных производных механики, физики, химии, биологии, а также технических и природных процессов;
- математическое моделирование в физике, химии, механике, технике, биологии, экологии, экономике, медицине;
- прямые и обратные задачи в естественных науках;
- методы обоснования, регуляризации и применения нейронных сетей для построения математических моделей в науках о Земле и жизни.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
СибЖИМ
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирск 630090, Россия
E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

SIBIRSKII ZHURNAL INDUSTRIAL'NOI MATEMATIKI

Published since 1998

4 issues per year

Vol. 29, No. 2(106)

Scientific journal

April–June, 2026

CONTENTS

Alekseev G. V., Rogozina Yu. E. Solvability of an inhomogeneous boundary value problem for a stationary heat and mass transfer model with variable coefficients depending on two diffusion components	5
Budyansky A. V. Numerical and analytical study of the model of two epidemics taking into account migration effects	25
Zhaglova A. E., Indrupskiy I. M. Asymptotics of one solution to the problem of elliptical inflow to a fracture for a horizontal well with multistage hydraulic fracturing	40
Lukyanov A. A., Vozhakov I. S., Mullyadzhhanov R. I. Numerical study of cavity dynamics from a water droplet impacting an oil layer	56
Ostrosablin N. I. General solutions and reduction of the system of equations of the moment linear theory of elasticity of the isotropic pseudo-continuum of Cosserat to a diagonal form	65
Posudnevskaya A. O. Energy balance in the Kolmogorov flow	80
Tarasov S. K. Roll waves in a bottom density current	89
Shvets A. G. Combinational parametric resonance for a nonlinear Mathieu–Hill equation in a Hilbert space	103

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

The journal publishes the original papers and surveys of the topical problems of applied and industrial mathematics. The covered areas include:

- theory and numerical methods for solving partial differential equations in mechanics, physics, chemistry, biology, as well as technical and natural processes;
- mathematical modeling in physics, chemistry, mechanics, engineering, biology, ecology, economics, medicine;
- direct and inverse problems in natural sciences;
- methods of substantiation, regularization and application of neural networks for the construction of mathematical models in the sciences of Earth and life.

EDITORIAL OFFICE ADDRESS:

SibJIM

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

prosp. Akad. Koptiyuga 4

Novosibirsk 630090, Russia

E-mail: sibjim-edit@math.nsc.ru

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДВУХ ДИФФУЗИОННЫХ КОМПОНЕНТ

© 2026 Г. В. Алексеев^{1,2a}, Ю. Э. Рогозина^{1b}¹*Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, г. Владивосток 690041, Россия,*²*Дальневосточный федеральный университет,
о. Русский, п. Аякс, 10, г. Владивосток 690922, Россия*E-mails: ^aalekseev@iam.dvo.ru, ^buliyaspivak@gmail.comПоступила в редакцию 20.05.2026 г.; после доработки 24.06.2026 г.;
принята к публикации 15.07.2026 г.

Рассматривается неоднородная краевая задача для стационарной модели тепломассопереноса с переменными коэффициентами в случае, когда главные коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии, а также младшие коэффициенты зависят от двух диффузионных компонент: температуры среды и концентрации растворённого вещества. Для исследования указанной краевой задачи разрабатывается математический аппарат, основанный на вариационном подходе с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке и теоремы Лебега о мажорантной сходимости. На основе разработанного аппарата доказывается глобальная разрешимость рассматриваемой краевой задачи в слабой постановке и устанавливаются достаточные условия на исходные данные задачи, обеспечивающие локальную единственность слабого решения, обладающего дополнительным свойством гладкости для диффузионных компонент.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса — Буссинеска, неоднородные краевые условия, слабое решение, глобальная разрешимость, лифтинг, локальная единственность, теорема Шаудера о неподвижной точке, теорема Лебега о мажорантной сходимости.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.201

ВВЕДЕНИЕ

В 30-е годы прошлого века после выхода фундаментальных работ Лере [1, 2] возникло новое научное направление, которое сейчас принято называть математической гидродинамикой. Оно сосредоточено на исследовании качественных свойств решений уравнений гидродинамики, таких как существование и единственность решений краевых задач, устойчивость и регулярность решений, поведение решений при больших временах, а также ряда других свойств с использованием методов нелинейного функционального анализа. К началу XXI века в этом направлении появилось большое количество исследований и было опубликовано несколько отличных монографий (см., например, [3, 4, 5]).

Начиная с 60-х годов прошлого века, идеи нелинейного функционального анализа стали проникать в изучение качественных свойств решений уравнений тепломассопереноса. После опубликования статьи [6] в математической теории тепломассопереноса (ТМП) стало развиваться направление, связанное с изучением качественных свойств решений уравнений ТМП с переменными коэффициентами, зависящими от температуры и/или от концентрации вещества. Отметим среди них статьи [7, 8, 9], посвящённые изучению разрешимости краевых задач для однодиффузионных нестационарных и стационарных моделей теплопереноса.

В XXI веке это направление продолжало интенсивно развиваться, а опубликованные работы можно разделить на три группы. Первую группу составляют исследования, посвящённые анализу разрешимости начально-краевых задач для однодиффузионных нестационарных уравнений теплопереноса с использованием приближения Буссинеска. В эту группу входят статьи [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. Вторую группу составляют работы [18, 19, 20, 21, 22], посвящённые изучению краевых задач для однодиффузионных стационарных моделей ТМП. Третья группа содержит работы [23, 24, 25], посвящённые исследованию разрешимости краевых задач для двухдиффузионных моделей ТМП с постоянными коэффициентами, и недавно вышедшие работы [26, 27], посвящённые исследованию разрешимости краевых задач для двухдиффузионных моделей ТМП с переменными коэффициентами в некоторых частных случаях.

Настоящая статья, продолжая развивать направление исследований, инициированное в предыдущих работах [20, 26, 27], направлена на разработку математического аппарата исследования разрешимости неоднородных краевых задач для стационарных моделей ТМП с переменными старшими и младшими коэффициентами, зависящими от двух диффузионных компонент – температуры и концентрации. Как и в предыдущих работах [24, 26, 27], наш аппарат будет основан на сведении доказательства разрешимости рассматриваемой краевой задачи к задаче доказательства существования неподвижной точки специально сконструированного оператора F с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. Разумеется, наличие нескольких переменных коэффициентов в исследуемой модели и неоднородных граничных условий Дирихле для диффузионных компонент существенно усложняет структуру упомянутого оператора F . Следствием этого, как будет показано ниже, является возникновение двух возможных сценариев при построении ограниченного выпуклого замкнутого множества K , используемого для применения теоремы Шаудера. Ниже мы приведём простую формулу (81), описывающую указанные два сценария, построим явные формулы для искомого множества K для этих двух сценариев, и для каждого сценария докажем глобальную разрешимость рассматриваемой краевой задачи. Поэтому главная теорема разрешимости (теорема 1) содержит два типа оценок искомого решения, которые являются разными для разных сценариев.

1. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей Γ , состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N . В данной работе рассматривается следующая неоднородная краевая задача для обобщённой модели Буссинеска теплопереноса с переменными коэффициентами, описывающая движение бинарной теплопроводящей жидкости:

$$-\operatorname{div}(\nu(T, C)\nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} - [b_1(T)T - b_2(C)C]\mathbf{G}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$-\operatorname{div}(k(T, C)\nabla T) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)T = f \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

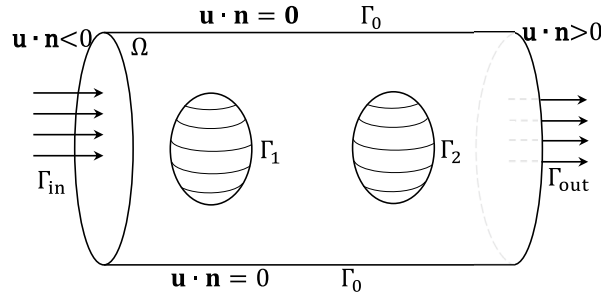
$$-\operatorname{div}(\lambda(T, C)\nabla C) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)C + \gamma(T, C)C = f^c \text{ в } \Omega, \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad C = \varphi \text{ на } \Gamma, \quad k(T, C)\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T)T = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор скорости, T — температура среды, C — концентрация растворённого вещества, которое вместе с основной жидкостью образует бинарную смесь, $p = P/\rho_0$, где P — давление, а $\rho_0 = \operatorname{const}$ — плотность жидкости, $\nu = \nu(T, C)$ — коэффициент кинематической вязкости, $k = k(T, C)$ — коэффициент теплопроводности, $\lambda = \lambda(T, C)$ — коэффициент диффузии, $\gamma = \gamma(T, C)$ — коэффициент распада, характеризующий скорость растворения вещества вследствие химических реакций с основной жидкостью, $\alpha = \alpha(T)$ — коэффициент граничного теплообмена, $\mathbf{G} = -(0, 0, G)$ — вектор ускорения свободного падения, $b_1(T)$ (или $b_2(C)$) — коэффициент теплового (или концентрационного) расширения, зависящий от T или C , при этом слагаемые $b_1(T)T\mathbf{G}$ или $b_2(C)C\mathbf{G}$ описывают соответствующие силы плавучести, возникающие

вследствие тепловых или концентрационных эффектов, $\mathbf{f}$ — плотность гидродинамических источников, f (или f^c) — плотность источников тепла (или массы). Ниже мы будем называть задачу (1)–(4) с заданными функциями $\nu(T, C)$, $k(T, C)$, $\lambda(T, C)$, $\gamma(T, C)$, $\alpha(T)$, $b_1(T)$, $b_2(C)$, $\mathbf{f}$, f , f^c , $\mathbf{g}$, ψ , φ и χ задачей 1. Подробности вывода модели (1), (2), (3), а также граничных условий (4) читатель может найти в [28, разд. 54 и 55] и [29].

В частном случае, когда $\alpha = 0$, граничное условие Робена для T на Γ_N сводится к нелинейному условию Неймана $k(T, C)\partial T/\partial n = \chi$ на Γ_N , которое соответствует заданию нормального теплового потока $k(T, C)\partial T/\partial n$ на Γ_N . В другом частном случае, когда $\Gamma_N = \emptyset$ и $\Gamma_D = \Gamma$, задача (1)–(4) сводится к неоднородной задаче Дирихле для системы (1)–(3). Мы подчеркнём, что использование неоднородных граничных условий в (4) позволяет применить разработанную ниже теорию для изучения физически интересных задач, касающихся течений бинарных теплопроводящих жидкостей в различных типах трёхмерных каналов. Типичный пример таких течений жидкостей проиллюстрирован на рисунке, где показана возможная ситуация течения жидкости в цилиндрическом канале с двумя препятствиями.



Типичный пример области Ω , имеющей форму канала с двумя препятствиями, где необходимо задавать неоднородные граничные условия как для скорости, так и для диффузионных компонент на входе Γ_{in} и выходе Γ_{out}

2. ОСНОВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Ниже мы будем широко использовать пространства $L^r(D)$ для $1 \leq r \leq \infty$ и пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω , либо границу Γ , либо часть Γ_0 границы Γ . Соответствующие пространства вектор-функций будут обозначаться через $\mathbf{L}^r(D)$ и $\mathbf{H}^s(D)$. Мы обозначаем через $(\cdot, \cdot)_{s, \Omega}$, $\|\cdot\|_{s, \Omega}$ или $|\cdot|_{s, \Omega}$ соответственно скалярное произведение, норму или полунорму в $H^s(\Omega)$. Скалярные произведения и нормы в $L^2(\Omega)$ обозначаются через $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|_{\Omega}$. X^* обозначает двойственное пространство гильбертова пространства X , а двойственность между X и X^* записывается как $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^* \times X}$ или просто как $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Как и в [25, 26, 27], мы будем использовать следующие функциональные пространства:

$$L_0^2(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega) \mid (h, 1) = 0\}, \quad \mathcal{C} = H_0^1(\Omega) \equiv \{h \in H^1(\Omega) \mid h|_{\Gamma} = 0\},$$

$$\mathcal{T} = \{h \in H^1(\Omega) \mid h|_{\Gamma_D} = 0\}, \quad \mathbf{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)^3, \quad V = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}.$$

Отметим, что каждое из пространств $\mathcal{C} = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{T}$ или $H^1(\Omega)$ является гильбертовым относительно нормы $\|\cdot\|_{1, \Omega}$, которая в силу неравенства Фридрихса — Пуанкаре (см. [30])

$$\|\varphi\|_{1, \Omega} \leq c_P |\varphi|_{1, \Omega} \quad \text{для любой } \varphi \in \mathcal{T} \text{ (или } \varphi \in \mathcal{C}), \quad c_P = \operatorname{const} > 1, \quad (5)$$

эквивалентна полунорме $|\cdot|_{1, \Omega}$ для функций $C \in \mathcal{C}$ или $T \in \mathcal{T}$. Для функции $T \in \mathcal{T}$ неравенство (5) выполняется, конечно, когда $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$, (см. предположение 2.1 ниже). Ключевую роль

ниже при исследовании разрешимости задачи 1 будут играть произведения пространств $X = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ и $W = V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C} \subset X$, наделённые нормой

$$\|\mathbf{x}\|_X^2 = \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \|T\|_{1,\Omega}^2 + \|C\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{для любого } \mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, T, C) \in X \text{ (или } (\mathbf{u}, T, C) \in W), \quad (6)$$

а также двойственное пространство $X^* = \mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathcal{T}^* \times \mathcal{C}^*$ к пространству X .

Введём следующие предположения относительно исходных данных задачи 1:

2.1. Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент $\Gamma^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$; открытые подмножества Γ_D и Γ_N границы Γ удовлетворяют условиям: $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ и $\text{meas } \Gamma_D > 0$.

2.2. $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $f \in \mathcal{T}^*$, $f^c \in \mathcal{C}^*$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$.

2.3. $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} \geq 0$, и, кроме того, $(\mathbf{g}, \mathbf{n})_{\Gamma^{(j)}} = 0$, $j = 1, 2, \dots, N$.

2.4. $\nu(\cdot, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, $k(\cdot, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, $\lambda(\cdot, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, $\gamma(\cdot, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^2)$, и существуют положительные константы $\nu_{\min}$, $\nu_{\max}$, $k_{\min}$, $k_{\max}$, $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$, $\gamma_{\min}$ и $\gamma_{\max}$ такие, что

$$\begin{aligned} \nu_{\min} &\leq \nu(t, s) \leq \nu_{\max}, \quad k_{\min} \leq k(t, s) \leq k_{\max}, \\ \lambda_{\min} &\leq \lambda(t, s) \leq \lambda_{\max}, \quad 0 \leq \gamma(t, s) \leq \gamma_{\max} \quad \text{для любых } (t, s) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

2.5. $b_i(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}^1)$, $i = 1, 2$, и существуют положительные константы b_i^0 такие, что

$$|b_i(t)| \leq b_i^0 \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}^1, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

2.6. $\alpha(\cdot) \in C^0(\mathbb{R}^1)$ и существует положительная константа $\alpha_{\max}$ такая, что

$$0 \leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max} \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}^1. \quad (9)$$

Следствием предположения **2.5** для $b_i(\cdot)$ является следующее важное свойство для суперпозиции $\mathbf{b}_i(\varphi) \equiv b_i(\varphi)\mathbf{G}$, где $\varphi \in H^1(\Omega)$ – произвольная функция: вектор-функция $\mathbf{b}_i(\varphi) \equiv b_i(\varphi)\mathbf{G}$ принадлежит $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{b}_i(\varphi)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \beta_i \equiv b_i^0 |\mathbf{G}| \quad \text{для любой } \varphi \in H^1(\Omega). \quad (10)$$

Аналогично, в качестве следствий предположений **2.4** и **2.6** мы получаем следующие важные свойства суперпозиций $\gamma(T, C)$ и $\alpha(T)$, где $T \in H^1(\Omega)$ и $C \in H^1(\Omega)$ – произвольные функции:

$$\|\gamma(T, C)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \gamma_{\max} \quad \text{для любых } T, C \in H^1(\Omega), \quad (11)$$

$$\|\alpha(T)\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \leq \alpha_{\max} \quad \text{для любой } T \in H^1(\Omega). \quad (12)$$

Ниже мы будем использовать неравенство Гёльдера для трёх скалярных функций

$$|(au, v)| \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_\Omega \|v\|_\Omega \quad \text{для любых } a \in L^\infty(\Omega), u, v \in L^2(\Omega), \quad (13)$$

и следующие неравенства:

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leq c_s \|\varphi\|_{1,\Omega} \quad \text{для любой } \varphi \in H^1(\Omega), \quad 1 \leq s \leq 6, \quad (14)$$

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^s(\Omega)} \leq c_s \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad 1 \leq s \leq 6. \quad (15)$$

Здесь c_s – константа, зависящая от Ω и от $s \in [1, 6]$. Отметим, что неравенства (14), (15) следуют из теоремы вложения Соболева, которая утверждает, что пространство $H^1(\Omega)$ непрерывно вложено в $L^s(\Omega)$ для $s \leq 6$ и компактно вложено, если $s < 6$.

Рассмотрим последовательности $\{T_n\} \in H^1(\Omega)$ и $\{C_n\} \in H^1(\Omega)$ такие, что $T_n \rightarrow T \in H^1(\Omega)$ и $C_n \rightarrow C \in H^1(\Omega)$ п.в. в Ω при $n \rightarrow \infty$. Из предположений **2.4** и **2.5** следует, что

последовательности $\{k(T_n, C_n)\}$ и $\{\mathbf{b}_1(T_n)\}$ ограничены в том смысле, что $|k(T_n, C_n)| \leq k_{\max}$, $|\mathbf{b}_1(T_n)| \leq \beta_1$ п.в. в Ω , и, кроме того, $k(T_n, C_n) \rightarrow k(T, C)$, $\mathbf{b}_1(T_n) \rightarrow \mathbf{b}_1(T)$ п.в. в Ω при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы Лебега о мажорантной сходимости [31], которая даёт, например, для разности $k(T_n, C_n) - k(T, C)$ следующее свойство:

$$\int_{\Omega} [k(T_n, C_n) - k(T, C)] f \, d\mathbf{x} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любой } f \in L^1(\Omega). \quad (16)$$

Замечание 1. Аналогичный результат имеет место для последовательностей $\lambda(T_n, C_n)$, $\nu(T_n, C_n)$, $\gamma(T_n, C_n)$, $\mathbf{b}_1(T_n)$, $\mathbf{b}_2(C_n)$ и $\alpha(T_n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Ниже мы будем использовать ряд свойств билинейных и трилинейных форм, связанных с линейными и нелинейными слагаемыми в (1)–(4). Эти формы будут использоваться в слабой формулировке задачи 1 (которая будет введена в разделе 3).

Лемма 1. Пусть $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ с $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ – заданная функция, и пусть выполняются предположения **2.1**, **2.4–2.6**. Тогда существуют положительные константы δ_0 , δ_1 , δ_2 , α_0 , γ_0 , γ_1 , γ'_1 , γ_2 , γ'_2 , γ_3 и β , зависящие от Ω , такие, что выполняются следующие соотношения:

$$|(k(\eta, \mu) \nabla T, \nabla S)| \leq k_{\max} \|T\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \eta, \mu, T, S \in H^1(\Omega), \quad (17)$$

$$(\nabla T, \nabla T) \geq \delta_1 \|T\|_{1,\Omega}^2, \quad (k(\eta, \mu) \nabla T, \nabla T) \geq k_* \|T\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любых } T \in \mathcal{T}, \eta, \mu \in H^1(\Omega), \quad (18)$$

$$|(\lambda(\eta, \mu) \nabla C, \nabla h)| \leq \lambda_{\max} \|C\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \eta, \mu, C, h \in H^1(\Omega), \quad (19)$$

$$(\nabla C, \nabla C) \geq \delta_2 \|C\|_{1,\Omega}^2, \quad (\lambda(\eta, \mu) \nabla C, \nabla C) \geq \lambda_* \|C\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любых } \eta, \mu \in H^1(\Omega), C \in \mathcal{C}, \quad (20)$$

$$|(\nu(\eta, \mu) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})| \leq \nu_{\max} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \eta, \mu \in H^1(\Omega), \quad (21)$$

$$(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \geq \delta_0 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2, \quad (\nu(\eta, \mu) \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \geq \nu_* \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \text{ для любых } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \eta, \mu \in H^1(\Omega), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} |((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq \gamma'_1 \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \\ &\leq \gamma_1 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \end{aligned} \quad (23)$$

$$((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{w}, \mathbf{v}), \quad ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \text{ для любых } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (24)$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \mathbf{v} \neq 0} -(\operatorname{div} \mathbf{v}, p) / \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \geq \beta \|p\|_{\Omega} \text{ для любой } p \in L_0^2(\Omega), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u} \cdot \nabla T, h)| &\leq \gamma'_2 \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \|T\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \leq \gamma_2 \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|T\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \\ &\text{для любых } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), T \in H^1(\Omega), h \in \mathcal{T} \text{ (или } h \in \mathcal{C}), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} |(\mathbf{w} \cdot \nabla T, S)| &\leq \tilde{\gamma}_2 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|T\|_{L^4(\Omega)} \|S\|_{1,\Omega} \\ &\leq \gamma_2 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|T\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), T \in H^1(\Omega), S \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (27)$$

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla S, S) = (1/2)(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, S^2)_{\Gamma_N} \text{ для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla h, h) = 0 \text{ для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (28)$$

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla \varphi, \varphi) = 0 \text{ для любых } \mathbf{w} \in V, \varphi \in \mathcal{T} \text{ (или } \varphi \in \mathcal{C}), \quad (29)$$

$$|(\chi, S)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \chi \in L^2(\Gamma_N), S \in \mathcal{T}, \quad (30)$$

$$|(\mathbf{b}_i(\eta) \varphi, \mathbf{v})| \leq \beta_i \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \eta, \varphi \in H^1(\Omega), \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad i = 1, 2, \quad (31)$$

$$|(\gamma(T, C) C, h)| \leq \gamma_0 \|C\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \text{ для любых } C, h \in H^1(\Omega), \quad (32)$$

$$|(\alpha(\eta) T, S)_{\Gamma_N}| \leq \alpha_0 \|T\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \text{ для любых } \eta, T, S \in H^1(\Omega). \quad (33)$$

Здесь $\delta_1 = 1/c_P^2$, где константа c_P определена в (5), $\gamma_0 = \tilde{c}\gamma_{\max}$, $\alpha_0 = \tilde{c}_\Gamma\alpha_{\max}$, где $\tilde{c}$ и $\tilde{c}_\Gamma$ — константы, зависящие от Ω , $k_* = \delta_1 k_{\min}$, $\lambda_* = \delta_2 \lambda_{\min}$, $\nu_* = \delta_0 \nu_{\min}$, а $\nu_{\min}$, $\nu_{\max}$, $k_{\min}$, $k_{\max}$, $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$, $\gamma_{\max}$ и $\alpha_{\max}$ — константы, определённые в 2.4 и 2.6.

Докажем, например, (32). Применяя неравенство Гёльдера (13), используя (11), (14) при $s = 2$ и полагая $\tilde{c} = c_2^2$, выводим для любой пары $C, h \in H^1(\Omega)$, что

$$|\gamma(T, C)C, h| \leq \|\gamma(T, C)\|_{L^\infty(\Omega)} \|C\|_\Omega \|h\|_\Omega \leq \gamma_{\max} \tilde{c} \|C\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \equiv \gamma_0 \|C\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega}.$$

Остальные утверждения доказываются по аналогичной схеме (см. также [25, 26, 30, 32, 33]).

Следует отметить, что наличие неоднородных граничных условий Дирихле для $\mathbf{u}$, T и C в (4) существенно усложняет доказательство разрешимости задачи 1. Чтобы упростить анализ её разрешимости, мы будем использовать лифтинги, то есть специальные продолжения граничных данных Дирихле внутрь области Ω , обладающие определёнными свойствами. В случае задачи 1 существование лифтингов обеспечивается следующей леммой, доказательство отдельных утверждений которой можно найти в [25, 33].

Лемма 2. Пусть выполняется предположение 2.1. Тогда:

1). Если граничный вектор $\mathbf{g}$ удовлетворяет 2.3, то для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ существует функция (лифтинг скорости) $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ такая, что $\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0$ в Ω , $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{g}$ на Γ , и

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega} \leq c_\varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \quad |(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}| \leq \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (34)$$

Здесь c_ε — константа, зависящая от ε и Ω .

2). Существует семейство непрерывных неубывающих функций $M_\delta: \mathbb{R}_+ \equiv (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ с $M_\delta(0) = 0$, зависящих от параметра $\delta \in (0, 1]$, а также от Ω , таких, что для любой не тождественно нулевой функции $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует функция $T_\delta \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$T_\delta|_{\Gamma_D} = \psi, \quad \|T_\delta\|_{L^4(\Omega)} \leq \delta, \quad \|T_\delta\|_{1,\Omega} \leq M_\delta^\psi \equiv M_\delta(\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}) \quad \text{для любой } \delta \in (0, 1]. \quad (35)$$

Ниже мы будем называть функцию $\mathbf{u}_\varepsilon$ (или T_δ) лифтингом скорости (или лифтингом температуры), а под лифтингом концентрации мы будем понимать функцию $C_\tau \in H^1(\Omega)$, зависящую от параметра $\tau \in (0, 1]$ и от Ω , удовлетворяющую условиям

$$C_\tau|_\Gamma = \varphi, \quad \|C_\tau\|_{L^4(\Omega)} \leq \tau, \quad \|C_\tau\|_{1,\Omega} \leq M_\varphi^\tau \equiv M_\tau(\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}) \quad \text{для любой } \tau \in (0, 1]. \quad (36)$$

Существование лифтинга концентрации следует из утверждения 2 леммы 2, в котором нужно сделать следующие переобозначения: $\Gamma_D \rightarrow \Gamma$, $T \rightarrow C$, $\delta \rightarrow \tau$, $M_\psi^\delta \rightarrow M_\varphi^\tau$.

3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ 1

Мы начнём этот раздел с введения слабой формулировки задачи 1. Для этого умножим первое уравнение в (1) на тестовую функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, уравнение (2) — на $S \in \mathcal{T}$, а уравнение (3) — на $h \in \mathcal{C}$, проинтегрируем по области Ω , применим формулы Грина и учтём граничные условия (4). Непосредственные выкладки приводят к слабой формулировке задачи 1, которая состоит в нахождении четвёрки функций $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $p \in L_0^2(\Omega)$, $T \in H^1(\Omega)$ и $C \in H^1(\Omega)$, называемых слабым решением задачи 1, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} & (\nu(T, C) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ & = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1(T)T - \mathbf{b}_2(C)C, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (37)$$

$$(k(T, C)\nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) + (\alpha(T)T, S)_{\Gamma_N} = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (38)$$

$$(\lambda(T, C)\nabla C, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C, h) + (\gamma(T, C)C, h) = \langle f^c, h \rangle \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (39)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D \quad \text{и} \quad C = \varphi \text{ на } \Gamma. \quad (40)$$

Рассмотрим сужение тождества (37) на пространство V , которое имеет вид

$$(\nu(T)\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1(T)T) - (\mathbf{b}_2(C)C, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (41)$$

Из результатов [25, разд. 3.2] и [30, гл. 4] следует, что доказательство существования для задачи 1 сводится к изучению задачи (38)–(41) для тройки $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ и восстановлению $p \in L_0^2(\Omega)$ с помощью схемы де Рама. Принимая это во внимание, мы будем искать решение $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ задачи (38)–(41) в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}, \quad T = T_0 + \tilde{T}, \quad C = C_0 + \tilde{C}. \quad (42)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{u}} \in V$, $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ и $\tilde{C} \in \mathcal{C}$ – новые неизвестные функции, в то время как $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}_{\varepsilon_0} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $T_0 = T_{\delta_0} \in H^1(\Omega)$ и $C_0 = C_{\tau_0} \in H^1(\Omega)$ представляют собой значения при $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\delta = \delta_0$ и $\tau = \tau_0$ лифтингов скорости, температуры и концентрации $\mathbf{u}_\varepsilon$, T_δ и C_τ ($0 < \varepsilon \leq 1$, $0 < \delta \leq 1$, $0 < \tau \leq 1$), удовлетворяющих условиям (34), (35), (36).

Точные значения δ_0 и τ_0 параметров δ и τ , которые характеризуют лифтинги температуры и концентрации, будут определены позже. Что касается значения ε_0 параметра ε , характеризующего лифтинг скорости, мы выберем его исходя из условия $\varepsilon = \varepsilon_0 \leq (\nu_*/2\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma})$, из которого следует второе неравенство в (34) (см. [1, 33] для более подробной информации). Подставляя (42) в (38), (39) и (41), мы получаем следующие тождества для тройки $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C})$:

$$\begin{aligned} & (k(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla \tilde{T}, \nabla S) + (\alpha(T_0 + \tilde{T})\tilde{T}, S)_{\Gamma_N} \\ & + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \tilde{T}, S) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{T}, S) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla T_0, S) = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} \\ & - (k(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla T_0, \nabla S) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, S) - (\alpha(T_0 + \tilde{T})T_0, S)_{\Gamma_N} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla \tilde{C}, \nabla h) + (\gamma(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\tilde{C}, h) \\ & + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \tilde{C}, h) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \tilde{C}, h) + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla C_0, h) = \langle f^c, h \rangle \\ & - (\lambda(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla C_0, \nabla h) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C_0, h) - (\gamma(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})C_0, h) \\ & \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & (\nu(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ & = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\nu(T_0 + \tilde{T}, C_0 + \tilde{C})\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) \\ & - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) - (\mathbf{b}_1(T_0 + \tilde{T})(T_0 + \tilde{T}), \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2(C_0 + \tilde{C})(C_0 + \tilde{C}), \mathbf{v}) \\ & \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (45)$$

Чтобы доказать существование решения $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) \in W \equiv V \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$ задачи (43), (44), (45), сведём эту задачу к задаче доказательства существования решения нелинейного операторного уравнения с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке. С этой целью определим тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ и $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) \in W$ и определим оператор $F : W \rightarrow W$, действующий

следующим образом: $F(\mathbf{z}) = \mathbf{y}$. Здесь компоненты $\tilde{\mathbf{u}} \in V$, $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ и $\tilde{C} \in \mathcal{C}$, составляющие вектор $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) \in W$, являются решениями следующих линейных задач:

$$\begin{aligned} a_1^{\mathbf{z}}(\tilde{T}, S) &\equiv (k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla\tilde{T}, \nabla S) + (\alpha(T_0 + \eta)\tilde{T}, S)_{\Gamma_N} \\ &\quad + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla\tilde{T}, S) + (\mathbf{w} \cdot \nabla\tilde{T}, S) = \langle l_1, S \rangle - (\mathbf{w} \cdot \nabla T_0, S) \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} a_2^{\mathbf{z}}(\tilde{C}, h) &\equiv (\lambda(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla\tilde{C}, \nabla h) + (\gamma(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\tilde{C}, h) \\ &\quad + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla\tilde{C}, h) + (\mathbf{w} \cdot \nabla\tilde{C}, h) = \langle l_2, h \rangle - (\mathbf{w} \cdot \nabla C_0, h) \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} a_0^{\mathbf{z}}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &\equiv (\nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + ((\mathbf{w} \cdot \nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ &= \langle l_0, \mathbf{v} \rangle - ((\mathbf{b}_1(T_0 + \eta)(T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}) + \mathbf{b}_2(C_0 + \mu)(C_0 + \tilde{C}_{\mathbf{z}})), \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (48)$$

Индекс $\mathbf{z}$ в обозначениях $\tilde{T}_{\mathbf{z}}$ и $\tilde{C}_{\mathbf{z}}$ в (48) указывает, что $\tilde{T}_{\mathbf{z}}$ и $\tilde{C}_{\mathbf{z}}$ являются решениями линейных задач (46) и (47), соответствующих данному элементу $\mathbf{z} \in W$, тогда как функционалы $l_1^{\mathbf{z}}: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $l_2^{\mathbf{z}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ и $l_0^{\mathbf{z}}: V \rightarrow \mathbb{R}$, также зависящие от $\mathbf{z}$, определяются формулами:

$$\langle l_1^{\mathbf{z}}, S \rangle = \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} - (k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla T_0, \nabla S) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, S) - (\alpha(T_0 + \eta)T_0, S)_{\Gamma_N}, \quad (49)$$

$$\langle l_2^{\mathbf{z}}, h \rangle = \langle f^c, h \rangle - (\lambda(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla C_0, \nabla h) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C_0, h) - (\gamma(T_0 + \eta, C_0 + \mu)C_0, h), \quad (50)$$

$$\langle l_0^{\mathbf{z}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}). \quad (51)$$

Разобьём дальнейший процесс исследования задачи 1 на три этапа. На первом этапе мы докажем однозначную разрешимость каждой из трёх задач (46), (47), (48) при предположениях **2.1–2.6** и выведем оценки их решений с помощью теоремы Лакса – Мильграма. Затем, основываясь на этих оценках, мы построим выпуклое замкнутое множество K в пространстве W , которое оператор F отображает в себя. Наконец, на третьем этапе будет доказано, что оператор F непрерывен и компактен на K .

Для реализации первого этапа нам потребуются некоторые дополнительные оценки билинейных и трилинейных форм, входящих в (46), (47), (48). Эти оценки следуют из (21), (22), (23), (26), (27), (31), (32), (33), (34) и (42) и имеют вид неравенств:

$$|(\nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v})| \leq \nu_{\max} c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \eta \in \mathcal{T}, \mu \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in V, \quad (52)$$

$$(\nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \geq (\nu_*/2) \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega}^2 \quad \text{для любых } \eta \in \mathcal{T}, \mu \in \mathcal{C}, \mathbf{v} \in V, \quad (53)$$

$$|((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0, \mathbf{v})| \leq \gamma_1 \|\mathbf{u}_0\|_{1, \Omega}^2 \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \leq \gamma_1 c_{\varepsilon_0}^2 \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma}^2 \|\mathbf{v}\|_V \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (54)$$

$$|(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, S)| \leq \gamma_2 \|\mathbf{u}_0\|_{1, \Omega} \|T_0\|_{1, \Omega} \|S\|_{1, \Omega} \leq \gamma_2 c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} M_{\psi}^{\delta} \|S\|_{1, \Omega} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (55)$$

$$|(\mathbf{w} \cdot \nabla T_0, S)| \leq \gamma_2' \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \|T_0\|_{L^4(\Omega)} \|S\|_{1, \Omega} \leq \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \|S\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \mathbf{w} \in V, S \in \mathcal{T}, \quad (56)$$

$$|(\alpha(T_0 + \eta)T_0, S)_{\Gamma_N}| \leq \alpha_0 \|T_0\|_{1, \Omega} \|S\|_{1, \Omega} \leq \alpha_0 M_{\psi}^{\delta} \|S\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \eta, S \in \mathcal{T}, \quad (57)$$

$$|(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla C_0, h)| \leq \gamma_2 \|\mathbf{u}_0\|_{1, \Omega} \|C_0\|_{1, \Omega} \|h\|_{1, \Omega} \leq \gamma_2 c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} M_{\phi}^{\tau} \|h\|_{1, \Omega} \quad \text{для любой } h \in \mathcal{T}, \quad (58)$$

$$|(\mathbf{w} \cdot \nabla C_0, h)| \leq \gamma_2' \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \|C_0\|_{L^4(\Omega)} \|h\|_{1, \Omega} \leq \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \|h\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \mathbf{w} \in V, h \in \mathcal{C}, \quad (59)$$

$$|(\gamma(T_0 + \eta, C_0 + \mu)C_0, h)| \leq \gamma_0 \|C_0\|_{1, \Omega} \|h\|_{1, \Omega} \leq \gamma_0 M_{\varphi}^{\tau} \|h\|_{1, \Omega} \quad \text{для любых } \eta \in \mathcal{T}, \mu, h \in \mathcal{C}. \quad (60)$$

Из (17), (19), (30), (33), (52), (54), (55), (57), (58) и (60) следует, что $l_1^{\mathbf{z}} \in \mathcal{T}^*$, $l_2^{\mathbf{z}} \in \mathcal{C}^*$, $l_0^{\mathbf{z}} \in V^*$ для любой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$, и имеют место следующие оценки:

$$\|l_1^{\mathbf{z}}\|_{\mathcal{T}^*} \leq M_{l_1}^{\delta} = \|f\|_{\mathcal{T}^*} + \gamma_3 \|\chi\|_{\Gamma_N} + k_{\max} M_{\psi}^{\delta} + \gamma_2 c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} M_{\psi}^{\delta} + \alpha_0 M_{\psi}^{\delta}, \quad (61)$$

$$\|l_2^z\|_{C^*} \leq M_{l_2}^\tau = \|f^c\|_{C^*} + \lambda_{\max} M_\varphi^\tau + \gamma_2 c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} M_\varphi^\tau + \gamma_0 M_\varphi^\tau, \quad (62)$$

$$\|l_0^z\|_{V^*} \leq M_{l_0} \equiv \|\mathbf{f}\|_{-1, \Omega} + M_{\mathbf{g}}, \quad M_{\mathbf{g}} = \nu_{\max} c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma} + \gamma_1 c_{\varepsilon_0}^2 \|\mathbf{g}\|_{1/2, \Gamma}^2. \quad (63)$$

Более того, для каждой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ билинейная форма $a_1^z: \mathcal{T} \times \mathcal{T}$, определённая в (46), является непрерывной и коэрцитивной с константой коэрцитивности k_* , определённой в лемме 1. Следовательно, имеет место следующая оценка:

$$a_1^z(S, S) \geq k_{\min}(\nabla S, \nabla S) \geq k_* \|S\|_{1, \Omega}^2 \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}. \quad (64)$$

Поскольку для правой части задачи (46) в силу (61) и (56) справедлива оценка

$$|\langle l_1, S \rangle - (\mathbf{w} \cdot \nabla T_0, S)| \leq (M_{l_1}^\delta + \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega}) \|S\|_{1, \Omega} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (65)$$

то из теоремы Лакса – Мильграма следует, что для любой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ существует единственное решение $\tilde{T} \equiv \tilde{T}_{\mathbf{z}} \in \mathcal{T}$ задачи (46). Кроме того, в силу (64) и (65), для решения $\tilde{T}_{\mathbf{z}}$ и для суммы $T \equiv T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}$ выполняются следующие оценки:

$$\|\tilde{T}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} \leq c_1 \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_1 M_{l_1}^\delta \quad (c_1 = 1/k_*), \quad \|T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} \leq c_1 \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_1 M_{l_1}^\delta + M_\psi^\delta. \quad (66)$$

Рассуждая аналогично и используя (59), (62), мы можем доказать, что для любой тройки $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ существует единственное решение $\tilde{C} \equiv \tilde{C}_{\mathbf{z}} \in \mathcal{C}$ задачи (47), и выполняются следующие оценки:

$$\|\tilde{C}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} \leq c_2 \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_2 M_{l_2}^\tau \quad (c_2 = 1/\lambda_*), \quad \|C_0 + \tilde{C}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} \leq c_2 \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_2 M_{l_2}^\tau + M_\varphi^\tau. \quad (67)$$

Обратимся теперь к задаче (48) относительно $\tilde{\mathbf{u}}$. Из (31), (63), (66) и (67) вытекает следующая оценка для правой части задачи (48):

$$\begin{aligned} & |\langle l_0, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1(T_0 + \eta)(T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}), \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2(C_0 + \mu)(C_0 + \tilde{C}_{\mathbf{z}}), \mathbf{v})| \\ & \leq (M_{l_0} + \beta_1 \|T_0 + \tilde{T}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega} + \beta_2 \|C_0 + \tilde{C}_{\mathbf{z}}\|_{1, \Omega}) \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \\ & \leq [M_{l_0} + \beta_1 (c_1 \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_1 M_{l_1}^\delta + M_\psi^\delta)] \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} + \beta_2 (c_2 \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + c_2 M_{l_2}^\tau + M_\varphi^\tau) \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega} \\ & \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (68)$$

Кроме того, из (21), (24) и (52) следует, что билинейная форма $a_0^z: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, определённая в (48), является непрерывной и коэрцитивной с константой коэрцитивности $\nu_*/2$, где ν_* определено в лемме 1. Следовательно, по теореме Лакса – Мильграма для каждой тройки $(\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W$ существует единственное решение $\tilde{\mathbf{u}} \in V$ задачи (48), и выполняется оценка

$$(\nu_*/2) \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1, \Omega} \leq (\beta_1 c_1 \gamma_2' \delta \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} + \beta_2 c_2 \gamma_2' \tau \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega}) + u_\delta + v_\tau. \quad (69)$$

Здесь два последних слагаемых в правой части (константы) u_δ и v_τ определяются формулами

$$u_\delta = M_{l_0} + \beta_1 c_1 M_{l_1}^\delta + \beta_1 M_\psi^\delta, \quad v_\tau = \beta_2 c_2 M_{l_2}^\tau + \beta_2 M_\varphi^\tau. \quad (70)$$

Как уже упоминалось, следующий этап состоит в построении ограниченного выпуклого замкнутого множества $K \subset W$, которое оператор F отображает в себя. При построении этого множества K мы будем использовать ранее полученные соотношения (66)–(69) и будем искать искомое множество K в форме «коробки»:

$$K = \{(\mathbf{w}, \eta, \mu) \in W \mid \|\mathbf{w}\|_{1, \Omega} \leq M_{\tilde{\mathbf{u}}}, \|\eta\|_{1, \Omega} \leq M_{\tilde{T}}, \|\mu\|_{1, \Omega} \leq M_{\tilde{C}}\}. \quad (71)$$

Здесь $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$, $M_{\tilde{T}}$ и $M_{\tilde{C}}$ — некоторые положительные константы, которые мы будем называть размерами («коробки» K). Они будут определены из условия $F(K) \subseteq K$.

Во Введении уже указывалось, что схема построения множества K будет различаться в зависимости от двух сценариев. Они определяются одним из следующих неравенств:

$$1) \nu_* \leq \nu_*^0 \equiv 2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \quad \text{и} \quad 2) \nu_* > 2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2). \quad (72)$$

Сценарий 1) физически отвечает случаю, когда коэффициент $\nu_* \equiv \delta_0 \nu_{\min}$, характеризующий минимальное значение вязкости жидкости, меньше константы $\nu_*^0 \equiv 2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2)$ или равен ν_*^0 , в то время как сценарий 2) отвечает случаю, когда коэффициент ν_* больше константы ν_*^0 . В связи с этим мы будем называть (в некотором смысле условно) сценарий 1) в (72) сценарием с «малой вязкостью», а сценарий 2) в (72) — сценарием с «большой вязкостью».

Для сценария 1) в (72) удобно выбрать параметры $\delta_0 \in (0, 1)$ и $\tau_0 \in (0, 1)$ из условия:

$$\delta_0 = \tau_0 = \frac{\nu_*}{4\nu_*^0} \equiv \frac{\nu_*}{8(\beta_1 c_1 \gamma'_2 + \beta_2 c_2 \gamma'_2)} \leq \frac{1}{4}. \quad (73)$$

Из (73) следует, что

$$\delta_0 \leq \frac{\nu_*}{8\beta_1 c_1 \gamma'_2}, \quad \tau_0 \leq \frac{\nu_*}{8\beta_2 c_2 \gamma'_2}. \quad (74)$$

При выборе δ_0 и τ_0 , как указано в (73), мы выводим из (66), (67) и (69), с учётом (74), что

$$\|\tilde{T}\|_{1,\Omega} \leq (\nu_*/8\beta_1)\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + c_1 M_{l_1}^{\delta_0}, \quad \|\tilde{C}\|_{1,\Omega} \leq (\nu_*/8\beta_2)\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + c_2 M_{l_2}^{\tau_0}, \quad (75)$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \leq (1/2)\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + (2/\nu_*)(u_{\delta_0} + v_{\tau_0}). \quad (76)$$

Используя (75), (76), легко показать, что искомые размеры $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$, $M_{\tilde{T}}$ и $M_{\tilde{C}}$ определяются следующими формулами:

$$M_{\tilde{\mathbf{u}}} = (4/\nu_*)M_0, \quad M_0 = u_{\delta_0} + v_{\tau_0}, \quad \delta_0 = \tau_0 = \nu_*/4\nu_*^0, \quad (77)$$

$$M_{\tilde{T}} = (1/2\beta_1)M_0 + c_1 M_{l_1}^{\delta_0}, \quad M_{\tilde{C}} = (1/2\beta_2)M_0 + c_2 M_{l_2}^{\tau_0}. \quad (78)$$

Это означает, что для сценария 1) множество K , определённое формулами (71), (77) и (78), где значения δ_0 и τ_0 определены из (73), отображается оператором F в себя.

Рассмотрим теперь сценарий 2). Чтобы построить «коробку» K в этом случае, введём вспомогательное число $\theta \in (0, 1)$ и значения параметров δ и τ формулами

$$\theta \nu_* = 2\beta_1 c_1 \gamma'_2 + 2\beta_2 c_2 \gamma'_2, \quad \theta = \frac{\nu_*^0}{\nu_*} \equiv \frac{2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2)}{\nu_*}, \quad \delta = \delta_0 = 1, \quad \tau = \tau_0 = 1, \quad (79)$$

и перепишем с учётом (79) неравенство (69) в виде

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \leq \theta \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + (2/\nu_*)M_0. \quad (80)$$

Рассуждая далее, как при анализе сценария 1, можно легко установить, что для сценария 2 размеры искомой коробки K , имеющей вид (71), определяются формулами

$$M_{\tilde{\mathbf{u}}} = \frac{2}{\nu_*} \frac{M_0}{(1-\theta)}, \quad M_0 \equiv u_{\delta_0} + v_{\tau_0}, \quad \theta \equiv \frac{2\gamma'_2(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2)}{\nu_*}, \quad \delta_0 = \tau_0 = 1, \quad (81)$$

$$M_{\tilde{T}} = c_1 \gamma'_2 M_{\tilde{\mathbf{u}}} + c_1 M_{l_1}^{\delta_0} = \frac{2c_1 \gamma'_2 M_0}{\nu_*(1-\theta)} + c_1 M_{l_1}^{\delta_0}, \quad M_{\tilde{C}} = \frac{2c_2 \gamma'_2 M_0}{\nu_*(1-\theta)} + c_2 M_{l_2}^{\tau_0}. \quad (82)$$

Подчеркнём, что для каждого из сценариев 1) и 2) для любой тройки $(\mathbf{w}, \eta, \mu) \in K$ решение $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C})$ задачи (46), (47), (48) удовлетворяет следующим оценкам:

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \leq M_{\tilde{\mathbf{u}}}, \quad \|\tilde{T}\|_{1,\Omega} \leq M_{\tilde{T}}, \quad \|\tilde{C}\|_{1,\Omega} \leq M_{\tilde{C}}, \quad (83)$$

где $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$, $M_{\tilde{T}}$ и $M_{\tilde{C}}$ – размеры соответствующего множества K . Важно, что в обоих сценариях 1) и 2) размеры $M_{\tilde{\mathbf{u}}}$, $M_{\tilde{T}}$ и $M_{\tilde{C}}$ являются непрерывными неубывающими функциями норм $\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}$, $\|f\|_{\mathcal{T}^*}$, $\|f^c\|_{\mathcal{C}^*}$, $\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}$, $\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}$, $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}$ и $\|\chi\|_{\Gamma_N}$.

Остаётся доказать, что оператор F компактен и непрерывен на множестве K , определённом формулами (71) с соответствующими конечными значениями $M_{\tilde{\mathbf{u}}} < \infty$, $M_{\tilde{T}} < \infty$ и $M_{\tilde{C}} < \infty$. Для этого возьмём произвольную последовательность $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n)$, $n = 1, 2, \dots$ из K и положим $\mathbf{y}_n \equiv (\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{T}_n, \tilde{C}_n) = F(\mathbf{z}_n) \in K$. Мы покажем, что из последовательности $\mathbf{y}_n$ можно извлечь подпоследовательность, которая сходится по норме X к элементу $\mathbf{y} \in K$. Сначала заметим, что в силу рефлексивности пространств $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и компактности вложений $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, $\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega)$, существует подпоследовательность последовательности $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n)$ (которую мы снова обозначим через $\mathbf{z}_n$), и существует элемент $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu) \in K$ такой, что

$$\eta_n \rightarrow \eta \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^4(\Omega) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (84)$$

$$\mu_n \rightarrow \mu \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^4(\Omega) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (85)$$

$$\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w} \text{ слабо в } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ и сильно в } \mathbf{L}^4(\Omega) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (86)$$

Более того, $\eta_n \rightarrow \eta$, $\mu_n \rightarrow \mu$, $\mathbf{w}_n \rightarrow \mathbf{w}$ п.в. в Ω при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим элемент $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) = F(\mathbf{z}) \in K$. По определению, компоненты $\tilde{\mathbf{u}}$, $\tilde{T}$ и $\tilde{C}$ элемента $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) \in K$ являются решениями задач (46), (47), (48), отвечающими тройке $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu)$, тогда как компоненты $(\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{T}_n, \tilde{C}_n)$ элемента $\mathbf{y}_n \equiv (\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{T}_n, \tilde{C}_n) \in W$ являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} a_1^{\mathbf{z}_n}(\tilde{T}_n, S) &\equiv (k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla \tilde{T}_n, \nabla S) + (\alpha(T_0 + \eta_n) \tilde{T}_n, S)_{\Gamma_N} + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \tilde{T}_n, S) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla \tilde{T}_n, S) \\ &= \langle f, S \rangle + (\chi, S)_{\Gamma_N} - (k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla T_0, \nabla S) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, S) \\ &\quad - (\mathbf{w}_n \cdot \nabla T_0, S) - (\alpha(T_0 + \eta_n) T_0, S)_{\Gamma_N} \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} a_2^{\mathbf{z}_n}(\tilde{C}_n, h) &\equiv (\lambda(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla \tilde{C}_n, \nabla h) + (\gamma(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \tilde{C}_n, h) \\ &\quad + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \tilde{C}_n, h) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla \tilde{C}_n, h) = \langle f^c, h \rangle - (\lambda(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla C_0, \nabla h) - (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla T_0, h) \\ &\quad - (\mathbf{w}_n \cdot \nabla C_0, h) - (\gamma(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) T_0, h) \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} a_0^{\mathbf{z}_n}(\tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) &\equiv (\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla \tilde{\mathbf{u}}_n, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) + ((\tilde{\mathbf{u}}_n \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\mathbf{w}_n \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}_n, \mathbf{v}) \\ &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla \mathbf{u}_0, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \\ &\quad - (\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n)(T_0 + \tilde{T}_n), \mathbf{v}) + (\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n)(C_0 + \tilde{C}_n), \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (89)$$

Они получаются из (46), (47) и (48) заменой элемента $\mathbf{z} = (\mathbf{w}, \eta, \mu)$ на $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n)$ и заменой элемента $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C})$ на $\mathbf{y}_n = (\tilde{\mathbf{u}}_n, \tilde{T}_n, \tilde{C}_n)$.

Докажем, что $\tilde{T}_n \rightarrow \tilde{T}$ в $H^1(\Omega)$, $\tilde{C}_n \rightarrow \tilde{C}$ в $H^1(\Omega)$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ сильно при $n \rightarrow \infty$. С этой целью вычтем (46), (47) и (48) из (87), (88) и (89) соответственно. Получим следующие линейные вариационные задачи для разностей $\tilde{T}_n - \tilde{T}$, $\tilde{C}_n - \tilde{C}$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} a_1^{\mathbf{z}_n}(\tilde{T}_n - \tilde{T}, S) &\equiv (k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla (\tilde{T}_n - \tilde{T}), \nabla S) + (\alpha(T_0 + \eta_n) (\tilde{T}_n - \tilde{T}), S)_{\Gamma_N} \\ &\quad + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla (\tilde{T}_n - \tilde{T}), S) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla (\tilde{T}_n - \tilde{T}), S) \\ &= -((k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla (T_0 + \tilde{T}), \nabla S) \\ &\quad - ((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla (T_0 + \tilde{T}), S) - ((\alpha(T_0 + \eta_n) - \alpha(T_0 + \eta)) (T_0 + \tilde{T}), S)_{\Gamma_N} \\ &\quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned}
a_2^{z_n}(\tilde{C}_n - \tilde{C}, h) &\equiv (\lambda(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla(\tilde{C}_n - \tilde{C}), \nabla h) \\
&\quad + (\gamma(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n)(\tilde{C}_n - \tilde{C}), h) + (\mathbf{w}_n \cdot \nabla(\tilde{C}_n - \tilde{C}), h) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla(\tilde{C}_n - \tilde{C}), h) \\
&= -((\lambda(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - \lambda(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla(C_0 + \tilde{C}), \nabla h) - ((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla(C_0 + \tilde{C}), h) \\
&\quad - ((\gamma(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - \gamma(T_0 + \eta, C_0 + \mu))(C_0 + \tilde{C}), h) \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0^{z_n}(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &\equiv (\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) \nabla(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla)(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) \\
&\quad + (((\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) + ((\mathbf{w}_n \cdot \nabla)(\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) \\
&= -((\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - \nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{v}) \\
&\quad - (((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - (\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n)(\tilde{T}_n - \tilde{T}), \mathbf{v}) - ((\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n) - \mathbf{b}_1(T_0 + \eta))(T_0 + \tilde{T}), \mathbf{v}) \\
&\quad + (\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n)(\tilde{C}_n - \tilde{C}), \mathbf{v}) + ((\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n) - \mathbf{b}_2(C_0 + \mu))(C_0 + \tilde{C}), \mathbf{v}) \\
&\quad \text{для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (92)
\end{aligned}$$

Основываясь на задачах (90), (91) и (92), докажем, что нормы их решений, представляющих собой разности $\tilde{T}_n - \tilde{T}$, $\tilde{C}_n - \tilde{C}$ и $\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}$, стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Чтобы установить этот факт, достаточно показать, что правые части (90), (91) и (92) стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ для всех тестовых функций $S \in \mathcal{T}$, $h \in \mathcal{C}$ и $\mathbf{v} \in V$ соответственно. Сначала рассмотрим задачу (90) и покажем, что каждое слагаемое в её правой части стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Используя оценки (26), (83) и (86), для второго слагаемого получаем

$$\begin{aligned}
|((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla(T_0 + \tilde{T}), S)| &\leq \gamma'_2 \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|T_0 + \tilde{T}\|_{1,\Omega} \|S\|_{1,\Omega} \\
&\leq \gamma'_2 M_T \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|S\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}. \quad (93)
\end{aligned}$$

Для доказательства сходимости к нулю двух других слагаемых в правой части (90) мы применим теорему Лебега о мажорантной сходимости. Начнём с первого слагаемого в правой части (90). Используя (16) с $T_n = T_0 + \eta_n$, $C_n = C_0 + \mu_n$, $T = T_0 + \eta$, $C = C_0 + \mu$, $f = \nabla(T_0 + \tilde{T}) \cdot \nabla S$, и принимая во внимание (84) и (85), мы выводим, что

$$\begin{aligned}
|((k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla(T_0 + \tilde{T}), \nabla S)| \\
\equiv \left| \int_{\Omega} [k(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - k(T_0 + \eta, C_0 + \mu)] \nabla(T_0 + \tilde{T}) \cdot \nabla S \, d\mathbf{x} \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \\
\text{для любой } S \in \mathcal{T}. \quad (94)
\end{aligned}$$

По аналогичной схеме мы доказываем, что

$$\begin{aligned}
|((\alpha(T_0 + \eta_n) - \alpha(T_0 + \eta))(T_0 + \tilde{T}), S)_{\Gamma_N}| \\
= \left| \int_{\Gamma_N} [\alpha(T_0 + \eta_n) - \alpha(T_0 + \eta)] (T_0 + \tilde{T}) S \, d\sigma \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}. \quad (95)
\end{aligned}$$

Как показано выше, для любой тройки $\mathbf{z}_n = (\mathbf{w}_n, \eta_n, \mu_n) \in W$ билинейная относительно разности $\tilde{T}_n - \tilde{T}$ и S форма $a_1^{z_n} : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, определённая в (90), является непрерывной и коэрцитивной с константой коэрцитивности $k_* > 0$. В силу (93), (94), (95) и теоремы Лакса – Мильграма, применённой к задаче (90), это означает, что

$$\|\tilde{T}_n - \tilde{T}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (96)$$

Нам осталось показать, что

$$\|\tilde{C}_n - \tilde{C}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0, \quad \|\tilde{\mathbf{u}}_n - \tilde{\mathbf{u}}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (97)$$

Первое утверждение в (97) доказывается аналогично утверждению (96). Чтобы доказать второе утверждение в (97), обратимся к задаче (92) и оценим сначала, следуя подходу, используемому для вывода оценки (96), третье слагаемое в правой части (92). Используя (23), (83) и (86), мы заключаем, что

$$|((\mathbf{w}_n - \mathbf{w}) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})| \leq \gamma'_1 M_{\tilde{\mathbf{u}}} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}_n - \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (98)$$

Применяя далее оценку (31) к четвёртому и шестому слагаемым в правой части (92) и используя (96) и первое соотношение в (97), выводим, что

$$|(\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n)(\tilde{T}_n - \tilde{T}), \mathbf{v})| \leq \beta_1 \|\tilde{T}_n - \tilde{T}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (99)$$

$$|(\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n)(\tilde{C}_n - \tilde{C}), \mathbf{v})| \leq \beta_2 \|\tilde{C}_n - \tilde{C}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (100)$$

Чтобы установить сходимость к нулю остальных слагаемых в правой части (92), мы снова используем теорему Лебега о мажорантной сходимости. Принимая во внимание (84), (85), а также ограниченность и непрерывность функций $\nu(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^2$ и $b_1(\cdot)$, $b_2(\cdot)$ в $\mathbb{R}^1$, мы выводим с помощью указанной теоремы, что

$$((\nu(T_0 + \eta_n, C_0 + \mu_n) - \nu(T_0 + \eta, C_0 + \mu)) \nabla(\mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{u}}), \nabla \mathbf{v}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (101)$$

$$|(\mathbf{b}_1(T_0 + \eta_n) - \mathbf{b}_1(T_0 + \eta))(T_0 + \tilde{T}) \cdot \mathbf{v})| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V, \quad (102)$$

$$|(\mathbf{b}_2(C_0 + \mu_n) - \mathbf{b}_2(C_0 + \mu))(C_0 + \tilde{C}) \cdot \mathbf{v})| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ для любого } \mathbf{v} \in V. \quad (103)$$

Из (98)–(103) в силу теоремы Лакса — Мильграма, применённой к задаче (92), (которая является коэрцитивной с константой $\nu_*/2$, не зависящей от n ,) мы получаем справедливость второго соотношения в (97).

Из (96) и (97) следует, что определённый выше оператор $F: W \rightarrow W$ является непрерывным и компактным на множестве $K \subset W$, заданном в (71). Следовательно, по теореме Шаудера о неподвижной точке оператор F имеет неподвижную точку $\mathbf{y} \equiv (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{T}, \tilde{C}) = F(\mathbf{z}) \in K$, которая по построению является искомым решением задачи (43), (44), (45) и, кроме того, удовлетворяет всем оценкам в (83). Это, в свою очередь, означает, что тройка $(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, определённая в (42), является искомым решением задачи (38)–(41), и для $(\mathbf{u}, T, C)$ выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} &\leq M_{\mathbf{u}} \equiv M_{\tilde{\mathbf{u}}} + c_{\varepsilon_0} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \\ \|T\|_{1,\Omega} &\leq M_{\tilde{T}} + \|T_{\delta_0}\|_{1,\Omega} \leq M_T \equiv M_{\tilde{T}} + M_{\delta_0}(\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}), \\ \|C\|_{1,\Omega} &\leq M_{\tilde{C}} + \|C_{\tau_0}\|_{1,\Omega} \leq M_C \equiv M_{\tilde{C}} + M_{\tau_0}(\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}). \end{aligned} \quad (104)$$

Остаётся доказать существование компоненты p слабого решения задачи 1, которая вместе с тройкой $(\mathbf{u}, T, C)$ удовлетворяет тождеству (37). Как упоминалось выше, это достигается с помощью схемы де Рама (см. подробности в [30]). Кроме того, используя inf-sup условие (25) и следуя подходу в [20], можно вывести следующую оценку для p :

$$\|p\|_{\Omega} \leq M_p = \beta^{-1}[(\nu_{\max} + \gamma_1 M_{\mathbf{u}})M_{\mathbf{u}} + \beta_1 M_T + \beta_2 M_C + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}]. \quad (105)$$

Здесь β — константа из (25). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполняются предположения 2.1–2.6. Тогда существует слабое решение $(\mathbf{u}, T, C, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ задачи 1, которое удовлетворяет оценкам (104) и (105). В (104) величины $M_{\bar{\mathbf{u}}}$, $M_{\bar{T}}$ и $M_{\bar{C}}$ определены формулами (77), (78) для сценария 1) в (72) и формулами (81), (82) для сценария 2) в (72).

4. УСЛОВНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы кратко обсудим вопрос о единственности решения задачи 1, существование которой было установлено в разделе 3. Для простоты мы будем исследовать единственность решения задачи 1 в более простом частном случае, соответствующем ситуации, когда $\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\chi = 0$, и поэтому граничные условия (4) принимают вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad C = \varphi \text{ на } \Gamma, \quad \partial T / \partial n = 0 \text{ на } \Gamma_N. \quad (106)$$

Кроме того, мы предположим, что старший коэффициент $k(\cdot)$ (или $\lambda(\cdot)$) зависит только от температуры T (или только от концентрации C), в то время как старший коэффициент $\nu(\cdot, \cdot)$ по-прежнему зависит от обоих параметров T и C .

Ниже мы будем называть задачу, описываемую соотношениями (1), (2), (3), (106), где коэффициенты $k(T, C)$ и $\lambda(T, C)$ следует заменить на $k(T)$ и $\lambda(C)$, соответственно, задачей 2. Её слабая формулировка состоит в нахождении четвёрки $(\mathbf{u}, T, C, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} (\nu(T, C) \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - (\mathbf{b}_1(T)T) + (\mathbf{b}_2(C)C, \mathbf{v}) \quad \text{для любого } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (107)$$

$$(k(T) \nabla T, \nabla S) + (\mathbf{u} \cdot \nabla T, S) = \langle f, S \rangle \quad \text{для любой } S \in \mathcal{T}, \quad (108)$$

$$(\lambda(C) \nabla C, \nabla h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla C, h) = \langle f^c, h \rangle \quad \text{для любой } h \in \mathcal{C}, \quad (109)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T = \psi \text{ на } \Gamma_D, \quad C = \varphi \text{ на } \Gamma. \quad (110)$$

Будем предполагать, что коэффициенты $\nu(\cdot, \cdot)$, $k(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$, $\mathbf{b}_1(\cdot)$ и $\mathbf{b}_2(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям:

4.1. $\nu(\cdot, \cdot) \in C(\mathbb{R}^2)$, $k(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, $\lambda(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ и существуют положительные константы $\nu_{\min}$, $k'_{\min}$, $k'_{\max}$, $\lambda'_{\min}$, $\lambda'_{\max}$ такие, что

$$\begin{aligned} 0 < \nu_{\min} \leq \nu(t, s), \quad 0 < k_{\min} \leq k(t), \quad 0 < \lambda_{\min} \leq \lambda(s) \quad \text{для любой пары } (t, s) \in \mathbb{R}^2, \\ |k'(t)| \leq k'_{\max} < \infty, \quad |\lambda'(s)| \leq \lambda'_{\max} < \infty \quad \text{для любой пары } (t, s) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (111)$$

4.2. Функции $\nu(\cdot, \cdot)$, $k'(\cdot)$, $\lambda'(\cdot)$, а также $k(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$, являются липшиц-непрерывными и удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|\nu(t_1, s_1) - \nu(t_2, s_2)| \leq L_1^\nu |t_1 - t_2| + L_2^\nu |s_1 - s_2| \quad \text{для любых } (t_1, s_1), (t_2, s_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (112)$$

$$|k(s_1) - k(s_2)| \leq L_k |s_1 - s_2|, \quad |k'(s_1) - k'(s_2)| \leq L_{k'} |s_1 - s_2| \quad \text{для любых } s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1, \quad (113)$$

$$|\lambda(s_1) - \lambda(s_2)| \leq L_\lambda |s_1 - s_2|, \quad |\lambda'(s_1) - \lambda'(s_2)| \leq L_{\lambda'} |s_1 - s_2| \quad \text{для любых } s_1, s_2 \in \mathbb{R}^1. \quad (114)$$

4.3. Функции $b_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, являются липшиц-непрерывными, и в дополнение к (8) они удовлетворяют условиям $|b_i(t) - b_i(s)| \leq L_i^b |t - s|$ для любой пары $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, из которых вытекают следующие оценки:

$$\|\mathbf{b}_i(\varphi_1) - \mathbf{b}_i(\varphi_2)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq L_i^b \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{для любых } \varphi_1, \varphi_2 \in H^2(\Omega), \quad L_i^b = L_i^b |\mathbf{G}|. \quad (115)$$

В (112)–(115) $L_1^v, L_2^v, L_k, L_{k'}, L_\lambda, L_{\lambda'}, L_1^b, L_2^b$ – некоторые положительные константы.

Поскольку задачу 2 можно рассматривать как частный случай задачи 1, то из теоремы 1 следует, что слабое решение $(\mathbf{u}, T, C, p)$ задачи 2 существует при предположениях **2.1–2.3, 2.5** (где мы полагаем $\alpha = 0, \gamma = 0, \chi = 0$) и **4.1–4.3**, и, кроме того, для решения $(\mathbf{u}, T, C, p)$ выполняются соответствующие оценки (104), (105).

Задача 2 близка к задаче 2, рассмотренной в [26], для которой доказана локальная условная единственность, и переходит в неё при $\varphi = 0, \psi = 0$. С учётом этих фактов мы можем доказать единственность решения задачи 2 с помощью небольшого изменения схемы, используемой в [26]. Соответствующая схема основана на свойстве эквивалентности между стандартной нормой $\|\varphi\|_{2,\Omega}$ и L^2 -нормой $\|\Delta\varphi\|_\Omega$ оператора Лапласа на функциях φ , принадлежащих некоторому подпространству $\tilde{H}^2(\Omega) \subset H^2(\Omega)$. В качестве подпространства $\tilde{H}^2(\Omega)$ мы будем использовать следующие конкретные подпространства:

$$H_t^2(\Omega) = \{T \in H^2(\Omega) \mid T|_{\Gamma_D} = 0, \partial T / \partial n|_{\Gamma_N} = 0\}, \quad H_c^2(\Omega) = \{C \in H^2(\Omega) \mid C|_\Gamma = 0\}$$

для температуры T и концентрации C соответственно. Введём в произведении $\mathbf{H}^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$ следующее множество:

$$B_\varepsilon = \{(\mathbf{u}, T, C) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \mid \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} < \varepsilon, \|T\|_{2,\Omega} < \varepsilon, \|C\|_{2,\Omega} < \varepsilon\}.$$

Справедлива следующая теорема о локальной единственности слабого решения задачи 2, которое обладает дополнительным свойством гладкости для температуры и концентрации. Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы единственности в [26] и здесь опускается.

Теорема 2. Пусть выполняются предположения **2.1–2.3, 2.5, 4.1–4.3**, и, кроме того, $\Gamma \in C^{1,1}$, $\bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N = \emptyset$. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что если существует слабое решение $(\mathbf{u}, T, C, p)$ задачи 2, удовлетворяющее $(\mathbf{u}, T, C) \in B_\varepsilon$, то это решение единственно в B_ε .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследована неоднородная краевая задача для стационарных уравнений тепломассопереноса с переменными старшими и младшими коэффициентами. Предполагается, что старшие коэффициенты ν, k, λ и/или младшие коэффициенты γ, b_i ($i = 1, 2$) и α зависят от температуры среды и/или концентрации вещества. Мы определили понятие слабого решения задачи 1 и установили условия на коэффициенты $\nu, k, \lambda, \gamma, b_i, \alpha$ и другие данные задачи, обеспечивающие её глобальную разрешимость. Кроме того, мы установили локальную единственность слабого решения при дополнительных предположениях на данные задачи и гладкость диффузионных компонент (температуры и концентрации) слабого решения.

Следует отметить, что мы доказали локальную единственность решения задачи 1 только в частном случае, когда $\alpha = 0, \gamma = 0, \chi = 0$, а коэффициент k (или λ) зависит только от T (или от C). Задача доказательства единственности слабого решения в общем случае остаётся открытой. Авторы планируют посвятить отдельную статью детальному анализу единственности решения задачи 1 в общем случае, а также изучению других важных свойств решений рассматриваемой краевой задачи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (проект 075-00460-26-00) и работа первого автора также выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-02-2026-1312 от 20.02.2026). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leray J.* Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique // *J. Math. Pure Appl.* 1933. V. 12. P. 1–82.
2. *Leray J.* Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace // *Acta Math.* 1934. V. 63. P. 193–248.
3. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматлит, 1961.
4. *Galdi G.P.* An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations, Steady-state problems. New York: Springer, 2011; DOI: 10.1007/978-0-387-09620-9
5. *Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R.* The Steady Navier–Stokes System: Basics of the Theory and the Leray Problem. Switzerland: Springer Birkhäuser Cham, 2024; DOI: 10.1007/978-3-031-50898-1
6. *Овсянников Л.В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // *Докл. АН СССР.* 1959. Т. 125, № 3. С. 492–495.
7. *Lorca S. A., Boldrini J. L.* Stationary solutions for generalized Boussinesq models // *J. Differ. Equ.* 1996. V. 124, N 2. P. 389–406.
8. *Lorca S.A., Boldrini J.L.* The initial value problem for a generalized Boussinesq model // *Nonlinear Analysis.* 1999. V. 36, N 4. P. 457–480; DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00635-4
9. *Dias H., Galiano G.* Existence and uniqueness of solutions to the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion // *Topological Methods in Nonlinear Anal.* 1998. V. 11, N 1. P. 59–82.
10. *Buliček M., Málek J., Rajagopal K. R.* Navier's slip and evolutionary Navier-Stokes-like systems with pressure and shear-rate dependent viscosity // *Indiana University Math. J.* 2007. V. 56, N 1. P. 51–86.
11. *Buliček M., Feireisl E., Málek J.* A Navier-Stokes-Fourier system for incompressible fluids with temperature dependent material coefficients // *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 2009. V. 10, N 2. P. 992–1015; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2007.11.018
12. *Гончарова О.Н.* Единственность решения двумерной нестационарной задачи для уравнений конвекции с вязкостью, зависящей от температуры // *Дифференц. уравнения.* 2002. Т. 38, № 2. С. 23–242.
13. *Naumann J.* On the existence of weak solutions to the equations of non-stationary motion of heat-conducting incompressible viscous fluids // *Math. Meth. App. Sci.* 2006. V. 29. P. 1883–1906.
14. *Kim T., Cao D.* A non-steady system with friction boundary conditions for flow of heat-conducting incompressible viscous fluids // *J. Math. Anal. Appl.* 2020. V. 484, N 1. Article number 123676; DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.123676
15. *Antontsev S.N., Diaz J.I., B. de Oliveira H.* Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing // *Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 2005. V. 61. P. 1–14; DOI: 10.1007/3-7643-7317-2_1
16. *Antontsev S.N., B. de Oliveira H.* The Oberbeck-Boussinesq problem modified by a thermo-absorption term // *J. Math. Anal. Appl.* 2011. V. 379, N 2. P. 802–817; DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.02.018
17. *Galiano G.* Spatial and time localization of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion // *Nonlinear Anal.* 2000. V. 42, N 3. P. 423–438; DOI: 10.1016/S0362-546X(98)00355-1
18. *Consiglieri L.* Steady-state flows of thermal viscous incompressible fluids with convective-radiation effects // *Math. Meth. App. Sci.* 2006. V. 16, N 12. P. 2013–2027; DOI: 10.1142/S0218202506001790
19. *Барановский Е.С., Домнич А.А.* О модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56, № 3. С. 317–327; DOI: 10.1134/S0374064120030036
20. *Alekseev G.V., Soboleva O.V.* Solvability analysis for the Boussinesq model of heat transfer under the nonlinear Robin boundary condition for the temperature // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2024. V. 382. Article number 2277; DOI: 10.1098/rsta.2023.0301

21. Алексеев Г.В., Спивак Ю.Э. Анализ смешанной краевой задачи для стационарной модели конвекции вещества с переменными коэффициентами вязкости и диффузии // Прикл. математика и техн. физика. 2024. Т. 65, № 5. С. 3–12; DOI: 10.15372/PMTF202415509
22. Kim T. Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions // Applications of Mathematics. 2022. V. 67, N 5. P. 593–613; DOI: 10.21136/AM.2022.0031-21
23. Гиль М.И. О разрешимости системы стационарных уравнений Буссинеска // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 11. С. 1936–1941.
24. Алексеев Г.В. Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.
25. Алексеев Г.В. Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010.
26. Алексеев Г.В., Соболева О.В. Разрешимость краевой задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 12. С. 1603–1619; DOI: 10.7868/S3034503025120023
27. Алексеев Г.В., Пухначев В.В., Соболева О.В. Анализ разрешимости краевой задачи для стационарной модели термодиффузии // Сиб. журн. индустр. математики. 2025. Т. 28, № 4. С. 5–20; DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.401
28. Joseph D.D. Stability of Fluid Motions. New York: Sprenger-Verlag, 1976.
29. Landau L.D., Lifshitz E.M. Course of Theoretical Physics, Volume 6: Fluid Mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1987.
30. Girault V., Raviart P.A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Berlin: Springer, 1986.
31. Serfozo R. Convergence of Lebesgue integrals with varying measures // Sankhya: The Indian J. of Stats. Series A. 1982. V. 44. P. 380–402.
32. Kovtunen V.A., Zubkova A.V., Reichelt S. Corrector estimates in homogenization of a nonlinear transmission problem for diffusion equations in connected domains // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. V. 43, N 4. P. 1838–1856; DOI: 10.1002/mma.6007
33. Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначёв В.В., Руссо Р. Задача протекания для уравнений Навье–Стокса // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 6. С. 115–176; DOI: 10.4213/rm9616

UDC 517.95

**SOLVABILITY OF AN INHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE
PROBLEM FOR A STATIONARY HEAT AND MASS TRANSFER
MODEL WITH VARIABLE COEFFICIENTS DEPENDING ON TWO
DIFFUSION COMPONENTS**

© 2026 G. V. Alekseev^{1,2a}, Yu. E. Rogozina^{1b}

¹*Institute of Applied Mathematics, FEB RAS,
Radio st., 7, Vladivostok 690041, Russia,*

²*Far Eastern Federal University,
Campus 10 Ajax Bay, Russky Island, Vladivostok 690922, Russia*

E-mails: ^aalekseev@iam.dvo.ru, ^buliyaspivak@gmail.com

Received 20.05.2026, revised 24.06.2026, accepted 15.07.2026

Abstract. An inhomogeneous new boundary value problem for the stationary heat and mass transfer model with variable coefficients is considered in the case when the leading coefficients of viscosity, thermal conductivity, and diffusivity, as well as lower-order coefficients, depend on two diffusive components: the temperature of the medium and the concentration of the dissolved substance. A mathematical apparatus based on the variational approach and using Schauder's fixed-point theorem and Lebesgue's dominated convergence theorem is developed to investigate the mentioned boundary value problem. Applying the developed apparatus, the global existence of a weak solution of the boundary value problem under consideration is proved, and sufficient conditions to the problem data are established providing local uniqueness of the weak solution possessing additional smoothness property for temperature and concentration.

Keywords: Navier–Stokes–Boussinesq equations, inhomogeneous boundary conditions, weak solution, global solvability, lifting, local uniqueness, Schauder's fixed-point theorem, Lebesgue's dominated convergence theorem.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.201

REFERENCES

1. Leray J. Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique. *J. Math. Pure Appl.*, 1933, Vol. 12, pp. 1–82.
2. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Math.*, 1934, Vol. 63, pp. 193–248.
3. Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoj neszimaemoj zhidkosti [Mathematical issues of the dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow: Fizmatlit, 1961 (in Russian).
4. Galdi G.P. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations, Steady-state problems. N. Y.: Springer, 2011; DOI: 10.1007/978-0-387-09620-9
5. Korobkov M.V., Pileckas K., Russo R. The Steady Navier–Stokes System: Basics of the Theory and the Leray Problem. Switzerland: Springer Birkhäuser Cham, 2024; DOI: 10.1007/978-3-031-50898-1
6. Ovsyannikov L.V. Gruppovye svoystva uravneniya nelinejnoj teploprovodnosti [Group properties of the nonlinear heat conduction equation] *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, Vol. 125, No. 3, pp. 492–495 (in Russian).

7. Lorca S.A., Boldrini J.L. Stationary solutions for generalized Boussinesq models. *J. Differ. Equ.*, 1996, Vol. 124, No. 2, pp. 389–406.
8. Lorca S.A., Boldrini J.L. The initial value problem for a generalized Boussinesq model. *Nonlinear Anal.*, 1999, Vol. 36, No. 4, pp. 457–480; DOI: 10.1016/S0362-546X(97)00635-4
9. Dias H., Galiano G. Existence and uniqueness of solutions to the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 1998, Vol. 11, No. 1, pp. 59–82.
10. Bulíček M., Málek J., Rajagopal K. R. Navier's slip and evolutionary Navier-Stokes-like systems with pressure and shear-rate dependent viscosity. *Indiana University Math. J.*, 2007, Vol. 56, No. 1, pp. 51–86.
11. Bulíček M., Feireisl E., Málek J. A Navier-Stokes-Fourier system for incompressible fluids with temperature dependent material coefficients. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2009, Vol. 10, No. 2, pp. 992–1015; DOI: 10.1016/j.nonrwa.2007.11.018
12. Goncharova O.N. Unique solvability of a two-dimensional nonstationary problem for the convection equations with temperature-dependent viscosity. *Differ. Equ.*, 2002, Vol. 38, No. 2, pp. 249–258; DOI: 10.1023/A:1015337513832
13. Naumann J. On the existence of weak solutions to the equations of non-stationary motion of heat-conducting incompressible viscous fluids. *Math. Meth. App. Sci.*, 2006, Vol. 29, pp. 1883–1906.
14. Kim T., Cao D. A non-steady system with friction boundary conditions for flow of heat-conducting incompressible viscous fluids. *J. Math. Anal. Appl.*, 2020, Vol. 484, No. 1, Article number 123676; DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.123676
15. Antontsev S.N., Diaz J.I., B. de Oliveira H. Stopping a viscous fluid by a feedback dissipative field: thermal effects without phase changing. *Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2005, Vol. 61, pp. 1–14; DOI: 10.1007/3-7643-7317-2_1
16. Antontsev S.N., B. de Oliveira H. The Oberbeck-Boussinesq problem modified by a thermo-absorption term. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, Vol. 379, No. 2, pp. 802–817; DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.02.018
17. Galiano G. Spatial and time localization of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion. *Nonlinear Anal.*, 2000, Vol. 42, No. 3, pp. 423–438; DOI: 10.1016/S0362-546X(98)00355-1
18. Consiglieri L. Steady-state flows of thermal viscous incompressible fluids with convective-radiation effects. *Math. Meth. App. Sci.*, 2006, Vol. 16, No. 12, pp. 2013–2027; DOI: 10.1142/S0218202506001790
19. Baranovskii E. S., Domnich A. A. Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain. *Differ. Equ.*, 2020, Vol. 56, No. 3; P. 304–314; DOI: 10.1134/S0012266120030039
20. Alekseev G.V., Soboleva O.V. Solvability analysis for the Boussinesq model of heat transfer under the nonlinear Robin boundary condition for the temperature. *Phil. Trans. R. Soc. A.*, 2024, Vol. 382, Article number 2277; DOI: 10.1098/rsta.2023.0301
21. Alekseev G. V., Spivak Yu. E. Analysis of a mixed boundary value problem for a stationary model of substance convection with variable viscosity and diffusion coefficients. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2024, Vol. 65, No. 5, pp. 793–801; DOI: 10.1134/S0021894424050018
22. Kim T. Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions. *Appl. Math.*, 2022, Vol. 67, No. 5, pp. 593–613; DOI: 10.21136/AM.2022.0031-21
23. Gil' M. I. Solvability of a system of stationary Boussinesq equations. *Differ. Equ.*, 1991, Vol. 27, No. 11, pp. 1377–1382.
24. Alekseev G. V. Solvability of inverse extremal problems for stationary heat and mass transfer equations. *Sib. Math. J.*, 2001, Vol. 42, No. 5, pp. 811–827; DOI: 10.1023/A:1011940606843
25. Alekseev G.V. Optimizaciya v stacionarnyh zadachah teplomassoperenosa i magnitnoj gidrodinamiki [Optimization in the Stationary Problems of the Heat-Mass Transfer and Magnetic Hydrodynamics]. Moscow: Nauchiy Mir, 2010 (in Russian).
26. Alekseev G.V., Soboleva O.V. Solvability of a boundary value problem for the stationary heat and mass transfer equations with variable coefficients. *Differ. Equ.*, 2025, Vol. 61, No. 12, pp. 1853–1868; DOI: 10.1134/S001226612512002X
27. Alekseev G.V., Puhachev V.V., Soboleva O.V. Analiz razreshimosti kraevoy zadachi dlya stacionarnoy modeli termodiffuzii [Analysis of the solvability of a boundary value problem for a stationary

- thermodiffusion model]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.* [Sib. J. Indust. Math.], 2025, Vol. 28, No. 4, pp. 5–20 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2025.28.401
28. Joseph D.D. *Stability of Fluid Motions*. N. Y.: Sprenger-Verl., 1976.
29. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics, Volume 6: Fluid Mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1987.
30. Girault V., Raviart P.A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Berlin: Springe-Verl., 1986.
31. Serfozo R. Convergence of Lebesgue integrals with varying measures. *Indian J. Stats. Series A*, 1982, Vol. 44, pp. 380–402.
32. Kovtunenkov V.A., Zubkova A.V., Reichelt S. Corrector estimates in homogenization of a nonlinear transmission problem for diffusion equations in connected domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, Vol. 43, No. 4, pp. 1838–1856; DOI: 10.1002/mma.6007
33. Korobkov M.V., Pileckas K., Pukhnachev V.V., Russo R. The flux problem for the Navier–Stokes equation. *Russian Math. Surveys*, 2014, Vol. 69, No. 6, pp. 1065–1122; DOI: 10.1070/RM2014v069n06ABEH004928

УДК 519.63

**ЧИСЛЕННО–АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ДВУХ
ЭПИДЕМИЙ С УЧЁТОМ МИГРАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ**

© 2026 А. В. Будянский

*Донской государственный технический университет,
пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону 344002, Россия*

E-mail: a_v_budyansky@mail.ru

Поступила в редакцию 05.11.2025 г.; после доработки 17.07.2026 г.;
принята к публикации 17.07.2026 г.

Целью настоящего исследования является изучение модели массовых инфекционных заболеваний на основе системы нелинейных параболических уравнений. Моделирование проводится в рамках гипотезы о двойной эпидемии, вызванной разными инфекционными штаммами или близкородственными вирусами. Подразумевается, что заболевания обеспечивают взаимный иммунитет. Рассматривается пространственно–временное взаимодействие двух категорий населения: восприимчивых к инфекции и инфицированных. При этом инфицированное население разделено на две непересекающиеся группы, относящиеся к разным заболеваниям. Учитывается локальное взаимодействие, определяющее взаимный переход из одной категории в другую, и миграционные потоки, обусловленные диффузией и направленной миграцией. Моделирование проводится без учёта демографических факторов и возможности получения иммунитета переболевшими. Для пространственной аппроксимации задачи применяется метод конечных разностей на основе смещённых сеток. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируется по времени методом Рунге — Кутты. Компьютерные эксперименты проводятся в системе MATLAB. В ходе исследования установлены параметрические зависимости, при которых в рассматриваемой задаче возникает непрерывное семейство равновесий. Проанализирована возможность нахождения стационарных распределений без использования численных методов. В вычислительных экспериментах дана трактовка эпидемиологических последствий в случае распада семейства решений. Исследовано влияние миграции на сценарии локального вытеснения и сосуществования вирусных инфекций.

Ключевые слова: математическое моделирование, эпидемия, нелинейные параболические уравнения, миграция, косимметрия.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.202

ВВЕДЕНИЕ

Вирусы сопровождают человечество на протяжении всей его истории, становясь причиной развития массовых инфекционных заболеваний [1]. Уходить от контроля иммунной системы и средств лечения им помогает способность к мутации и рекомбинации. При этом исходный вирус и полученный в ходе мутации новый штамм могут не пересекаясь присутствовать в одной популяции [2]. Кроме того, учёные наблюдали случаи, когда вирусы имеют разное происхождение, но вызывают перекрывающийся иммунный ответ носителя. Например, болезнь Зика, протекающая в более лёгкой форме, может обеспечить иммунную защиту от лихорадки Денге [3]. Это делает актуальным развитие математических моделей, позволяющих исследовать динамику двух взаимодействующих инфекционных заболеваний [4, 5, 6, 7].

Основным инструментом моделирования эпидемий является компартментальный подход, когда всё население разделяется на непересекающиеся группы в зависимости от риска заражения [8]. Данный тип моделей позволяет не только рассматривать усреднённые данные по

каждой группе [9, 10], но и учитывать распределение населения по ареалу. Учёт пространственной неоднородности имеет важное значение для понимания процессов, протекающих в биологических сообществах, и представляет интерес для математического моделирования [11, 12]. При этом, как правило, рассматривается случайное распространение, представляющее диффузионный процесс [13]. Модели распространения эпидемий с учётом направленной миграции, вызванной некоторым стимулом, в настоящий момент мало изучены.

В работе рассматривается детерминированная модель на основе системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Всё население разделено на восприимчивых к инфекциям (Susceptible) и инфицированных (Infected) двумя разными вирусами. Оба заболевания распространяются параллельно, и эпидемия, вызванная одним вирусом, даёт иммунитет к другому. Допускается выздоровление инфицированных, что относит рассматриваемую задачу к классу SIS-моделей [14, 15, 16]. Модель дополняется миграционными потоками, обусловленными диффузионным распространением и направленной миграцией. Направленная миграция учитывает неоднородность жизненных условий (некоторый постоянный стимул), а также неравномерность распределения инфицированных для группы восприимчивых к инфекции. Насколько известно автору модели двойной эпидемии с учётом подобных миграционных эффектов ранее не рассматривались. Для анализа модели применяется теория косимметричных динамических систем [17, 18], в которых возможно появление непрерывных семейств стационарных распределений. Анализ условий, при которых происходит распад семейства, позволяет дать трактовку ряду эпидемиологических сценариев.

1. МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВИРУСНЫХ ИНФЕКЦИЙ

В данном разделе описывается пространственно-временное взаимодействие трёх групп населения: восприимчивых к инфекциям $S(x, t)$ и двух групп инфицированных $I_A(x, t)$ и $I_B(x, t)$ вирусами A и B соответственно. Наиболее вероятным источником вируса B является мутация или рекомбинация вируса A . Для описания динамики по каждой группе используются два компонента: локальное взаимодействие, определяющее заболевание и выздоровление, а также перенос за счёт миграционных потоков.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\beta_1 S I_A}{N} - \frac{\beta_2 S I_B}{N} + \gamma_1 I_A + \gamma_2 I_B, \quad (1)$$

$$\frac{\partial I_A}{\partial t} = -\frac{\partial Q_2}{\partial x} + \frac{\beta_1 S I_A}{N} - \gamma_1 I_A, \quad (2)$$

$$\frac{\partial I_B}{\partial t} = -\frac{\partial Q_3}{\partial x} + \frac{\beta_2 S I_B}{N} - \gamma_2 I_B. \quad (3)$$

Здесь x — пространственная переменная, t — время, а $N(x, t) = S(x, t) + I_A(x, t) + I_B(x, t)$. Присутствие в знаменателях (1)–(3) всех групп населения определяет вероятность контакта инфицированных определённым вирусом с восприимчивыми [15]. Имеется в виду, что в данной точке ареала инфицированный индивид может контактировать не только с восприимчивыми к инфекции индивидами, но и с инфицированными. Модель подразумевает, что вирусы A и B дают перекрёстный иммунитет. Интенсивность заражения при контакте здорового населения группами I_A и I_B определяется коэффициентами β_1 и β_2 . Выздоровление задаётся слагаемыми с коэффициентами γ_1 и γ_2 . Коэффициенты γ_1 (γ_2) отражают вероятность завершения заболевания A (B) в единицу времени. Иногда данный показатель интерпретируют как величину, обратную средней продолжительности болезни. Подразумевается, что если заболевание проходит через k дней, то больной индивид в конкретный день выздоровеет с вероятностью $\gamma_j = 1/k$. Полагается, что параметры β_j, γ_j положительны.

Модель также учитывает миграционные потоки:

$$Q_1 = -d_1 \frac{\partial S}{\partial x} + a_1 S \frac{\partial P}{\partial x} + b_{12} S \frac{\partial I_A}{\partial x} + b_{13} S \frac{\partial I_B}{\partial x}, \quad (4)$$

$$Q_2 = -d_2 \frac{\partial I_A}{\partial x} + a_2 I_A \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (5)$$

$$Q_3 = -d_3 \frac{\partial I_B}{\partial x} + a_3 I_B \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (6)$$

Положительные коэффициенты d_j определяют диффузионное распространение. Направленная миграция, вызванная некоторым стимулом $P(x)$, описывается слагаемыми с параметрами a_j , а миграция вследствие неравномерности распределения населения слагаемыми с параметрами b_{1j} . Данный подход аналогичен [19, 20], когда перенос плотности S , вызванный неравномерностью распределения плотности I_A , задаётся выражением $b_{12} S \frac{\partial I_A}{\partial x}$. Знаки коэффициентов a_j, b_{1j} могут быть различны и определяют разные виды реакции. В дальнейшем функцию $P(x)$ будем понимать как *неравномерность распределения жизненных условий*. Миграция населения может быть вызвана желанием сменить климат, а также медицинским и человеческим факторами.

Рассматривается случай одномерного изолированного ареала $\Omega = [0, a]$, на границе которого ставятся условия отсутствия потоков:

$$Q_j(0, t) = Q_j(a, t) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Модель дополняется начальными распределениями плотностей:

$$S(x, 0) = S^0(x), \quad I_A(x, 0) = I_A^0(x), \quad I_B(x, 0) = I_B^0(x). \quad (8)$$

2. АНАЛИЗ МОДЕЛИ

В данном разделе проводится поиск стационарных решений задачи (1)–(8) без использования численных методов. На основе теории косимметрии [17] анализируются условия на параметры системы, при которых реализуется непрерывное семейство равновесий. Делается предположение о возможном исчезновении одного из заболеваний.

Рассматриваемая модель (1)–(8) при дополнительных условиях на параметры системы относится к классу косимметричных динамических систем, для которых возможно возникновение непрерывных семейств стационарных состояний. Для уравнения $\dot{Y} = F(Y)$ косимметрия L представляет собой вектор-функцию, которая ортогональна F для любого Y . В отличие от систем с симметрией, где все решения, принадлежащие одному семейству, обладают идентичным спектром устойчивости, косимметрия порождает семейства с вариативным спектром. Это означает, что в таких семействах могут сосуществовать как устойчивые, так и неустойчивые состояния. Существование косимметрии для исследуемой системы устанавливает следующая лемма.

Лемма 1. Вектор функция $L = (0, \gamma_2 e^{-(a_2/d_2)P} I_B, -\gamma_1 e^{-(a_3/d_3)P} I_A)^T$ является косимметрией системы (1)–(8) при

$$d_3/d_2 = a_3/a_2 = \beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1. \quad (9)$$

Доказательство. По определению косимметрии вектор L должен быть ортогонален правой части системы (1)–(8) для любых функций S, I_A, I_B . Это означает выполнение следующего равенства:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_0^a \left(-\frac{\partial Q_2}{\partial x} \gamma_2 e^{-(a_2/d_2)P} I_B + \frac{\partial Q_3}{\partial x} \gamma_1 e^{-(a_3/d_3)P} I_A \right) dx, \\ \Phi_2 &= \int_0^a \left(\left[\frac{\beta_1 S I_A}{N} - \gamma_1 I_A \right] \gamma_2 e^{-(a_2/d_2)P} I_B - \left[\frac{\beta_2 S I_B}{N} - \gamma_2 I_B \right] \gamma_1 e^{-(a_3/d_3)P} I_A \right) dx.\end{aligned}$$

Интегрирование по частям и учёт краевых условий позволяют записать Φ_1 в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_0^a \left(-\gamma_2 e^{-(a_2/d_2)P} \left[d_2 \frac{\partial I_A}{\partial x} - a_2 I_A \frac{\partial P}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial I_B}{\partial x} - \frac{a_2}{d_2} \frac{\partial P}{\partial x} I_B \right] \right. \\ &\quad \left. + \gamma_1 e^{-(a_3/d_3)P} \left[d_3 \frac{\partial I_B}{\partial x} - a_3 I_B \frac{\partial P}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial I_A}{\partial x} - \frac{a_3}{d_3} \frac{\partial P}{\partial x} I_A \right] \right) dx.\end{aligned}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых с учётом (9) получаем $\Phi_1 = 0$. Подстановка (9) в Φ_2 даёт $\Phi_2 = 0$, что доказывает лемму 1. $\square$

В работе [12] для системы двух конкурирующих популяций установлено существование непрерывного семейства стационарных распределений. При этом у каждого члена семейства, характеризуемого индивидуальным соотношением плотностей видов на ареале, существует своя область начальных данных, из которых данное решение реализуется. Это семейство является следствием косимметрии задачи, что подталкивает к следующей гипотезе.

Гипотеза 1. При выполнении соотношений (9) для системы (1)–(8) будет существовать семейство стационарных распределений.

Условия (9) не накладывают ограничений на миграционные параметры восприимчивых к инфекции, что делает аналитический поиск решений затруднительным. Однако существование непрерывного семейства равновесий при дополнительных условиях устанавливает следующая лемма.

Лемма 2. Система (1)–(8) в случае выполнения условий (9) и $a_1/d_1 = a_2/d_2 = a_3/d_3$, $b_{12} = b_{13} = 0$ имеет семейство равновесий:

$$S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}, \quad I_A = c_2 e^{(a_2/d_2)P}, \quad I_B = c_3 e^{(a_3/d_3)P}, \quad \text{где } c_1, c_2, c_3 - \text{const} : \quad (10)$$

$$c_2 = \theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1) / \gamma_1, \quad c_3 = (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1) / \gamma_1, \quad \theta = [0, 1]. \quad (11)$$

Доказательство. Стационарное решение должно удовлетворять условиям:

$$0 = -\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \beta_1 \frac{S I_A}{N} - \beta_2 \frac{S I_B}{N} + \gamma_1 I_A + \gamma_2 I_B, \quad (12)$$

$$0 = -\frac{\partial Q_2}{\partial x} + \beta_1 \frac{S I_A}{N} - \gamma_1 I_A, \quad (13)$$

$$0 = -\frac{\partial Q_3}{\partial x} + \beta_2 \frac{S I_B}{N} - \gamma_2 I_B. \quad (14)$$

Рассмотрим уравнение, описывающее динамику восприимчивых к инфекции, переписав правую часть (12) в виде $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$, где

$$\kappa_1 = -\frac{\partial Q_1}{\partial x}, \quad \kappa_2 = -\beta_1 \frac{SI_A}{N} + \gamma_1 I_A, \quad \kappa_3 = -\beta_2 \frac{SI_B}{N} + \gamma_2 I_B.$$

Подставив $S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}$ в выражение Q_1 при $b_{12} = b_{13} = 0$ имеем:

$$Q_1 = -d_1 \frac{\partial(c_1 e^{(a_1/d_1)P})}{\partial x} + a_1 c_1 e^{(a_1/d_1)P} \frac{\partial P}{\partial x} = -c_1 a_1 e^{(a_1/d_1)P} \frac{\partial P}{\partial x} + c_1 a_1 e^{(a_1/d_1)P} \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Очевидно, что $Q_1 = 0$ отвечает условию $\kappa_1 = 0$ и соответствует краевым условиям рассматриваемой задачи.

В случае S, I_A, I_B , удовлетворяющих (10), κ_2 переписывается в виде:

$$\kappa_2 = -\beta_1 \frac{c_1 e^{(a_1/d_1)P} c_2 e^{(a_2/d_2)P}}{c_1 e^{(a_1/d_1)P} + c_2 e^{(a_2/d_2)P} + c_3 e^{(a_3/d_3)P}} + \gamma_1 c_2 e^{(a_2/d_2)P}. \quad (15)$$

Учёт соотношений $a_1/d_1 = a_2/d_2 = a_3/d_3$ и подстановка (11) в (15) даёт

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= -\beta_1 \frac{c_1 e^{(a_1/d_1)P} \theta(\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1}{1 + \theta(\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1 + (1 - \theta)(\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + \theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1) e^{(a_1/d_1)P} \\ &= -\beta_1 \frac{c_1 e^{(a_1/d_1)P} \theta(\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1}{1 + (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + \theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1) e^{(a_1/d_1)P} \\ &= c_1 e^{(a_1/d_1)P} \theta(\beta_1 - \gamma_1) \left(-\beta_1 \frac{1/\gamma_1}{1 + (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично для κ_3 имеем:

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= -\beta_2 \frac{e^{(a_1/d_1)P} (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1}{1 + (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + \gamma_2 (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1 e^{(a_1/d_1)P} \\ &= e^{(a_1/d_1)P} (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1) \left(-\beta_2 \frac{1/\gamma_1}{1 + (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1} + \gamma_2/\gamma_1 \right). \end{aligned}$$

В силу условий (9) на параметры β_j, γ_j имеем $\kappa_3 = 0$. Аналогичные выкладки справедливы для (13), (14), что доказывает лемму 2. $\square$

Формально система (1)–(8) позволяет получать решения с отрицательными значениями. Такие решения не отвечают жизненным ситуациям и не представляют интереса. Однако заметим, что система (1)–(8) допускает полное отсутствие инфицированных индивидуумов на ареале. Этому случаю соответствует решение

$$S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}, \quad I_A = 0, \quad I_B = 0 \quad (16)$$

для любого набора параметров.

Лемма 3. Система (1)–(8) при выполнении (9) и $a_1/d_1 = a_2/d_2 = a_3/d_3$, $b_{12}b_{13} \leq 0$, $|b_{12}| + |b_{13}| \neq 0$ имеет равновесие:

$$S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}, \quad I_A = c_2 e^{(a_2/d_2)P}, \quad I_B = c_3 e^{(a_3/d_3)P}, \quad (17)$$

где c_1, c_2, c_3 — константы:

$$c_2 = \theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1, \quad c_3 = (1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1)/\gamma_1, \quad \theta = b_{13}/(b_{13} - b_{12}). \quad (18)$$

Доказательство. Для условия $Q_1 = 0$ в (12) при ненулевых параметрах b_{1j} необходимо выполнение следующего соотношения:

$$b_{12}S \frac{\partial I_A}{\partial x} + b_{13}S \frac{\partial I_B}{\partial x} = 0.$$

После подстановки (17)–(18) данное выражение переписывается в виде

$$c_1^2 e^{(a_1/d_1)P} (\beta_1 - \gamma_1) / \gamma_1 e^{(a_1/d_1)P} (b_{12}\theta + b_{13}(1 - \theta)) = 0$$

и будет выполнено при $\theta = b_{13}/(b_{13} - b_{12})$. Из условий на параметры b_{12}, b_{13} следует $\theta \in [0, 1]$, что делает найденное решение физически осмысленным. В остальном доказательство аналогично приведённому в лемме 2. $\square$

В силу условий (7) и отсутствия демографических процессов средняя плотность населения на ареале не меняется во времени, что легко доказывается:

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \frac{d(\bar{S} + \bar{I}_A + \bar{I}_B)}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \int_0^a (S + I_A + I_B) dx = -\frac{1}{a} \left(Q_1 \Big|_0^a + Q_2 \Big|_0^a + Q_3 \Big|_0^a \right) = 0.$$

Таким образом величина $\bar{N}$ может интерпретироваться как параметр, что приводит к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 2 и $\bar{N} = \Psi$, тогда система (1)–(8) будет иметь семейство решений

$$S = c_1 e^{(a_1/d_1)P}, \quad I_A = c_2 e^{(a_2/d_2)P}, \quad I_B = c_3 e^{(a_3/d_3)P},$$

где

$$c_1 = \frac{\gamma_1 a \Psi}{\beta_1 \tau}, \quad c_2 = \frac{\theta c_1 (\beta_1 - \gamma_1)}{\gamma_1}, \quad c_3 = \frac{(1 - \theta) c_1 (\beta_1 - \gamma_1)}{\gamma_1}, \quad \tau = \int_0^a e^{(a_1/d_1)P} dx, \quad \theta = [0, 1].$$

Доказательство. Доказательство основывается на лемме 2 и производится непосредственной подстановкой S, I_A, I_B из (10), (11) в выражение $\bar{N} = \bar{S} + \bar{I}_A + \bar{I}_B = \Psi$. $\square$

Пример. Пусть выполняются условия:

$$\Omega = [0, 2], \quad d_1 = 0.01, \quad d_2 = 0.02, \quad d_3 = 0.01, \quad (19)$$

$$a_1 = 0.03, \quad a_2 = 0.06, \quad a_3 = 0.03, \quad b_{12} = b_{13} = 0, \quad (20)$$

$$\beta_1 = 0.6, \quad \beta_2 = 0.3, \quad \gamma_1 = 0.2, \quad \gamma_2 = 0.1 \quad \text{и} \quad \bar{N} = 0.9. \quad (21)$$

Функция неравномерности жизненных условий даётся формулой

$$P(x) = \ln(2 \sin^2(\pi x) + 2). \quad (22)$$

Тогда для τ из теоремы 1 справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{(a_1/d_1)P} dx &= \int_0^2 e^{3 \ln(2 \sin^2(\pi x) + 2)} dx = \int_0^2 (2 \sin^2(\pi x) + 2)^3 dx \\ &= \frac{27 \sin(4\pi x) + 4 \sin^3(2\pi x) - 336 \sin(2\pi x) + 756\pi x}{24\pi} \Big|_0^2 = 63. \end{aligned}$$

Таким образом система (1)–(8) при выполнении условий (19)–(21) будет иметь решение:

$$S = \frac{0.6}{63}e^{3P}, \quad I_A = \frac{1.2\theta}{63}e^{3P}, \quad I_B = \frac{1.2(1-\theta)}{63}e^{3P}, \quad \theta \in [0, 1]. \quad (23)$$

При моделировании реальных процессов выполнение ограничений на параметры системы (9) является достаточно редким явлением. Однако найденное аналитически или численно семейство может служить отправной точкой в реализации различных эпидемиологических сценариев. В следующем разделе на основе вычислительных экспериментов изучается разрушение семейства, когда отдельные параметры не удовлетворяют условию косимметрии. Это позволит лучше понять динамику системы и на данном этапе позволяет сделать следующее предположение.

Гипотеза 2. В случае выполнения $d_3/d_2 = a_3/a_2$ и $\beta_2/\beta_1 \neq \gamma_2/\gamma_1$ и $I_A^0, I_B^0 \neq 0$ система (1)–(8) будет иметь равновесие, соответствующее присутствию на ареале только одной группы инфицированных:

$$(S, I_A, 0) \quad \text{или} \quad (S, 0, I_B).$$

Далее представлены результаты вычислительных экспериментов. Рассматривается динамика восприимчивых к инфекции и инфицированных в случае разрушения семейства распределений. Исследуется способность миграционных факторов влиять на развитие массовых инфекционных заболеваний.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАПРАВЛЕННОЙ МИГРАЦИИ НА ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ НАСЕЛЕНИЯ

Для численного решения задачи (1)–(8) применялся метод прямых с дискретизацией на основе смещённых сеток. Рассматривалась сетка с узлами $x_r = rh$, $r = 0, \dots, n+1$, $h = a/(n+1)$. Плотности в узлах x_r определялись функциями $(S)_r$, $(I_A)_r$, $(I_B)_r$. Для вычисления потоков Q_j вводилась вспомогательная сетка $x_{r-1/2} = -h/2 + rh$, $r = 0, \dots, n+2$.

С применением дифференциального оператора первого порядка и оператора вычисления среднего

$$(\sigma w)_{r+1/2} = \frac{w_{r+1} - w_r}{h}, \quad (\delta w)_{r+1/2} = \frac{w_{r+1} + w_r}{2}$$

система (1)–(8) переписывается как система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d(S)_r}{dt} = \left[-\sigma Q_1 - \beta_1 \frac{SI_A}{N} - \beta_2 \frac{SI_B}{N} + \gamma_1 I_A + \gamma_2 I_B \right]_r, \quad (24)$$

$$\frac{d(I_A)_r}{dt} = \left[-\sigma Q_2 + \beta_1 \frac{SI_A}{N} - \gamma_1 I_A \right]_r, \quad (25)$$

$$\frac{d(I_B)_r}{dt} = \left[-\sigma Q_3 + \beta_2 \frac{SI_B}{N} - \gamma_2 I_B \right]_r. \quad (26)$$

Потоки $(Q_j)_{r+1/2}$, $(r = 0, \dots, n)$ определяются формулами

$$(Q_1)_{r+1/2} = -[d_1 \sigma S - a_1 \delta S \sigma P - b_{12} \delta S \sigma I_A - b_{13} \delta S \sigma I_B]_{r+1/2}, \quad (27)$$

$$(Q_2)_{r+1/2} = -[d_2 \sigma I_A - a_2 \delta I_A \sigma P]_{r+1/2}, \quad (28)$$

$$(Q_3)_{r+1/2} = -[d_2 \sigma I_B - a_3 \delta I_B \sigma P]_{r+1/2}. \quad (29)$$

Дискретные варианты граничных условий формулируются с использованием фиктивных узлов:

$$(Q_j)_{-1/2} = -(Q_j)_{1/2}, \quad (Q_j)_{n+1/2} = -(Q_j)_{n-1/2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (30)$$

Из (8) следуют начальные условия:

$$(S)_r = S^0(x_r), \quad (I_A)_r = I_A^0(x_r), \quad (I_B)_r = I_B^0(x_r), \quad r = 0, \dots, n+1. \quad (31)$$

Система (24)–(31) может быть записана в виде

$$\frac{dY}{dt} = F(Y), \quad Y(0) = Y_0. \quad (32)$$

Здесь вектор $Y = ((S)_0, (S)_1, \dots, (S)_{n+1}, (I_A)_0, (I_A)_1, \dots, (I_A)_{n+1}, (I_B)_0, (I_B)_1, \dots, (I_B)_{n+1})$ содержит значения переменных в узлах сетки.

Компьютерные эксперименты с полученной системой ОДУ проводились в системе MATLAB. Для интегрирования по времени применялся метод Рунге — Кутты четвёртого порядка.

Далее представлены результаты расчётов на ареале $\Omega = [0, 2]$. Изучалось влияние следующих параметров на сценарии развития эпидемии: миграционных коэффициентов a_2, a_3, b_{12}, b_{13} и коэффициента выздоровления γ_2 . Остальные параметры были фиксированы и соответствовали примеру из разд. 2:

$$d_1 = 0.01, \quad d_2 = 0.02, \quad d_3 = 0.01, \quad a_1 = 0.03, \\ \beta_1 = 0.6, \quad \beta_2 = 0.3, \quad \gamma_1 = 0.2.$$

Функция неравномерности жизненных условий $P(x)$ задавалась формулой (22), соответствующей ареалу с двумя благоприятными зонами. Вычисления проводились для различных I_A^0 и I_B^0 . Начальные распределения группы восприимчивых к инфекции находились из

$$S^0 = \frac{1.8}{63} e^{3P} - I_A^0 - I_B^0,$$

где первое слагаемое соответствует S из (16) при $\bar{N} = 0.9$. Таким образом во всех расчётах, представленных ниже, $\bar{S} + \bar{I}_A + \bar{I}_B = 0.9$. В вычислительных экспериментах было установлено, что финальные распределения почти не зависят от областей ареала, в которых располагаются эпицентры инфекции. Аналогично результатам, полученным в [12], важным для реализации стационарных распределений, входящих в семейство решений, является соотношение в начальный момент времени средних значений плотностей двух групп инфицированных. Данный факт подтверждает общие закономерности, присущие биологическим сообществам.

При $a_2 = 0.06, a_3 = 0.03, \gamma_2 = 0.1$ система (1)–(8) отвечает условиям косимметрии (9). На рис. 1 представлены линии, соответствующие семействам для различных значений b_{12}, b_{13} . Результаты расчётов даны на плоскости среднеквадратичных отклонений $(\sigma I_A, \sigma I_B)$, вычисляемых по формулам:

$$\sigma I_{A(B)} = \sqrt{\frac{1}{n+2} \sum_{r=0}^{n+1} (I_{A(B)} - \bar{I}_{A(B)})^2}, \quad \bar{I}_{A(B)} = \frac{1}{n+2} \sum_{r=0}^{n+1} (I_{A(B)})_r.$$

Здесь $(I_A)_r, (I_B)_r$ — плотности распределения групп населения в узлах сетки, а n — количество внутренних узлов.

При отсутствии миграции восприимчивых к инфекции, вызванной неравномерностью инфицированных ($b_{12} = b_{13} = 0$), параметры системы соответствуют (19)–(21) из примера в разд. 2. Соответствующее семейство (23) представлено линией 1 на рис. 1. Для ненулевых значений b_{12}, b_{13} семейства равновесий устанавливались численно, см. линии 2, 3 на рис. 1.

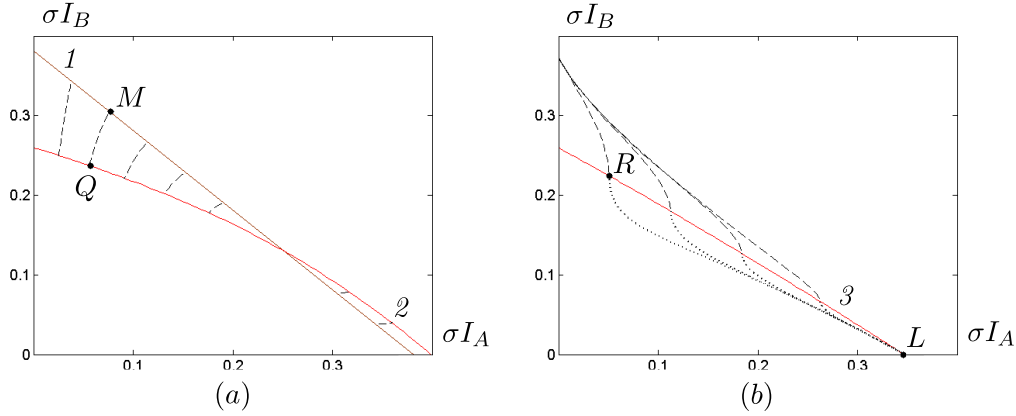


Рис. 1. Семейства стационарных распределений двух инфицированных групп населения при $\gamma_2 = 0.1$ и $b_{12} = b_{13} = 0$ (линия 1); $b_{12} = 0.03$, $b_{13} = -0.06$ (линия 2); $b_{12} = -0.02$, $b_{13} = -0.06$ (линия 3); разрушение семейства 3 при $\gamma_2 = 0.15$ — пунктир и $\gamma_2 = 0.05$ — штрих

Элементы спектра устойчивости λ

θ	λ				
0.25	$-1.7 \cdot 10^{-9}$	$-1.4 \cdot 10^{-4}$	$-2.5 \cdot 10^{-4}$	-0.0023	-0.0024
0.5	$-1.4 \cdot 10^{-9}$	$-1.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.4 \cdot 10^{-4}$	-0.0023	-0.0028
0.75	$-1.2 \cdot 10^{-9}$	$-1.3 \cdot 10^{-4}$	$-2.2 \cdot 10^{-4}$	-0.0024	-0.0029

В качестве начальных данных брались решения (23) с шагом по θ , равным 0.01. На рис. 1(а) штриховыми линиями дана эволюция семейства при $b_{12} = 0.03$, $b_{13} = -0.06$. Стоит отметить, общая точка представленных семейств отвечает случаю $\theta = 2/3$ и соответствует решению (17).

В таблице даны элементы спектра устойчивости, рассчитанного для (32). Приведены по пять наиболее близких к мнимой оси собственных значений для трёх стационарных решений, входящих в (23), см. линия 1 на рис. 1(а). Наличие практически нулевых собственных значений говорит, что данные решения входят в нетривиальное семейство стационарных распределений. Стоит отметить, что в отличие от систем с симметрией, где решения из семейства имеют одинаковый спектр устойчивости, при косимметрии возможны решения с меняющимся вдоль семейства спектром.

При значении параметра γ_2 , не удовлетворяющего условию $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1$, происходит распад семейства с выходом на стационарные изолированные равновесия. Эволюция к изолированным решениям дана пунктирными и штриховыми линиями на рис. 1(б). Расчёты показывают, что в случае $\gamma_2 > \gamma_1\beta_2/\beta_1$ из инфицированных остаётся только группа I_A , а при $\gamma_2 < \gamma_1\beta_2/\beta_1$ группа I_B . Выбор начальной точки не влияет на финальное состояние, а траектории установления близки к линии семейства.

Рис. 2(а, б, с) иллюстрирует пространственно-временную динамику распределений групп восприимчивых к инфекции и инфицированных, соответствующую траектории MQ на рис. 1(а).

В этом случае происходит трансформация равновесия, входящего в семейство 1, в стационарное распределение, соответствующее семейству 2. В силу отрицательности параметра b_{13} и доминирования на ареале группы I_B происходит отток восприимчивых к инфекции из мест скопления инфицированных. Вследствие этого наблюдается снижение доли заражённого населения. Эволюция во времени плотностей распределения групп населения, соответствующая траектории RL на рис. 1(б) дана на рис. 2(с, d, e). В начале установления происходит резкий

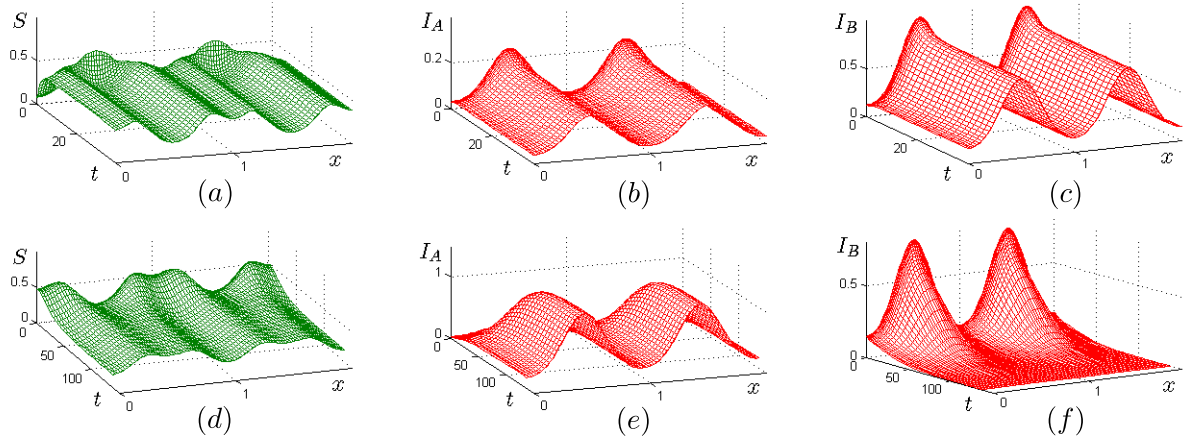


Рис. 2. Установление стационарных распределений, соответствующих траекториям:

MQ (см. рис. 1(a)) при $\gamma_2 = 0.2$, $b_{12} = 0.03$, $b_{13} = -0.06$ рис. (a, b, c);

RL (см. рис. 1(b)) при $\gamma_2 = 0.15$, $b_{12} = -0.02$, $b_{13} = -0.06$ рис. (d, e, f): $a_2 = 0.06$, $a_3 = 0.03$

спад плотности I_B , а затем плавный выход на стационарное решение с присутствием на ареале только группы I_A . При этом вытеснение с ареала I_B компенсируется ростом I_A .

Существование непрерывных семейств равновесий с присутствием на ареале обеих групп инфицированных и распад семейства с исчезновением одной из них подтверждают гипотезы, выдвинутые в разд. 2. Однако исследование показало, в случае миграционных параметров a_2 и a_3 , не удовлетворяющих условию (9), имеются области параметров как с вытеснением одной из групп инфицированных, так и с устойчивым сосуществованием.

На рис. 3 даны карты миграционных параметров a_2 , a_3 с зонами, соответствующими сосуществованию групп инфицированных ($I_A + I_B$), и присутствием на ареале только одной группы (I_A , I_B).

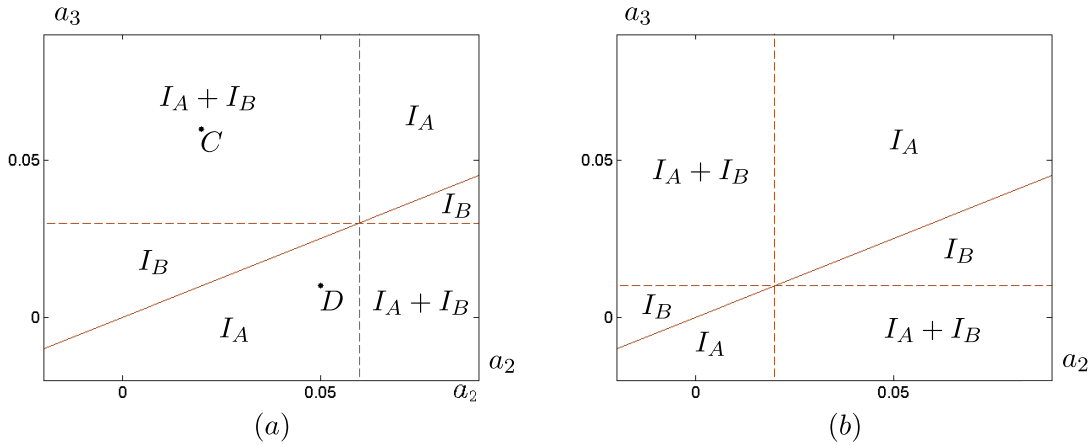


Рис. 3. Карты миграционных параметров с областями, отвечающими различному присутствию инфицированных на ареале при $\beta_{12} = \beta_{13} = 0$ (a); при $\beta_{12} = \beta_{13} = -0.03$ (b): $\gamma_2 = 0.1$

В расчётах начальные распределения были локализованы и задавались формулами:

$$I_A^0(x) = \begin{cases} 0.3 \sin \frac{5\pi x}{a}, & x \in l_A = [1, 1.4], \\ 0, & x \in \Omega \setminus l_A, \end{cases} \quad I_B^0(x) = \begin{cases} 0.3 \sin \frac{5\pi x}{a}, & x \in l_B = [0.15, 0.55], \\ 0, & x \in \Omega \setminus l_B. \end{cases}$$

Вычисления проводились для двух наборов параметров b_{12} , b_{13} при $\gamma_2 = 0.1$. Сплошная линия соответствует условию существования семейства решений, членами которого являются

стационарные распределения I_A и I_B в различных комбинациях. Стоит отметить, что при $b_{12} = b_{13} = 0$ общей точкой для всех областей соответствуют $a_2 = 0.06$ и $a_3 = 0.03$. Данные значения отвечают условию леммы 2 и дополняют набор параметров (19)–(21), при котором будет существовать семейство решений (23). В случае отрицательных b_{12}, b_{13} общая точка для всех областей смещается к началу координат.

Рис. 4 демонстрирует установление распределений S и I_A, I_B для набора миграционных параметров, отвечающего точкам С и D на рис. 3.

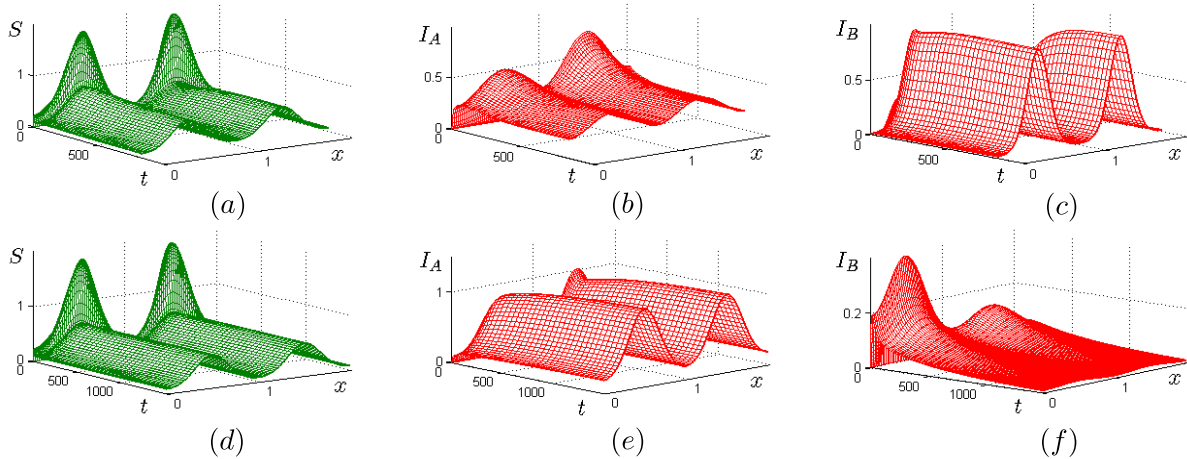


Рис. 4. Установление стационарных распределений групп инфицированных при $a_1 = 0.02$, $a_2 = 0.05$ рис. (a, b, c); $a_1 = 0.05$, $a_2 = 0.01$ рис. (d, e, f): $b_{12} = b_{13} = 0$, $\gamma_2 = 0.1$

Расчёты ведутся из локализованных начальных распределений. В обоих случаях в начале установления наблюдается убыль здорового населения, вызванная развитием инфекционных заболеваний. Динамика, соответствующая точке С, приведена на рис. 4(a, b, c) и характеризуется выходом на устойчивое сосуществование групп инфицированных. При этом финальные (стационарные) распределения характеризуются преобладанием группы I_B над группой I_A . В случае набора миграционных параметров, отвечающих точке D, происходит вытеснение группы I_B с ареала (см. рис. 4(d, e, f)).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена и рассмотрена эпидемиологическая модель на основе системы нелинейных уравнений в частных производных. Изучается взаимодействие группы индивидов, восприимчивых к инфекции, и двух групп инфицированных. Модель подразумевает распределение населения по ареалу с миграционными потоками вследствие диффузионного распространения и направленной миграции. В ходе исследования были установлены параметрические зависимости, при которых в рассматриваемой системе возникает непрерывное семейство решений. Сформулирован ряд утверждений о возможности нахождения стационарных распределений без использования вычислительного эксперимента. Для установления семейств равновесий и анализа их разрушений применялся вычислительный эксперимент. Были построены карты миграционных параметров, отвечающие различным эпидемиологическим сценариям. Установлено, что миграция инфицированного населения способствует как исчезновению одного из заболеваний, так и сосуществованию групп инфицированных на ареале.

Представленные результаты предоставляют основу для усовершенствования методологии анализа распространения инфекционных заболеваний массового характера и оценки их долгосрочных последствий. Перспективным направлением для дальнейшего развития полученных в рамках настоящего исследования выводов является применение статистических данных для изучения как прошлых, так и текущих эпидемиологических ситуаций.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Данная работа финансировалась за счёт средств бюджета Донского государственного технического университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Snowden F.M. Epidemics and society: from the black death to the present. Yale Univ. Press, 2019.
2. Porrozzi R., Teva A., Amaral V.F. Cross-immunity experiments between different species or strains of leishmania in rhesus macaques (*macaca mulatta*) // The American J. Tropical Medicine and Hygiene. 2004. V. 71, N 3. P. 297–305; DOI: 10.4269/ajtmh.2004.71.297
3. Gordon A., Gresh L., Ojeda S., Katzelnick L.C., Sanchez N., Mercado J.C., et al. Prior dengue virus infection and risk of Zika: A pediatric cohort in Nicaragua // PLoS Med. 2019. V. 16, N 1. Article number e1002726; DOI: 10.1371/journal.pmed.1002726
4. Ng T.W., Turinici G., Danchin A. A double epidemic model for the SARS propagation // BMC Infect Dis. 2003. V. 3. Article number 19; DOI: 10.1186/1471-2334-3-19
5. Ahn K.W., Kosoy M., Chan K.-S. An approach for modeling cross-immunity of two strains, with application to variants of Bartonella in terms of genetic similarity // Epidemics. 2014. V. 7. P. 7–12; DOI: 10.1016/j.epidem.2014.03.001
6. Alkhazzan A., Wang J., Nie Y., Khan H., Alzabut J. A novel SIRS epidemic model for two diseases incorporating treatment functions, media coverage, and three types of noise // Chaos, Solitons & Fractals. 2024. V. 181. Article number 114631; DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114631
7. Kabanikhin S., Krivorotko O., Neverov A., Kaminskiy G., Semenova O. Identification of the mathematical model of tuberculosis and HIV co-infection dynamics // Mathematics. 2024. V. 12. Article number 3636; DOI: 10.3390/math12233636
8. Schlickeiser R., Kroger M. Mathematics of Epidemics: On the General Solution of SIRVD, SIRV, SIRD, and SIR Compartment Models // Mathematics. 2024. V. 12, N 7. Article number 941; DOI: 10.3390/math12070941
9. Sidi Ammi M.R., Tahiri M., Torres D.F.M. Global stability of a Caputo fractional SIRS model with general incidence rate // Math. Comput. Sci. 2020. V. 15, N 1. P. 91–105; DOI: 10.48550/arXiv.2002.02560
10. Kumar P., Erturk V. S., Yusuf A., Nisar K.S., Abdelwahab S.F. A study on canine distemper virus (CDV) and rabies epidemics in the red fox population via fractional derivatives // Results Phys. 2021. V. 25. Article number 104281; DOI: 10.1016/j.rinp.2021.104281
11. Говорухин В.Н., Загребнева А.Д. Популяционные волны и их бифуркации в модели «активный хищник — пассивная жертва» // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12, № 4. С. 831–843; DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-831-843
12. Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability // Appl. Math. Comput. 2021. V. 410. Article number 126456; DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456
13. Sidi Ammi M. R., Zinihi A., Raezah A. A., Sabbar Y. Optimal control of a spatiotemporal *SIR* model with reaction–diffusion involving ρ -Laplacian operator // Results Phys. 2023. Vol. 52. Article number 106895; DOI: 10.1016/j.rinp.2023.106895
14. Будянский А.В. Влияние направленной миграции на заболеваемость населения в SIS-модели // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2024. Т. 17, № 3. С. 18–28; DOI: 10.14529/mmp240302

15. *Peng R., Liu S.Q.* Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction–diffusion model // *Nonlinear Analysis*. 2009. V. 71. P. 239–247; DOI: 10.1016/j.na.2008.10.043
16. *Allen L.J.S., Bolker B.M., Lou Y., Nevai A.L.* Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic disease patch model // *SIAM J. Appl. Math.* 2007. V. 67. P. 1283–1309; DOI: 10.48550/arXiv.1911.02219
17. *Юдович В.И.* Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // *Мат. заметки*. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148; DOI: 10.1007/BF01142654
18. *Yudovich V.I.* Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // *Chaos*. 1995. V. 5, N 2. P. 402–411; DOI: 10.1063/1.166110
19. *Будянский А.В., Цибулин В.Г.* Моделирование конкуренции популяций с учётом многофакторного таксиса // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2023. Т. 26, № 3. С. 14–25; DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.302
20. *Будянский А.В.* Численное исследование влияния направленной миграции неаборигенных видов на инвазивные сценарии // *Вестн. Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2023. Т. 33, № 4. С. 551–562; DOI: 10.35634/vm230401

UDC 519.63

NUMERICAL AND ANALYTICAL STUDY OF THE MODEL OF TWO EPIDEMICS TAKING INTO ACCOUNT MIGRATION EFFECTS

© 2026 A. V. Budyansky

*Don State Technical University,
Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don 344002, Russia*

E-mail: a_v_budyansky@mail.ru

Received 05.11.2025, revised 17.07.2026, accepted 17.07.2026

Abstract. The purpose of this study is to investigate a model of mass infectious diseases based on a system of nonlinear parabolic equations. The modeling is carried out within the framework of the hypothesis of a double epidemic caused by different infectious strains or closely related viruses. It is implied that the diseases provide mutual immunity. The spatio-temporal interaction of two population categories is considered: susceptible to infection and infected. In this case, the infected population is divided into two non-overlapping groups related to different diseases. Local interaction determining the mutual transition from one category to another and migration flows caused by diffusion and directed migration are taken into account. The modeling is carried out without taking into account demographic factors and the possibility of obtaining immunity by those who have recovered. For spatial approximation of the problem, the finite difference method based on shifted grids is used. The resulting system of ordinary differential equations is integrated over time using the Runge-Kutta method. Computer experiments are conducted in the matlab system. The study established parametric dependencies, under which continuous family of equilibria occurs in the problem under consideration. The possibility of finding stationary distributions without using numerical methods was analyzed. In computational experiments, an analysis of epidemiological consequences in the case of the disintegration of a family of solutions was given. The influence of migration on scenarios of local displacement and coexistence of viral infections was studied.

Keywords: mathematical modelling, epidemic, nonlinear PDEs, taxis, cosymmetry.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.202

REFERENCES

1. Snowden F.M. Epidemics and society: from the black death to the present. Yale Univ. Press, 2019.
2. Porrozzi R., Teva A., Amaral V.F. Cross-immunity experiments between different species or strains of leishmania in rhesus macaques (*macaca mulatta*). *The American J. Tropical Medicine and Hygiene*, 2004, Vol. 71, No. 3, pp. 297–305; DOI: 10.4269/ajtmh.2004.71.297
3. Gordon A., Gresh L., Ojeda S., Katzelnick L.C., Sanchez N., Mercado J.C., et al. Prior dengue virus infection and risk of Zika: A pediatric cohort in Nicaragua. *PLoS Med.*, 2019, Vol. 16, No. 1, Article number e1002726; DOI: 10.1371/journal.pmed.1002726
4. Ng T.W., Turinici G., Danchin A. A double epidemic model for the SARS propagation. *BMC Infect Dis.*, 2003, Vol. 3, Article number 19; DOI: 10.1186/1471-2334-3-19
5. Ahn K.W., Kosoy M., Chan K.-S. An approach for modeling cross-immunity of two strains, with application to variants of Bartonella in terms of genetic similarity. *Epidemics*, 2014, Vol. 7, pp. 7–12; DOI: 10.1016/j.epidem.2014.03.001

6. Alkhazzan A., Wang J., Nie Y., Khan H., Alzabut J. A novel SIRS epidemic model for two diseases incorporating treatment functions, media coverage, and three types of noise. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, Vol. 181, Article number 114631; DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114631
7. Kabanikhin S., Krivorotko O., Neverov A., Kaminskiy G., Semenova O. Identification of the mathematical model of tuberculosis and HIV co-infection dynamics. *Mathematics*, 2024, Vol. 12, Article number 3636; DOI: 10.3390/math12233636
8. Schlickeiser R., Kroger M. Mathematics of Epidemics: On the General Solution of SIRVD, SIRV, SIRD, and SIR Compartment Models. *Mathematics*, 2024, Vol. 12, No. 7, Article number 941; DOI: 10.3390/math12070941
9. Sidi Ammi M.R., Tahiri M., Torres D.F.M. Global stability of a Caputo fractional SIRS model with general incidence rate. *Math. Comput. Sci.*, 2020, Vol. 15, No. 1, pp. 91–105; DOI: 10.48550/arXiv.2002.02560
10. Kumar P., Erturk V. S., Yusuf A., Nisar K.S., Abdelwahab S.F. A study on canine distemper virus (CDV) and rabies epidemics in the red fox population via fractional derivatives. *Results Phys.*, 2021, Vol. 25, Article number 104281; DOI: 10.1016/j.rinp.2021.104281
11. Govoruhin V.N., Zagrebneva A.D. Populyacionnye volny i ih bifurkacii v modeli «aktivnyj hishchnik — passivnaya zhertva» [Population waves and their bifurcations in the model «active predator — passive prey»]. *Computer Research and Modeling*, 2020, Vol. 12, No. 4, pp. 831–843 (in Russian); DOI: 10.20537/2076-7633-2020-12-4-831-843
12. Frischmuth K., Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modeling of invasion on a heterogeneous habitat: taxis and multistability. *Appl. Math. Comput.*, 2021, Vol. 410, Article number 126456; DOI: 10.1016/j.amc.2021.126456
13. Sidi Ammi M. R., Zinihi A., Raezah A. A., Sabbar Y. Optimal control of a spatiotemporal *SIR* model with reaction–diffusion involving ρ -Laplacian operator. *Results Phys.*, 2023, Vol. 52, Article number 106895; DOI: 10.1016/j.rinp.2023.106895
14. Budyansky A.V. Vliyanie napravlennoj migracii na zabolevaemost' naseleniya v SIS–modeli [The influence of directed migration on the morbidity of the population in the SIS–model]. *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. Model. Program.*, 2024, Vol. 17, No. 3, pp. 18–28 (in Russian); DOI: 10.14529/mmp240302
15. Peng R., Liu S.Q. Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction–diffusion model. *Nonlinear Analysis*, 2009, Vol. 71, pp. 239–247; DOI: 10.1016/j.na.2008.10.043
16. Allen L.J.S., Bolker B.M., Lou Y., Nevai A.L. Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic disease patch model. *SIAM J. Appl. Math.*, 2007, Vol. 67, pp. 1283–1309; DOI: 10.48550/arXiv.1911.02219
17. Yudovich V.I. Kosimmetriya, vyrozhdienie reshenij operatornyh uravnenij, vzniknovenie fil'tracionnoj konvekcii [Co-symmetry, degeneracy of solutions of operator equations, occurrence of filtration convection] *Mat. Zametki* [Mat. Notes], 1991, Vol. 49, No. 5, pp. 142–148 (in Russian); DOI: 10.1007/BF01142654
18. Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it. *Chaos*, 1995, Vol. 5, No. 2, pp. 402–411; DOI: 10.1063/1.166110
19. Budyansky A.V., Tsybulin V.G. Modelirovanie konkurencii populyacij s uchyotom mnogofaktornogo taksisa [Population competition modeling based on multifactorial taxation]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2023, Vol. 26, No. 3, pp. 14–25 (in Russian); DOI: 10.33048/SIBJIM.2023.26.302
20. Budyansky A.V. Chislennoe issledovanie vliyaniya napravlennoj migracii neaborigennyh vidov na invazivnye scenarij [Numerical study of the impact of directed migration of non-native species on invasive scenarios]. *Vestn. Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Comput. sci.*, 2023, Vol. 33, No 4, pp. 551–562 (in Russian); DOI: 10.35634/vm230401

УДК 517.955.8:532.546

АСИМПТОТИКА ОДНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРИТОКЕ К ТРЕЩИНЕ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ С МГРП

© 2026 А. Э. Жаглова^a, И. М. Индрупский^b

*Институт проблем нефти и газа РАН,
ул. Губкина, 3, г. Москва 119333, Россия*

E-mails: ^aazhaglova@ipng.ru, ^bi-ind@ipng.ru

Поступила в редакцию 29.12.2025 г.; после доработки 15.05.2026 г.;
принята к публикации 15.07.2026 г.

Горизонтальные скважины с многостадийным гидроразрывом пласта широко применяются при разработке низкопроницаемых нефтяных и газовых залежей, однако интерпретация данных гидродинамических исследований таких скважин существенно осложнена из-за длительного времени выхода на классический радиальный режим течения и интерференции множественных трещин. В настоящей работе поставлена и решена математическая задача притока к трещине бесконечной проводимости с условием непротекания на эллиптическом контуре, соответствующая течению к горизонтальной скважине с многостадийным гидроразрывом при интерференции близко расположенных трещин. Впервые получено аналитическое выражение для изменения давления на трещине при запуске в работу скважины с постоянным дебитом, а также найдена асимптотика решения при большом времени. Показано, что короткое время работы скважины до остановки приводит к появлению на кривых восстановления давления характерной промежуточной асимптотики радиального режима течения даже при значительной интерференции трещин. Полученные результаты важны для оценки параметров низкопроницаемых пластов по данным исследований горизонтальных скважин с многостадийным гидроразрывом пласта.

Ключевые слова: эллиптическое течение, преобразование Лапласа, асимптотическое решение, кривая давления, функции Матьё, горизонтальная скважина, радиальный режим.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.203

ВВЕДЕНИЕ

Бурение горизонтальных скважин с многостадийным гидроразрывом пласта (ГС с МГРП) широко применяется при разработке низкопроницаемых нефтяных и газовых залежей [1, 2]. Горизонтальный ствол проводится в плоскости залегания пласта, а вдоль него формируется серия поперечных трещин. В результате образуется сложная фильтрационная система, в которой приток флюида к скважине осуществляется через сеть взаимно влияющих друг на друга трещин.

Одним из основных инструментов диагностики параметров пласта являются гидродинамические исследования скважин, в частности анализ кривых восстановления давления (КВД) [3, 4]. После остановки скважины регистрируется изменение забойного давления во времени; по форме этой кривой и её логарифмической производной (производной давления по логарифму времени) можно определить гидропроводность, скин-фактор и другие характеристики системы «пласт–скважина». В классическом случае вертикальной скважины в однородном пласте на поздних временах реализуется радиальный (позднерадийный) режим течения: изолинии давления имеют форму окружностей, а логарифмическая производная давления по времени выходит на горизонтальный участок. Этот участок играет важную роль для оцен-

ки параметров системы, поскольку его наличие позволяет независимо определить значение гидропроводности пласта и далее использовать его при оценке других параметров.

В случае горизонтальной скважины с МГРП ситуация существенно усложняется, поскольку время выхода на позднерадialный режим может быть чрезвычайно велико. Теоретически эту проблему можно решить, используя данные раннерадialного режима, который связан с формированием радиальной симметрии на поздней стадии притока к отдельным трещинам и проявляется на существенно более раннем участке КВД. Но для его возникновения необходимо, чтобы расстояние между трещинами вдоль ствола скважины составляло не менее 3–5 их полудлин [5]. На практике это условие редко соблюдается, что исключает возможность оценки параметров пласта таким способом. Кроме того, КВД в скважинах с МГРП имеют сложную форму из-за взаимодействия множественных трещин.

Представленные в работе [6] исследования показали наличие на графиках логарифмической производной КВД горизонтального участка, не связанного с классическим радиальным течением. Этот участок соответствует некоторому радиально-подобному режиму течения и наблюдается для определённого диапазона достаточно малых значений времени работы скважины до остановки T .

Как показано в работе [6], в период проявления на графике производной КВД соответствующего горизонтального участка формируются эллипсы постоянного давления в ближайшей к трещинам зоне (рис. 1(а)). Такое наблюдение позволяет поставить математическую задачу о притоке к единичной трещине с условием непротекания на эллиптическом контуре, что эквивалентно притоку к отдельной трещине в системе с несколькими близко расположенными интерферирующими трещинами.

Математический аппарат решения задачи об эллиптическом притоке, используемый в данной статье, хорошо известен и неоднократно применялся в литературе. Кучук и Бригам разработали аналитические решения задач эллиптического притока, применимые к вертикальным скважинам с трещинами гидроразрыва бесконечной проводимости в неограниченном пласте и анизотропным коллекторам [7]. Райли и соавторы представили аналитическое решение для давления в вертикальной трещине конечной проводимости с эллиптическим поперечным сечением, дренирующей неограниченный пласт [8]. Амини и соавторы построили кривые падения дебита на основе решения для давления в системе, содержащей трещину гидроразрыва в центре эллиптической зоны дренирования [9]. В работе [10] был разработан метод определения параметров пласта и трещины гидроразрыва на основе данных снижения давления при постоянном дебите в режиме эллиптического потока. Авторы [11] создали математическую модель эллиптического потока для газового пласта с тройной пористостью, учитывающую анизотропию, и получили решение через функции Матьё. Функции Матьё также использовались в аналитических и полуаналитических моделях для учёта зон стимулированного объёма (SRV), которые, как правило, предполагаются эллиптической формы и существенно влияют на добычу газа [12]–[15].

В данной работе на основе решения Амини и соавт. [9] впервые получено аналитическое выражение в пространстве изображений по Лапласу для изменения давления на трещине бесконечной проводимости при запуске в работу скважины с постоянным дебитом, а также найдена асимптотика этого решения в оригиналах при $t \rightarrow \infty$. При помощи полученной асимптотики обосновывается возможность проявления радиально-подобного режима на КВД и его связь с длительностью работы скважины до остановки.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим приток к отдельной трещине бесконечной проводимости в однородном, изотропном, горизонтальном пласте с равномерной толщиной h , эффективной пористостью m и эффективной проницаемостью k (см. рис. 1(б)). Трещина вскрывает пласт по всей толщине.

Пусть общая сжимаемость системы равна c_p , пластовый флюид слабосжимаемый и имеет вязкость μ . Эффектом гравитации можно пренебречь, течение внутри пласта подчиняется закону Дарси.

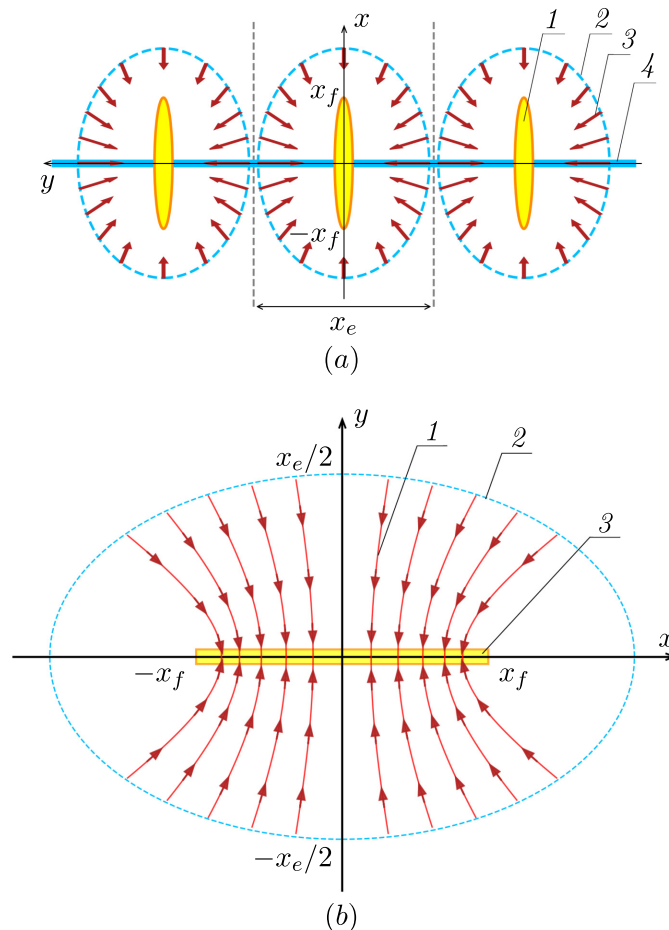


Рис. 1. Эллиптический приток

- (а) к интерферирующим трещинам: 1 — трещина, 2 — граница области дренирования, 3 — направление течения, 4 — горизонтальная скважина;
 (б) к трещине с непроницаемой границей:
 1 — линии тока, 2 — непроницаемая граница, 3 — трещина;
 x_e — расстояние между соседними интерферирующими трещинами,
 x_f — полудлина трещины,

Замечание 1.1. В работе [6] показано, что для трещин конечной проводимости характерны аналогичные особенности притока с точки зрения формирования радиально-подобного режима на КВД. Однако в формировании структуры потока в качестве источника участвует не вся трещина, а только некоторая её эффективная часть, которая к моменту существенной интерференции трещин оказывает значимое влияние на перераспределение давления. Поэтому на данном этапе мы ограничиваемся постановкой задачи для трещины с бесконечной проводимостью, чтобы определить характерные особенности поведения системы и выявить закономерности, связанные с формированием радиально-подобного режима. В дальнейшем рассматриваемая задача может быть обобщена на случай трещины конечной проводимости.

В постановке задачи (см. рис.1) используется два параметра, определяемых геометрией скважины и трещин гидроразрыва: x_f соответствует эффективной полудлине трещины и задаёт внутреннее граничное условие, x_e соответствует половине расстояния между соседними

трещинами и определяет малую полуось эллипса, на котором задана внешняя граница непротекания.

До начала влияния интерференции соседних трещин решение должно соответствовать решению работы [7] для аналогичной трещины в неограниченном пласте. Поэтому геометрия потока определяется софокусными эллипсами и условие непротекания, вызванное интерференцией трещин, также ставится на эллипсе, софокусном с вырожденным эллипсом-трещиной.

Будем также предполагать, что для интересующего нас периода проявления радиально-подобного режима можно не учитывать различия в симметрии течения между краевыми и внутренними трещинами, о чём свидетельствует численное моделирование притока в работе [6].

Уравнение пьезопроводности для нестационарного распределения давления p при течении слабосжимаемого флюида по линейному закону Дарси, записанное с учётом осреднения по вертикальной оси, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = c_p m \frac{\mu}{k} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (1)$$

Решение для эллиптического притока может быть получено из уравнения (1) путём перехода к эллиптическим координатам (ξ, η) :

$$x = x_f \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = x_f \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \quad (2)$$

Заданная эллиптическая система координат характеризуется семейством конфокальных эллипсов с фокальным радиусом x_f , которые ортогональны семейству гипербол с тем же фокальным радиусом. На рис. 2 схематично изображены эллиптические координаты.

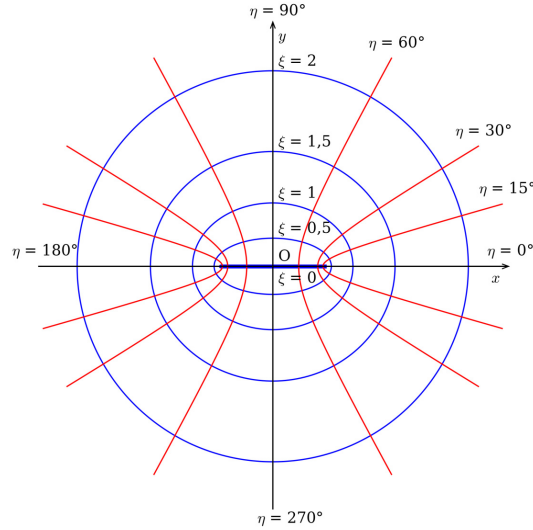


Рис. 2. Эллиптическая система координат

Подставляя (2) в (1), получим уравнение пьезопроводности в эллиптических координатах [7]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} = c_p m \mu \frac{x_f^2}{2k} (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3)$$

Зададим начальные и граничные условия. Предположим, что на момент запуска скважины давление в пласте распределено равномерно и равно начальному давлению p_i [9]:

$$p(\xi, \eta, 0) = p_i. \quad (4)$$

Предположим, что шириной трещины можно пренебречь ($\xi = 0$). На рис. 2 трещина представляет собой отрезок длиной в два фокальных радиуса на оси Ox . На внутренней границе области течения (трещине) давление равномерно распределено и равно давлению на скважине p_{wf} :

$$p(0, \eta, t) = p_{wf}. \quad (5)$$

На внешней границе (контуре) $\xi_0 = \operatorname{arsh} \frac{x_e}{2x_f}$ задано условие непротекания:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{\partial p}{\partial \xi} = 0. \quad (6)$$

Приведём задачу (3)–(6) к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p_D}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \frac{\partial p_D}{\partial t_D}, \quad (7)$$

$$p_D(0, \eta, t_D) = 1, \quad (8)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{\partial p_D}{\partial \xi} = 0, \quad (9)$$

$$p_D(\xi, \eta, 0) = 0,$$

где $p_D(\xi, \eta, t_D) = \frac{p_i - p(\xi, \eta, t)}{p_i - p_{wf}}$ — безразмерное давление, $t_D = \frac{kt}{c_p m \mu x_f^2}$ — безразмерное время [7].

Полученная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных (7) может быть решена в пространстве Лапласа. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (7) и граничным условиям (8)–(9), получим [9]:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial \eta^2} = \frac{s}{2}(\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \bar{p}_D, \quad (10)$$

$$\bar{p}_D(0, \eta) = \frac{1}{s}, \quad (11)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \xi} = 0, \quad (12)$$

где $\bar{p}_D$ — безразмерное давление в пространстве Лапласа.

2. РЕШЕНИЕ

Решение задачи (10)–(12) имеет вид [9]:

$$\bar{p}_D(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n 2A_0^{2n}}{s} \times \frac{\operatorname{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \operatorname{Ce}_{2n}(\xi, -s/4) - \operatorname{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \operatorname{Fek}_{2n}(\xi, -s/4)}{\operatorname{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \operatorname{Ce}_{2n}(0, -s/4) - \operatorname{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \operatorname{Fek}_{2n}(0, -s/4)} \operatorname{ce}_{2n}(\eta, -s/4) \right]. \quad (13)$$

где A_0^{2n} — коэффициент Фурье, зависящий от $(-s/4)$; $\operatorname{Ce}_{2n}(\xi, -s/4)$, $\operatorname{Fek}_{2n}(\xi, -s/4)$, $\operatorname{ce}_{2n}(\eta, -s/4)$ — функции Матьё; $\operatorname{Fek}'_{2n}(\xi, -s/4)$, $\operatorname{Ce}'_{2n}(\xi, -s/4)$ — их производные по ξ . Вид функций Матьё, используемых в данной работе, представлен в Приложении I.

Безразмерный расход (дебит) флюида, поступающего через внутреннюю границу области в трещину, в пространстве Лапласа задаётся следующим образом:

$$\bar{q}_D(s) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\eta. \quad (14)$$

Подставляя решение (13) в (14), получим:

$$\bar{q}_D(s) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(A_0^{2n})^2}{s} \frac{\text{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Ce}'_{2n}(0, -s/4) - \text{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Fek}'_{2n}(0, -s/4)}{\text{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Ce}_{2n}(0, -s/4) - \text{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Fek}_{2n}(0, -s/4)}. \quad (15)$$

Чтобы преобразовать полученное решение для дебита (15) при заданном давлении на скважине в решение для давления при заданном дебите, используем теорему о свёртке [16]:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{1}{s^2 \bar{q}_D(s)}, \quad (16)$$

где $\bar{p}_{wD}(s)$ – безразмерное давление на внутренней границе (трещине) при заданном дебите в пространстве Лапласа.

Подставляя (15) в (16), получим:

$$\bar{p}_{wD}(s) = -\left(2s \sum_{n=0}^{\infty} (A_0^{2n})^2 \frac{\text{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Ce}'_{2n}(0, -s/4) - \text{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Fek}'_{2n}(0, -s/4)}{\text{Fek}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Ce}_{2n}(0, -s/4) - \text{Ce}'_{2n}(\xi_0, -s/4) \text{Fek}_{2n}(0, -s/4)}\right)^{-1}. \quad (17)$$

где безразмерному давлению в пространстве оригиналов соответствует

$$p_{wD} = 2\pi k h (p_i - p(\xi, \eta, t)) / q\mu.$$

Таким образом, решение (17) представляет собой аналитическое выражение для изменения безразмерного давления на трещине в пространстве Лапласа при запуске в работу скважины с постоянным дебитом (снятии кривой стабилизации давления – КСД). Используя метод суперпозиции, из него можно получить решение для КВД. Однако форма (17) не позволяет проанализировать решение на наличие диагностических признаков режимов течения.

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПРИ МАЛОМ ЗНАЧЕНИИ ПАРАМЕТРА ЛАПЛАСА (КРИВАЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ДАВЛЕНИЯ)

В работе [6] показано, что радиально-подобный режим на КВД возникает в период существенного влияния интерференции трещин. Следовательно, нас интересует поведение решения при малых значениях параметра Лапласа ($s \rightarrow 0$), что соответствует большим временам в оригиналах (реальной временной координате), то есть, когда трещины начинают активно интерферировать.

Используя асимптотики функций Матрё для $s \rightarrow 0$ (Приложение I) и учитывая тот факт, что $\lim_{s \rightarrow 0} A_0^{2n} = 0$ для $n > 0$ и $A_0^0 = 1/\sqrt{2}$ [17], из (17) получим

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} \frac{1}{s^2} - \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\ln s}{s} + \left((\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \right) \frac{1}{s}, \quad (18)$$

где γ – константа Эйлера – Маскерони.

Выражение (18) представляет собой асимптотику безразмерного давления (17) при $s \rightarrow 0$.

На рис. 3 показана относительная погрешность асимптотического приближения (18).

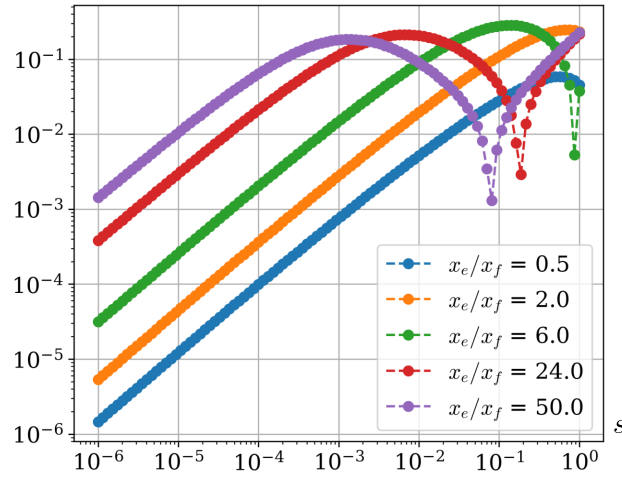


Рис. 3. График зависимости относительной погрешности асимптотической формулы (18)

На рисунке видно, что при убывании s относительная погрешность уменьшается, а с увеличением x_e/x_f возрастает. При этом практический интерес представляют отношения $x_e/x_f < 5$, т. е., когда не проявляется классический (ранне)радиальный режим.

На рис. 4 показана зависимость безразмерного давления на трещине в пространстве Лапласа от параметра s , рассчитанная по точной аналитической формуле (17) и по асимптотическому выражению (18), полученному для малых значений s .

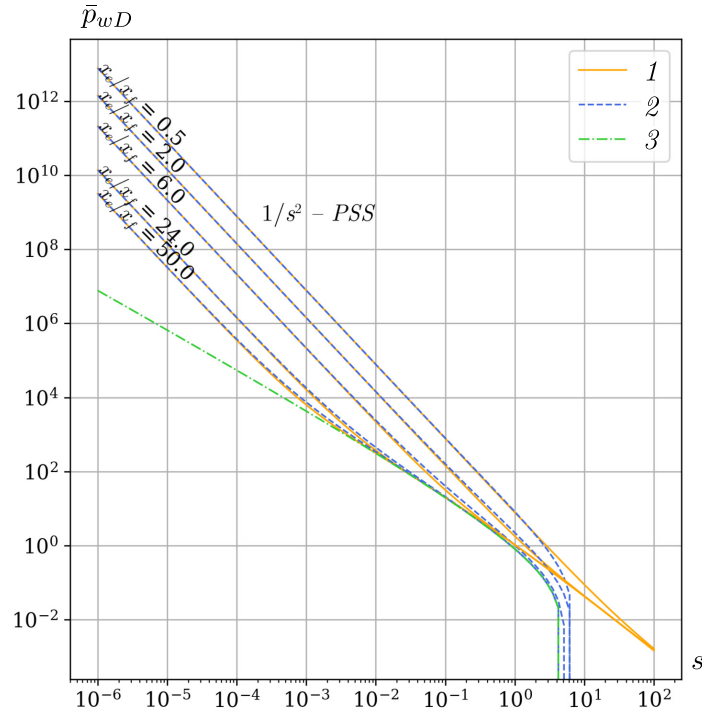


Рис. 4. Билогарифмический график зависимости безразмерного давления на трещине в пространстве Лапласа от параметра s :

1 — точная формула (17), 2 — асимптотическая формула (18), 3 — радиальный режим

При плотном расположении трещин (при малых значениях x_e/x_f) и на аналитической, и на асимптотической кривых наблюдается длительное сохранение поведения, соответствующего псевдостационарному режиму течения (PSS-режиму) с зависимостью $\bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s^2$

($p_{wD}(t_D) \sim t_D$), а характерное радиальному режиму поведение не проявляется. Напротив, при редком расположении трещин (при больших значениях x_e/x_f) с уменьшением s (увеличением t_D) наблюдается сначала радиальный (раннерадialный) режим течения, описываемый зависимостью $\bar{p}_{wD}(s) \sim \ln(s)/s$, и только затем PSS-режим. Полученные результаты подтверждают, что горизонтальный участок на графике логарифмической производной давления, соответствующий раннерадialному режиму, на кривой стабилизации давления для ГС с МГРП будет проявляться лишь при значительном удалении трещин друг от друга. В противном случае на КСД будет наблюдаться только PSS-режим.

Чтобы построить решение для КСД в оригиналах, применим к (18) обратное преобразование Лапласа и получим выражение для безразмерного давления на трещине при $t_D \rightarrow \infty$:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D + \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \ln t_D + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \left(\xi_0 + \frac{3\gamma}{2} - \ln 4 \right) + \ln 4 - \frac{\gamma}{2}. \quad (19)$$

Первое слагаемое в выражении (19) — это линейная компонента, связанная с псевдостационарным режимом течения. Второе слагаемое — логарифмическая компонента, характерная для радиального режима. Явный переход от (17) к (18) представлен в Приложении II.

На рис. 5 изображён диагностический билигарифмический график зависимости логарифмической производной давления от времени, построенный по асимптотическому выражению (19).

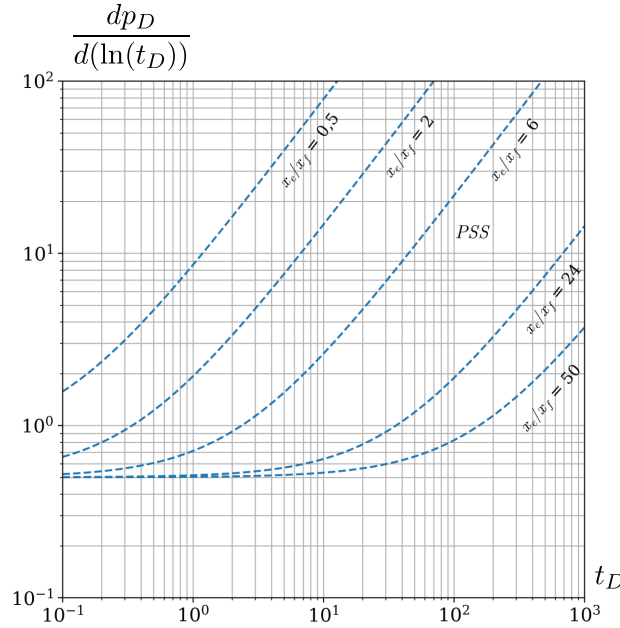


Рис. 5. Билигарифмический график зависимости логарифмической производной безразмерного давления от безразмерного времени, построенный по асимптотической формуле (19)

График в оригиналах полностью согласуется с графиком в пространстве Лапласа: так же видно проявление раннерадialного режима в случае больших соотношений x_e/x_f (горизонтальный участок) и участка с наклоном 1, что соответствует PSS-режиму.

4. КРИВАЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Изменение давления на скважине после остановки (КВД) определяется суперпозицией:

$$\Delta p_{wD} = p_{wD}(t_D) - p_{wD}(t_D - T_D), \quad (20)$$

где T_D – безразмерное время отработки (работы скважины до остановки).

Используя найденную асимптотику (19) давления на скважине до остановки при $t_D \rightarrow \infty$, можно получить асимптотику распределения давления на скважине после остановки:

$$\Delta p_{wD} = \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \operatorname{sh} 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{t_D}{t_D - T_D} + \frac{4}{\operatorname{sh} 2\xi_0} T_D. \quad (21)$$

Первое слагаемое в выражении (21) соответствует искомой асимптотике радиально-подобного режима, если осуществить используемый при анализе КВД переход к времени Хорнера $\frac{t_D}{t_D - T_D}$ [5]. Однако коэффициент при логарифме в (21) отличается от $1/2$ (стандартного раннерадимального режима [7]) и характеризует особенности радиально-подобного режима, выявленного в [6]. В то же время, асимптотика (21) применима только при $t_D \gg T_D$.

Перейдём к изображению суперпозиции давлений (20) в пространстве Лапласа:

$$\mathcal{L}\{\Delta p_{wD}\}(s) = \Delta \bar{p}_{wD}(s) = (1 - e^{-sT_D})\bar{p}_{wD}(s). \quad (22)$$

На рис. 6 представлены графики КВД в пространстве Лапласа для различных значений T_D , построенные по формуле (22).

При больших временах отработки T_D в системе успевает установиться PSS-режим (рис. 6(с), 6(д)). Радиальный режим проявляется только при очень больших отношениях x_e/x_f , что соответствует низкой плотности трещин. При малых значениях T_D PSS-режим не успевает сформироваться (рисунки 6(а), 6(б)). Суперпозиция «снимает» маскирующий эффект PSS-режима и позволяет проявиться радиально-подобному режиму на КВД даже для систем с высокой плотностью трещин. Графически это выражается в том, что с уменьшением T_D участок кривой, характерный для радиального режима, меняет положение и становится более протяжённым и выраженным.

Пояснить сделанные выводы можно, проанализировав выражение (22). Асимптотическое выражение (18) для $\bar{p}_{wD}(s)$ получено при $s \rightarrow 0$. Поведение экспоненты в (22) зависит от её аргумента sT_D .

Если $sT_D \ll 1$, тогда

$$\begin{aligned} (1 - e^{-sT_D})\bar{p}_{wD}(s) &\approx \left(sT_D - \frac{T_D^2 s^2}{2} + \frac{T_D^3 s^3}{6} + o(s^4) \right) \left(C_1 \frac{1}{s^2} - C_2 \frac{\ln s}{s} + C_3 \frac{1}{s} \right) \\ &= C_1 T_D \frac{1}{s} - C_2 T_D \ln s + \left(C_3 T_D - C_1 \frac{T_D^2}{2} \right) + C_2 \frac{T_D^2}{2} s \ln s - C_3 \frac{T_D^2}{2} s + C_1 \frac{T_D^3}{6} s + o(s), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$C_1 = \frac{4}{\operatorname{sh} 2\xi_0}, \quad C_2 = \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \operatorname{sh} 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right), \quad C_3 = (\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \operatorname{sh} 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \operatorname{sh} 2\xi_0} \xi_0.$$

В выражении (23) доминирующее слагаемое $C_1 T_D / s$. Соответственно при $sT_D \ll 1$ на графиках будет проявляться зависимость $\Delta \bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s$.

Если $sT_D \gg 1$, то $e^{-sT_D} \approx 0$ и

$$(1 - e^{-sT_D})\bar{p}_{wD}(s) \approx C_1 \frac{1}{s^2} - C_2 \frac{\ln s}{s} + C_3 \frac{1}{s}. \quad (24)$$

В выражении (24) доминирующее слагаемое C_1 / s^2 . Соответственно при $sT_D \gg 1$ на графиках будет проявляться зависимость $\Delta \bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s^2$, (рисунки 6(с) и 6(д)), соответствующая PSS-режиму.

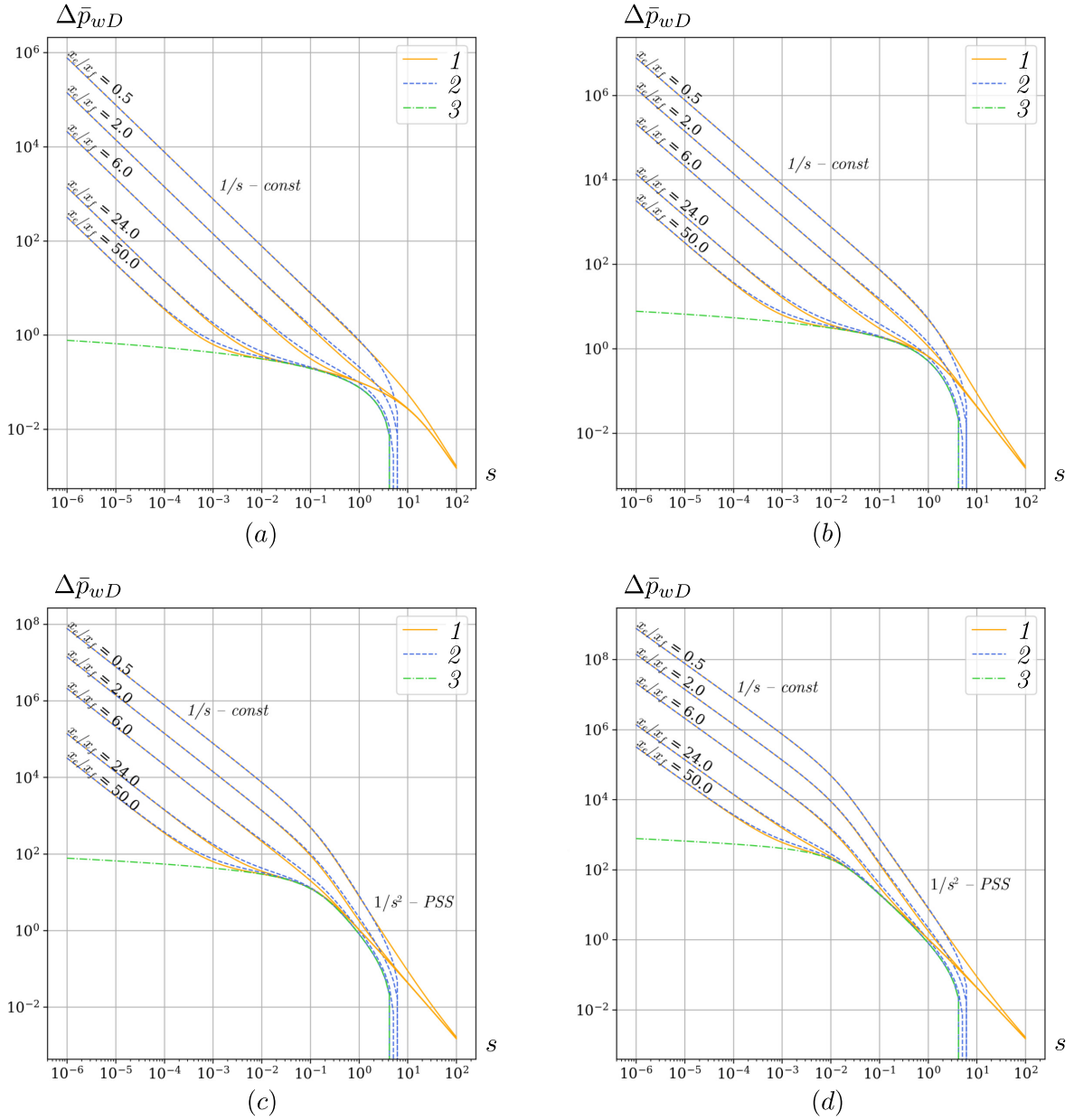


Рис. 6. КВД в пространстве Лапласа при: (а) $T_D = 0.1$; (б) $T_D = 1$; (с) $T_D = 10$; (д) $T_D = 100$;
 1 — точная формула (17), 2 — асимптотическая формула (18), 3 — радиальный режим

Замечание 4.1. Формально при выводе асимптотики (18) предполагается, что T_D — фиксированная константа, поэтому при $s \rightarrow 0$ произведение sT_D также стремится к нулю. Однако анализ графиков показывает, что решение, полученное в предположении $s \rightarrow 0$, хорошо воспроизводит поведение точного решения и в некоторой области немаленьких значений s . Поэтому рассмотрение такого случая позволяет описать поведение точного решения в соответствующей области с увеличением T_D .

Если $sT_D \sim 1$, то на графиках будет проявляться переходный участок между зависимостями $\Delta\bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s$ и $\Delta\bar{p}_{wD}(s) \sim 1/s^2$.

Таким образом, анализ полученного асимптотического решения для КВД показывает, что малое время отработки T_D позволяет проявиться радиально-подобному режиму на КВД, который в противном случае маскируется PSS-режимом (зависимостью $\sim 1/s^2$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе исследованных ранее особенностей течения вблизи трещин для ГС с МГРП поставлена и решена математическая задача притока к единичной трещине бесконечной проводимости с условием непротекания на эллиптическом контуре, моделирующем влияние соседних интерферирующих трещин. Впервые получено аналитическое выражение в пространстве изображений по Лапласу для изменения давления на трещине при пуске скважины в работу с постоянным дебитом.

Для полученного решения найдена асимптотика в оригиналах при большом времени в период образования эллипсов постоянного давления вокруг каждой трещины с учётом их интерференции, что позволило объяснить проявление раннерадialного режима течения на КСД лишь при значительном удалении трещин друг от друга (когда расстояние между ними превышает ~ 5 их полуудлин).

Показано, что на КВД радиально-подобный режим течения проявляется при коротком времени отработки даже при значительной интерференции трещин, что делает его перспективным инструментом для определения параметров низкопроницаемых пластов по данным исследований ГС с МГРП.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

В данном приложении мы приводим асимптотики некоторых функций Матьё при $s \rightarrow 0$. В данной работе используются функции Матьё в следующем виде [18]:

$$\text{Fek}_{2n}(\xi, -s/4) = \frac{p'_{2n}}{\pi A_0^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n} I_r \left(\sqrt{\frac{s}{4}} e^{-\xi} \right) K_r \left(\sqrt{\frac{s}{4}} e^{\xi} \right), \quad (25)$$

$$\text{Ce}_{2n}(\xi, -s/4) = \frac{p'_{2n}}{A_0^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n} I_r \left(\sqrt{\frac{s}{4}} e^{-\xi} \right) I_r \left(\sqrt{\frac{s}{4}} e^{\xi} \right), \quad (26)$$

$$\text{ce}_{2n}(\eta, -s/4) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n} \cos 2r\eta, \quad (27)$$

где $p'_{2n} = (-1)^n \text{ce}_{2n}(0, s/4) \text{ce}_{2n}(\frac{\pi}{2}, s/4) / A_0^{2n}$; I_r , K_r — модифицированные функции Бесселя.

Известно, что $\lim_{s \rightarrow 0} A_{2r}^{2n}(-s/4) = 0$ для $n > 0$ и $A_0^0(-\frac{s}{4}) = 1/\sqrt{2}$ [8]. Следовательно, членами порядка $n > 0$ в выражении (17) можно пренебречь.

Тогда асимптотика выражения (17) при $s \rightarrow 0$ примет вид:

$$\bar{p}_{wD}(s) \sim -\frac{1}{s} \frac{\text{Fek}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Ce}_0(0, -s/4) - \text{Ce}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Fek}_0(0, -s/4)}{\text{Fek}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Ce}'_0(0, -s/4) - \text{Ce}'_0(\xi_0, -\frac{s}{4}) \text{Fek}'_0(0, -s/4)}. \quad (28)$$

Из разложения Ce_{2n} по функциям Бесселя (26) нетрудно получить, что $\text{Ce}'_0(0, -s/4) = 0$. Тогда выражение (28) преобразуется к виду:

$$\bar{p}_{wD}(s) \sim \frac{1}{s} \frac{\text{Fek}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Ce}_0(0, -s/4)}{\text{Ce}'_0(\xi_0, -s/4) \text{Fek}'_0(0, -s/4)} - \frac{1}{s} \frac{\text{Fek}_0(0, -s/4)}{\text{Fek}'_0(0, -s/4)}. \quad (29)$$

Согласно [8],

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{Fek}_0(0, -s/4)}{\text{Fek}'_0(0, -s/4)} = -2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln s + \gamma. \quad (30)$$

Заметим, что при $s \rightarrow 0$ второе слагаемое (29) является выражением для изменения безразмерного давления на трещине при условии бесконечно удалённой границы ($\lim_{\xi \rightarrow \infty} p_D = 0$), которое получили Кучук и Бригам в работе [7].

Используя (25)–(27), получим асимптотики функций Матьё и их производных, входящих в первое слагаемое (29), при $s \rightarrow 0$:

$$\text{Ce}_0(0, -s/4) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (31)$$

$$\text{Ce}'_0(\xi_0, -s/4) \sim \frac{s}{4\sqrt{2}} \text{sh } 2\xi_0, \quad (32)$$

$$\text{Fek}'_0(0, -s/4) \sim -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}, \quad (33)$$

$$\text{Fek}'_0(\xi_0, -s/4) \sim -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left(1 - \frac{s}{8} e^{-2\xi_0} (\gamma + \ln \sqrt{s} - \ln 4 + \xi_0) \right). \quad (34)$$

Подставляя асимптотики (30)–(34) в (29), получим асимптотику выражения (17) при $s \rightarrow 0$ (формула (18) в основном тексте статьи).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Обратное преобразование Лапласа каждого из слагаемых выражения (17) имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D, \quad (35)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ - \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\ln s}{s} \right\} = \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) (\ln t_D + \gamma), \quad (36)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \left((\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \right) \frac{1}{s} \right\} = (\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0. \quad (37)$$

Складывая (35)–(37), получим обратное преобразование Лапласа для (17):

$$\begin{aligned} p_{wD}(t_D) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{p}_{wD}(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} \frac{1}{s^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ - \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \frac{\ln s}{s} \right\} \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left((\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \right) \frac{1}{s} \right\} \\ &= \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D + \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) (\ln t_D + \gamma) + (\gamma - \ln 4) \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} - 1 \right) + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \\ &= \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D + \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \ln t_D \\ &\quad + \frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} \gamma + \frac{\gamma}{2} + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \gamma - \gamma - \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \ln 4 + \ln 4 + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \xi_0 \\ &= \frac{4}{\text{sh } 2\xi_0} t_D + \left(\frac{e^{-2\xi_0}}{4 \text{sh } 2\xi_0} + \frac{1}{2} \right) \ln t_D + \frac{e^{-2\xi_0}}{2 \text{sh } 2\xi_0} \left(\xi_0 + \frac{3\gamma}{2} - \ln 4 \right) + \ln 4 - \frac{\gamma}{2}. \quad (38) \end{aligned}$$

Заметим, что если устремить внешнюю границу к бесконечности ($\xi_0 \rightarrow \infty$), то выражение (38) примет вид:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln t_D + \ln 4 - \frac{\gamma}{2}. \quad (39)$$

Формула (39) для классического радиального режима была получена в работе [7].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института проблем нефти и газа РАН (проект № 125020501405-1). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhao H.-F., Luo J.-L., Li X.-J. et al. Experimental investigation into the fracture propagation behavior of horizontal well multi-stage and multi-cluster fracturing within the roof of crushed soft coal seams // Petroleum Science. 2025. V. 22, Iss. 11. P. 4682–4713; DOI: 10.1016/j.petsci.2025.09.033
2. Zhao E., Jin Z., Li G. et al. Feasibility of CO₂ storage and enhanced gas recovery in depleted tight sandstone gas reservoirs within multi-stage fracturing horizontal wells // Petroleum Science. 2024. V. 21, Iss. 6. P. 4189–4203; DOI: 10.1016/j.petsci.2024.08.014.
3. Никонорова А.Н., Ворон К.А., Кременецкий М.И. и др. Оценка динамики добычных возможностей нефтегазовых горизонтальных скважин с многостадийным ГРП по результатам гидродинамических исследований на основе диагностики ранних режимов течения // Экспозиция Нефть Газ. 2024. № 6. С. 50–56; DOI: 10.24412/2076-6785-2024-6-50-56
4. Dheyauldeen A., Alfarge D., Alkhafaji H. et al. A generic method for diagnosing flow regimes based on dynamic gas in place in unconventional gas reservoirs // Model. Earth Syst. Environ. 2025. V. 11. Article number 346; DOI: 10.1007/s40808-025-02520-x
5. Кременецкий М.И., Ипатов А.И. Применение промыслово-геофизического контроля для оптимизации разработки месторождений нефти и газа. Т. 2. Роль гидродинамико-геофизического мониторинга в управлении разработкой. М.: ИКИ, 2020.
6. Абрамов Т.А., Индрупский И.М. Особенности и информативные возможности раннерадialного режима на КВД в горизонтальных скважинах с близко расположенными трещинами МГРП // Записки Горного института. 2025. Т. 276, № 2. С. 29–48.
7. Kucuk F., Brigham W. E. Transient Flow in Elliptical Systems // Society of Petroleum Engineers J. 1979. V. 19, N 6. P. 401–410; DOI: 10.2118/7488-pa
8. Riley M.F., Brigham W.E., Horne R.N. Analytic solutions for elliptical finite-conductivity fractures // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, October 6–9, 2011.
9. Amini S., Ilk D., Blasingame T.A. Evaluation of the Elliptical Flow Period for Hydraulically-Fractured Wells in Tight Gas Sands – Theoretical Aspects and Practical Considerations // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, College Station, Texas, USA, Jan. 2007. DOI: 10.2118/106308-MS
10. Cheng Y., Lee W.J., McVay D.A. A New Approach for Reliable Estimation of Hydraulic Fracture Properties Using Elliptical Flow Data in Tight Gas Wells // SPE Res. Eval. & Eng. 2009. V. 12. P. 254–262; DOI: 10.2118/105767-PA
11. Liehui Z., Xiaotao Z., Yong W. et al. A Study on Elliptical Gas Flow in Tri-porosity Gas Reservoirs // Transp. Porous Med. 2011. V. 87. P. 777–791; DOI: 10.1007/s11242-011-9718-9
12. Jiang R.-Z., Zhang F.-L., Cui Y.-Z. et al. Production Performance Analysis of Fractured Vertical Wells with SRV in Triple Media Gas Reservoirs Using Elliptical Flow // J. Nat. Gas Sci. Eng. 2019. V. 68. Article number 102925; DOI: 10.1016/j.jngse.2019.102925
13. Zhang Q., Su Y., Wang W. et al. Performance Analysis of Fractured Wells With Elliptical SRV in Shale Reservoirs // J. Nat. Gas Sci. Eng. 2017. V. 45. P. 380–390; DOI: 10.1016/j.jngse.2017.06.004
14. Xu J.-C., Guo C.-H., Teng W.-C. et al. Production Performance Analysis of Tight Oil/Gas Reservoirs Considering Stimulated Reservoir Volume Using Elliptical Flow // J. Nat. Gas Sci. Eng. 2015. V. 26. P. 827–839; DOI: 10.1016/j.jngse.2015.06.057

15. Xu Y., Zuping X., Yu M. Modeling Transient Flow Behavior of Off-Center Fractured Well With Multiple Fractures in Radial Composite Gas Reservoirs // SPE Reservoir Eval. Eng. 2023. V. 26, N 4. P. 1127–1143; DOI: 10.2118/215808-PA
16. van Everdingen A.F., Hurst W. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs // J. Petroleum Technology. 1949. V. 186. P. 305–324.
17. Igbokoyi A.O., Tiab D. A New Method of Well-Test Analysis in Naturally Fractured Reservoirs Based on Elliptical Flow // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, USA, September 2008; DOI: 10.2118/116732-MS
18. McLachlan N.W. Theory and Applications of Mathieu Functions. Oxford: The Clarendon Press, 1951.

UDC 517.955.8:532.546

**ASYMPTOTICS OF ONE SOLUTION TO THE PROBLEM OF
ELLIPTICAL INFLOW TO A FRACTURE FOR A HORIZONTAL WELL
WITH MULTISTAGE HYDRAULIC FRACTURING**

© 2026 A. E. Zhaglova^a, I. M. Indrupskiy^b

*Oil and Gas Research Institute RAS,
Gubkina str., 3, Moscow 119333, Russia*

E-mails: ^aazhaglova@ipng.ru, ^bi-ind@ipng.ru

Received 29.12.2025, revised 15.05.2026, accepted 15.07.2026

Abstract. Horizontal wells with multistage hydraulic fracturing are widely used in the development of low-permeability oil and gas reservoirs. However, the interpretation of well-test data from such wells is significantly complicated by the long time required to reach the classical radial flow regime and by the interference of multiple fractures. In this paper, we formulate and solve a mathematical problem of inflow to an infinite-conductivity fracture with an impermeable elliptical boundary, which models flow toward a horizontal well with multistage hydraulic fracturing under interference of closely spaced fractures. For the first time, we derive an analytical expression for the pressure variation at the fracture during constant-rate production and obtain the large-time asymptotics of the solution. It is demonstrated that a short production period before shut-in leads to the appearance of characteristic intermediate radial-flow asymptotics on the pressure buildup curves, even under significant fracture interference. The results obtained are important for estimating the parameters of low-permeability formations from well-test data of horizontal wells with multistage hydraulic fracturing.

Keywords: elliptical flow, Laplace transform, asymptotic solution, pressure curve, Mathieu functions, horizontal well, radial flow regime.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.203

REFERENCES

1. Zhao H.-F., Luo J.-L., Li X.-J. et al. Experimental investigation into the fracture propagation behavior of horizontal well multi-stage and multi-cluster fracturing within the roof of crushed soft coal seams. *Petroleum Sci.*, 2025, Vol. 22, Iss. 11, pp. 4682–4713; DOI: 10.1016/j.petsci.2025.09.033
2. Zhao E., Jin Z., Li G. et al. Feasibility of CO₂ storage and enhanced gas recovery in depleted tight sandstone gas reservoirs within multi-stage fracturing horizontal wells. *Petroleum Sci.*, 2024, Vol. 21, Iss. 6, pp. 4189–4203; DOI: 10.1016/j.petsci.2024.08.014.
3. Nikonorova A.N., Voron K.A., Kremeneckij M.I. et al. Ocenka dinamiki dobychnykh vozmozhnostej neftegazovykh gorizontaľnykh skvazhin s mnogostadijnym GRP po rezul'tatam gidrodinamicheskikh issledovanij na osnove diagnostiki rannih rezhimov techeniya [Assessment of the dynamics of production capabilities of oil and gas horizontal wells with multistage hydraulic fracturing based on the results of hydrodynamic studies based on diagnostics of early flow regimes]. *Ehkspoziciya Neft' Gaz* [Oil and Gas Exhibition], 2024, No. 6, pp. 50–56 (in Russian); DOI: 10.24412/2076-6785-2024-6-50-56
4. Dheyauldeen A., Alfarge D., Alkhafaji H. et al. A generic method for diagnosing flow regimes based on dynamic gas in place in unconventional gas reservoirs. *Model. Earth Syst. Environ.*, 2025, Vol. 11, Article number 346; DOI: 10.1007/s40808-025-02520-x

5. Kremeneckij M.I., Ipatov A.I. *Primenenie promyslovo-geofizicheskogo kontrolya dlya optimizacii razrabotki mestorozhdenij nefti i gaza*. Vol. 2. Rol' gidrodinamiko-geofizicheskogo monitoringa v upravlenii razrabotkoj [Application of field and geophysical control to optimize the development of oil and gas fields. Vol. 2. The role of hydrodynamic and geophysical monitoring in development management]. Moscow: IKI Publ., 2020 (in Russian).
6. Abramov T.A., Indrupskii I.M. Osobennosti i informativnye vozmozhnosti ranneradial'nogo rezhima na KVD v gorizontaľnyh skvazhinah s blizko raspolozhennymi treshchinami MGRP [Features and informative possibilities of the early radial regime of buildups in horizontal wells with closely spaced multi-stage fractures]. *Zapiski Gornogo instituta* [J. Mining Institute.] 2025, Vol. 276, Iss. 2, pp. 29–48 (in Russian).
7. Kucuk F., Brigham W. E. Transient Flow in Elliptical Systems. *Society of Petroleum Engineers J.*, 1979, Vol. 19, No. 6, pp. 401–410; DOI: 10.2118/7488-pa
8. Riley M.F., Brigham W.E., Horne R.N. Analytic solutions for elliptical finite-conductivity fractures. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, Texas, October 6–9, 2011.
9. Amini S., Ilk D., Blasingame T.A. Evaluation of the Elliptical Flow Period for Hydraulically-Fractured Wells in Tight Gas Sands – Theoretical Aspects and Practical Considerations. *SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference*, College Station, Texas, USA, Jan. 2007. DOI: 10.2118/106308-MS
10. Cheng Y., Lee W.J., McVay D.A. A New Approach for Reliable Estimation of Hydraulic Fracture Properties Using Elliptical Flow Data in Tight Gas Wells. *SPE Res. Eval. & Eng.*, 2009, Vol. 12, pp. 254–262; DOI: 10.2118/105767-PA
11. Liehui Z., Xiaotao Z., Yong W. et al. A Study on Elliptical Gas Flow in Tri-porosity Gas Reservoirs. *Transp. Porous Med.*, 2011, Vol. 87, pp. 777–791; DOI: 10.1007/s11242-011-9718-9
12. Jiang R.-Z., Zhang F.-L., Cui Y.-Z. et al. Production Performance Analysis of Fractured Vertical Wells with SRV in Triple Media Gas Reservoirs Using Elliptical Flow. *J. Nat. Gas Sci. Eng.*, 2019, Vol. 68, Article number 102925; DOI: 10.1016/j.jngse.2019.102925
13. Zhang Q., Su Y., Wang W. et al. Performance Analysis of Fractured Wells With Elliptical SRV in Shale Reservoirs. *J. Nat. Gas Sci. Eng.*, 2017, Vol. 45, pp. 380–390; DOI: 10.1016/j.jngse.2017.06.004
14. Xu J.-C., Guo C.-H., Teng W.-C. et al. Production Performance Analysis of Tight Oil/Gas Reservoirs Considering Stimulated Reservoir Volume Using Elliptical Flow. *J. Nat. Gas Sci. Eng.*, 2015, Vol. 26, pp. 827–839; DOI: 10.1016/j.jngse.2015.06.057
15. Xu Y., Zuping X., Yu M. Modeling Transient Flow Behavior of Off-Center Fractured Well With Multiple Fractures in Radial Composite Gas Reservoirs. *SPE Reservoir Eval. Eng.*, 2023, Vol. 26, No. 4, pp. 1127–1143; DOI: 10.2118/215808-PA
16. van Everdingen A.F., Hurst W. The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs. *J. Petroleum Technology*, 1949, Vol. 186, pp. 305–324.
17. Igbokoyi A.O., Tiab D. A New Method of Well-Test Analysis in Naturally Fractured Reservoirs Based on Elliptical Flow. *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Denver, Colorado, USA, September 2008; DOI: 10.2118/116732-MS
18. McLachlan N.W. *Theory and Applications of Mathieu Functions*. Oxford: The Clarendon Press, 1951.

УДК 532.5

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ КАВЕРНЫ ПРИ УДАРЕ КАПЛИ ВОДЫ О СЛОЙ МАСЛА

© 2026 А. А. Лукьянов^a, И. С. Вожаков^b, Р. И. Мулладжанов^c

*Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
просп. Академика Лаврентьева, 1, Новосибирск 630090, Россия*

E-mails: ^aa.lukyanov1@g.nsu.ru, ^bvozhakov@gmail.com, ^cr.mullyadzhyanov@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 09.09.2025 г.; после доработки 21.11.2025 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Влияние скорости столкновения на динамику каверны при ударе капли воды о слой масла исследовалось с помощью трёхмерного численного моделирования в программном пакете Basilisk. Используя метод объёма жидкости с адаптивным измельчением сетки и учётом сил поверхностного натяжения, были изучены режимы при числах Вебера $We = 23\text{--}360$. Установлено, что с увеличением We происходит переход от капиллярного режима схлопывания каверны, описываемого классической инерционно-капиллярной временной шкалой, к режиму, где доминирующую роль играют гидростатическое давление и силы вязкой диссипации.

Ключевые слова: Удар капли, глубокий бассейн, несмешивающиеся жидкости, Basilisk.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.204

ВВЕДЕНИЕ

Процесс удара капли о поверхность жидкости является фундаментальной проблемой гидродинамики, имеющей важное значение как для фундаментальной науки, так и для многочисленных практических приложений. К ним относятся распыление, нанесение покрытий, абсорбция газа в химических реакторах, а также природные явления, такие как перенос аэрозолей в атмосфере при падении капель дождя в океан [1, 2, 3]. Несмотря на кажущуюся простоту, этот процесс порождает различные физические явления: формирование каверны, образование «короны», выброс вторичных капель и струй, захват воздушного пузырька [4, 5].

Особый интерес представляет случай удара капли воды о слой масла. Несмешиваемость жидкостей, низкое межфазное натяжение на границе вода-масло, а также значительные различия в плотностях и вязкостях приводят к уникальным динамическим режимам, которые отличаются от хорошо изученного случая однородной жидкости [6]. Ключевым параметром, определяющим процесс, является число Вебера (We), которое характеризует отношение сил инерции капли к силам поверхностного натяжения [7]:

$$We = \frac{\rho_w D_d U_d^2}{\sigma_{o-a}}, \quad (1)$$

где ρ_w — плотность воды, D_d — диаметр капли, U_d — скорость соударения, а σ_{o-a} — поверхностное натяжение на границе масло-воздух.

В данной работе представлено численное исследование с использованием пакета с открытым кодом Basilisk [8], известного своими высокоточными методами отслеживания границ раздела и адаптивным измельчением сетки. Целями этого исследования являются количественный анализ влияния скорости соударения (числа Вебера) на глубину полости и время её существования.

1. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Для моделирования нестационарного процесса удара капли использовался решатель Basilisk, основанный на методе объёма жидкости (Volume-of-Fluid, VOF). Метод VOF идеально подходит для задач со сложной деформацией границы раздела, поскольку обеспечивает строгое сохранение массы [9]. Течение несжимаемых жидкостей описывается уравнениями Навье — Стокса и неразрывности:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) + \mathbf{f}_\sigma + \rho \mathbf{g}, \quad (3)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости, ρ — плотность, p — давление, μ — динамическая вязкость, $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения. Поверхностное натяжение моделируется как объёмная сила $\mathbf{f}_\sigma$ с использованием метода континуальной поверхностной силы (CSF) [10].

В исследовании рассматриваются низкоскоростные течения, где сжимаемостью воздуха можно пренебречь без существенной потери точности, что является подходом, широко используемым во многих работах для скоростей ниже 30 м/с [7].

Трёхфазная система в Basilisk реализована с использованием двух полей объёмной доли (f_1 для воды и f_2 для масла), при этом доля воздуха рассчитывается как $1 - f_1 - f_2$. Поверхностное натяжение на границах вода-воздух, масло-воздух и вода-масло явным образом учитывается в рамках метода CSF. Система уравнений Навье — Стокса решается во всей расчётной области, при этом плотность и вязкость являются линейными функциями объёмных долей. Метод более подробно описан в работах [11, 12]:

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + f_3 &= 1, \\ \rho &= f_1 \rho_w + f_2 \rho_o + f_3 \rho_a, \\ \mu &= f_1 \mu_w + f_2 \mu_o + f_3 \mu_a. \end{aligned} \quad (4)$$

Движение межфазной границы осуществляется путём решения уравнения переноса для поля объёмной доли каждой жидкости (вода, масло, воздух). Геометрия границы раздела реконструируется на каждом временном шаге с использованием алгоритма кусочно-линейной аппроксимации интерфейса (Piecewise Linear Interface Calculation, PLIC), что позволяет точно вычислять кривизну интерфейса и, следовательно, силы поверхностного натяжения.

Ключевым преимуществом Basilisk является адаптивное измельчение сетки (Adaptive Mesh Refinement, AMR). Критерий измельчения сетки основывался на градиенте объёмной доли, что позволяет обеспечить высокое разрешение (до 100 расчётных ячеек на начальный диаметр капли D_d) именно в области интерфейса и в зонах с высокими градиентами скорости, минимизируя при этом общие вычислительные затраты.

Для анализа сходимости сетки были проведены расчёты на трёх сетках с разными минимальными размерами ячеек: 20 мкм, 40 мкм, 80 мкм (см. рис. 1). Результаты показали, что сетка с минимальным размером ячейки 40 мкм хорошо согласуется с глубиной полости, полученной при расчёте с ячейкой 20 мкм. Поэтому в качестве оптимальной расчётной сетки, обеспечивающей баланс между точностью и требуемыми вычислительными ресурсами, была выбрана средняя сетка.

Моделирование проводилось в трёхмерной постановке. Расчётная область представляла собой куб с длиной стороны $10D_d$. На верхней границе было установлено условие постоянного давления, а на нижней границе — условие прилипания. На всех боковых границах расчётной области заданы условия нулевого градиента для всех параметров. Плотности воды $\rho_w = 1000 \text{ кг/м}^3$, масла $\rho_o = 800 \text{ кг/м}^3$ и воздуха $\rho_a = 1.2 \text{ кг/м}^3$, динамические вязкости воды

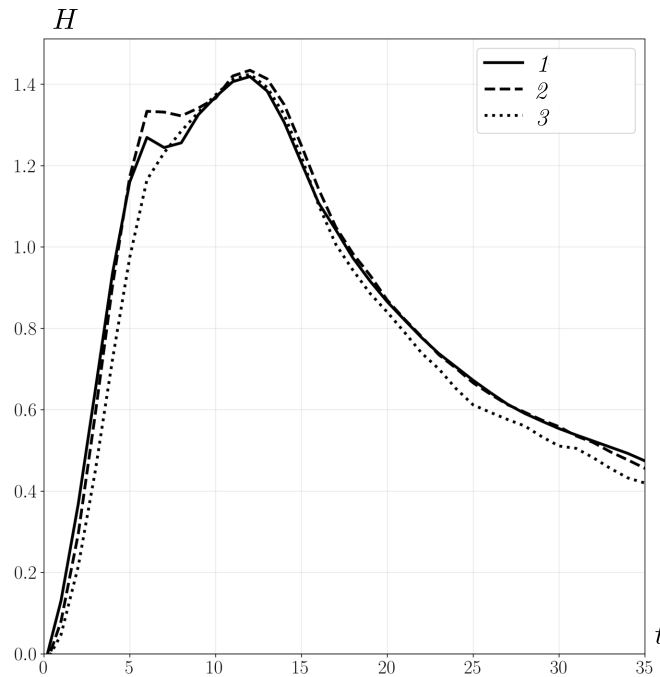


Рис. 1. Зависимость глубины полости H (мм) от времени для сеток с различным размером расчётной ячейки: $\Delta = 20\mu\text{м}$ (кривая 1); $\Delta = 40\mu\text{м}$ (кривая 2); $\Delta = 80\mu\text{м}$ (кривая 3)

$\mu_w = 1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$, масла $\mu_o = 20 \text{ мПа}\cdot\text{с}$ и воздуха $\mu_a = 0.018 \text{ мПа}\cdot\text{с}$, а также коэффициенты поверхностного натяжения на границе вода-воздух $\sigma_{w-a} = 72 \text{ мН/м}$ и масло-воздух $\sigma_{o-a} = 22 \text{ мН/м}$ соответствовали реальным физическим параметрам. Коэффициент поверхностного натяжения на границе вода-масло вычисляется по правилу Антонова. В начальный момент времени капля диаметром $D_d = 2 \text{ мм}$ расположена на расстоянии 1 мм от поверхности масла и имеет начальную скорость U_0 в диапазоне от 0.5 до 2 м/с , что соответствует числам Вебера We от 23 до 360 . Глубина слоя масла в расчётах составляла $5D_d = 10 \text{ мм}$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 представлены поперечные сечения трёхмерной расчётной области, иллюстрирующие динамику падения капли воды на слой масла при скоростях 0.5 , 1 и 2 м/с , характеризующихся числами Вебера $We = 23$, 90 и 360 . Временные срезы показывают, как форма капли и образующаяся полость эволюционируют с момента начального контакта. При наименьшей скорости ($We = 23$) формируется очень маленькая и быстро исчезающая полость (см. рис. 3), а сама капля оседает на поверхности. При скорости 1 м/с ($We = 90$) удар капли приводит к образованию отчётливой полости, глубина и ширина которой сравнимы с диаметром капли. В этом случае капля действует подобно поршню, полностью погружаясь в слой к 20 мс и активно расширяя полость. При максимальной скорости ($We = 360$) формируется глубокая сферическая полость. Однако, вопреки интуитивному ожиданию, время полного погружения капли увеличивается: к 20 мс капля всё ещё видна в верхней части полости, сохраняя контакт с атмосферой. Это указывает на переход к инерционному режиму, при котором полость формируется за счёт быстрого радиального смещения жидкости, а не простого следования за телом капли, что приводит к её более медленному погружению. Таким образом, визуализация наглядно демонстрирует качественное изменение механизма взаимодействия от медленного погружения до удара с нелинейными эффектами.

Когда при ударе капли о поверхность масла образуется небольшая полость, её колебания следуют капиллярно-инерционному временному масштабу, определяемому балан-

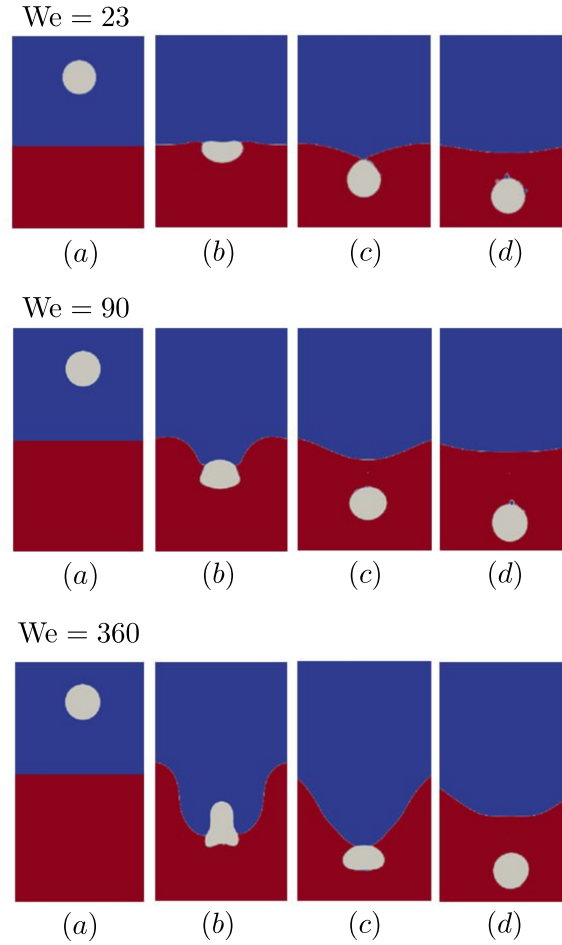


Рис. 2. Эволюция полости для различных чисел Вебера в моменты времени: (a) $t = 0$ мс; (b) $t = 10$ мс; (c) $t = 20$ мс; (d) $t = 30$ мс

сом сил поверхностного натяжения, которые стремятся минимизировать площадь поверхности, и инерции жидкости. Характерное время этих колебаний оценивается по формуле $\tau_{in} \sim \sqrt{\rho_o R_c^3 / \sigma_{o-a}}$ [13]. Если оценить размер полости как $R_c = D_d$, то время τ_{in} составляет приблизительно 20 мс, что согласуется с результатами численного моделирования для скорости удара 0.5 м/с. Таким образом, характерное время вязкого затухания капиллярных колебаний $\tau_{visc} \sim \mu_o R_c / \sigma_{o-a}$ на порядок меньше ($\tau_{visc} \approx 2$ мс), чем капиллярно-инерционный временной масштаб τ_{in} . Это означает, что вязкие силы в масле не оказывают существенного влияния на схлопывание полости. Вместо этого время её существования в первую очередь определяется балансом инерционных и капиллярных сил.

Для смешивающихся жидкостей предположение о полусферической форме полости является широко используемой гипотезой, подтверждённой как экспериментальными наблюдениями [14], так и теоретическим анализом [2]. Например, в исследовании [15] предположение о полусферичности полости используется при энергетическом анализе процесса:

$$8 \left(\frac{H_m}{D_d} \right)^4 + 4 \left(\frac{H_m}{l_c} \right)^2 = \left(\frac{D_d}{l_c} \right)^2 \left(\frac{We}{12} + 1 \right), \quad (5)$$

где l_c — капиллярная длина. В результате получается соотношение для максимальной глубины

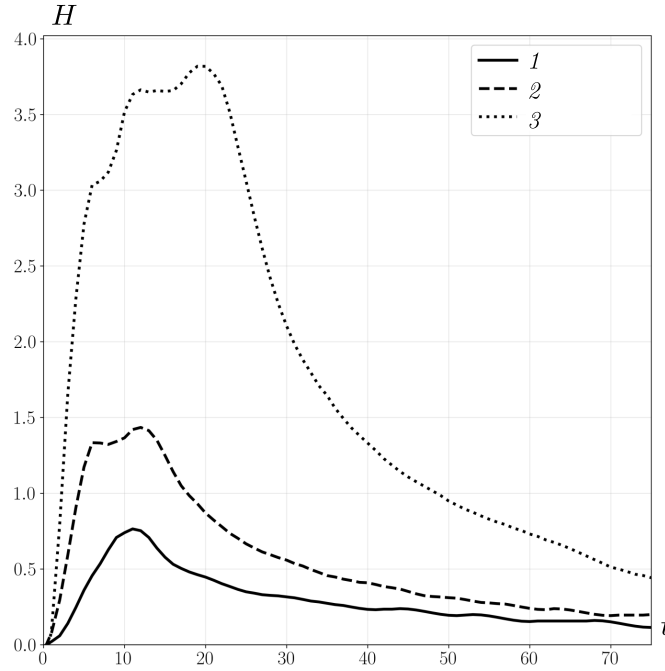


Рис. 3. Зависимость глубины полости H (мм) от времени для различных скоростей падения: $U_d = 0.5$ м/с (кривая 1); $U_d = 1$ м/с (кривая 2); $U_d = 2$ м/с (кривая 3)

полости в безразмерном виде:

$$H_m = l_c \left[\sqrt{1 + 2 \left(\frac{D_d}{l_c} \right)^2 \left(\frac{We}{12} + 1 \right)} - 1 \right]^{1/2}. \quad (6)$$

При сравнении с результатами численного моделирования аналитическая модель (5) для смешивающихся жидкостей переоценивает максимальную глубину полости при низких числах We (23–90). Это связано с тем, что она не учитывает сильное влияние границы раздела несмешивающихся жидкостей на диссипацию энергии и форму полости (см. рис. 4).

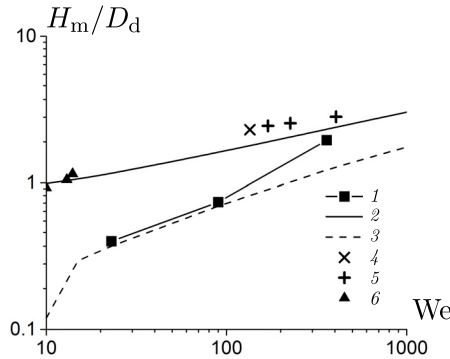


Рис. 4. Зависимость безразмерной максимальной глубины H_m/D_d от числа Вебера We :
1 — моделирование; 2 — аналитическая модель [15]; 3 — аналитическая модель [17];
4 — эксперимент [15]; 5 — эксперимент [14]; 6 — эксперимент [18]

При числе Вебера $We = 360$ этот эффект уменьшается, и результаты сходятся, поскольку инерция начинает доминировать над силами поверхностного натяжения [16]. Расчёт глубины полости с использованием модели из [17] для несмешивающихся жидкостей даёт меньшую

глубину полости во всём исследуемом диапазоне чисел Вебера, что согласуется с результатами численного моделирования.

Помимо числа Вебера, другим ключевым параметром, определяющим динамику процесса, является число Онезорге $Oh = \mu / \sqrt{\sigma_{w-o} \rho D_d}$, которое характеризует баланс между вязкими и капиллярными силами. В нашем случае для системы вода-масло-воздух оценка числа Онезорге по свойствам масла даёт значение $Oh \approx 0.1$. Это указывает на значительное влияние как вязких, так и капиллярных сил, что согласуется с наблюдаемой сильной диссипацией энергии и отсутствием вторичного разбрызгивания [15]. Число Фруда $Fr = U_d^2 / (g D_d)$, которое оценивает отношение инерционных сил к гравитационным, находится в диапазоне от $Fr = 13$ до 210 для исследуемых скоростей удара $U_d = 0.5\text{--}2\text{ м/с}$, подтверждая доминирование инерционных сил над гравитационными. Однако вязкость масла достаточна для быстрого затухания инерционных движений и эффективного подавления капиллярных неустойчивостей, которые в системах с меньшей вязкостью могли бы приводить к образованию вторичных капель и разбрызгиванию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном исследовании с помощью трёхмерного численного моделирования в пакете Basilisk, основанном на методе объёма жидкости (VOF) с адаптивным измельчением сетки, изучалось воздействие капли воды на слой масла. Было исследовано влияние скорости удара, характеризующейся числом Вебера (We) в диапазоне 23–360, на динамику образования и схлопывания полости. С увеличением We наблюдался переход от режима, определяемого капиллярными силами, к инерционному режиму. При низких скоростях ($We = 23$) образуется неглубокая, быстро схлопывающаяся полость. При $We = 90$ капля действует подобно поршню, создавая отчётливую полость. При высоком $We = 360$ возникают нелинейные эффекты: за счёт радиального смещения жидкости формируется глубокая сферическая полость, однако погружение капли замедляется.

Сравнение с аналитической моделью для смешивающихся жидкостей показало, что она переоценивает глубину полости при низких и средних числах We (23–90). Это расхождение объясняется тем, что модель не учитывает влияние границы раздела вода-масло на диссипацию энергии. Различия уменьшаются при $We = 360$, когда инерционные силы начинают доминировать над капиллярными. Ключевыми безразмерными параметрами являются число Онезорге ($Oh \approx 0.1$), подтверждающее совместное влияние вязких и капиллярных сил, и число Фруда ($Fr = 13\text{--}210$), указывающее на доминирование инерции над гравитацией. Высокая вязкость масла в сочетании с межфазным натяжением подавляет капиллярные неустойчивости, предотвращая тем самым вторичное разбрызгивание. В заключение, динамика полости при ударе о несмешивающуюся жидкость качественно и количественно отличается от случая однородной среды. Режим взаимодействия, определяемый числом Вебера, является ключевым фактором, определяющим эволюцию полости.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-79-10246-П). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rein M. Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces // Fluid Dynamics Research. 1993. V. 12, N 2. P. 61–93; DOI: 10.1016/0169-5983(93)90106-K
2. Prosperetti A., Oguz H.N. The impact of drops on liquid surfaces and the underwater noise of rain // Annual Review of Fluid Mechanics. 1993. V. 25, N 1. P. 577–602; DOI: 10.1146/annurev.fl.25.010193.003045
3. Vozhakov I.S., Misyura S.Y., Morozov V.S., Piskunov M.V., Piskunova A.E., Orlova E.G., Mullyadzhyanov R.I. High-speed droplet impact on solid surfaces: review on the prospects of modeling fluid flow // Experiments in Fluids. 2025. V. 66, N 3. Article number C-65; DOI: 10.1007/s00348-025-03982-w
4. Worthington A.M. A Study of Splashes. London: Longmans, Green, and Company, 1908.
5. Cherdantsev A., Vozhakov I. Fast droplets impacting liquid layer under a small angle: a numerical analysis of experimental observations // Internat. J. Multiphase Flow. 2024. V. 175. Article number 104826; DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2024.104826
6. Ray B., Biswas G., Sharma A. Generation of secondary droplets in coalescence of a drop with a liquid surface // J. Fluid Mechanics. 2015. V. 768. P. 492–523; DOI: 10.1017/jfm.2015.93
7. Yarin A.L. Drop impact dynamics: splashing, spreading, receding, bouncing... // Annual Review of Fluid Mechanics. 2006. V. 38, N 1. P. 159–192; DOI: 10.1146/annurev.fluid.38.050304.092144
8. Popinet S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows // J. Comput. Physics. 2009. V. 228, N 16. P. 5838–5866; DOI: 10.1016/j.jcp.2009.04.042
9. Scardovelli R., Zaleski S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow // Annual Review of Fluid Mechanics. 1999. V. 31, N 1. P. 567–603; DOI: 10.1146/annurev.fluid.31.1.567
10. Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // J. Comput. Physics. 1992. V. 100, N 2. P. 335–354; DOI: 10.1016/0021-9991(92)90240-Y
11. Vozhakov I., Hrebtov M., Yavorsky N., Mullyadzhyanov R. Two-component swirling jet atomization with static vortex generators // Physics of Fluids. 2025. V. 37, N 7; DOI: 10.1063/5.0251986
12. Apostol Y.S., Vozhakov I.S., Hrebtov M.Y., Mullyadzhyanov R. I. Direct numerical simulation of two-component swirling jet atomization // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2024. V. 12, N 4. P. 4–11; DOI: 10.32523/2306-6172-2024-12-4-4-11
13. Rayleigh L. On the capillary phenomena of jets // Proceedings of the Royal Society of London. 1879. V. 29. P. 71–97; DOI: 10.1098/rspl.1879.0015
14. Bisighini A., Cossali G.E., Caserta C.M., Guido S. Crater evolution after the impact of a drop onto a semi-infinite liquid target // Physical Review E. 2010. V. 82, N 3. Article number 036319; DOI: 10.1103/PhysRevE.82.036319
15. Fedorchenko A.I., Wang A.B. On some common features of drop impact on liquid surfaces // Physics of Fluids. 2004. V. 16, N 5. P. 1349–1365; DOI: 10.1063/1.1652061
16. Mohasan M., Lv P., Duan H. Cavity dynamics of water drop impact onto immiscible oil pool with different viscosity // Acta Mechanica Sinica. 2021. V. 37, N 3. P. 447–455; DOI: 10.1007/s10409-021-01070-4
17. Liu S., Wang G., Liu L., Wang S. Energy conversion and cavity depth model in droplet impact on an immiscible deep pool: A generalized analysis approach // Physical Review Fluids. 2026. V. 11, N 1. Article number 014004; DOI: 10.1103/PhysRevFluids.11.014004
18. Tang X., Saha A., Law C. K., Sun C. Nonmonotonic response of drop impacting on liquid film: mechanism and scaling // Soft Matter. 2016. V. 12, N 20. P. 4521–4529; DOI: 10.1039/C6SM00251J

UDC 532.5

NUMERICAL STUDY OF CAVITY DYNAMICS FROM A WATER DROPLET IMPACTING AN OIL LAYER

© 2026 A. A. Lukyanov^a, I. S. Vozhakov^b, R. I. Mullyadzhyanov^c*Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS,
Acad. Lavrentyev prosp., 1, Novosibirsk 630090, Russia*E-mails: ^aa.lukyanov1@g.nsu.ru, ^bvozhakov@gmail.com, ^cr.mullyadzhyanov@g.nsu.ru

Received 09.09.2025, revised 21.11.2025, accepted 13.05.2026

Abstract. The effect of collision velocity on cavity dynamics during the impact of a water droplet on an oil layer was investigated using three-dimensional numerical simulations in the Basilisk software package. Using the volume-of-fluid method with adaptive mesh refinement and taking surface tension forces into account, regimes were studied for Weber numbers $We = 23\text{--}360$. It was found that with increasing We , a transition occurs from the capillary collapse regime of the cavity, described by the classical inertial-capillary time scale, to a regime where hydrostatic pressure and viscous dissipation forces play a dominant role.

Keywords: droplet impact, deep pool, immiscible liquids, Basilisk.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.204

REFERENCES

1. Rein M. Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces. *Fluid Dynamics Research*, 1993, Vol. 12, No. 2, pp. 61–93; DOI: 10.1016/0169-5983(93)90106-K
2. Prosperetti A., Oguz H.N. The impact of drops on liquid surfaces and the underwater noise of rain. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1993, Vol. 25, No. 1, pp. 577–602; DOI: 10.1146/annurev.fl.25.010193.003045
3. Vozhakov I.S., Misyura S.Y., Morozov V.S., Piskunov M.V., Piskunova A.E., Orlova E.G., Mullyadzhyanov R.I. High-speed droplet impact on solid surfaces: review on the prospects of modeling fluid flow. *Experiments in Fluids*, 2025, Vol. 66, No. 3, Article number C-65; DOI: 10.1007/s00348-025-03982-w
4. Worthington A.M. A Study of Splashes. London: Longmans, Green, and Company, 1908.
5. Cherdantsev A., Vozhakov I. Fast droplets impacting liquid layer under a small angle: a numerical analysis of experimental observations. *Internat. J. Multiphase Flow*, 2024, Vol. 175, Article number 104826; DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2024.104826
6. Ray B., Biswas G., Sharma A. Generation of secondary droplets in coalescence of a drop with a liquid surface. *J. Fluid Mechanics*, 2015, Vol. 768, pp. 492–523; DOI: 10.1017/jfm.2015.93
7. Yarin A.L. Drop impact dynamics: splashing, spreading, receding, bouncing. . . . *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2006, Vol. 38, No. 1, pp. 159–192; DOI: 10.1146/annurev.fluid.38.050304.092144
8. Popinet S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *J. Comput. Physics*, 2009, Vol. 228, No. 16, pp. 5838–5866; DOI: 10.1016/j.jcp.2009.04.042
9. Scardovelli R., Zaleski S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1999, Vol. 31, No. 1, pp. 567–603; DOI: 10.1146/annurev.fluid.31.1.567

10. Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Physics*, 1992, Vol. 100, No. 2, pp. 335–354; DOI: 10.1016/0021-9991(92)90240-Y
11. Vozhakov I., Hrebtov M., Yavorsky N., Mullyadzhhanov R. Two-component swirling jet atomization with static vortex generators. *Physics of Fluids*, 2025, Vol. 37, No. 7; DOI: 10.1063/5.0251986
12. Apostol Y.S., Vozhakov I.S., Hrebtov M.Y., Mullyadzhhanov R. I. Direct numerical simulation of two-component swirling jet atomization. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2024, Vol. 12, No. 4, pp. 4–11; DOI: 10.32523/2306-6172-2024-12-4-4-11
13. Rayleigh L. On the capillary phenomena of jets. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1879, Vol. 29, pp. 71–97; DOI: 10.1098/rspl.1879.0015
14. Bisighini A., Cossali G.E., Caserta C.M., Guido S. Crater evolution after the impact of a drop onto a semi-infinite liquid target. *Physical Review E*, 2010, Vol. 82, No. 3, Article number 036319; DOI: 10.1103/PhysRevE.82.036319
15. Fedorchenko A.I., Wang A.B. On some common features of drop impact on liquid surfaces. *Physics of Fluids*, 2004, Vol. 16, No. 5, pp. 1349–1365; DOI: 10.1063/1.1652061
16. Mohasan M., Lv P., Duan H. Cavity dynamics of water drop impact onto immiscible oil pool with different viscosity. *Acta Mechanica Sinica*, 2021, Vol. 37, No. 3, pp. 447–455; DOI: 10.1007/s10409-021-01070-4
17. Liu S., Wang G., Liu L., Wang S. Energy conversion and cavity depth model in droplet impact on an immiscible deep pool: A generalized analysis approach. *Physical Review Fluids* 2026, Vol. 11, No. 1, Article number 014004; DOI: 10.1103/PhysRevFluids.11.014004
18. Tang X., Saha A., Law C. K., Sun C. Nonmonotonic response of drop impacting on liquid film: mechanism and scaling. *Soft Matter*, 2016, Vol. 12, No. 20, pp. 4521–4529; DOI: 10.1039/C6SM00251J

УДК 539.3:517.958

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ И ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОМЕНТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНОГО ПСЕВДОКОНТИНУУМА КОССЕРА К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

© 2026 Н. И. Остросаблин

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: o.n.ii@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.06.2024 г.; после доработки 12.09.2025 г.;
принята к публикации 15.06.2026 г.

Трёхмерная система дифференциальных уравнений четвёртого порядка моментной линейной теории упругости в смещениях изотропного псевдоконтинуума Коссера представлена в виде объединения автоморфной системы третьего порядка и разрешающей системы первого порядка. Решение разрешающей системы выражено через четыре гармонические функции. Для системы в смещениях найдено два варианта представления общего решения через три функции, удовлетворяющих трём независимым уравнениям, т. е. система диагоназируется. Приведены формулы производства новых решений (операторы симметрии), позволяющие путём дифференцирования из какого-либо заданного решения находить новые решения исходных уравнений. С использованием представления решения разрешающей системы через гармонические функции получается представление смещений в статике через гармонические функции и для классической изотропной упругой среды.

Ключевые слова: моментная теория упругости, псевдоконтинуум Коссера, общие решения, операторы симметрии, диагональная система, стеснённое вращение, несимметричные тензоры напряжений и деформаций.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.205

ВВЕДЕНИЕ И ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Моментная линейная теория упругости позволяет более адекватно, чем классическая линейная теория упругости, описывать деформирование упругих тел при больших градиентах напряжений, деформирование волокнистых, зернистых, полимерных материалов и других различных композитных материалов. Моментная упругая среда представляется совокупностью частиц, характеризующихся в декартовой прямоугольной системе координат x_i , $i = 1, 2, 3$, вектором смещений u_i и независимым вектором поворотов ω_i (см. [1–3]). Такая теория впервые была предложена в начале 20 века в работах братьев Коссера [1]. В моментной среде при нагружении возникают несимметричные силовые напряжения $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ и моментные напряжения $\mu_{ij} \neq \mu_{ji}$. Уравнения равновесия для моментной среды имеют вид (см. [1–3]) (по повторяющимся индексам проводится суммирование)

$$\partial_j \sigma_{ij} + F_i = 0; \quad (1)$$

$$\partial_j \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kj} + M_i = 0, \quad (2)$$

где ∂_j — производная по координате x_j ; ε_{ijk} — кососимметричный по любой паре индексов тензор Леви-Чивиты; F_i — вектор объёмных сил; M_i — вектор объёмных моментов. Вектор

силовых напряжений p_i на площадке с нормалью n_i и вектор моментных напряжений m_i на этой площадке определяются формулами Коши

$$\sigma_{ij}n_j = p_i, \quad \mu_{ij}n_j = m_i. \quad (3)$$

Деформированное состояние моментной среды характеризуют несимметричные тензоры деформации e_{ij} и кручения-изгиба $\varkappa_{ij}$ (см. [1–3]):

$$e_{ij} = \partial_j u_i - \omega_{ij}, \quad \varkappa_{ij} = \partial_j \omega_i, \quad (4)$$

где

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{21} & -\omega_{31} \\ \omega_{21} & 0 & -\omega_{32} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\omega_k, \quad \omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{kj}.$$

Формулы (5) связывают кососимметричный тензор ω_{ij} и вектор ω_i . Определяющие уравнения для упругой изотропной моментной среды записываются в виде (см. [1, 2])

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + (\mu + \alpha)e_{ij} + (\mu - \alpha)e_{ji}, \quad \mu_{ij} = \beta \varkappa_{kk}\delta_{ij} + (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\varkappa_{ji}, \quad (6)$$

где λ, μ — постоянные Ламе; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — дополнительные постоянные упругости; δ_{ij} — символ Кронекера, единичная матрица. Если постоянные в (6) удовлетворяют неравенствам (см. [2])

$$3\lambda + 2\mu \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad \alpha \neq 0; \quad 3\beta + 2\gamma \neq 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \varepsilon \neq 0,$$

то соотношения (6) обратимы

$$e_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\alpha}\right)\sigma_{ij} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\alpha}\right)\sigma_{ji},$$

$$\varkappa_{ij} = \frac{-\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)}\mu_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\varepsilon}\right)\mu_{ij} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\varepsilon}\right)\mu_{ji}.$$

Удельная энергия деформации имеет вид (см. [1, 2])

$$2\Phi = \sigma_{ij}e_{ij} + \mu_{ij}\varkappa_{ij} =$$

$$= \lambda e_{kk}e_{ii} + (\mu + \alpha)e_{ij}e_{ij} + (\mu - \alpha)e_{ji}e_{ij} + \beta \varkappa_{kk}\varkappa_{ii} + (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{ij}\varkappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\varkappa_{ji}\varkappa_{ij}. \quad (7)$$

Квадратичная форма (7) от восемнадцати переменных $e_{ij}, \varkappa_{ij}$ должна быть положительно определённой. Проверка положительной определённости формы (7) в (см. [2, 4]) проводится с помощью вычисления восемнадцати определителей главных миноров матрицы формы (7). Но условия на коэффициенты формы (7) можно получить без вычисления определителей. Для этого необходимо из тензоров $e_{ij}, \varkappa_{ij}$ выделить неприводимые составляющие. Перепишем форму (7)

$$2\Phi = \lambda e_{kk}e_{ii} + 2\mu e_{(ij)}e_{(ij)} + 2\alpha e_{[ij]}e_{[ij]} + \beta \varkappa_{kk}\varkappa_{ii} + 2\gamma \varkappa_{(ij)}\varkappa_{(ij)} + 2\varepsilon \varkappa_{[ij]}\varkappa_{[ij]}$$

$$= \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)e_{kk}e_{ii} + 2\mu\left(e_{(ij)} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right)\left(e_{(ij)} - \frac{1}{3}e_{ss}\delta_{ij}\right) + 2\alpha e_{[ij]}e_{[ij]}$$

$$+ \frac{1}{3}(3\beta + 2\gamma)\varkappa_{kk}\varkappa_{ii} + 2\gamma\left(\varkappa_{(ij)} - \frac{1}{3}\varkappa_{kk}\delta_{ij}\right)\left(\varkappa_{(ij)} - \frac{1}{3}\varkappa_{ss}\delta_{ij}\right) + 2\varepsilon \varkappa_{[ij]}\varkappa_{[ij]}. \quad (8)$$

Круглые и квадратные скобки в индексах означают симметричную и антисимметричную части тензоров по соответствующим индексам. Из последних выражений (8) очевидно, что $2\Phi > 0$ всегда, когда постоянные удовлетворяют неравенствам

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad \alpha > 0; \quad 3\beta + 2\gamma > 0, \quad \gamma > 0, \quad \varepsilon > 0.$$

В [4] кроме этих неравенств приведено ещё два лишних неравенства, в обозначениях из [4]: $\mu - \gamma > 0$, $\vartheta > 0$. В наших обозначениях $\mu - \gamma = \mu + \alpha > 0$, $\vartheta = \gamma + \varepsilon > 0$ эти неравенства всегда выполняются. Так как квадратичная форма (7) записана в виде (8) суммы квадратов независимых переменных с коэффициентами при этих квадратах, то коэффициенты являются собственными значениями соответствующей кратности матрицы формы (7)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3\lambda + 2\mu, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 2\mu, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 4\alpha, \\ \lambda_{10} &= 3\beta + 2\gamma, \quad \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{15} = 2\gamma, \quad \lambda_{16} = \lambda_{17} = \lambda_{18} = 4\varepsilon, \end{aligned}$$

причём должно быть $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, 18}$.

Теперь, учитывая запись (8), можно переписать определяющие соотношения (6) в виде отдельных независимых выражений

$$\begin{aligned} \sigma_{kk} &= (3\lambda + 2\mu)e_{kk}, \quad \sigma_{(ij)} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = 2\mu\left(e_{(ij)} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}\right), \quad \sigma_{[ij]} = 2\alpha e_{[ij]}, \\ \mu_{kk} &= (3\beta + 2\gamma)\varkappa_{kk}, \quad \mu_{(ij)} - \frac{1}{3}\mu_{kk}\delta_{ij} = 2\gamma\left(\varkappa_{(ij)} - \frac{1}{3}\varkappa_{kk}\delta_{ij}\right), \quad \mu_{[ij]} = 2\varepsilon\varkappa_{[ij]}. \end{aligned}$$

Из последних соотношений очевидна их обратимость и ограничения на постоянные.

В упрощённой теории Коссера считают, что вектор поворота (5) равен среднему повороту поля перемещений (см. [1])

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\partial_k u_l, \quad (9)$$

т. е. имеем стеснённое вращение

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3), \quad \omega_3 = \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1).$$

Тогда тензоры (4) принимают вид

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j), \quad \varkappa_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\partial_j u_l, \quad \varkappa_{ii} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\partial_{ik} u_l = 0. \quad (10)$$

Из (6) находим симметричную часть тензора напряжений

$$\sigma_{(ij)} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad (11)$$

а из (2), считая $M_i = 0$, получаем несимметричную часть

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = \partial_j \mu_{1j}, \quad \sigma_{31} - \sigma_{13} = \partial_j \mu_{2j}, \quad \sigma_{12} - \sigma_{21} = \partial_j \mu_{3j}. \quad (12)$$

Из второго уравнения (6) с учётом (4), (10) получаем моментные напряжения

$$\mu_{ij} = (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\varkappa_{ji} = \gamma(\partial_j \omega_i + \partial_i \omega_j) + \varepsilon(\partial_j \omega_i - \partial_i \omega_j), \quad (13)$$

которые подставим в формулы (12):

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = (\gamma + \varepsilon)\partial_{jj}\omega_1, \quad \sigma_{31} - \sigma_{13} = (\gamma + \varepsilon)\partial_{jj}\omega_2, \quad \sigma_{12} - \sigma_{21} = (\gamma + \varepsilon)\partial_{jj}\omega_3. \quad (14)$$

С учётом (9)–(11), (14) находим выражения напряжений через смещения

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\partial_1 u_1 + \lambda(\partial_2 u_2 + \partial_3 u_3), & \sigma_{12} &= \mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) + \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_3, \\
 \sigma_{21} &= \mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) - \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_3, & \sigma_{22} &= (\lambda + 2\mu)\partial_2 u_2 + \lambda(\partial_1 u_1 + \partial_3 u_3), \\
 \sigma_{31} &= \mu(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) + \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_2, & \sigma_{32} &= \mu(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) - \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_1, \\
 \sigma_{13} &= \mu(\partial_3 u_1 + \partial_1 u_3) - \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_2, \\
 \sigma_{23} &= \mu(\partial_3 u_2 + \partial_2 u_3) + \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\omega_1, \\
 \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu)\partial_3 u_3 + \lambda(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя напряжения (15) в уравнения равновесия (1) без учёта объёмных сил, получим три уравнения для трёх смещений (см. [1]):

$$\mu\partial_{kk}u_i + (\lambda + \mu)\partial_{ik}u_k + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\varepsilon_{imn}\partial_m\varepsilon_{njl}\partial_j u_l = 0. \tag{16}$$

Слагаемые со вторыми производными в (16) соответствуют классическим уравнениям Ламе, а слагаемые с четвёртыми производными отвечают за моментное состояние псевдоконтинуума Коссера. К уравнениям (16) добавляют граничные условия в напряжениях (3) или задают на границе рассматриваемой области смещения. Вопрос о граничных условиях для системы (16) и способы её интегрирования кратко обсуждаются в [1]. Определив из (16) смещения u_i по формулам (9), (13), (15), получим ω_i , μ_{ij} , σ_{ij} .

1. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ (16) К СИСТЕМЕ МОИСИЛА — ТЕОДОРЕСКУ

Используя известное соотношение

$$\partial_{kk}u_i = \partial_{ik}u_k - \varepsilon_{imn}\partial_m\varepsilon_{njl}\partial_j u_l,$$

уравнение (16) можно переписать в виде

$$(\lambda + 2\mu)\partial_{ik}u_k + \left[\frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} - \mu\right]\varepsilon_{imn}\partial_m\varepsilon_{njl}\partial_j u_l = 0$$

или с учётом (9)

$$(\lambda + 2\mu)\partial_{ik}u_k + \left[\frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} - 2\mu\right]\varepsilon_{imn}\partial_m\omega_n = 0. \tag{17}$$

Введём обозначения

$$(\lambda + 2\mu)\partial_k u_k = \psi, \quad \left[2\mu - \frac{1}{2}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\right]\omega_n = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\right]\varepsilon_{njl}\partial_j u_l = \varphi_n. \tag{18}$$

В системе (18) четыре уравнения для трёх функций u_k , т. е. функции в правой части (18) должны удовлетворять условиям совместности. Условием совместности является соотношение

$$\partial_n \varphi_n = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\right]\varepsilon_{njl}\partial_{nj} u_l = 0. \tag{19}$$

С учётом обозначений (18) уравнения (17) принимают вид

$$\partial_i \psi - \varepsilon_{imn} \partial_m \varphi_n = 0. \quad (20)$$

Система вида (18) в [5] названа автоморфной системой, а уравнения вида (19), (20) названы разрешающей системой. В [5] эти системы исследуются методами группового анализа.

Запишем систему (19), (20) подробнее:

$$\begin{aligned} \partial_1 \psi + \partial_3 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_3 &= 0, & \partial_2 \psi - \partial_3 \varphi_1 + \partial_1 \varphi_3 &= 0, \\ \partial_3 \psi + \partial_2 \varphi_1 - \partial_1 \varphi_2 &= 0, & \partial_1 \varphi_1 + \partial_2 \varphi_2 + \partial_3 \varphi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

или в матричном виде

$$M\varphi = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ \partial_2 & -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_3 & \partial_2 & -\partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (21a)$$

Здесь матрицу системы обозначили через M . Система (21) известна как система Моисила — Теодореску (см. [6, 7]). Её решения связаны с решениями классических уравнений Ламе [6] и, как следует из (17), (18), с решениями уравнений (16) псевдоконтинуума Коссера. Находим транспонированную матрицу

$$M' = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \\ 0 & -\partial_3 & \partial_2 & \partial_1 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 & \partial_3 \end{bmatrix}.$$

Имеет место соотношение

$$M'M = \begin{bmatrix} \partial_{kk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{kk} \end{bmatrix} = MM', \quad (22)$$

т. е. матрицы M и M' перестановочны и их произведение равно диагональной матрице $\partial_{kk}\delta_{ij}$. Решение системы (21), (21a) представим в виде

$$\varphi = M'\psi, \quad M\varphi = MM'\psi = \partial_{kk}\delta_{ij}\psi_j = \partial_{kk}\psi_i = 0,$$

или в развёрнутой записи

$$\begin{aligned} \psi &= \partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3, & \varphi_1 &= -\partial_3 \psi_2 + \partial_2 \psi_3 + \partial_1 \psi_4, \\ \varphi_2 &= \partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 + \partial_2 \psi_4, & \varphi_3 &= -\partial_2 \psi_1 + \partial_1 \psi_2 + \partial_3 \psi_4, & \partial_{kk}\psi_i &= 0; \end{aligned} \quad (23)$$

т. е. решение (23) системы (21), (21a) выражается через четыре произвольные гармонические функции ψ_i , $i = \overline{1, 4}$. Но и сами функции ψ , φ_i , очевидно, являются гармоническими функциями, из (21a), (22) следует

$$M'M\varphi = \begin{bmatrix} \partial_{kk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Для случая плоской деформации $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = 0$, тогда из (18) получаем

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) &= \psi, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \\ \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)(\partial_{11} + \partial_{22}) \right] (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) &= \varphi_3, \end{aligned}$$

и система (21) принимает вид условий (уравнений) Коши — Римана

$$\partial_1 \psi - \partial_2 \varphi_3 = 0, \quad \partial_2 \psi + \partial_1 \varphi_3 = 0, \quad \partial_3 \psi = 0, \quad \partial_3 \varphi_3 = 0$$

для аналитической функции $\varphi(z) = \psi + i\varphi_3$, $i = \sqrt{-1}$ комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$. Таким образом, система (21) является обобщением системы Коши — Римана на трёхмерный случай.

2. ВЫРАЖЕНИЕ СМЕЩЕНИЙ В СЛУЧАЕ КЛАССИЧЕСКОГО ИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Если в (18) не учитывать моментные слагаемые, то с помощью решения уравнений (23) относительно функций ψ_i , можно получить выражение смещений u_i через гармонические функции ψ_i для случая классического изотропного материала. Решение системы (23) в этом случае будет следующее (см. [8]):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= a(bu_1 + x_1\psi + x_2\varphi_3 - x_3\varphi_2), \quad \psi_2 = a(bu_2 + x_2\psi + x_3\varphi_1 - x_1\varphi_3), \quad a = \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 7\mu}, \\ \psi_3 &= a(bu_3 + x_3\psi + x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1), \quad \psi_4 = a(x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3), \quad b = \frac{4\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из соотношений (24) можно выразить смещения u_i через ψ_i :

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{b} \left(-\frac{1}{a}\psi_1 + x_1\psi + x_2\varphi_3 - x_3\varphi_2 \right), \quad u_2 = -\frac{1}{b} \left(-\frac{1}{a}\psi_2 + x_2\psi + x_3\varphi_1 - x_1\varphi_3 \right), \\ u_3 &= -\frac{1}{b} \left(-\frac{1}{a}\psi_3 + x_3\psi + x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляем в (25) выражения (23)

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{b} \left[-\frac{1}{a}\psi_1 + x_1(\partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3) + \right. \\ &\quad \left. + x_2(-\partial_2 \psi_1 + \partial_1 \psi_2 + \partial_3 \psi_4) - x_3(\partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 + \partial_2 \psi_4) \right], \\ u_2 &= -\frac{1}{b} \left[-\frac{1}{a}\psi_2 + x_2(\partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3) + \right. \\ &\quad \left. + x_3(-\partial_3 \psi_2 + \partial_2 \psi_3 + \partial_1 \psi_4) - x_1(-\partial_2 \psi_1 + \partial_1 \psi_2 + \partial_3 \psi_4) \right], \quad (26) \\ u_3 &= -\frac{1}{b} \left[-\frac{1}{a}\psi_3 + x_3(\partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3) + \right. \\ &\quad \left. + x_1(\partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 + \partial_2 \psi_4) - x_2(-\partial_3 \psi_2 + \partial_2 \psi_3 + \partial_1 \psi_4) \right], \quad \partial_{kk}\psi_i = 0. \end{aligned}$$

Имеет место ещё четвёртое соотношение (24)

$$\psi_4 = a[x_1(-\partial_3\psi_2 + \partial_2\psi_3 + \partial_1\psi_4) + x_2(\partial_3\psi_1 - \partial_1\psi_3 + \partial_2\psi_4) + x_3(-\partial_2\psi_1 + \partial_1\psi_2 + \partial_3\psi_4)]. \quad (27)$$

Таким образом, в классическом случае смещения u_i по (26) выражаются через четыре гармонические функции ψ_i , которые связаны соотношением (27). Перепишем формулы (26), (27)

$$u_1 = -\frac{1}{b} \left[\left(-\frac{1}{a} + x_1\partial_1 - x_2\partial_2 - x_3\partial_3 \right) \psi_1 + (x_1\partial_2 + x_2\partial_1)\psi_2 + (x_1\partial_3 + x_3\partial_1)\psi_3 + (x_2\partial_3 - x_3\partial_2)\psi_4 \right],$$

$$u_2 = -\frac{1}{b} \left[(x_2\partial_1 + x_1\partial_2)\psi_1 + \left(-\frac{1}{a} - x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - x_3\partial_3 \right) \psi_2 + (x_2\partial_3 + x_3\partial_2)\psi_3 + (x_3\partial_1 - x_1\partial_3)\psi_4 \right], \quad (28)$$

$$u_3 = -\frac{1}{b} \left[(x_3\partial_1 + x_1\partial_2)\psi_1 + (x_3\partial_2 + x_2\partial_3)\psi_2 + \left(-\frac{1}{a} - x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + x_3\partial_3 \right) \psi_3 + (x_2\partial_3 - x_3\partial_2)\psi_4 \right], \quad \partial_{kk}\psi_i = 0,$$

$$\psi_4 = a[(x_2\partial_3 - x_3\partial_2)\psi_1 + (x_3\partial_1 - x_1\partial_3)\psi_2 + (x_1\partial_2 - x_2\partial_1)\psi_3 + (x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3)\psi_4].$$

Представление смещений (28) имеет вид $u_j = C_{jk}\psi_k$, где матрица C_{jk} очевидна из (28). Представление (26)–(28) аналогично известному решению Папковича – Нейбера, в котором смещения u_i выражаются через четыре гармонические функции, связанные между собой одним соотношением [9].

3. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ И ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (16)

С учётом соотношения $\varepsilon_{imn}\varepsilon_{njl} = \delta_{ij}\delta_{ml} - \delta_{il}\delta_{mj}$ матрицу операторов системы (16) запишем в виде

$$A_{ij} = \mu\partial_{kk}\delta_{ij} + (\lambda + \mu)\partial_{ij} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}(\partial_{ij} - \delta_{ij}\partial_{mm}). \quad (29)$$

Для матрицы (29) имеем собственный вектор $t_{j1} = \partial_j$:

$$A_{ij}t_{j1} = \left[\mu\partial_{kk}\delta_{ij} + (\lambda + \mu)\partial_{ij} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}(\partial_{ij} - \delta_{ij}\partial_{mm}) \right] \partial_j = \partial_i[(\lambda + 2\mu)\partial_{kk}]$$

и $D_1 = (\lambda + 2\mu)\partial_{kk}$ – собственное значение (собственный оператор) матрицы (29). Ортогональный вектор t_{j2} к вектору $t_{j1} = \partial_j$ есть $t_{j2} = \varepsilon_{jps}c_p\partial_s$, где c_p – произвольный числовой или операторный с постоянными коэффициентами вектор. Вектор t_{j2} является собственным вектором для матрицы (29):

$$\begin{aligned} A_{ij}t_{j2} &= \left[\mu\partial_{kk}\delta_{ij} + (\lambda + \mu)\partial_{ij} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}(\partial_{ij} - \delta_{ij}\partial_{mm}) \right] \varepsilon_{jps}c_p\partial_s \\ &= \varepsilon_{ips}c_p\partial_s \left[\mu\partial_{kk} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}\partial_{mm} \right] \end{aligned}$$

с собственным значением

$$D_2 = \mu \partial_{kk} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{kk} \partial_{mm} = \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right].$$

Третий собственный вектор можно взять в виде $t_{j3} = c_j \partial_{kk} - c_m \partial_{mj}$:

$$\begin{aligned} A_{ij} t_{j3} &= [\mu \partial_{kk} \delta_{ij} + (\lambda + \mu) \partial_{ij} + \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{kk} (\partial_{ij} - \delta_{ij} \partial_{mm})] (c_j \partial_{kk} - c_m \partial_{mj}) \\ &= (c_i \partial_{kk} - c_m \partial_{mi}) \left[\mu \partial_{kk} - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{kk} \partial_{mm} \right], \end{aligned}$$

т. е. t_{j3} — собственный вектор с собственным значением $D_3 = D_2 = \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right]$.

Для матрицы (29) операторов системы (16) имеют место соотношения

$$AT = TD, \quad T'A = DT', \quad (30)$$

где штрих означает транспонирование матрицы. Тогда общее решение системы (16) имеет вид [9, 10]

$$u = Tv, \quad Dv = f, \quad Tf = 0, \quad (31)$$

где

$$T = [\partial_i, \varepsilon_{ips} c_p \partial_s, c_i \partial_{kk} - c_m \partial_{mi}] = \begin{bmatrix} \partial_1 & c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2 & c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1} \\ \partial_2 & c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3 & c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2} \\ \partial_3 & c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1 & c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3} \end{bmatrix}; \quad (32)$$

$$D = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Первая формула (30) имеет вид вполне аналогичный формуле для числовых матриц. Поэтому операторы D_1 , D_2 , D_3 можно называть и собственными значениями и собственными операторами (см. выше).

Запишем решение (31) с учётом (32), (33):

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_1 v_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) v_2 + (c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1}) v_3, \\ u_2 &= \partial_2 v_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) v_2 + (c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2}) v_3, \\ u_3 &= \partial_3 v_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) v_2 + (c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3}) v_3; \end{aligned} \quad (34)$$

$$(\lambda + 2\mu) \partial_{kk} v_1 = f_1, \quad \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] v_2 = f_2, \quad \partial_{kk} \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon) \partial_{mm} \right] v_3 = f_3; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) f_2 + (c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1}) f_3 &= 0, \\ \partial_2 f_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) f_2 + (c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2}) f_3 &= 0, \\ \partial_3 f_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) f_2 + (c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3}) f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, решение системы (16) по формулам (34) выражается через три функции v_i , которые удовлетворяют трём отдельным независимым уравнениям (35), однородным или неоднородным.

Из [9] и соотношений (30) следует, что если $u = Tv$, где $Dv = 0$, то уравнение (16), (29) удовлетворяется $Au = ATv = TDv = 0$. Если $v = T'\tilde{u}$, где $A\tilde{u} = 0$, то выполняется уравнение $Dv = DT'\tilde{u} = T'A\tilde{u} = 0$. Таким образом, согласно формулам

$$u = Tv, \quad v = T'\tilde{u}, \quad (37)$$

решения уравнений $Au = 0$, $Dv = 0$ переходят друг в друга, и системы эквивалентны [11]. Но чтобы не было потери части решений, в общем случае необходимо в правой части (35) учитывать функции f_i , ядро оператора T (32), (36).

Кроме того, из формул (37) получаем, что если $A\tilde{u} = 0$, то $u = TT'\tilde{u}$ – новое решение: $Au = ATT'\tilde{u} = TDT'\tilde{u} = TT'A\tilde{u} = 0$. Если $D\tilde{v} = 0$, то и $v = T'T\tilde{v}$ – решение: $Dv = DT'T\tilde{v} = T'AT\tilde{v} = T'TD\tilde{v} = 0$. Выражение $u = TT'\tilde{u}$ есть формула производства решений, так как из любого решения $\tilde{u}$ получается новое решение u ; оператор $Q = TT'$ является оператором симметрии в смысле группового анализа [5, 9].

Столбцы матрицы (32) ортогональны:

$$T'T = t_{ip}t_{iq} = \begin{bmatrix} \partial_{jj} & 0 & 0 \\ 0 & c_j c_j \partial_{kk} - c_m c_n \partial_{mn} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{ss}(c_j c_j \partial_{kk} - c_m c_n \partial_{mn}) \end{bmatrix},$$

причём определитель матрицы (32) равен

$$|T| = t_{j3}t_{j3} = (t_{i1}t_{i1})(t_{j2}t_{j2}) = \partial_{ii}(c_j c_j \partial_{kk} - c_m c_n \partial_{mn})$$

и

$$TT' = t_{in}t_{jn} = \partial_{ij} + \varepsilon_{ips}\varepsilon_{jqr}c_p c_q \partial_{sr} + (c_i \partial_{kk} - c_m \partial_{mi})(c_j \partial_{ss} - c_n \partial_{nj}).$$

Из (32) находим транспонированную матрицу

$$T' = \begin{bmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2 & c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3 & c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1 \\ c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1} & c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2} & c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3} \end{bmatrix}$$

и получаем функции v_i через решение исходных уравнений

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_1 \tilde{u}_1 + \partial_2 \tilde{u}_2 + \partial_3 \tilde{u}_3, \\ v_2 &= (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) \tilde{u}_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) \tilde{u}_2 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) \tilde{u}_3, \\ v_3 &= (c_1 \partial_{kk} - c_m \partial_{m1}) \tilde{u}_1 + (c_2 \partial_{kk} - c_m \partial_{m2}) \tilde{u}_2 + (c_3 \partial_{kk} - c_m \partial_{m3}) \tilde{u}_3. \end{aligned}$$

В матрице (32) все три столбца ортогональны друг к другу и третий столбец содержит вторые производные. Но можно взять третий столбец в виде, аналогичном второму столбцу, содержащем первые производные. Тогда вместо матрицы (32) будет матрица вида

$$T = [\partial_i, \varepsilon_{ips}c_p \partial_s, \varepsilon_{imn}\gamma_m \partial_n] = \begin{bmatrix} \partial_1 & c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2 & \gamma_2 \partial_3 - \gamma_3 \partial_2 \\ \partial_2 & c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3 & \gamma_3 \partial_1 - \gamma_1 \partial_3 \\ \partial_3 & c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1 & \gamma_1 \partial_2 - \gamma_2 \partial_1 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

где c_p , γ_m — произвольные ненулевые непропорциональные векторы, при этом определитель

$$|T| = [(c_2 \gamma_3 - c_3 \gamma_2) \partial_1 + (c_3 \gamma_1 - c_1 \gamma_3) \partial_2 + (c_1 \gamma_2 - c_2 \gamma_1) \partial_3] \partial_{kk}$$

не равен нулю [12]. Для случая матрицы (38) также имеют место соотношения (30) и общее решение системы (16) вида (31) с той же диагональной матрицей D (33). Выписываем это решение в явном виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_1 v_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) v_2 + (\gamma_2 \partial_3 - \gamma_3 \partial_2) v_3, \\ u_2 &= \partial_2 v_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) v_2 + (\gamma_3 \partial_1 - \gamma_1 \partial_3) v_3, \\ u_3 &= \partial_3 v_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) v_2 + (\gamma_1 \partial_2 - \gamma_2 \partial_1) v_3, \end{aligned} \quad (39)$$

где функции v_i удовлетворяют трём независимым уравнениям (35), а функции f_i — уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_1 f_1 + (c_2 \partial_3 - c_3 \partial_2) f_2 + (\gamma_2 \partial_3 - \gamma_3 \partial_2) f_3 &= 0, \\ \partial_2 f_1 + (c_3 \partial_1 - c_1 \partial_3) f_2 + (\gamma_3 \partial_1 - \gamma_1 \partial_3) f_3 &= 0, \\ \partial_3 f_1 + (c_1 \partial_2 - c_2 \partial_1) f_2 + (\gamma_1 \partial_2 - \gamma_2 \partial_1) f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Формулы (37) и все другие приведённые выше соотношения между функциями имеют место и в случае матрицы (38). Оператор симметрии $Q = TT'$ дан в явном виде в [12]. Придавая компонентам c_j , γ_j различные значения, можно получить различные варианты общих решений в случаях (32) или (38).

Во втором и третьем уравнениях (35) дифференциальный оператор $D_2 = D_3 = D$ представляет собой произведение оператора Лапласа $D_{(1)} = \partial_{kk}$ и оператора Гельмгольца $D_{(2)} = \mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm}$. Тогда решение однородного уравнения $Dv = D_{(1)}D_{(2)}v = 0$ по теореме Боджо [1] можно представить в виде суммы $v = g + h$, где g — гармоническая функция $D_{(1)}g = \partial_{kk}g = 0$, а функция h удовлетворяет уравнению Гельмгольца $D_{(2)}h = [\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm}]h = 0$. Различные частные решения уравнений Лапласа и Гельмгольца приведены в [13]. Таким образом, общее решение уравнений в смещениях (16) псевдоконтинуума Коссера по формулам (34)–(36), (39), (40) выражается через гармонические функции и функции Гельмгольца. По формуле $u = TT'\tilde{u}$, $A\tilde{u} = 0$ получаются новые решения из любого известного решения $\tilde{u}$. Если постоянная $\gamma + \varepsilon = 0$, то полученные решения (34)–(36), (39), (40) переходят в известные представления для случая классического изотропного материала [9, 10, 12].

4. ПРИМЕНЕНИЕ РЕШЕНИЯ (23) СИСТЕМЫ МОИСИЛА — ТЕОДОРЕСКУ

Возможен ещё один подход к построению решения уравнений (16). Формулы (18), (23) можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} \partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2 + \partial_3 \psi_3 &= \psi = (\lambda + 2\mu)(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3), \\ -\partial_3 \psi_2 + \partial_2 \psi_3 + \partial_1 \psi_4 &= \varphi_1 = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2), \\ \partial_3 \psi_1 - \partial_1 \psi_3 + \partial_2 \psi_4 &= \varphi_2 = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] (\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3), \\ -\partial_2 \psi_1 + \partial_1 \psi_2 + \partial_3 \psi_4 &= \varphi_3 = \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1). \end{aligned} \quad (41)$$

Система (41) содержит четыре уравнения и семь неизвестных ψ_i , u_i и записана в виде

$$A\psi = Bu, \quad (42)$$

где матрицы $A = M'$ и B очевидны из (41). Для решения системы вида (42) необходимо найти матрицы C и D , такие, что $AC = BD$, тогда решение будет следующее [14]

$$\psi = Cv, \quad u = Dv + w, \quad Bw = 0, \quad (43)$$

где v — произвольный трёхмерный вектор. Чтобы получить все варианты решений, необходимо выбирать из семи неизвестных ψ_i, u_i по четыре неизвестных, оставляя их слева, а остальные неизвестные переносить вправо. При этом получим все варианты систем вида (42). Всего вариантов может быть $C_7^4 = 7!/(4!3!) = 35$. Допустимы те варианты, для которых $|A| \neq 0$ [14].

Рассмотрим для примера вариант 1)(1, 2, 3, 4; 5, 6, 7), соответствующий системе (41). Числами в скобках занумерованы неизвестные $(\psi_i; u_i)$. Для этого варианта определитель $|A| = |M'| = \partial_{ss}\partial_{kk} \neq 0$. Система Моисила — Теодореску (21a) имеет вид $M\varphi = 0$, где (см. (18) и (41))

$$\varphi = \begin{bmatrix} \psi \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_1 & (\lambda + 2\mu)\partial_2 & (\lambda + 2\mu)\partial_3 \\ 0 & -\tilde{\partial}_{kk}\partial_3 & \tilde{\partial}_{kk}\partial_2 \\ \tilde{\partial}_{kk}\partial_3 & 0 & -\tilde{\partial}_{kk}\partial_1 \\ -\tilde{\partial}_{kk}\partial_2 & \tilde{\partial}_{kk}\partial_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = Bu,$$

$$\tilde{\partial}_{kk} = \mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk}.$$

Найдём произведение

$$MB = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ \partial_2 & -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_3 & \partial_2 & -\partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A. \quad (44)$$

Здесь A_{ij} являются элементами матрицы (29) операторов исходной системы (16). С учётом (44) уравнения (16) принимают вид $Au = MBu = 0$. Тогда $Bu = \varphi$, $M\varphi = 0$. Решение последнего уравнения следующее (см. (22), (23)) $\varphi = M'\psi$, $D\psi = 0$, $MM' = D$. Отсюда получаем $M'\psi = Bu$, т. е. систему (41).

Имеют место соотношения

$$M'A = BD, \quad M'MB = BD, \quad DB = BD,$$

$$\begin{bmatrix} \partial_{kk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & 0 & B_{33} \\ B_{41} & B_{42} & 0 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \partial_{kk} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{kk} \end{bmatrix}.$$

С учётом этих соотношений решение уравнений (41) имеет вид (43):

$$\psi = Av, \quad u = Dv + w, \quad Bw = 0. \quad (45)$$

Действительно $M'\psi = M'Av = M'MBv = DBv = BDv$, $Bu = B(Dv + w) = BDv$. Решение последнего уравнения (45) следующее $w_i = \partial_i g$, $\partial_{kk}g = 0$, тогда остальные выражения принимают вид

$$\psi_i = A_{ij}v_j, \quad \psi_4 = 0, \quad u_i = \partial_{ss}v_i + \partial_i g, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \partial_{kk}g = 0, \quad (46)$$

причём v_i — такие функции, что ψ_i — гармонические функции: $\partial_{ss}\psi_i = \partial_{ss}A_{ij}v_j = 0$. Рассмотрение остальных вариантов требует дальнейшей работы.

5. ДРУГОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ (16), (29)

С помощью системы (41) можно получить ещё одно представление решения уравнений (16), (29). Для случая $\psi_4 = 0$ (см. (46)) из трёх последних уравнений (41) получаем

$$\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] u_i = \psi_i + \partial_i q, \quad (47)$$

где q — произвольная функция. Из (47) и первого уравнения (41) находим

$$\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] \partial_i u_i = \partial_i \psi_i + \partial_{ii} q, \quad \left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] \frac{1}{\lambda + 2\mu} \partial_i \psi_i = \partial_i \psi_i + \partial_{ii} q;$$

$$\partial_{ii} q = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \partial_i \psi_i. \quad (48)$$

При получении уравнения (48) учли, что ψ_i — гармонические функции. Решение уравнения Пуассона (48) имеет следующий вид:

$$q = -\frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} (x_k \psi_k) + g, \quad \partial_{ss} g = 0. \quad (49)$$

С учётом (49) представление (47) принимает вид

$$\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{kk} \right] u_i = \psi_i - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_i (x_k \psi_k) + \partial_i g, \quad i = 1, 2, 3. \quad (50)$$

Исходные уравнения (16), (29) можно записать в виде

$$\left[\mu - \frac{1}{4}(\gamma + \varepsilon)\partial_{mm} \right] (\partial_{kk} u_i - \partial_{il} u_l) + (\lambda + 2\mu) \partial_{il} u_l = 0. \quad (51)$$

При подстановке выражений (50) в (51) уравнения (51) выполняются с учётом первого уравнения (41)

$$(\lambda + 2\mu) \partial_{il} u_l = \partial_i \psi_i. \quad (52)$$

Таким образом получили, что каждое смещение u_i удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца (50) и они связаны уравнением (52), где в правых частях $\psi_1, \psi_2, \psi_3, g$ — произвольные гармонические функции.

Если $\gamma + \varepsilon = 0$, то для классической изотропной среды из (50) получаем представление смещений через гармонические функции

$$\mu u_i = \psi_i - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \partial_i (x_k \psi_k) + \partial_i g, \quad i = 1, 2, 3, \quad (53)$$

при этом уравнения Ламе (16), (29), (51) и (52) выполняются. Представление (53) известно как общее решение Папковича – Нейбера [1, 9]. Четыре гармонические функции, входящие в (53), связаны между собой одним соотношением [9], как и в представлении (28).

В [3, 15] приведены с использованием модели псевдоконтинуума Коссера решения задач о чистом сдвиге и трещине продольного сдвига и ссылки на работы, в которых решаются конкретные задачи. Имеются и другие работы, например, [16–18], в которых применяется эта модель Коссера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получено два варианта общего решения для системы уравнений в смещениях изотропного псевдоконтинуума Коссера. Система уравнений диагонализуеться и решение выражается через гармонические функции и функции Гельмгольца. Даны формулы производства новых решений, исходя из любого заданного решения. Предложен подход к построению решений с использованием системы Моисила — Теодореску. Определяющие соотношения общей изотропной моментной среды представлены в виде отдельных независимых неприводимых составляющих, при этом определяются собственные модули и ограничения на постоянные упругости.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект FWGG-2026-0018). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
3. Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И., Угрюмов Р.И. Определяющие уравнения анизотропной моментной линейной теории упругости и двумерная задача о чистом сдвиге со стеснённым вращением // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26, № 1. С. 5–19.
4. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Континуальная теория ассиметрической упругости. Равновесие изотропного тела // Физика твёрд. тела. 1964. Т. 6, вып. 9. С. 2689–2699.
5. Чиркунов Ю. А. Групповой анализ линейных и квазилинейных уравнений дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд. НГУЭУ, 2007.
6. Аннин Б.Д., Григорьев Ю.М., Наумов В.В. Решение пространственных статических задач теории упругости методами теории кватернионных функций // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы 9 Всесоюз. конф., Саратов, 26–30 июня 1985, Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986. С. 35–42.
7. Сенашов С.И., Савостьянова И.Л. Использование законов сохранения для решения краевых задач системы Моисила — Теодореску // Сиб. журн. индустр. математики, 2022. Т. 25, № 2. С. 101–109.
8. Шмаков А.П. Представление общего решения в теории упругости // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Москов. ун-та, 1975. Вып. 4. С. 5–12.
9. Остросаблин Н.И. Общие решения и приведение системы уравнений линейной теории к диагональному виду // Прикл. механика и техн. физика. 1993. Т. 34, № 5. С. 112–122.
10. Остросаблин Н.И. Об уравнениях линейной теории упругости анизотропных материалов, сводящихся к трём независимым волновым уравнениям // Прикл. механика и техн. физика. 1994. Т. 35, № 6. С. 143–150.
11. Борок В.М. О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1957. № 1. С. 45–65.
12. Остросаблин Н.И. Общее решение и приведение системы уравнений линейной изотропной упругости к диагональному виду // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 2. С. 79–83.
13. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.
14. Остросаблин Н.И. Функции кинетических напряжений в механике сплошных сред // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Ин-т гидродинамики СО РАН. 2007. Вып. 125. С. 76–116.
15. Остросаблин Н.И., Угрюмов Р.И. Общее решение системы уравнений моментной линейной теории упругости изотропного псевдоконтинуума Коссера // Докл. РАН. Физика, техн. науки. 2024. Т. 517, № 1. С. 36–40.
16. Россихин Ю.А., Шитикова М.В. Анализ нестационарных волн в оболочках из псевдоконтинуума Коссера // Учёные записки Комсомольского-на-Амуре гос. техн. ун-та. 2018. № III-1(35). С. 80–85.
17. Антонов А.М., Ерофеев В.И. Распространение волны Рэлея вдоль границы полупространства, описываемого упрощённой моделью Коссера // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81, № 3. С. 333–344.
18. Павлов И.С., Муравьёва А.В. Трёхмерная градиентная модель полубесконечной геосреды // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84, № 4. С. 480–492.

UDC 539.3:517.958

GENERAL SOLUTIONS AND REDUCTION OF THE SYSTEM OF EQUATIONS OF THE MOMENT LINEAR THEORY OF ELASTICITY OF THE ISOTROPIC PSEUDO-CONTINUUM OF COSSERAT TO A DIAGONAL FORM

© 2026 N. I. Ostrosablin

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Akad. Lavrentyev prosp., 15, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: o.n.ii@yandex.ru

Received 05.06.2024, revised 12.09.2025, accepted 15.06.2026

Abstract. The three-dimensional system of fourth-order differential equations of the moment linear theory of elasticity in displacements of the isotropic pseudo-continuum of Cosserat is presented as a combination of an automorphic system of the third order and a resolving system of the first order. The solution of the resolving system is expressed in terms of four harmonic functions. Two variants of the representation of the general solution in terms of three functions satisfying three independent equations are found for the displacement system, i. e. the system is diagonalized. Formulas for the production of new solutions (symmetry operators) are given, allowing, by differentiating from any given solution, to find new solutions to the original equations. Using the representation of the solution of the resolving system through harmonic functions, a representation of displacements in statics through harmonic functions and for a classical isotropic elastic medium is obtained.

Keywords: moment theory of elasticity, Cosserat pseudocontinuum, general solutions, symmetry operators, diagonal system, constrained rotation, asymmetric stress and strain tensors.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.205

REFERENCES

1. Nowacki W. Theory of elasticity. Warszawa: PWN, 1970.
2. Kupradze V.D., Gegeliya T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V. Tryohmernye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti [Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity]. Moscow: Nauka, 1976 (in Russian).
3. Annin B.D., Ostrosablin N.I., Ugryumov R.I. Opredelyayushchie uravneniya anizotropnoj momentnoj linejnoj teorii uprugosti i dvumernaya zadacha o chistom sdvige so stesnyonnym vrashcheniem [Defining equations of the anisotropic moment linear theory of elasticity and the two-dimensional problem of a pure shear with constrained rotation]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2023, Vol. 26, No. 1, pp. 5–19 (in Russian).
4. Aehro Eh.L., Kuvshinskij E.V. Kontinual'naya teoriya assimetricheskoy uprugosti. Ravnovesie izotropnogo tela [The continuum theory of asymmetric elasticity. Isotropic body equilibrium]. *Fizika Tvyord. Tela* [Solid state physics.], 1964, Vol. 6, Iss. 9, pp. 2689–2699 (in Russian).
5. Chirkunov Yu. A. Gruppovoj analiz linejnyh i kvazilinejnyh uravnenij differencial'nyh uravnenij [Group analysis of linear and quasi-linear equations of differential equations]. Novosibirsk: NGUEHU Publ., 2007 (in Russian).
6. Annin B.D., Grigor'ev Yu.M., Naumov V.V. Reshenie prostranstvennyh staticheskikh zadach teorii uprugosti metodami teorii kvaternionnyh funkcij [Solving spatial static problems of the theory of

- elasticity by methods of the theory of quaternionic functions]. *Chislennyye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti: Materialy 9 Vsesoyuz. konf.* [Numerical methods for solving problems of the theory of elasticity and plasticity: Materials of the 9th All-Union. Conf.], Saratov, 26–30 June, 1985 Novosibirsk: ITPM SO AN SSSR, 1986, pp. 35–42 (in Russian).
7. Senashov S.I., Savost'yanova I.L. Ispol'zovanie zakonov sohraneniya dlya resheniya kraevykh zadach sistemy Moisila — Teodoresku [Using conservation laws to solve boundary value problems of the Moisi system — Teodorescu]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2022. Vol. 25, No. 2, pp. 101–109 (in Russian).
 8. Shmakov A.P. Predstavlenie obshchego resheniya v teorii uprugosti [Representation of a general solution in the theory of elasticity]. *Uprugost' i neuprugost'* [Elasticity and inelasticity]. Moscow: MSU Publ., 1975, Vyp. 4, pp. 5–12 (in Russian).
 9. Ostrosablin N.I. Obshchie resheniya i privedenie sistemy uravnenij linejnoy teorii k diagonal'nomu vidu [General solutions and reduction of the system of equations of linear theory to a diagonal form]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1993, Vol. 34, No. 5, pp. 112–122 (in Russian).
 10. Ostrosablin N.I. Ob uravneniyah linejnoy teorii uprugosti anizotropnykh materialov, svodyashchih k tryom nezavisimym volnovym uravneniyam [On the equations of the linear theory of elasticity of anisotropic materials, reduced to three independent wave equations]. *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 1994, Vol. 35, No. 6, pp. 143–150 (in Russian).
 11. Borok V.M. O sistemah linejnykh uravnenij v chastnykh proizvodnykh s postoyannymi koefitsientami [On systems of linear partial differential equations with constant coefficients]. *Izv. VUZov. Matematika*, 1957, No. 1, pp. 45–65 (in Russian).
 12. Ostrosablin N.I. Obshchee reshenie i privedenie sistemy uravnenij linejnoy izotropnoy uprugosti k diagonal'nomu vidu [General solution and reduction of the system of equations of linear isotropic elasticity to a diagonal form]. *Sib. Zhurn. Indust. Mat.*, 2009, Vol. 12, No. 2, pp. 79–83 (in Russian).
 13. Polyanin A.D. Spravochnik po linejnym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001 (in Russian).
 14. Ostrosablin N.I. Funkcii kineticheskikh napryazhenij v mehanike sploshnykh sred [Kinetic stress functions in continuum mechanics]. *Dinamika Sploshnoi Sredy*, 2007, Vyp. 125, pp. 76–116 (in Russian).
 15. Ostrosablin N.I., Ugryumov R.I. Obshchee reshenie sistemy uravnenij momentnoj linejnoy teorii uprugosti izotropnogo psevdokontinuuma Kossera [General solution of the system of equations of the moment linear theory of elasticity of the Kosser isotropic pseudocontinuum]. *Dokl. RAN. Fizika, Tehn. Nauki*, 2024, Vol. 517, No. 1, pp. 36–40 (in Russian).
 16. Rossihin Yu.A., Shitikova M.V. Analiz nestacionarnykh voln v obolochkah iz psevdokontinuuma Kossera [Analysis of unsteady waves in shells from the Kosser pseudocontinuum]. *Uchyonye Zapiski Komsomol'Skogo-Na-Amure GTU* [Scientific Notes of Komsomolsk-on-Amur State Technical Univ.], 2018, Vol. 35, No. III-1, pp. 80–85 (in Russian).
 17. Antonov A.M., Erofeev V.I. Rasprostranenie volny Rehleya vdol' granicy poluprostranstva, opisyaemogo uproshchyonnoy model'yu Kossera [Rayleigh wave propagation along the boundary of a half-space described by a simplified Kosser model]. *Problemy Prochnosti i Plastichnosti* [Problems of strength and plasticity], 2019, Vol. 81, No. 3, pp. 333–344 (in Russian).
 18. Pavlov I.S., Murav'yova A.V. Tryohmernaya gradientnaya model' polubeskonechnoj geosredy [Three-dimensional gradient model of a semi-infinite geo environment]. *Problemy Prochnosti i Plastichnosti* [Problems of strength and plasticity], 2022, Vol. 84, No. 4, pp. 480–492 (in Russian).

УДК 532.5.032

БАЛАНС ЭНЕРГИИ В ТЕЧЕНИИ КОЛМОГОРОВА

© 2026 А. О. Посудневская

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4, Москва 125047, Россия*

E-mail: posudnevskaja.ao@phystech.edu

Поступила в редакцию 16.09.2025 г.; после доработки 20.11.2025 г.;
принята к публикации 13.05.2026 г.

Статья посвящена численному исследованию двумерного течения Колмогорова вязкой слабосжимаемой жидкости, возникающего под действием статической внешней силы. Численное моделирование выполнено на основе системы уравнений Навье — Стокса в квадратной расчётной области с периодическими граничными условиями. Выявлено существование трёх основных режимов течения: ламинарного, турбулентного и вихревого. Изучено влияние донного трения на формирование различных режимов течения и механизмов диссипации энергии. Проведён анализ энергетического баланса для различных типов течения. В турбулентном и ламинарном режимах преобладает диссипация энергии за счёт трения о дно. В вихревом режиме доминирующего механизма диссипации не выявлено.

Ключевые слова: численное моделирование, система уравнений Навье — Стокса, течение Колмогорова, вязкая сжимаемая жидкость, турбулентность, трение о дно, диссипация энергии.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.206

ВВЕДЕНИЕ

Академик А. Н. Колмогоров предложил простейшую физическую модель для изучения двумерной турбулентности — движение жидкости под действием периодической внешней силы (накачки) [1]. Эта задача была расширена А. М. Обуховым путём добавления в систему уравнений слагаемого, соответствующего трению о дно. Такая формулировка позволила более точно описать турбулентные течения в тонких слоях жидкости.

Известно, что в трёхмерных изотропных турбулентных течениях наблюдается прямой каскад энергии Колмогорова [2]. Главной особенностью двумерного турбулентного течения, возбуждаемого стационарной внешней силой, является возникновение обратного каскада энергии [3]. Вследствие нелинейных эффектов пространственный масштаб вихрей, создаваемых внешней силой, увеличивается до тех пор, пока их рост не будет остановлен размером исследуемой области, что приводит к накоплению энергии на этом масштабе. При такой локализации энергии в течении формируются системы когерентных вихрей [4]. Как показано в [4, 5, 6, 7], в зависимости от значений коэффициента донного трения и силы накачки могут возникать различные типы течений: ламинарное, постоянное во времени; турбулентное, в котором существуют вихри различных масштабов и времён жизни; вихревое, в котором преобладает крупный вихрь с чётко определённым средним профилем. Важным моментом в анализе турбулентных течений является изучение диссипации энергии, которая может происходить вследствие наличия вязкости и трения о дно. В работе [8] обсуждаются вопросы, связанные с энергетической характеристикой течения Колмогорова.

В данной работе рассматривается двумерное течение вязкой, слабосжимаемой жидкости под действием статической силы, периодической в пространстве. Исследуются вопросы

производства и передачи энергии для различных режимов течения. Показано, что энергия, привносимая в систему, диссипирует за счёт вязкости и трения о дно. Цель данной работы — исследовать баланс энергии для разных режимов течения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Исследуются двумерные течения вязкой слабосжимаемой жидкости, описываемые системой уравнений Навье — Стокса. Ниже представлены уравнение неразрывности (1), уравнения сохранения импульса (2), (3) и уравнение слабой сжимаемости (4).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \bar{V}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla(\rho u \bar{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G \sin ky + \mu \Delta u - \rho \alpha u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla(\rho v \bar{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho G \sin kx + \mu \Delta v - \rho \alpha v, \quad (3)$$

$$dp = c^2 \rho_0 \frac{d\rho}{\rho}, \quad (4)$$

здесь ρ — плотность жидкости; $\bar{V} = (u, v)$ — вектор скорости; $\mu = 0.1$ Па·с — динамическая вязкость жидкости; p — давление; α — коэффициент донного трения; G — амплитуда внешней силы; $k = 5 \text{ м}^{-1}$ — пространственная частота внешней силы; $c = 100 \text{ м/с}$ — скорость звука. Правая часть уравнений движения (2), (3) содержат члены $\rho G \sin ky$ и $-\rho G \sin kx$, которые моделируют действие внешней силы. Компоненты $-\rho \alpha u$ и $-\rho \alpha v$ описывают трение о дно.

Численное моделирование выполнено в квадратной вычислительной области Ω со стороной $L = 2\pi \text{ м}$ с периодическими граничными условиями. Начальными условиями являются невозмущённые поля давления $P_0 = 10^5$ Па, плотности $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ и нулевой скорости $\bar{V}_0 = 0 \text{ м/с}$.

Численное решение системы уравнений Навье — Стокса основано на методе искусственной сжимаемости [9]. В этом случае гиперболическая часть уравнений решается явным методом Мак-Кормака [10], а параболическая часть — стандартным методом конечных разностей. Численные эксперименты проводились на равномерных сетках размером 512×512 ячеек.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В результате численного моделирования были получены три основных режима течения (см. рис. 1): (а) ламинарный, при котором характер движения жидкости стабилен во времени; (с) турбулентный, характеризующийся случайным появлением и исчезновением вихрей различного масштаба; (е) вихревой, при котором формируется большой стабильный вихревой диполь. Также были выявлены переходные режимы течения, возникающие между ламинарным и турбулентным режимами (рис. 1(б)) и между турбулентным и вихревым режимами (рис. 1(д)). Анализ результатов численного моделирования проводился для течений, достигших статистически стационарного состояния. Это определяется кинетической энергией течения, которая слабо меняется со временем и находится около некоторого среднего значения.

После проведения серии численных экспериментов с использованием различных значений коэффициента донного трения α и амплитуды внешней силы G была получена фазовая диаграмма режимов течения (см. рис. 2). Каждая точка на фазовой диаграмме соответствует численному расчёту с различными значениями G и α . Чёрные точки обозначают расчёты, соответствующие ламинарному режиму. Красные квадраты описывают турбулентный режим. Зелёные ромбы соответствуют вихревому режиму. Синие треугольники указывают на переход между ламинарным и турбулентным течениями. На основании фазовой диаграммы можно

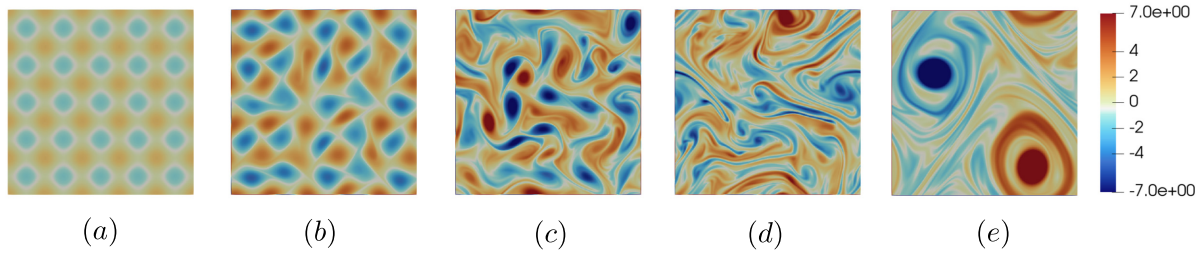


Рис. 1. Поля завихренности при фиксированном $G = 0.15 \text{ м/с}^2$ и различных значениях α : (a) ламинарного ($\alpha = 1 \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 13 \cdot 10^3$); (b) ламинарно-турбулентного ($\alpha = 3 \cdot 10^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 47 \cdot 10^3$); (c) турбулентного ($\alpha = 10^{-1} \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 88 \cdot 10^3$); (d) турбулентно-вихревого ($\alpha = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 94 \cdot 10^3$); (e) вихревого режимов течения ($\alpha = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\text{Re} = 277 \cdot 10^3$)

сделать вывод, что коэффициент донного трения оказывает наибольшее влияние на режим течения. Вихревой режим наблюдается, когда коэффициент донного трения α ниже 10^{-3} с^{-1} . Ламинарный режим формируется, когда коэффициент донного трения α превышает 10^{-1} с^{-1} . Турбулентный режим возникает при средних значениях коэффициента донного трения α .

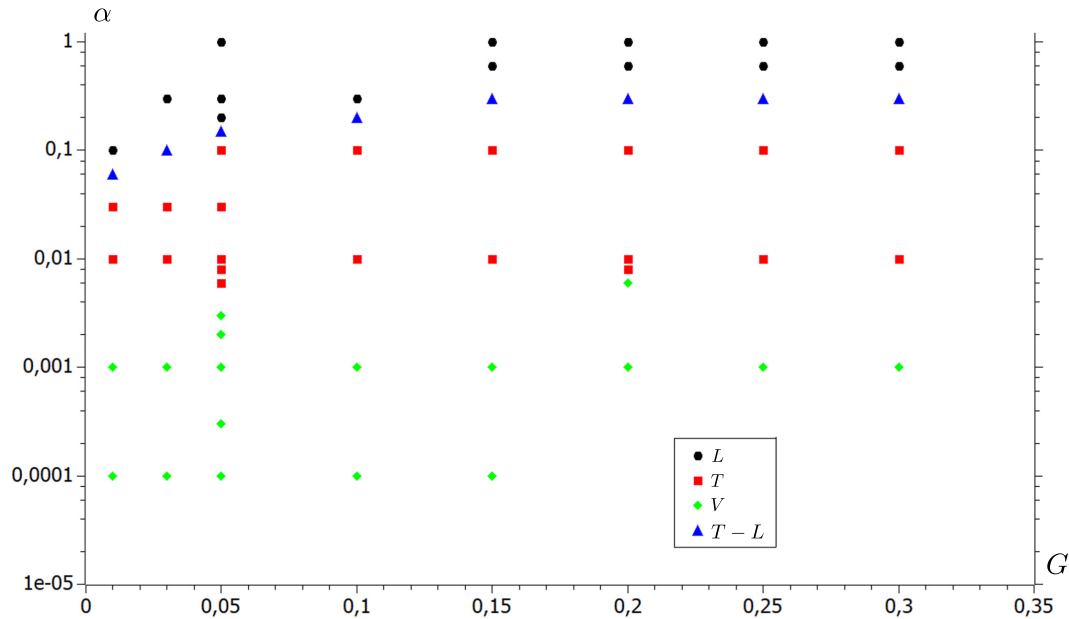


Рис. 2. Фазовая диаграмма типов течений.

L — ламинарный режим течения, T — турбулентный режим течения,

V — вихревой режим течения,

$T - L$ — переходный между ламинарным и турбулентным режимом течения при различных значениях коэффициента донного трения $\alpha (\text{с}^{-1})$ и амплитуды внешней силы $G (\text{м/с}^2)$

Рассмотрим различные режимы течений при фиксированном значении амплитуды силы накачки $G = 0.1 \text{ м/с}^2$.

Энергия, вводимая в систему посредством силы накачки, диссипирует двумя различными способами: на малых масштабах за счёт вязкости и на больших масштабах за счёт трения о дно. Исследуем, какие механизмы диссипации преобладают в различных режимах течения. Прежде всего, необходимо обеспечить достижение энергетического баланса, то есть в каждый момент времени изменение энергии должно состоять из мощности силы накачки и мощности диссипационных сил, обусловленных вязкостью и трением. Для каждого временного шага

должно выполняться следующее соотношение:

$$dE = P - D_f - D_v, \quad (5)$$

здесь $dE = \frac{E - E'}{t - t'}$, E и E' — значения кинетической энергии в настоящий (t) и предыдущий (t') моменты времени; P — мощность накачки, D_f — диссипация энергии за счёт трения о дно, а D_v — диссипация энергии за счёт вязкости. Вкладом сжимаемости жидкости в энергетический баланс можно пренебречь, поскольку его значение незначительно по сравнению с другими. Для расчёта энергетического баланса используются следующие уравнения:

$$E = K \int_{\Omega} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) dx dy, \quad (6)$$

$$P = K \int_{\Omega} \rho (u F_x + v F_y) dx dy, \quad (7)$$

$$D_f = K \int_{\Omega} \rho \cdot \alpha (u^2 + v^2) dx dy, \quad (8)$$

$$D_v = K \int_{\Omega} \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (9)$$

здесь $K = 1 \text{ м}$ — размерный коэффициент; $F_x = \rho G \sin ky$, $F_y = -\rho G \sin kx$ — компоненты силы накачки вдоль направлений X и Y .

Для проверки энергетического баланса мы строим графики зависимости правой (dE , красная кривая на рис. 3) и левой ($P - D_f - D_v$, чёрная кривая на рис. 3) частей уравнения (5) от N , где N — номер выдачи выходных данных. Выходные данные записываются каждые 0.25 с времени вычислений. Совпадение красной и чёрной кривых на рис. 3 подтверждает выполнение энергетического баланса.

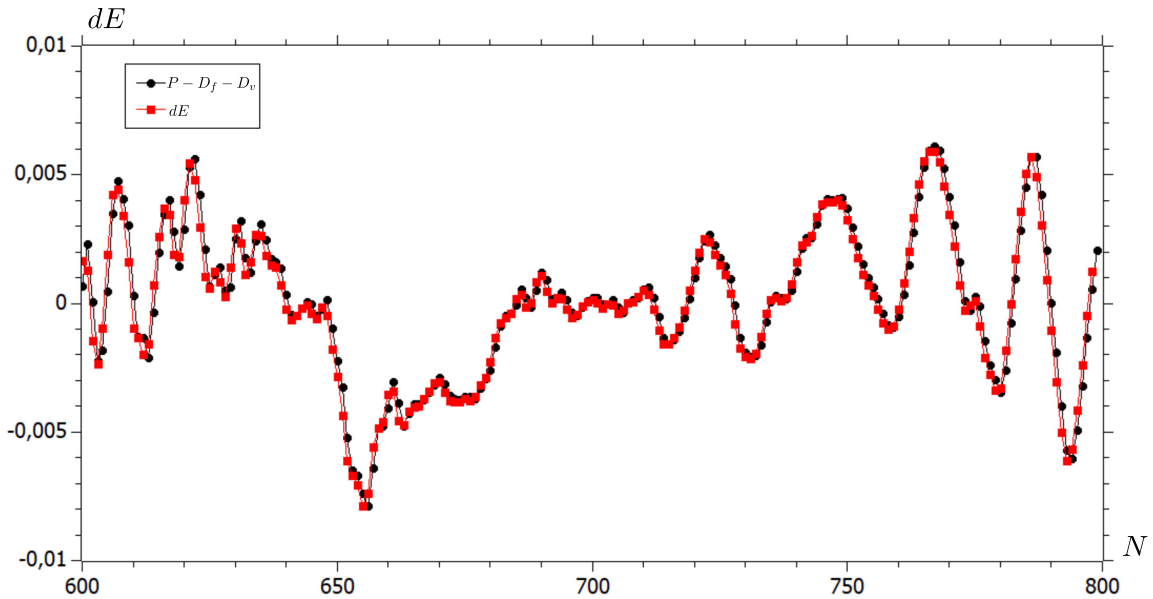


Рис. 3. Проверка энергетического баланса

Проведём оценки средней кинетической энергии и различных механизмов диссипации в зависимости от коэффициента донного трения α при фиксированной величине силы накачки.

Средняя кинетическая энергия определяется следующим образом:

$$E = \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_f} K \int_{\Omega} \rho \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) dx dy,$$

здесь $t_0 = 200$ с, $t_f = 250$ с — начало и конец временного интервала, в течение которого производится осреднение.

На рис. 4 приведена зависимость средней кинетической энергии от коэффициента донного трения α . График показывает монотонное уменьшение средней энергии при увеличении коэффициента донного трения α . Резкое уменьшение энергии происходит при переходе между вихревым и турбулентным режимами течения, что соответствует значениям α от 10^{-3} с $^{-1}$ до 10^{-2} с $^{-1}$.

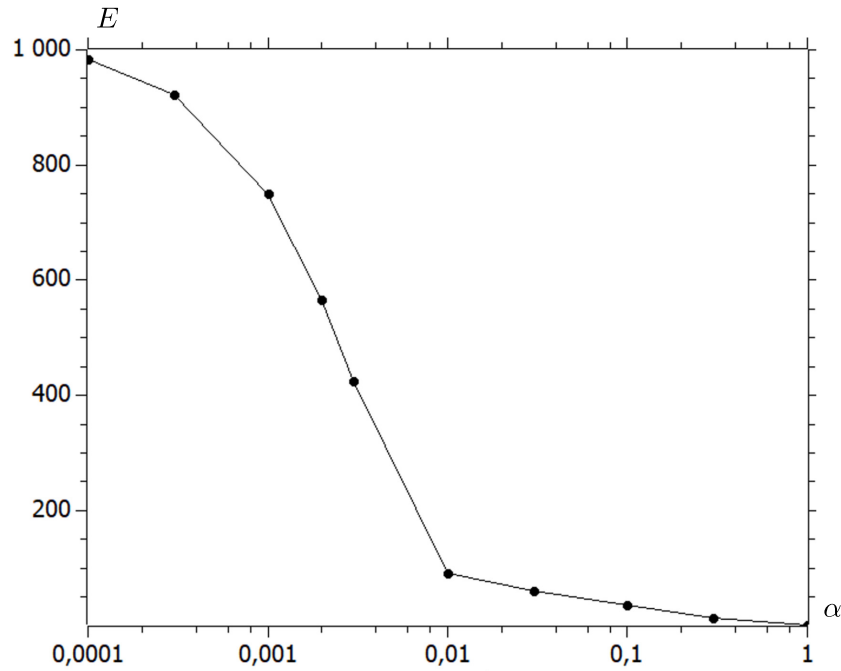


Рис. 4. Средняя энергия E (Дж) в зависимости от α (с $^{-1}$)

Определим отношение вклада сил трения ($\overline{D_f}$) и вязкости ($\overline{D_v}$) в энергетический баланс:

$$\overline{D_f} = \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_f} \frac{D_f}{D_f + D_v} \cdot 100\%,$$

$$\overline{D_v} = \frac{1}{t_f - t_0} \sum_{t=t_0}^{t_f} \frac{D_v}{D_f + D_v} \cdot 100\%,$$

Для этого рассчитываем диссипацию энергии за счёт трения и вязкости, используя формулы (8) и (9), и усредняем их в интервале от $t_0 = 200$ с до $t_f = 250$ с. На рис. 5 показана зависимость вклада в диссипацию энергии от сил донного трения (чёрная кривая) и сил вязкости (красная кривая) от параметра α .

Чёрная кривая показывает монотонное увеличение $\overline{D_f}$ в зависимости от параметра α (см. рис. 5). При низких значениях коэффициента донного трения ($\alpha = 10^{-4}$ с $^{-1}$) вклад диссипации за счёт трения составляет около 30% от общей диссипации. Наиболее интенсивное увеличение $\overline{D_f}$ происходит в диапазоне α от 10^{-4} с $^{-1}$ до 10^{-3} с $^{-1}$, где процент диссипации за

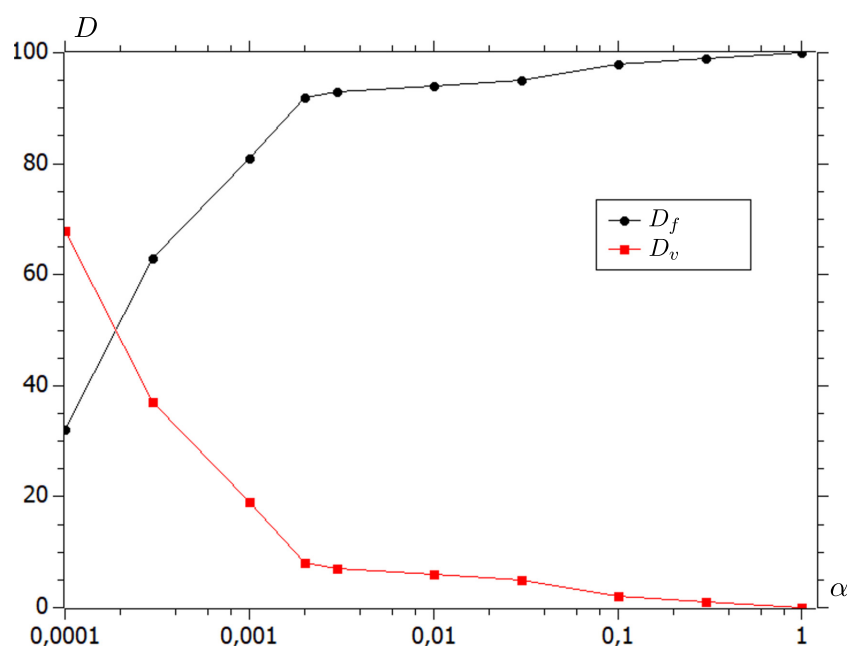


Рис. 5. Процент диссипации энергии D (%) за счёт трения (D_f) и вязкости (D_v) в зависимости от α (c^{-1})

счёт донного трения $\overline{D_f}$ возрастает до 90%. При дальнейшем увеличении α , $\overline{D_f}$ возрастает до 99%. График вязкой диссипации $\overline{D_v}$ демонстрирует противоположную картину (рис. 5, красная кривая). При $\alpha = 10^{-4}\text{c}^{-1}$ преобладают вязкостные силы, обеспечивающие около 70% от общей диссипации энергии. С ростом α наблюдается резкое снижение вклада вязкости. Наиболее интенсивное снижение наблюдается в диапазоне α от 10^{-4}c^{-1} до 10^{-3}c^{-1} . При $\alpha \geq 10^{-2}\text{c}^{-1}$ вязкая диссипация становится менее 5% и продолжает снижаться до 1% при значениях коэффициента донного трения $\alpha = 1\text{c}^{-1}$. Таким образом, диссипация энергии за счёт силы донного трения преобладает во всех режимах течения, за исключением вихревого. В этом случае (при α от 10^{-4}c^{-1} до 10^{-3}c^{-1}) мы не наблюдаем преобладания какого либо типа диссипации энергии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован энергетический баланс для ламинарного, турбулентного и вихревого режимов течения Колмогорова. Предложен метод расчёта энергетического баланса, основанный на вычислении вязкой диссипации и диссипации, обусловленной трением о дно. Показано, что в наших численных экспериментах диссипация энергии, вызванная трением о дно, вносит доминирующий вклад в энергетический баланс в ламинарном и турбулентном режимах течения.

Автор выражает благодарность С. В. Фортовой, И. В. Колоколову и В. В. Лебедеву за обсуждения в процессе подготовки данной статьи. Моделирование проводилось с использованием вычислительных мощностей Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (проект 124022400174-3). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у неё нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В.И., Мешалкин Л.Д. Семинар А.Н. Колмогорова по избранным вопросам анализа (1958/59 г.) // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 1(91). С. 247–250.
2. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
3. Kraichnan R.H. Inertial ranges in two dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1967. V. 10. Article number. 1417; DOI: 10.1063/1.1762301
4. Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction // Physics of Fluids. 2021. V. 33; DOI: 10.1063/5.0038863
5. Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex versus chaotic state in two-dimension turbulence // Annals of Physics. 2022. V. 447, part 2; DOI: 10.1016/j.aop.2022.169072
6. Guzev M.A., Fortova S.V., Doludenko A.N., Posudnevskaya A.O., Ermakov A.D. Maslov rank distributions for the analysis of two-dimensional and quasi-two-dimensional turbulent flows // Russian J. Math. Phys. 2024. V. 31. P. 438–449; DOI: 10.1134/S1061920824030075
7. Guzev M.A., Doludenko A.N., Ermakov A.D., Posudnevskaya A.O., Fortova S.V. Direct numerical simulation and rank analysis of two-dimensional Kolmogorov-type vortex flows // Supercomputing Frontiers and Innovations. 2025. V. 12, N 1. P. 43–59; DOI: 10.14529/jsfi250104
8. Doludenko A.N., Kulikov Y.M., Saveliev A.S. Chaotic flow evolution arising in a body force field // Computer Research and Modeling. 2024. V. 16, N 4. P. 883–912; DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-883-912
9. Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Taylor. Francis. 2016; DOI: 10.1201/b12884
10. MacCormack R.W. A Numerical method for solving the equations of compressible viscous flow // AIAA Journal. 1982. V. 20. P. 1275–1281; DOI: 10.2514/6.1981-110

UDC 532.5.032

ENERGY BALANCE IN THE KOLMOGOROV FLOW

© 2026 A. O. Posudnevskaya

*Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS,
Miusskaya sq., 4, Moscow 125047, Russia*

E-mail: posudnevskaya.ao@phystech.edu

Received 16.09.2025, revised 20.11.2025, accepted 13.05.2026

Abstract. The article is devoted to the numerical study of a two-dimensional turbulent flow of a viscous weakly compressible fluid under the action of static external pumping. Numerical simulation is performed in a quadratic computational domain with periodic boundary conditions based on the Navier-Stokes system of equations, using the weak compressibility equation for closure. The influence of the bottom friction coefficient on the formation of various flow regimes and energy dissipation mechanisms is studied. The existence of three main flow modes has been revealed: laminar (stable flow), turbulent (random occurrence and disappearance of vortices of various scales) and vortex (dominance of a large stable vortex dipole). A phase diagram of the flow types is constructed depending on the bottom friction coefficient and the amplitude of the pumping force, and the key role of the bottom friction coefficient in the formation of the flow regime is revealed. The analysis of the energy balance of the numerical model has been carried out. Energy dissipation due to bottom friction dominates in the turbulent and laminar regimes.

Keywords: numerical simulation, Navier–Stokes equations, Kolmogorov flow, viscous fluid, turbulence, bottom friction, energy dissipation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.206

REFERENCES

1. Arnol'd V.I., Meshalkin L.D. Seminar A.N. Kolmogorova po izbrannym voprosam analiza [A.N. Kolmogorov's seminar on selected topics in analysis]. *Uspehi Mat. Nauk* [Successes Math. Sci.], 1960, Vol. 15, No. 1(91), pp. 247–250 (in Russian).
2. Kolmogorov A.N. Lokal'naya struktura turbulentnosti v neszhimaemoj vyazkoj zhidkosti pri ochen' bol'shih chislakh Rejnol'dsa [Local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid at very large Reynolds numbers]. *DAN SSSR*, 1941, Vol. 30, No. 4, pp. 299–303 (in Russian).
3. Kraichnan R.H. Inertial ranges in two dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 1967, Vol. 10, Article number. 1417; DOI: 10.1063/1.1762301
4. Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex in a spatially restricted two-dimensional turbulent flow in absence of bottom friction. *Physics of Fluids*, 2021, Vol. 33; DOI: 10.1063/5.0038863
5. Doludenko A.N., Fortova S.V., Kolokolov I.V., Lebedev V.V. Coherent vortex versus chaotic state in two-dimension turbulence. *Annals of Physics*, 2022, Vol. 447, part 2; DOI: 10.1016/j.aop.2022.169072
6. Guzev M.A., Fortova S.V., Doludenko A.N., Posudnevskaya A.O., Ermakov A.D. Maslov rank distributions for the analysis of two-dimensional and quasi-two-dimensional turbulent flows. *Russian J. Math. Phys.*, 2024, Vol. 31, pp. 438–449; DOI: 10.1134/S1061920824030075
7. Guzev M.A., Doludenko A.N., Ermakov A.D., Posudnevskaya A.O., Fortova S.V. Direct numerical simulation and rank analysis of two-dimensional Kolmogorov-type vortex flows. *Supercomputing Frontiers and Innovations*, 2025, Vol. 12, No. 1, pp. 43–59; DOI: 10.14529/jsfi250104

8. Doludenko A.N., Kulikov Y.M., Saveliev A.S. Chaotic flow evolution arising in a body force field. *Computer Research and Modeling*, 2024, Vol. 16, No. 4, pp. 883–912; DOI: 10.20537/2076-7633-2024-16-4-883-912
9. Anderson D.A., Tannehill J.C., Pletcher R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Taylor. Francis. 2016; DOI: 10.1201/b12884
10. MacCormack R.W. A Numerical method for solving the equations of compressible viscous flow. *AIAA Journal*, 1982, Vol. 20, pp. 1275–1281; DOI: 10.2514/6.1981-110

УДК 532.591:532.517

КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ В ПРИДОННОМ ПЛОТНОСТНОМ ТЕЧЕНИИ

© 2026 С. К. Тарасов

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: s.tarasov1@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 07.05.2026 г.; после доработки 09.07.2026 г.;
принята к публикации 15.07.2027 г.

Рассматривается трёхслойное стратифицированное течение с массообменом над наклонным дном. Предполагается, что генерация вихрей в промежуточном слое уравнивается диссипативными эффектами. В приближении Буссинеска течение описывается уравнениями движения близкими по структуре к модели двухслойной мелкой воды под крышкой. Для течений с пассивным верхним слоем модель редуцируется к уравнениям однослойной мелкой воды, включающим в качестве параметра прослоечное число Ричардсона. С использованием критерия Уизема получены условия, при которых малые возмущения постоянного решения трансформируются в нелинейные квазипериодические волновые пакеты конечной амплитуды. Выполнены численные расчёты эволюции малых возмущений, демонстрирующие формирование катящихся волн. Построен двухпараметрический класс точных кусочно-гладких периодических решений, соответствующий режиму катящихся волн.

Ключевые слова: гравитационные течения, приближение Буссинеска, длинноволновые возмущения, катящиеся волны

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.207

ВВЕДЕНИЕ

Гравитационные течения над склоном играют важную роль в различных геофизических процессах и практических приложениях [1]. Характерной особенностью таких течений является генерация волновых возмущений и развитие сдвиговой неустойчивости на внутренних границах слоёв различной плотности, приводящее к турбулентному перемешиванию и формированию слоёв смешения. Совместное влияние нелинейности, плавучести, топографических эффектов и перемешивания порождает многообразие волновых конфигураций в стратифицированных течениях. Недавний обзор [2] подтверждает высокий интерес к этой тематике и предлагает направления дальнейших исследований. Влияние процессов перемешивания на структуру внутренних гидравлических прыжков рассматривается в [3, 4]. Работы [5, 6, 7] фокусируются на анализе скорости распространения фронта гравитационного потока над склоном при учёте формирования слоя смешения. Основные аспекты моделирования гравитационных течений, включая построение математических моделей, изложены в монографии [8].

Метод построения длинноволновых моделей стратифицированных течений с массообменом, основанный на трёхслойном представлении течения и осреднении уравнений Эйлера, позволяет описывать динамику внутренних волн и процессы перемешивания замкнутыми одномерными системами законов сохранения [9]. С использованием этого подхода разработаны модели формирования и эволюции слоя смешения, возникающего вследствие развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца в двухслойном течении [10, 11]. В этих работах построены стационарные решения, определены понятия сверхкритического и докритического слоистого

течения, а также проведена валидация моделей сравнением с известными экспериментальными данными. Указанный подход получил дальнейшее развитие на случай негидростатических течений и применяется для моделирования эволюции и обрушения внутренних волн большой амплитуды [12, 13], процессов перемешивания в приповерхностных [14, 15] и глубоководных течениях [16, 17].

Равновесная модель по отношению к исходной системе получается заменой некоторых уравнений системы конечными соотношениями. Хорошо известен переход от классической модели мелкой воды, описывающей течение тонкого слоя над наклонным дном, к кинематической модели распространения длинных волн [18]. Применяемая в этом случае гипотеза состоит в том, что скатывающая сила уравнивается донным трением и, соответственно, скорость потока выражается через толщину слоя жидкости. Для рассматриваемых стратифицированных течений с массообменом переход к равновесной модели менее очевиден. Как показано в [11], при описании развития слоя смешения в сверхкритическом режиме можно использовать равновесную модель, в которой уравнение для скорости “больших вихрей”, определяющее массообмен между слоями, заменяется конечным соотношением (законом вовлечения). При этом скорость “больших вихрей” выражается через остальные параметры потока и непосредственно следует из структуры уравнений трёхслойного течения. Ещё более простая равновесная модель, характеризующаяся постоянством прослоечного числа Ричардсона, предложена в [19]. Дополнительные предположения ограничивают возможности применения модели, но позволяют продвинуться в аналитическом исследовании отдельных классов течений. В рамках такого подхода получено решение задачи о распаде произвольного разрыва, а также описаны транскритические режимы трёхслойного течения над локальным препятствием [19].

Данная работа продолжает исследования трёхслойных течений над наклонным дном на основе равновесной модели с постоянным прослоечным числом Ричардсона. Основное внимание уделяется рассмотрению течений с пассивным верхним слоем (покоящийся и бесконечно глубокий). В такой постановке модель сводится к гиперболической системе двух неоднородных законов сохранения. С использованием критерия Уизема сформулированы условия устойчивости постоянного решения и определены параметры потока, при которых возможно формирование катящихся волн. Выполнены численные расчёты, иллюстрирующие нелинейную эволюцию малых возмущений и формирование квазипериодических волн конечной амплитуды для течений в затопленном пространстве и под крышкой. В классе бегущих волн построены точные кусочно-гладкие периодические решения, зависящие от двух параметров – критической толщины слоя и амплитуды волны. При соответствующем выборе этих параметров профиль волны совпадает с полученным численным решением нестационарной задачи о формировании волн конечной амплитуды.

1. РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ТРЁХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассматривается движение трёхслойной стратифицированной жидкости с массообменом между слоями в области, ограниченной дном $z = Z(x)$ и непроницаемой крышкой $z = H_0 = \text{const}$ (см. рис. 1). Во внешних однородных слоях с плотностями ρ_1 и ρ_2 течение потенциальное, а вовлечение в промежуточную прослойку (при наличии) является симметричным. Поэтому в промежуточной вихревой прослойке средняя плотность $\bar{\rho}$ постоянна и равна полусумме плотностей внешних слоёв. Осреднённые по толщине слоёв уравнения трёхслойного

течения в приближении Буссинеска имеют вид [10]:

$$\begin{aligned}
 h_t + (uh)_x &= -\sigma q, & \eta_t + (v\eta)_x &= 2\sigma q, & \zeta_t + (w\zeta)_x &= -\sigma q, \\
 u_t + \left(\frac{u^2}{2} + bh + \bar{b}\eta + p\right)_x &= -bZ_x - \frac{c_f u|u|}{h}, & w_t + \left(\frac{w^2}{2} + p\right)_x &= 0, \\
 v_t + \left(\frac{v^2}{2} + \bar{b}h + \bar{b}\eta + p\right)_x &= -\bar{b}Z_x + \frac{\sigma q}{\eta}(u + w - 2v), \\
 q_t + vq_x &= \frac{\sigma}{2\eta}((u - v)^2 + (w - v)^2 - (2 + \kappa)q^2 - b\eta).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x , t — пространственная координата и время; h , η , ζ — толщины нижнего, верхнего и промежуточного слоёв; u , v , w — средние скорости жидкости в слоях; q — средняя скорость «больших вихрей» в промежуточном слое (пропорциональна скорости вовлечения в прослойку); p — давление на верхней крышке канала; $b = g(\rho_1 - \rho_2)/\rho_2 > 0$ и $\bar{b} = b/2$ — коэффициенты плавучести; g — ускорение силы тяжести; c_f — коэффициент донного трения; $\sigma = 0.15$, $\kappa \in [2, 8]$ — эмпирические постоянные, отвечающие за массообмен и диссипацию. Поскольку полная толщина жидкости $H(x) = H_0 - Z(x) = h + \eta + \zeta$ известна, то из первых трёх уравнений (1) следует, что $Q_x = 0$, $Q = uh + v\eta + w\zeta$. Далее полный расход $Q(t)$ будем считать заданным.

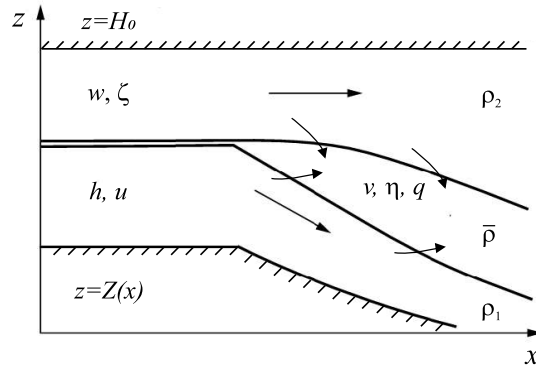


Рис. 1. Схема трёхслойного течения с вовлечением в промежуточный слой

В недавней работе [11] показано, что для моделирования сверхкритических и транскритических течений над локальным препятствием применима равновесная модель, в которой последнее уравнение в системе (1) заменяется конечным соотношением

$$q^2 = \max\left\{0, \frac{(u - v)^2 + (w - v)^2 - b\eta}{2 + \kappa}\right\}, \quad q = \sqrt{q^2}, \tag{2}$$

определяющим закон вовлечения жидкости в промежуточную прослойку. Заметим, что соотношение (2) соответствует обращению в нуль правой части последнего уравнения (1). При течении стратифицированной жидкости в длинном канале с относительно небольшим уклоном дна средняя скорость турбулентного вовлечения в прослойку близка к нулю и генерация «больших вихрей» в промежуточном слое уравнивается диссипацией [19]. В этом случае возможно дальнейшее упрощение системы (1), при котором, помимо (2), выполняются соотношения:

$$\text{Ri} = \frac{b\eta}{(u - w)^2} = \text{const}, \quad v = \frac{u + w}{2}. \tag{3}$$

Безразмерный параметр Ri (прослоечное число Ричардсона) характеризует отношение между силами плавучести и силами сдвига потока. Нетрудно видеть, что только при $\text{Ri} = 1/2$ подстановка величин η и v , определяемых формулами (3), в соотношении (2) обеспечивает обращение

в нуль переменной q и выполнение условий равновесия. Однако число Ричардсона Ri удобно оставить в модели как параметр.

Введём новые искомые функции $m = h + \eta/2$ и $r = u - w$, определяющие сумму толщин нижнего и половины промежуточного слоёв и разность скоростей во внешних слоях, соответственно. Сложение первого и второго (с множителем $1/2$) уравнений системы (1), а также разность четвёртого и пятого уравнений этой системы, позволяет получить замкнутую систему законов сохранения для определения переменных m и r

$$\begin{aligned} m_t + \left(\left(\bar{u} + \left(1 - \frac{m}{H}\right)r \right) m - \frac{Ri}{4b} r^3 \right)_x &= 0, \\ r_t + \left(\frac{r^2}{2} + \left(\bar{u} - \frac{mr}{H} \right) r + bm \right)_x &= -bZ_x - \frac{c_f u |u|}{h}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\bar{u} = Q/H$ – средняя скорость потока. С использованием (3) переменные u , w , h , η и ζ выражаются через функции m , r , полную толщину жидкости $H(x)$ и расход $Q(t)$ формулами

$$w = \frac{Q - mr}{H}, \quad u = r + w, \quad \eta = \frac{Ri}{b} r^2, \quad h = m - \frac{\eta}{2}, \quad \zeta = H - h - \eta.$$

Если принять $Ri = 0$ (т. е. $\eta = 0$), то уравнения (4) являются классическими уравнениями двухслойной мелкой воды под крышкой, исследованными в [1, 9]. Тем не менее, при значениях прослоечного числа Ричардсона Ri отличных от $1/2$ и нуля уравнения (4) также имеют физический смысл и могут быть использованы для прогнозирования и интерпретации гравитационных течений над склоном. В частности, при «отключении» возможности вовлечения ($\sigma = 0$ в уравнениях (1)), соотношения (3) выделяют однопараметрический подкласс трёхслойных течений, в которых параметры потока в промежуточном слое определяются скоростями внешних слоёв и числом Ричардсона. Кроме того, учёт особенностей распределения профиля скорости по глубине при выводе осреднённых уравнений трёхслойного течения с перемешиванием может модифицировать закон вовлечения (2) и, соответственно, отклонять «равновесное» число Ричардсона от значения $Ri = 1/2$.

Для анализа модели и проведения расчётов удобно перейти к безразмерным переменным с помощью преобразования:

$$x = \frac{h_0}{c_f} x', \quad t = \frac{1}{c_f} \sqrt{\frac{h_0}{b}} t', \quad (u, w) = \sqrt{bh_0} (u', w'), \quad (h, \eta) = h_0 (h', \eta').$$

Далее полагаем, что рельеф дна является прямолинейным $Z(x) = -kx$ с коэффициентом наклона $k > 0$, а скорость жидкости в нижнем слое считаем неотрицательной $u \geq 0$. Введём безразмерный параметр $\alpha = k/c_f$, являющийся отношением уклона дна к коэффициенту донного трения. В безразмерных переменных уравнения (4) в дифференциальной форме принимают вид (штрихи опущены)

$$\begin{aligned} m_t + \left(\bar{u} + \left(1 - \frac{2m}{H}\right)r \right) m_x + \left(\left(1 - \frac{m}{H}\right)m - \frac{3Ri}{4} r^2 \right) r_x &= 0, \\ r_t + \left(1 - \frac{r^2}{H}\right) m_x + \left(\bar{u} + \left(1 - \frac{2m}{H}\right)r \right) r_x &= \alpha - \frac{u^2}{h}. \end{aligned} \quad (5)$$

Несложные вычисления позволяют найти скорости характеристик уравнений (5)

$$\lambda_{\pm} = \bar{u} + \left(1 - \frac{2m}{H}\right)r \pm \sqrt{D}, \quad D = \left(1 - \frac{r^2}{H}\right) \left(\left(1 - \frac{m}{H}\right)m - \frac{3Ri}{4} r^2 \right).$$

Система (5) является гиперболической при выполнении условия $D > 0$, налагающем ограничения на параметры потока. Далее будет получена модификация уравнений (4) для течений с пассивным верхним слоем и проведено сопоставление решений этих моделей.

2. РАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ С ПАССИВНЫМ ВЕРХНИМ СЛОЕМ

Пусть толщина верхнего слоя значительно больше толщин других слоёв, а его средняя скорость равна нулю: $\zeta \gg h$, $\zeta \gg \eta$, $w = 0$. В пределе при $\zeta \rightarrow \infty$ имеем $\bar{u} = Q/H \rightarrow 0$, $m/H \rightarrow 0$. Такая конфигурация с пассивным верхним слоем соответствует придонному гравитационному течению над склоном. Равновесная модель (4) в этом случае упрощается и в безразмерных переменных принимает вид

$$m_t + \left(um - \frac{\text{Ri}}{4} u^3 \right)_x = 0, \quad u_t + \left(\frac{u^2}{2} + m \right)_x = \alpha - \frac{u^2}{h}. \quad (6)$$

Заметим, что в частном случае $\text{Ri} = 0$ уравнения (6) совпадают с классическими уравнениями однослойной мелкой воды [9, 18].

Скорости характеристик системы (6) определяются формулами

$$\lambda_{\pm} = u \pm \sqrt{m - \frac{3\text{Ri}}{4} u^2}. \quad (7)$$

Условие гиперболичности модели требует, чтобы характеристики были вещественными и различными. Поскольку $w = 0$, из (3) следует, что $\eta = \text{Ri} u^2$ и, соответственно, $m = h + \text{Ri} u^2/2$. Поэтому в терминах переменных h и u условие гиперболичности уравнений (6) принимает вид

$$\frac{h}{u^2} > \frac{\text{Ri}}{4}. \quad (8)$$

Легко видеть, что система (6) имеет постоянное решение

$$m = \left(1 + \frac{\alpha \text{Ri}}{2} \right) h, \quad u = \sqrt{\alpha h}, \quad h = h_e = \text{const}. \quad (9)$$

Замена второго уравнения системы (6) равновесным соотношением $u = \sqrt{\alpha h}$ позволяет перейти к кинематической модели

$$m_t + \left(\left(1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{2(2 + \alpha \text{Ri})} \right) \sqrt{\frac{2\alpha m^3}{2 + \alpha \text{Ri}}} \right)_x = 0. \quad (10)$$

Скорость характеристики λ_e кинематического уравнения (10) выражается через толщину h и определяется выражением

$$\lambda_e(h) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{2(2 + \alpha \text{Ri})} \right) \sqrt{\alpha h}. \quad (11)$$

Подстановка зависимости $u = \sqrt{\alpha h}$ в формулы (7) определяет скорости замороженных характеристик $\hat{\lambda}_{\pm}(h)$. При этом условие гиперболичности (8) принимает вид $\alpha \text{Ri} < 4$.

Критерий Уизема устойчивости постоянного решения неоднородной гиперболической системы из двух уравнений (см. [18], гл. 10) состоит в том, что скорость равновесной характеристики λ_e ограничена скоростями замороженных характеристик $\hat{\lambda}_{\pm}$, т. е.

$$\hat{\lambda}_-(h) < \lambda_e(h) < \hat{\lambda}_+(h).$$

Принимая во внимание представления характеристик (7) и (11), предыдущие неравенства записываются следующим образом:

$$-\sqrt{1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{4}} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3\alpha \text{Ri}}{2(2 - \alpha \text{Ri})} \right) \sqrt{\alpha} < \sqrt{1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{4}}. \quad (12)$$

Интересно отметить, что в данном случае условие устойчивости не зависит от выбранной толщины нижнего слоя h , а определяется только прослоечным числом Ричардсона Ri и параметром α , являющимся отношением коэффициентов наклона дна и трения. Для этих параметров, лежащих в диапазоне $0 \leq \text{Ri} \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 10$, область выполнения критерия устойчивости (12) приведена на рис. 2 (закрашенная часть).

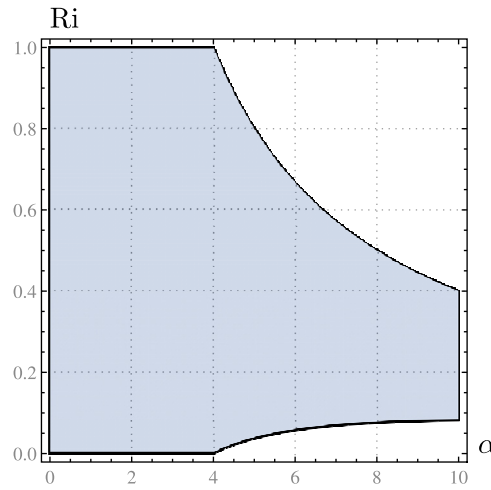


Рис. 2. Закрашенная область соответствует устойчивости постоянного решения (9) системы (6) согласно критерию Уизема (12)

Как видно из графика, чем больше коэффициент α (более крутой наклон дна), тем уже диапазон чисел Ричардсона Ri , для которых выполнены условия устойчивости Уизема (12). При этом в верхней не закрашенной области параметров на рис. 2 система (6) является эллиптической, а в нижней — гиперболической.

Взаимное расположение равновесной λ_e и замороженных характеристик $\hat{\lambda}_{\pm}$ в зависимости от параметра $\alpha \in (0, 8)$ при фиксированной толщине нижнего слоя $h = 1$ и числе Ричардсона равном $\text{Ri} = 0.02$ и $\text{Ri} = 0.5$ показано на рис. 3. В первом случае (см. рис. 3 (a)) при $\alpha > \alpha_* \approx 4.5$ нарушается неравенство $\lambda_e < \hat{\lambda}_+$, что говорит о неустойчивости постоянного решения для указанных параметров. Во втором случае (см. рис. 3 (b)) условия устойчивости (12) не нарушаются. Условие гиперболичности (8) ограничивает диапазон изменения α значением $\alpha^* = 8$, при котором скорости равновесной и замороженных характеристик совпадают. Приведённые ниже расчёты иллюстрируют неустойчивость постоянного решения (9) при нарушении условий (12).

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Нелинейная модель (6) допускает решения с сильными разрывами, которые могут возникнуть в результате эволюции гладкого решения. Для корректного моделирования внутренних гидравлических скачков необходимо выбрать физически корректную консервативную форму модели [9, 18]. Для проведения численных расчётов и построения кусочно-гладких решений в классе бегущих волн будем использовать следующую консервативную форму уравнений (6),

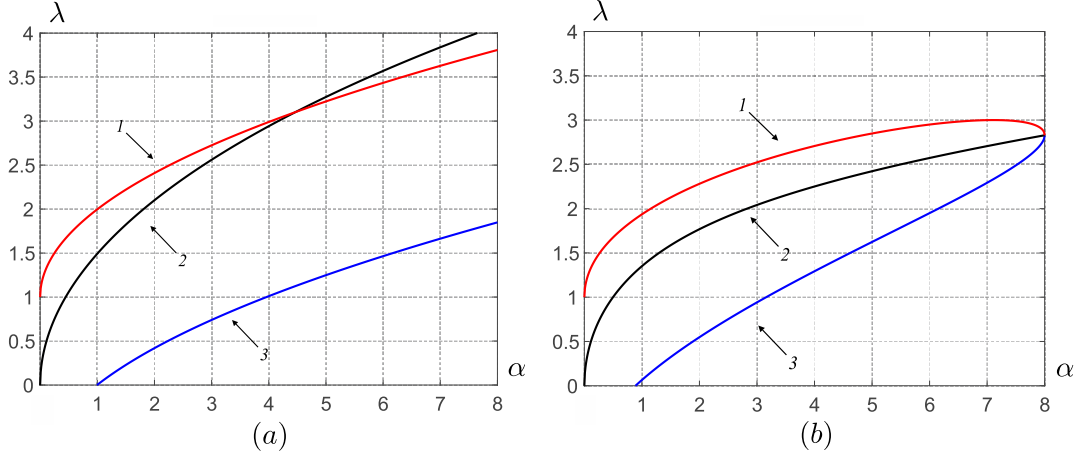


Рис. 3. Равновесная λ_e (кривые 2) и замороженные $\hat{\lambda}_{\pm}$ (кривые 1 и 3) скорости характеристик в зависимости от параметра α при $Ri = 0.02$ (a) и $Ri = 0.5$ (b)

соответствующую законам сохранения массы и импульса:

$$\begin{aligned} m_t + \left(\left(m - \frac{Ri}{4} u^2 \right) u \right)_x &= 0, \\ (um)_t + \left(u^2 m + \frac{m^2}{2} - \frac{3Ri}{16} u^4 \right)_x &= \alpha m - \frac{mu^2}{h}. \end{aligned} \quad (13)$$

Численное моделирование выполняется на основе простой и надёжной схемы второго порядка, разработанной для решения гиперболических законов сохранения [20]. Программный код реализован в MATLAB. Расчёты проводятся в промежутке $[0, L]$ на равномерной сетке с числом узлов N , шаг по времени определяется автоматически из условия Куранта с использованием скоростей характеристик (7). В качестве начальных данных берётся постоянное решение $m = m_0$, $u = u_0$, определяемое формулами (9) с $h_e = 1$. На левой границе $x = 0$ в поток вносятся малые периодические возмущения $m = m_0 + 0.01 \sin(4\pi t)$, $u = u_0$. На правой границе задаются условия Неймана $U_N = U_{N-1}$ (U_i – значение искомых функций в i -м узле). Во всех рассмотренных ниже случаях длина расчётного интервала $L = 100$ и число узлов $N = 8000$, что обеспечивает достаточное пространственное разрешение.

Формирование квазипериодических волн конечной амплитуды в результате эволюции малых периодических возмущений постоянного решения показано на рис. 4. Приведены графики скорости $u(x)$ для $Ri = 0.02$, $\alpha = 6$ и $\alpha = 7$ в момент времени $t = 40$, при котором возмущения достигли правой границы расчётной области. Качественное поведение переменных m и h аналогично. Указанные параметры (α, Ri) принадлежат нижней не закрашенной области на рис. 2, при которых система (6) является гиперболической, но нарушаются условия устойчивости (12). Как видно из рис. 4 с ростом α при фиксированном Ri увеличивается амплитуда a сформировавшихся волн, которая для переменной u составляет $a = 0.27$ при $\alpha = 6$ и $a = 0.45$ при $\alpha = 7$. Увеличение прослоечного числа Ричардсона напротив ведёт к уменьшению амплитуды волны, а при переходе в область выполнения условий устойчивости (12) к затуханию малых возмущений.

Далее будет показано, что профиль сформировавшихся волн конечной амплитуды, называемых катающимися волнами [21], совпадает с точным кусочно-гладким решением уравнений (13) в классе бегущих волн, в котором искомые функции зависят от переменной $\xi = x - Dt$. Прежде чем перейти к построению катающихся волн покажем, что решения уравнений (5) в канале конечной толщины $H(x)$ стремятся к решению системы (6) для течений в затопленном

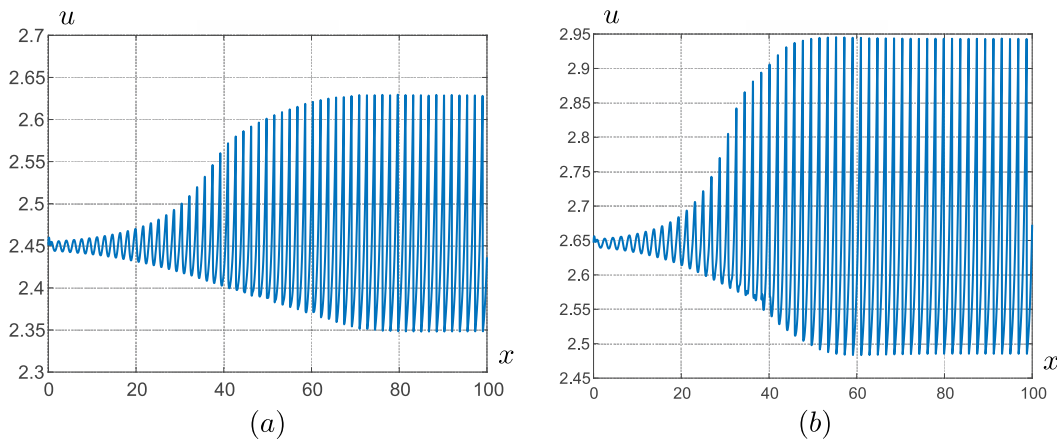


Рис. 4. Распределение скорости $u(x)$ при $t = 40$, полученное в результате эволюции малых периодических возмущений решения уравнений (13) при $\text{Ri} = 0.02$ и $\alpha = 6$ (а), $\alpha = 7$ (б)

пространстве при увеличении толщины верхнего слоя ζ . При этом более общая система уравнений (5) не допускает решений в классе бегущих волн.

Выполним расчёты по моделям (6) и (5) (в консервативной форме для переменных m и r) с начальными и граничными условиями, как в предыдущем примере (см.рис. 4). Для модели (5) при $t = 0$ дополнительно зададим нулевую скорость верхнего слоя $w = 0$ и уровень верхней границы H_0 , равный полной толщине слоя жидкости в сечении $x = 0$. Как и прежде, значения параметров $\alpha = 6$ и $\text{Ri} = 0.02$. На рис. 5 приведены графики, полученные при $H_0 = 50$ (верхняя панель) и $H_0 = 1000$ (нижняя панель) в момент времени $t = 40$.

Решение уравнений (6) и (5) показано сплошными и пунктирными линиями, соответственно. При указанных параметрах в рамках более старшей модели (5) также наблюдается рост малых возмущений и формирование квазипериодических волн конечной амплитуды, несколько превышающих амплитуду волн для модели (6). На рис. 5 (а, б) для переменных m и u наблюдается заметное различие в результатах расчёта, особенно на промежутке $x \in (30, 60)$, что обусловлено влиянием конечной толщины канала $H = H_0 + \alpha x$ в модели (5). При увеличении значения H_0 различия в решениях моделей уменьшаются. Это демонстрирует рис. 5 (с, д), полученный при $H_0 = 1000$. На графиках приведено распределение $m(x)$ на промежутке $x \in (40, 60)$ и более узком интервале. Таким образом, решения уравнений (5) при увеличении толщины $H(x)$ стремятся к решениям модели глубководного течения (6).

В представленных на рис. 4 и 5 расчётах развития катящихся волн прослеживается стабилизация волнового пакета по периоду и амплитуде. Одним из способов выяснения устойчивости пакета нелинейных волн является вывод уравнений модуляций для средних величин, характеризующих параметры волн, и определение типа полученной системы [9, 18]. Здесь этот анализ не проводится, но поскольку уравнения (6) близки к классическим уравнениям мелкой воды (совпадают при $\text{Ri} = 0$), то результаты будут аналогичны полученным в [9] (гл. 3, пар. 2).

4. КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ

В работе [21] предложен метод построения двухпараметрических периодических решений уравнений мелкой воды в классе бегущих волн (искомые функции зависят от переменной $\xi = x - Dt$, $D > 0$). Решения состоят из гладких участков, на которых происходит непрерывный переход докритического течения в сверхкритическое относительно скорости волны D , и сильных разрывов (гидравлических прыжков). Следуя [9, 21], будем называть такие решения катящимися волнами. Этот подход известен и применяется к различным моделям механики жидкости. В частности, катящиеся волны для двухслойных течений в наклонном

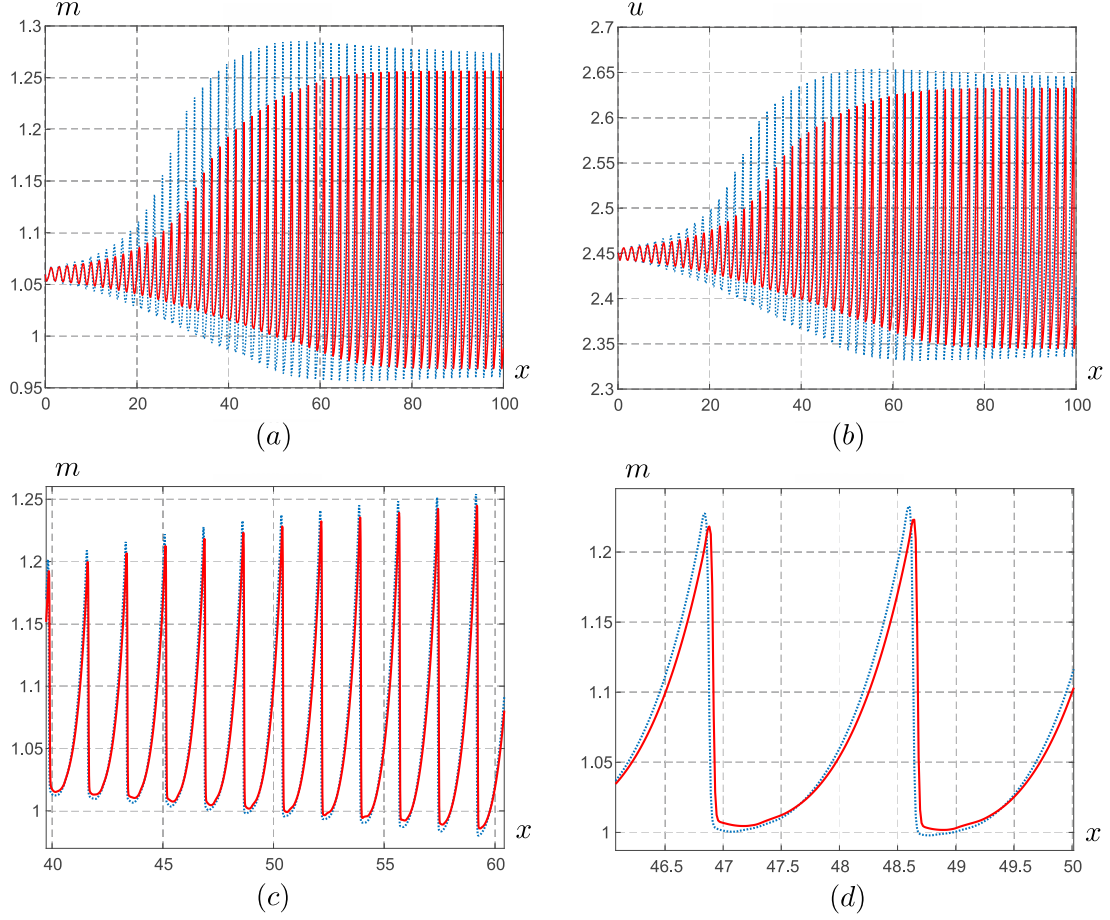


Рис. 5. Решения уравнений (5) (пунктир) и (6) (сплошные линии) при $t = 40$, полученные в результате эволюции малых возмущений постоянного решения (9) с параметрами $\alpha = 6$ и $\text{Ri} = 0.02$ при $H_0 = 50$ (a, b) и $H_0 = 1000$ (c, d)

канале построены в [22], для течений газа с внешним источником энергии в [23]. Применим технику [21] для построения кусочно-гладких периодических решений системы (13).

В классе бегущих волн система уравнений (13) принимает вид

$$\begin{aligned} (u - D)m - \frac{\text{Ri}}{4}u^3 &= (u_c - D)m_c - \frac{\text{Ri}}{4}u_c^3, \\ \left((u - D)um + \frac{m^2}{2} - \frac{3\text{Ri}}{16}u^4 \right)' &= \alpha m - \frac{mu^2}{h}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по ξ , u_c и m_c – постоянные. Выразим из первого уравнения (14) переменную $m = m(u)$ и введём обозначения

$$G(u) = (u - D)um + \frac{m^2}{2} - \frac{3\text{Ri}}{16}u^4, \quad F(u) = \alpha m - \frac{mu^2}{h}, \quad \Delta(u) = \frac{dG}{du}.$$

Тогда система (14) сводится к ОДУ

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{F}{\Delta}. \quad (15)$$

Как отмечалось выше, в катающейся волне происходит непрерывный переход докритического течения $\Delta > 0$ в сверхкритическое $\Delta < 0$. Для этого необходимо, чтобы функции $F(u)$ и $\Delta(u)$ обращались в нуль в одной точке: $F(u_c) = 0$, $\Delta(u_c) = 0$. Из первого соотношения

следует, что $u_c = \sqrt{\alpha h_c}$ и $m_c = (1 + \alpha \text{Ri}/2)h_c$, т. е. соответствует постоянному решению (9) с критической глубиной h_c . Значение h_c выбирается произвольно. Из условия $\Delta(u_c) = 0$ определяем скорость волны

$$D = \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{1 - \frac{\alpha \text{Ri}}{4}} \right) \sqrt{h_c},$$

которая равна скорости характеристики $\lambda_+(m, u)$ в точке $m = m_c$, $u = u_c$. Графики функций $G(u)$, $F(u)$ и $\Delta(u)$ с параметрами $\alpha = 6$, $\text{Ri} = 0.02$ и критической скоростью $u_c = 2.5$ представлены на рис. 6.

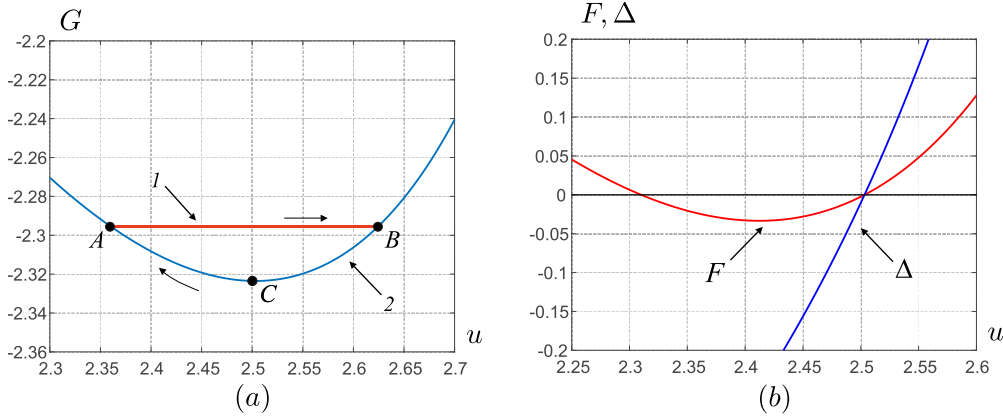


Рис. 6. График функции $G(u)$ (а) и взаимное расположение кривых $F(u)$ и $\Delta(u)$ (б), полученные при $\alpha = 6$, $\text{Ri} = 0.02$ и $u_c = 2.5$

Периодическое решение системы (14) состоит из гладкого участка течения BCA (кривая 2 на рис. 6 (а)), на котором поток непрерывно переходит из докритического состояния в сверхкритическое ($\Delta = 0$ в точке C), и сильного разрыва (кривая 1), связывающего точки A и B . Амплитуда скачка (длина отрезка AB) или значение u_A (скорость в точке A) выбирается произвольно, но так, чтобы правая часть уравнения (15) не меняла знак при изменении u на промежутке AB . Значение u_B в точке B находится из условия Ренкина–Гюгонио $[G] = 0$. Взаимное расположение кривых F и Δ показано на рис. 6 (б). Как видно из графика отношение $F/\Delta > 0$, если $u_A > u_* \approx 2.31$. Поэтому значение u_A точки A , лежащей на кривой $G = G(u)$, должно быть в промежутке от u_* до u_c . Таким образом, гладкий профиль волны определяется решением ОДУ (15) и сильным разрывом $[G] = 0$, являющимся условием Ренкина – Гюгонио для системы (14).

Построенное кусочно-гладкое периодическое решение соответствует профилю волны, полученному в нестационарном расчёте на рис. 4. При $x > 80$ минимальное значение переменной $u \approx 2.347$ (см. рис. 4 (а)). Для данного значения u_A при $\alpha = 6$ и $\text{Ri} = 0.02$ подбираем значение критической скорости u_c , обеспечивающее наилучшее совпадение решений. На рис. 7 пунктиром показан профиль бегущей волны (решение ОДУ (15)) при $u_c = 2.5$. Сплошной линией показана часть рис. 4 (а). Сплошная и пунктирная линия на интервале $x \in (85, 86.6)$ практически совпадают. Таким образом, эволюция малых возмущений постоянного решения (9) системы уравнений (13) приводит к формированию катящихся волн.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена предложенная в [19] равновесная длинноволновая модель (4), описывающая в приближении Буссинеска трёхслойное течение над склоном в канале конечной толщины (см. рис. 1). Эта нелинейная модель характеризуется постоянным прослоечным числом Ричардсона и является более простой по сравнению с известными моделями формирования

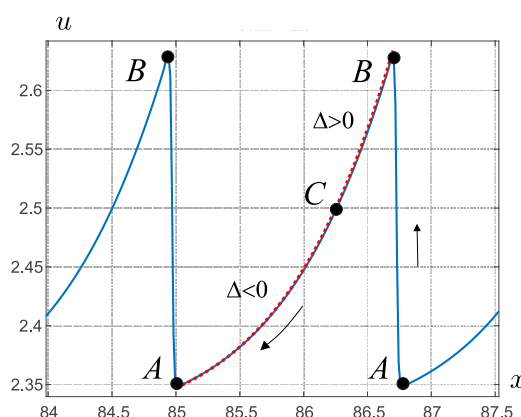


Рис. 7. Сравнение решения системы (13) (часть рис. 4 (а), сплошная линия) и профиля катящейся волны (15) (пунктир) при $\alpha = 6$, $Ri = 0.02$, $u_A = 2.347$ и $u_c = 2.5$

и эволюции слоя смешения в двухслойных течениях [10, 11]. Для движений стратифицированной жидкости с пассивным верхним слоем (покоящимся и бесконечно глубоким) модель редуцируется к системе уравнений (6), близкой по структуре к классическим уравнениям теории мелкой воды. Найдены скорости характеристик (7) и с использованием критерия Уизема сформулированы условия устойчивости (13) постоянного решения системы (6), определяемые прослоечным числом Ричардсона Ri и параметром α (отношение наклона дна к донному трению).

Уравнения (6) представлены в виде системы законов сохранения массы и импульса (13), на основе которой проведены нестационарные расчёты распространения внутренних волн. Показано, что при нарушении условий устойчивости Уизема в процессе эволюции малых возмущений постоянного решения модели могут формироваться квазипериодические волны конечной амплитуды (рис. 4). При этом для рассматриваемых примеров система уравнений остаётся в области гиперболичности. Сравнение с исходной моделью течения в канале конечной толщины показывает, что решения уравнений (5) при увеличении толщины канала $H(x)$ стремятся к решению системы (6) для течения в затопленном пространстве (рис. 5). В классе бегущих волн построены точные периодические кусочно-гладкие решения (катающиеся волны), определяемые двумя параметрами – критической толщиной и амплитудой волны. Рис. 7 показывает, что профиль волн конечной амплитуды, формирующихся в процессе нелинейной эволюции малых возмущений постоянного решения уравнений (13), совпадает с решением ОДУ (15) при подходящем выборе параметров катящихся волн.

Автор благодарит А. А. Чеснокова и В. Ю. Ляпидевского за полезные обсуждения.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-21-00811). Других источников финансирования проведения или руководства данным конкретным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baines P.G. Topographic effects in stratified flows. Cambridge Univ. Press, 1995.
2. He Z., Okon S.U., Zhu R., Pähitz T., Meiburg E. Dynamics of gravity currents under external and internal stratification in geophysical systems // *Earth-Sci. Rev.* 2025. V. 271; DOI: 10.1016/j.earscirev.2025.105270
3. Ogden K.A., Helfrich K.R. Internal hydraulic jumps in two-layer flows with increasing upstream shear // *Phys. Rev. Fluids.* 2020. V. 5; DOI: 10.1103/physrevfluids.5.074803
4. Lawrence G.A., Armi L. Stationary internal hydraulic jumps // *J. Fluid Mech.* 2022. V. 936; DOI: 10.1017/jfm.2022.74
5. Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V. A note on the propagation speed of a weakly dissipative gravity current // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 574. P. 393–403.
6. Dai A. Experiments on gravity currents propagating on different bottom slopes // *J. Fluid Mech.* 2013. V. 731. P. 117–141.
7. Zhu R., He Z., Meiburg E. Mixing, entrainment and energetics of gravity currents released from two-layer stratified locks // *J. Fluid Mech.* 2023. V. 960; DOI: 10.1017/jfm.2023.146
8. Ungarish M. Gravity Currents and Intrusions — Analysis and Prediction. New Jersey, London, Tokyo: World Scientific, 2020.
9. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
10. Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А. Слой смешения в двухслойных спутных течениях стратифицированной жидкости // *Прикл. математика и техн. физика.* 2022. Т. 63, № 6. С. 122–134.
11. Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А. Равновесная модель слоя смешения в сдвиговом течении стратифицированной жидкости // *Прикл. математика и техн. физика.* 2024. Т. 65, № 3. С. 43–55.
12. Chesnokov A.A., Liapidevskii V.Yu., Kazakov A.L. Nonlinear internal waves and turbulent mixing in a three-layer stratified fluid in a closed reservoir // *Internat. J. Non-Linear Mech.* 2025. V. 179; DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105241
13. Ляпидевский В.Ю., Чесноков А.А. Обрушение уединённых внутренних волн в трёхслойной жидкости над препятствием // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 2025. Т. 65, № 5. С. 673–685.
14. Gavriluk S.L., Liapidevskii V.Yu., Chesnokov A.A. Interaction of a subsurface bubble layer with long internal waves // *Europ. J. Mech. B/Fluids.* 2019. V. 73. P. 157–169.
15. Ермишина В.Е. Гиперболическая модель сильно нелинейных волн в двухслойных течениях неоднородной жидкости // *Сиб. журн. индустр. математики.* 2022. Т. 25, № 4. С. 71–85.
16. Ляпидевский В.Ю., Зуёв О.А., Макаренко Н.И., Морозов Е.Г., Фрей Д.И. Расщепление стратифицированных течений над препятствиями // *Прикл. математика и техн. физика.* 2025. Т. 66, № 4. С. 118–128.
17. Чесноков А.А., Тарасов С.К. Волновые режимы течения и перемешивание в придонных гравитационных потоках // *ПМТФ.* 2025. Т. 66, № 4. С. 58–73.
18. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
19. Ляпидевский В.Ю. Двухслойная равновесная модель течения смешивающейся неоднородной жидкости // *Изв. РАН. МЖГ.* 2024. № 4. С. 76–89.
20. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* 1990. V. 87. P. 408–463.
21. Dressler P.G. Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels // *Comm. Pure Appl. Math.* 1949. V. 2. P. 140–194.
22. Boudlal A. Roll waves and plugs in two-layer flows // *Europ. J. Appl. Math.* 2008. V. 19. P. 1–19.
23. Чесноков А.А. Волновые структуры в течениях идеального газа с внешним источником энергии // *Труды МИАН.* 2023. Т. 322. С. 241–250.

UDC 532.591:532.517

ROLL WAVES IN A BOTTOM DENSITY CURRENT

© 2026 S. K. Tarasov

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
Akad. Lavrentyev prosp., 15, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: s.tarasov1@g.nsu.ru

Received 07.05.2026, revised 09.07.2026, accepted 15.07.2027

Abstract. A three-layer stratified flow with mass transfer over a sloping bottom is considered. It is assumed that vortex generation in the intermediate layer is balanced by dissipative effects. In the Boussinesq approximation, the flow is described by equations of motion similar in structure to the two-layer shallow water model under a cover. For deep-water currents, the model is reduced to single-layer shallow water equations, including the interlayer Richardson number as a parameter. Using the Whitham criterion, conditions are obtained under which small perturbations of a constant solution are transformed into nonlinear quasiperiodic wave packets of finite amplitude. Numerical simulations of the evolution of small perturbations are performed, demonstrating the formation of roll waves. A two-parameter class of exact piecewise smooth periodic solutions corresponding to the roll wave regime is constructed.

Keywords: gravity currents, Boussinesq approximation, long-wave disturbances, roll waves.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.207

REFERENCES

1. Baines P.G. Topographic effects in stratified flows. Cambridge Univ. Press, 1995.
2. He Z., Okon S.U., Zhu R., Pätz T., Meiburg E. Dynamics of gravity currents under external and internal stratification in geophysical systems. *Earth-Sci. Rev.*, 2025, Vol. 271; DOI: 10.1016/j.earscirev.2025.105270
3. Ogden K.A., Helfrich K.R. Internal hydraulic jumps in two-layer flows with increasing upstream shear. *Phys. Rev. Fluids*, 2020, Vol. 5; DOI: 10.1103/physrevfluids.5.074803
4. Lawrence G.A., Armi L. Stationary internal hydraulic jumps. *J. Fluid Mech.*, 2022, Vol. 936; DOI: 10.1017/jfm.2022.74
5. Ermanyuk E.V., Gavrilov N.V. A note on the propagation speed of a weakly dissipative gravity current. *J. Fluid Mech.*, 2007, Vol. 574, pp. 393–403.
6. Dai A. Experiments on gravity currents propagating on different bottom slopes. *J. Fluid Mech.*, 2013, Vol. 731, pp. 117–141.
7. Zhu R., He Z., Meiburg E. Mixing, entrainment and energetics of gravity currents released from two-layer stratified locks. *J. Fluid Mech.*, 2023, Vol. 960; DOI: 10.1017/jfm.2023.146
8. Ungarish M. Gravity Currents and Intrusions — Analysis and Prediction. New Jersey, London, Tokyo: World Scientific, 2020.
9. Liapidevskii V.Yu., Teshukov V.M. Matematicheskie modeli rasprostraneniya dlinnyh voln v neodnorodnoj zhidkosti [Mathematical models of long wave propagation in an inhomogeneous fluid]. Novosibirsk: Publ. SB RAS, 2000 (In Russian).

10. Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A. Mixing layer in two-layer stratified flows. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, Vol. 63, pp. 1010–1021; DOI: 10.1134/S0021894422060141
11. Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A. Equilibrium model of the mixing layer in shear flow of a stratified fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2024, Vol. 65, pp. 427–438. DOI: 10.1134/S0021894424030040
12. Chesnokov A.A., Liapidevskii V.Yu., Kazakov A.L. Nonlinear internal waves and turbulent mixing in a three-layer stratified fluid in a closed reservoir. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 2025, Vol. 179; DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2025.105241
13. Liapidevskii V.Yu., Chesnokov A.A. Breaking of internal solitary waves in a three-layer fluid over an obstacle. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2025, Vol. 65, pp. 1013–1025; DOI: 10.1134/S0965542525700332
14. Gavriluk S.L., Liapidevskii V.Yu., Chesnokov A.A. Interaction of a subsurface bubble layer with long internal waves. *Europ. J. Mech. B/Fluids*, 2019, Vol. 73, pp. 157–169.
15. Ermishina V.E. A Hyperbolic Model of Strongly Nonlinear Waves in Two-Layer Flows of an Inhomogeneous Fluid. *J. Appl. Ind. Math.*, 2022, Vol. 16, pp. 659–671; DOI: 10.1134/S199047892204007X
16. Lyapidevsky, V.Y., Zuev, O.A., Makarenko, N.I. et al. Splitting of Stratified Flows over Obstacles. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2025, Vol. 66, pp. 735–744; DOI: 10.1134/S0021894425700294
17. Chesnokov A.A., Tarasov S.K. Wave regimes and mixing in bottom gravity currents. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2025, Vol. 66, pp. 683–696; DOI: 10.1134/S0021894425700257
18. Whitham G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. N. Y.: J. Wiley and Sons, 1974.
19. Liapidevskii V.Yu. Two-layer equilibrium model of the flow of a miscible inhomogeneous fluid. *J. Fluid Dynamics*, 2024, Vol. 59, pp. 709–722.
20. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 1990, Vol. 87, pp. 408–463.
21. Dressler P.G. Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1949, Vol. 2, pp. 140–194.
22. Boudlal A. Roll waves and plugs in two-layer flows. *Europ. J. Appl. Math.*, 2008, Vol. 19, pp. 1–19.
23. Chesnokov A.A. Wave structures in ideal gas flows with an external energy source. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2023, Vol. 322, pp. 232–241; DOI: 10.1134/S0081543823040193

УДК 517.938:517.984

КОМБИНАЦИОННЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЬЁ — ХИЛЛА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2026 А. Г. Швец

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090, Россия

E-mail: a.shvets1@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 27.04.2026 г.; после доработки 11.06.2026 г.;
принята к публикации 15.07.2026 г.

В работе методом усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского исследуется комбинационный параметрический резонанс в гильбертовом пространстве H для нелинейного уравнения Матьё — Хилла вида $u''(t) + A^2u(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t))$, где A^2 — самосопряжённый положительный оператор в H с компактной резольвентой. Правая часть $\varepsilon F(\omega t, u(t))$ предполагается периодическим по времени t возмущением с частотой $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$ — малый скалярный параметр. Показано, что в первом приближении наряду с основными параметрическими резонансами возникают комбинационные резонансы, определяемые резонансными соотношениями $k\omega = \nu_p \pm \nu_q$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $p \neq q$, где ν_n — собственные значения оператора $A = (A^2)^{\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$. В случае комбинационного резонанса установлены условия конечности резонансных наборов индексов (p, q) при фиксированной частоте ω , что обеспечивает отделённость нерезонансных частотных комбинаций от нуля. Также построена усреднённая конечномерная резонансная система первого приближения и доказано, что решения исходного уравнения аппроксимируются решениями построенной усреднённой системы с оценкой погрешности в норме пространства H порядка $O(\varepsilon)$ на промежутке длины T/ε .

Ключевые слова: уравнение Матьё — Хилла, оператор Штурма — Лиувилля, комбинационный параметрический резонанс, метод усреднения, усреднённая резонансная система первого приближения

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.208

ВВЕДЕНИЕ

Параметрический резонанс является одним из наиболее характерных проявлений неустойчивости в системах, в которых параметры изменяются периодически по времени [1]–[5]. Для уравнений вида

$$u''(t) + A^2u(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где $T > 0$ — фиксированный момент времени, резонансные явления возникают при определённых частотах внешнего воздействия, согласующихся со спектральными характеристиками невозмущённой задачи, и в резонансных режимах могут приводить к заметному росту амплитуд решений даже при малых возмущениях. В нелинейных задачах это явление, как правило, сопровождается появлением медленной динамики амплитуд [3]–[5]; при этом картина резонанса существенно отличается от линейного случая, что было показано в [6].

Уравнение (1) в гильбертовом пространстве H относится к классу операторных уравнений Матьё — Хилла, возникающих при описании колебательных процессов в распределённых системах, когда периодическое по времени возмущение действует на параметры или на состояние системы [6], [7]. В [6] предложен подход к исследованию основного параметрического

резонанса для абстрактных уравнений Матьё — Хилла (1) в гильбертовом пространстве H , основанный на применении модифицированного метода усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского [8], [9]. В настоящей работе, как и в [6], оператор A^2 является самосопряжённым, положительным оператором в H с компактной резольвентой; поэтому спектр оператора A состоит из счётного набора собственных значений ν_n , $\nu_n \rightarrow \infty$, а соответствующие собственные функции φ_n образуют ортонормированный базис в H . В связи с колебательной интерпретацией решений невозмущённого уравнения эти собственные значения ν_n оператора $A = (A^2)^{1/2}$, $n \in \mathbb{N}$, далее будем называть собственными частотами невозмущённой задачи. Важная особенность подобных задач в H состоит в том, что резонансные режимы определяются этими собственными частотами. В [6] рассматривались резонансные случаи, связанные с одной собственной частотой ν_p : внешние резонансы задавались соотношениями $k\omega = \nu_p$, а основные параметрические резонансы — соотношениями $k\omega = 2\nu_p$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. В нашей работе методом усреднения Крылова — Боголюбова — Митропольского для уравнения Матьё — Хилла (1) исследуется комбинационный параметрический резонанс. В этом случае резонансные соотношения имеют вид $k\omega = \nu_p \pm \nu_q$, $p \neq q$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то есть внешняя частота связана с суммой или разностью двух различных собственных частот.

Метод усреднения возник в задачах теории нелинейных колебаний и небесной механики [10] и получил систематическое развитие в работах Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [8], [9]. Для линейных задач параметрического резонанса близкие вопросы рассматривались в [1], а для конечномерных нелинейных систем — в [11].

Непосредственно к рассматриваемой тематике примыкают работы [12], [13]. Задачи о нелинейных комбинационных резонансах для конкретных механических и осцилляторных моделей рассматривались в [14]–[16]: в [14] изучалась система связанных нелинейных уравнений Матьё, в [15] — аксиально движущаяся вязкоупругая балка, в [16] — аксиально движущаяся пьезоэлектрическая пластина.

Цель настоящей работы состоит в выделении условий комбинационного параметрического резонанса для уравнения (1) в гильбертовом пространстве H , построении соответствующей конечномерной усреднённой системы первого приближения и обосновании этого приближения на промежутках времени порядка T/ε с погрешностью $O(\varepsilon)$ в норме пространства H . Для этого исходное уравнение сводится к системе для медленных амплитуд, затем выделяются резонансные частотные комбинации, доказывается отделённость нерезонансных комбинаций от нуля и строится усреднённая резонансная система. В результате исследование решений уравнения (1) в комбинационном резонансном режиме сводится к анализу конечномерной системы для резонансных амплитуд.

Структура работы следующая. В разд. 1 приводятся предварительные сведения и постановка задачи. В разд. 2 выводятся уравнения для медленных амплитуд и резонансные соотношения. В разд. 3 устанавливается контроль малых знаменателей. В разд. 4 строится усреднённая резонансная система первого приближения. В разд. 5 доказывается оценка погрешности первого приближения. В заключении обсуждается переход к почти-периодическим возмущениям.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ и нормой

$$\|u\|_H = \langle u, u \rangle_H^{1/2}.$$

Обозначим через $\mathcal{L}(H)$ пространство линейных ограниченных операторов $T: H \rightarrow H$, определённых на всём пространстве H , с нормой

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \sup_{\|u\|_H=1} \|Tu\|_H.$$

1.1. Метод усреднения для построения первого приближения

При исследовании уравнений вида (1) исходное уравнение с помощью замены переменных записывают в стандартном виде в смысле Н. Н. Боголюбова (см. [8])

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon Z(t, z, \varepsilon),$$

где z обозначает новую неизвестную функцию, а правая часть периодически зависит от времени t . Так как ε стоит перед функцией $Z(t, z, \varepsilon)$, то за один период изменения коэффициентов функция $z(t)$ меняется мало, а основной вклад в её изменение накапливается на промежутках времени порядка $O(1/\varepsilon)$.

Пусть правая часть допускает следующее разложение по степеням малого параметра ε :

$$Z(t, z, \varepsilon) = Z_0(t, z) + \varepsilon Z_1(t, z) + \varepsilon^2 Z_2(t, z) + \dots \quad (2)$$

При построении первого приближения решения z учитывают только главный член $Z_0(t, z)$. Если его период по времени равен T_0 , то средним значением главного члена называется функция

$$\bar{Z}_0(z) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} Z_0(s, z) ds.$$

Система первого усреднённого приближения имеет вид

$$z_1'(t) = \varepsilon \bar{Z}_0(z_1(t))$$

относительно неизвестной функции z_1 . Она называется системой первого приближения потому, что в ней сохраняется только средний вклад главного члена правой части системы, записанной в стандартном виде. При выполнении определённых условий гладкости и ограниченности правой части $Z(t, z, \varepsilon)$ решение этой системы приближает решение исходной системы, записанной в стандартном виде, на промежутках времени порядка $1/\varepsilon$.

Для построения следующих n -х приближений вводят замену переменных с поправками

$$z(t) = \xi(t) + \varepsilon v_1(t, \xi(t)) + \varepsilon^2 v_2(t, \xi(t)) + \dots + \varepsilon^n v_n(t, \xi(t)).$$

Функции $v_1, v_2, \dots, v_n$ выбираются периодическими по времени и подбираются последовательно по степеням ε : на каждом шаге слагаемые преобразованной правой части, имеющие среднее значение, включаются в усреднённую систему, а слагаемые с нулевым средним устраняются за счёт очередной периодической поправки (см. [8], [9]). В итоге получается усреднённая система

$$\xi'(t) = \varepsilon G_1(\xi(t)) + \varepsilon^2 G_2(\xi(t)) + \dots + \varepsilon^n G_n(\xi(t)) + \varepsilon^{n+1} R(\xi(t), t, \varepsilon),$$

где R обозначает остаточный член. Здесь $G_1 = \bar{Z}_0$, а функции $G_2, \dots, G_n$ возникают при учёте поправок $v_1, \dots, v_n$ и членов $Z_1, Z_2, \dots$ в разложении правой части (2). В частности, при $n = 1$ для переменной ξ получается преобразованная система

$$\xi'(t) = \varepsilon G_1(\xi(t)) + \varepsilon^2 R(\xi(t), t, \varepsilon).$$

После отбрасывания остаточного члена порядка ε^2 она даёт систему первого усреднённого приближения для $z_1(t)$, записанную выше. Чем выше порядок приближения, тем больше условий требуется на гладкость правой части в разложении (2) и тем сложнее становится контроль остаточных членов.

В задачах параметрического резонанса особую роль играет то, какие слагаемые преобразованной правой части имеют ненулевое среднее. В дальнейшем будут встречаться множители вида $e^{i\Phi t}$, где $\Phi \in \mathbb{R}$. Для отдельного такого множителя среднее по времени понимается как

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S e^{i\Phi t} dt.$$

Это среднее равно единице при $\Phi = 0$ и равно нулю при $\Phi \neq 0$. Поэтому построение первого приближения в резонансной задаче сводится к выделению слагаемых с ненулевым средним и оценке вклада остальных слагаемых.

1.2. Оператор A и спектральные обозначения

По предположению оператор A^2 является самосопряжённым в H , имеет компактную резольвенту и положительно определён в следующем смысле: существует число $\alpha > 0$ такое, что

$$\langle A^2 u, u \rangle_H \geq \alpha^2 \|u\|_H^2, \quad u \in D(A^2).$$

Положим $A = (A^2)^{1/2}$, где A — положительный квадратный корень оператора A^2 (см. [17]). Тогда A является самосопряжённым положительным оператором. Кроме того, для $u \in D(A)$ имеем

$$\|Au\|_H^2 \geq \alpha^2 \|u\|_H^2,$$

откуда следует, что $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

Компактность резольвенты оператора A^2 обеспечивает дискретность спектра и существование в H ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subset H$ из собственных векторов оператора A (см. [17]). Обозначим соответствующие собственные значения оператора A через $\nu_n > 0$, $\nu_n \rightarrow \infty$. Тогда

$$A\varphi_n = \nu_n \varphi_n, \quad A^2 \varphi_n = \nu_n^2 \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для любого $u \in H$ имеет место единственное разложение в ряд Фурье

$$u = \sum_{n \geq 1} u_n \varphi_n, \quad u_n = \langle u, \varphi_n \rangle_H, \quad \|u\|_H^2 = \sum_{n \geq 1} |u_n|^2. \quad (3)$$

Пример. Оператор Штурма — Лиувилля. В качестве A^2 можно рассматривать оператор Штурма — Лиувилля с однородными граничными условиями Дирихле

$$(A^2 u)(x) = -u''(x) + q(x)u(x), \quad u(a) = u(b) = 0,$$

где $q \in L^\infty([a, b])$ и $q(x) \geq q_0 > 0$ почти всюду на $[a, b]$. Его область определения имеет вид

$$D(A^2) = \{u \in W_2^2(a, b) : u(a) = u(b) = 0\}.$$

Тогда оператор A^2 является самосопряжённым и положительно определённым в $L^2(a, b)$. Компактность его резольвенты следует из того, что резольвента действует из $L^2(a, b)$ в $D(A^2) \subset W_2^2(a, b)$, а вложение $W_2^2(a, b) \hookrightarrow L^2(a, b)$ компактно. Собственные значения оператора A имеют асимптотику (см. [18])

$$\nu_n = c_1 n + \frac{c_2}{n} + r_n, \quad |r_n| \leq \frac{c}{n^2}, \quad n \geq 1, \quad (4)$$

где $c_1 > 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Именно это спектральное свойство будет использовано далее для контроля малых знаменателей при усреднении уравнения (1).

1.3. Задача Коши для уравнения (1)

Для уравнения (1) рассмотрим задачу Коши с начальными условиями

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (5)$$

Предположим, что начальные данные согласованы с операторами A и A^2 следующим образом:

$$u^0 \in D(A^2), \quad u^1 \in D(A),$$

где $D(A^2)$ и $D(A)$ — области определения операторов A^2 и A соответственно.

Невозмущённое уравнение (1) ($\varepsilon = 0$) имеет вид

$$u''(t) + A^2 u(t) = 0. \quad (6)$$

Покажем, что все решения задачи (5), (6) ограничены. Для этого рассмотрим функционал

$$E(t) = \frac{1}{2} (\|u'(t)\|_H^2 + \|Au(t)\|_H^2), \quad (7)$$

заданный на решении $u(t)$ задачи (5), (6). Дифференцируя (7) по t , получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} (\langle u''(t), u'(t) \rangle_H + \langle u'(t), u''(t) \rangle_H + \langle Au'(t), Au(t) \rangle_H + \langle Au(t), Au'(t) \rangle_H).$$

Так как A самосопряжён, имеем

$$\langle Au(t), Au'(t) \rangle_H = \langle A^2 u(t), u'(t) \rangle_H, \quad \langle Au'(t), Au(t) \rangle_H = \langle u'(t), A^2 u(t) \rangle_H.$$

Поэтому

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} (\langle u''(t) + A^2 u(t), u'(t) \rangle_H + \langle u'(t), u''(t) + A^2 u(t) \rangle_H).$$

С учётом (6) отсюда следует, что $\frac{dE}{dt} = 0$, то есть $E(t) = E(0)$, $t \geq 0$. Из соотношений (5), (7) получаем

$$\|u'(t)\|_H^2 + \|Au(t)\|_H^2 = \|u^1\|_H^2 + \|Au^0\|_H^2.$$

Итак, величины $\|u'(t)\|_H$ и $\|Au(t)\|_H$ остаются ограниченными по t . Кроме того, из положительной определённости оператора A^2 следует оценка $\|Au\|_H \geq \alpha \|u\|_H$ для $u \in D(A)$. Следовательно, ограниченность $\|Au(t)\|_H$ влечёт ограниченность $\|u(t)\|_H$. Таким образом, решения невозмущённой задачи (5), (6) остаются ограниченными по t . Возможный рост решений возмущённой задачи связан с действием периодического возмущения в уравнении (1).

Объясним понятия непрерывности и дифференцируемости по времени t для функций $u(t)$ со значениями в $D(A)$ и $D(A^2)$. Для этого рассмотрим данные области определения как гильбертовы пространства со следующими нормами:

$$\begin{aligned} H_1 &:= D(A), \quad \|x\|_1^2 := \|x\|_H^2 + \|Ax\|_H^2, \\ H_2 &:= D(A^2), \quad \|x\|_2^2 := \|x\|_H^2 + \|A^2 x\|_H^2. \end{aligned}$$

Очевидно, что вложения $H_1 \hookrightarrow H$ и $H_2 \hookrightarrow H$ непрерывны, поскольку $\|x\|_H \leq \|x\|_1$ для $x \in H_1$ и $\|x\|_H \leq \|x\|_2$ для $x \in H_2$. Кроме того, $H_2 \subset H_1$, причём вложение $H_2 \hookrightarrow H_1$ непрерывно. В силу самосопряжённости и положительности оператора A , для $x \in D(A^2)$ имеем

$$\|Ax\|_H^2 = \langle Ax, Ax \rangle_H = \langle A^2 x, x \rangle_H \leq \|A^2 x\|_H \|x\|_H \leq \frac{1}{2} (\|A^2 x\|_H^2 + \|x\|_H^2),$$

откуда следует оценка

$$\|x\|_1 \leq C \|x\|_2, \quad x \in H_2,$$

где $C > 0$ — некоторая константа.

Далее будет использоваться свойство плотности множества H_2 в H_1 по норме $\|\cdot\|_1$, то есть

$$H_1 = \overline{H_2}^{\|\cdot\|_1}, \quad (8)$$

где $\overline{H_2}^{\|\cdot\|_1}$ обозначает замыкание множества H_2 по норме $\|\cdot\|_1$.

Докажем свойство (8). Пусть $x \in H_1$ и $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$, $x_n = \langle x, \varphi_n \rangle_H$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \nu_n^2) |x_n|^2 < \infty.$$

Для $t > 0$ по определению положим

$$x_t := e^{-tA} x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t\nu_n} x_n \varphi_n.$$

В силу равенства Парсеваля (см. (3)) и того, что $M_t := \sup_{\lambda \geq 0} \lambda^2 e^{-t\lambda} < \infty$, имеем

$$\|A^2 x_t\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^4 e^{-2t\nu_n} |x_n|^2 \leq M_t^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Следовательно, $x_t \in H_2$. Кроме того,

$$\|x_t - x\|_1^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \nu_n^2) |e^{-t\nu_n} - 1|^2 |x_n|^2.$$

Для каждого n множитель $|e^{-t\nu_n} - 1|^2$ стремится к нулю при $t \rightarrow +0$ и не превосходит 1, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \nu_n^2) |x_n|^2$ сходится. По теореме о мажорируемой сходимости для рядов получаем $\|x_t - x\|_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$, т. е. свойство (8) доказано.

Решением задачи (1), (5) на отрезке $[0, T]$ будем называть функцию

$$u(t) \in C([0, T]; H_2) \cap C^1([0, T]; H_1) \cap C^2([0, T]; H), \quad (9)$$

удовлетворяющую уравнению (1) как равенству в пространстве H при всех $t \in [0, T]$, и начальным условиям (5). Здесь условие $u(t) \in C^1([0, T]; H_1)$ означает дифференцируемость по t в норме $\|\cdot\|_1$. Поскольку отображение $A: H_1 \rightarrow H$ непрерывно ($\|Ax\|_H \leq \|x\|_1$), то из условия $u(t) \in C^1([0, T]; H_1)$ следует, что $Au \in C^1([0, T]; H)$, причём для всех $t \in [0, T]$ выполнено

$$(Au(t))' = Au'(t).$$

1.4. Предположения о правой части $F(\omega t, u(t))$

Пусть отображение $F(\theta, u)$, $\theta = \omega t$, определено на $\mathbb{R} \times H_1$ и принимает значения в H . Предположим, что $F(\theta, u)$ непрерывно по совокупности аргументов и является 2π -периодическим по θ .

Для локальной корректности задачи Коши (1), (5) будем использовать условие гладкости правой части, применяемое при приведении абстрактного уравнения Матъё — Хилла к системе первого порядка в работе [6]. Предположим, что в некоторой окрестности нуля по переменной

u отображение $u \mapsto F(\theta, u)$ имеет непрерывный дифференциал Фреше как отображение из H_1 в H .

Далее будем использовать значение правой части и её дифференциала при $u = 0$. Положим

$$g(\theta) := F(\theta, 0) \in H, \quad B(\theta) := D_u F(\theta, 0): H_1 \rightarrow H.$$

Будем предполагать, что оператор $B(\theta)$ допускает продолжение до ограниченного линейного оператора на все пространство H . Это продолжение также будем обозначать через $B(\theta)$. Тогда $B(\theta) \in \mathcal{L}(H)$. Отметим, что это является дополнительным условием на линейную по u часть возмущения: оно означает ограниченность $B(\theta)$ относительно нормы пространства H , а не только относительно нормы H_1 . Поскольку H_1 плотно вложено в H , такое продолжение, если оно существует, единственно. Будем также предполагать, что отображение $\theta \mapsto B(\theta)$, понимаемое как функция со значениями в $\mathcal{L}(H)$, непрерывно и 2π -периодично по θ .

Тогда справедливо разложение

$$F(\theta, u) = g(\theta) + B(\theta)u + R(\theta, u), \quad (10)$$

где остаточный член $R(\theta, u) \in H$ удовлетворяет следующему условию: для каждого фиксированного θ

$$\frac{\|R(\theta, u)\|_H}{\|u\|_1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|u\|_1 \rightarrow 0.$$

Иными словами, разложение (10) понимается как разложение по переменной u в окрестности нуля при фиксированном значении параметра θ .

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МЕДЛЕННЫХ АМПЛИТУД. РЕЗОНАНСНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Так как A является самосопряжённым положительным оператором, операторная экспонента e^{itA} определяется по спектральной теореме и образует сильно непрерывную унитарную группу в H ; используемые ниже свойства этой группы и формула сильной производной на $D(A)$ следуют из стандартной теории однопараметрических групп, порождённых самосопряжёнными операторами (см. [17, гл. IX, разд. 1, пример 1.6, стр. 485–486]). В частности, для каждого $t \in \mathbb{R}$ оператор e^{itA} принадлежит $\mathcal{L}(H)$, и справедливы равенства

$$e^{0 \cdot iA} = I, \quad (e^{itA})^* = e^{-itA}, \quad \|e^{itA}u\|_H = \|u\|_H, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in H.$$

Для произвольного $u_0 \in H$ функция $v(t) = e^{itA}u_0$ является корректно определённой и сильно непрерывной по t функцией со значениями в H . Если дополнительно $u_0 \in D(A)$, то эта функция является классическим решением задачи Коши

$$v'(t) = iAv(t), \quad v(0) = u_0.$$

Кроме того, для каждого фиксированного $u \in D(A)$ отображение $t \mapsto e^{\pm itA}u$ дифференцируемо и выполняется формула сильной производной

$$\frac{d}{dt}(e^{\pm itA}u) = \pm iAe^{\pm itA}u. \quad (11)$$

2.1. Сведение задачи (1), (5) к эквивалентной системе первого порядка

Пусть $u(t)$ принадлежит классу (9). Тогда для всех $t \in [0, T]$ имеем $u(t) \in D(A^2) \subset D(A)$, $u'(t) \in D(A)$, и поэтому выражения $Au(t)$, $u'(t) + iAu(t)$, $u'(t) - iAu(t)$ корректно определены как элементы пространства H . Введём функции $x(t)$ и $y(t)$ со значениями в H по формулам

$$x(t) := e^{-itA}(u'(t) + iAu(t)), \quad y(t) := e^{itA}(u'(t) - iAu(t)). \quad (12)$$

Умножим в (12) первое равенство на e^{itA} , а второе — на e^{-itA} . Тогда получим

$$e^{itA}x(t) = u'(t) + iAu(t), \quad e^{-itA}y(t) = u'(t) - iAu(t).$$

Складывая и вычитая эти равенства, имеем

$$u'(t) = \frac{1}{2}(e^{itA}x(t) + e^{-itA}y(t)), \quad Au(t) = \frac{1}{2i}(e^{itA}x(t) - e^{-itA}y(t)). \quad (13)$$

Так как $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, то из второго равенства (13) следует представление

$$u(t) = \frac{1}{2i}A^{-1}(e^{itA}x(t) - e^{-itA}y(t)). \quad (14)$$

Дифференцируя соотношения (12) и используя формулу сильной производной (11), получаем

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{-itA}(u'(t) + iAu(t))) = e^{-itA}(u''(t) + A^2u(t)), \\ y'(t) &= \frac{d}{dt}(e^{itA}(u'(t) - iAu(t))) = e^{itA}(u''(t) + A^2u(t)). \end{aligned}$$

Если функция $u(t)$ является решением задачи (1), (5), то имеем систему

$$x'(t) = \varepsilon e^{-itA}F(\omega t, u(t)), \quad y'(t) = \varepsilon e^{itA}F(\omega t, u(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

где $u(t)$ выражается через $x(t)$, $y(t)$ по формуле (14). Начальные значения для x , y находятся из (12) при $t = 0$:

$$x(0) = u^1 + iAu^0, \quad y(0) = u^1 - iAu^0. \quad (16)$$

Таким образом, всякому решению u задачи (1), (5) соответствует решение x, y задачи Коши (15), (16).

Обратно, пусть $x(t)$, $y(t)$ удовлетворяют системе (15) с начальными данными (16), а функция $u(t)$ определяется формулой (14). Тогда из системы (15) следует, что при дифференцировании (14) слагаемые, содержащие $x'(t)$ и $y'(t)$, взаимно сокращаются, поэтому выполняется первое равенство (13). Второе равенство (13) следует непосредственно из (14). Дифференцируя первое равенство (13), используя систему (15) и второе равенство (13), получаем

$$u''(t) + A^2u(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t)).$$

Кроме того, начальные условия (5) восстанавливаются из (16). Следовательно, задача (1), (5) эквивалентна задаче Коши (15), (16).

Из условий на F , сформулированных в пункте 1.4, следует локальная липшицевость правой части системы (15) по переменным x и y на каждой ограниченной области пространства $H \times H$. Поэтому по теореме Коши–Липшица задача (15), (16) имеет единственное локальное решение, а формула (14) определяет соответствующее единственное локальное решение задачи (1), (5).

Подставляя разложение (10) в систему (15) и используя представление (14), получаем следующую систему для $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \varepsilon e^{-itA}(g(\omega t) + B(\omega t)u(t) + R(\omega t, u(t))), \\ y'(t) &= \varepsilon e^{itA}(g(\omega t) + B(\omega t)u(t) + R(\omega t, u(t))), \end{aligned} \quad (17)$$

где $u(t)$ выражается через $x(t)$, $y(t)$ по формуле (14).

2.2. Координатная форма системы и частотные комбинации

Для каждого фиксированного $t \in [0, T]$ функции $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ являются элементами пространства H . Поэтому из (3) имеем единственные разложения в ряды Фурье по базису $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$:

$$x(t) = \sum_{n \geq 1} x_n(t) \varphi_n, \quad y(t) = \sum_{n \geq 1} y_n(t) \varphi_n, \quad u(t) = \sum_{n \geq 1} u_n(t) \varphi_n,$$

где

$$x_n(t) = \langle x(t), \varphi_n \rangle_H, \quad y_n(t) = \langle y(t), \varphi_n \rangle_H, \quad u_n(t) = \langle u(t), \varphi_n \rangle_H.$$

Коэффициенты $x_n(t)$, $y_n(t)$ будем называть амплитудными коэффициентами функций $x(t)$, $y(t)$. Из формул (13), (14) и равенства $e^{\pm itA} \varphi_n = e^{\pm i\nu_n t} \varphi_n$ получаем

$$u'_n(t) = \frac{1}{2} (e^{i\nu_n t} x_n(t) + e^{-i\nu_n t} y_n(t)), \quad u_n(t) = \frac{1}{2i\nu_n} (e^{i\nu_n t} x_n(t) - e^{-i\nu_n t} y_n(t)).$$

Умножим систему (17) скалярно на φ_n . Получим координатную форму системы (17) для амплитудных коэффициентов:

$$x'_n(t) = \varepsilon e^{-i\nu_n t} f_n(t), \quad y'_n(t) = \varepsilon e^{i\nu_n t} f_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (18)$$

где

$$f_n(t) = \langle g(\omega t), \varphi_n \rangle_H + \langle B(\omega t)u(t), \varphi_n \rangle_H + \langle R(\omega t, u(t)), \varphi_n \rangle_H.$$

Начальные значения для координатной системы получаются из (16):

$$x_n(0) = \langle u^1 + iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad y_n(0) = \langle u^1 - iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для построения конечномерной усреднённой системы первого приближения далее полагаем, что $g(\theta)$ и $B(\theta)$ являются тригонометрическими полиномами по переменной θ . Тогда существует конечное множество $K \subset \mathbb{Z}$ такое, что

$$g(\theta) = \sum_{k \in K} g_k e^{ik\theta}, \quad B(\theta) = \sum_{k \in K} B_k e^{ik\theta}, \quad (19)$$

где $g_k \in H$, $B_k \in \mathcal{L}(H)$.

Рассмотрим линейный по u член в $f_n(t)$. Из (14) и (19) имеем

$$\langle B(\omega t)u(t), \varphi_n \rangle_H = \sum_{k \in K} e^{ik\omega t} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{2i\nu_p} (e^{i\nu_p t} x_p(t) - e^{-i\nu_p t} y_p(t)) \langle B_k \varphi_p, \varphi_n \rangle_H. \quad (20)$$

Подставляя разложение (20) в систему (18) и обозначая внешний индекс n через q , получаем четыре типа частотных комбинаций, встречающихся в показателях экспонент правых частей (18):

$$k\omega + \nu_p + \nu_q, \quad k\omega + \nu_p - \nu_q, \quad k\omega - \nu_p + \nu_q, \quad k\omega - \nu_p - \nu_q, \quad k \in K, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Именно комбинации (21) далее используются при выделении резонансных и нерезонансных слагаемых в системе (18).

2.3. Резонансные соотношения

Рассмотрим систему (18) при произвольном фиксированном $q \in \mathbb{N}$. Из разложений (19) и представления $u_p(t)$ в (14) следует, что линейный по u член в уравнении для $x'_q(t)$ содержит сумму слагаемых вида

$$\varepsilon \sum_{k \in K} \sum_{p \geq 1} \frac{\langle B_k \varphi_p, \varphi_q \rangle_H}{2i\nu_p} (e^{i(k\omega + \nu_p - \nu_q)t} x_p(t) - e^{i(k\omega - \nu_p - \nu_q)t} y_p(t)),$$

а в уравнении для $y'_q(t)$ содержится сумма слагаемых вида

$$\varepsilon \sum_{k \in K} \sum_{p \geq 1} \frac{\langle B_k \varphi_p, \varphi_q \rangle_H}{2i\nu_p} (e^{i(k\omega + \nu_p + \nu_q)t} x_p(t) - e^{i(k\omega - \nu_p + \nu_q)t} y_p(t)).$$

Поэтому в правых частях координатной системы (18) возникают множители $e^{i\Phi t}$, где Φ принимает одно из значений, перечисленных в (21). Свободный член $g(\omega t)$ даёт аналогичные осциллирующие множители с частотами $k\omega - \nu_q$ и $k\omega + \nu_q$; они отвечают внешним резонансам.

Согласно схеме усреднения, описанной в п. 1.1, в усреднённой системе первого приближения сохраняются слагаемые правых частей системы (18), имеющие ненулевое среднее по времени. Так как $g(\theta)$ и $B(\theta)$ являются тригонометрическими полиномами, после подстановки разложений (19) возникают конечные суммы слагаемых с множителями $e^{i\Phi t}$, где Φ принимает одно из значений, перечисленных в (21). По сказанному выше, среднее такого множителя отлично от нуля только при $\Phi = 0$. Поэтому резонансные соотношения возникают тогда, когда для некоторого набора индексов и некоторого $k \in K \setminus \{0\}$ одна из частотных комбинаций (21) обращается в нуль; остальные слагаемые относятся к нерезонансной части.

Выделим следующие виды резонансов:

1) **внешние резонансы**, связанные со свободным членом $g(\omega t)$:

$$k\omega = \nu_p, \quad k \in K \setminus \{0\}, \quad p \in \mathbb{N};$$

2) **основные параметрические резонансы**, задаваемые соотношением между внешней частотой и удвоенной собственной частотой:

$$k\omega = 2\nu_p, \quad k \in K \setminus \{0\}, \quad p \in \mathbb{N};$$

3) **комбинационные параметрические резонансы**, задаваемые соотношениями между внешней частотой и суммой или разностью двух различных собственных частот:

$$k\omega = \nu_p \pm \nu_q, \quad k \in K \setminus \{0\}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad p \neq q. \quad (22)$$

Далее рассматривается комбинационный резонанс: частота ω выбирается так, что внешние резонансы $k\omega = \pm \nu_q$ и основные параметрические резонансы $k\omega = 2\nu_q$, $k \in K$, $q \in \mathbb{N}$, не возникают. Поэтому дальнейшее исследование сосредоточено на резонансных соотношениях (22), а координатная система (18) используется для построения усреднённой системы первого приближения (см. [2], [19]).

3. АСИМПТОТИКА СПЕКТРА И КОНТРОЛЬ «МАЛЫХ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ»

В правых частях координатной системы (18) возникают частотные комбинации вида (21). Каждое слагаемое с такой комбинацией имеет вид произведения коэффициента, содержащего коэффициенты разложений (19), одного из амплитудных коэффициентов $x_p(t)$ или $y_p(t)$ и осциллирующего множителя $e^{i\Phi t}$, где Φ — одна из комбинаций (21).

При $\Phi = 0$ множитель $e^{i\Phi t}$ равен единице, поэтому такое слагаемое входит в усреднённую систему. При $\Phi \neq 0$ при интегрировании по времени t на отрезке $[0, t]$ возникает выражение

$$\int_0^t e^{i\Phi s} ds = \frac{e^{i\Phi t} - 1}{i\Phi}.$$

Поэтому для оценки вклада нерезонансных слагаемых необходимо контролировать величину $|\Phi|^{-1}$, то есть установить отделённость от нуля нерезонансных значений частотных комбинаций (21). Контроль таких делителей является стандартной частью обоснования усреднения в задачах параметрического резонанса (см. [20]).

Далее предполагаем, что собственные значения оператора A удовлетворяют асимптотике (4). Тогда существует $N_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\nu_n \geq \frac{c_1}{2} n, \quad n \geq N_0.$$

Используя эту оценку, докажем конечность резонансных наборов индексов и отделённость от нуля нерезонансных частотных комбинаций.

Лемма 3.1. *Для любых фиксированных $\Omega \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ множество пар*

$$S_+(\Omega, \delta) := \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |\nu_p + \nu_q - \Omega| < \delta\}$$

является конечным.

Доказательство. Пусть $p, q \geq N_0$. Тогда $\nu_p + \nu_q \geq \frac{c_1}{2}(p + q)$. Если $|\nu_p + \nu_q - \Omega| < \delta$, то $\nu_p + \nu_q < |\Omega| + \delta$, откуда $p + q$ ограничено сверху константой $\frac{2(|\Omega| + \delta)}{c_1}$. Значит, возможных пар (p, q) конечное число. Случаи, когда хотя бы один индекс не превышает N_0 , также, очевидно, дают лишь конечное число пар. $\square$

Из леммы 3.1 следует, что для каждого фиксированного k множество пар (p, q) , удовлетворяющих соотношению $k\omega = \nu_p + \nu_q$, конечно. Следовательно, существует $\delta_k^+ > 0$ такое, что для всех нерезонансных пар вне некоторого конечного множества выполнено

$$|k\omega - \nu_p - \nu_q| \geq \delta_k^+.$$

Для разностных комбинаций положим $\Omega = k\omega$ и рассмотрим выражения $\Omega - (\nu_p - \nu_q)$. Запишем асимптотику (4) в виде

$$\nu_n = c_1 n + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда вдоль диагоналей $p - q = t$ разности $\nu_p - \nu_q$ имеют предельные значения $c_1 t$. Поэтому введём множество

$$Z_{c_1} := \{c_1 t : t \in \mathbb{Z}\}.$$

Лемма 3.2. *Пусть $\Omega \in \mathbb{R} \setminus Z_{c_1}$. Тогда существуют число $\delta_-(\Omega) > 0$ и конечное множество пар индексов $M_-(\Omega) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ такие, что для всех $(p, q) \notin M_-(\Omega)$ выполнена оценка*

$$|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq \delta_-(\Omega).$$

Доказательство. Покажем, что для некоторых $N(\Omega) \in \mathbb{N}$ и $\delta(\Omega) > 0$ выполнено

$$|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq \delta(\Omega), \quad p, q \geq N(\Omega).$$

Положим $m = p - q$. Из $\nu_n = c_1 n + \varepsilon_n$ имеем

$$\nu_p - \nu_q = c_1 m + \varepsilon_p - \varepsilon_q.$$

Так как $\varepsilon_n \rightarrow 0$, существует $C > 0$, для которого $|\varepsilon_n| \leq C$. Поэтому

$$|\nu_p - \nu_q| \geq c_1 |m| - |\varepsilon_p - \varepsilon_q| \geq c_1 |m| - 2C.$$

Выберем $M \in \mathbb{N}$ так, что $c_1 |m| - 2C > |\Omega| + 1$ при $|m| > M$. Тогда при $|p - q| > M$

$$|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq |\nu_p - \nu_q| - |\Omega| > 1.$$

Значит, остаётся рассмотреть пары с $|p - q| \leq M$. Зафиксируем $m \in \{-M, \dots, M\}$. Если $p - q = m$, то $\nu_p - \nu_q = c_1 m + \varepsilon_p - \varepsilon_q$, и при $p, q \rightarrow \infty$ вдоль этой диагонали имеем $\nu_p - \nu_q \rightarrow c_1 m$. Поскольку $\Omega \notin Z_{c_1}$, для всех $|m| \leq M$ выполнено $\Omega \neq c_1 m$, поэтому

$$d := \min_{|m| \leq M} |\Omega - c_1 m| > 0.$$

Для каждого такого m существует $N_m \in \mathbb{N}$ такое, что при $p - q = m$ и $p, q \geq N_m$ выполнено $|\nu_p - \nu_q - c_1 m| < d/2$. Тогда

$$|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq |\Omega - c_1 m| - |\nu_p - \nu_q - c_1 m| \geq d/2.$$

Положим

$$N(\Omega) := \max_{|m| \leq M} N_m, \quad \delta(\Omega) := \min\{1, d/2\}.$$

Тогда $|\nu_p - \nu_q - \Omega| \geq \delta(\Omega)$ для всех $p, q \geq N(\Omega)$. Остаётся вынести в исключительное множество конечное число пар с малым индексом:

$$M_-(\Omega) := \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |p - q| \leq M, \min\{p, q\} < N(\Omega)\}, \quad \delta_-(\Omega) := \delta(\Omega).$$

Множество $M_-(\Omega)$ конечно, и для всех $(p, q) \notin M_-(\Omega)$ получаем требуемую оценку. Лемма доказана. $\square$

Замечание 3.1. Условие $\Omega \notin Z_{c_1}$ существенно: если $\Omega = c_1 m$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$, то при $q \rightarrow \infty$, $p = q + m$, вдоль диагонали $p - q = m$ имеем $\nu_p - \nu_q \rightarrow \Omega$, поэтому разностные знаменатели могут сколь угодно близко приближаться к нулю.

Из лемм 3.1 и 3.2 следует необходимый для первого приближения контроль малых знаменателей. Будем предполагать, что внешняя частота ω удовлетворяет условию

$$k\omega \notin Z_{c_1}, \quad k \in K \setminus \{0\}. \quad (23)$$

Следствие 3.1. Пусть выполнено условие (23). Тогда резонансных троек $(k, p, q) \in (K \setminus \{0\}) \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, для которых одна из частотных комбинаций (21) равна нулю, может быть только конечное число. Кроме того, существует $\delta^* > 0$ такое, что все нерезонансные значения этих комбинаций отделены от нуля величиной не меньше δ^* .

Доказательство. Для каждого фиксированного $k \in K \setminus \{0\}$ лемма 3.1 даёт требуемую оценку для суммарных комбинаций. Для разностных комбинаций применяем лемму 3.2 с $\Omega = k\omega$; условие $\Omega \notin Z_{c_1}$ при этом выполнено в силу (23). Оставшиеся пары индексов образуют конечное множество. В нём нулевые значения соответствуют резонансным тройкам, а среди ненулевых значений можно выбрать наименьшее по модулю. Поскольку множество $K \setminus \{0\}$ конечно, минимум всех полученных положительных оценок также положителен. Обозначим его через δ^* . Следствие 3.1 доказано. $\square$

По следствию 3.1 ненулевые комбинации из (21) при $k \in K \setminus \{0\}$ отделены от нуля. Поэтому в резонансную часть первого приближения входят только слагаемые с нулевой частотной комбинацией.

4. УСРЕДНЁННАЯ РЕЗОНАНСНАЯ СИСТЕМА ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ КОМБИНАЦИОННОМ РЕЗОНАНСЕ

Пусть внешняя частота $\omega > 0$ удовлетворяет условию (23). Далее учитываются суммарные и разностные комбинационные резонансы; возможные внешние и основные параметрические резонансы в эту систему не включаются. Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_+ &= \{(k, p, q) \mid k \in K \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{N}, p \neq q, k\omega = \nu_p + \nu_q\}, \\ \mathcal{R}_- &= \{(k, p, q) \mid k \in K \setminus \{0\}, p, q \in \mathbb{N}, p \neq q, k\omega = \nu_p - \nu_q\}.\end{aligned}\tag{24}$$

По следствию 3.1 множества $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ конечны. Обозначим

$$I_R = \{n \in \mathbb{N} \mid n = p \text{ или } n = q \text{ для некоторой тройки } (k, p, q) \in \mathcal{R}_+ \cup \mathcal{R}_-\}.$$

Усреднённая система строится для амплитудных коэффициентов $x_n(t)$, $y_n(t)$, $n \in I_R$, с начальными данными

$$x_n(0) = \langle u^1 + iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad y_n(0) = \langle u^1 - iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad n \in I_R.$$

Для тройки $(k, p, q) \in \mathcal{R}_+$ вклад в уравнения для x_p, y_p, x_q, y_q имеет вид

$$\begin{aligned}x'_p(t) &= -\varepsilon \frac{1}{2i\nu_q} \langle B_k \varphi_q, \varphi_p \rangle_H y_q(t), \\ x'_q(t) &= -\varepsilon \frac{1}{2i\nu_p} \langle B_k \varphi_p, \varphi_q \rangle_H y_p(t), \\ y'_p(t) &= \varepsilon \frac{1}{2i\nu_q} \langle B_{-k} \varphi_q, \varphi_p \rangle_H x_q(t), \\ y'_q(t) &= \varepsilon \frac{1}{2i\nu_p} \langle B_{-k} \varphi_p, \varphi_q \rangle_H x_p(t).\end{aligned}\tag{25}$$

Если один и тот же индекс n встречается в нескольких тройках из $\mathcal{R}_+$, то в уравнениях для $x_n(t)$, $y_n(t)$ суммируются слагаемые, полученные по формуле (25) для этих троек.

Для тройки $(k, p, q) \in \mathcal{R}_-$ получаем систему

$$\begin{aligned}x'_p(t) &= \varepsilon \frac{1}{2i\nu_q} \langle B_k \varphi_q, \varphi_p \rangle_H x_q(t), \\ x'_q(t) &= \varepsilon \frac{1}{2i\nu_p} \langle B_{-k} \varphi_p, \varphi_q \rangle_H x_p(t), \\ y'_p(t) &= -\varepsilon \frac{1}{2i\nu_q} \langle B_{-k} \varphi_q, \varphi_p \rangle_H y_q(t), \\ y'_q(t) &= -\varepsilon \frac{1}{2i\nu_p} \langle B_k \varphi_p, \varphi_q \rangle_H y_p(t).\end{aligned}\tag{26}$$

Полная усреднённая резонансная система первого приближения получается суммированием вкладов вида (25) по всем тройкам из $\mathcal{R}_+$ и вкладов вида (26) по всем тройкам из $\mathcal{R}_-$. Так как множества $\mathcal{R}_+$ и $\mathcal{R}_-$ конечны, система конечномерна: для каждого $n \in I_R$ она содержит уравнения для двух амплитудных коэффициентов $x_n(t)$ и $y_n(t)$.

Первое приближение резонансной части решения имеет вид

$$u^{(1)}(t) = \sum_{n \in I_R} u_n^{(1)}(t) \varphi_n, \quad (27)$$

где

$$u_n^{(1)}(t) = \frac{1}{2i\nu_n} (e^{i\nu_n t} x_n(t) - e^{-i\nu_n t} y_n(t)), \quad n \in I_R. \quad (28)$$

Если $I_R = \{p, q\}$, то

$$u^{(1)}(t) = u_p^{(1)}(t) \varphi_p + u_q^{(1)}(t) \varphi_q.$$

В общем случае сумма в (27) берётся по всем $n \in I_R$. Остаётся обосновать связь построенного первого приближения с решениями исходной задачи.

5. ОБОСНОВАНИЕ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть $u(t)$ — точное решение задачи (1), (5) на промежутке $0 \leq t \leq T/\varepsilon$, а $u^{(1)}(t)$ задано формулами (27), (28). Амплитуды $x_n(t)$, $y_n(t)$, $n \in I_R$, определяются конечной усреднённой системой, полученной суммированием слагаемых (25), (26) по тройкам из $\mathcal{R}_+$, $\mathcal{R}_-$.

Предположим, что начальные данные задачи (1), (5) имеют вид

$$u^0 = \sum_{n \in I_R} u_n^0 \varphi_n, \quad u^1 = \sum_{n \in I_R} u_n^1 \varphi_n.$$

Начальные значения амплитуд задаём по формулам (16):

$$x_n(0) = \langle u^1 + iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad y_n(0) = \langle u^1 - iAu^0, \varphi_n \rangle_H, \quad n \in I_R.$$

Тогда из (27), (28) следует

$$u^{(1)}(0) = u(0), \quad (u^{(1)})'(0) = u'(0). \quad (29)$$

Разность $u(t) - u^{(1)}(t)$ будем называть погрешностью первого усреднённого приближения. При вычитании системы, построенной по формулам (25), (26), из полной координатной системы (18) слагаемые, заданные резонансными условиями (22) и множествами (24), сокращаются. В уравнении для погрешности остаются нерезонансные слагаемые с ненулевыми частотными комбинациями (21) и остаточные нелинейные члены, возникающие из $R(\omega t, u(t))$ и $R(\omega t, u^{(1)}(t))$. Нерезонансные частотные комбинации отделены от нуля по следствию 3.1. Для остаточных членов предполагаем, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $C_R > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq t \leq T/\varepsilon$ выполнена оценка

$$\|R(\omega t, u(t))\|_H + \|R(\omega t, u^{(1)}(t))\|_H \leq C_R \varepsilon. \quad (30)$$

Замечание 5.1. Оценка (30) не исключает нелинейные правые части в уравнении (1). Она накладывается только на остаток R , не включённый в первое приближение, и проверяется вдоль сравниваемых траекторий $u(t)$, $u^{(1)}(t)$. Например, если при $H = L^2(a, b)$ остаток имеет вид $R(\theta, u)(x) = a(\theta, x)u^2(x)$, где a ограничена, то $\|R(\theta, u)\|_H \leq C\|u\|_{H_1}^2$. Поэтому условие (30) выполняется, когда соответствующий остаточный член на рассматриваемом промежутке имеет порядок $O(\varepsilon)$.

Докажем оценку погрешности первого приближения.

Теорема 5.1. Пусть оператор A удовлетворяет условиям пункта 1.2, его собственные значения ν_n удовлетворяют асимптотике (4), а правая часть F имеет вид (10). Пусть частота $\omega > 0$ удовлетворяет условию (23), выполнены резонансные соотношения (22), и первое приближение $u^{(1)}(t)$ построено по формулам (27), (28) с начальными данными, согласованными с точным решением в смысле (29). Если точное решение $u(t)$ задачи (1), (5) и приближение $u^{(1)}(t)$ определены на промежутке $0 \leq t \leq T/\varepsilon$, а для остаточных членов выполнена оценка (30), то существует константа $C > 0$, не зависящая от ε , такая, что

$$\|u(t) - u^{(1)}(t)\|_H \leq C\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}. \quad (31)$$

Доказательство. Рассмотрим погрешность первого приближения $u(t) - u^{(1)}(t)$. В силу (29) она имеет нулевые начальные данные. Чтобы получить дифференциальную систему для этой погрешности, вычтем систему, построенную по формулам (25), (26), из полной координатной системы (18). В правой части полученной системы резонансные слагаемые, заданные условиями (22) и множествами (24), сокращаются. Нерезонансные слагаемые содержат ненулевые частотные комбинации (21), которые по следствию 3.1 отделены от нуля; поэтому возникающие при интегрировании осциллирующие множители равномерно ограничены на $0 \leq t \leq T/\varepsilon$.

Остаточные нелинейные члены оцениваются с помощью неравенства (30). Так как в системе для амплитуд правая часть умножается на ε , их вклад в уравнение для погрешности приближения имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Поэтому после перехода к интегральной форме задачи Коши (см. [9]) получаем

$$\|u(t) - u^{(1)}(t)\|_H \leq C_1\varepsilon^2 t + C_2\varepsilon \int_0^t \|u(s) - u^{(1)}(s)\|_H ds, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon}, \quad (32)$$

где константы C_1, C_2 не зависят от ε .

Применяя к (32) неравенство Гронуолла, получаем

$$\|u(t) - u^{(1)}(t)\|_H \leq C\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{\varepsilon},$$

где, например, $C = C_1 T e^{C_2 T}$. Тем самым доказана оценка (31). $\square$

Оценка (31) показывает, что построенное первое приближение (27), (28) описывает решение задачи (1), (5) с погрешностью порядка $O(\varepsilon)$ на промежутке $0 \leq t \leq T/\varepsilon$ при начальных данных из конечномерного резонансного подпространства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован комбинационный параметрический резонанс для нелинейного уравнения Матьё — Хилла в гильбертовом пространстве H при периодическом возмущении с частотой $\omega > 0$. Резонансные условия имеют вид $k\omega = \nu_p \pm \nu_q$, $p \neq q$, $k \in K \setminus \{0\}$, и описывают взаимодействие различных собственных частот невозмущённой задачи. Для периодического возмущения доказана отделённость нерезонансных комбинаций от нуля. В почти-периодическом случае возникает более общий набор временных частот, поэтому контроль малых знаменателей требует отдельного условия отделённости от нуля; этот случай является естественным продолжением настоящей работы.

Полученные результаты дополняют статью [6], где основное внимание уделялось основным параметрическим резонансам. Здесь тот же подход применяется к комбинационному параметрическому резонансу, что позволяет описывать эффекты, связанные с суммами и разностями этих частот.

Автор выражает благодарность В. С. Белоносову за постановку задачи и внимание к работе, а также рецензенту за ценные замечания, позволившие улучшить изложение статьи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках подготовки кандидатской диссертации в аспирантуре Новосибирского государственного университета. Других источников финансирования проведения или руководства данным исследованием не было.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients. V. 1, 2. N. Y.: Wiley, 1975.
2. Magnus W., Winkler S. Hill's Equation. N. Y.: Interscience Publ., 1966.
3. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985.
4. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. N. Y.: Wiley, 1979.
5. Maddi J., Coste C., Saint Jean M. Parametric resonance in a conservative system of coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. E. 2022. V. 105, N 5. Article number 054208; DOI: 10.1103/PhysRevE.105.054208
6. Белоносов В.С. Асимптотический анализ параметрической неустойчивости нелинейных гиперболических уравнений // Мат. сб. 2017. Т. 208, № 8. С. 4–30; DOI: 10.4213/sm8883
7. Verhulst F., Tuwankotta J.M. A Parametrically excited nonlinear wave equation // Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Advanced Structured Materials. 2020. V. 139. P. 155–169; DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8_11
8. Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. N. Y.: Gordon and Breach, 1962.
9. Sanders J.A., Verhulst F., Murdock J. Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems. 2nd ed. N. Y.: Springer, 2007.
10. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику: приближённые и асимптотические методы нелинейной механики. Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
11. Люлько Н.А. Неустойчивость нелинейной системы двух осцилляторов при основном и комбинационном резонансах // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2015. Т. 55, № 1. С. 56–73; DOI: 10.7868/S0044466915010160
12. Belonosov V.S. Nonlocal problems of asymptotic methods of perturbation theory // In: Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy. Cham: Springer, 2020. P. 7–12; DOI: 10.1007/978-3-030-38870-6_2
13. Belonosov V.S. Nonlocal approach to asymptotic methods of perturbation theory // International Conference PDEs and Mathematical Hydrodynamics: in Honor of V. A. Solonnikov's 85th Birthday. Abstracts. St. Petersburg, 2018. P. 5–6.
14. El-Dib Y.O., Alrowaily A.W., Tiofack C.G.L., El-Tantawy S.A. Resonance simulation of the coupled nonlinear Mathieu's equation // AIP Advances. 2023. V. 13, N 8. Article number 085032; DOI: 10.1063/5.0166730
15. Raj S.K., Sahoo B., Nayak A.R., Panda L. Multi-scale analysis for dynamic stability of an axially accelerating viscoelastic beam subjected to combination parametric resonance // J. Vib. Control. 2025. V. 31, N 13–14. P. 2716–2733; DOI: 10.1177/10775463241260987

16. *Li Z., Li Y., Yu H., Hu Y.* Nonlinear combination resonance analysis of parametric-forced excitation for an axially moving piezoelectric rectangular thin plate in thermal-electromechanical coupling field // *Thin-Walled Structures*. 2024. V. 200. Article number 111941; DOI: 10.1016/j.tws.2024.111941
17. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verl., 1980.
18. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
19. *Фомин В.Н.* Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределённых системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
20. *Белоносов В.С.* Спектральные свойства обобщённых функций и асимптотические методы теории возмущений // *Мат. сб.* 2012. Т. 203, № 3. С. 3–22; DOI: 10.4213/sm7812

UDC 517.938:517.984

COMBINATIONAL PARAMETRIC RESONANCE FOR A NONLINEAR MATHIEU–HILL EQUATION IN A HILBERT SPACE

© 2026 A. G. Shvets

*Novosibirsk State University,
Pirogov st., 1, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: a.shvets1@g.nsu.ru

Received 27.04.2026, revised 11.06.2026, accepted 15.07.2026

Abstract. Using the Krylov–Bogolyubov–Mitropolsky averaging method, this paper studies combinational parametric resonance in a Hilbert space H for a nonlinear Mathieu–Hill equation of the form $u''(t) + A^2 u(t) = \varepsilon F(\omega t, u(t))$, where A^2 is a self-adjoint positive operator in H with compact resolvent. The right-hand side $\varepsilon F(\omega t, u(t))$ is assumed to be a time-periodic perturbation with frequency $\omega > 0$, and $\varepsilon > 0$ is a small scalar parameter. It is shown that, in the first approximation, alongside principal parametric resonances, combinational resonances arise, determined by the resonant relations $k\omega = \nu_p \pm \nu_q$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $p \neq q$, where ν_n are the eigenvalues of the operator $A = (A^2)^{\frac{1}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$. In the case of combinational resonance, conditions are established for finiteness of the resonant index sets (p, q) for a fixed frequency ω , which ensures separation of the nonresonant frequency combinations from zero. An averaged finite-dimensional resonant system of the first approximation is also constructed, and it is proved that solutions of the original equation are approximated by solutions of the constructed averaged system with an $O(\varepsilon)$ error estimate in the norm of H on an interval of length T/ε .

Keywords: Mathieu–Hill equation, Sturm–Liouville operator, combinational parametric resonance, averaging method, averaged resonant system of the first approximation.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2026.29.208

REFERENCES

1. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients. Vols. 1 and 2. N. Y.: Wiley, 1975.
2. Magnus W., Winkler S. Hill's Equation. N. Y.: Interscience Publ., 1966.
3. Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1997.
4. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. N. Y.: Wiley, 1979.
5. Maddi J., Coste C., Saint Jean M. Parametric resonance in a conservative system of coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. E*, 2022, Vol. 105, No. 5, Article number 054208; DOI: 10.1103/PhysRevE.105.054208
6. Belonosov V.S. Asymptotic analysis of the parametric instability of nonlinear hyperbolic equations. *Sbornik: Mathematics*, 2017, Vol. 208, No. 8, pp. 1088–1112; DOI: 10.1070/SM8883
7. Verhulst F., Tuwankotta J.M. A parametrically excited nonlinear wave equation. *Nonlinear Dynamics of Discrete and Continuous Systems. Advanced Structured Materials*, 2020, Vol. 139, pp. 155–169; DOI: 10.1007/978-3-030-53006-8_11
8. Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. N. Y.: Gordon and Breach, 1962.

9. Sanders J.A., Verhulst F., Murdock J. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. 2nd ed. N. Y.: Springer, 2007.
10. Krylov N.M., Bogolyubov N.N. *Vvedenie v nelineinuyu mekhaniku: priblizhennyye i asimptoticheskiye metody nelineinoy mekhaniki* [Introduction to nonlinear mechanics: approximate and asymptotic methods of nonlinear mechanics]. Kiev: AS Ukrainian SSR Publ. House, 1937 (in Russian).
11. Lyul'ko N.A. Instability of a nonlinear system of two oscillators under main and combination resonances. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2015, Vol. 55, No. 1, pp. 53–70; DOI: 10.1134/S0965542515010169
12. Belonosov V.S. Nonlocal problems of asymptotic methods of perturbation theory. In: *Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy*. Cham: Springer, 2020, pp. 7–12; DOI: 10.1007/978-3-030-38870-6_2
13. Belonosov V.S. Nonlocal approach to asymptotic methods of perturbation theory. *International Conference PDEs and Mathematical Hydrodynamics: in Honor of V. A. Solonnikov's 85th Birthday*. Abstracts. St. Petersburg, 2018, pp. 5–6.
14. El-Dib Y.O., Alrowaily A.W., Tiofack C.G.L., El-Tantawy S.A. Resonance simulation of the coupled nonlinear Mathieu's equation. *AIP Advances*, 2023, Vol. 13, No. 8, Article number 085032; DOI: 10.1063/5.0166730
15. Raj S.K., Sahoo B., Nayak A.R., Panda L. Multi-scale analysis for dynamic stability of an axially accelerating viscoelastic beam subjected to combination parametric resonance. *J. Vib. Control*, 2025, Vol. 31, No. 13–14, pp. 2716–2733; DOI: 10.1177/10775463241260987
16. Li Z., Li Y., Yu H., Hu Y. Nonlinear combination resonance analysis of parametric-forced excitation for an axially moving piezoelectric rectangular thin plate in thermal-electromechanical coupling field. *Thin-Walled Structures*, 2024, Vol. 200, Article number 111941; DOI: 10.1016/j.tws.2024.111941
17. Kato T. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verl., 1980.
18. Levitan B.M., Sargsyan I.S. *Operatory Shturma–Liuvillya i Diraka* [Sturm–Liouville and Dirac Operators]. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
19. Fomin V.N. *Matematicheskaya teoriya parametricheskogo rezonansa v lineinykh raspredelennykh sistemakh* [Mathematical theory of parametric resonance in linear distributed systems]. Leningrad: Leningrad State University Press, 1972 (in Russian).
20. Belonosov V.S. The spectral properties of distributions and asymptotic methods in perturbation theory. *Sbornik: Mathematics*, 2012, Vol. 203, No. 3, pp. 307–325; DOI: 10.1070/SM2012v203n03ABEH004224

СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ
ИНДУСТРИАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

2026. Том 29, № 2

Зав. редакцией Т. В. Бугуева

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86274 от 02.11.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-szim.ru.

Дата размещения в сети Интернет 14.08.2026 г.
Формат $60 \times 84^{1/8}$. Усл. печ. л. 14,1.
Объем 10 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090, Россия